2024 - 2025学年数学分析I (H)期末试题

图灵回忆卷

一、计算题

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left(\sin\sqrt{t}\right)^2 dt}{x^4}$.

(3)$f(x)=\int_0^x (1+t)\arctan t dt$, 求$f(x)$的极值.

(4)求由如下方程： $\begin{cases} e^x=\sin t+2t+1 \\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0 \end{cases}$ 确定的y,x所对应的$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$.

(5)$\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$.

二、叙述确界原理，并用确界原理证明：定义在$(0,1)$上的单增函数的间断点只能是跳跃间断点.

三、数列$\{x_n\}$满足：$0<x_1<\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{4(1-x_n)}, \forall n\in\mathbb{N}_+$, 证明：$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

四、$f\in C[0,2025]$,且$f(0)=f(2025)=0, f'_+(0)>0, f'_-(2025)>0$, 证明：至少存在一个$\xi$使得$\xi\in(0,2025)$且$f(\xi)=0$.

五、叙述一致连续定义，并证明：$f(x)=\sqrt{x}\ln x$在$(0,+\infty)$上一致连续.

六、$f(x)$在$\mathbb{R}$上有连续二阶导数，且$f''(x)<0$,证明：$\int_0^1 f(x^2)dx\le f(\dfrac{1}{3})$.

七、$f\in C[0,1]$,证明：

(1)$\exists\xi\in[0,\dfrac{1}{2}]$,使得$\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\xi}f(x)dx+\int_{1-\xi}^1 f(x)dx$.

(2)将$\xi\in[0,\dfrac{1}{2}]$改为$\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$,结论是否成立？证明或否定.