决 策 论

吴 婷

南京大学数学系

2020年7月14日

§1 确定型问题

评分模型

设有m个侯选者，考察其n个属性，则可建立以下模型：

属 性 得 分 侯选者	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
…				
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

对于评分模型，常见的决策方法有以下几种:

乐观准则 好中择优

$$\max_i \{\max_j a_{ij}\}$$

悲观准则 差中择优

$$\max_i \{\min_j a_{ij}\}$$

平均准则 等可能性

$$\max_i \{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\}$$

加权平均准则 貌似公正

$$\max_i \{\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} a_{ij}\}, \quad \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} = 1, \quad \omega_{ij} \geq 0$$

方差极小准则 中心分布

$$\min_i \{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij})^2\}$$

【例】某厂拟在四种产品中选送一个到某展览会上参展。每种产品均已挑出了各自的侯选者，分别按质量、包装、竞争力打分如下表所示。问厂方应如何决策？

	质量	包装	竞争力
甲	4.7	4.9	4.7
乙	4.6	4.9	5.0
丙	4.8	4.5	4.9
丁	4.7	4.8	4.8

【解】假定权因子为 $\omega = (0.6,0.2,0.2)$

产品	乐观准则	悲观准则	平均准则	加权平均	方差极小
甲	4.9	4.7	4.77	4.74	0.0089
乙	5.0	4.6	4.83	4.74	0.0289
丙	4.9	4.5	4.73	4.76	0.0289
丁	4.8	4.7	4.77	4.74	0.0022

§2 风险型问题

决策树

决策树是决策环境的一种图解表示。它不仅描绘了决策过程，而且也为决策者提供了对决策过程进行分析、检验的工具。

在决策树中，通常以□表示决策点；以○表示随机点。

【例1】某公司将对一项新品研制的投标作出抉择。标况如下：

(1) 投标准备费2万元，中标可能为40%。若未中标，则准备费得不到补偿。

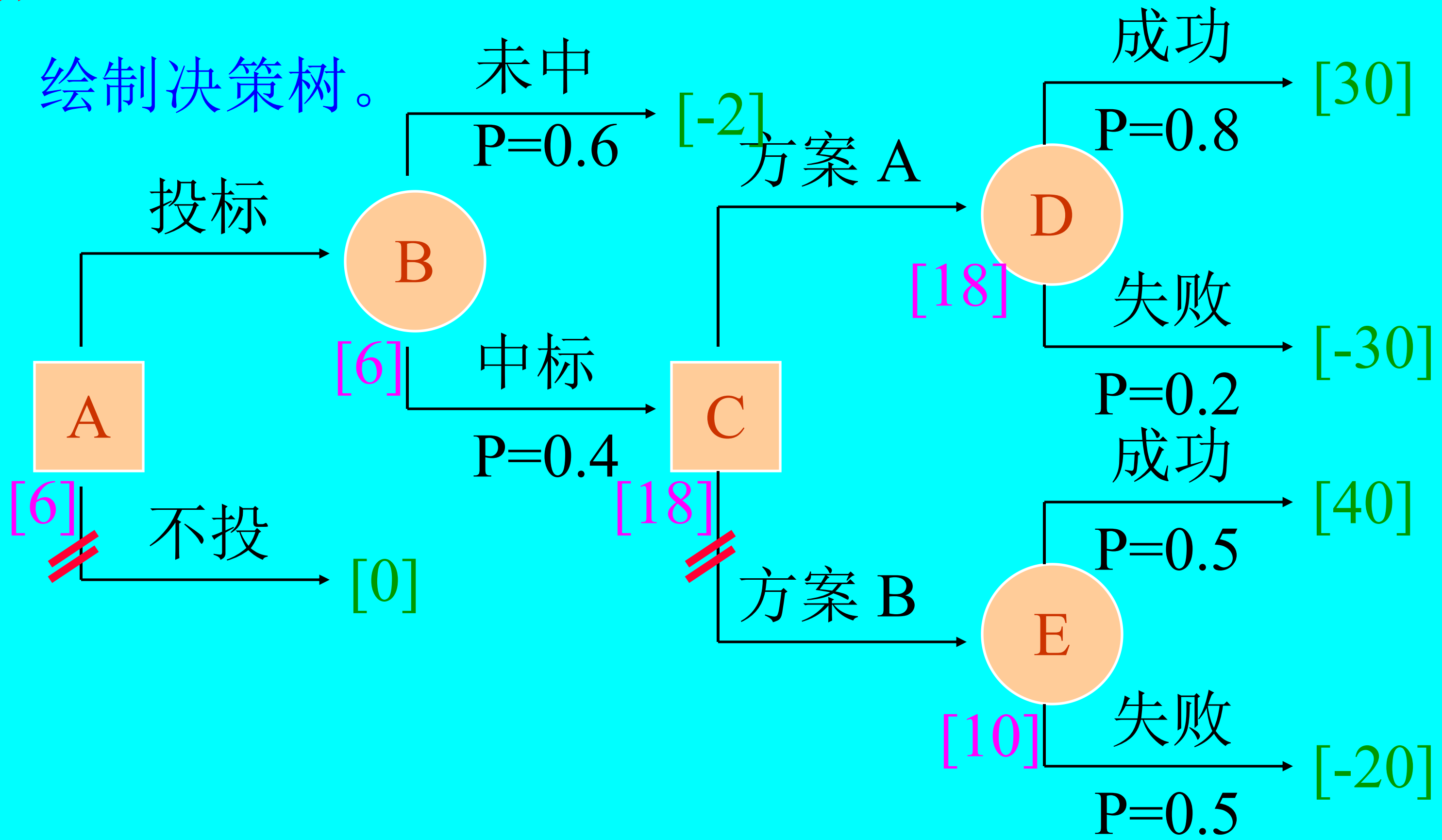
(2) 新品研制有A、B两个方案。A方案，成功率80%，研制费18万元；B方案，成功率50%，研制费8万元。

(3) 研制成功，公司可收入50万元；反之，须支付罚金10万元。

试问该公司应如何决策？

【解】

步1　绘制决策树。



步2　标上有关数据。

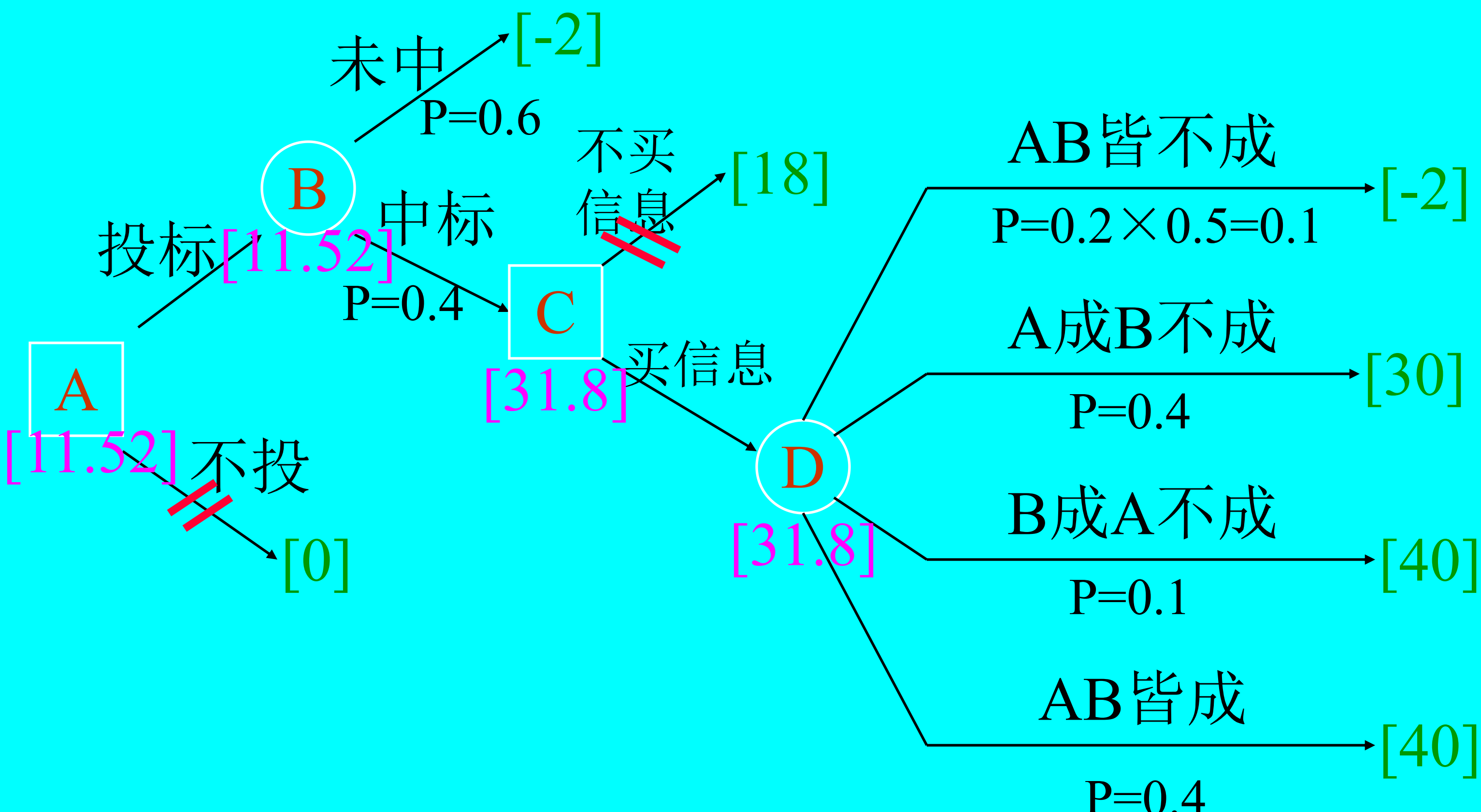
步3　逆向计算，以数学期望值替代随机点。

决策　投标。若中，则选方案A进行研制。

信息值

【例2】上例中，若某处可出售有关方案A、B是否成功的信息，问此信息的价值是多少？(假定中标后三周内退标不罚款)

【解】作出购买信息的决策树。



决策

投标；若中，则购买信息。

完全信息期望值

本例中，完全信息期望值为 31.8；此信息的价值为

$$31.8 - 18 = 13.8$$

益损值表

【例3】某蛋糕销售点，每天清晨批进12盒蛋糕，进价20元/盒，售价40元/盒。以往100天的营业状况如下表所示。店主每天应进多少蛋糕(假定当天未售出的蛋糕，第二天不能再卖)?

销售量	9	10	11	12
天数	20	40	30	10

【解】步1 列出益损值表。步2 计算进货期望利润。步3 决策。

需求量	概率	可能进货量							
		9		10		11		12	
9	0.2	180	36	160	32	140	28	120	24
10	0.4	180	72	200	80	180	72	160	64
11	0.3	180	54	200	60	220	66	200	60
12	0.1	180	18	200	20	220	22	240	24
进货期望利润		180		192		188		172	

完全信息期望值

本例中，完全信息期望值应为：进9售9，进10售10，… 即

$$完全信息期望值 = 36 + 80 + 66 + 24 = 206\ (元)$$

而此信息的价值为

$$206 - 192 = 14\ (元)$$

后悔值表

需求量	概率	可能进货量							
		9		10		11		12	
9	0.2	0	0	20	4	40	8	60	12
10	0.4	20	8	0	0	20	8	40	16
11	0.3	40	12	20	6	0	0	20	6
12	0.1	60	6	40	4	20	2	0	0
进货期望利润		26		14		18		34	

§3 贝叶斯决策

一个西班牙传说

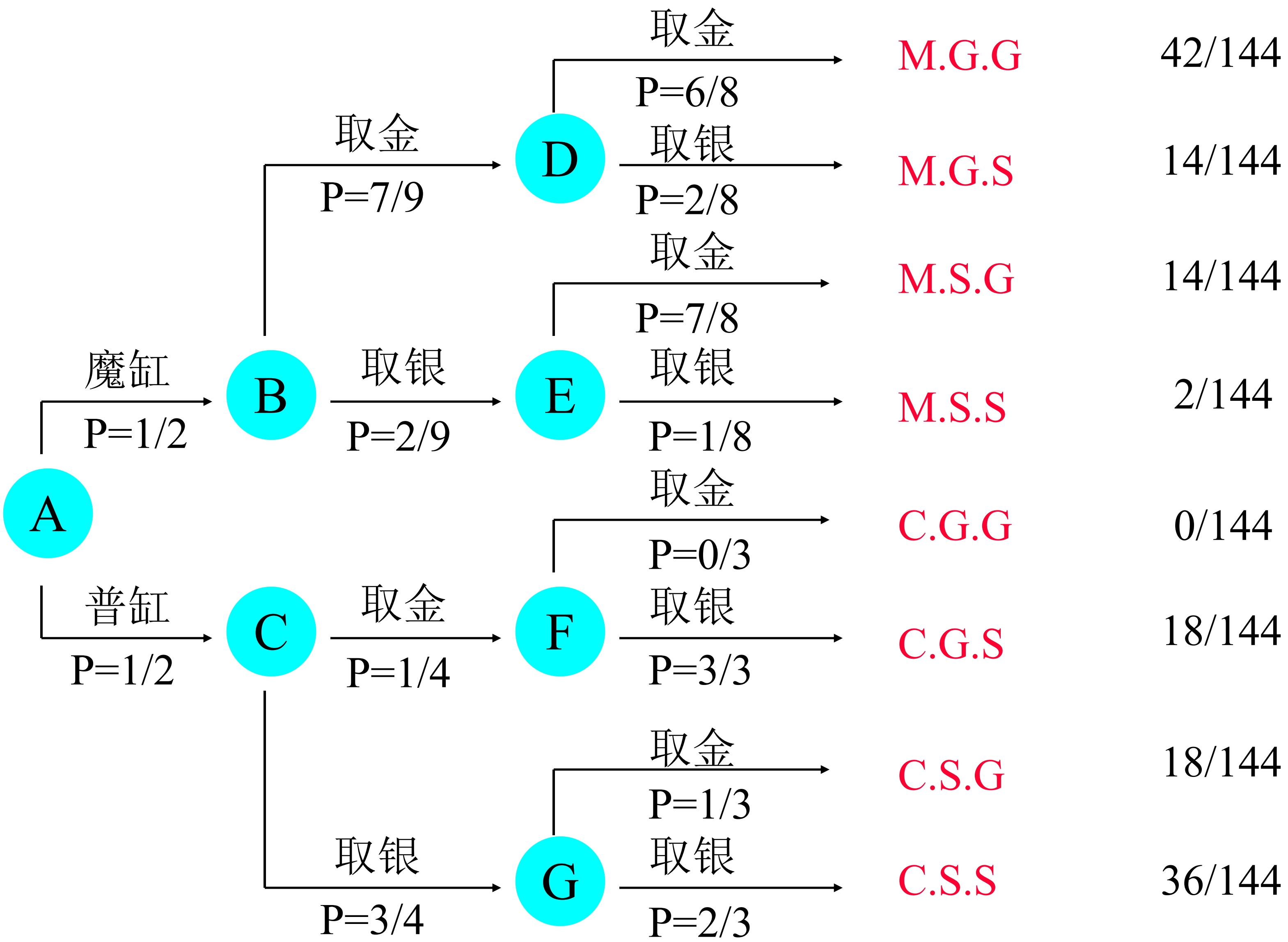
【例5】海盗何瑟有两个外形一样的马赛克缸。其中一个具有魔力，能在暴风雨中使船只安全航行；另一个，则是普通的缸。为了区别这两个缸，何瑟在魔缸中放了7块金子，2块银子；在普通缸中放了1块金子3块银子。后来，何瑟的船沉没了…

许多年后，某航海博物馆馆长在欧洲某地的商店里发现了一个标名为何瑟的马赛克缸。他想将此缸买下，但董事会不赞成立即购买。董事会认为：若有75%的把握判定它是何瑟魔缸，才可以购买

馆长了解到，每年圣诞节的夜晚，店主要从缸中取出一块金属交给市长。去年是第一次，但市长拒绝说明取出的是金子还是银子。今年将取第二次，市长答应届时将公布取出的是什么金属。

馆长希望利用这一信息来作出估计，以判断出现的马赛克缸是否是魔缸？

【解】用概率树



A
魔缸
P=1/2
普缸
P=1/2
B
C
取金
P=7/9
取银
P=2/9
取金
P=1/4
取银
P=3/4
D
E
F
G
取金
P=6/8
取银
P=2/8
取金
P=7/8
取银
P=1/8
取金
P=0/3
取银
P=3/3
取金
P=1/3
取银
P=2/3
M.G.G
42/144
M.G.S
14/144
M.S.G
14/144
M.S.S
2/144
C.G.G
0/144
C.G.S
18/144
C.S.G
18/144
C.S.S
36/144

概率修正

若第二次取出的是金块，则其累积概率为

$$\frac{42}{144}+\frac{14}{144}+\frac{0}{144}+\frac{18}{144}=\frac{74}{144}$$

其中属于魔缸事件链的累积概率为

$$\frac{42}{144}+\frac{14}{144}=\frac{56}{144}$$

于是修正概率为

$$\left(\frac{56}{144}\right)\div\left(\frac{74}{144}\right)=\frac{56}{74}=0.7568$$

决策 若第二次取出的是金块，则馆长可以买下此缸。

贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是一组完备事件群，即$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$。则

$$p(A_j \mid B) = \frac{p(A_j B)}{p(B)} = \frac{p(B \mid A_j)\, p(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} p(B \mid A_j)\, p(A_j)}$$

【例6】一批货物分别来自甲乙两个仓库，其中70%取自甲库，30%取自乙库。已知甲库中80%是正品，20%是次品；乙库中40%是正品60%是次品。若在这批货物中随机抽取三件，依次为正品、次品、次品，试问这三件货物全都来自于甲库的可能性是多少？

【解】设 A 表示货物来自于甲库的事件，B 表示货物为正品的事件，C 表示货物为次品的事件。则 P(A) = 0.7，发生事件为 $D = BCC$

则

$$p(A|D)=\frac{p(AD)}{p(D)}=\frac{p(D|A)p(A)}{p(D|A)p(A)+p(D|\overline{A})p(\overline{A})|}$$

其中

$$p(D|A)=P(BCC|A)=0.8\times 0.2^2=0.032$$

$$p(\overline{A})=0.3$$

$$p(D|\overline{A})=P(BCC|\overline{A})=0.4\times 0.6^2=0.144$$

代入得

$$p(A|D)=\frac{0.032\times 0.7}{0.032\times 0.7+0.144\times 0.3}\approx 0.34$$

用贝叶斯公式重解例 5

【解】

设A表示魔缸事件，B表示第二次抽得金块的事件，C表示第一次抽得金块的事件。则

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{p(B|A)p(A)}{p(B|A)p(A)+p(B|\bar{A})p(\bar{A})}$$

这里，p(A) = 0.5；

$$p(B|A)=\frac{p(AB)}{p(A)}=\frac{p(AB\cap(C+\bar{C}))}{p(A)}=\frac{p(ABC)+p(AB\bar{C})}{p(A)}$$

这里

$$p(ABC)=(1/2)\times(7/9)\times(6/8)=42/144$$

$$p(AB\overline{C})=(1/2)\times(2/9)\times(7/8)=14/144$$

故

$$p(B|A)=112/144$$

同理

$$p(B|\overline{A})=\frac{p(\overline{A}B)}{p(\overline{A})}=\frac{p(\overline{A}B\cap(C+\overline{C}))}{p(\overline{A})}=\frac{p(\overline{A}BC)+p(\overline{A}B\overline{C})}{p(\overline{A})}$$

这里

$$p(\overline{A}BC)=(1/2)\times(0/3)\times(1/4)=0$$

$$p(\overline{A}B\overline{C})=(1/2)\times(3/4)\times(1/3)=3/24$$

故

$$p(B|\overline{A})=36/144$$

算得

$$p(A|D)=\frac{56}{72}\times\frac{72}{74}=0.7568$$

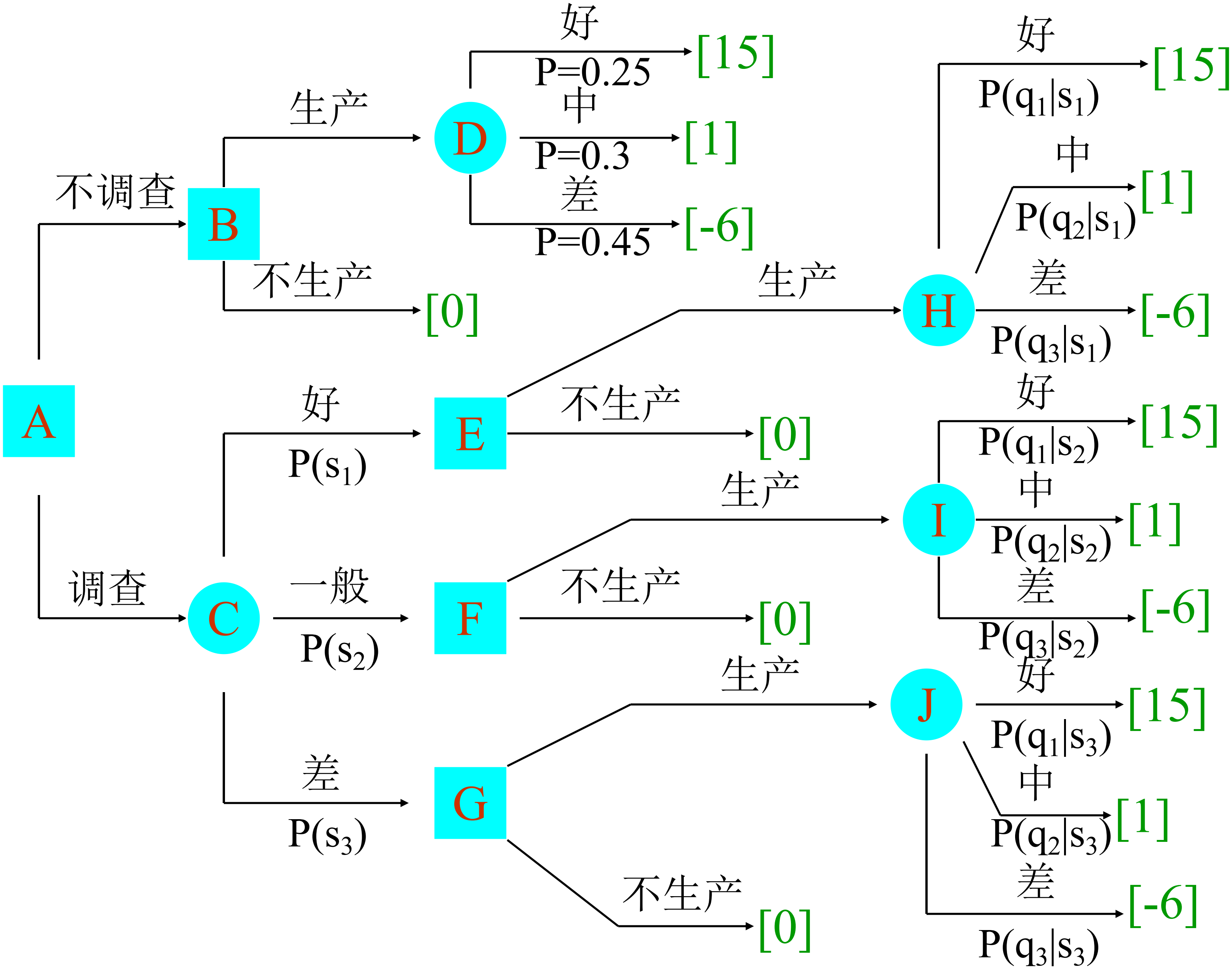
● 贝叶斯公式在决策树中的应用

【例6】某厂对明年是否生产某种产品将作出决策。市场预测明年该产品的销售状况如下：

	$P(q_i)$	利 润
好 (q_1)	0.25	15
中 (q_2)	0.3	1
差 (q_3)	0.45	-6

厂方认为仅凭以上数据尚不能决策，须作进一步的调查，调查费0.6万元。若调查的准确度评价如下表所示。问厂方应如何决策？

$P(s_j\|q_i)$	销 售 情 况		
	q_1	q_2	q_3
好 (s_1)	0.65	0.25	0.1
一般 (s_2)	0.25	0.45	0.15
差 (s_3)	0.1	0.3	0.75


A
不调查
B
生产
D
好
P=0.25
[15]
中
P=0.3
[1]
差
P=0.45
[-6]
不生产
[0]
调查
C
好
P(s1)
E
生产
H
好
P(q1|s1)
[15]
中
P(q2|s1)
[1]
差
P(q3|s1)
[-6]
不生产
[0]
一般
P(s2)
F
生产
I
好
P(q1|s2)
[15]
中
P(q2|s2)
[1]
差
P(q3|s2)
[-6]
不生产
[0]
差
P(s3)
G
生产
J
好
P(q1|s3)
[15]
中
P(q2|s3)
[1]
差
P(q3|s3)
[-6]
不生产
[0]

步2 计算概率值

$$p(s_1)=\sum_{i=1}^{3}p(s_1|q_i)p(q_i)=0.285$$

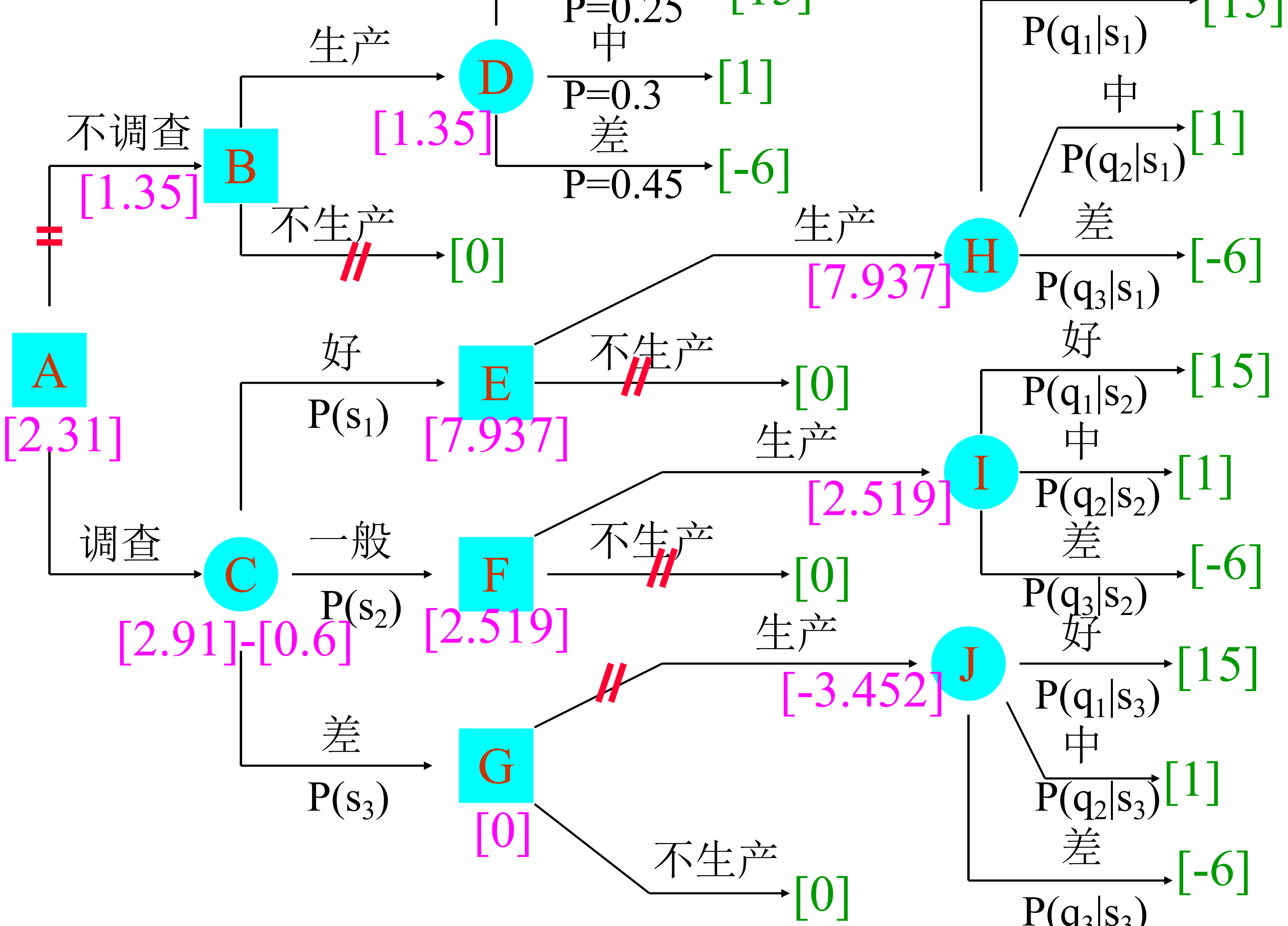
$$p(s_2)=\sum_{i=1}^{3}p(s_2|q_i)p(q_i)=0.265$$

$$p(s_3)=\sum_{i=1}^{3}p(s_3|q_i)p(q_i)=0.4525$$

由 $p(q_i|s_j)=\dfrac{p(s_j|q_i)p(q_i)}{p(s_j)}$ 可算得下表：

$P(q_i\|s_j)$	s_1	s_2	s_3
q_1	0.575	0.236	0.055
q_2	0.266	0.509	0.199
q_3	0.159	0.255	0.746

步3 决策树计算



决策 应先作调查，若“好”或“一般”，则生产；否则，不生产

§4 效用理论

放弃现实效益，追求期望平均值是有风险的；不同的人对待风险的态度也各不相同。

如何描述决策者对待风险的态度，并将其用于决策呢？

● 效用函数

【例1】设甲方案有50%的可能获得10万元，有50%的可能损失2万元；乙方案则稳获2万元。试确定决策者在此问题中的效用值。

【解】

最理想是获得10万元，将此效用值定义为1，即$U(10) = 1$；

最不理想是损失2万元，此时的效用值定义为0，即$U(-2) = 0$。

其他的效用函数值可通过提问来确定。

问题1 选哪个方案？

答：选方案乙。

$U(2) > 0.5 \times U(10)+0.5 \times U(-2)$ --- 甲方案期望效用值

问题2 若乙方案的获得改为0，选哪个方案？

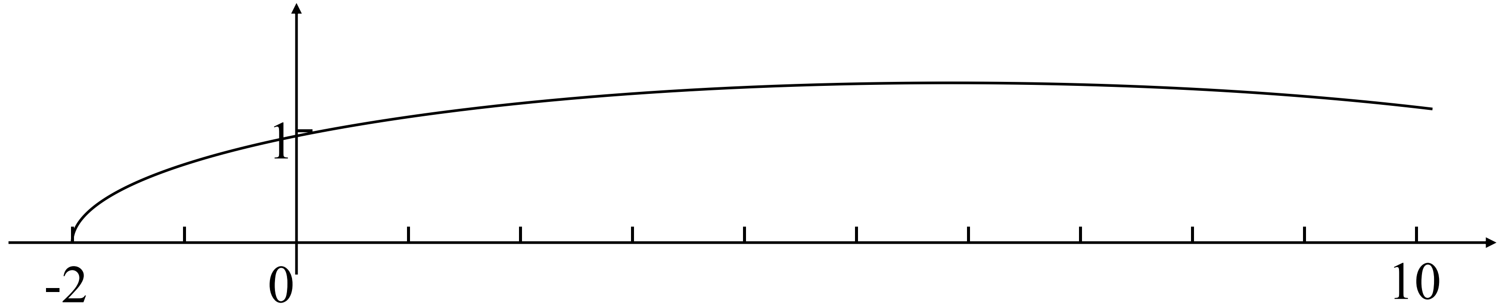
答：选甲方案。

甲方案期望效用值大于零

问题3 若乙方案的获得改为1万元，选哪个方案？

答：随便。

$U(1) = 0.5$



效用函数的确定

设 $x_1 > x_2 > x_3$，若有两种候选方案：

A_1：以概率p获得一笔金额 x_1，以概率1-p失去一笔金额 x_3

A_2：无风险得到一笔金额 x_2

则A_1和A_2的等价前提为

$$pU(x_1) + (1-p)U(x_3) = U(x_2)$$

提问方式

(1) 固定x_1, x_2, x_3，改变 p，问“p取何值时A_1和A_2等价”？

(2) 固定x_1, x_3, p，改变 x_2，问“x_2取何值时A_1和A_2等价”？

得到三点后，即可粗略地画出决策人的效用曲线。

【例2】某信托公司面临一个风险决策问题。最大、最小收益分别为20万元和-10万元。为了作出效用曲线，经一系列提问后归纳如下：试确定决策者在此问题中的效用值。

决策者认为

(1)“以0.5的概率获得20万，以0.5的概率失去10万”与“稳得0万”是等价的。

(2)“以0.5的概率获得20万，以0.5的概率得0万”与“稳得8万”是等价的。

(3)“以0.5的概率获得0万，以0.5的概率失去10万”与“肯定失去6万”是等价的。

试确定决策者对此问题的效用曲线。

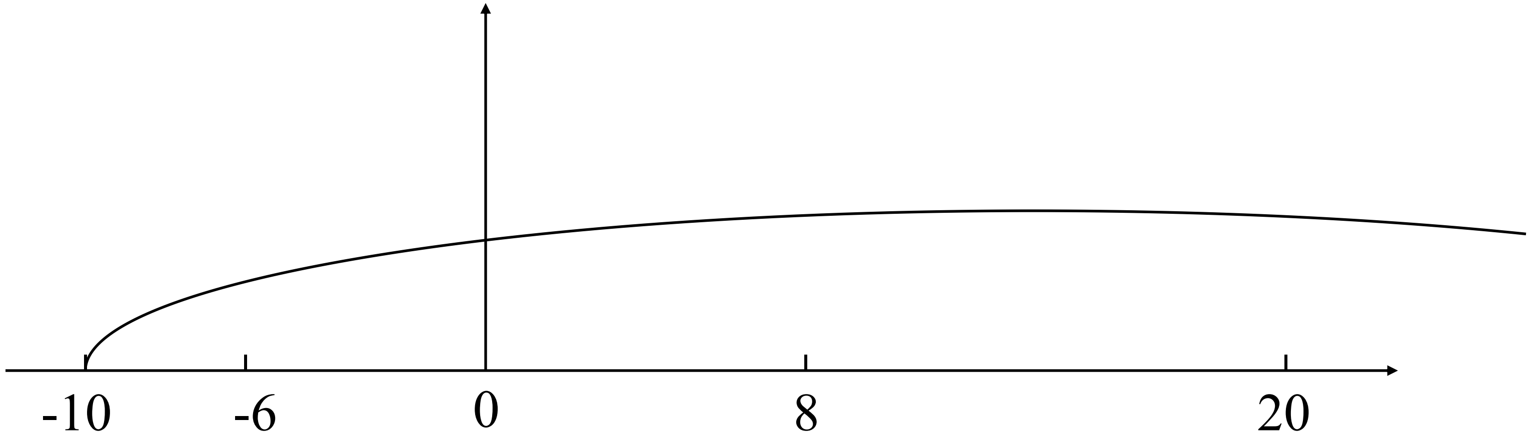
【解】由题意得

$$\begin{cases} 0.5U(20) + 0.5U(-10) = U(0) \\ 0.5U(20) + 0.5U(0) = U(8) \\ 0.5U(0) + 0.5U(-10) = U(-6) \end{cases}$$

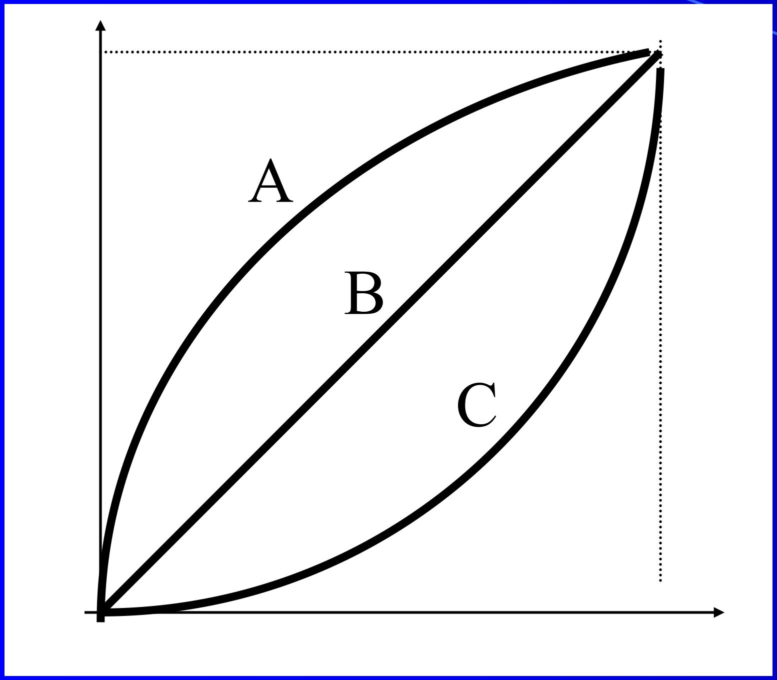
令U(20) = 1, U(-10) = 0。则其解为

$$U(8) = 0.75;\ U(0) = 0.5;\ U(-6) = 0.25$$

效用曲线为



效用函数的含义



	$f'(x)$	$f''(x)$	特点
A	+	—	谨慎
B	+	0	中间
C	+	+	冒险

● 效用理论在风险决策中的应用

【例3】某厂考虑今明两年是否扩大生产规模。已知市场预测的情况如下：

事件 效益 方案	E_1	E_2	E_3
	$P(E_1) = 0.2$	$P(E_2) = 0.5$	$P(E_3) = 0.3$
今年扩大	10	8	-1
明年扩大	8	6	1

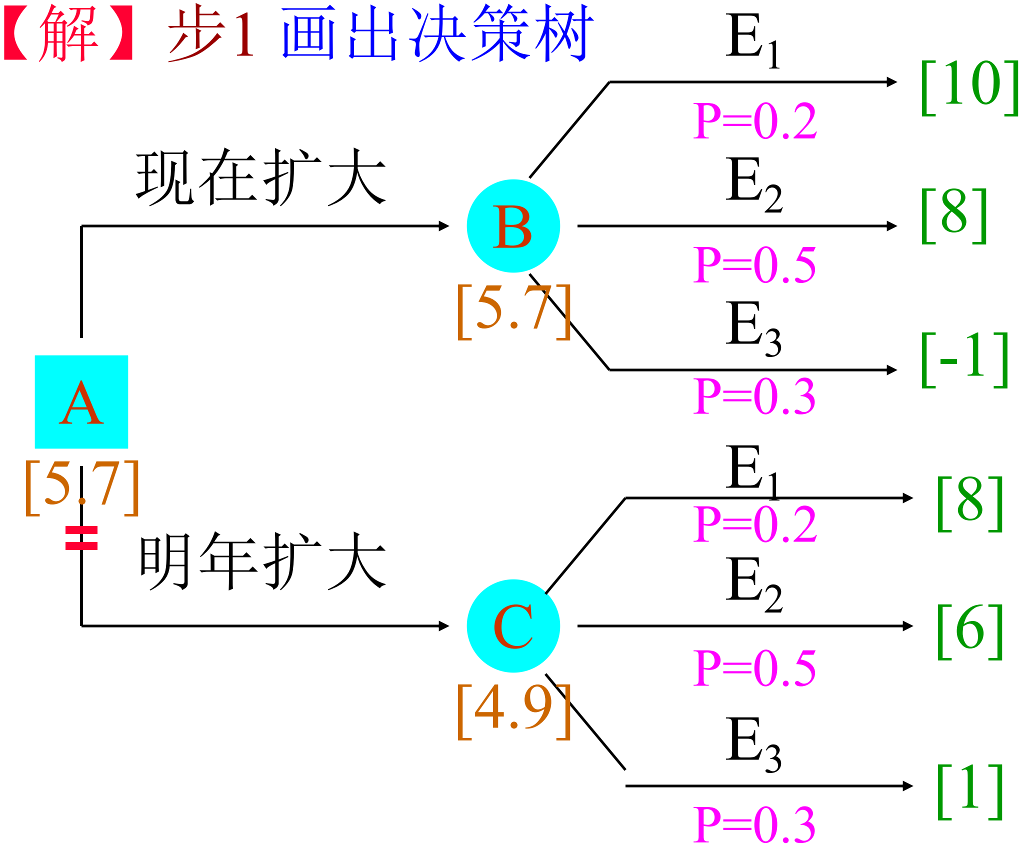
对该厂而言，损失1万元的效用值是0，获利10万元的效用值是100。以下事件的效用值等价：

(1) “肯定得8万”与“以0.9的概率得10万，以0.1的概率失去1万”；

(2) “肯定得6万”与“以0.8的概率得10万，以0.2的概率失去1万”；

试依据效用值作出决策。

【解】步1 画出决策树

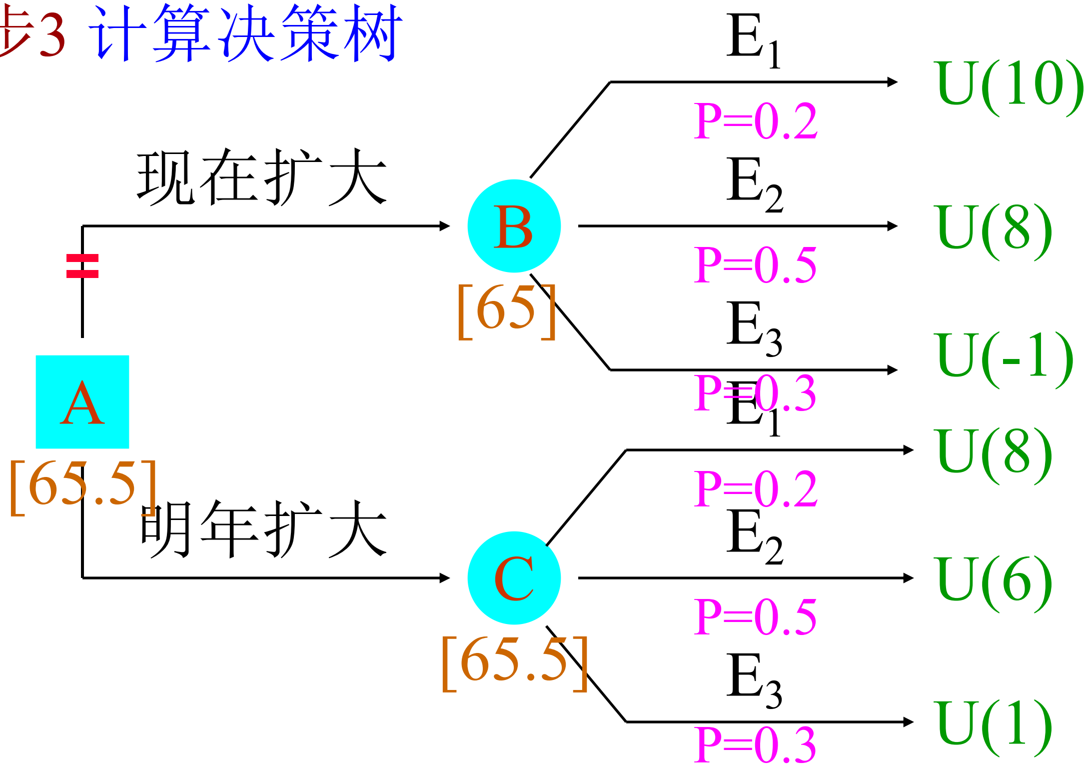


步2 计算效用值

如 U(1) = 0.25U(10) + 0.75U(-1) = 25，余类似，得下表。

M	-1	1	6	8	10
U(m)	0	25	80	90	100

步3 计算决策树



决策 明年扩大。

§5 不确定型问题

不确定决策问题：不知道自然状态出现的概率。

离散模型

可能状况 备选方案	q_1	q_2	…	q_n
d_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
…				
d_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

决策方法

乐观准则　悲观准则　折衷准则　平稳准则　后悔值法

折衷准则　（α 系数法）

α 是一个由决策者认定的系数。

若认定情况完全乐观，则 $\alpha = 1$；

若认定情况完全悲观，则 $\alpha = 0$；

一般情形，则 $0 < \alpha < 1$ 。

若

$$\boxed{f(d_i) = \alpha \max_j \{a_{ij}\} + (1-\alpha) \min_j \{a_{ij}\}}$$

则满足

$$\boxed{f(d^*) = \max_i f(d_i)}$$

的方案 d* 为 α 系数决策的最优方案。

α 系数法实际上是在方案的最佳收益和最差收益之间，计算一个折衷收益值，再从中选出最优者。

若效益值由损值表给出，则

$$\boxed{f(d_i) = \alpha \min_j \{a_{ij}\} + (1-\alpha) \max_j \{a_{ij}\}}$$

$$\boxed{f(d^*) = \min_i f(d_i)}$$

平稳准则

步 1 确定各方案的最大收益值 $\max_j\{a_{ij}\}$ 和最小收益值 $\min_j\{a_{ij}\}$。

步 2 计算各方案的平均收益值 $v_i = (\sum_j a_{ij}) / n$。

步3 对于 i = 1,…, m 计算

$$u_i = \frac{\max_j\{a_{ij}\} - \min_j\{a_{ij}\}}{v_i}$$

步4 对于 i = 1,…, m，选择方案 d* ，使得

$$f(d^*) = \min_i u_i$$

后悔值法

步 1 确定各自然状态的最大收益值

$$w_j = \max_i \{a_{ij}\}$$

步 2 计算各方案相对于诸自然状态的后悔值

$$b_{ij} = w_j - a_{ij}$$

步 3 对于 i = 1,…, m，计算各方案的最大后悔值

$$f(d_i) = \max_j \{b_{ij}\}$$

步 4 对于 i = 1,…, m，选择方案 d*，使得

$$f(d^*) = \min_i f(d_i)$$

【例】某工厂按批生产某产品，并按批销售之。每件产品成本是30元，批发价为35元。若当月生产的产品未售完，则每件损失1元。该厂每投产一批是10件，最大月生产力是40件，可供决策者选择的方案是 0, 10, 20, 30, 40 这五种情形。假定决策者对产品的其它情况一无所知，他应如何决策？

【解】步1 列出效益值表

效益 销售 / 投产	0	10	20	30	40
0	0	0	0	0	0
10	-10	50	50	50	50
20	-20	40	100	100	100
30	-30	30	90	150	150
40	-40	20	80	140	200

效益 销售 / 投产	0	10	20	30	40
0	0	0	0	0	0
10	-10	50	50	50	50
20	-20	40	100	100	100
30	-30	30	90	150	150
40	-40	20	80	140	200

	乐观准则	悲观准则	折中准则	平稳准则	后悔准则
0	0	0			
10	50	-10	10	1.58	150
20	100	-20			
30	150	-30			
40	200	-40			

后悔准则：max {10, 0, 50, 100, 150 } = 150

步2 决策计算 ($\alpha = 1/3$)

	乐观准则	悲观准则	折衷准则	平稳准则	后悔准则
0	0	0	0	∞	200
10	50	-10	10	1.58	150
20	100	-20	20	1.875	100
30	150	-30	30	2.31	50
40	200	-40	40	3	40

评 述

不同的决策准则将导致不同的“最优方案”。理论上并不能证明哪种方法最合理。因此上述方法受主观影响较大。实践中，往往设法将其转化为风险决策问题来处理。