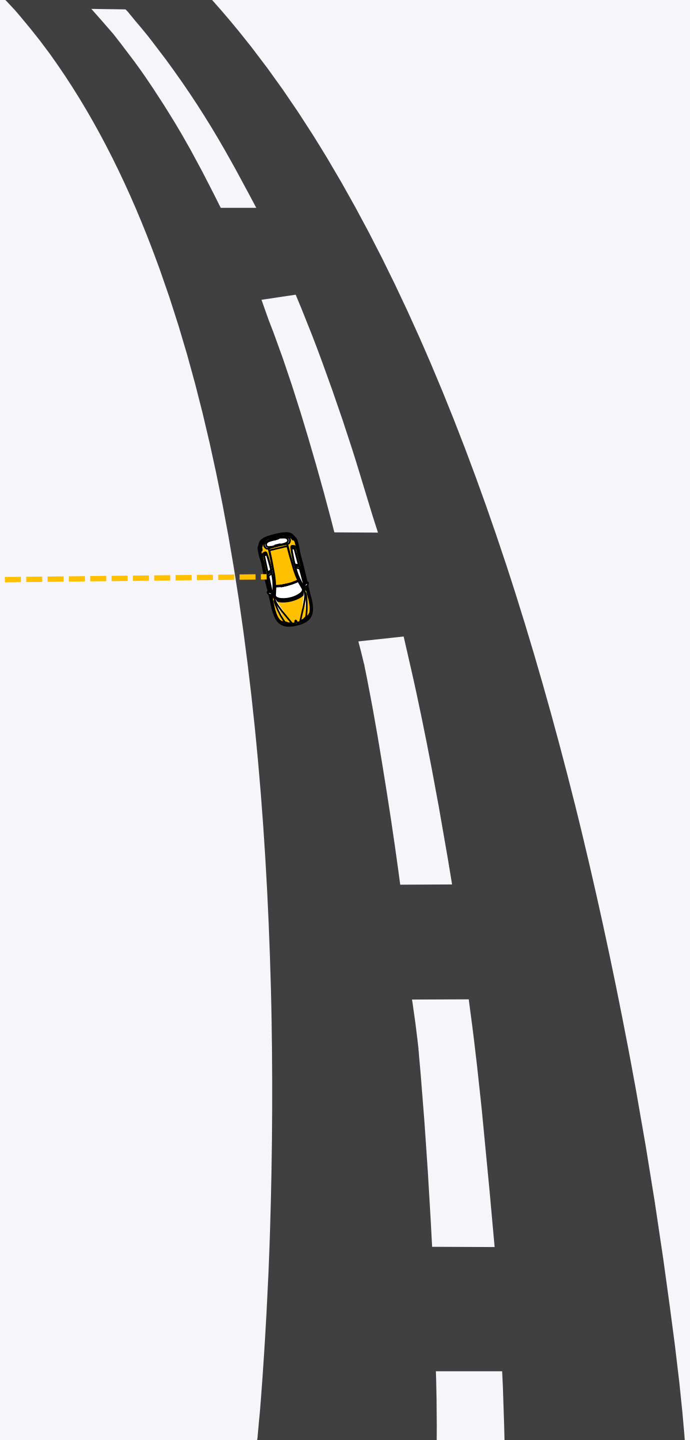
数学基础—线性代数

主要内容

- 线性代数（上）
  - 矩阵及其基本运算
    - 1.矩阵的基本概念与意义以及常见特殊矩阵
    - 2.矩阵的加法减法数乘以及性质
    - 3.矩阵的乘法以及性质
    - 4.矩阵运算在深度学习中的应用(初级)
    - 5.矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)
  - 矩阵的行列式
    - 1.行列式的引入
    - 2.行列式的计算
    - 3.特殊矩阵的行列式与行列式的性质
    - 4.行列式按行(列)展开，代数余子式
    - 5.行列式在接线性方程组中的应用：克莱姆法则
  - 矩阵的逆
    - 1.矩阵逆的引入以及矩阵逆的定义
    - 2.矩阵逆的计算
    - 3.矩阵逆的常用性质，以及特殊矩阵的逆
    - 4.矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)
    - 5.分块矩阵



行列式的引入

二阶行列式

行列式的引入，从解方程组的角度去看，引入二阶行列式，使得解的形式有一定的规律性，且可以推广

用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$ (1)

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (2)$$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$

那么(2)式可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 为**二阶行列式**

行列式的引入

三阶行列式

定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (1)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (2)$$

（2）式称为数表（1）所确定的三阶行列式

注： 我们已经学过矩阵，所以这里的数表我们就认为是一个3*3的矩阵，对应的行列式称为**矩阵的行列式**

按照此式的定义，大家可以去验证，三元一次方程组也是满足前面二元一次方程组的行列式表达形式，后面更加通用的克莱姆法则

行列式的计算

全排列和逆序数

1.全排列：比如1,2,3的全排列有哪些

2.逆序数：

下面来讨论计算排列的逆序数的方法。

不失一般性，不妨设n个元素为1至n这n个自然数，并规定由大到小为标准次序.设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这n个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i (i=1,2,\cdots,n)$，如果比p_i大的且排在p_i前面的元素有t_i个，就说p_i这个元素的逆序数是t_i.全体元素的逆序数总和

$$t = t_1 + t_1 + \cdots + t_n = \sum_{t=1}^{n} t_i,$$

例4　求排列32514的逆序数

解　在排列32514

3排在首位，逆序数为0；

2的前面比2大的数有一个(3)，故逆序数为1；

5是最大数，逆序数为0；

1的前面比1大的数有三个(3、2、5)，故逆序数为3；

4的前面比4大的数有一个(5),故逆序数为1，

于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

行列式的计算

计算的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$