《普通物理学 I（H）》课程

期中测试参考答案

(1)　　[3 points]

考点：　一般曲线运动的速度和加速度方向。

答案：　C

解析：　质点沿着曲线轨迹运动，速度方向应该沿着曲线的切线方向，加速度方向应当指向曲线的内侧。又因为质点是减速运动，速度方向与加速度方向的夹角应当大于$90°$（以提供切向减速的分量），因此选 C。

(2)　　[3 points]

考点：　科里奥利力方向的判定。

答案：　A

解析：　火车所受科里奥利力（地转偏向力）公式$\boldsymbol{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$。注意地球自转导致的角速度$\boldsymbol{\omega}$方向指向北极，又由于杭州位于北半球，火车自南向北运动，利用右手定则判断得科里奥利力$\boldsymbol{F}_C$的方向向东，即东侧的铁轨受到额外的侧向压力，因此选 A。

(3)　　[3 points]

考点：　牛顿运动定律、动量定理。

答案：　C

解析：　根据牛顿第二定律的原始形式（或动量定理）知$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$，所以动量的时间导数的幅值实际上指的就是合外力的大小。对于速率为v的匀速圆周运动，合外力大小为$F = mv^2/r$，显然与v^2成正比，因此选 C。

(4)　　[3 points]

考点：　牛顿运动定律、自然界中的几何相似性与标度律。

答案：　C

解析：　无论是人还是老鼠，根据题意落地都假设能达到收尾速度，由空气阻力和重力平衡知$mg = f \propto Sv_{\max}$。注意到质量$m \propto V \propto l^3$，下落时迎风的横截面积$S \propto l^2$，因此收尾速度$v_{\max}$应当正比于动物体的尺寸（线度）l，即$v_{\max} \propto l$。又由于假设所有动物的身体密度ρ都相同，因此落地瞬间骨骼所承受的动压$\sigma = \rho v_{\max}^2/2 \propto l^2$，即与线度平方成正比。根据题目可知人的线度是老鼠的20倍，故可知在落地瞬间老鼠骨骼所需要承受的动压只有人的$1/400$（也可以说其骨折的危险只有人的$1/400$），因此选 C。

(5)　　[3 points]

考点：　功的计算、换元积分。

答案：　B

解析：　外力做功的表达式（需要利用链式法则换元）

$$W=\int F\,\mathrm{d}x=\int F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int Fv\,\mathrm{d}t$$

（也可以理解为直接用功率$P=Fv$对时间t积分。）又因为根据题意有$F=7t^2+3t$ (SI)、$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t^2$ (SI)，因此外力$\boldsymbol{F}$从$t=0$ s到$t=2$ s总共做功为

$$W=\int Fv\,\mathrm{d}t=\int_0^2(7t^2+3t)(6t^2)\mathrm{d}t=340.8\ \mathrm{J}$$

因此选择最接近的 B。

(6)　　[3 points]

考点：　刚体纯滚动情况下的运动分析、转动定律、转动惯量的比较。

答案：　A

解析：　根据转动定律，且根据纯滚动情况下有$a_c=R\alpha$，易导出滚下时质心加速度的表达式为（即作业题【Problem 9.21】）

$$a_c=R\alpha=\frac{mgR^2\sin\theta}{I_c+mR^2}$$

其中I_c为绕着通过质心的转轴的转动惯量。对于质量m和半径R都相等的实心球体、圆盘和圆环而言，分别有$I_c=\dfrac{2}{5}mR^2$、$I_c=\dfrac{1}{2}mR^2$和$I_c=mR^2$，显然实心球体的转动惯量在三者中最小，故其滚下时质心加速度最大，则到达斜面底端的耗时最短。因此选 A。

(7)　　[3 points]

考点：　天体运动和万有引力定律、第二宇宙速度（逃逸速度）的计算。

答案：　B

解析：　根据题意，距离银河系中心$r=6\times10^9$ km远处的星体以$v=2000$ km/s的速率绕着银河系中心旋转。根据万有引力提供向心力，即

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

解得银河系中心黑洞质量的最大值为$M=\dfrac{v^2r}{G}$。又利用机械能守恒定律可以计算出天体表面的第二宇宙速度（逃逸速度）为$v_2=\sqrt{2\dfrac{GM}{R}}$（也可以直接引用结论），对于黑洞可以认为其表面逃逸速度为光速，即$v_2=c$，解出其半径的最大值为$R=\dfrac{2v^2r}{c^2}=5\times10^8$ m，因此选 B。

(8)　　[3 points]

考点：　单位制、量纲分析。

答案：　D

解析：　由于本题是选择题，直接根据试卷卷首提供的真空中光速、引力常量和约化普朗克常量的单位代入验证是否分别能够凑出长度、时间、质量的单位即可。代入发现 D 选项完全符合，因此选 D。（也可以利用标准的量纲分析过程进行计算。）

(9)　　[4 points]

考点：　质心和转动惯量的计算、平行轴定理。

答案：　$\frac{1}{6}R$　　$\frac{13}{32}MR^2$

解析：　该形状可以看作一个大圆盘“叠加”上了一个“负质量”的小圆盘。因此剩余部分的质心到大圆盘圆心的距离为

$$r_C=\frac{M\cdot 0-\frac{M}{4}\cdot\frac{R}{2}}{M-\frac{M}{4}}=\frac{1}{6}R$$

剩余部分绕O点的转动惯量为（转动惯量是可加量，利用平行轴定理将大小圆盘的转轴都移动到O点）

$$I_O=\frac{1}{2}MR^2-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{4}\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{M}{4}\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]=\frac{13}{32}MR^2$$

(10)　　[4 points]

考点：　速度和加速度的分解与计算。

答案：　$\frac{v_0}{\cos\theta}$　　$\frac{v_0^2\tan^3\theta}{h}$

解析：　根据沿绳方向的分速度始终相等，有该瞬时小船的速度v满足$v\cos\theta=v_0$，所以小船的瞬时速度为$v=\frac{v_0}{\cos\theta}$。由于岸上的人匀速移动，满足

$$\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\cos\theta)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cos\theta-v\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

其中$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$、$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega=\frac{v\sin\theta}{l}=\frac{v\sin^2\theta}{h}$（$v\sin\theta$为船绕滑轮旋转的切向速度，$l=\frac{h}{\sin\theta}$为滑轮到船的绳长），即可解得小船的瞬时加速度$a=\frac{v^2\sin^3\theta}{h\cos\theta}=\frac{v_0^2\sin^3\theta}{h\cos^3\theta}=\frac{v_0^2\tan^3\theta}{h}$。

(11)　　[4 points]

考点：　万有引力与天体运动中的机械能守恒和角动量守恒、曲率半径的计算。

答案： $\dfrac{b^2}{a}$

解析： 假定彗星从无穷远处以初速度v_0开始运动，此时根据双曲线渐近线的性质可知速度方向到太阳的垂直距离为b。彗星闯入太阳系并到达双曲线的顶点时，速度设为v，到太阳的距离为$c-a$，根据机械能守恒和角动量守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{c-a}$$

$$mv_0b=mv(c-a)$$

又根据彗星在双曲线顶点时，万有引力提供向心力，满足

$$\frac{GMm}{(c-a)^2}=\frac{mv^2}{\rho}$$

消去v_0和v并利用双曲线的几何性质$c^2=a^2+b^2$，解得双曲线顶点处的曲率半径$\rho=\dfrac{b^2}{a}$。

(12) [4 points]

考点： 弹性碰撞中的机械能守恒和动量守恒、近似计算。

答案： 55 （相近答案如54亦可）

解析： 由于认为中子和碳原子的碰撞都是完全弹性的，而且碳原子在碰撞前处于静止状态。根据机械能守恒和动量守恒，解得每次碰后中子的速度大小v_f关于碰前速度大小v_i的关系式为

$$v_f=\left|\frac{m-M}{m+M}\right|v_i$$

又由于碳原子（$^{12}_{6}C$）的质量M近似为中子质量m的12倍，故上式写作$v_f=\dfrac{11}{13}v_i$，即每次碰撞后减速到原来的$\dfrac{11}{13}$。由于动能$E_k\propto v^2$，故每次碰撞后动能减少到原来的$\dfrac{121}{169}$。从平均动能2.0×10^6 eV的“快中子”减速到平均动能0.025 eV的“热中子”，总共需要经历的碰撞次数为$n=\log_{\frac{121}{169}}\left(\dfrac{0.025\ \text{eV}}{2.0\times10^6\ \text{eV}}\right)=55$次。（相近答案亦可。）

(13) [8 points]

考点： 刚体的静力学平衡。

解： (a) 设墙壁对纱球的支持力为N、静摩擦力为f、被拉出的那根纱线里的张力为T，分别列出系统的平衡方程

水平方向受力平衡 $\sum F_x=N-T\sin\alpha=0$

竖直方向受力平衡 $\sum F_y=T\cos\alpha+f-mg=0$

绕纱球球心力矩平衡 $\sum\tau=Tr-fR=0$

临界情况下有 $f=\mu N$，代入并联立第一式和第三式，解得 $\sin\alpha=\dfrac{r}{\mu R}=0.50$，故此时被拉出的那根纱线与墙壁的夹角 $\alpha=30°$。

(b) 临界情况下再联立第一式和第二式并将上一问的结果代入，解得被拉出的那根纱线中的张力 $T=\dfrac{mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=21\ \mathrm{N}$。

(14) [8 points]

考点： 变质量物体的运动方程、动量定理。

解： 设飞船的推力为 $\boldsymbol{F}$，根据动量定理有 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}$。根据题意，列出飞船运动过程中质量为 $\mathrm{d}M$ 的尘埃沉积前后的动量变化量（忽略高次项）

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}=(M+\mathrm{d}M)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})-(M\boldsymbol{v}+\mathrm{d}M\cdot\boldsymbol{u})=\mathrm{d}M\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

两边求导则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}$$

为保证飞船以匀速前进，即 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，直接得到推力 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$。

（注：若写成标量式，注意 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向，故 $F=\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\cdot(v+u)$，方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同。）

(15) [8 points]

考点： 牛顿运动定律、非惯性系与惯性力。

解： 设斜面（棱镜）相对于地面的加速度大小为 a_1（方向向左）。以斜面为参考系，物块沿斜面下滑，则要求其在斜面参考系内的加速度方向沿斜面向下，注意此时需要引入物块受到的惯性力 ma_1（方向向右）。设物块对斜面的正压力（或斜面对物块的支持力）大小为 N，对斜面，在地面参考系中，沿水平方向有

$$N\sin\theta=Ma_1$$

对物块，在斜面参考系中，由于它始终不脱离斜面，沿垂直于斜面方向的加速度应当是零，即有

$$N+ma_1\sin\theta-mg\cos\theta=0$$

联立以上两式消去 a_1，解得 $N=\dfrac{Mmg\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$。

(16) [12 points]

考点： 万有引力与天体运动中的机械能守恒、第一宇宙速度的计算、开普勒行星运动定律、极限转化思维。

解： (a) 对火箭从地面发射到到达距离地心 r 处的过程，设其到达距离地心 r 处

时的速度大小为v，利用机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

火箭达到最高点时$v=0$、$r=R+H$，代入解得最大高度$H=\dfrac{2GMR}{2GM-v_1^2R}-R$，再代入第一宇宙速度$v_1=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$（*可利用近地卫星环绕公式得出，也可直接引用结论*）直接得到火箭所能到达的最大高度$H=R=6370\ \mathrm{km}$。

(b) ***方法一（直接积分）：***

同样对火箭上升的过程，根据上述机械能守恒关系得到$v(r)$的表达式

$$v=\sqrt{-\frac{GM}{R}+\frac{2GM}{r}}$$

注意到$v=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$，整理得

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{-\dfrac{GM}{R}+\dfrac{2GM}{r}}}\mathrm{d}r$$

对火箭上升过程（从$r=R$到$r=R+H=2R$），两边同时积分

$$\int_0^{t_1}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{R}{GM}}\int_R^{2R}\sqrt{\frac{r}{2R-r}}\,\mathrm{d}r$$

参考题目的提示中已经给出的积分公式，积分得

$$t_1=\sqrt{\frac{R}{GM}}\left[2R\cdot\arctan\sqrt{\frac{r}{2R-r}}-\sqrt{r(2R-r)}\right]\Bigg|_R^{2R}$$

$$=\sqrt{\frac{R}{GM}}\left[2R\cdot\arctan(\infty)-2R\cdot\arctan(1)+R\right]$$

其中t_1为从发射到最高点所经历的时间。

又根据$\arctan(\infty)=\dfrac{\pi}{2}$、$\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}$，（*注：更严谨的做法需要考虑到反正切函数可能存在多值的情况，故需要进行讨论并取唯一合理的解，此处暂时略去。*）直接得到

$$t_1=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

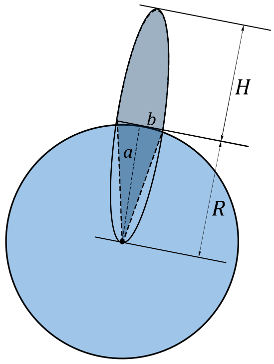
于是我们已经得到了火箭从发射到到达最高点所需要的时间t_1。由于运动的对称性，火箭从发射到着陆的全过程所需要的时间应为t_1的两倍，也就是

$$t=2t_1=(\pi+2)\cdot\sqrt{\frac{R^3}{GM}}=4.14\times10^3\ \mathrm{s}\qquad（或约1\ \mathrm{h}\ 9\ \mathrm{min}）$$

方法二（将轨道看作退化的椭圆，利用开普勒定律）：

根据开普勒第一定律，我们先试着将火箭的轨道看作是一个退化的狭长椭圆，此时椭圆的焦点和其长轴端点几乎重合（均在地心）。由于此时椭圆半长轴$a=R$，设椭圆半短轴为b。根据万有引力定律，我们知道绕着地球沿半径为R的轨道作匀速圆周运动的周期T满足

$$\frac{GMm}{R^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$



解得$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$。由开普勒第三定律可知，当中心天体相同时，绕该天体运动的周期只和轨道的半长轴有关，由于此时半长轴$a = R$，故这个椭圆运动的完整周期也应是$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$。

又根据开普勒第二定律，可知火箭从发射到降落的过程中其与地心的连线所扫过的面积（即右图中阴影部分的面积）占整个椭圆的面积之比应等于这段时间内火箭总运动时间占椭圆运动的完整周期之比。这个阴影部分相当于半个椭圆加一个等腰三角形，故解得从发射到降落的过程中火箭总运动时间为

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi ab + \frac{1}{2}a \cdot 2b}{\pi ab} \cdot T = \frac{\pi + 2}{2\pi} \cdot T$$

故$t = (\pi + 2) \cdot \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 4.14 \times 10^3\ \mathrm{s}$（或约$1\ \mathrm{h}\ 9\ \mathrm{min}$），与通过积分法得到的结果一致。

(17) [12 points]

考点： 质点运动学基本知识（速度与加速度、切向加速度与法向加速度）、不同坐标系下的轨迹方程、几何问题与物理问题的转化、科学猜想和解释能力。

解： (a) 根据粒子运动的轨迹方程

$$x(t) = R\mathrm{e}^{kt} \cdot \cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\mathrm{e}^{kt} \cdot \sin(\omega t)$$

通过求导可直接得到它的速度、加速度方程（矢量可用它的两个分量表示）

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot [-\omega\sin(\omega t) + k\cos(\omega t)]$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot [\omega\cos(\omega t) + k\sin(\omega t)]$$

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot [-\omega^2\cos(\omega t) - 2\omega k\sin(\omega t) + k^2\cos(\omega t)]$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot [-\omega^2\sin(\omega t) + 2\omega k\cos(\omega t) + k^2\sin(\omega t)]$$

(b) 根据上一问的结论，可求出速度和加速度的大小分别为

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot \sqrt{\omega^2 + k^2}$$
$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot (\omega^2 + k^2)$$

根据切向加速度的定义，立即得到切向加速度随时间变化的函数关系式

$$a_\tau(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\mathrm{e}^{kt} \cdot k\sqrt{\omega^2 + k^2}$$

则法向加速度随时间变化的函数关系式为

$$a_n(t)=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=R\,\mathrm{e}^{kt}\cdot\omega\sqrt{\omega^2+k^2}$$

(c) 根据直角坐标系和极坐标系的转换关系

$$x(t)=r(t)\cdot\cos\theta(t)$$
$$y(t)=r(t)\cdot\sin\theta(t)$$

与运动方程相对应，知$\theta(t)=\omega t$、$r(t)=R\,\mathrm{e}^{kt}$，两者联立消掉t并利用$b=k/\omega$，得到极坐标系中质点的轨迹方程（即对数螺线的方程）为$r(\theta)=R\,\mathrm{e}^{\frac{k}{\omega}\theta}=R\,\mathrm{e}^{b\theta}$。

（表示为$\theta(r)=\dfrac{\omega}{k}\ln\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{b}\ln\dfrac{r}{R}$亦可。）

(d) 求对数螺线的弧长可以转化为求质点运动的路程（路径长度），而这可以用速度的大小（即速率）对时间积分求得，假设$\theta=0$时对应$t=0$，$\theta=2\pi$时对应$t=t_0$，即有

$$s=\int v\,\mathrm{d}t=R\sqrt{\omega^2+k^2}\cdot\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t$$
$$=R\left(\mathrm{e}^{kt_0}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{\omega^2+k^2}}{k}=R\left(\mathrm{e}^{b\cdot\omega t_0}-1\right)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}$$

将$\omega t_0=2\pi$代入，得到所求的路程长度（即对数螺线的弧长）为$s=R(\mathrm{e}^{2\pi b}-1)\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{b^2}}$。

(e) 对数螺线具有典型的自相似性，它在r方向以指数形式增长，而指数形式增长的特点就是其增长的速率正比于自身的大小。鹦鹉螺、气旋、星系旋臂等（或者其他什么生长着的东西）只要其是按比例均匀地生长的（生长速率正比于自身的大小）且生长的过程伴随着旋转，它就极有可能形成对数螺线的形状。

(18) [12 points]

考点： 刚体纯滚动情况下的运动分析、刚体的动力学、弹性与非弹性碰撞中的机械能与动量、刚体的机械能及其守恒、科学归纳与迁移能力。

解： (a) 足球与墙壁弹性碰撞后瞬间，质心速度由$\boldsymbol{v}_0$变成$-\boldsymbol{v}_0$（向左），角速度则大小仍为$\omega_0=v_0/r$不变（顺时针）。此时由于旋转是逆向的，足球的接触点无疑与地面存在相对滑动，于是受到向右的滑动摩擦力$f=\mu mg$。这个力一方面是足球质心前进的阻力，使其减速；另一方面提供了一个逆时针方向的阻力矩fr，使足球减速转动。

对于此时的情况，分别列出牛顿第二定律和转动定律（由于足球被视作一个空心球壳，因此足球相对于质心的转动惯量$I_C=\dfrac{2}{3}mr^2$），得到此时的线加速度和角加速度分别为（分别以向右和逆时针为正方向，下同）

$$a_C=\frac{f}{m}=\mu g$$

$$\alpha=\frac{fr}{I_C}=\frac{3\mu g}{2r}$$

均为常量，故其线速度和角速度随时间的变化满足

$$v_C = -v_0 + at = -v_0 + \mu g t$$

$$\omega = -\omega_0 + \alpha t = -\frac{v_0}{r} + \frac{3\mu g}{2r}t$$

显然，到时刻$t = t_1 = \dfrac{2v_0}{3\mu g}$时，角速度$\omega$减小到零，但此时摩擦力的方向不变，因此之后角速度$\omega$开始反向（沿逆时针）增加。到时刻$t = t_2 = \dfrac{4v_0}{5\mu g}$时，线速度$v_C = -v_0 + at = -\dfrac{1}{5}v_0$（依然向左），角速度$\omega = -\omega_0 + \alpha t = \dfrac{1}{5}\dfrac{v_0}{r} = \dfrac{1}{5}\omega_0$（逆时针），终于能够再次满足$v_C = r\omega$的纯滚动条件。从此足球将向左继续无滑滚动下去，不再受到滑动摩擦力，质心的线速度v_C和角速度ω亦将不再改变。故最终做无滑滚动时的质心线速度和角速度大小分别为$\dfrac{1}{5}v_0$和$\dfrac{1}{5}\dfrac{v_0}{r}$。

(b) 若球与墙壁的碰撞是完全非弹性的，相当于球在碰后其速度立刻由$\boldsymbol{v}_0$减到$\mathbf{0}$，其水平方向的动量变化量$\Delta p_x = -mv_0$，即相当于墙壁给球的法向冲量$J_N = -mv_0$。又由于球顺时针旋转，故墙壁对球存在向上的摩擦力，它给球的切向冲量$J_f = \mu J_N = \mu m v_0$。这个切向冲量一方面使得球获得竖直向上的动量$\Delta p_y = \mu m v_0$，或者说获得竖直向上的初速度$v_y = \mu v_0$，因此球将沿着墙壁方向向上弹起爬升；另一方面为球提供了逆时针方向的冲量矩$J_f r = \mu m v_0 r$，使其角动量具有一个逆时针方向的增量，故碰撞后的角速度变为$\omega = -\omega_0 + \dfrac{J_f r}{I_C} = \left(-1 + \dfrac{3\mu}{2}\right)\dfrac{v_0}{r}$（以逆时针方向为正）。由于碰撞后立刻脱离与墙壁的接触，因此不会再进一步受到摩擦力的作用。

所以球确实会向上滚，它滚到最大高度$h = \dfrac{v_y^2}{2g} = \dfrac{\mu^2 v_0^2}{2g}$后回落。

(c) 题目只要求定性判断。实际情况下足球和墙壁间的碰撞往往是非完全弹性的，也就是介于以上两种情况之间。故可猜测碰撞后足球的运动应该是上述两者（水平反弹和向上爬升）的合运动，也就是以一定仰角向左上方的斜上抛运动，足球质心的轨迹为一条抛物线。（此时由于足球在空中，不受地面摩擦力，水平方向应为匀速运动。）

(d) 同时利用纯滚动条件和机械能守恒（注意此处原题中“光滑”字样有误）

$$v_C = R\omega$$

$$mg(R-r) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

同样利用$I_C = \dfrac{2}{3}mr^2$，解得足球运动到轨道最低点时质心速度$v_C = \sqrt{\dfrac{6}{5}g(R-r)}$、角速度$\omega_C = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{6}{5}g(R-r)}$。再由向心力公式

$$F_N - mg = \frac{mv_C^2}{R-r}$$

解得足球对轨道产生的正压力大小为$F_N = \dfrac{11}{5}mg$。