数学分析（甲）I（H）2024-2025 秋冬期末答案

图灵回忆卷　　by jayi0908

2025 年 2 月 8 日

一、（40 分）

1. 由定积分定义，令 $f(x)=\ln(1+x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$$

2. 由洛必达法则，令 $u=\sqrt{t}$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}(\sin\sqrt{t})^2\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x}2u\sin^2 u\,\mathrm{d}u}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin^2 x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

3. $f'(x)=(1+x)\arctan x$，故 $x\le -1$ 时 $f'(x)\ge 0$，$-1<x<0$ 时 $f'(x)<0$，$x\ge 0$ 时 $f'(x)\ge 0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$. 对 $f(x)$ 进行分部积分，有

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x(1+t)\arctan t\,\mathrm{d}t\\&=(\frac{1}{2}x^2+x)\arctan x-\int_0^x\frac{\frac{1}{2}t^2+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=(\frac{1}{2}x^2+x)\arctan x-\frac{1}{2}\int_0^x\left(1+\frac{2t-1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}((x+1)^2\arctan x-x-\ln\big(1+x^2\big)).\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$.

4. 代入 $x=0$ 到第一个方程得 $\sin t+2t=0$，
由函数 $y=\sin x+2x$ 单增知 $t=0$ 为唯一解，代入第二个方程得 $y=\frac{\pi}{2}$.
由第二个式子解得 $t=\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}$，代回第一个式子得 $e^x=\sin\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}+2\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}+1$.
两边对 x 求导得

$$e^x=\frac{\cos\dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y}\left(y'\sin y-\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos y\right)}{\sin^2 y}+2\frac{y'\sin y-\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos y}{\sin^2 y}.$$

代入 $x=0,y=\frac{\pi}{2}$ 得 $1=3y'|_{x=0}$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=\frac{1}{3}$.

5.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+e^x} \\ &= \left.\frac{-x}{1+e^x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x(1+e^x)}\,\mathrm{d}e^x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln \left.\frac{t}{t+1}\right|_1^{+\infty} = \ln 2.\end{aligned}$$

二、 **(8 分)** 确界原理：非空有上界的实数集必有上确界，非空有下界的实数集必有下确界.

证明：对 $\forall x_0 \in (0,1)$，由于 f 在 $(0,1)$ 上单增，故 x_0 左侧的函数值均小于 $f(x_0)$.

令 $E = \{f(x) | x \in (0,1), x < x_0\}$，则 E 非空有上界，故 $\exists a = \sup E$.

由确界定义，$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists x_1 \in (0,1), x_1 < x_0$，使得 $a - \varepsilon_1 < f(x_1) \le a$. 则 $\forall \varepsilon_2 \in (0, a - f(x_1)), \exists x_2 \in (x_1, x_0)$，使得 $f(x_1) < a - \varepsilon_2 < f(x_2) < a$. 同理可一直构造出 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < x_0$，使得 $f(x_{n-1}) < a - \varepsilon_n < f(x_n) < a$，且 $\{a - f(x_n)\}$ 收敛于 0.

由 f 单调性不难知 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$，即左极限存在. 同理右极限存在. 故不存在第二类间断点. 易知 f 作为连续区间上的单增函数不存在可去间断点，故其间断点只能是跳跃间断点，得证.

三、 **(10 分)** 证明：$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{4(1-x_n)} - x_n = \dfrac{(1-2x_n)^2}{4(1-x_n)} > 0$，故 $\{x_n\}$ 单调递增.

且若 $x_n < \dfrac{1}{2}$，则 $x_{n+1} = \dfrac{1}{4(1-x_n)} < \dfrac{1}{4(1-\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{2}$，故 $\{x_n\}$ 有上界. 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a = \dfrac{1}{4(1-a)}$，解得 $a = \dfrac{1}{2}$. 得证.

四、 (10 分) 由导数局部保号性与拉格朗日中值定理，

$\exists x_1 \in U_+^o(0), x_2 \in U_-^o(2025), \exists \xi_1 \in (0, x_1), \exists \xi_2 \in (x_2, 2025)$，使得 $f(x_1) = f'(\xi_1)x_1 > 0, f(x_2) = f'(\xi_2)(x_2 - 2025) < 0$，由 f 连续及零点存在性定理得证.

五、 (10 分) 一致连续：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$，则称 f 在 I 上一致连续.

证明：不难证明，若 f 在 I_1 上一致连续，在 I_2 上也一致连续，且 I_1 与 I_2 为两个相接的区间，则 f 在 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续.

(只需任取 $\dfrac{\varepsilon}{2}$，相应的有两个 δ_1, δ_2，取 $\delta = \min \delta_1, \delta_2$，则可证明 $\forall x, y \in I_1 \cup I_2, |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = 0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续. 故只需证明 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续. 由拉格朗日中值定理，只需证明 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界.

对 f 求导：$f'(x)=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\ln\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. 令 $t=\sqrt{x}$，不难证明在 $(1,+\infty)$ 上 $0<\dfrac{\ln t+1}{t}<1$ 恒成立，故 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界，得证.

六、 **(10 分)** 注意到 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，故只需证明 $\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x\le f(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x)$.

由定积分定义与琴生不等式，

$$f(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x)=f(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2})\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k^2}{n^2})=\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

得证.

七、 **(12 分)**

(1) 令 $F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1-t}^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\in[0,\dfrac{1}{2}]$.

则由 $f\in C[0,1]$ 知 $F(t)\in C[0,\dfrac{1}{2}]$，且 $F(0)=0,F(\dfrac{1}{2})=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 由介值定理，$\exists\xi\in[0,\dfrac{1}{2}]$，使得 $F(\xi)=\dfrac{1}{2}F(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) 不成立，反例：$f(x)=\cos 2\pi x$，此时 $F(t)=\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x|_0^t+\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x|_{1-t}^1=\dfrac{1}{\pi}\sin 2\pi t$，$F(0)=F(\dfrac{1}{2})=0$，但不存在 $\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$ 使得 $F(\xi)=0$，故结论不成立.