整数规划

吴 婷

南京大学数学系

2020年7月14日

§1 数学模型

问题的提出

【例 1】某企业家计划以14万资金从事项目投资。若可供选择的项目如下表所示，试求收益最大的投资方案。

项　目	投入 (万元)	获利 (万元)
A	5	16
B	7	22
C	4	12
D	3	8

【解】设 x_j 表示第 j 个项目的投资状态，且

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{投资 } j \text{ 项目} \\ 0, & \text{不投资 } j \text{ 项目} \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \text{Max } z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \\ \quad x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j = 1,\dots,4 \end{cases}$$

解得

$x^* = (0, 1, 1, 1)^T$

$f^* = 42$ (万元)

【例 2】某公司计划在m个可能的地点选择一定数量的厂址。若 i处被选中，则以下情况应予考虑：① 固定成本 P_i；② 预生产能力 S_i；③ 第j区的需要量 d_j；④ 由i厂至j地区的商品运输成本C_{ij}。试求费用最小且满足需要的选址方案。

【解】设 x_{ij} 表示由 i 点运往 j 地区的商品数量；w_i 表示 i 处的选择状态，且

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{选择 } i \text{ 地} \\ 0, & \text{不选择 } i \text{ 地} \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \text{Min } f = \sum_i P_i w_i + \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t. } \sum x_{ij} \le S_i w_i, \quad i = 1,\ldots,m \\ \qquad \sum w_i x_{ij} \ge d_j, \quad j = 1,\ldots,n \\ \qquad x_{ij} \ge 0;\ w_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

整数线性规划的几种常见的类型

全整型线性规划	决策变量、约束条件中的系数皆为整数
纯整型线性规划	决策变量全为整数
混合型整数线性规划	部分决策变量为整数
0 – 1型整数线性规划	决策变量只能取0或1

§2 分支定界法

算法的导出

【例 1】求解整数规划问题

$$
\begin{cases}
\text{Max } z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } x_1 + x_2 \le 5 \\
-x_1 + x_2 \le 0 \\
6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
x_j \ge 0,\ j=1,\ 2 \text{ 且为整}
\end{cases}
$$

【分析 】考虑伴随问题，即放开整约束的线性规划问题

$$
\begin{cases}
\text{Max } z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } x_1 + x_2 \le 5 \\
-x_1 + x_2 \le 0 \\
6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
x_j \ge 0,\ j=1,\ 2
\end{cases}
$$

伴随问题的最优解是 $\underline{x}^* = (2.5, 2.5)^T$，$z^* = 7.5$

能否通过圆整的办法求得该问题的整数最优解呢？

可选择的点为

$\underline{x}^{(1)} = (2,2)^T$，$\underline{x}^{(2)} = (2,3)^T$，$\underline{x}^{(3)} = (3,2)^T$，$\underline{x}^{(4)} = (3,3)^T$。

枚举法呢？

此法虽然能求得整数最优解，但是计算量成指数倍增长，实践中无法运用。

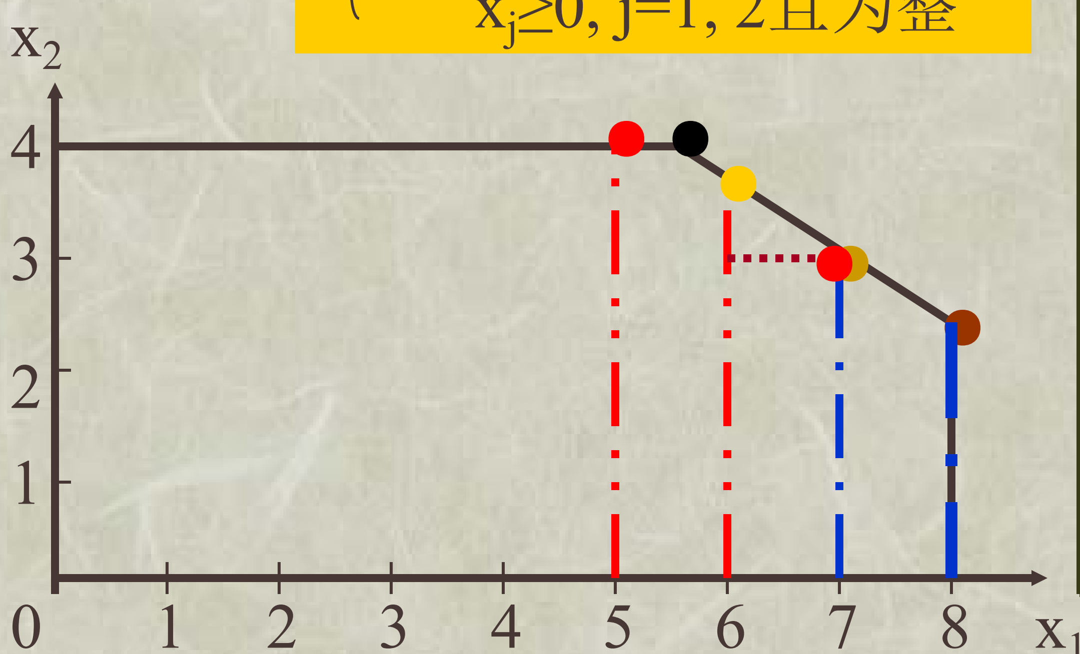
能否只检验一小部分整数解点，从而求得该问题的整数最优解呢？

分支定界法

【例 2】求解整数规划问题

$$
\begin{cases}
\text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\
\text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\
\quad x_1 \le 8 \\
\quad x_2 \le 4 \\
\quad x_j \ge 0,\ j=1,2 \text{且为整}
\end{cases}
$$

【解】



x	f
(5.6, 4)	272
(5, 4)	260
(6,3.75)	270
(7.2,3)	264
(7,3)	260
(8,2.5)	260

$$(L_0)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 4 \\ x_j \ge 0,\ j=1, 2 \end{cases}$$

$x^{(0)} = (5.6, 4)^T$, $f_0 = 272$

$f^* \le 272$

$x_1 \le 5$

$$(L_1)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_j \ge 0,\ j=1, 2 \end{cases}$$

$x^{(1)} = (5, 4)^T$, $f_1 = 260$

$x_1 \ge 6$

$$(L_2)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j=1, 2 \end{cases}$$

$x^{(2)} = (6, 3.75)^T$, $f_2 = 270$

$260 \le f^* \le 270$

$x_2 \le 3$

$$(L_3)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j=1, 2 \end{cases}$$

$x^{(3)} = (7.2, 3)^T$, $f_3 = 264$

$260 \le f^* \le 264$

$x_2 \ge 4$

$$(L_4)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 = 4 \\ x_1 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j=1, 2 \end{cases}$$

不可行

$x_1 \le 7$

$$(L_3)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j=1,\ 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 8$

$$(L_5)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j=1,\ 2 \end{cases}$$

$$(L_6)\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1+40x_2 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 8x_2 \le 60 \\ x_1 = 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j=1,\ 2 \end{cases}$$

$x^{(5)} = (7, 3)^T,\ f_5 = 260$

$260 \le f^* \le 260$

$x^{(6)} = (8, 2.5)^T,\ f_6 = 260$

于是，最优解为：$x^* = (5, 4)^T$，$x^* = (7, 3)^T$；$f^* = 260$

为了更清楚地表达求解过程，通常运用以下方式：

$\{L_0 \mid x^{(0)} = (5.6, 4)^T,\ f_0 = 272\}$

$f^* \le 272$

$x_1 \le 5$ | $x_1 \ge 6$

$\{L_1 \mid x^{(1)} = (5, 4)^T,\ f_1 = 260\}$

$260 \le f^* \le 270$

$\{L_2 \mid x^{(2)} = (6, 3.74)^T,\ f_0 = 270\}$

$x_2 \le 3$ | $x_2 \ge 4$

不可行

$\{L_3 \mid x^{(3)} = (7.2, 3)^T,\ f_3 = 264\}$

$260 \le f^* \le 264$

$x_1 \le 7$ | $x_1 \ge 8$

$\{L_5 \mid x^{(5)} = (7, 3)^T,\ f_5 = 260\}$

$\{L_6 \mid x^{(6)} = (8, 2.5)^T,\ f_3 = 260\}$

$f^* = 260$

定界要点

求极大	子域上伴随问题的整数解提供原问题最优目标值的下界。
	子域上伴随问题的非整数解提供原问题最优目标值的上界。
求极小	子域上伴随问题的整数解提供原问题最优目标值的上界。
	子域上伴随问题的非整数解提供原问题最优目标值的下界。

不再分支准则

(1) 子域上伴随问题的最优解是整数。

(2) 子域上伴随问题不可行。

(3) 子域上伴随问题的最优解不可能优于目前已求得的解。

分支变量的选择

任意

§3 隐枚举法

基本思想

对于0-1规划问题，由于其解被限定为0或1，故可以在满足约束的前提下，将目标优化演变为“过竿”约束，逐次改进，最终求得最优解。

【例 1】求解整数规划问题

$$
\begin{cases}
\text{Max } z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\
\qquad x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\
\qquad x_1 + x_2 \le 3 \\
\qquad 4x_2 + x_3 \le 6 \\
\qquad x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j=1, 2, 3
\end{cases}
$$

【解】

步 1　试算初始可行解

求极大	在目标函数中，令负系数决策变量为 0，其余变量为 1。
求极小	在目标函数中，令正系数决策变量为 0，其余变量为 1。

本例为 $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$

步 2　将目标优化转变为“过竿”约束，解不等式组。

本例，　$f_0 = 3$；

“竿”为 $f_{max} \geq 3$。

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j=1, 2, 3 \end{cases}$$

点	竿 $f \geq 3$	约束①	约束②	约束③	约束④	目标值
(0, 0, 0)	×					
(0, 0, 1)	√	√	√	√	√	5
	竿 $f \geq 5$					
(0, 1, 0)	×					
(0, 1, 1)	×					
(1, 0, 0)	×					
(1, 0, 1)	√	√	√	√	√	8
	竿 $f \geq 8$					
(1, 1, 0)	×					
(1, 1,1)	×					
次数	16					

§4 指派问题

有n件事，让n个人去做，如何分配效益最高？

数学模型

设 x_{ij} 表示指派第i个人去做第j件事，则

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{指派第i个人去做第j件事} \\ 0, & \text{未指派任何人} \end{cases}$$

由于每人只做一件事，每件事也只分配一个人去做，故

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} = 1, \ i = 1,\ldots,n \\ \sum_i x_{ij} = 1, \ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

一般模型

$$\begin{cases} \text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} \\ \text{s.t. } \sum_j x_{ij} = 1,\ \ i = 1,\dots,n \\ \qquad \sum_i x_{ij} = 1,\ \ j = 1,\dots,n \\ \qquad x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

【例 1】四个工人被分配去做四项不同的工作。他们各自完成这些工作需要的时间如下表所示。试求总消耗时间为最少的分配方案。

	工作 Ⅰ	工作 Ⅱ	工作 Ⅲ	工作 Ⅳ
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	19

【解】设 x_{ij} 表示指派第i个人去做第j件事，则

$$\begin{cases} \text{Min } f = 2x_{11}+15x_{12}+13x_{13}+4x_{14}+ \\ \qquad 10x_{21}+4x_{22}+14x_{23}+15x_{24}+ \\ \qquad 9x_{31}+14x_{32}+16x_{33}+13x_{34}+ \\ \qquad 7x_{41}+8x_{42}+9x_{43}+10x_{44} \\ \text{s.t. } \sum_j x_{ij} = 1, \; i = 1,\dots,4 \\ \qquad \sum_i x_{ij} = 1, \; j = 1,\dots,4 \\ \qquad x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

对于上述模型，应如何去解？

匈牙利法

独立零元素 矩阵中，位于不同行、不同列的零元素。

定理 1 若n维指派问题的效益矩阵有n个独立零元素，则与独立零元素位置相应的变量x_{ij}置1，其余置0，即得指派问题得最优解。

如何生成零元素？

定理 2 若从效益矩阵一行(列)诸元素中分别减去该行(列)的最小元素得到一个新矩阵，则以此新矩阵作为效益矩阵的指派问题最优解和原问题相同。

【证明】

设原问题的效益矩阵为 C_{ij}，新矩阵为 B_{ij}，则

$$B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \cdots & & & \\ C_{k1}-r & C_{k2}-r & \cdots & C_{kn}-r \\ \cdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

目标函数

$$z = \sum_i \sum_j B_{ij} x_{ij} = \sum_i (B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{in}) \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \ldots \\ x_{in} \end{pmatrix}$$

$$= [C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n}] \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \ldots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + ([C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kn}] - [r, r, \ldots, r]) \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \ldots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$$

$$+ \ldots + [C_{n1}, C_{n2}, \ldots, C_{nn}] \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \ldots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= f - r\sum_j x_{kj} = f - r$$

故原问题与新问题的最优解相同。

圈零法

步 1　增加效益矩阵的零元素。

　① 每行减去该行中的最小元素；②每列减去该列中的最小元素。

步 2　找出效益矩阵中所有独立的零元素。

本例中

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行减}} \begin{pmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列减}} \begin{pmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{圈零}} \begin{pmatrix} \cancel{0} & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \cancel{0} & 1 & \circledcirc & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

最佳方案已求得，即

甲 -- Ⅳ；乙 -- Ⅱ；丙 -- Ⅰ；丁 -- Ⅲ。

共需 28 小时。

圈零准则

(1) 圈零应从含零最少的行 (列) 开始。

(2) 圈出一个零后，应划去与其同行 (列) 的其它零元素。

(3) 若含零最少的行 (列) 存在两个或两个以上的零元素时，可任选一个起始。由于选择不同，得到的最优解也将不同，但目标值肯定是相同的。

准则反例

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{圈零}} \begin{pmatrix} \circledcirc & 13 & 7 & \cancel{0} \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \cancel{0} & 5 & 3 & 2 \\ \cancel{0} & 1 & \circledcirc & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

多解范例

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{圈零}} \begin{pmatrix} ◎ & 4 & \cancel{0} & 1 \\ 3 & \cancel{0} & ◎ & 2 \\ \cancel{0} & 4 & 2 & ◎ \\ 8 & ◎ & 3 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{圈零}} \begin{pmatrix} \cancel{0} & 4 & ◎ & 1 \\ 3 & ◎ & \cancel{0} & 2 \\ ◎ & 4 & 2 & \cancel{0} \\ 8 & \cancel{0} & 3 & ◎ \end{pmatrix}$$

倘若圈不到n个独立的零元素，怎么办？

最小直线集合

步 1 对不含圈零的行打上记号“√”。

步 2 对打“√”的行中所有含零元素的列打上记号“√”。

步 3 对打“√”的列中有圈零的行打上记号“√”。

步 4 重复步2、步3，直至打不出新的“√”为止。

步 5 对未被打“√”的行划横线，对所有打“√”的列划竖线，即得最小直线集合。

生成独立的零元素

步 1 在未被最小直线集合覆盖的元素中，找出最小元素τ

步 2 在未被最小直线集合覆盖的行中，每个元素都减去τ

步 3 在被最小直线集合覆盖的列中，每个元素都加上τ

若实施上述步骤后，依然未能找到n个独立的零元素，则重新计算最小直线集合。

【例 2】圈出下列效益矩阵的独立零元素。

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 17 & 21 & 25 \\ 24 & 20 & 18 & 16 & 27 \\ 30 & 26 & 28 & 25 & 23 \\ 19 & 18 & 21 & 29 & 20 \\ 23 & 17 & 24 & 27 & 16 \end{pmatrix}$$

【解】

$$C \xrightarrow{\text{行减}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 11 \\ 7 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 11 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列减}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 0 & 11 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 2 \\ 6 & 1 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

圈零

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & \circledcirc & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & \circledcirc & 11 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & \circledcirc \\ \circledcirc & \cancel{0} & 3 & 11 & 2 \\ 6 & 1 & 8 & 11 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

最小直线集合

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 6 & \circledcirc & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & \circledcirc & 11 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & \circledcirc \\ \circledcirc & 0 & 3 & 11 & 2 \\ 6 & 1 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \surd \end{matrix} & \end{array}$$

行减列加

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & \circledcirc & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & \circledcirc & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & \circledcirc \\ \circledcirc & 0 & 3 & 11 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

圈零

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & \circledcirc & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & \circledcirc & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & \circledcirc \\ \circledcirc & \cancel{0} & 3 & 11 & 3 \\ 5 & \circledcirc & 7 & 10 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

附注 1　对于指派问题中的极大化模型

$$\text{Max} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \neq \text{Min} \sum_i \sum_j (-c_{ij}) x_{ij}$$

这时，应构造一个新的效益矩阵 $B = \{b_{ij}\}$

其中，$b_{ij} = M - c_{ij}$，$M = \max \{c_{ij}\}$。然后，求解

$$\begin{cases} \text{Min} \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \sum_j x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,n \\ \sum_i x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots,n \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

由于两者的效益矩阵之间，诸元素相差一个常数，因此，这两个模型的最优解相同。

附注 2　人数和任务数不相等的指派问题

人少事多	虚拟人，效益系数取零
事少人多	虚拟事，效益系数取零
1人多事	将该人化为若干个效益系数相同的人
不宜某事	将该人承担此事的效益系数取 M >> 1

【例 3】拟由三家公司承建五个商店，费用如下：

	A	B	C	D	E
甲	4	8	7	15	12
乙	7	9	17	14	10
丙	6	9	12	8	7

若允许一家公司可以承建1-2家商店，求最佳方案。

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{圈零}]{\text{列减}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \circledcirc & \cancel{0} & \cancel{0} & 7 & 5 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \circledcirc & \cancel{0} & 7 & 5 & \cancel{0} \\ 3 & 1 & 10 & 6 & 3 & \circledcirc \\ 3 & 1 & 10 & 6 & 3 & \cancel{0} \\ 2 & 1 & 5 & \circledcirc & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 2 & 1 & 5 & \cancel{0} & \circledcirc & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \surd \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \surd \end{matrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{列加}]{\text{行减}} \begin{pmatrix} \circledcirc & \cancel{0} & \cancel{0} & 7 & 5 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \circledcirc & 7 & 5 & 1 \\ 2 & \cancel{0} & 9 & 5 & 2 & \circledcirc \\ 2 & \circledcirc & 9 & 5 & 2 & \cancel{0} \\ 2 & 1 & 5 & \circledcirc & \cancel{0} & 1 \\ 2 & 1 & 5 & \cancel{0} & \circledcirc & 1 \end{pmatrix}$$

甲－A、C；

乙－B；

丙－D、E；

共需35万元。

§5 割平面法

算法思想

求解线性整数规划问题的伴随问题时，若最优解不是整数时，则设法在伴随问题中增加一个约束，使其：

(1) 将此非整最优解“割去”；

(2) 原问题的任一整数解不受该约束的影响。

如此循环，直至求得原问题的整数最优解。

数学推导

设伴随问题的最优基为 $B = [p_{i_1}, p_{i_2},\ldots,p_{i_m}]$，N表示非基列。则

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

若 $d = B^{-1}b$ 的分量是整数，则 $x^* = (x_B, 0)^T$为原问题的最优解；

若 $d = B^{-1}b$ 的分量并非全是整数，不妨设其第i个分量d_{i_0}不是整数，则该问题单纯形终表中第i个方程为

$$x_{i_0} + \sum_j \lambda_{i_0 j} x_j = d_{i_0},\ \ j \in N$$

令 $\lambda_{i_0 j} = [\lambda_{i_0 j}] + \tau_{i_0 j}$，其中$[\cdot]$表示不超过$\lambda_{i_0 j}$的最大整数，且 $0 \le \tau_{i_0 j} < 1$。

类似地，设 $d_{i_0} = [d_{i_0}] + \sigma_{i_0}$，其中 $0 < \sigma_{i_0} < 1$。则

$$x_{i_0} + \sum_j ([\lambda_{i_0 j}] + \tau_{i_0 j}) x_j = [d_{i_0}] + \sigma_{i_0},\ \ j \in N$$

即

$$x_{i_0} = [d_{i_0}] - \sum_j [\lambda_{i_0 j}] x_j + \sigma_{i_0} - \sum_j \tau_{i_0 j} x_j,\ \ j \in N$$

于是，对于$j \in N$，约束 $\sigma_{i_0} - \sum_j \tau_{i_0 j} x_j \le 0$为所求的割平面约束。

理论分析

定理 5.1　割平面 $\sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0 j}\, x_j \le 0$ 割去了伴随线性规划问题的非整最优解。

【证明】设伴随问题的最优基为$B = [p_{i_1}, p_{i_2},\ldots,p_{i_m}]$，N表示非基列。由$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$可知，最优解

$$x^* = (x_B, 0)^T = (B^{-1}b, 0)^T = (d_{1_0}\ d_{2_0}, \ldots, d_{m_0}, 0)^T$$

即

$$\begin{cases} x_{j_i} = d_{i_0}\ ,\quad i = 1, \ldots, m \\ x_j = 0, \qquad j \in N \end{cases}$$

将上式代入割平面方程 $\sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0 j}\, x_j \le 0$ 得 $\sigma_{i_0} \le 0$。

这与 $\sigma_{i_0} > 0$ 矛盾！它表明最优基B不满足割平面约束。此约束加入伴随线性规划问题，必将已求得的非整最优解割去。

定理 5.2 割平面 $\sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0j} x_j \le 0$ 不会割去原整数规划问题的任何整可行解。

【证明】只需证明原问题的任一整可行解均满足割平面约束。

设 $x^{(0)} = (x_1^{(0)} , x_2^{(0)} ,\ldots,x_n^{(0)})^T$是原整数规划问题的一个整可行解。则它必满足方程

$$x_B^{(0)} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N^{(0)}$$

即，对于$j\in N$

$$x_{j_i}^{(0)} = d_{i_0}-\sum_j \lambda_{i_0j} x_j^{(0)}，\ i = 1 ,\ldots, m$$

设 $\lambda_{i_0j} = [\lambda_{i_0j}] + \tau_{i_0j}$，$d_{i_0} = [d_{i_0}] + \sigma_{i_0}$，且 $0 \le \tau_{i_0j} < 1$，$0 < \sigma_{i_0} < 1$。

则 $$x_{j_i}^{(0)} = [d_{i_0}] -\sum_j [\lambda_{i_0j}] x_j^{(0)} + \sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0j} x_j^{(0)}$$

由于 $x_{j_i}^{(0)}$ 是整数，故 $\sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0j} x_j^{(0)}$ 必为整数。又 $\sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0j} x_j^{(0)} \le \sigma_{i_0} < 1$，故

$$\sigma_{i_0}-\sum_j \tau_{i_0j} x_j^{(0)} \le 0$$

满足割平面约束。

【例 1】求解整数规划问题

$$\begin{cases} \text{Max } z = 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_j \ge 0,\ j=1, 2 \text{且为整} \end{cases}$$

【解】将该问题的伴随问题化为标准型

$$\begin{cases} \text{Min } f = -3x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j=1, \ldots, 5 \end{cases}$$

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	解
x_3	11/2	0	1	-1/2	0	8
x_2	5/4	1	0	-1/4	0	5/2
x_5	3/4	0	0	1/4	1	5/2
r	-17/4	0	0	1/4	0	-5/2
x_1	1	0	1/7	0	2/7	13/7
x_4	0	0	-3/7	1	22/7	31/7
x_2	0	1	-2/7	0	3/7	9/7
r	0	0	5/7	0	3/7	30/7

$x = (13/7, 9/7)^T$ 不是原问题的最优解。以x_1为源行，由

$x_1=1+6/7-1/7x_3-2/7x_5$ 得割平面 $6/7 - 1/7x_3 - 2/7x_5 \leq 0$

引入松弛变量s_1，得 $s_1 - 1/7x_3 - 2/7x_5 = -6/7$

将上述割平面方程加入伴随问题，得单纯形表

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	解
x_1	1	0	1/7	0	2/7	0	13/7
x_4	0	0	-3/7	1	22/7	0	31/7
x_2	0	1	-2/7	0	3/7	0	9/7
s_1	0	0	-1/7	0	-2/7	1	-6/7
r	0	0	5/7	0	3/7	0	30/7
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_3	0	0	1	-1/2	0	-11/2	5/2
x_2	0	1	0	-1/4	0	-5/4	5/4
x_5	0	0	0	1/4	1	-3/4	7/4
r	0	0	0	1/4	0	17/4	7/4

$x = (1, 5/4)^T$ 仍不是原问题的最优解。以 x_5 为源行，作割平面

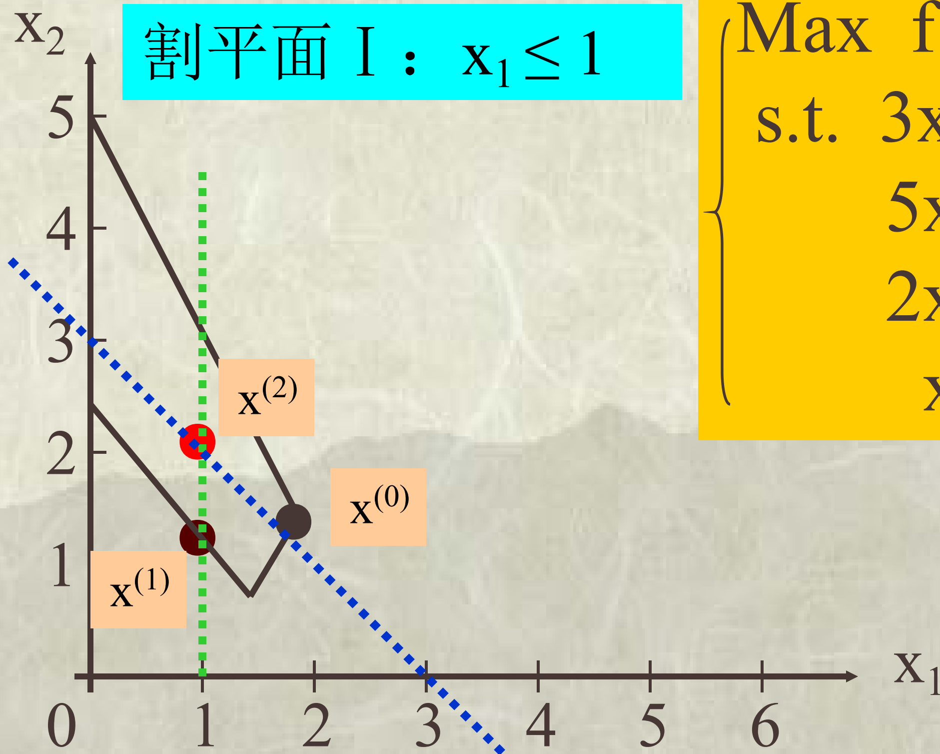
$$-1/4\ x_4 - 1/4\ s_1 + s_2 = -3/4$$

将上述割平面方程加入伴随问题，得单纯形表

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	解
x_1	1	0	0	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	-1/2	0	-11/2	0	5/2
x_2	0	1	0	-1/4	0	-5/4	0	5/4
x_5	0	0	0	1/4	1	-3/4	0	7/4
s_2	0	0	0	-1/4	0	-1/4	1	-3/4
r	0	0	0	1/4	0	17/4	0	7/4
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	0	1	0	0	2	-5	4
x_2	0	1	0	0	0	1	-1	2
x_5	0	0	0	0	1	-1	-1	1
x_4	0	0	0	1	0	-4	1	3
r	0	0	0	0	0	1	4	1

$x^* = (1, 2)^T$ 为原整数线性规划问题的最优解，$f^* = 1$。

上例图示



$$
\begin{cases}
\text{Max } f = 3x_1 - x_2 \\
\text{s.t. } 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\
\quad 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10 \\
\quad 2x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\
\quad x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5
\end{cases}
$$

割平面 II： $x_1 + x_2 \ge 3$

第一割平面： $6/7 - 1/7x_3 - 2/7x_5 \le 0$， 即 $x_3 + 2x_5 \ge 6$。以约束方程 $x_3 = 3 - 3x_1 + 2x_2$ 和 $x_5 = 5 - 2x_1 - x_2$ 代入得 $x_1 \le 1$。

第二割平面： $3/4 - 1/4x_4 - 1/4s_1 \le 0$， 即 $x_4 + s_1 \ge 3$。以约束方程 $x_4 = 10 - 5x_1 - 4x_2$, $s_1 = 1/7x_3 + 2/7x_5 - 6/7$, $x_3 = 3 - 3x_1 + 2x_2$, $x_5 = 5 - 2x_1 - x_2$ 代入得 $x_1 + x_2 \ge 3$ 。