数学基础—线性代数

主要内容

线性代数（上）

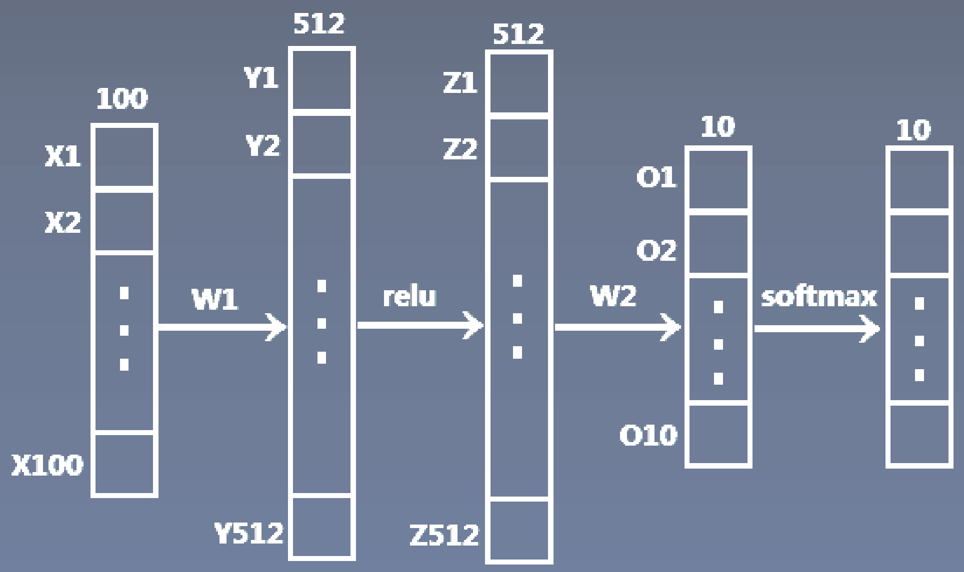
- **矩阵及其基本运算**
  - 1.矩阵的基本概念与意义以及常见特殊矩阵
  - 2.矩阵的加法减法数乘以及性质
  - 3.矩阵的乘法以及性质
  - 4.矩阵运算在深度学习中的应用(初级)
  - 5.矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)
- **矩阵的行列式**
  - 1.行列式的引入
  - 2.行列式的计算
  - 3.特殊矩阵的行列式与行列式的性质
  - 4.行列式按行(列)展开，代数余子式
  - 5.行列式在接线性方程组中的应用：克莱姆法则
- **矩阵的逆**
  - 1.矩阵逆的引入以及矩阵逆的定义
  - 2.矩阵逆的计算
  - 3.矩阵逆的常用性质，以及特殊矩阵的逆
  - 4.矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)
  - 5.分块矩阵

矩阵运算在深度学习中的应用(初级)

数字图片识别

输入一张为数字(0-9)的图片，大小为10*10

下面也可以体现出矩阵是一种特征空间的变换



$W1$: $100 * 512$ 的矩阵
$W2$: $512 * 10$ 的矩阵

单样本：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{100})w_1 = (y_1, y_2, \cdots, y_{512})$$

$$(z_1, z_2, \cdots, z_{512})w_2 = (o_1, o_2, \cdots, o_{10})$$

n个样本：

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,100} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n100} \end{bmatrix} w_1 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,512} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,512} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1,512} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{n512} \end{bmatrix} w_2 = \begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1,10} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1} & o_{n2} & \cdots & o_{n,10} \end{bmatrix}$$

矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)

矩阵的迹

定义 在线性代数中，一个$n \times n$矩阵A的主对角线（从左上方至右下方的对角线）上各个元素的总和被称为矩阵A的迹（或迹数），一般记作$tr(A)$。

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$tr(AB) = tr(BA)$对于满足矩阵乘法条件（型号匹配的）任意$A_{m\times n}$、 $B_{n\times m}$均成立.

$(AB)_{m\times m}$ $(BA)_{n\times n}$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{si}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{si} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{si} b_{is} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{si}$$

矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)

矩阵的转置

定义 把矩阵A的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做矩阵A的**转置**，记作 A^T.

例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的转置为

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

运算律

$$(i)(A^T)^T = A$$

$$(ii)(A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(iii)(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(iiii)(AB)^T = B^T A^T$$

矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)

对称矩阵

定义 设A为n阶方阵，如果满足 $A^T=A$ ，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,
那么A称为**对称矩阵**，简称**对称阵**.

对称阵的特点是：它的元素以对角线为对称轴对应相等
很显然单位矩阵以及对角矩阵都为对称矩阵

例8 设矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，E为n阶单位阵，$H=E-2XX^T$
证明H是对称阵，且 $HH^T=E$.

$$HH^T=(E-2XX^T)(E-2XX^T)^T=(E-2XX^T)(E^T-(2XX^T)^T)$$
$$=(E-2XX^T)\,(E-2XX^T)=E-2XX^T-2XX^T+4XX^TXX^T$$
$$=E$$

矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)

协方差矩阵

N个样本，每个样本的特征的维度为n
易证协方差矩阵是对称矩阵(这个结论很重要!!!)

$$X=\begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{pmatrix}_{N\times n} \qquad X^T=(x_1,x_2,\cdots,x_N)_{n\times N}$$

$X^TX_{n\times n}$为样本的**协方差矩阵**

X^T如何得到的，以及协方差矩阵如何计算让我们期待一下，到了分块矩阵再揭晓！