第二章

9. (1) $\mu_X(t)=E(X(t))=E(At+B)=\mu(t+1)$

$R_X(s,t)=E(X(s)X(t))=E(A^2st+AB(s+t)+B^2)$

$=st\,E(A^2)+(s+t)E(AB)+E(B^2)$

$=st[D(A)+E^2(A)]+(s+t)E(A)E(B)+D(B)+E^2(B)$

$=st(\sigma^2+\mu^2)+(s+t)\mu^2+\sigma^2+\mu^2$

$=\sigma^2(st+1)+(s+1)(t+1)\mu^2$

$C_X(s,t)=Cov(X(s),X(t))=E((As+B-E(As+B))(At+B-E(At+B)))$

$=E((As+B)(At+B)-\mu(s+1)(At+B)-\mu(t+1)(As+B)+\mu^2(s+1)(t+1))$

$=stE(A^2)+(s+t)E(A)\cdot E(B)+E(B^2)-\mu(s+1)E(At+B)-\mu(t+1)E(As+B)+\mu^2(s+1)(t+1)$

$=st(\mu^2+\sigma^2)+(s+t)\mu^2+\mu^2+\sigma^2-\mu^2(s+1)(t+1)$

$=\sigma^2(st+1)$

(2) $A\sim N(0,1)$ $B\sim N(0,1)$ $X(t)=tA+B$ 属加正态分布的线性加合

$\therefore$ $X(t)\sim N(0,t^2+1)$ 故$\{X(t)\}$是正态过程

$X(t)-X(s)=A(s-t)$ $X(t)-X(s)\sim N(0,(s-t)^2)$

$X(t)+X(s)=A(s+t)+2B$ $X(t)+X(s)\sim N(0,(s+t)^2+4)$

12. $\mu_Z(t)=E(a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t))$

$=a(t)E(X(t))+b(t)E(Y(t))+c(t)$

$=a(t)\mu_X(t)+b(t)\mu_Y(t)+c(t)$

$C_Z(s,t)=Cov(a(s)X(s)+b(s)Y(s)+c(s),\ a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t))$

$=E((a(s)X(s)+b(s)Y(s)+c(s)-(a(s)\mu_X(s)+b(s)\mu_Y(s)+c(s)))(a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t)-(a(t)\mu_X(t)+b(t)\mu_Y(t)+c(t))))$

$=E((a(s)X(s)+b(s)Y(s)+c(s))(a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t)))-(a(s)\mu_X(s)+b(s)\mu_Y(s)+c(s))(a(t)\mu_X(t)+b(t)\mu_Y(t)+c(t))$

$=a(s)a(t)E(X(s)X(t))+a(s)b(t)E(X(s)Y(t))+a(s)c(t)\mu_X(s)$

$+b(s)a(t)E(Y(s)X(t))+b(s)b(t)E(Y(s)Y(t))+b(s)c(t)\mu_Y(s)$

$+c(s)a(t)\mu_X(t)+c(s)b(t)\mu_Y(t)+c(s)c(t)$

$-(a(s)\mu_X(s)+b(s)\mu_Y(s)+c(s))(a(t)\mu_X(t)+b(t)\mu_Y(t)+c(t))$

$=a(s)a(t)(E(X(s)X(t))-\mu_X(s)\mu_X(t))+b(s)b(t)(E(Y(s)Y(t))-\mu_Y(s)\mu_Y(t))$

$+a(s)b(t)(E(X(s)Y(t))-\mu_X(s)\mu_Y(t))+b(s)a(t)(E(Y(s)X(t))-\mu_Y(s)\mu_X(t))$

$=a(s)a(t)C_X(s,t)+b(s)b(t)C_Y(s,t)+0$ (X与Y独立,故$E(X(s)Y(t))=\mu_X(s)\mu_Y(t)$,后者同理)

$=a(s)a(t)C_X(s,t)+b(s)b(t)C_Y(s,t)$

14. $\mu_Z(t)=E(X(t)Y(t))=E(X(t))\cdot E(Y(t))=\mu_X(t)\cdot\mu_Y(t)$

$R_Z(s,t)=E(X(s)Y(s)X(t)Y(t))=E((X(s)X(t))(Y(s)Y(t)))$

$=E(X(s)X(t))\cdot E(Y(s)Y(t))$

$=R_X(s,t)\cdot R_Y(s,t)$

$R_{XZ}(s,t)=E(X(s)X(t)Y(t))=R_X(s,t)\mu_Y(t)$

第三章

3. $L_{n+1}=\begin{cases}0, & X_{n+1}=0\\ L_n+1, & X_{n+1}=1\end{cases}$ $I=\{0,1,2\ldots\}$

$\therefore$ $p_{i(i+1)}=p$ $p_{i0}=1-p$ $\forall i\in I$

5. (1) $X_1=X_2=1$ $X_3=6$ $Y_2=6$

$P(Y_2=1\mid Y_0=1,Y_1=6)=0$

$X_3=X_4=1$ $X_2=6$ $\max(X_2,X_3)=6$

$P(Y_2=1\mid Y_1=6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2\times6-1}=\frac{1}{66}$

(2) $X_1=X_2=1$ $X_3=6$ $X_4=6$

$P(Z_2=12\mid Z_0=2,Z_1=7)=\frac{1}{6}$

$X_3=X_4=6$ $X_2=1$ $X_2+X_3=7$

$P(Z_2=12\mid Z_1=7)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(3) $P(Y_2=1\mid Y_0=1,Y_1=6)\neq P(Y_2=1\mid Y_1=6)$

$P(Z_2=12\mid Z_0=2,Z_1=7)\neq P(Z_2=12\mid Z_1=7)$

因此$\{Y_n\}$与$\{Z_n\}$显然不具有马尔可夫性

7. (1) $I=\{0,1,2\}$

$$P_{ij}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

(2) $$P^2_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

$P(X_0=0,X_2=0,X_4=1)=P(X_0=0)P^2_{00}P^2_{01}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{81}$

$P(X_2=1)=P(X_0=0)P^2_{01}+P(X_0=1)P^2_{11}+P(X_0=2)P^2_{21}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{5}{18}$