数学分析（甲）II（H）2020 - 2021 春夏期末试答

Shad0wash

2024 年 2 月 8 日

一、多元函数可微性

1. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若存在常数 A,B 对充分小的 $\Delta x,\Delta y$ 均有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho\to 0.$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

2. $f(x,y)=(xy)^{\frac{5}{7}},\quad f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,0)=0.$ 并且有

$$\begin{aligned}&\frac{|f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\frac{|(xy)^{\frac{5}{7}}|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|(xy)^{\frac{5}{7}}|}{\sqrt{2}|xy|^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|xy|^{\frac{3}{14}}\to 0,\quad (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

二、反常积分与级数的敛散性

1. $\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，且 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 而 $|\int_1^u\sin x\mathrm{d}x|=|\cos u-\cos 1|\leqslant 2$, 由 Dirichlet 判别法知，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.
而

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}$$

且 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛，由比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

2. 否. 比如 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}},v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}}=1.$
但是 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛（Leibniz 判别法），而 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 中，

$$v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

其中 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散.

三、多元函数积分计算

1.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 e^{2x}\ln(1+e^{2x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^{1+e^2}\ln t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}t(\ln t-1)\Big|_2^{1+e^2}=\frac{1}{2}[(1+e^2)(\ln(1+e^2)-1)-2(\ln 2-1)].\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}I&=\int_{-c}^{0}z\mathrm{d}z\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{0}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})z\mathrm{d}z=\pi ab\int_{-c}^{0}(z-\frac{z^3}{c^2})\mathrm{d}z\\&=\pi ab(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4c^2})\Big|_{-c}^{0}=-\frac{\pi}{4}abc^2.\end{aligned}$$

3. $C:\ \ x^2+4y^2=\delta^2$, 顺时针. $I=\int_{L+C}+\int_{C^-}$. 设 C 所围区域为 D.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{x^2+4y^2-2x(x+4y)}{(x+4y^2)^2}=\frac{-x^2-8xy+4y^2}{(x+4y^2)^2},\\\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{-(x^2+4y^2)-8y(x-y)}{(x+4y^2)^2}=\frac{-x^2-8xy+4y^2}{(x+4y^2)^2}.\end{aligned}$$

故 $\int_{L+C}=0$, 而

$$\int_{C^-}=\frac{1}{\delta^2}\oint(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y=\frac{2}{\delta^2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\delta^2}\times\frac{\pi\delta^2}{2}=\pi.$$

所以 $I=\pi$.

4. $I=\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$, 则

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=x,\\\cos\beta&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=y,\\\cos\gamma&=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=z.\end{aligned}$$

故

$$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint_S\mathrm{d}S=\frac{1}{8}\times 4\pi 1^2=\frac{\pi}{2}.$$

四、条件极值计算

目标函数为 $f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, 约束条件为 $(x,y,z)\in Ax+By+Cz+D=0$. 由拉格朗日乘数法，设拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\lambda(Ax+By+Cz+D).$$

则有

$$\begin{cases}L'_x=2(x-x_0)-A\lambda=0\Rightarrow x=x_0+\frac{A}{2}\lambda,\\L'_y=2(y-y_0)-B\lambda=0\Rightarrow y=y_0+\frac{B}{2}\lambda,\\L'_z=2(z-z_0)-C\lambda=0\Rightarrow z=z_0+\frac{C}{2}\lambda,\\L'_\lambda=Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$

代入得

$$\frac{1}{2}(A^2+B^2+C^2)\lambda=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D),$$
$$\lambda=-\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

故

$$f_{min}=(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2\cdot\frac{A^2+B^2+C^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$
$$d_{min}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

五、一致收敛

1. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时，$\forall x\in I$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$.

2. $\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, $f(x)$ 有一阶连续导函数，故 $f'(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续.
$\forall x\in(a,b), f_n(x)=n(f(x+\dfrac{1}{n})-f(x))$, 由拉格朗日中值定理，存在 $\theta_n\in(0,1)$, 使得

$$f_n(x)=n\cdot\frac{1}{n}\cdot f'(x+\frac{\theta_n}{n})=f'(x+\frac{\theta_n}{n}).$$

因为 $f'(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续，故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, $\forall x',x''\in[\alpha,\beta]$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 而 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时，$\dfrac{\theta_n}{n}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}$.
故取 $\delta=\dfrac{1}{N}$, $x'=x+\dfrac{\theta_n}{n}$, $x''=x$, 有 $|x'-x''|<\delta$, 所以 $|f'(x+\dfrac{\theta_n}{n})-f'(x)|<\varepsilon$.
所以 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 f'.

六、 Fourier 级数

1. 奇延拓后，$a_n=0,n=0,1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n}\sin nx$. 其在 $[-\pi,\pi]$ 上的取值为

$$\begin{cases}\pi-x, & 0<x\leqslant\pi,\\0, & x=0,\\-\pi-x, & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

2. 利用 Cauchy 收敛准则. $|b_n+\cdots+b_{n+p}|=2|\dfrac{\sin nx}{n}+\cdots+\dfrac{\sin(n+p)x}{n+p}|$.
取 $x=x_0=\dfrac{\pi}{4n}$, $p=n$, $\varepsilon_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 有

$$|b_n+\cdots+b_{n+p}|>2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n}{2n}=\varepsilon_0.$$

所以 f 的 Fourier 级数在 $(0,\pi)$ 上不一致收敛.

七、多元函数 Taylor 定理

1. $f(x,y) = f(x_0,y_0) + (\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0) + o(\rho^2)$, 其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.
因为 $P_0(x_0,y_0)$ 是稳定点，所以 $(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0) = 0$. 又因为 Hasse 矩阵正定，即有 $Q(\Delta x,\Delta y) = (\Delta x,\Delta y)H(P_0)(\Delta x,\Delta y)^T > 0$, 其中

$$H(P_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}f \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}f & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f \end{pmatrix}_{P_0}.$$

进而存在一不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 的常数 $q>0$, 使得 $Q(\Delta x,\Delta y) \geqslant q((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$.
所以 $\exists\delta>0$, 当 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) \geqslant ((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)(q+o(1)) > 0.$$

故 $f(x,y)$ 在 P_0 处取极小值.

2. 若 f 存在两个或以上的稳定点，不妨取其中两个 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$, 由多元函数 Taylor 定理的 Lagrange 余项形式，有

$$f(x,y)-f(x_1,y_1) = \frac{1}{2}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_1+\theta_1\Delta x, y_1+\theta_1\Delta y),$$
$$f(x,y)-f(x_2,y_2) = \frac{1}{2}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_2+\theta_2\Delta x, y_2+\theta_2\Delta y).$$

而因为 f 在每个点的 Hasse 矩阵都是正定的，故 $\frac{1}{2}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_1+\theta_1\Delta x, y_1+\theta_1\Delta y) > 0$, $\frac{1}{2}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_2+\theta_2\Delta x, y_2+\theta_2\Delta y) > 0$.
所以就会得出 $f(x_2,y_2) > f(x_1,y_1)$ 且 $f(x_1,y_1) > f(x_2,y_2)$ 的矛盾. 所以 f 至多有一个稳定点.