数学分析（甲）I（H）2024 秋冬期末

图灵回忆卷

2025 年 2 月 8 日

一、(40 分) 计算：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(\sin\sqrt{t})^2\mathrm{d}t}{x^4}$.

3. $f(x)=\int_0^x(1+t)\arctan t\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的极值.

4. 求由如下方程：$\begin{cases} e^x=\sin t+2t+1 \\ t\sin y-y+\frac{\pi}{2}=0 \end{cases}$ 确定的 y,x 所对应的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}$.

5. $\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

二、(8 分) 叙述确界原理，并用确界原理证明：定义在 $(0,1)$ 上的单增函数的间断点只能是跳跃间断点.

三、(10 分) 数列 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_1<\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{1}{4(1-x_n)}, \forall n\in\mathbf{N}_+$，证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

四、(10 分) $f\in C[0,2025]$，且 $f(0)=f(2025)=0, f'_+(0)>0, f'_-(2025)>0$，证明：至少存在一个 ξ 使得 $\xi\in(0,2025)$ 且 $f(\xi)=0$.

五、(10 分) 叙述一致连续定义，并证明：$f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

六、(10 分) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有连续二阶导数，且 $f''(x)<0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x\le f(\frac{1}{3})$.

七、(12 分) $f\in C[0,1]$，证明：

1. 存在 $\xi\in[0,\frac{1}{2}]$，使得 $\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1-\xi}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. 将 $\xi\in[0,\frac{1}{2}]$ 改为 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，结论是否仍成立？证明或给出反例.