卡尔曼滤波

Introduction

卡尔曼滤波器（`Kalman filter`）就是线性动态系统（`LDS`，`Linear dynamic system`）；

在控制领域中的卡尔曼滤波器，可以参考这篇文章：

https://www.bzarg.com/p/how-a-kalman-filter-works-in-pictures/

在神经科学领域，卡尔曼滤波器用于神经信号的解码，尤其是脑机接口中，应用广泛；但是在使用上、理解上和在控制领域可能有一点区别；

这里介绍在神经科学领域中如何理解卡尔曼滤波器用于神经信号的解码。

算法讲解

以假肢的运动控制为例，利用多电极阵列采集运动皮层的神经信号，记为 $Y \in \mathcal{R}^{M\times K}$ ，其中 M 表示电极通道的数目， K 表示时间，用 $X \in \mathcal{R}^{N\times K}$ ， N 表示假肢的运动参数，也就是控制假肢运动的信号；

因为是线性时不变系统，所以有如下关系：

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_k\,,\ \boldsymbol{x}_1 \backsim \mathcal{N}(\omega,\ \Omega)$$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{q}_k$$

其中： $\boldsymbol{w}_k \backsim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{W})$， $\boldsymbol{q}_k \backsim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{Q})$； $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{N\times N}$ 是状态矩阵（state matrix）， $\boldsymbol{H} \in \mathcal{R}^{M\times N}$ 是观测矩阵（observation matrix）。

在控制系统中，我们其实是清楚具体的动态关系的，也就是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{Q}$ 这些参数是已知的，在实际的控制过程中，每次都是根据估计得到的上一时刻的 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ ，当前时刻的 $\boldsymbol{y}_k$ 估计得到当前时刻的 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ ，

在神经信号解码的过程中，其实是有一个训练过程的，也就是先采集训练数据（包括假肢的运动状态 $\boldsymbol{X}$ 和神经信号 $\boldsymbol{Y}$ ），然后根据这些训练用的数据先计算出固定的 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{Q}$ ，计算方法如下：

$$\boldsymbol{A} = argmin_{\boldsymbol{A}} \sum_{k=2}^{K} ||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1}||^2$$

$$\boldsymbol{H} = argmin_{\boldsymbol{H}} \sum_{k=1}^{K} ||\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k||^2$$

可以利用最小二乘法进行求解，得到：

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T(\boldsymbol{X}_1\ \boldsymbol{X}_1^T)^{-1}$ ，其中 $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_{:,1:K-1}$ ， $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_{:,2:K}$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T)^{-1}$$

有了 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{H}$ 之后，就可以比较容易地获得：

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{K-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1)(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1)^T$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{K}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{X})(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{X})^T$$

至此，整个模型已经建立起来了，在实际的解码过程中，需要对当前的状态/控制信号 $\boldsymbol{x}_k$ 进行解码。

已知有：

$$\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1} \backsim \mathcal{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{W})$$

$$\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k \backsim \mathcal{N}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{Q})$$

在 $k-1$ 时刻最佳估计为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ ，分布的协方差为 $\boldsymbol{W}_{k-1}$

One Step estimation

于是在经过一步估计之后，k 时刻的状态理论上应该是通过上一个时刻状态变量的估计 $(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1})$ 得到的

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^* = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k^* = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{W}$$

上面有个星号是因为这个结果并不是最终在 k 时刻状态变量的估计值，是未经过修正的；

这个时候我们可以继续估计此时的观测信号 $\boldsymbol{y}_k$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k^* = \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k^* = \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}^*\boldsymbol{H}^T$$

然而，实际上我们的电极记录到的信号是 $(\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{Q})$ 与上面估计得到的 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_k^*$ ，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k^*$ 并不一致，所以需要对我们一步估计的结果进行修正，这里先引入一个定理。

Combining Gaussians

高斯分布的组合，针对同一个变量，两个估计得到的高斯分布不同，可以通过将这两个高斯分布相乘得到新的高斯分布：

$$\mathcal{N}(x,\mu_0,\sigma_0)\cdot\mathcal{N}(x,\mu_1,\sigma_1) = \mathcal{N}(x,\mu_{new},\sigma_{new})$$

其中

$$\mu_{new} = \mu_0 + \frac{\sigma_0^2(\mu_1-\mu_0)}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}$$

$$\sigma_{new}^2 = \sigma_0^2 - \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}$$

可以令 $g=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}$ ，g 就是卡尔曼增益

$\mu_{new}=\mu_0+g(\mu_1-\mu_0)$

$\sigma_{new}^2=\sigma_0^2-g\ \sigma_0^2$

有了上面的公式之后，我们对于 $\boldsymbol{y}_k$ 现在有一个估计和一个观测，并且都是高斯分布的，现在对于这两个高斯分布进行结合：

$(\boldsymbol{\mu}_0,\boldsymbol{\Sigma}_0)=(\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*,\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T)$

$(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Sigma}_1)=(\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{Q})$

然后利用前面的公式进行组合得新的 $(\boldsymbol{\mu}_{new},\boldsymbol{\Sigma}_{new})$

$\boldsymbol{\mu}_{new}=\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*\ +\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*)$

$\boldsymbol{\Sigma}_{new}=\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T)$

这里的 $(\boldsymbol{\mu}_{new},\boldsymbol{\Sigma}_{new})$ 就包含了当前时刻状态的及其方差的估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ ，即：

$\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*\ +\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*)$

$\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T)$

$\boldsymbol{G}_{new}=\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T+Q)^{-1}$

两边去掉 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}^T$ ，可以得到：

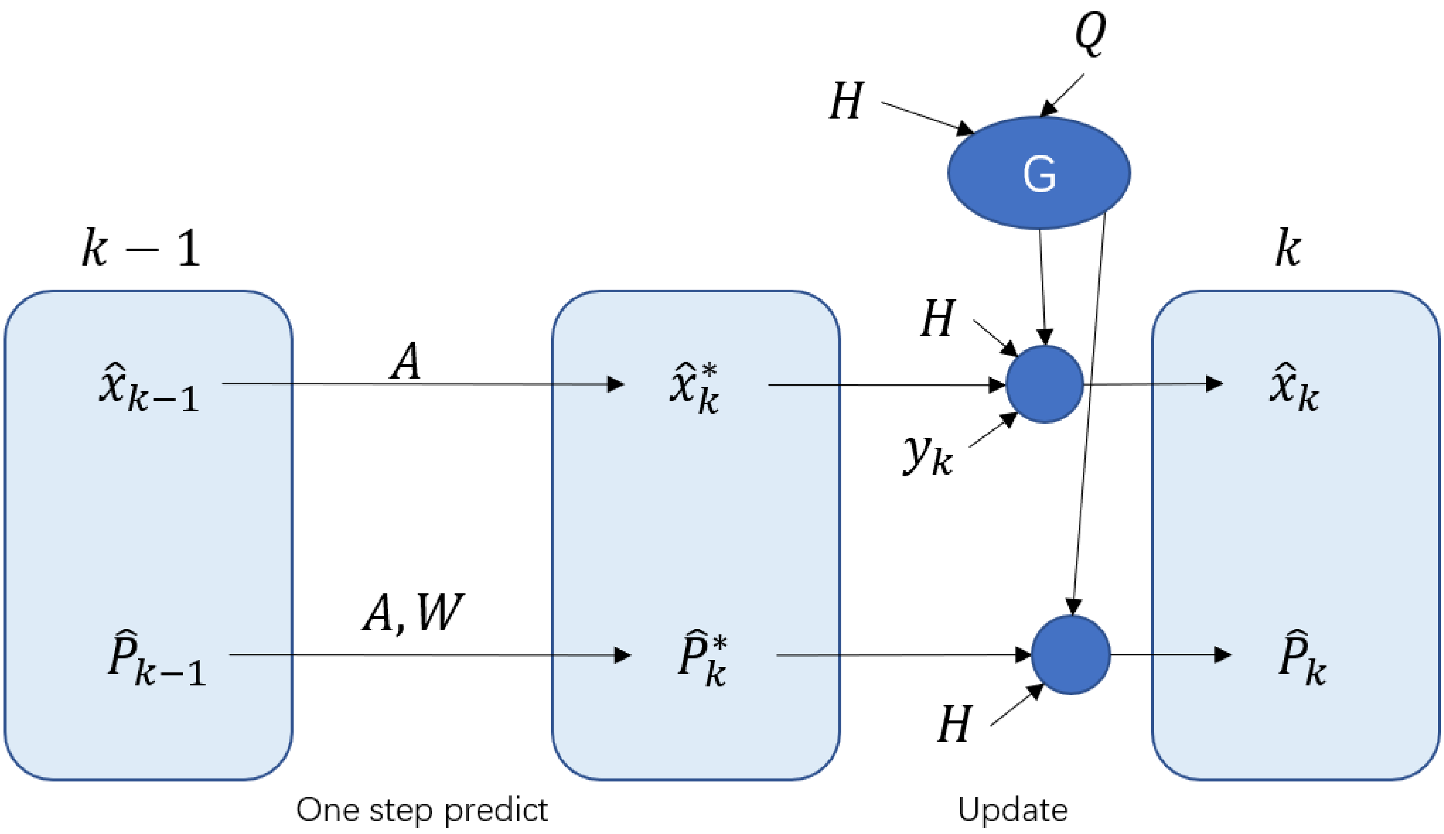
$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\hat{\boldsymbol{x}_k^*}+\boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_k^*)$

$\hat{\boldsymbol{P}}_k=\hat{\boldsymbol{P}}_k^*-\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*$

$\boldsymbol{G}_k=\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{P}}_k^*\boldsymbol{H}^T+\boldsymbol{Q})^{-1}$

由此得到了 k 时刻状态变量的估计，然后不断重读这个过程直到时刻 K

一个形象的示意图就是，图中表示的是 $k-1$ 时刻已知状态变量的估计值，利用已有信息和新观测到的变量 $\boldsymbol{y}_k$ 对 k 时刻的状态变量进行估计；


Q
H
G
$k-1$
k
H
$\hat{x}_{k-1}$
A
$\hat{x}_k^*$
$\hat{x}_k$
y_k
A, W
$\hat{P}_{k-1}$
$\hat{P}_k^*$
$\hat{P}_k$
H
One step predict
Update