

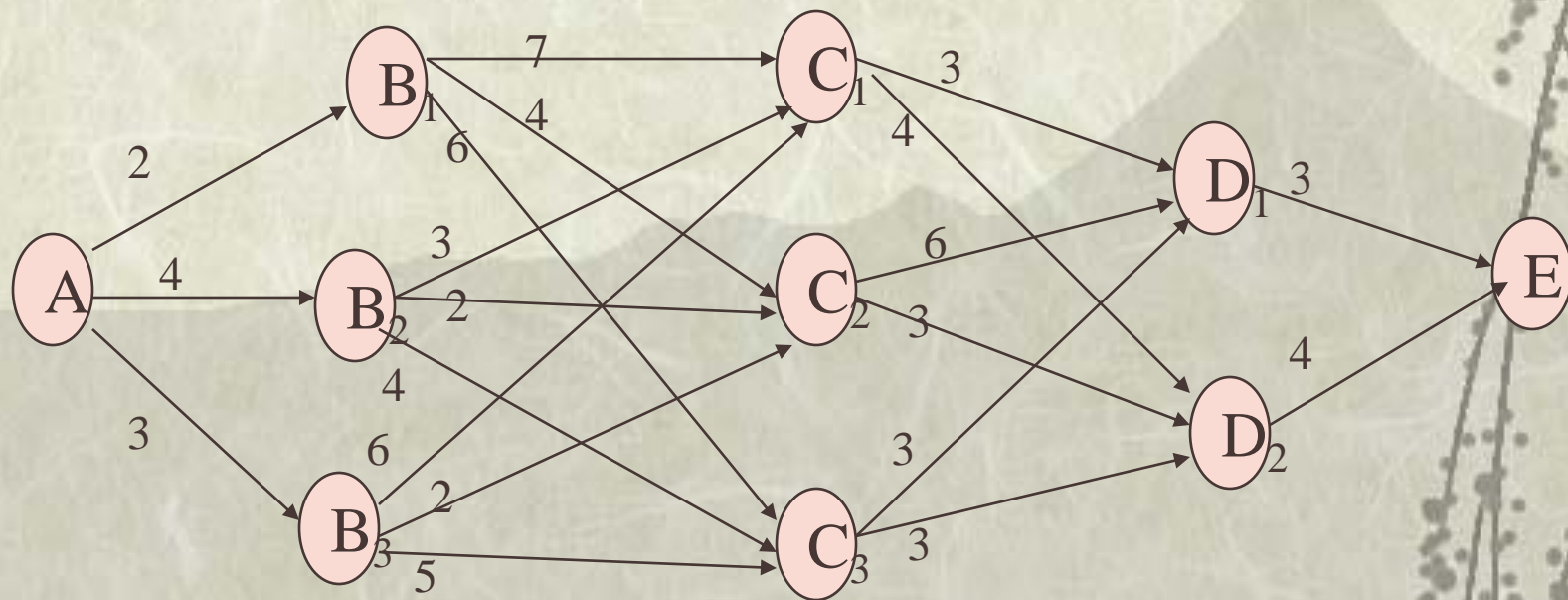
# 动态规划

## (Dynamic Programming)

动态规划是1951年由美国数学家贝尔曼(Richard Bellman)提出，它是解决一类多阶段决策问题的优化方法，也是考察问题的一种途径，而不是一种算法（如LP单纯形法）。因此它不象LP那样有一个标准的数学表达式和明确定义的一组规则，而必须对具体问题进行分析处理。

# 动态规划的基本概念和最优化原理

## 一、引例（最短路问题）



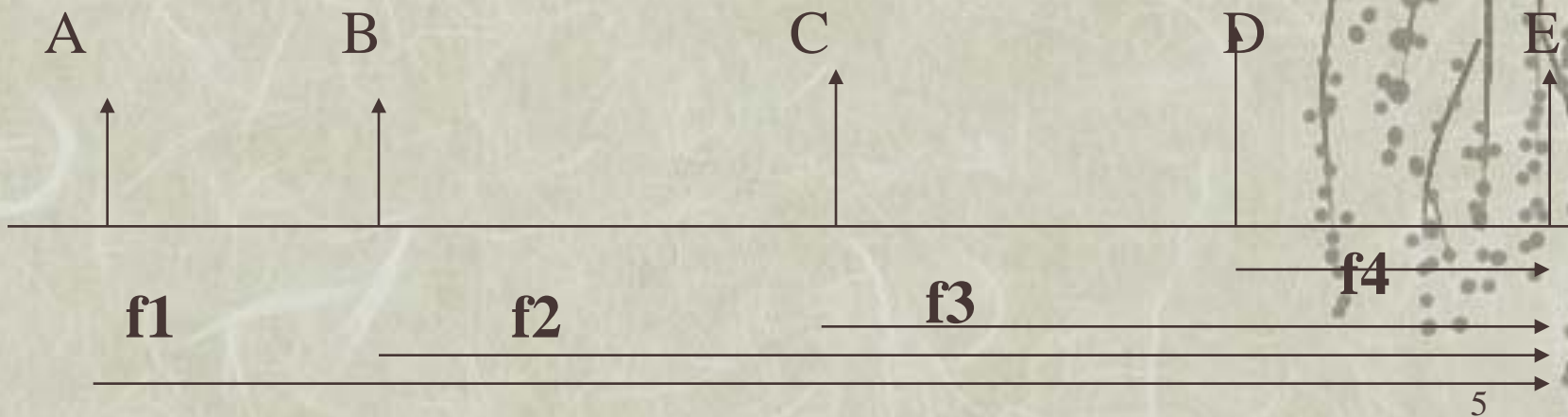
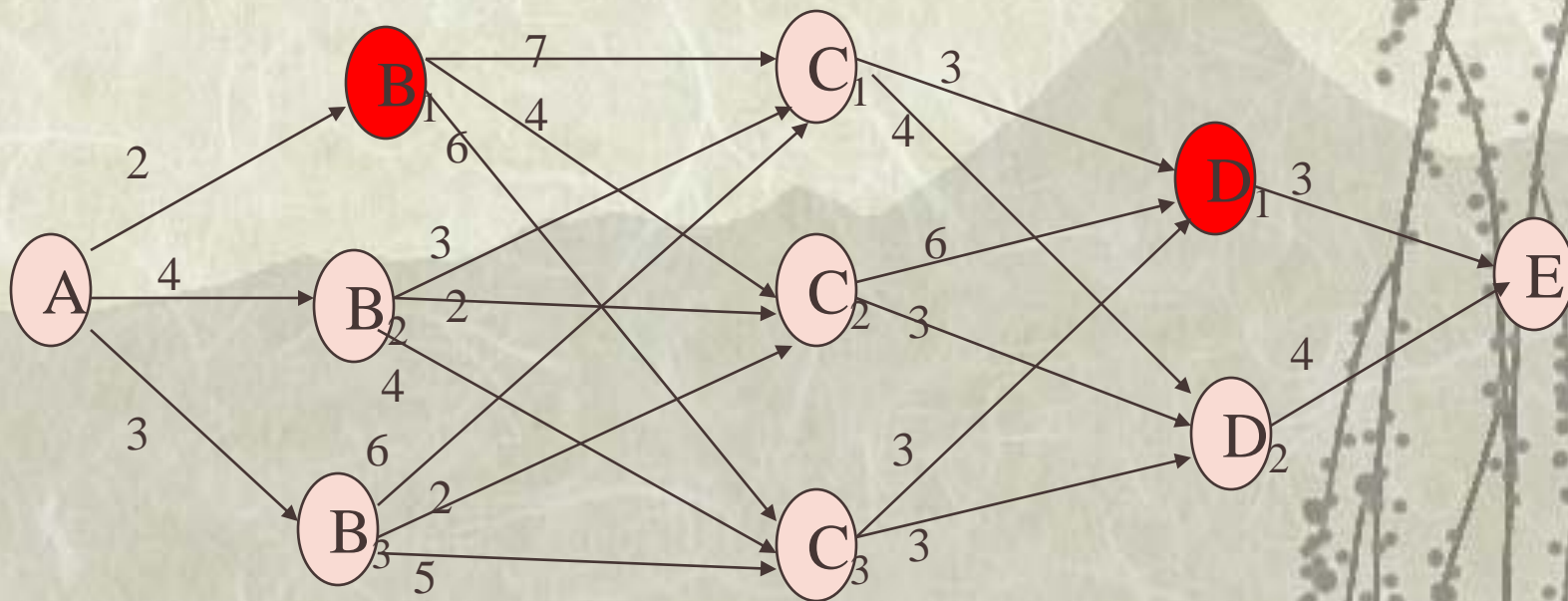
假如上图是一个线路网络，两点之间连线上的数字表示两点间的距离（或费用），我们的问题是要将货物从A地运往E地，中间通过B、C、D三个区域，在区域内有多条路径可走，现求一条由A到E的线路，使总距离最短（或总费用最小）。

将该问题划分为4个阶段的决策问题，即第一阶段为从A到 $B_j$  ( $j=1, 2, 3$ )，有三种决策方案可供选择；第二阶段为从 $B_j$ 到 $C_j$  ( $j=1,2,3$ )，也有三种方案可供选择；第三阶段为从 $C_j$ 到 $D_j$  ( $j=1,2$ )，有两种方案可供选择；第四阶段为从 $D_j$ 到E，只有一种方案选择。如果用完全枚举法，则可供选择的路线有 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ （条），将其一一比较才可找出最短路线： $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow E$

其长度为12



- ❖ 显然，这种方法是不经济的，特别是当阶段数很多，各阶段可供的选择也很多时。
- ❖ 由于我们考虑的是从全局上解决求A到E的最短路问题，而不是就某一阶段解决最短路线，因此可考虑
- ❖ 从最后一阶段开始计算，由后向前逐步推至A点：



第四阶段(D→E),由D<sub>1</sub>到E只有一条路线,其长度f<sub>4</sub>(D<sub>1</sub>)=3,  
同理f<sub>4</sub>(D<sub>2</sub>)=4。

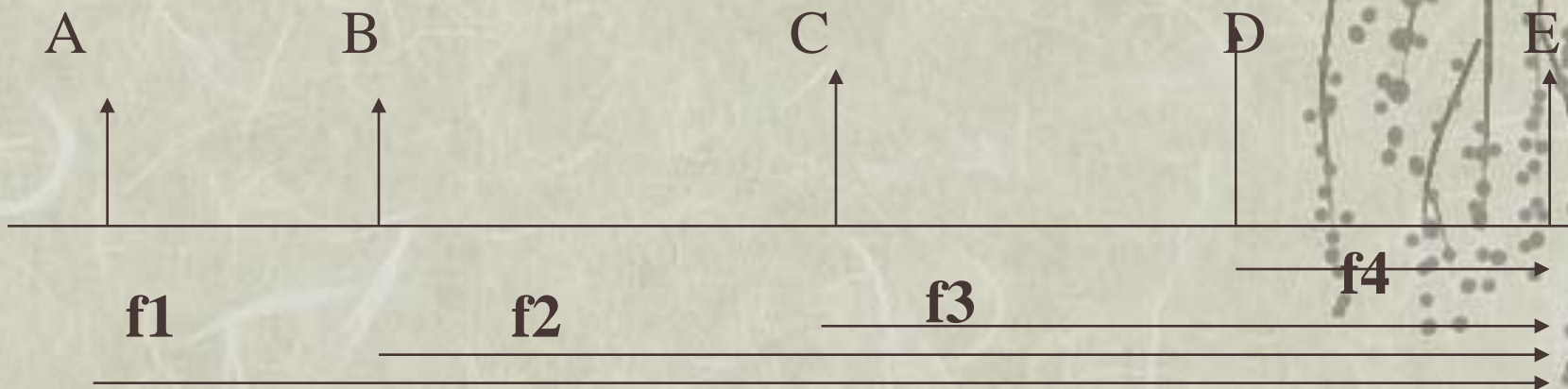
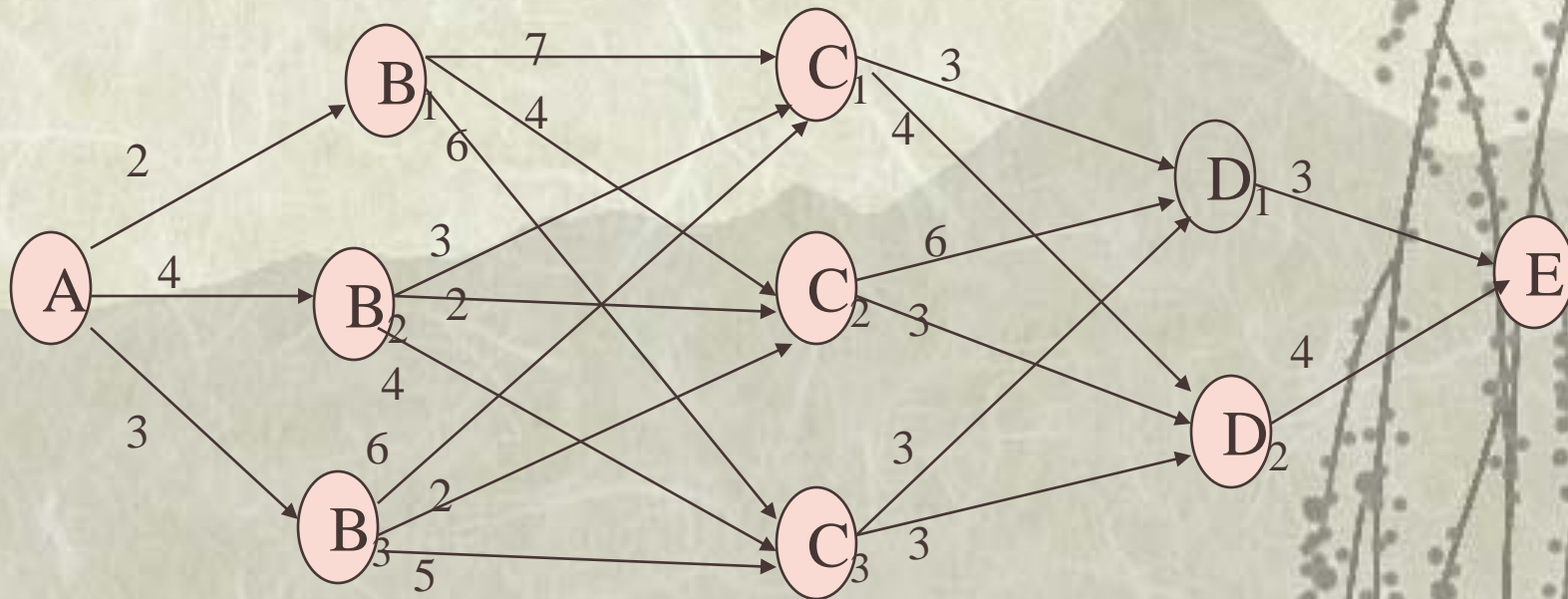
第三阶段(C→D),由C<sub>j</sub>到D<sub>i</sub>分别均有两种选择,即

$$f_3(C_1) = \min \begin{bmatrix} C_1D_1 + f_4(D_1) \\ C_1D_2 + f_4(D_2) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 3+3^* \\ 4+4 \end{bmatrix} = 6, \text{ 决策点为 } D_1$$

$$f_3(C_2) = \min \begin{bmatrix} C_2D_1 + f_4(D_1) \\ C_2D_2 + f_4(D_2) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 6+3 \\ 3+4^* \end{bmatrix} = 7, \text{ 决策点为 } D_2$$

$$f_3(C_3) = \min \begin{bmatrix} C_3D_1 + f_4(D_1) \\ C_3D_2 + f_4(D_2) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 3+3^* \\ 3+4 \end{bmatrix} = 6, \text{ 决策点为 } D_1$$





第二阶段( $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ ),由 $\mathbf{B}_j$ 到 $\mathbf{C}_j$ 分别均有三种选择, 即:

$$f_2(B_1) = \min \begin{bmatrix} B_1C_1 + f_3(C_1) \\ B_1C_2 + f_3(C_2) \\ B_1C_3 + f_3(C_3) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 7+6 \\ 4+7^* \\ 6+6 \end{bmatrix} = 11 \quad \text{决策点为} C_2$$

$$f_2(B_2) = \min \begin{bmatrix} B_2C_1 + f_3(C_1) \\ B_2C_2 + f_3(C_2) \\ B_2C_3 + f_3(C_3) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 3+6^* \\ 2+7^* \\ 4+6 \end{bmatrix} = 9 \quad \begin{array}{l} \text{决策点} \\ \text{为} C_1 \text{或} C_2 \end{array}$$

$$f_2(B_3) = \min \begin{bmatrix} B_3C_1 + f_3(C_1) \\ B_3C_2 + f_3(C_2) \\ B_3C_3 + f_3(C_3) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 6+6 \\ 2+7^* \\ 5+6 \end{bmatrix} = 9 \quad \text{决策点为} C_2$$



第一阶段，由A → B，有三种选择，即：

$$f_1(A) = \min \begin{bmatrix} AB_1 + f_2(B_1) \\ AB_2 + f_2(B_2) \\ AB_3 + f_2(B_3) \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 2+11 \\ 4+9 \\ 3+9^* \end{bmatrix} = 12 \quad \text{决策点为} B_3$$

$f_1(A) = 12$ 说明从A到E的最短距离为12，最短路线的确定可按计算顺序反推而得。即

$A \rightarrow B_3 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

上述最短路线问题的计算过程，也可借助于图形直观的表示出来：

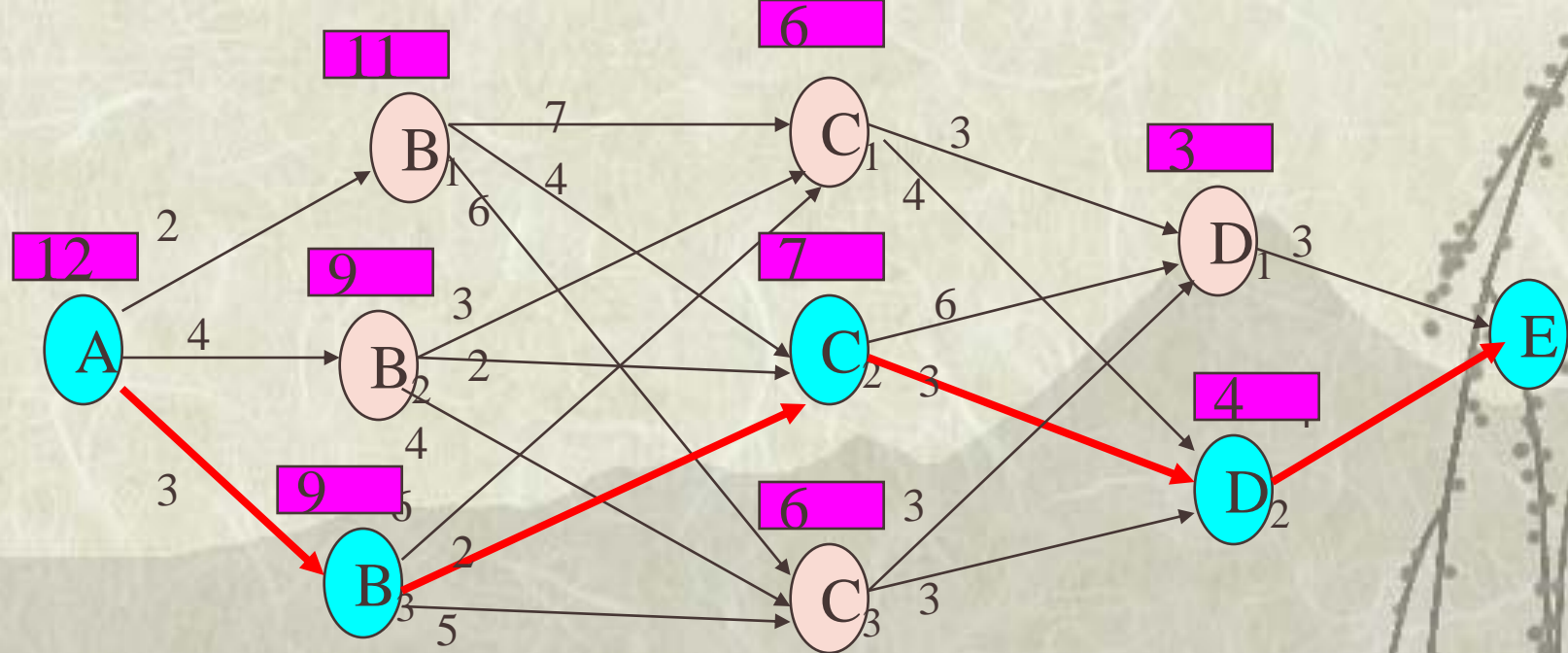
$$f_1(A) = \min[AB_3 + f_2(B_3)] = 12$$

$$f_2(B_3) = \min[B_3C_2 + f_3(C_2)] = 9$$

$$f_3(C_2) = \min[C_2D_2 + f_4(D_2)] = 7$$

$$f_4(D_2) = \min[D_2E + f_5(E)] = 4$$

$$f_5(E) = 0$$



图中各点上方框的数，表示该点到E的最短距离。图中红箭头表示从A到E的最短路线，并且找到了从各点到终点的最短路线。

从引例的求解过程可以得到以下启示：

对一个问题是否用上述方法求解，其关键在于能否将问题转化为相互联系的决策过程相同的多个阶段决策问题。



- ❖ 各阶段选取的决策，一般与“时序”有关，决策依赖于当前的状态，又随即引起状态的转移，整个决策序列就是在变化的状态中产生出来，故有“动态”含义。因此，把这种方法称为动态规划方法。

# 动态规划的基本概念

## 一、动态规划的基本要素

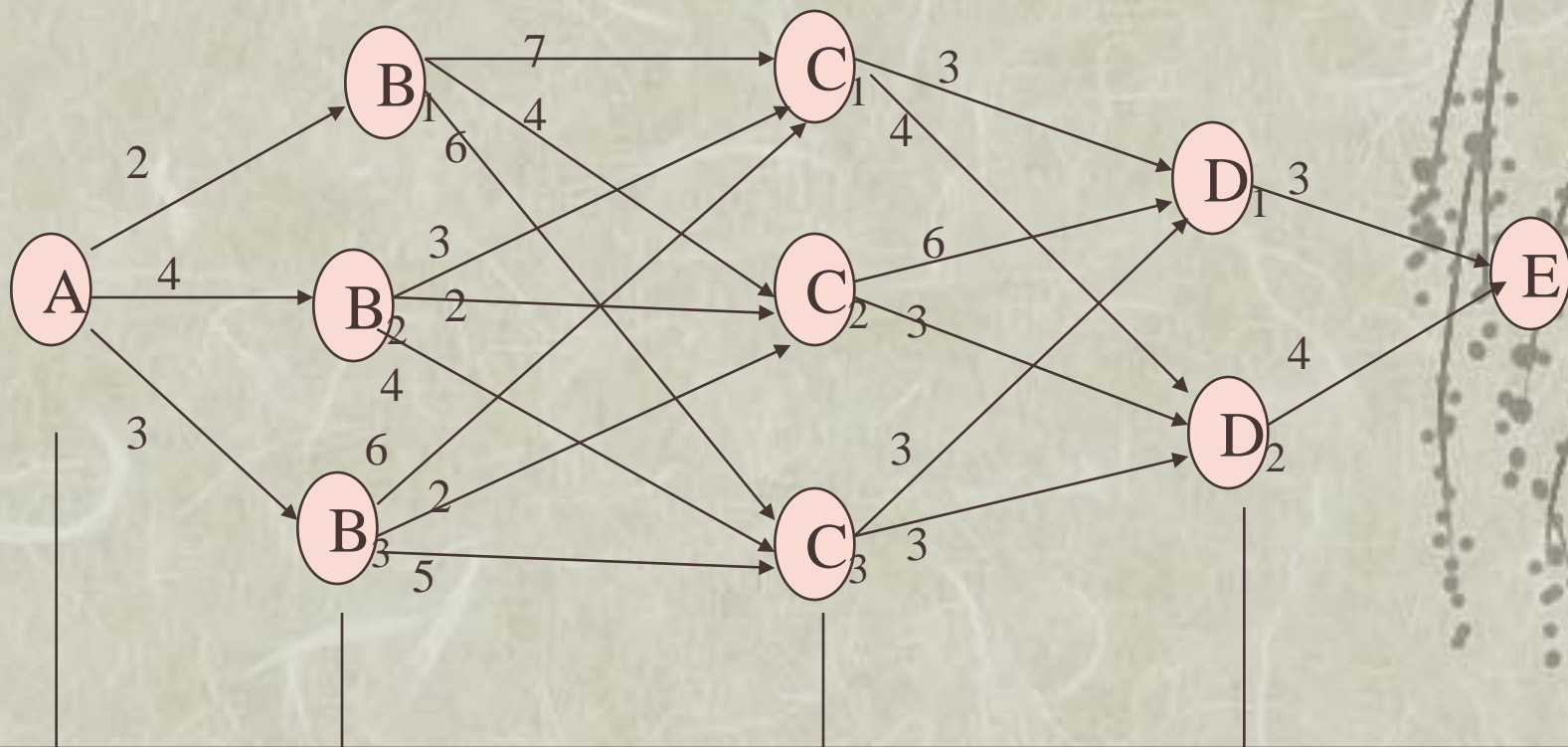
1、**阶段**。阶段的划分，一般根据时序和空间的自然特征来划分，但要便于把问题的过程能转化为阶段决策的过程。描述阶段的变量称为阶段变量，常用自然数 $k$ 表示。如引例可划分为4个阶段求解， $k=1, 2, 3, 4$ 。

2、**状态与状态变量**。**状态就是阶段的起始位置**。它既是该阶段某支路的**起点**，又是前一阶段某支路的**终点**。

阶段：阶段变量  $k=1,2,3,4$     状态：状态变量和状态集合

常用  $S_k$  表示第  $k$  阶段的状态变量，也表示第  $k$  阶段具体的某一状态。第  $k$  阶段的状态就是该阶段所有始点的集合

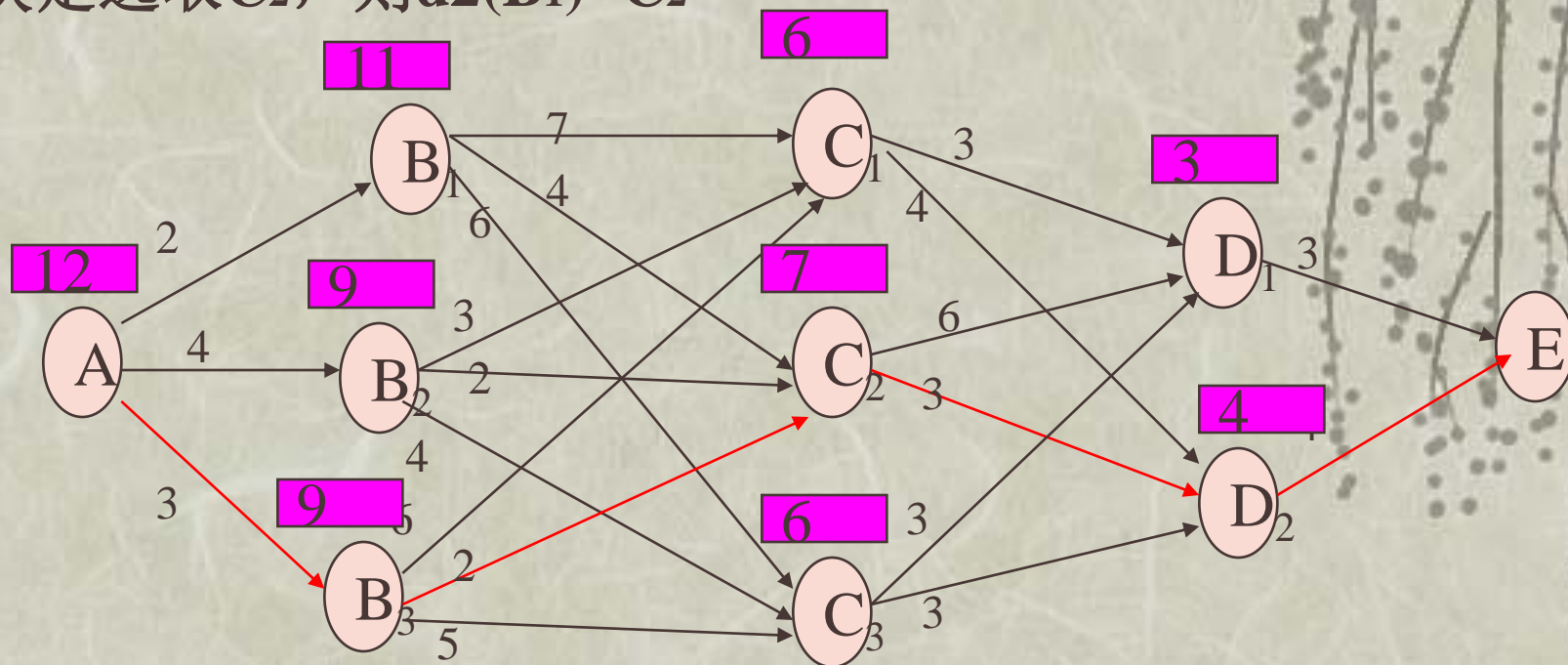
$$S_1 = \{A\}, \quad S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}, \quad S_3 = \{C_1, C_2, C_3\}, \quad S_4 = \{D_1, D_2\}$$





3、**决策与决策变量**。在某阶段对可供选择状态的决定（或选择），称为决策。描述的变量称为决策变量。常用 $d_k(S_k)$ 表示第k阶段处于状态 $S_k$ 时的决策变量，它是状态变量的函数。决策变量允许取值的范围，称为允许决策集合，常用 $D_k(S_k)$ 表示。显然 $d_k(S_k) \in D_k(S_k)$ 。

如在引例的第二阶段中，若从 $B_1$ 出发， $D_2(B_1)=\{C_1, C_2, C_3\}$   
如果决定选取 $C_2$ ，则 $d_2(B_1)=C_2$



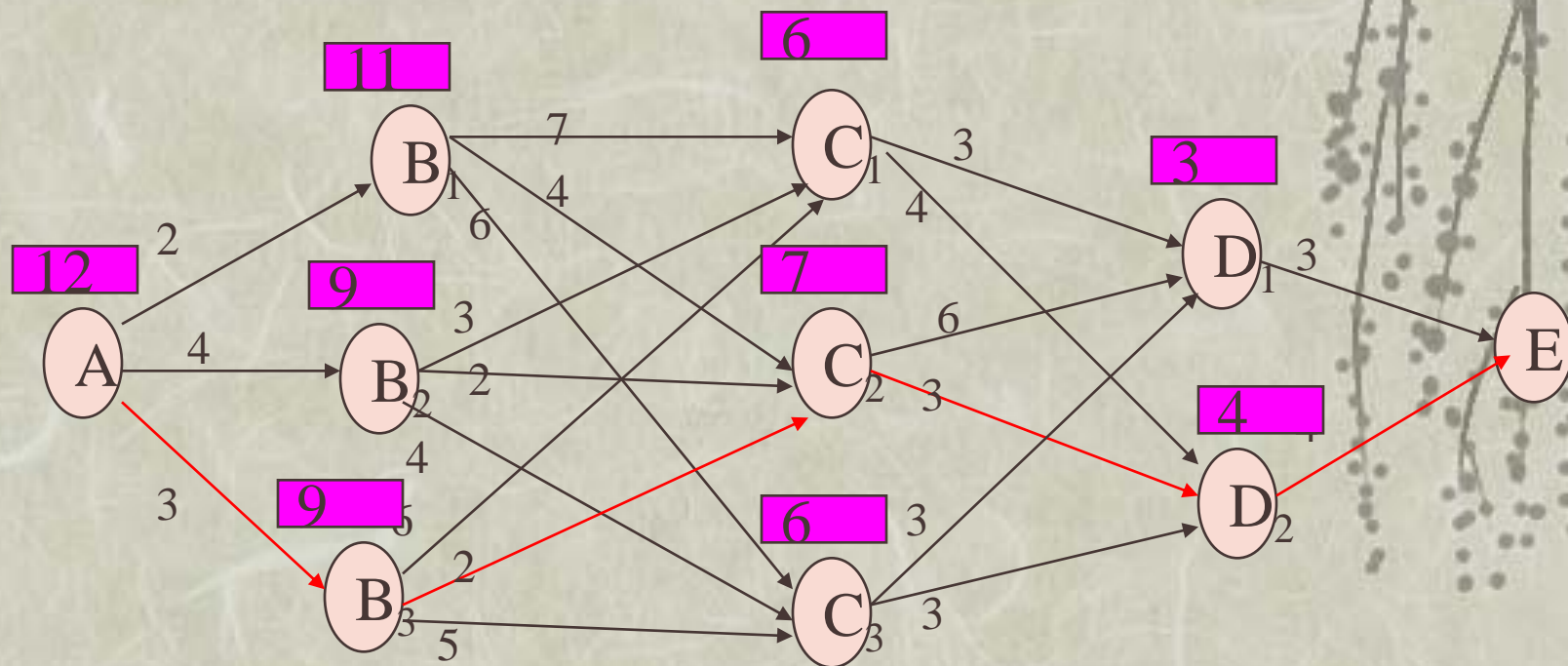
动态规划方法就是要从**允许策略集**中找出**最优策略**。

**所谓策略：就是一个决策序列的集合**

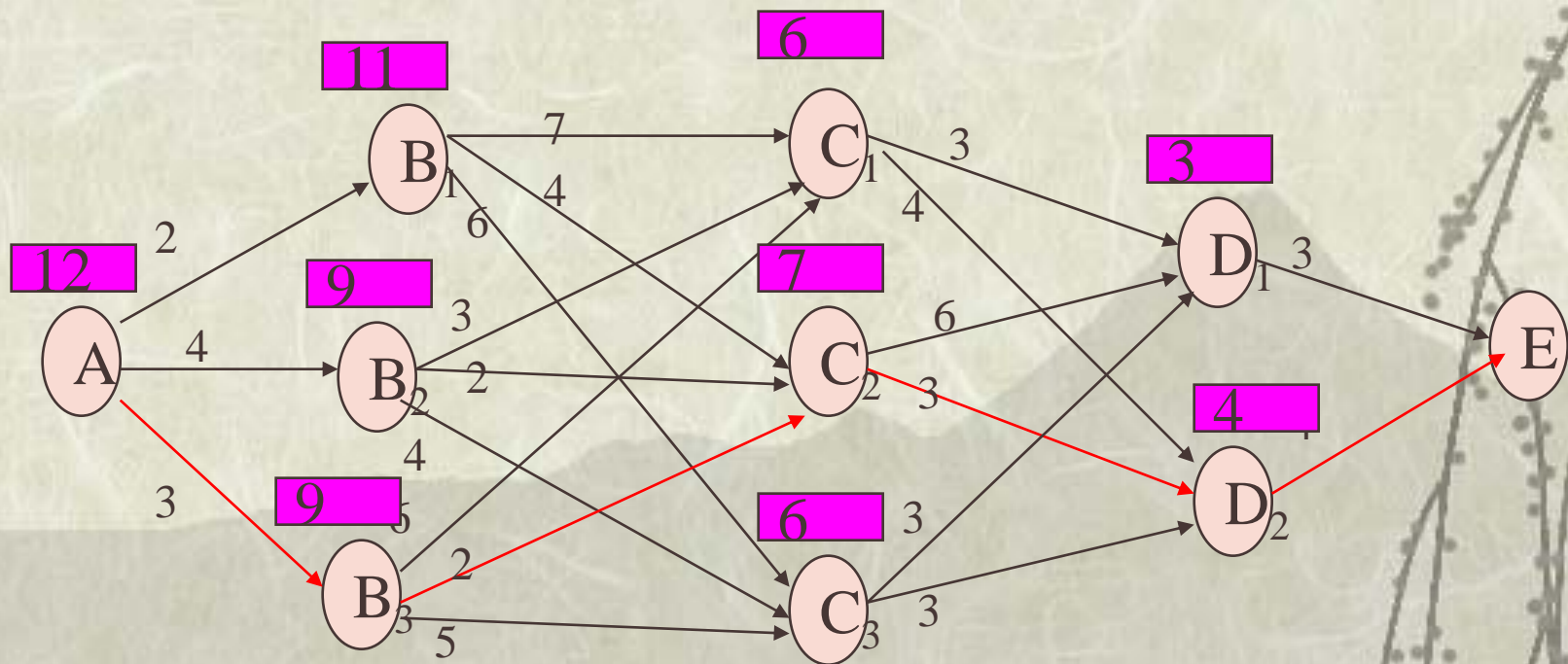
#### 4、阶段指标、指标函数和最优指标函数

(1) 衡量某阶段决策效益优劣的数量指标，称为阶段指标，用 $v_k(S_k, d_k)$ 表示第 $k$ 阶段的阶段指标。

在不同的问题中，其含义不同。它可以是距离、利润、成本等。在引例中， $v_k(S_k, d_k)$ 表示在第 $k$ 阶段由点 $S_k$ 到点 $S_{k+1}=d_k(S_k)$ 距离。如 $v_2(B_3, C_1)=6$ 。







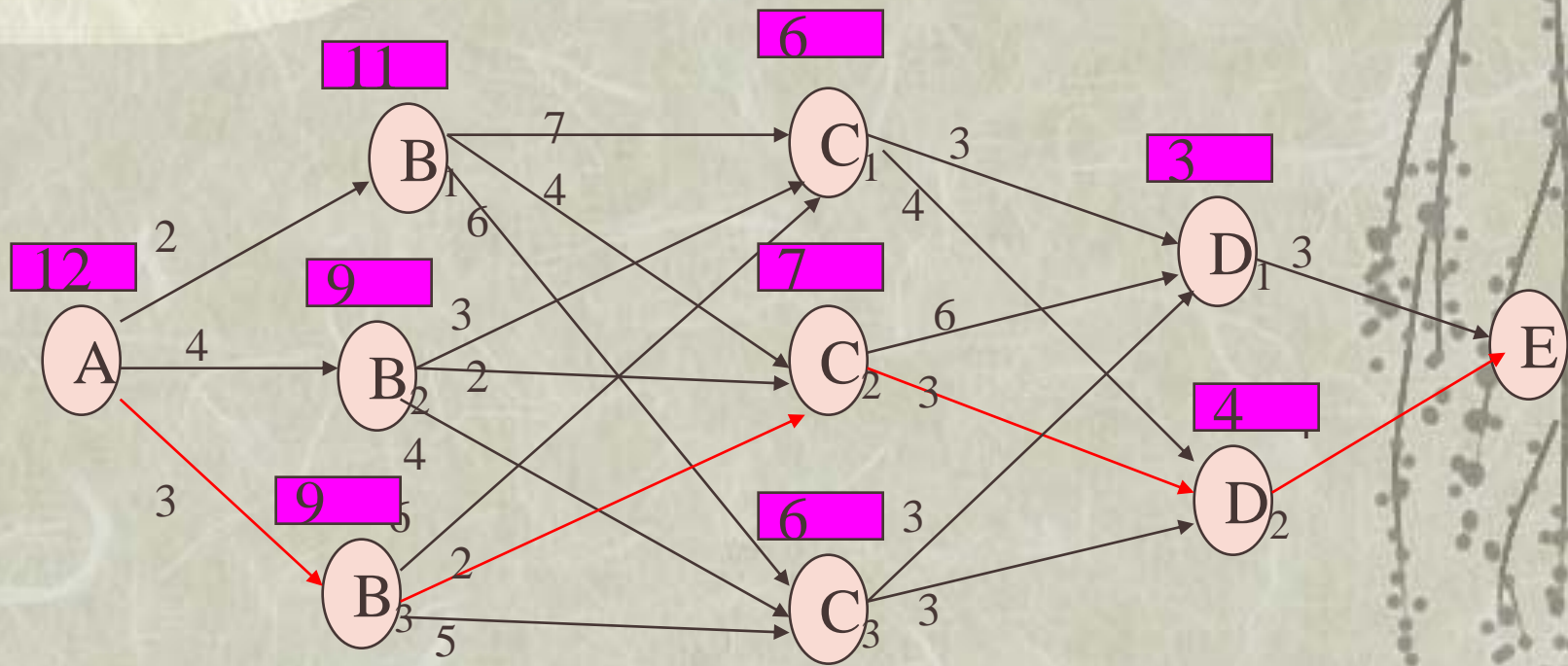
$$f_4(D_2) = \min[D_2E + f_5(E)] = 4, f_5(E) = 0$$

$$f_3(C_2) = \min[C_2D_2 + f_4(D_2)] = 7$$

$$f_2(B_3) = \min[B_3C_2 + f_3(C_2)] = 9$$

$$f_1(A) = \min[AB_3 + f_2(B_3)] = 12$$

在引例中，指标函数 $V_{k,n}$ 表示在第 $k$ 阶段由点 $S_k$ 至终点 $E$ 的距离。 $f_k(s_k)$ 表示第 $k$ 阶段点 $S_k$ 到终点 $E$ 的最短距离。  
 $f_2(B_1)=11$ 表示从第2阶段中的点 $B_1$ 到点 $E$ 的最短距离。



## 5、基本方程（递推关系式）

从引例求A到E的最短路的计算过程中可以看出，在求解的各个阶段，我们利用了**k阶段与k+1阶段之间的递推关系**

$$\left[ \begin{array}{l} f_k(s_k) = \min\{v_k(s_k, d_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ d_k(s_k) \in D_k(s_k), (k = 4, 3, 2, 1) \\ f_5(s_5) = 0 \end{array} \right.$$

$$f_1(A) = \min[AB_3 + f_2(B_3)] = 12$$

$$f_2(B_3) = \min[B_3C_2 + f_3(C_2)] = 9$$

$$f_3(C_2) = \min[C_2D_2 + f_4(D_2)] = 7$$

$$f_4(D_2) = \min[D_2E + f_5(E)] = 4$$

$$f_5(E) = 0$$



$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\{v_k(s_k, d_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ d_k(s_k) \in D_k(s_k), (k = 4, 3, 2, 1) \\ f_5(s_5) = 0 \end{cases}$$

一般地, 若  $V_{k,n} = \sum_{j=k}^n v_j(s_j, d_j)$ , 则有

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \text{Opt}\{v_k(s_k, d_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \\ d_k \in D_k(s_k) \quad k = n, n-1, \dots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

## 二、动态规划的基本思想与最优化原理

1、基本思想：动态规划方法的关键在于正确地写出**基本方程**，因此首先必须将问题的过程划分为多个相互联系的多阶段决策过程，恰当地选取**状态变量和决策变量**及定义**最优指标函数**，从而把问题化成一族同类型的子问题。然后从**边界条件开始，逆过程行进方向，逐段递推寻优**。在每个子问题求解时，均利用它前面已求出的子问题的最优化结果依次进行，最后一个子问题所得的最优解，就是整个问题的最优解。

## 2、最优化原理

动态规划方法基于R Bellman等人提出的最优化原理：作为整个过程的最优策略具有这样的性质，即无论过去的状态和决策如何，对于先前的决策所形成的状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略。简言之，“一个最优策略的子策略总是最优的”。

但是，最优化原理仅是策略最优性的必要条件，而基本方程是策略最优性的充要条件。由此可见，基本方程是动态规划理论与方法的基础。



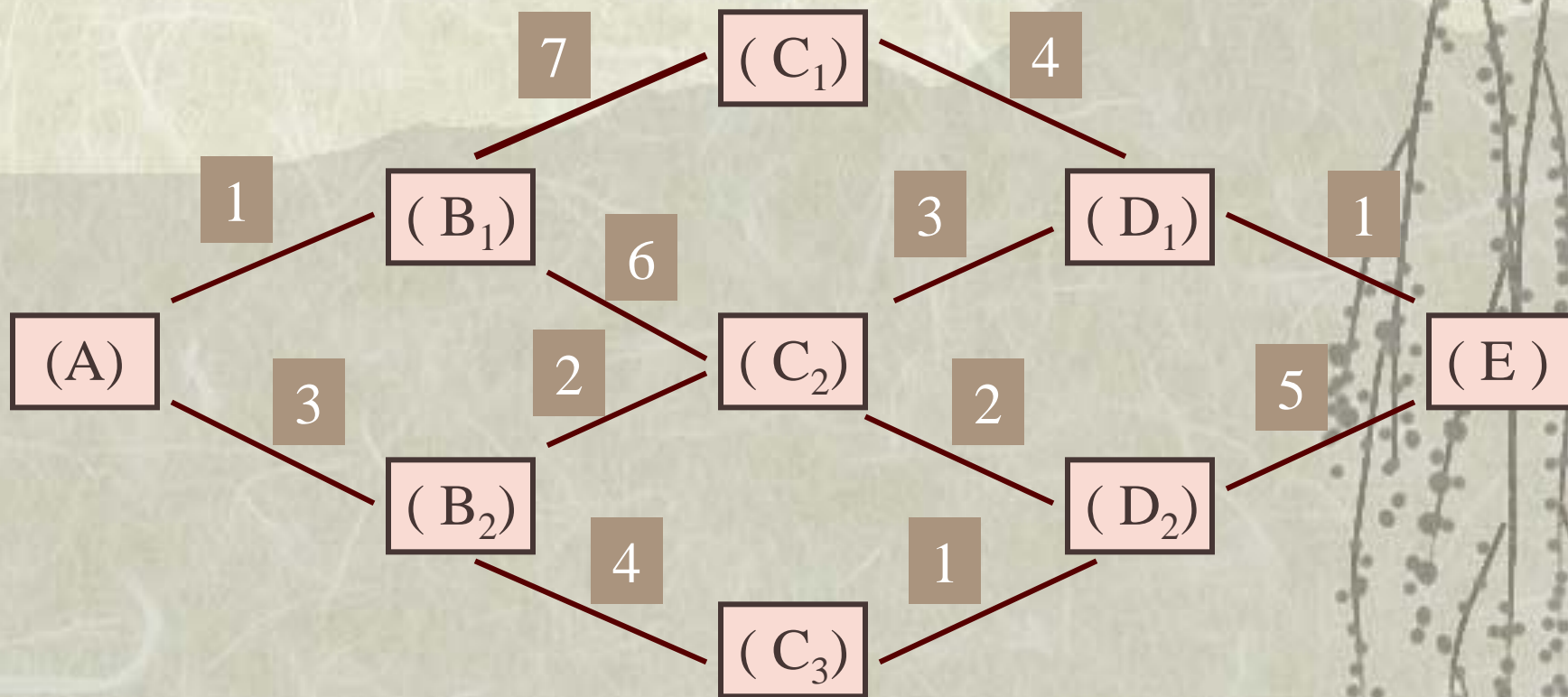
应用动态规划解决问题时必须首先建立动态规划模型，再用**逆序或顺序**算法求解。写一个问题的动态规划模型一般包含以下6个步骤：

- (1) **阶段**划分  $k=1,2,\dots,n$
- (2) 确定**状态变量** $s_k$
- (3) 确定**决策变量** $d_k$
- (4) 确定**状态转移方程** $s_{k+1}=T(s_k,d_k)$ 或 $s_{k-1}=T(s_k,d_k)$
- (5) 确定**阶段指标** $V(s_k,d_k)$
- (6) 确定**基本递推方程**

$$\begin{cases} f_k(S_k) = \text{Opt}\{v_k(S_k, d_k) + f_{k+1}(S_{k+1})\} \\ d_k \in D_k \quad (k = n, n-1, \dots, 1) \\ f_{n+1}(S_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad \text{或}$$

$$\begin{cases} f_k(S_k) = \text{Opt}\{V_k(S_k, d_k) + f_{k-1}(s_{k-1})\} \\ d_k \in D_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ f_0(s_0) = 0 \end{cases}$$

【练习】(最短路程问题) 如图，从A城到E城，哪一条路径最短？



## 【解】

阶段优化法：从最优路径上任一位置T出发到终点的 路途，相对于T而言，必也是最短的。

全程分为四个阶段： A → B → C → D → E

$$K = 4$$

$$f_4(D_1) = 1, \quad f_4(D_2) = 5。$$

$$K = 3$$

$$f_3(C_1) = d(C_1D_1) + f_4(D_1) = 4 + 1 = 5; \quad u_3(C_1) = D_1。$$

$$f_3(C_2) = \min \begin{Bmatrix} d(C_2D_1) + f_4(D_1) \\ d(C_2D_2) + f_4(D_2) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 3+1 \\ 2+5 \end{Bmatrix} = 4; \quad u_3(C_2) = D_1$$



$$f_3(C_3) = d(C_3D_2) + f_4(D_2) = 1 + 5 = 6 ; \quad u_3(C_3) = D_2 \circ$$

$$K = 2$$

$$f_2(B_1) = \min \left\{ \begin{array}{l} d(B_1C_1) + f_3(C_1) \\ d(B_1C_2) + f_3(C_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 7+5 \\ 6+4 \end{array} \right\} = 10; \quad u_2(B_1) = C_2$$

$$f_2(B_2) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_2(B_2C_2) + f_3(C_2) \\ d_2(B_2C_3) + f_3(C_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2+4 \\ 4+6 \end{array} \right\} = 6; \quad u_2(B_2) = C_2$$

$$K = 1$$

$$f_1(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_2(AB_1) + f_2(B_1) \\ d_2(AB_2) + f_2(B_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1+10 \\ 3+6 \end{array} \right\} = 9; \quad u_1(A) = B_2$$

最优策略:  $p_{14}(A) = \{u_1(A), u_2(B_2), u_3(C_2), u_4(D_1)\}$

最佳路径:  $AB_2C_2D_1E$ ; 距离: 9。