数学分析（甲）II（H）2021 - 2022 春夏期末试答

Shad0wash

2024 年 2 月 8 日

一、一致收敛定义

对于函数列 $\{f_n(x)\}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 其取值与 x 无关, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in D$, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$, 记作 $f_n(x)\xrightarrow{D}f(x)$.
$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $f(x)=0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)-f(x)|=|\frac{\sin nx}{n^2}-0|\leqslant\frac{1}{n^2}<\frac{1}{N^2}=\varepsilon.$$

故 $\{\dfrac{\sin nx}{n^2}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 0.

二、可偏导与可微

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2|\sin\theta\cos\theta|}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho|\sin\theta\cos\theta|=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导. 但是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-(f'(0,0)x+f'(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2|\sin\theta\cos\theta|}{\rho^2}=|\sin\theta\cos\theta|,$$

取值与 θ 有关, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、隐函数存在定理与隐函数求导

Warning: 图灵回忆卷此处回忆有误，应为 $e^{x+y+1}+x^2y=e$ 在 $0,0$ 的某邻域内唯一确定 y 关于 x 的函数
记 $F(x,y)=e^{x+y+1}+x^2y-e$, $F(0,0)=0$. $\exists\delta>0$, 使得 $F(x,y)$ 在 $U(O,\delta)$ 内连续, 且 $F_y'(x,y)=e^{x+y+1}+x^2$ 在上述 $U(O,\delta)$ 内连续，并成立 $F_y'(x,y)>0$, 故由隐函数存在定理, $F(x,y)$ 在 $U(O,\delta)$ 内可唯一确定 y 关于 x 的函数 $y=f(x)$, 且 $F(x,f(x))=0$.

等式 $e^{x+y+1}+x^2y-e=0$ 两边同时对 x 求导可得

$$e^{x+y+1}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+2xy+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$
$$(e^{x+y+1}+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-e^{x+y+1}-2xy,$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}=-1$. 继续对 x 求导可得

$$(e^{x+y+1}+x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(e^{x+y+1}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+2x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(e^{x+y+1}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+2(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})),$$

代入 $(0,0)$ 可得 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(0,0)}=0$.

四、多元函数积分计算

1.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^5\mathrm{d}\rho\\&=-2\pi\times\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi}\times\frac{1}{6}\rho^6\Big|_0^{R}=\frac{2}{9}\pi R^6.\end{aligned}$$

2. 设 Σ 为曲线在平面 $x-y+z=2$ 上围成的部分，取上侧. 则

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\z-y&x-z&x-y\end{vmatrix}\\&=\iint_\Sigma(-1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=2\iint_\Sigma\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint_\Sigma\mathrm{d}S\cos\beta=2\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma}\cos\beta=-2\iint_\Sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi\end{aligned}$$

其中 $\vec{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ 为平面的单位法向量.

3. 添加 L： $y=0$, x 从 π 到 0. $I=\int_{C+L}-\int_L=-\iint_D+\int_{L^-}$.
$\int_{L^-}=e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x-e^x(1-\sin y)\mathrm{d}y=0$. 故

$$\begin{aligned}I&=-\iint_D\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{vmatrix}=\iint_D(e^x(1-\sin y)+e^x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D e^x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}e^x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}e^x\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

进而运用分部积分

$$I=e^x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\mathrm{d}x=-e^x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sin x\mathrm{d}x=(e^{\pi}+1)-I,$$
$$I=\frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

4. 添加平面 $D=\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0\end{cases}$，取下侧. $I=\iint_{\Sigma+D}-\iint_D=\iiint_\Omega+\iint_{D^-}$.

$$\iint_{D^-}=\iint_{D^-}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$
$$\iiint_\Omega=\iiint_\Omega 2y+2z+(1-2y-2z)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega \mathrm{d}V=\frac{2}{3}\pi.$$
$$I=\frac{5}{3}\pi.$$

五、有条件极值

讨论点在内部还是在边缘. $D:\ x^2+y^2\leqslant 5$, $f(x,y)=xy+x-y$.
1. $(x,y)\in int\ D$. 令

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=y+1=0,\\ f'_y(x,y)=x-1=0,\end{cases}$$

解得 $(x,y)=(1,-1)$, 设为点 P. 因为 $x_p^2+y_p^2=2<5$, 故 $P\in int\ D$. 但 $A=f''_{xx}(P)=0,C=f''_{yy}(P)=0,B=f''_{xy}(P)=1$, 有 $B^2-AC=1>0$, 所以 $f(P)$ 不是极值.
2. $(x,y)\in\partial D$. 利用拉格朗日乘数法, 设 $L(x,y,\lambda)=xy+x-y-\lambda(x^2+y^2-5)$, 令

$$\begin{cases}L'_x(x,y,\lambda)=y+1-2\lambda x=0,\\ L'_y(x,y,\lambda)=x-1-2\lambda y=0,\\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-5=0,\end{cases}$$

联立 $\begin{cases}y+1-2\lambda x=0,\\ x-1-2\lambda y=0,\end{cases}$ 可得 $(1-2\lambda)(x+y)=0$.

- 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 解得 $(x,y)=(2,1)$ 或 $(x,y)=(-1,-2)$, 分别设为 Q_1,Q_2. 代入得 $f(Q_1)=f(Q_2)=3$.
- 当 $x+y=0$ 时, 代入解得 $(x,y)=(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ 或 $(x,y)=(\sqrt{5},-\sqrt{5})$, 分别设为 Q_3,Q_4. 代入得 $f(Q_3)=f(Q_4)=-5-2\sqrt{5}$.

故 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 $-5-2\sqrt{5}$.
（其实也可以三角函数代换来解，说明起来更充分些）

六、函数项级数的基本计算

设 $u=\frac{1}{3}x$, 则 $I=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n+1}$. $u=-1$ 时，I 收敛；$u=1$ 时，I 发散. 故 I 的收敛域为 $[-3,3)$, $r=3$.

$$uI=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{n+1}}{n+1}$$
$$(uI)'=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n=\frac{1}{1-u},\quad u\in[-1,1)$$
$$uI=-\ln(1-u),\quad u\in[-1,1)$$
$$I=-\frac{\ln(1-u)}{u}=-\frac{3\ln(1-\frac{1}{3}x)}{x},\quad x\in[-3,3).$$

七、 Fourier 级数

进行周期延拓，其为偶函数，故 $b_n = 0$.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi}{2}x\cos nx - \frac{1}{4}x^2\cos nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}(\sin nx) - \frac{1}{4n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}(\sin nx) \\ &= \frac{1}{2n}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x - \frac{1}{4n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n^2}, n \geqslant 1.\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}(\pi x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\times\frac{4\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

$$\frac{1}{4}x(2\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

当 $x = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

八、复杂函数列一致收敛的证明

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty}f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x + \frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+t)\mathrm{d}t.$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x + \frac{k}{n})\mathrm{d}t.$$

$$|f_n(x) - F(x)| = |\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(f(x + \frac{k}{n}) - f(x+t))\mathrm{d}t|.$$

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则 $\forall[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$, $f(x)$ 在其上一致连续. 即 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $x', x'' \in [\alpha,\beta]$ 时，若 $|x' - x''| < \delta$, 则 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
$\forall\varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时，$|(x + \frac{k}{n}) - (x+t)| \leqslant \frac{1}{n} < \delta$, 故

$$|f_n(x) - F(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|(f(x + \frac{k}{n}) - f(x+t))|\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varepsilon\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

即有 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上内闭一致收敛.