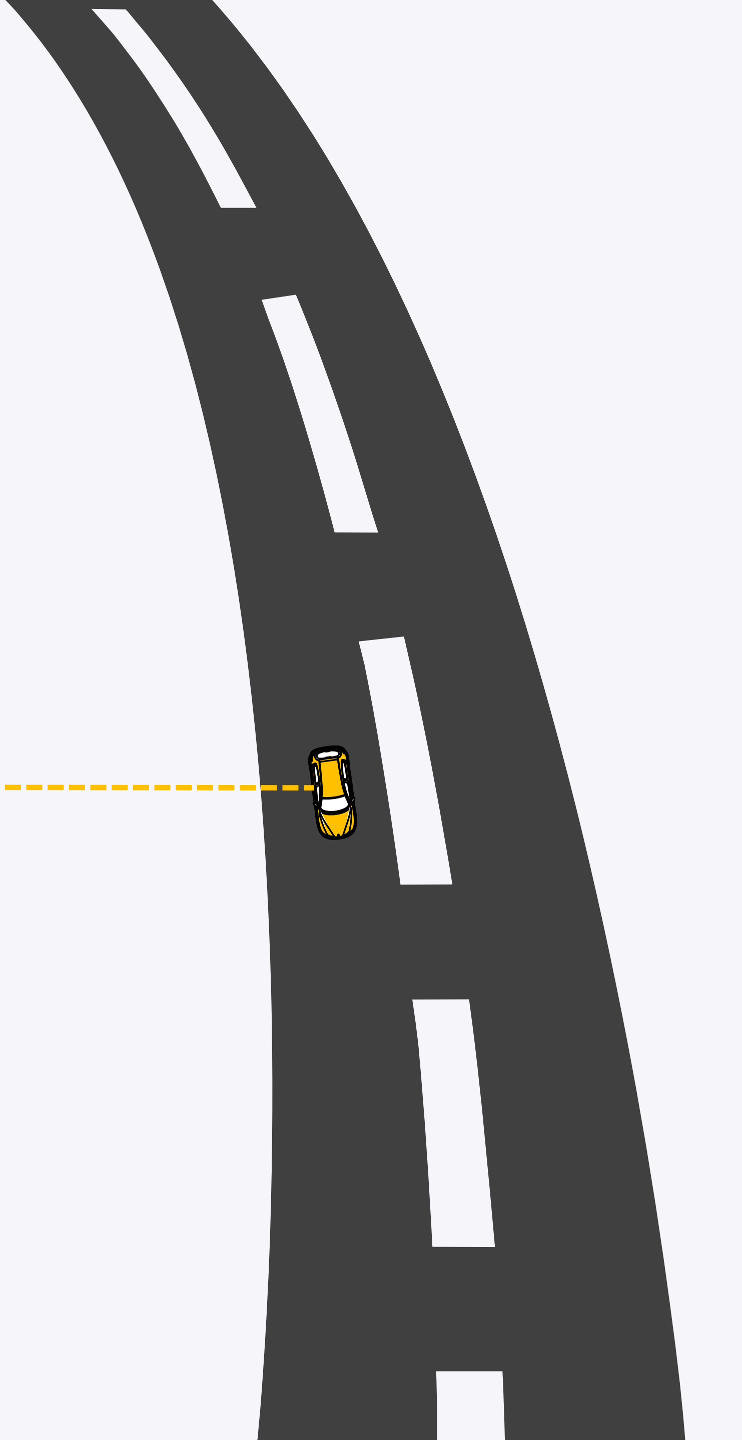
# 数学基础—线性代数

# 主要内容

- 线性代数（上）
  - 矩阵及其基本运算
    - 1.矩阵的基本概念与意义以及常见特殊矩阵
    - 2.矩阵的加法减法数乘以及性质
    - 3.矩阵的乘法以及性质
    - 4.矩阵运算在深度学习中的应用(初级)
    - 5.矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)
  - 矩阵的行列式
    - 1.行列式的引入
    - 2.行列式的计算
    - 3.特殊矩阵的行列式与行列式的性质
    - 4.行列式按行(列)展开，代数余子式
    - 5.行列式在接线性方程组中的应用：克莱姆法则
  - 矩阵的逆
    - 1.矩阵逆的引入以及矩阵逆的定义
    - 2.矩阵逆的计算
    - 3.矩阵逆的常用性质，以及特殊矩阵的逆
    - 4.矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)
    - 5.分块矩阵



# 行列式按行(列)展开，代数余子式

降阶处理，用低阶的行列式来算高阶的行列式

在n阶行列式中，把$(i,j)$元$a_{ij}$的第$i$行和第$j$列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做$(i,j)$元$a_{ij}$的**余子式**，记作$M_{ij}$；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

$A_{ij}$叫做(i,j)元$a_{ij}$的**代数余子式**.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中(3,2)元$a_{32}$的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

# 行列式按行(列)展开，代数余子式

**引理**　一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除(i,j)元$a_{ij}$外都为0，那么行列式等于$a_{ij}$与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$ .

**证明**　先证$(i,j)=(1,1)$的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再证一般情况：基本的思想就是对调位置，但是不能改变其他数的相对位置

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

# 行列式按行(列)展开，代数余子式

**定理** 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in} \, (i = 1, 2, \cdots n),$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj} \, (j = 1, 2, \cdots n).$$

**证：**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

**推论**　行列式某一行（列）的元素另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即 $$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=0(i\neq j),$$
或$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

**证**　把行列式 $D=\det(a_{ij})$ 按第 $j$ 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{array}$$