线性代数 II（H）2024-2025 春夏期中答案

图灵回忆卷　　by jayi0908

2025 年 4 月 23 日

一、 **(10 分)** 设所求直线为 $x = 1 + at, y = bt, z = 2 + ct$（$t \in \mathbb{R}$）。

由于平面 $3x - y + 2z + 2 = 0$ 的法向量为$\vec{n} = (3, -1, 2)$，故 $3a - b + 2c = 0 \quad (1)$.

已知直线参数方程：$x = 1 + 4s, y = -1 - 2s, z = s$（$s \in \mathbb{R}$），相交即坐标相等，解得：

$$at = 4s,\ bt = -1 - 2s,\ 2 + ct = s$$

消去s, t并结合(1)，得方向向量$\boldsymbol{v} = (12, -22, -29)$。故所求直线为：

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y}{-22} = \frac{z-2}{-29}.$$

二、 **(10 分)** 证明：先证明 $\mathrm{range}(T - I) + \mathrm{null}(T - I) = V$：

对任意$v \in V$，由 $T^2 - 3T + 2I = 0$ 得 $(T - I)(T - 2I) = 0$.

令 $v_1 = (2I - T)v$，则 $(T - I)v_1 = 0$，即 $v_1 \in \mathrm{null}(T - I)$；　$v_2 = (T - I)v$，则 $v_2 \in \mathrm{range}(T - I)$；

显然 $v = v_1 + v_2$，故 $V = \mathrm{null}(T - I) + \mathrm{range}(T - I)$。

再证明交集为零元：

设 $u \in \mathrm{null}(T - I) \cap \mathrm{range}(T - I)$，则 $Tu = u$ 且存在 w 使 $u = (T - I)w$，代入得 $u = (T - I)w = Tw - w = u - w \implies w = 0 \implies u = 0$.

综上：$V = \mathrm{null}(T - I) \oplus \mathrm{range}(T - I)$.

三、 **(10 分)** 对任意 $v \in V$，设 $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$（$c_i \in \mathbb{F}$），则：

$$\psi(v) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi(v_i)$$

又对偶基 $\{\varphi_i\}$ 满足 $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$，故：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \psi(v_i)\varphi_i\right)(v) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i)\varphi_i\left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) c_i$$

两边相等，故 $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i)\varphi_i$.

四、 **(10 分)**

1. 设 $\deg p = m$，对任意$f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$，由带余除法得 $f = pq + r$（$r = 0$ 或 $\deg r < m$），故 $f + U = r + U$。若 $r_1 + U = r_2 + U$，则 $r_1 - r_2 = pq$，由次数关系得 $r_1 = r_2$，故

$\dim(\mathcal{P}(\mathbb{C})/U)=m$（$\mathcal{P}(\mathbb{C})/U$ 的维数等价于余数多项式 r 构成的空间维数，自然为 m）.

2. 次数小于 m 的多项式 $1,x,\cdots,x^{m-1}$ 的等价类线性无关且张成商空间，故基为：

$$\{1+U,\ x+U,\ \cdots,\ x^{m-1}+U\}.$$

五、 (10 分) 必要性： 设 S,T 可同时对角化，则存在 V 的一组基 $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$（设 $P=(v_1,\cdots,v_n)$），使得 $[S]=P\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P^{-1},\quad [T]=P\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)P^{-1}$，则

$$[ST]=[S][T]=P\operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n)P^{-1}=[T][S]=[TS]$$

因此必要性成立。

充分性： 因 S 可对角化，故 V 可分解为 S 的特征子空间的直和：$V=\bigoplus\limits_{\lambda\in\sigma(S)}E(\lambda,S)$，其中 $\sigma(S)$ 是 S 的特征值集，$E(\lambda,S)=\{v\in V\mid Sv=\lambda v\}$ 为对应特征子空间。
任取 $\lambda\in\sigma(S)$ 及 $v\in E(\lambda,S)$，则 $Sv=\lambda v$. 由 $ST=TS$，得：

$$S(Tv)=T(Sv)=T(\lambda v)=\lambda(Tv)$$

故 $Tv\in E(\lambda,S)$，即 $T(E(\lambda,S))\subseteq E(\lambda,S)$，因此 $E(\lambda,S)$ 是 T 的不变子空间。
因 T 可对角化，其在不变子空间 $E(\lambda,S)$ 上的限制 $T|_{E(\lambda,S)}$ 仍可对角化。故 $E(\lambda,S)$ 存在一组由 $T|_{E(\lambda,S)}$ 的特征向量组成的基，记为 B_λ。则 $B_\lambda\subseteq E(\lambda,S)$，$B_\lambda$ 中的向量也是 S 的特征向量（对应特征值 λ）。
从而令 $B=\bigcup\limits_{\lambda\in\sigma(S)}B_\lambda$，则 B 是 V 的一组基（由直和性质），且每个向量均为 S 和 T 的共同特征向量。因此 S,T 在基 B 下的矩阵均为对角矩阵，即 S,T 可同时对角化。充分性成立。
得证。

六、 (10 分) 特征子空间 $E(\lambda,A)=\ker(\lambda I-A)$，其维数为 $n-r(\lambda I-A)$.
因矩阵与其转置秩相等，即 $r(\lambda I-A)=r(\lambda I-A^T)$，故：

$$\dim E(\lambda,A)=n-r(\lambda I-A)=n-r(\lambda I-A^T)=\dim E(\lambda,A^T).$$

七、 (10 分)

(1) 先证明 $(W_1+W_2)^\perp\subseteq W_1^\perp\cap W_2^\perp$：
任取 $v\in(W_1+W_2)^\perp$，则对 $\forall v_1\in W_1$，$v\perp v_1$；对 $\forall v_2\in W_2$，$v\perp v_2$，故 $v\in W_1^\perp\cap W_2^\perp$.
再证明 $(W_1+W_2)^\perp\supseteq W_1^\perp\cap W_2^\perp$：
任取 $v\in W_1^\perp\cap W_2^\perp$，对 $w_1+w_2\in W_1+W_2$，$\langle v,w_1+w_2\rangle=\langle v,w_1\rangle+\langle v,w_2\rangle=0$，故$v\in(W_1+W_2)^\perp$.

(2) 对 $W_1^\perp,W_2^\perp$ 用 (1) 得 $(W_1^\perp+W_2^\perp)^\perp=W_1\cap W_2$，两边取正交补即证.

八、 **(10 分)**

1. 已知 $v_1, \cdots, v_k$ 是 $C = XX^T$ 的单位特征向量，且 C 是实对称矩阵。实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交（以本题为例，设 $Cv = \lambda v$，$Cw = \mu w$，则 $\lambda v^T w = (Cv)^T w = v^T C w = \mu v^T w$，由于 $\lambda \neq \mu$ 可得 $v^T w = \langle v, w \rangle = 0$），故：

$$\langle v_i, v_j \rangle = v_i^T v_j = \delta_{ij}$$

故 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 是 V 的规范正交基。

正交投影需满足两个条件：幂等性（$P_V^2 = P_V$）和对称性（$P_V^T = P_V$）。

幂等性：因 $U = (v_1, \cdots, v_k)$ 的列是规范正交基，故 $U^T U = I$，因此：

$$P_V^2 = (UU^T)(UU^T) = U(U^T U)U^T = U I_k U^T = UU^T = P_V$$

对称性：

$$P_V^T = (UU^T)^T = (U^T)^T U^T = UU^T = P_V$$

且 P_V 的值域为 $\operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_k\} = V$，故 P_V 是 $\mathbb{R}^n$ 到 V 的正交投影。

2. 对任意向量x和正交投影P，有正交分解$x = Px + (x - Px)$，故：

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \implies \|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2$$

因此总投影误差可写为：

$$\sum_{i=1}^{p} \|x_i - Px_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \|Px_i\|^2$$

因 $\sum \|x_i\|^2$ 是常数（与 P 无关），故即证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \|P_V x_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{p} \|P_W x_i\|^2$.

$$\|P_V x_i\|^2 = (P_V x_i)^T (P_V x_i) = x_i^T P_V^T P_V x_i = x_i^T P_V x_i \quad (\text{因 } P_V^T = P_V = P_V^2)$$

故总和为：

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^T P_V x_i = \operatorname{tr}\left(P_V \sum_{i=1}^{p} x_i x_i^T\right) = \operatorname{tr}(P_V C)$$

（注：$x^T A x = \operatorname{tr}(A x x^T)$　(1)，且$C = XX^T = \sum x_i x_i^T$）

设 C 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$，对应的规范正交特征向量为$v_1, \cdots, v_n$，则 $C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$。对 $P_V = UU^T$（$U = (v_1, \cdots, v_k)$），有：

$$\operatorname{tr}(P_V C) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j v_j^T\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad (\text{仅当} i = j \text{时迹非零})$$

对任意 k 维子空间 W 的正交投影 $P_W = QQ^T$（Q 的列是 W 的规范正交基），利用 (1) 有：$\operatorname{tr}(P_W v_i v_i^T) = v_i^T Q Q^T v_i = \|v_i^T Q\|^2$，从而：

$$\operatorname{tr}(P_W C) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \|v_i^T Q\|^2$$

因 $\sum_{i=1}^{n}\|v_i^T Q\|^2 = \mathrm{tr}(Q^T(\sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T)Q) = \mathrm{tr}(Q^T I Q) = k$，由特征值的排序性，最大的 $\mathrm{tr}(P_W C)$ 必为 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$（当 Q 的列取前 k 个特征向量时达到）。

因此 $\sum\|P_V x_i\|^2 \geq \sum\|P_W x_i\|$，得证。

九、 (20 分)

1. 假：反例 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\mathbf{0}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0}$，不等。

2. 真：代数基本定理的结果。

3. 假：反例 $T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 不可对角化，无对角矩阵表示。

4. 假：内积需满足正定性，取 $f(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 为0，在 $(\frac{1}{2},1]$ 非零，则 $\langle f,f\rangle=0$ 但 $f\neq 0$，不是内积。