数学基础—线性代数

主要内容

线性代数（上）

- **矩阵及其基本运算**
  - 1.矩阵的基本概念与意义以及常见特殊矩阵
  - 2.矩阵的加法减法数乘以及性质
  - 3.矩阵的乘法以及性质
  - 4.矩阵运算在深度学习中的应用(初级)
  - 5.矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)
- **矩阵的行列式**
  - 1.行列式的引入
  - 2.行列式的计算
  - 3.特殊矩阵的行列式与行列式的性质
  - 4.行列式按行(列)展开，代数余子式
  - 5.行列式在接线性方程组中的应用：克莱姆法则
- **矩阵的逆**
  - 1.矩阵逆的引入以及矩阵逆的定义
  - 2.矩阵逆的计算
  - 3.矩阵逆的常用性质，以及特殊矩阵的逆
  - 4.矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)
  - 5.分块矩阵

特殊矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(\mathrm{n}-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式的性质

性质1　行列式与它的转置行列式相等

性质2　互换行列式的两行(列)，行列式变号

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则次行列式等于零

性质3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k，等于用k乘次行列式

性质4　行列式中如果两行(列)的元素成比例，则次行列式等于零

性质5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第i列的元素都是两数之和

性质1,2就像1+1=2一样自然，要烂熟于心！

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

性质6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如，以数k乘第j列加到第i列上(记作 $c_i + kc_j$)，有

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & (a_{2i} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} (i \neq j)
$$

行列式的性质

性质7

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D=D_1D_2$$

性质8 $|AB| = |A||B|$.

行列式的性质

简化计算

例：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$