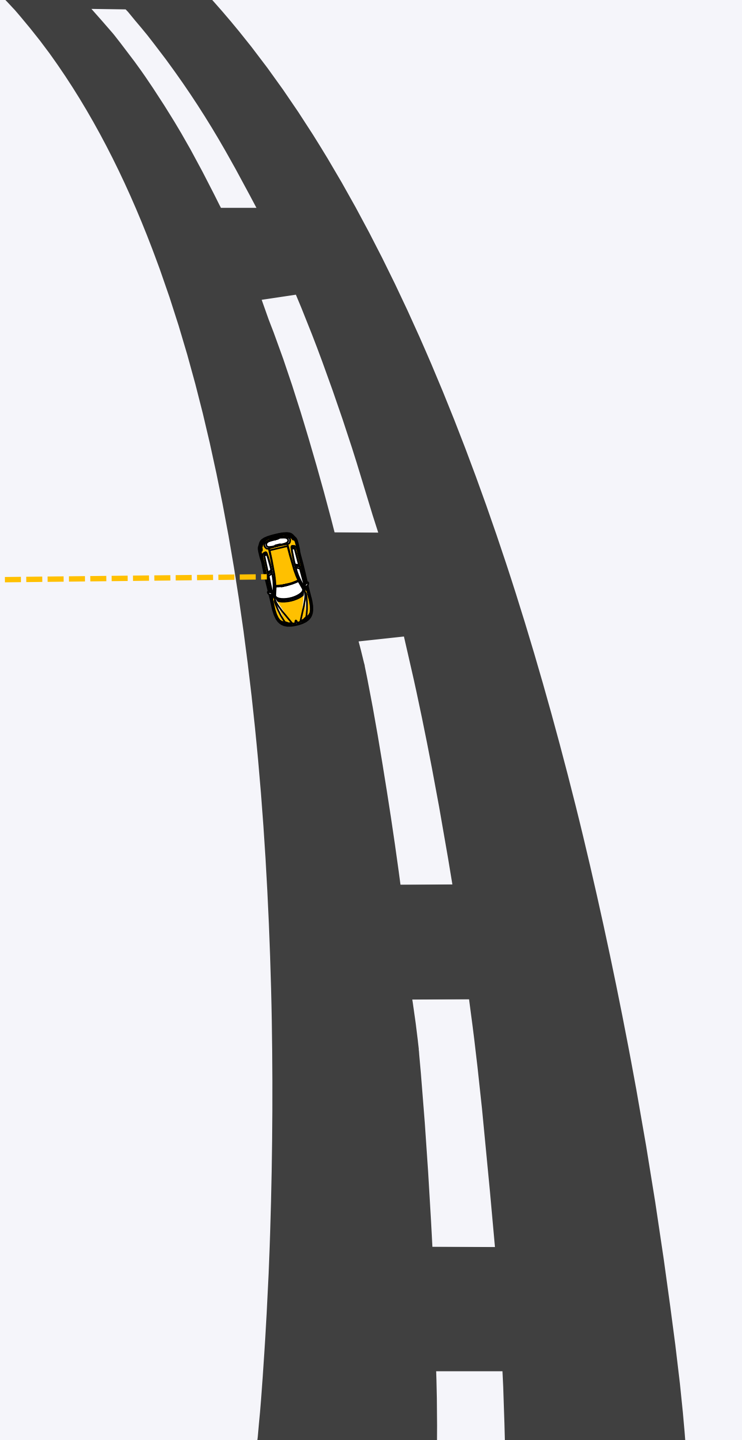
数学基础—线性代数

主要内容

- **线性代数（上）**
  - **矩阵及其基本运算**
    - 1.矩阵的基本概念与意义以及常见特殊矩阵
    - 2.矩阵的加法减法数乘以及性质
    - 3.矩阵的乘法以及性质
    - 4.矩阵运算在深度学习中的应用(初级)
    - 5.矩阵的迹，矩阵的转置，对称矩阵(协方差矩阵)
  - **矩阵的行列式**
    - 1.行列式的引入
    - 2.行列式的计算
    - 3.特殊矩阵的行列式与行列式的性质
    - 4.行列式按行(列)展开，代数余子式
    - 5.行列式在接线性方程组中的应用：克莱姆法则
  - **矩阵的逆**
    - 1.矩阵逆的引入以及矩阵逆的定义
    - 2.矩阵逆的计算
    - 3.矩阵逆的常用性质，以及特殊矩阵的逆
    - 4.矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)
    - 5.分块矩阵



行列式的引入

二阶行列式

行列式的引入，从解方程组的角度去看，引入二阶行列式，使得解的形式有一定的规律性，且可以推广

定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 为**二阶行列式**

用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$ (1)

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (2)$$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$

那么(2)式可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

行列式的引入

三阶行列式

定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (1)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (2)$$

（2）式称为数表（1）所确定的三阶行列式

注：我们已经学过矩阵，所以这里的数表我们就认为是一个3*3的矩阵，对应的行列式称为**矩阵的行列式**

按照此式的定义，大家可以去验证，三元一次方程组也是满足前面二元一次方程组的行列式表达形式，后面更加通用的克莱姆法则

行列式的计算

全排列和逆序数

1.全排列：比如1,2,3的全排列有哪些

2.逆序数：

下面来讨论计算排列的逆序数的方法。

不失一般性，不妨设n个元素为1至n这n个自然数，并规定由大到小为标准次序.设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这n个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,

如果比p_i大的且排在p_i前面的元素有t_i个，就说p_i这个元素的逆序数是t_i.全体元素的逆序数总和

$$t = t_1 + t_1 + \cdots + t_n = \sum_{t=1}^{n} t_i ,$$

例4　求排列32514的逆序数

解　在排列32514

3排在首位，逆序数为0；

2的前面比2大的数有一个(3)，故逆序数为1；

5是最大数，逆序数为0；

1的前面比1大的数有三个(3、2、5)，故逆序数为3；

4的前面比4大的数有一个(5),故逆序数为1，

于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

行列式的计算

计算的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

特殊矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(\mathrm{n}-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式的性质

性质1　行列式与它的转置行列式相等

性质2　互换行列式的两行(列)，行列式变号

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则次行列式等于零

性质3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k，等于用k乘次行列式

性质4　行列式中如果两行(列)的元素成比例，则次行列式等于零

性质5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第i列的元素都是两数之和

性质1,2就像

1+1=2一样自然，

要烂熟于心！

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

性质6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如，以数k乘第j列加到第i列上(记作 $c_i + kc_j$)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{2i} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j)$$

行列式的性质

简化计算

例：

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40.$$

行列式的性质

性质7

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D=D_1D_2$$

性质8 $|AB|=|A||B|$.

行列式按行(列)展开，代数余子式

降阶处理，用低阶的行列式来算高阶的行列式

在n阶行列式中，把(i,j)元a_{ij}的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做(i,j)元a_{ij}的**余子式**，记作M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫做(i,j)元a_{ij}的**代数余子式**.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中(3,2)元a_{32}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

行列式按行(列)展开，代数余子式

引理 一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除(i,j)元a_{ij}外都为0，那么行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明 先证$(i,j)=(1,1)$的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再证一般情况：基本的思想就是对调位置，但是不能改变其他数的相对位置

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式按行(列)展开，代数余子式

定理 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in} \ (i = 1, 2, \cdots n),$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj} \ (j = 1, 2, \cdots n).$$

证:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

推论 行列式某一行（列）的元素另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=0(i\neq j),$

或$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$

证 把行列式 $D=\det(a_{ij})$按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

克莱姆法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

与二、三元线性方程组类似，它的解可以用n阶行列式表示，即有

克莱姆法则 如果方程的系数行列式不等于0，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

那么方程有唯一解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}.$

其中$D_j(j = 1,2,\ldots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后得到的n阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克莱姆法则

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

定理： 如果上面方程组的系数行列式D不为0，则方程一定有解且是唯一

定理： 如果上面方程无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

定理： 如果上面的齐次线性方程组的系数行列式D不为0，则该齐次线性方程组只有0解，无非零解

定理： 如果上面的齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零