机器学习—线性代数

主要内容

1.矩阵的逆的引入以及矩阵逆的定义

2.矩阵逆的计算

3.矩阵逆的常用性质以及特殊矩阵的逆

4.矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)

5.分块矩阵

矩阵的逆的引入以及矩阵逆的定义

$$ax=b \Rightarrow x=a^{-1}b(a\neq 0)$$

$$Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b(A^{-1}\text{是什么不清楚})$$

假设$A_{n\times n}$ $x_{n\times 1}$ $b_{n\times 1}$

若存在一个矩阵$B_{n\times n}$

使得：$BA=E$

则：$BAx=Bb \Rightarrow x=Bb$

定义7 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使

$$AB=BA=E$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为矩阵A的逆矩阵，简称逆阵.

A的逆阵记作A^{-1}.即若$AB=BA=E$,则$B=A^{-1}$.

矩阵的逆的引入以及矩阵逆的定义

定理1　若矩阵A可逆，则$|A| \neq 0$.

证　A可逆，及有A^{-1}，使 $AA^{-1} = E$. 故　$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$，

所以 $|A| \neq 0$.

定理1,2非常重要，体现了行列式与可逆的关系!!!,要牢牢记住

定理2　若$|A| \neq 0$，则矩阵A可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

其中 A^* 为矩阵A的伴随阵.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j,$$

或$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$

$$c_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|.$$

$$c_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n} = 0.$$

推论　若 $AB = E$(或 $BA = E$)，则$B = A^{-1}$

矩阵逆的计算

例11　求方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ **的逆阵.**

解　求得$|A|=2\neq 0$，知A^{-1}存在. 再计算$|A|$的余子式

$$M_{11}=2,\quad M_{12}=3,\quad M_{13}=2,$$
$$M_{21}=-6, M_{22}=-6,\ M_{23}=-2,$$
$$M_{31}=-4, M_{32}=-5,\ M_{33}=-2,$$

得 $A^*=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$

矩阵逆的常用性质以及特殊矩阵的逆

性质

(i)若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$(A^{-1})^{-1}= A$.

(ii)若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(iii)若A,B为同阶矩阵且均可逆，且AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(iv)若A可逆，则 A^T亦可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

矩阵逆的常用性质以及特殊矩阵的逆

特殊矩阵的逆

求二阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆阵.

解 $|A|=ad-bc$，$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,
利用逆阵公式(10)，当$|A|\neq 0$时，有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

单位矩阵的逆矩阵为单位矩阵

对角矩阵的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)

多元线性回归问题

$x_1, x_2, \cdots, x_N, x_i \in \mathbb{R}^n$

$y_1, y_2, \cdots, y_N, y_i \in \mathbb{R}^1$

$y_1 = x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1n}a_n$

$y_2 = x_{21}a_1 + x_{22}a_2 + \cdots + x_{2n}a_n$

$\vdots$

$y_N = x_{N1}a_1 + x_{N2}a_2 + \cdots + x_{Nn}a_n$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$X_{N\times n}a_{n\times 1} = Y_{N\times 1}$

当$N = n$且$X_{N\times n}$可逆时：

$a = X^{-1}Y$

一般情况：$N \neq \mathrm{n}$

分块矩阵

加减乘运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似，分别说明如下：

(i)设矩阵A与B的行数、列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nr} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数、列数相同，那么

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}+B_{n1} & \cdots & A_{nr}+B_{nr} \end{pmatrix}$$

(ii)设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

(iii)设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots B_{tj}$的行数，那么

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\ (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$.

分块矩阵

加减乘运算

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{AB}$.

解　把A，B分块成

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right]=\begin{pmatrix}E&0\\A_1&E\end{pmatrix},$$

$$B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right]=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

则$AB=\begin{pmatrix}E&0\\A_1&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}.$$

而　$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-3&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix}$$

于是

$$AB=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline -2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{array}\right)$$

分块矩阵

转置运算和逆运算

(iv)设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

(v)设A为n阶矩阵，若A的分块矩阵只有对角线上有非零块，其余子块都为零矩阵，且对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中$A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$都是方阵，那么称A为分块对角阵.

分块对角阵的行列式具有下述性质

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

由此性质可知，若$|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$，则$|A|\neq 0$，并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

分块矩阵

转置运算和逆运算

设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

$$A=\left(\begin{array}{c:cc}5&0&0\\ \hdashline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1=(5),A_1^{-1}=(\frac{1}{5}),$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c:cc}\frac{1}{5}&0&0\\ \hdashline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right)$$

分块矩阵

协方差矩阵的计算

$$x_1, x_2, \cdots x_N \in R^n$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{pmatrix}_{N \times n} \qquad X^T = (x_1, x_2, \cdots, x_N)_{n \times N}$$

$X^T X_{n \times n}$ 为样本的**协方差矩阵**

$$X^T X = (x_1 \ x_2 \cdots x_N) \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{pmatrix}$$

$$= x_1 x_1^T + x_2 x_2^T + \cdots + x_N x_N^T$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i x_i^T$$