

矩阵论课程设计

MUSIC 算法的实现

L^AT_EX by 3200101135 李坤林

2022 年 11 月 12 日

目录

1	背景介绍	2
2	实验原理	3
3	实验任务与要求	3
4	推导过程	4
5	实验结果与分析	5
5.1	问题 (2) 结果与分析	5
5.2	问题 (3) 结果与分析	5
5.2.1	多信号	5
5.2.2	小快拍	5
5.2.3	低信噪比	6
6	心得体会	6

1 背景介绍

目标方位估计指利用传感器阵列接收到的信号来估计目标源位置。以图 1 所示为例：在空间中布放一个 8 元水平线阵，传感器间距为 0.5m 均匀分布，以法线为基准，逆时针 $0^\circ \sim 90^\circ$ ，顺时针为 $0^\circ \sim -90^\circ$ 。假设信号源位于无穷远处，则信号源所发送的信号到达传感器时可以等效为从同一入射平面入射。则在图 1 中， $s(t)$ 为入射平面波（假设 $s(t)$ 的均值为 0）， $x_i(t) = 1, 2, \dots, 8$ 为各个阵元所接收信号， $d = 0.5m$ 为线性阵列的阵元间距， $\theta = -30^\circ$ 为入射波与竖直轴的夹角。

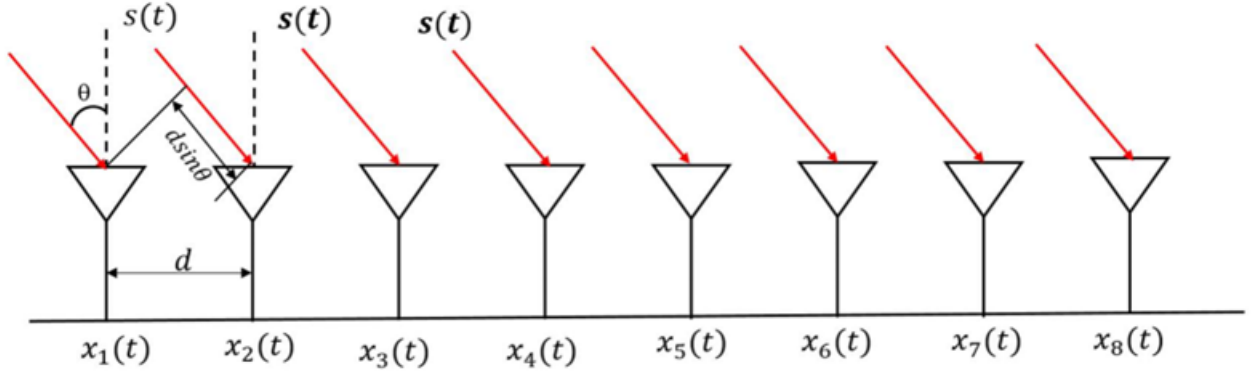


图 1 声传播环境

阵列接收信号可表示为：

$$\begin{cases} x_1(t) = s(t)e^{j\omega t} + w_1(t) \\ x_2(t) = s(t)e^{j\omega t}e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta} + w_2(t) \\ \dots \\ x_8(t) = s(t)e^{j\omega t}e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(8-1)d\sin\theta} + w_8(t) \end{cases} \quad (1)$$

将 (1) 表示为矩阵形式即为：

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_8(t)]^T \\ &= s(t)e^{j\omega t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta} \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(8-1)d\sin\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dots \\ w_8(t) \end{bmatrix} \\ &= s(t)\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{W}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{a}(\theta) = e^{j\omega t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta} \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(8-1)d\sin\theta} \end{bmatrix}_{8 \times 1}$ 为方向矢量， $\lambda = \frac{c}{f}$ 为波长。（在水中， c 一般取 $1500m/s$ ）

$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dots \\ w_8(t) \end{bmatrix}$ 为噪声矢量。

2 实验原理

MUSIC 算法是最先提出来的一种超分辨率的用于目标估计的算法。其基本思想是通过将阵列输出信号的协方差矩阵进行特征值分解，从而得到信号子空间和噪声子空间，同时利用两个子空间的正交性来构造空间谱函数，通过谱峰搜索来估计信号的波达方向。

MUSIC 算法原理介绍如下：

由阵列的协方差矩阵为：

$$\mathbf{R} = E [\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] \quad (3)$$

阵列的协方差矩阵 \mathbf{R} 经过特征值分解后如下：

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_w \mathbf{\Sigma}_w \mathbf{U}_w^H \quad (4)$$

其中 \mathbf{U}_s 是由较大特征值对应的特征向量张成的子空间，为信号子空间； \mathbf{U}_w 是由较小特征值对应的特征向量张成的子空间，为噪声子空间。根据两子空间相互正交，则可得：

$$\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_w = 0 \quad (5)$$

则可构造谱函数如下：

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_w\mathbf{U}_w^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (6)$$

通过对 θ 进行扫描，就可以通过式 (6) 找到谱函数中的峰值，即可找到信号的到达角，即进行最小化搜索：

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_w\mathbf{U}_w^H\mathbf{a}(\theta) \quad (7)$$

3 实验任务与要求

1. 运用所学知识，根据式 (4) 推导出式 (5)，并给出 8 个传感器情况下，信号子空间和噪声子空间的维度；
2. 依据图 1 的环境，使用 Matlab 实现 MUSIC 算法；
 - a. 输入信号: $s(t) = \sin(100\pi t)$
 - b. 噪声为高斯白噪声，信噪比为 20dB；
3. 如何克服 MUSIC 在低信噪比或/与小快拍数性能恶化的问题（低信噪比：-5dB 以下；少快拍数：快拍数少于阵元数）。另外，如果有两个及以上信号源，试分析信号源间相干或者不相干会对算法带来什么影响。（附加题，可不作，做了有加分）

4 推导过程

协方差矩阵:

$$\mathbf{R} = E [\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] \quad (8)$$

$$= \mathbf{a}(\theta)E [s^2(t)] \mathbf{a}^H(\theta) + E [\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^H(t)]^\psi \quad (9)$$

$$= \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_w \Sigma_w \mathbf{U}_w^H \quad (10)$$

其中 \mathbf{U}_s 是由较大特征值对应的特征向量张成的子空间，为信号子空间； \mathbf{U}_w 是由较小特征值对应的特征向量张成的子空间，为噪声子空间。根据两子空间相互正交：

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & \sigma_M^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Sigma_w = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

由此可以看出 \mathbf{U}_w 对于 \mathbf{R} 是一个特征向量，且对应的特征值为 σ_w^2 （这里假设噪声为高斯白噪声），对于 σ_w ， \mathbf{U}_w 同样是特征向量这样就有：

$$\mathbf{R}\mathbf{U}_w = \sigma_w^2 \mathbf{U}_w \quad (13)$$

$$= \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_w + \mathbf{U}_w \Sigma_w \mathbf{U}_w^H \mathbf{U}_w \quad (14)$$

$$= \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_w + \sigma_w^2 \mathbf{U}_w \quad (15)$$

即：

$$\mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_w = \mathbf{a}(\theta)E [s^2(t)] \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_w = \mathbf{0} \quad (16)$$

对 $\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_w$ 求导，易知上式为 0 的条件是：

$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_w = \mathbf{0} \quad (17)$$

在 8 个传感器情况下，噪声子空间的维度为 8，而信号子空间由于此时仅有 $x(t)$ 一个信号输入，信号子空间维度为 1。

5 实验结果与分析

5.1 问题 (2) 结果与分析

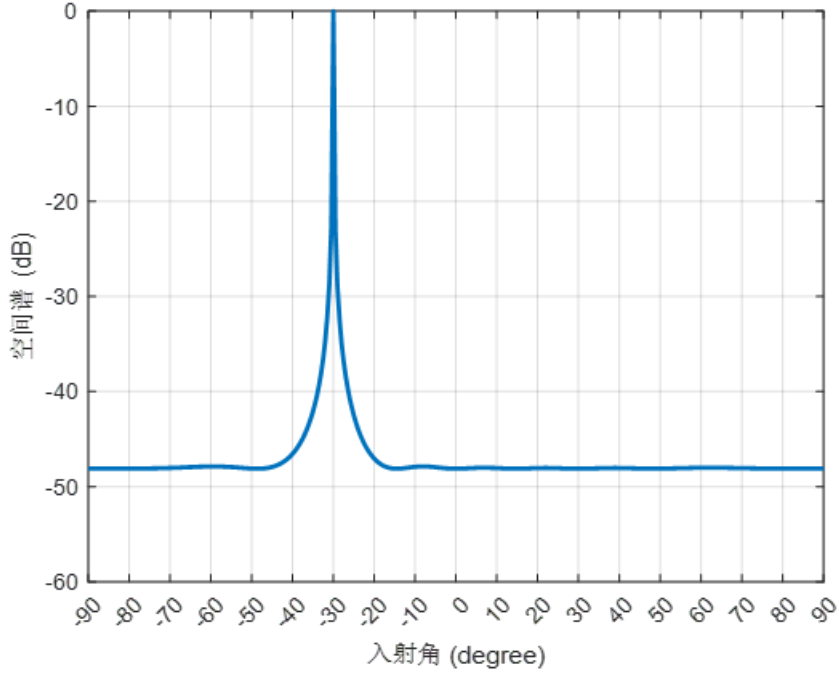


图 2 空间谱图

上图为得到结果，明显看到在 -30° 存在一个高峰，由此知道 -30° 即为波达角，但在仿真中我们只能计算出接受信号，因此在开始就用 -30° 来计算方向矢量 \mathbf{A} 进而得到接受矩阵 \mathbf{X} ，这样得到的图非常清楚。但在实际中，我们应该是直接得到接收矩阵进而来估计方向角。

5.2 问题 (3) 结果与分析

5.2.1 多信号

若有两个及以上信号源，当两信号源正相关时，算法的分辨性能会下降；当负相关时，在一定条件下，算法的分辨性能不降反升。

5.2.2 小快拍

在小快拍时，代码里 $R_{xx} = \frac{1}{N} (X^* X^H)$ ，这时协方差矩阵估计不准，算法性能下降，影响 DOA 估计结果；而在低信噪比的条件下，噪声子空间没有完全收敛，导致噪声子空间扩散，从而影响性能。参考 [1] 中结论，我们可以通过重构噪声子空间来克服该问题。以下为两种重构方法：

$$\tilde{\lambda} = \lambda_i + \beta \lambda_i \quad (18)$$

噪声子空间中，每个特征值所对应的特征向量对空间谱函数的贡献度有所不同。在小快拍数、低信噪比的条件下，可以通过调节校正值 β 来影响发散信号的发散程度，且 β 不会影响信号方向矢量，从而可以确保有稳定的信源数估计。之后构造新的噪声子空间：

$$G_N = [\tilde{\lambda}_{s+1} v_{s+1}, \tilde{\lambda}_{s+2} v_{s+2}, \dots, \tilde{\lambda}_M v_M] \quad (19)$$

5.2.3 低信噪比

直接构造噪声子空间：

$$G_N = [\lambda_{s+1}^n v_{s+1}, \lambda_{s+2}^n v_{s+2}, \dots, \lambda_M^n v_M] \quad (20)$$

n 为加权指数，用噪声特征值对特征向量进行加权，以使不同噪声功率的特征向量对 MUSIC 谱的作用不同。

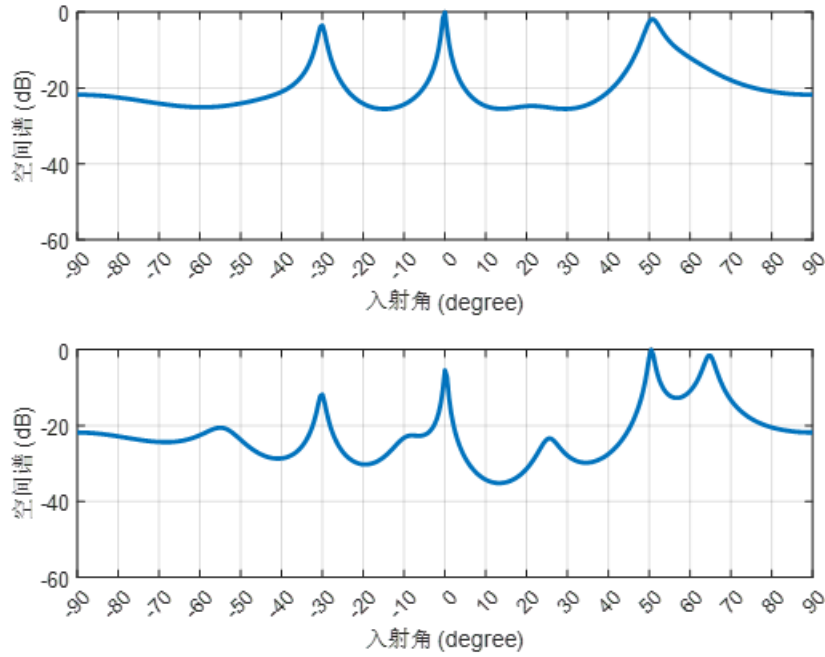


图 3 低信噪比下的谱图

信噪比为 1 上图为正常 MUSIC 下，下图为在使用上述方法后，原本应该有四个峰（-30,0,50,60）。上图无法分辨（50,60），下图虽有偏差但能分辨四个峰。

6 心得体会

说实话，这门课我学的不好。本学期选的课程太多，导致分身乏术，但这门课本身带给我的教育作用还是很大的。不仅帮我串联起了遗忘许久的线性代数知识，还帮助我了解了关于矩阵的基础算法，认识矩阵在多学科里的重要作用，对我在 SRTP 中的工作很有启发。如果假以时日，我肯定会更认真地再将这门课学习透彻，为我所用。

参考文献

- [1] 张家平, 刘青, 张洪顺, ZHANGJia-ping, LIUQing, and ZHANGHung-shun. 低信噪比中 music 算法研究. 通信技术, 42(1):87-89, 2009.