

# 全国第四届研究生数学建模竞赛



题号     D    

## 题 目 邮政运输网络中的邮路规划和邮车调度

### 摘 要：

邮政运输网络的好坏，直接决定着邮政企业生存能力，本文针对某地区的邮政网络建立规划模型，并给出邮路规划和邮车调度方案。

对于问题 1，首先给出了精确的数学规划模型，但由于组合情况过多，采用先按一定规则对支局进行分组，再对每个分组求最优解，求得至少需要 3 辆邮车，由空车率而减少的收入为 64.03 元，同时给出运行时间最短的结果作为比较，并指出在该分组的情况下，无法用 2 辆车满足需求。

对于问题 2，采用分步决策的思想建模求解，即先考虑区级邮路的划分，再考虑各县邮路的划分，求得一组基础解，总费用为 10491 元；研究发现区级邮车对总费用的影响较大，进而对结果进行优化，求得较优解，总费用为 9762 元，减少 729 元，下降 6.78%，共 4 条区级邮路，比可行解减少了 1 条。

对于问题 3，对交界地带支局的研究，分别对问题 2 的两组结果进行调整，求得总费用分别减少 351 元和 162 元。

对于问题 4，引入县局选址评价标准函数进而大大简化了县局选址的复杂性，选取 $(Z_9, X_2, Z_{28}, Z_{36}, Z_{52})$ 为各县区的县局，用问题 2 中的思想求解得总费用为 8715 元，较 9762 元减少 1047 元，下降 10.73%；在此基础上用问题 3 的思想调整临界支局，总费用减少 72 元。

参赛密码                       
(由组委会填写)

参赛队号           9003803           参赛学校           海军工程大学          

参赛队员姓名                   李岩  王元  夏少军

## 一、问题的重述

在信息技术飞速发展的今天，互联网已经成为一种重要的通信手段，但邮政作为传统的通信手段仍然与我们的日常生活和工作息息相关，发挥着不可替代的作用。在邮政生产的收寄、分拣封发、邮政运输和投递四大环节组成中。邮政运输作为邮政生产过程的第三大环节，是邮政赖以传递邮件实现实物空间转移的物质基础。时限与成本是衡量邮政运输问题好坏的两个重要指标。时限是指邮电部规定的邮件、报刊处理、传递的最大时间限制，时限关系到邮政通信质量的好坏；成本影响着企业的经营。

邮政运输网络是邮政企业运营的重要保障，是决定邮政企业竞争能力的主要因素。自20世纪60年代以来，发达国家随着社会经济的发展，为了使邮政满足社会的需求，适应相关行业之间的竞争形势，对邮路的结构、通信组织方式及运行机制作了较大的调整，逐步扩大网络的覆盖区域，并按时限要求改进业务分类，开办快件等业务。随着UPS等国际性物流公司进驻国内，我国邮政正面临极大的挑战。我国邮政必须发挥自身优势，在缩短邮件运输时限和降低成本的同时，节约能耗和人力资源，提高邮政行业的服务质量和信誉，切实提高我国邮政的运行效益，保持邮政行业的竞争能力和取得良好的社会效益。

我国的邮政运输网络采用邮区中心局体制，即以邮区中心局作为基本封发单元和网路组织的基本节点，承担着进、出、转口邮件的处理、封发和运输任务，在此基础上组织分层次的邮政网。邮路是邮政运输网络的基本组成单元，它是指利用各种运输工具按固定班期、规定路线运输邮件，并与沿线有交接频次的邮政局、所交换邮件总包所行驶的路线。邮路的结构形式有三种：辐射形、环形和混合形。

现在某地区的邮政局、分为地市中心局（简称地市局）、县级中心局（简称县局）和支局三级机构，该地区的邮政运输网络由区级邮政运输网和县级邮政运输网构成。为使邮政企业实现低成本运营和较高的服务质量，我们需要对该地区的邮政运输网络进行重构，确定合适的邮路规划方案并进行邮车的合理调度。

本文需要我们在满足该地区的邮政运输流程及时限规定的前提下，优化路径，节约成本，解决以下问题：

1. 以县局 $X_i$ 及其所辖的16个支局 $Z_1, Z_2, \dots, Z_{16}$ 为研究对象，假设区级第一班次邮车08:00到达县局 $X_i$ ，区级第二班次邮车16:00从县局 $X_i$ 再出发返回地市局D，若每辆县级邮车最多容纳65袋邮件，试问最少需要多少辆邮车才能满足该县的邮件运输需求？同时，为提高邮政运输效益，应如何规划邮路 and 如何安排邮车的运行？

2. 采用尽可能少、尽可能短的邮路可以减少邮政部门车辆和人员等的投入，从而显著降低全区邮政运输网的总运行成本。考虑投入车况较好的邮车，通常每条邮路只需要一辆邮车即能满足运载能力要求，试问应如何构建该地区的邮政运输网络（县的划分不能变更），请你给出邮路规划和邮车调度方案。请注意邮车的调度必须满足该地区的邮政运输流程及时限规定。

3. 考虑到部分县与县交界地带的支局，其邮件由邻县县局负责运送可能会降低全区的运行成本，带来可观的经济效益。若允许在一定程度上打破行政区域的限制，你能否给出更好的邮路规划和邮车调度方案？

4. 县局选址的合理与否对构建经济、快速的邮政运输网络起到决定性的作用。假设该地区县局 $X_1, \dots, X_n$ 均允许迁址到本县内任一支局处，同时原来的

县局弱化为普通支局。设想你是该地区网运部门负责人，请你重新为各个县局选址，陈述你的迁址理由并以书面材料形式提交省局网运处。

## 二、问题的分析

作为邮政生产过程中四大环节之一的邮政运输是邮政通信的命脉，是决定邮件传递速度的重要环节，根据邮运生产的实际情况，我们对本题的邮车规划问题总结如下：所有车辆集中在某一个中心枢纽上（地市局或县局），从该点出发到达其所需送达的各点上（县局或支局），邮车在指定时间内到达各点并停留一段时间用于交换邮件。当考虑邮车的运载能力时，该路由上沿途各点的邮件总量不能超过邮车的运载能力。

通过邮政路线的规划，我们希望在满足该地区邮政运输流程及时限规定的前提下，尽可能安排最少的邮车，降低总成本。

### 1、关于速度的分析，

题目中给定县级邮车的平均时速为30km/h，区级邮车平均时速为65km/h，存在两种理解，一种是速度只和邮车级别有关，不受区域的限制。另一种是邮车受区域的影响，即区级邮车进入县区域时，速度要降为县级邮车的速度。

但在本题的研究中我们发现，如果按后者理解，对于地市局  $D$  到县局  $X_5$ ，最短路径为  $D \rightarrow Z_{61} \rightarrow Z_{58} \rightarrow Z_{52} \rightarrow X_5$ ，对于从市区进入县区路段  $Z_{58} \rightarrow Z_{52}$  的速

度，近似取其为两速度的平均，则单程耗时  $\frac{(22+41)}{65} + \frac{30}{(65+30)/2} + \frac{31}{30} = 2.6341\text{h}$ ，

即使不考虑任何停留，来回路程时间为5.2683h，大于区级车的时限5h的要求，与题意矛盾；因此在本文的求解过程中，速度的理解取前者。

### 2、对县级网络有效时间的分析：

假设县局为  $X_i$ ，在其对应的区级邮路  $i$  上，区级邮车从市局  $D$  到县局  $X_i$  的耗时为  $t_1$  (包括中途支局停留时间)，从县局  $X_i$  返回市局  $D$  的耗时为  $t_2$ ；则该区级邮路的耗时  $t$  为  $t = t_1 + t_2 + \frac{10}{60}$ 。

为了充分利用时间，假设第一班邮车每天 6:00 从市局出发，那么它到达县局  $X_i$  的时刻为  $t_1 + 6$ ；假设第二班邮车 18:00 刚好回到市局，那么它离开县局  $X_i$  的时间刻  $18 - t_2$ ；再考虑到县局  $X_i$  对邮件的集中集中处理时间共 2 小时，该网络的有效时间为  $\Delta t = (18 - t_2) - (6 + t_1) - 2 = 10 - t + 1/6$ 。

可见县级网络有效时间与区级邮车到达县局时间无关，只与区级邮路的耗时有关。

### 三、 主要符号说明

$D$ : 地市局邮政局

$X_i$ : 第  $i$  个县局邮政局

$Z_j$ : 第  $j$  个支局邮政局

$v$ : 邮车平均时速, 其中县级邮车为 30km/h, 区级邮车为 65km/h

$a_j$  由县局送达支局  $Z_j$  的邮件数量

$b_j$  由支局  $Z_j$  送往县局的邮件数量

$Q$ : 运行总成本

### 四、 基本假设

1. 邮车平均时速恒定, 且不受天气、路况等客观因素的影响, 其中县级邮车为 30km/h, 区级邮车为 65km/h。
2. 邮车卸装邮件不受邮件数量、大小等因素的影响, 只取决于邮局的级别, 其中邮车在各支局卸装邮件耗时 5 分钟, 在各县局卸装邮件耗时 10 分钟。
3. 不考虑交通意外等突发事件, 并且邮车在运输过程中, 除在各县局、支局停留外, 不做任何停留。
4. 各县局、支局无论被经过几次, 只有一班邮车停留装卸邮件。
5. 采用车况较好的邮车可以满足任意邮局的装卸要求, 即不受运载能力的限制。

### 五、 模型的建立与求解

#### 5.1 问题一的解答

##### 5.1.1 模型的准备

求最短路径

由题中所给的直达路径, 将邮局视为点, 利用 Floyd 算法求解出任意两点间的最短路径, 任意两个顶点用一条边相连, 边的权值为这两点的最短距离, 这样就可以构造出一个完全图。

由于在完全图中, 任意两点都相邻, 这样就可以利用图论中的知识来求解问题。当县级邮车由县局装卸完毕出发再回到县局, 若装卸, 则视为一条邮路, 若不装卸只是经过, 待它再返回县局装卸时才算一条邮路。换句话说, 当某县级邮车经过某邮局不发生装卸, 则视为该邮局不存在。这样, 每一条邮路与完全图中的一条圈一一对应, 只需要研究完全图中经过县局的圈即可。

##### 5.1.2 模型的分析与建立

本问主要考虑县局  $X_1$  及其所辖的 16 个支局  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{16}$  之间邮车的安排, 通过合理的安排, 提高运输效益, 从而使安排的邮车数量  $n$  最少, 并且使由空车率而减少的收入最少。

首先用分法 T 对县局  $X_1$  所辖的 16 个支局  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{16}$  进行分组, 假设将其

分为  $n$  组 ( $n=1,2,\dots,16$ )，分别记为  $V_1^{(T)}, V_2^{(T)}, \dots, V_n^{(T)}$ ，所有分法的集合记为  $\Phi$ ，

设  $V_k^{(T)} = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{l_k}}\}$ ，分组需要满足以下约束条件，

1) 每一个分组都需要包含县局  $X_1$ ，即  $V_1^{(T)} \cap V_2^{(T)} \cap \dots \cap V_n^{(T)} = \{X_1\}$

2) 分组要包括县局和所有的支局，即  $V_1^{(T)} \cup V_2^{(T)} \cup \dots \cup V_n^{(T)} = \{X_1, Z_1, \dots, Z_{16}\}$

设某辆县级邮车担任在支局  $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{l_k}}$  装卸的工作，完成这些支局的收发工作形成一条邮路，即对应一个圈。记  $i_1, i_2, \dots, i_{l_k}$  的全体排列组成集为  $\pi(i_1, i_2, \dots, i_{l_k})$ ，设  $j_1, j_2, \dots, j_{l_k} \in \pi(i_1, i_2, \dots, i_{l_k})$ ，邮车从县局出发依次在支局  $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{l_k}}$  装卸后再返回县局的邮路记为  $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{l_k}}$ ，对应完全图中的圈  $X_1, z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{l_k}}, X_1$ 。由县局送达支局  $z_{j_s}$  的邮件数量记为  $a_{j_s}$ ，由支局送往县局的邮件数量记为  $b_{j_s}$ ，两邮局  $z_l, z_m$  之间的最短距离记为  $|z_l z_m|$ 。

一条可行的邮路应该满足时间约束与容量约束

1) 时间约束：

区级第一班次邮车08:00到达县局  $X_1$ ，区级第二班次邮车16:00从县局  $X_1$  再出发返回地市局  $D$ 。根据邮政运输流程及时限规定，区级第一班次邮车到达后，县局  $X_1$  对邮件的集中处理时间为1小时；而区级第二班次邮车在县局  $X_1$  卸装完邮件后的出发时间必须在县局  $X_1$  的全部县级邮车返回县局并集中处理1小时以后，所以县级邮车的有效工作时间为09:00-15:00，有效工作时间长度必须小于6小时。

邮路  $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{l_k}}$  的行车时间为： $\frac{1}{30}(|X_1 z_{j_1}| + \sum_{s=1}^{l_k-1} |z_{j_s} z_{j_{s+1}}| + |z_{j_{l_k}} X_1|)$ ，装卸时间为  $\frac{1}{12} l_k$  小时，因此应有：

$$\frac{1}{30}(|X_1 z_{j_1}| + \sum_{s=1}^{l_k-1} |z_{j_s} z_{j_{s+1}}| + |z_{j_{l_k}} X_1|) + \frac{1}{12} l_k \leq 6$$

2) 容量约束

由县局出发依次在  $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{l_k}}$  支局收发后再回到县局的邮路应满足装车要求，不能超过 65 包，它发往  $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{l_k}}$  的总邮件数量为  $\sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m}$  (包)，收回

的总邮件数量为  $\sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m}$  (包)，因此应有：

$$\sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m} \leq 65$$

$$\sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m} \leq 65 ,$$

由县局  $X_1$  到支局  $z_{j_1}$  卸装完邮件后，邮车上的总邮件数量为  $\sum_{m=2}^{l_k} a_{j_m} + b_{j_1}$ ；由支局  $z_{j_1}$  出发到  $z_{j_2}$  卸装完邮件后邮车上的总邮件数为  $\sum_{m=3}^{l_k} a_{j_m} + b_{j_1} + b_{j_2}, \dots$ ，在支局  $z_{j_{l_k-1}}$  卸装完邮件后，邮车上的总邮件数量为  $a_{j_{l_k}} + (b_{j_1} + b_{j_2} + \dots + b_{j_{l_k-1}})$ ，由支局  $z_{j_{l_k}}$  卸装完邮件后，邮车上的总邮件数为  $\sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m}$ ，每次卸装完毕，邮车上的总邮件数量应满足容量的约束，因此，

$$\sum_{m=2}^{l_k} a_{j_m} + b_{j_1} \leq 65$$

$$\sum_{m=3}^{l_k} a_{j_m} + \sum_{e=1}^2 b_{j_e} \leq 65$$

.....

$$a_{j_{l_k}} + \sum_{e=1}^{l_k-1} b_{j_e} \leq 65$$

$$\text{从县局 } X_1 \text{ 到支局 } z_{j_1} \text{ 的空载率为 } \frac{65 - \sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m}}{65} ,$$

$$\text{从支局 } z_{j_1} \text{ 出发到 } z_{j_2} \text{ 的空载率为 } \frac{65 - (\sum_{m=2}^{l_k} a_{j_m} + b_{j_1})}{65} ,$$

.....

$$\text{从支局 } z_{j_{l_k-1}} \text{ 出发到 } z_{j_{l_k}} \text{ 的空载率为 } \frac{65 - (a_{j_{l_k}} + \sum_{e=1}^{l_k-1} b_{j_e})}{65} ,$$

从支局  $z_{j_k}$  出发到县局  $X_1$  的空载率为  $\frac{65 - \sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m}}{65}$ ,

因此, 从县局  $X_1$  经  $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$  的空载损失费用为

$$\begin{aligned}
 & 2 \times \left( |X_1 z_{j_1}| \cdot \frac{65 - \sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m}}{65} + |z_{j_1} z_{j_2}| \cdot \frac{65 - (\sum_{m=2}^{l_k} a_{j_m} + b_{j_1})}{65} + \dots \right. \\
 & \left. |z_{j_{k-1}} z_{j_k}| \cdot \frac{65 - (a_{j_k} + \sum_{m=1}^{l_k-1} b_{j_m})}{65} + |z_{j_k} X_1| \cdot \frac{65 - \sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m}}{65} \right) \\
 & = \frac{2}{65} \{ |X_1 z_{j_1}| (65 - \sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m}) + |z_{j_k} X_1| (65 - \sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m}) + \sum_{s=1}^{l_k-1} |z_{j_s} z_{j_{s+1}}| [65 - (\sum_{m=s+1}^{l_k} a_{j_m} + \sum_{m=1}^s b_{j_m})] \}
 \end{aligned}$$

综合分组、时间和容量的约束条件, 以由空车率而减少的收入最少为目标函数建立规划模型:

模型一:

$$\begin{aligned}
 & \min_{T \in \Phi} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k \in \pi(i_1, i_2, \dots, i_k)} \frac{2}{65} \{ |X_1 z_{j_1}| (65 - \sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m}) + \\
 & |z_{j_k} X_1| (65 - \sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m}) + \sum_{s=1}^{l_k-1} |z_{j_s} z_{j_{s+1}}| [65 - (\sum_{m=s+1}^{l_k} a_{j_m} + \sum_{e=1}^s b_{j_e})] \} \\
 & s.t. \left\{ \begin{aligned} & V_1^{(T)} \cap V_2^{(T)} \cap \dots \cap V_n^{(T)} = \{X_1\} \\ & V_1^{(T)} \cup V_2^{(T)} \cup \dots \cup V_n^{(T)} = \{X_1, Z_1, \dots, Z_{16}\} \\ & \frac{1}{30} (|X_1 z_{j_1}| + \sum_{l=1}^{l_k-1} |z_{j_l} z_{j_{l+1}}| + |z_{j_k} X_1|) + \frac{1}{12} l_k \leq 6 \\ & \sum_{m=1}^{l_k} a_{j_m} \leq 65 \\ & \sum_{m=2}^{l_k} a_{j_m} + b_{j_1} \leq 65 \\ & \sum_{m=3}^{l_k} a_{j_m} + \sum_{m=1}^2 b_{j_m} \leq 65 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{j_k} + \sum_{m=1}^{l_k-1} b_{j_m} \leq 65 \\ & \sum_{m=1}^{l_k} b_{j_m} \leq 65 \\ & T \in \Phi \\ & j_1, j_2, \dots, j_k \in \pi(i_1, i_2, \dots, i_k) \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

显然，如果给定一组确定的分组，可以解出在该分组情况下的最优解，但是由于分组的情况十分复杂，在短时间内无法全面的计算所有的组合情况，因此需要寻求一种合理有效的分组方法分组来求解。

### 5.1.3 模型的求解

邮路和邮车运行的安排对邮车数量有制约关系，要确定最少需要多少辆邮车，必须首先考虑如何安排邮路的问题。在求解过程中我们采用分段决策的思想，首先按照一定的规则对县局  $X_1$  的各个支局进行分组，然后再对各分组求解该分组的最佳邮路，综合得到一组较优解。从各支局所要收发的邮件数量考虑，由于要寄达各个支局的邮件总量为176袋，从各个支局装载的邮件总量为170袋，而每辆邮车至多可装载65袋，因此认为至少应分3个组，有3条邮路。

将17个点分为3组的方法太多，我们采用一种近似分法，以某种规则将  $V$  分为3组：  $V_1$ 、  $V_2$ 、  $V_3$ ，使  $V_i \cap V_j = \{X_1\}$  ( $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ) 且  $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$ ，在  $V_i$  中的一条邮路是以  $X_1$  为起点并能到达  $V_i$  各顶点一次的闭通路，即  $V_i$  的一个带一定约束条件的推销员回路。这就面临两个问题：以什么样的规则将  $V$  进行分组，怎样在每一个分组中寻找最佳邮路。

1) 顶点分组。邮路从  $X_1$  点出发去其他各点，要使路程较小应尽量走  $X_1$  到其他点的最短路。我们首先求出  $X_1$  点到其余顶点的最短路，这些最短路构成一棵  $X_1$  为树根的树，将从  $X_1$  点出发的树枝称为干枝（如图1），从图中可以看出，从  $X_1$  点出发到其它点共有8条干枝。

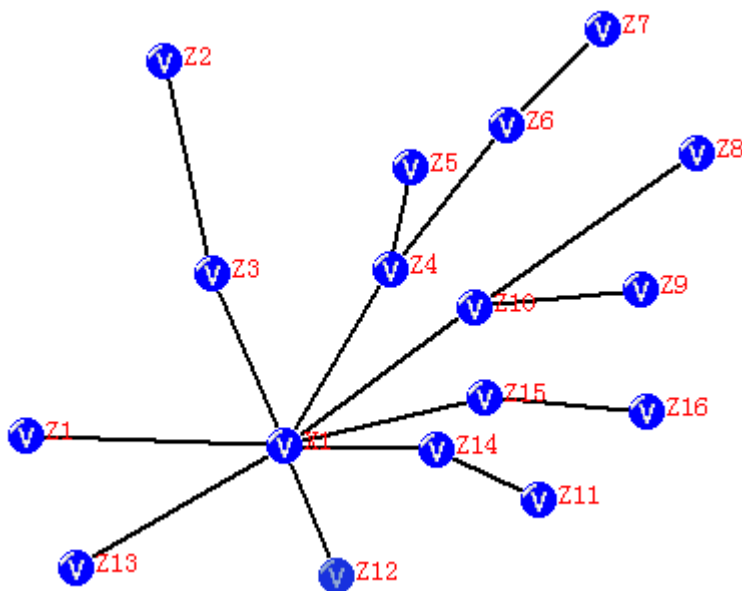


图1

我们遵从以下准则将这8条干支合并为3个分组。

准则一：尽量使同一干枝上及其分枝上的点分在同一组；



准则二：应将相邻的干枝上的点分为同一组；

准则三：寄达与收集的同一组顶点的邮件总数不能大于65袋；

准则四：同一分组在时限规定下要有可行解。

依照上述准则，将顶点分为3组：

表1

组别	点集	寄达该组的邮件总数	收集的该组邮件总数
1	$\{X_1, Z_1, Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{14}\}$	56	50
2	$\{X_1, Z_8, Z_9, Z_{10}, Z_{15}, Z_{16}\}$	61	59
3	$\{X_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\}$	60	61

2) 求解各分组的邮路。

在每一个分组中求推销员回路的问题可以转化为求哈密顿圈的问题。其方法为：由加权图  $G=(V,E)$  构造它的完备图  $G'=(V,E')$ ，其中： $G'$  以  $V$  作为顶点集，且  $E'$  中每条边  $(u,v)$  的权等于顶点  $u$  与  $v$  在图  $G$  中最短路径的权。

由于在本题中目标函数是以空载引起的损失最小为目标，而不是以路径最短为目标，因此我们寻求的最佳邮路不是图论中的最小哈密顿圈，但是它必对应于图  $G'$  的某个哈密顿圈。

由于分组后每组的点的数目已比较小，所以在每一分组中遍历所有的哈密顿圈是可行的。我们以邮车最大装载量约束和耗时约束为标准，从中找出所有的可行哈密顿圈，然后在所有可行哈密顿圈中取出损失最小的一个。步骤如下：

Step1: 取出某哈密顿圈；

Step2: 判断在每一中间结点装卸邮件后邮车载货量是否超过65袋，如是，结束本次判断；

Step3: 判断哈密顿圈耗时是否超过6小时，如是，结束本次判断；

Step4: 计算哈密顿圈的空载损失，并把该圈及其损失记录；

Step5: 重复以上步骤，直到所有哈密顿圈都已判断。

Step6: 在所有记录下的哈密顿圈中选出空载损失最小的一个，就是要求的近似最佳邮路（如图2）。

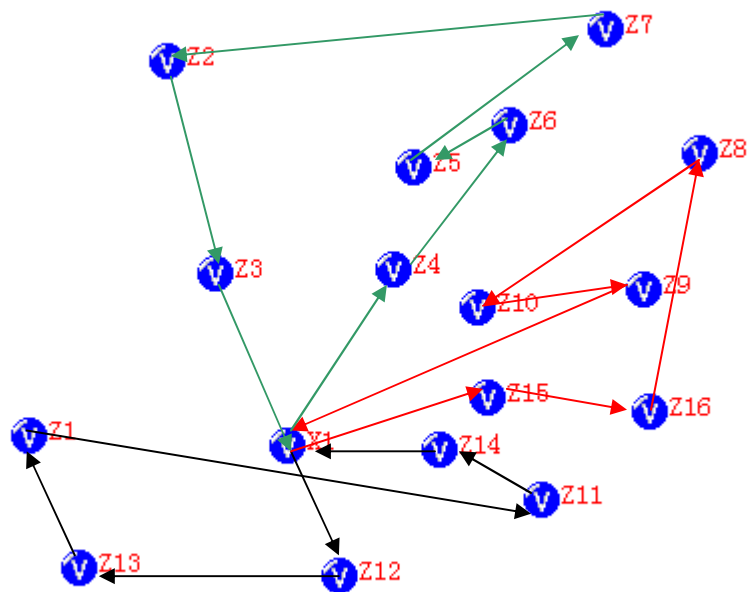


图2

共需要3辆邮车，总耗时15.43小时，总路程为423km，总损失64.03元。

表2

组别	路线	耗时	路程	空载损失
1	$X_1 \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{14} \rightarrow X_1$	5.88	164	34.18
2	$X_1 \rightarrow Z_{15} \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_{10} \rightarrow Z_9 \rightarrow X_1$	4.32	117	16.50
3	$X_1 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow X_1$	5.23	142	13.35

#### 5.1.4 进一步讨论

从图2中可以看出，为了使邮路的空载损耗最小，在每一个分组中选择的并不是最短的哈密顿圈，甚至出现了绕远路的现象。在实际过程中邮车的运行路程直接与油耗和车辆的磨损度有关，直接影响运输成本，因此控制邮路的运行路程和运行总耗时对控制成本也有重要意义。因此我们在可行哈密顿圈中求得运行总路程最短及总耗时最小的路线（如图3），将其列出作为比较，供决策者参考。

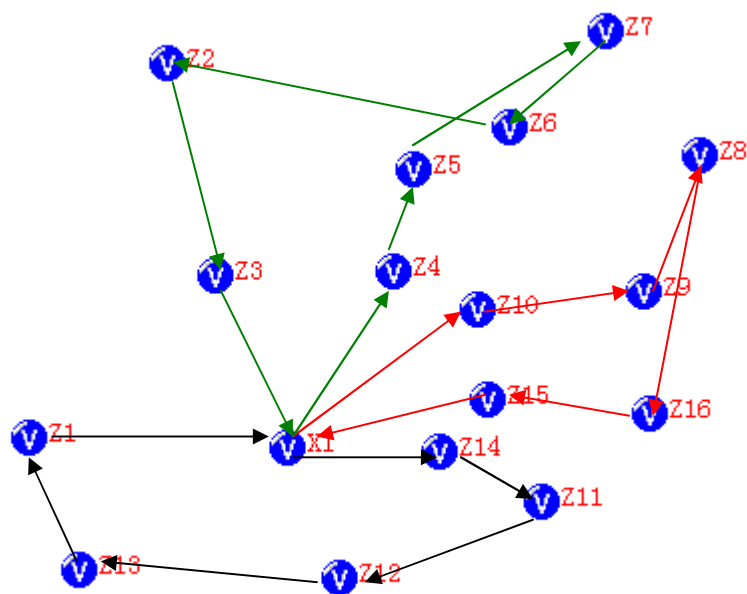


图3

共需要3辆邮车，总耗时13.50小时，总路程为365km，总损失102.75元。

表3

组别	路线	耗时	路程	空载损失
1	$X_1 \rightarrow Z_{14} \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow X_1$	5.12	141	67.5
2	$X_1 \rightarrow Z_{10} \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_{15} \rightarrow X_1$	3.68	98	18.58
3	$X_1 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow X_1$	4.7	126	16.67

对比以上两组结果，发现虽然第二组结果由空载引起的总损失大大增加，但是总耗时和总路程大为降低。在此基础上，我们可以考虑各组的时间裕量，进而研究是否有邮车可以充分利用时间裕量，分担其它邮路的任务，进而减少邮车的数量。

在本问的研究中，我们利用其中两组的时间裕量去满足另外一组中的支局，发现无法寻求出可行解，即可以认为按此分组无法用2辆邮车完成邮递任务，即在此分组情况下至少需要3辆邮车才能满足邮递任务。

## 5.2 问题二的解答

### 5.2.1 模型的分析 and 建立

在本问中需要考虑全区内区级邮车和县级邮车的合理调配，不考虑邮车运载量的限制，则邮车所满足的约束条件是时间的约束，在满足该地区的邮政运输流程及时限规定的前提下，使得全区邮政运输网的总运行成本最少。

问题二模型的建立与问题一类似，首先对区级车所必需遍历的节点进行分

组，在此基础上再对县级车所必需遍历的节点进行分组，这种组合过于繁杂，且无法求解，所以我们用分步决策的思想建立模型。即首先建立区级邮路费用最少的规划模型，再分别对各县级建立费用最少的规划模型。

### 1、区级邮路费用最少的模型

采用建立模型一的思想，首先对全区内的任意两个邮局计算它们之间的最短距离，作出完全简单图  $(V, E)$ ，再采用分法 T 地市局  $D$  所辖的 16 个支局  $Z_{59}, Z_{60}, \dots, Z_{73}$  和五个县局  $X_1, X_2, \dots, X_5$  进行分组，假设将其分为  $n$  组，分别记为  $V_1^{(T)}, V_2^{(T)}, \dots, V_n^{(T)}$ ，所有分组的集合记为  $\Phi$ ，分组需要满足以下约束条件，

每一个分组都需要包含地市局  $D$ ，即  $V_1^{(T)} \cap V_2^{(T)} \cap \dots \cap V_n^{(T)} = \{D\}$

分组要包括地市局和其所辖的支局，以及县局  $X_1, X_2, \dots, X_5$ ，

即  $V_1^{(T)} \cup V_2^{(T)} \cup \dots \cup V_n^{(T)} = \{D, X_1, X_2, \dots, X_5, Z_{59}, Z_{60}, \dots, Z_{73}\}$

设第  $k$  组  $V_k^{(T)}$  含  $l_k$  个县局  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l_k}}$ ，含  $m_k$  个支局  $z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_{m_k}}$ ，即  $V_k = \{D, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l_k}}, z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_{m_k}}\}$ ， $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l_k}}, z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_{m_k}}$  的任一排列记为  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{l_k+m_k}}$ ，全体这样的排列的集合记为  $\pi(i_1, i_2, \dots, i_{l_k+m_k})$ ，在完全简单图中，可以由  $D$  出发一次经过  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{l_k+m_k}}$  一次再回到  $D$  而形成一圈，这个圈对应于一条区级车的邮路。区级车在此邮路上依次对  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{l_k+m_k}}$  进行邮件收发，

它完成这项工作受到一定的时间限制，由本题中假设区级两个班次的行驶路线相同，所以，区级邮车的时间限制主要由第一班次的时间限制决定，即发车时间必须在 6:00 之后，返回地市局  $D$  必须在 11:00 之前，则区级邮车的有效工作时间不超过 5 小时。区级车在此邮路上对  $l_k$  个县局和  $m_k$  个支局进行收发，故停留

时间为  $\frac{10}{60}l_k + \frac{5}{60}m_k$ （小时），在此邮路上的运行时间为

$\frac{1}{65}(|Dy_{i_1}| + |Dy_{i_{l_k+m_k}}| + \sum_{s=1}^{l_k+m_k-1} |y_{i_s}y_{i_{s+1}}|)$ （小时），（其中  $|y_iy_j|$  表示  $y_i$  到  $y_j$  的最短距离），

同时区级邮车完成邮路  $D \rightarrow y_{i_1} \rightarrow y_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow y_{i_{l_k+m_k}} \rightarrow D$  的收发工作在时间上应满足

$$\frac{1}{65}(|Dy_{i_1}| + |Dy_{i_{l_k+m_k}}| + \sum_{s=1}^{l_k+m_k-1} |y_{i_s}y_{i_{s+1}}|) + \frac{10}{60}l_k + \frac{5}{60}m_k \leq 5$$

它的耗费为  $3(|Dy_{i_1}| + |Dy_{i_{l_k+m_k}}| + \sum_{s=1}^{l_k+m_k-1} |y_{i_s} y_{i_{s+1}}|)$ ，因此区级邮路费用最少的模型为：

$$\begin{aligned} \min_{\substack{T \in \Phi \\ y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{l_k+m_k}} \in \pi(i_1, i_2, \dots, i_{l_k+m_k})}} & \sum_{k=1}^n 3(|Dy_{i_1}| + |Dy_{i_{l_k+m_k}}| + \sum_{s=1}^{l_k+m_k-1} |y_{i_s} y_{i_{s+1}}|) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} T \in \Phi \\ y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{l_k+m_k}} \in \pi(i_1, i_2, \dots, i_{l_k+m_k}) \end{cases} \\ & \left\{ \frac{1}{65}(|Dy_{i_1}| + |Dy_{i_{l_k+m_k}}| + \sum_{s=1}^{l_k+m_k-1} |y_{i_s} y_{i_{s+1}}|) + \frac{10}{60}l_k + \frac{5}{60}m_k \leq 5 \right. \end{aligned}$$

## 2、县级邮路费用最少的模型

由于区级邮车到达各县局  $X_i$  的时间不同，按照该地区的邮政运输流程及时限规定，所以各县局的限制时间也不同，由第一班区级邮车到达县局  $X_i$  的时间  $t_i^{in}$  和第二班区级邮车离开县局  $X_i$  的时间  $t_i^{out}$  决定，减去县局集中处理邮件的时间共两小时，其有效运输时间为： $t_i^{out} - t_i^{in} - 2$ ， $t_i^{in}$  与  $t_i^{out}$  可由上一步的区级邮路费用最少模型求出。

令  $n_1, n_2, \dots, n_5$  为各县局所需的县级邮车数量， $T^{k_1}, T^{k_2}, \dots, T^{k_5}$  表示各县级邮车运输时间，则由问题一中的约束条件得：有  $T^{k_i} \leq t_i^{out} - t_i^{in} - 2$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ )

对于  $X_i$  县局所属的局域网，类似于问题一的模型（只考虑时间限制）有：

$$\begin{aligned} \min_{\substack{T \in \Phi \\ z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{l_k+m_k}} \in \pi(j_1, j_2, \dots, j_{l_k})}} & \sum_{k=1}^{n_i} 3(|X_i z_{j_1}| + \sum_{s=1}^{l_k-1} |z_{j_s} z_{j_{s+1}}| + |z_{j_{l_k}} X_i|) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} T \in \Phi \\ z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{l_k+m_k}} \in \pi(j_1, j_2, \dots, j_{l_k}) \end{cases} \\ & \left\{ \frac{1}{30}(|X_i z_{j_1}| + \sum_{s=1}^{l_k-1} |z_{j_s} z_{j_{s+1}}| + |z_{j_{l_k}} X_i|) \leq T^{k_i} \right. \end{aligned}$$

## 5.2.2 问题2的求解

对问题 2 的我们采用逐步优化的方法求其满意解：首先从公平性的原则出

发，假设有 5 条区级邮路，求得问题 2 的基础解；然后分析影响网络总费用的重要因素—区级网络路程，找到对基础解进行改进的思路，并求出了改进解。

### 1、基础解

考虑到各个县级邮局的地位平等，假设对应于每一个县局都应有专门的一辆区级邮车运送邮件，即有 5 条区级邮路，我们称包含县局  $X_i (i=1,2,\dots,5)$  的区级邮路为第  $i$  条区级邮路。在此基础上，分三步求得网络规划的基础解：

#### 1) 确定区级邮车 $i$ 沿途停靠的支局的集合 $V_i$ ；

定义图  $G = (V, E)$  中任一点  $x$  与  $V$  的某一子集  $S$  的距离  $d(x, S)$  为：

$$d(u, S) = \min_{s \in S} (d(u, s))$$

预先给定常数  $Dis$ ，表示较短距离的阈值。按照以下步骤确定  $V_i$ ：

Step1: 求出市局  $D$  到县局  $X_i$  的最短路；将其上所有的顶点的集合记为  $V_i$ ；

Step2: 计算  $V - S_i$  中所有点与集合  $V_i$  的距离；

Step3: 找出点  $u$  满足  $d(u, V_i) = \min_{x \in V - V_i} d(x, S)$ ；

Step4: 如果  $d(u, V_i) \leq Dis$ ，则把点  $u$  并入  $V_i$ ，返回第 2 步；

Step5: 如果  $d(u, V_i) > Dis$ ，停止程序。这时  $V_i$  就是所求。

#### 2) 确定邮路 $i$ 的最佳路线

邮路  $i$  的最佳路线是能到达  $V_i$  中所有点的路线中费用最小一条，由于运输费用只取决于运行的路程，对邮路  $i$  总费用最小等同于总路程最小。给出图  $G$  关于点集  $V_i$  的最大子图  $G_i = (V_i, E_i)$ ，按照我们在问题一中的讨论，最佳路线实际上是  $G_i$  上的一个最小推销员回路，也就是在  $G_i$  的完备图上的一个最小哈密顿圈。利用问题一中的穷举法，找到邮路  $i$  的最佳路线。

#### 3) 确定各县级网络的邮路规划

首先根据区级邮路规划计算各个县级网络的有效时间；

以区级邮路规划结果为基础，用问题一中的思路逐个对 5 个县级网络的邮路进行规划。

按照以上步骤，求得问题 2 的基础解为：使用 5 条区级邮路和 10 条县级邮路，总费用 10491 元，（如图 4）。其具体结果见附录 1，

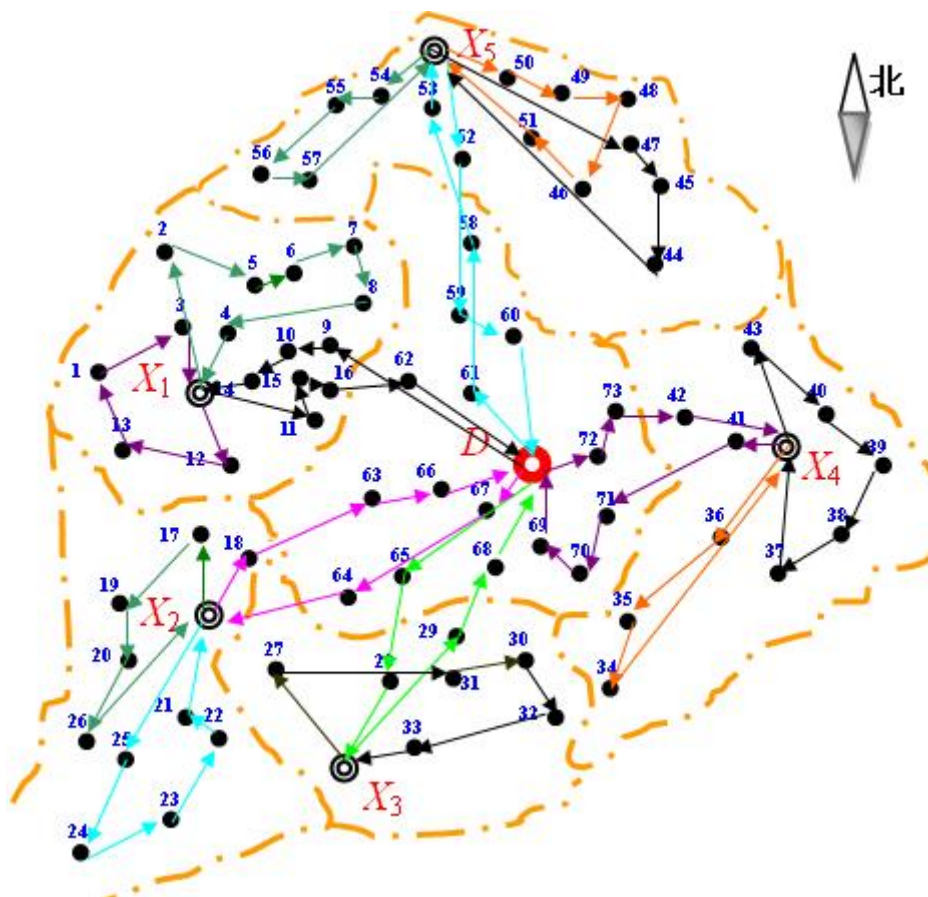


图 4

## 2、基础解的改进解

改进思路：区级邮路每天要发两班车，而县级邮路每天只发一班车，因此走相同的路程，区级邮路费用是按“双份”计算的，即区级邮路对运输总费用的贡献较大；如果尽量减小区级邮政网络的总路程，同时控制县级网络总路程的增加在一定限度内，就有可能有效的减小运输总费用。基于这一思路寻求问题 2 的改进解。

首先减少区级网络的总路程。对图 4 分析后发现有两种方法：

①去点：对区级邮路 1，其覆盖点的集合  $V_1$  包含了  $Z_9, Z_{10}, Z_{11}, Z_{14}, Z_{15}, Z_{16}$  7 个属于县级网络 1 的支局，其中只有点  $Z_9, Z_{10}$  位于  $D$  到  $X_1$  的最短路上，我们将其余 5 个点从  $V_1$  中剔除，重新确定区级邮路 1 的最佳路线。同样的道理我们在  $V_5$  中剔除支局  $Z_{53}$ 。

②合并：由于两个县局  $X_2$  和  $X_3$  之间距离比较近，我们可以将第 2 条和第 3 条区级邮路合并为一个，而将这两条邮路的覆盖点集  $V_2$  和  $V_3$  的并集  $V$  作为新邮路 2' 的覆盖点集不能满足时间约束。从点的地理位置考虑，将点  $Z_{28}, Z_{67}, Z_{68}$  从  $V$  中剔除，然后将位于  $X_2$  到  $X_3$  最短路上的点  $Z_{27}$  加入  $V$ ，并将  $Z_{67}, Z_{68}$  加入  $V_4$ 。

经计算得新的区级邮路规划见表 4；相应的邮车运行时刻见表 5；5 个县级

网络的邮路规划见表 6。

表4

区级邮路 $i$	最佳邮路	费用（元）	耗时（小时）
1	$D \rightarrow Z_{62} \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_{10} \rightarrow X_1 \rightarrow D$	552×2（班）	3.25
2	$D \rightarrow Z_{65} \rightarrow Z_{64} \rightarrow X_3 \rightarrow Z_{27}$ $\rightarrow X_2 \rightarrow Z_{18} \rightarrow Z_{63} \rightarrow Z_{66} \rightarrow D$	801×2（班）	4.89
3	$D \rightarrow Z_{72} \rightarrow Z_{73} \rightarrow Z_{42} \rightarrow Z_{41} \rightarrow X_4$ $\rightarrow Z_{71} \rightarrow Z_{70} \rightarrow Z_{69} \rightarrow Z_{68} \rightarrow Z_{67} \rightarrow D$	645×2（班）	4.23
4	$D \rightarrow Z_{61} \rightarrow Z_{58} \rightarrow Z_{52}$ $\rightarrow X_5 \rightarrow Z_{59} \rightarrow Z_{60} \rightarrow D$	789×2（班）	4.63

注：由于区级车每天发两班车，且两班车路线一样，因此其费用需乘以 2。

表5

县编号	第一班车 从地市局 出发时刻	第一班车 到达县局 的时刻	第一班车 返到地市 局时刻	第二班车 从地市局 出发时刻	第二班车 到达县局 的时刻	第二班车 返到地市 局时刻
$X_1$	6: 00	7: 55	9: 15	14: 45	15: 40	18: 00
$X_2$	——	9: 22	10: 53	——	16: 29	18: 00
$X_3$	6: 00	8: 12	——	13: 07	15: 19	——
$X_4$	6: 00	7: 58	10: 14	13: 46	15: 44	18: 00
$X_5$	6: 00	8: 24	10: 38	13: 22	15: 46	18: 00

注：其中  $X_1$ 、 $X_4$ 、 $X_5$  各独占一路邮车， $X_2$  与  $X_3$  共用一路邮车。

表6

县级 网络	邮路 编号	邮路	路程 （公 里）	耗时 （小 时）	费用 （元）
$X_1$	1	$X_1 \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1$ $\rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow X_1$	144	5.30	888



	2	$X_1 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_8$ $\rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{15} \rightarrow Z_{14} \rightarrow X_1$	152	5.73	
$X_2$	3	$X_2 \rightarrow Z_{17} \rightarrow Z_{19} \rightarrow Z_{20} \rightarrow Z_{26} \rightarrow X_2$	141	5.03	804
	4	$X_2 \rightarrow Z_{25} \rightarrow Z_{24} \rightarrow Z_{23} \rightarrow Z_{22} \rightarrow Z_{21} \rightarrow X_2$	127	4.65	
$X_3$	5	$X_3 \rightarrow Z_{28} \rightarrow Z_{27} \rightarrow Z_{31} \rightarrow Z_{29}$ $\rightarrow Z_{30} \rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{33} \rightarrow X_3$	134	4.97	402
$X_4$	6	$X_4 \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{36} \rightarrow X_4$	138	4.85	834
	7	$X_4 \rightarrow Z_{37} \rightarrow Z_{38} \rightarrow Z_{39} \rightarrow Z_{40} \rightarrow Z_{43} \rightarrow X_4$	140	5.08	
$X_5$	8	$X_5 \rightarrow Z_{53} \rightarrow Z_{57} \rightarrow Z_{56} \rightarrow Z_{55} \rightarrow Z_{54} \rightarrow X_5$	140	5.0	1260
	9	$X_5 \rightarrow Z_{50} \rightarrow Z_{49} \rightarrow Z_{48} \rightarrow Z_{46} \rightarrow Z_{51} \rightarrow X_5$	127	4.65	
	10	$X_5 \rightarrow Z_{47} \rightarrow Z_{45} \rightarrow Z_{44} \rightarrow X_5$	153	5.35	

与问题 2 的基础解对比发现有第 1、2、5、8 条县级邮路发生了改变。

问题 2 的改进解包含 4 条区级邮路和 10 条县级邮路，总费用为 9762 元，比基础解减少了 729 元，下降 6.78%。由此可见，该方案改进效果明显，不仅减少了一条区级邮路，而且节省了运输成本。具体线路划分（如图 5）。

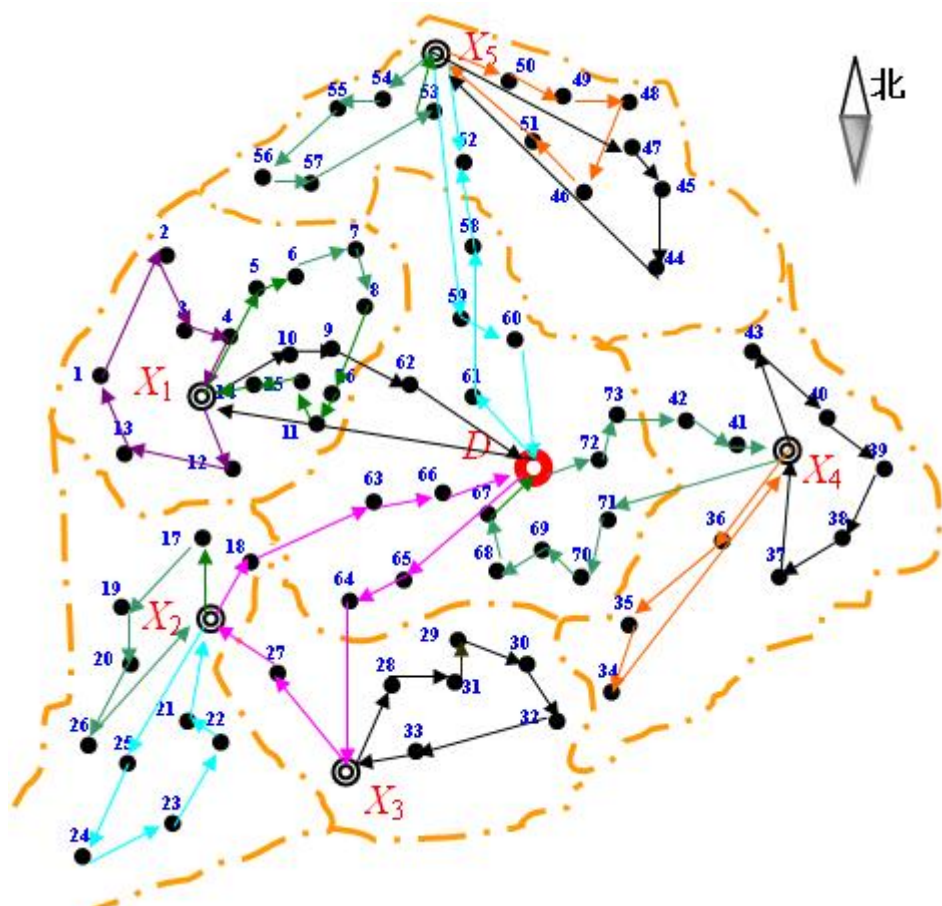


图 5

### 5.3 问题三的解答

问题三允许一定程度上打破县级行政区域的限制, 要求给出新的县级邮路规划, 降低整个网络的总费用。

一些位于县与县的交界地带的支局, 距离本县的县局比较远, 而与邻近的县的县局比较近; 如果能将这些点分配到邻县, 由其邻县的邮路覆盖这类点, 就有可能使降低网络的总费用。

如果先将位于交界地带的支局分到邻近县, 然后求解新的网络下的最优邮路规划, 那么问题 3 的求解就同问题 2 相仿, 其规模较大, 求解较为困难; 同时调整的只是部分边界点, 对整个网络布局的影响不大, 邮路规划方案的变化也不会很大, 因此, 我们考虑以问题 2 求得的满意解为基础, 逐步调整边界点使总费用减少, 从而得到问题 3 的满意解。

Step1: 从图中选出满足下述条件的点  $z$ : ①  $z$  位于县与县的交界地带; ②  $z$  距离自己县的县局较远; ③  $z$  距离相邻县的县局较近。设这些点共有  $k$  个:

$b_1, b_2, \dots, b_k$ 。令  $i=1$ 。

Step2: 找到覆盖支局  $b_i$  的县级邮路 and 邻县中最接近  $b_i$  的县级邮路, 假设分别为第  $m$  条和第  $n$  条县级邮路。

Step3: 设第  $m$  条邮路经过点的集合为  $P$ ，按照问题一中的方法，求覆盖  $P - \{b_i\}$  中所有点的最小哈密顿圈，记其为第  $m'$  条邮路。

Step4: 设第  $n$  条邮路经过点的集合为  $Q$ ，按照问题一中的方法，求覆盖  $Q + \{b_i\}$  中所有点的最小哈密顿圈，记其为第  $n'$  条邮路。

Step5: 计算第  $m$  条和第  $n$  条邮路的总费用  $C$  和第  $m'$  条和第  $n'$  条邮路的总费用  $C'$ 。

Step6: 若  $C > C'$ ，则说明调整后使总的费用减少，就用第  $m'$  条和第  $n'$  条邮路代替第  $m$  条和第  $n$  条邮路。否则，说明调整不可行，舍弃这种调整。

Step7:  $i = i + 1$ 。

Step8: 若  $i \leq k$ ，返回 step2；否则，结束计算。

基于问题 2 的基本解的调整（如图 6）

对  $Z_{27}$   $Z_{34}$   $Z_{35}$  3 个点的区域划分和第 4、5、6、7 条邮路进行了调整，总共减少费用 351 元，减少一条县级邮路。调整后网络总费用 10140 元。被调整邮路的变化见表 7：

表 7

调整的县级邮路	调整后的邮路
第 4 条	$X_2 \rightarrow Z_{27} \rightarrow Z_{22} \rightarrow Z_{23} \rightarrow Z_{24} \rightarrow Z_{25} \rightarrow Z_{21} \rightarrow X_2$
第 5 条	$X_3 \rightarrow Z_{33} \rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{30} \rightarrow Z_{31} \rightarrow X_3$
第 6 条	无
第 7 条	$X_4 \rightarrow Z_{36} \rightarrow Z_{37} \rightarrow Z_{38} \rightarrow Z_{39} \rightarrow Z_{40} \rightarrow Z_{43} \rightarrow X_4$

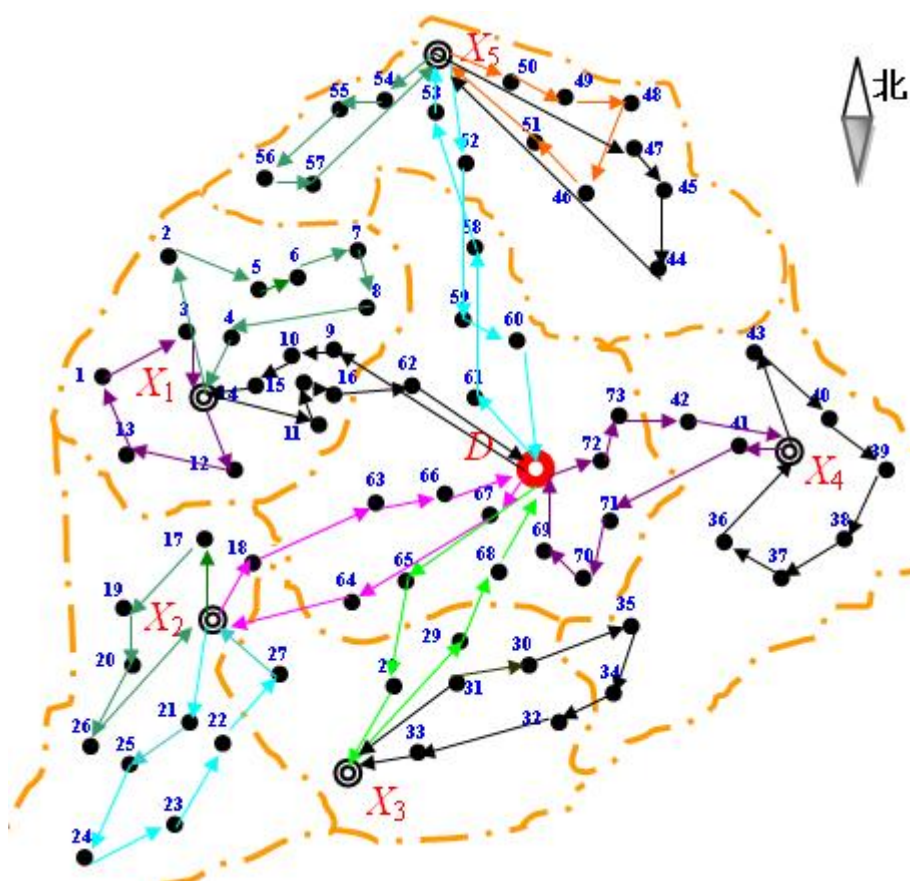


图 6

基于问题 2 中的改进解的调整（如图 7）

对点  $Z_{34}$  进行了调整，网络总费用变为 9600 元，减少了 162 元，被调整邮路的变化见表 8：

表 8

调整的县级邮路	调整后的邮路
第 5 条	$X_3 \rightarrow Z_{33} \rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{30}$ $\rightarrow Z_{29} \rightarrow Z_{31} \rightarrow Z_{28} \rightarrow X_3$
第 6 条	$X_4 \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{36} \rightarrow X_4$

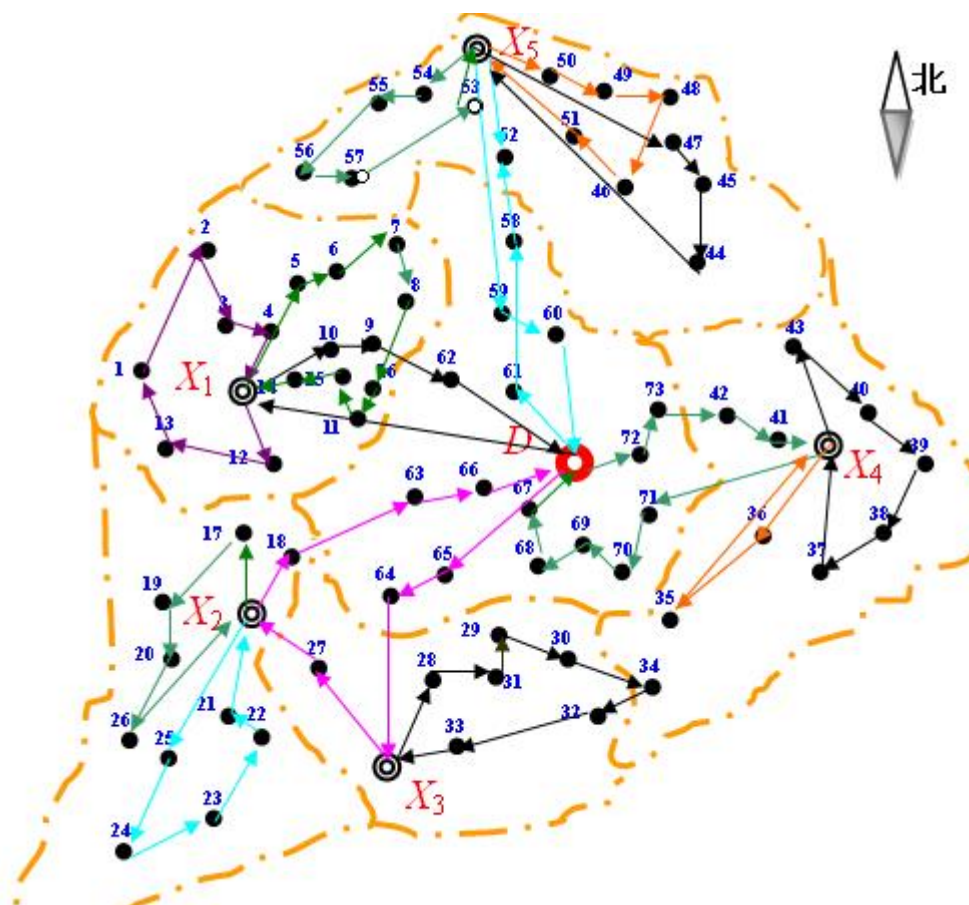


图 7

## 5.4 问题四的解答

### 5.4.1 计算方案讨论

调整该区内各个县局的选址，目标依然通过调整后邮政运输网的总成本尽可能低，进而建模求解。下面我们给出两种比较理想的解决方案。

1、对每一个县区仅考虑县区内部的运输总成本的调整方案

在本方案中，我们对各个县区分别考虑，以每个县区内部运输总成本为目标函数，不考虑区级邮车的影响，假设县区内有  $n$  个邮局，建立计算流程图（如图 8）：

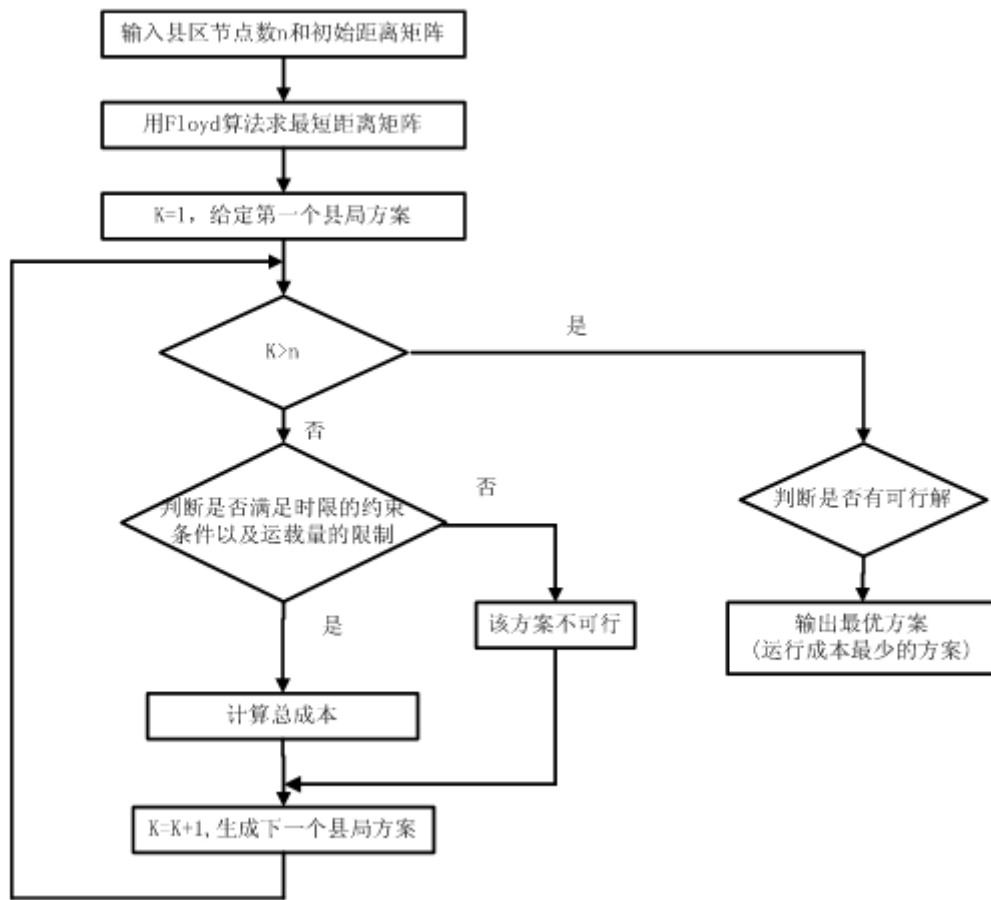


图 8

理论上，可以解出其最优解，但是随着节点数的增加，其复杂度大大增加。

## 2、综合考虑全区运输总成本的调整方案

在本方案中，综合考虑全区邮车的运行安排。计算过程与方案一类似，首先给定一种可能的县局组合，由于县级邮车的出发时间由区级邮车到达该县局的时间决定，因此应首先计算其是否满足区级邮车线路的时限条件以及运载量的限制，然后计算其是否满足县级邮路的时间约束条件，对所有可行解计算其总运输成本最后将所有可行的方案的计算结果进行比较，取使得总运输成本最小时对应得调整方案为最优调整方案。假设全区内共有  $m$  个县区，第  $i$  个县区有  $n_i$  个支局

（包含多个支局及一个县局），这样县局的组合有  $\prod_{i=1}^m n_i$  种县局组合，对于本题共

有  $17 \times 11 \times 8 \times 11 \times 15 = 246840$  种组合，这样的计算量是非常之大的。

### 5.4.2 求解过程

综合以上分析，对于本问题若采用以上任一方案其计算量都是不能接受的。我们尝试将问题转化为先按照一定的规则初步确定各个县的县局，然后再计算给定县局的总路程，若运输成本显著减少，证明县局重新选址成功，否则，选址失败。考虑实际，对于一个县的县局的选址主要受以下两个因素影响。

第一，该县局是否接近本县的“中心地带”。因为这在一定程度上表示距离同县的其它支局的距离尽可能短，同时能够更好的为其它支局服务创造良好条件。

第二，该县局距离地市局距离。因为目标是使总路程尽可能短，区级邮路一天有两个班次，若县局距离地市局太远，那么总路程将会急速增长。

综合考虑以上两个主要因素，建立以下县局选址评价标准函数式：

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2$  分别表示两个指标的权重,对于位于县局  $X_i$  所辖支局网  $V_k$  中的邮局  $Z_i$ ,  $f_1$  为衡量该邮局是否接近“中心地带”的指标，定义为下式：

$$f_1(Z_i) = \frac{\max_{Z_j \in V} d(Z_i, Z_j) - \min_{Z_j \in V} d(Z_i, Z_j)}{\max_{Z_j \in V} d(Z_i, Z_j)} \quad (Z_i \neq Z_j, Z_i \in V, d(Z_i, Z_j) \text{ 表示 } Z_i \text{ 与 } Z_j \text{ 最短距离})$$

$f_1$  的值越小，表示越接近“中心地带”。

$f_2$  为衡量其距离地市局 D 远近程度的指标，

$$f_2(Z_i) = \frac{d(Z_i, D)}{\max_{Z_j \in V} d(Z_j, D)}$$

$f_2$  的值越小，表示越接近市局 D。

为简化计算，不妨取  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ ，问题化为求  $\min_{Z_i \in V_k} F(Z_i)$ 。

经以上分析设计，计算流程如下：

Step1: 确定各个县的县局。

- (1) 采用 floyd 算法求得该县邮局的最短距离矩阵；
- (2) 分别计算每个邮局的评价标准函数值  $F$ ；
- (3) 将邮局编号按  $F$  值的大小由小到大排列。
- (4) 计算地市局到达该县的时间。
- (5) 选取邮局编号排列中符合时间约束的第一个值，即为所要求的县局编号选址。

Step2: 按照问题二的模型，计算邮路规划及邮车调度方案，并计算总运费。

Step3: 同问题三打破行政区域的限制，局部调整邮路规划及邮车调度方案，使总运费尽可能小。

Step4: 比较重行选址后的总运费与未选址前的总运费，评价县局重新选址带来的影响，若有显著提高制定邮路规划及邮车调度方案报告，否则结束。

#### 5.4.3 计算结果

对各县分别计算邮局的评价标准函数值，可以确定一组较好的县局选址组合方案为  $(Z_9, X_2, Z_{28}, Z_{36}, Z_{52})$ 。

用问题 2 的模型求解得一组邮路规划方案（如图 9），该邮政网络含有 3 条区级邮路和 11 条县级邮路，总费用为：8715 元，相比问题 2 的未打破行政区域划分得到的较优解（9762 元）费用节省了 1047 元，相应的邮路规划及邮车调度方案为：区级邮路规划（3 条）见表 9，县级邮路规划见表 10

表9

区级网络	包含的新县局点	邮路	费用（元）	耗时（小时）
1	$Z_9, Z_{52}$	$D \rightarrow Z_{61} \rightarrow Z_{62} \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_{58} \rightarrow$ $Z_{52} \rightarrow Z_{59} \rightarrow Z_{60} \rightarrow D$	804 元 ×2	4.87
2	$X_2, Z_{28}$	$D \rightarrow Z_{66} \rightarrow Z_{63} \rightarrow Z_{64} \rightarrow Z_{18} \rightarrow$ $X_2 \rightarrow Z_{27} \rightarrow Z_{28} \rightarrow Z_{65} \rightarrow Z_{67} \rightarrow D$	720 元 ×2	4.53
3	$Z_{36}$	$D \rightarrow Z_{68} \rightarrow Z_{69} \rightarrow Z_{70} \rightarrow$ $Z_{36} \rightarrow Z_{71} \rightarrow Z_{72} \rightarrow Z_{73} \rightarrow D$	576 元 ×2	3.57

表 10

县级网络	邮路编号	邮路	路 程（公里）	耗时（小时）	费用（元）
1	1	$Z_9 \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_2 \rightarrow$ $Z_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_{10} \rightarrow Z_9$	137	5.23	1089
	2	$Z_9 \rightarrow X_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_9$	148	5.27	
	3	$Z_9 \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{14} \rightarrow Z_{15} \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_9$	78	2.93	
2	4	$X_2 \rightarrow Z_{17} \rightarrow Z_{19} \rightarrow Z_{20} \rightarrow Z_{26} \rightarrow X_2$	141	5.03	804
	5	$X_2 \rightarrow Z_{25} \rightarrow Z_{24} \rightarrow Z_{23} \rightarrow Z_{22} \rightarrow$ $Z_{21} \rightarrow X_2$	127	4.65	
3	6	$Z_{28} \rightarrow X_3 \rightarrow Z_{33} \rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{30} \rightarrow$ $Z_{29} \rightarrow Z_{31} \rightarrow Z_{28}$	134	4.97	402
4	7	$Z_{36} \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{37} \rightarrow Z_{38} \rightarrow Z_{36}$	145	5.17	978
	8	$Z_{36} \rightarrow X_4 \rightarrow Z_{39} \rightarrow Z_{40} \rightarrow Z_{43} \rightarrow$ $Z_{42} \rightarrow Z_{41} \rightarrow Z_{36}$	181	6.53	
5	9	$Z_{52} \rightarrow Z_{53} \rightarrow Z_{55} \rightarrow Z_{56} \rightarrow Z_{57} \rightarrow Z_{52}$	135	4.83	1242
	10	$Z_{52} \rightarrow Z_{46} \rightarrow Z_{44} \rightarrow Z_{45} \rightarrow Z_{47} \rightarrow$ $Z_{48} \rightarrow Z_{51} \rightarrow Z_{52}$	138	5.10	
	11	$Z_{52} \rightarrow Z_{49} \rightarrow Z_{54} \rightarrow X_5 \rightarrow Z_{52}$	141	5.03	



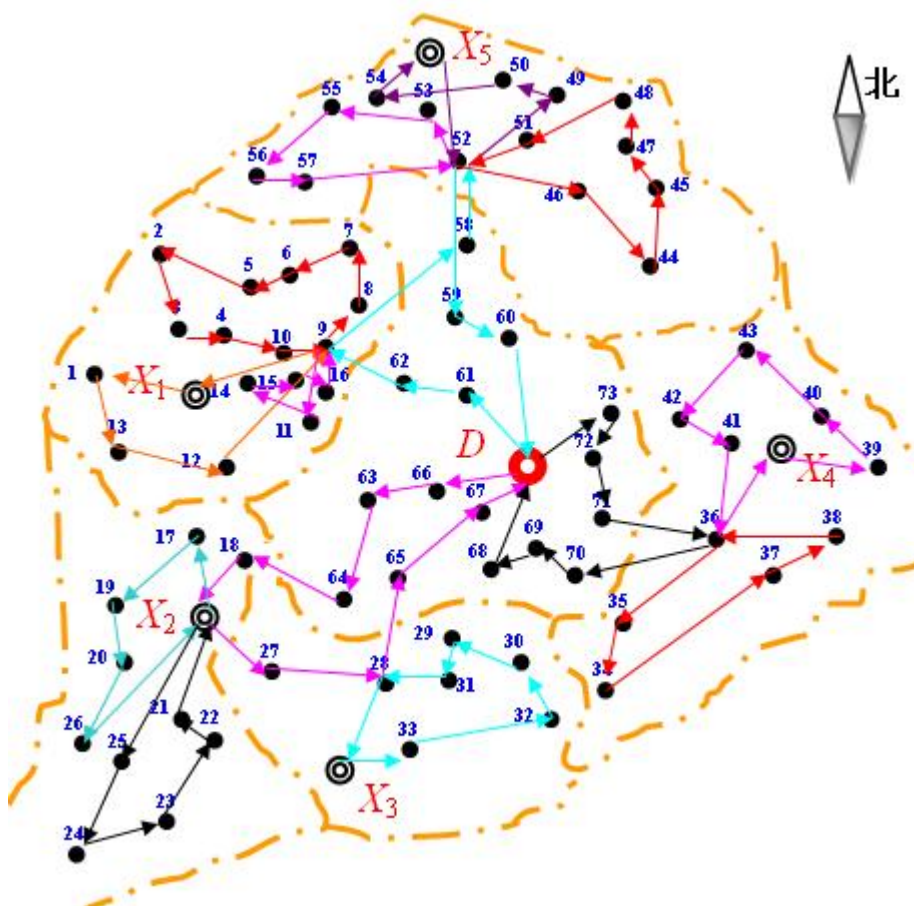


图 9

打破行政区域划分，采用类似问题 3 的调整方法计算得：将边界点  $Z_{34}$  由第 4 个县级网络划到第 3 个县级网络，网络总费用减少为 8643 元，总费用减少 72 元，相应第 6 条和第 7 条县级邮路调整后的路线见表 11

表 11

调整的县级邮路	调整后的路线
第 6 条	$Z_{28} \rightarrow X_3 \rightarrow Z_{33} \rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{30} \rightarrow Z_{29} \rightarrow Z_{31} \rightarrow Z_{28}$
第 7 条	$Z_{36} \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{37} \rightarrow Z_{38} \rightarrow Z_{36}$

显然，同是打破行政区域划分进行调整，采用新县局组合后的调整幅度（2 条线路被调整）与原县局组合调整幅度（4 条线路被调整）相比比较小，这是由于我们新定位的县局更接近其县级网络的中心。

## 六、模型的进一步讨论

对问题 2 结果的改进是基于“尽量减小区级网络总路程能够使整个网络总费用减小”这一思路，从尽量减小区级网络总路程的方向寻求更好的结果。但改进方向的正确性没有得到证明，有可能出现这样的情况：增大区级网络总路程也能、甚至是能更有效地减小整个网络的总费用。我们从相反的方向（即增加区级网络总路程）对整个网络邮路进行规划，将其结果与问题 2 的两组解对比。

(1) 调整区级邮路，使其经过更多的支局，增加区级邮路的总路程。在问题 2 基本解的区级邮路规划基础上，用人工方式为各区级邮路增加覆盖点，重新确定其最佳邮路，得到新的区级邮路规划（参见附录 2）

(2) 用改良哈密顿圈的方法规划县级邮路

调整后的区级邮路覆盖了非常多的支局，在每个县级网络中剩余的支局数目已经非常少，因此我们没有采用问题 1 中先分组后求最优路线的方法对县级网络进行规划，而是提出了改良哈密顿圈的方法，其基本思想为：首先保证邮路的数量最少，其次在邮路数量相同的情况下使总路程最短。

下面以第 1 个县级网络为例，介绍其计算过程：

①计算该网络的有效时间为 5.20 小时，找出未被区级邮路覆盖的支局：

$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_{13}$ ，共 8 个。

②不考虑时间、运载能力限制，用穷举法求出覆盖县局  $X_1$  和这 8 个支局的路程最小的邮路： $X_1 \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_3 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_4 \rightarrow X_1$ ，经计算其耗时为 6.6 小时，超过了上限 5.20 小时，说明不可能用一条邮路覆盖这 8 个支局。

③在已求出的邮路的每两相邻支局之间插入县局  $X_1$ ，将其分割成两条邮路；判断两条新邮路的耗时是否满足时间约束以确定分割是否可行（分割结果见附录 2）。

④在所有可行分割方法中选出最小的一个，其两个子圈就是我们得到的县级邮路安排方案。

使用上述方法确定每一县级网络的邮路规划，详细结果见附录 2。

从增加区级邮路总路程的思路确定的网络邮路规划，使用 5 条区级邮路和 9 条县级邮路，总费用为 11043 元，具体规划方案（如图 10）。与问题 2 的基本解相比减少了一条县级邮路，但总费用增加了 552 元。这说明本文中选取尽量减小区级邮政网络的总路程作为改进方案是切实有效的方法。

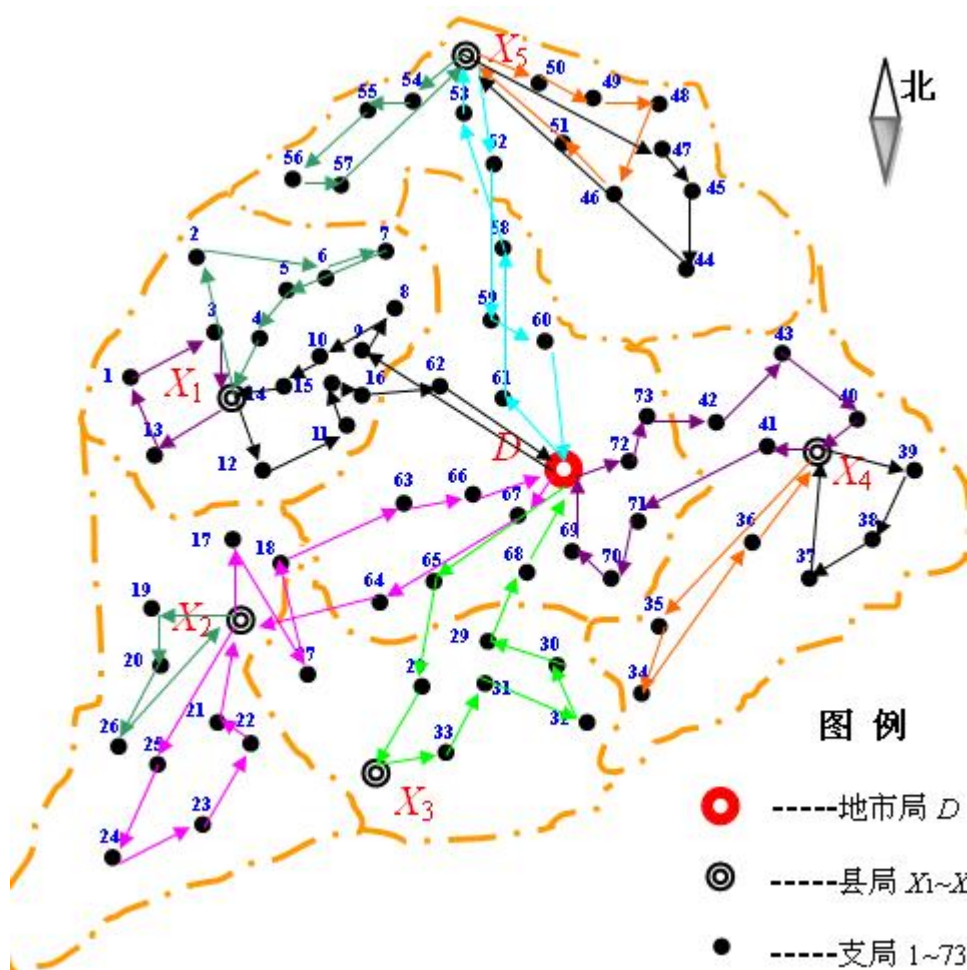


图 10

## 七、 模型的评价

### 7.1 优点

1、在本题的求解过程中，对复杂邮路采用先按一定规则分组，再求解分组最优的思路，该方法可以有效地降低该类问题的复杂程度，可以在短时间内求得近似最优解，具有一定的时效性。

2、在问题 2 的求解中，先从公平性原则进行考虑，得到一组可行解，在此基础上进行优化求解，使调度方案具有可比性。

3、本文的模型和算法具有通用性，可以应用到有关巡视，货物配送等路线安排问题。

### 7.2 不足之处

1、分组是在一定的规则下进行的，其结果与其所侧重的原则有较大的关系，不同的原则会导致分组情况不同，进而导致结果的变化。

2、问题 3 的求解是在问题二的基础上进行的，这样并没有考虑到县区和市区边界点在调整中的影响。

## 八、 主要参考文献

[1]: 赵静 但琦,《数学建模与数学实验 (第 2 版)》,北京地质印刷厂,高等教育出版社,2003 年 6 月

[2]: [美] F 哈拉里著,《图论》,上海科学技术出版社,1980 年 1 月

[3]: 林建良 黄培伦等,邮政运输网路中的几个优化模型,华南理工大学学报,2000 年 8 月

## 九、附录

附录 1: 问题 2 基础解:

5 条区级邮路的覆盖点:

$V_1$	$\{D, X_1, Z_9, Z_{10}, Z_{11}, Z_{14}, Z_{15}, Z_{16}, Z_{62}\}$
$V_2$	$\{D, X_2, Z_{18}, Z_{63}, Z_{64}, Z_{66}, Z_{67}\}$
$V_3$	$\{D, X_3, Z_{28}, Z_{29}, Z_{65}, Z_{68}\}$
$V_4$	$\{D, X_4, Z_{41}, Z_{42}, Z_{69}, Z_{70}, Z_{71}, Z_{72}, Z_{73}\}$
$V_5$	$\{D, X_5, Z_{52}, Z_{53}, Z_{58}, Z_{59}, Z_{60}, Z_{61}\}$

5 条区级邮路

区级邮路 $i$	最佳邮路	费用 (元)	耗时 (小时)
1	$D \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_{10} \rightarrow Z_{14} \rightarrow X_1$ $\rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{15} \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_{62} \rightarrow D$	$633 \times 2$	4.00
2	$D \rightarrow Z_{67} \rightarrow Z_{64} \rightarrow X_2$ $\rightarrow Z_{18} \rightarrow Z_{63} \rightarrow Z_{66} \rightarrow D$	$564 \times 2$	3.47
3	$D \rightarrow Z_{65} \rightarrow Z_{28} \rightarrow X_3$ $\rightarrow Z_{29} \rightarrow Z_{68} \rightarrow D$	$594 \times 2$	3.56
4	$D \rightarrow Z_{72} \rightarrow Z_{73} \rightarrow Z_{42} \rightarrow X_4$ $\rightarrow Z_{41} \rightarrow Z_{71} \rightarrow Z_{70} \rightarrow Z_{69} \rightarrow D$	$570 \times 2$	3.67
5	$D \rightarrow Z_{61} \rightarrow Z_{58} \rightarrow Z_{53} \rightarrow X_5$ $\rightarrow Z_{52} \rightarrow Z_{59} \rightarrow Z_{60} \rightarrow D$	$801 \times 2$	4.77

各个县级网络的有效时间:

县级网络	1	2	3	4	5
有效时间 (小时)	6.17	6.70	6.61	6.50	6.40

县级网络邮路规划:

县级网络	邮路	路程 (公里)	耗时 (小时)	费用 (元)
1	$X_1 \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_3 \rightarrow X_1$	113	4.10	789

	$X_1 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_2 \rightarrow X_1$	150	5.50	
2	$X_2 \rightarrow Z_{17} \rightarrow Z_{19} \rightarrow Z_{20} \rightarrow Z_{26} \rightarrow X_2$	141	5.03	804
	$X_2 \rightarrow Z_{25} \rightarrow Z_{24} \rightarrow Z_{23} \rightarrow Z_{22} \rightarrow Z_{21} \rightarrow X_2$	127	4.65	
3	$X_3 \rightarrow Z_{27} \rightarrow Z_{31} \rightarrow Z_{30} \rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{33} \rightarrow X_3$	168	6.02	504
4	$X_4 \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{36} \rightarrow X_4$	138	4.85	834
	$X_4 \rightarrow Z_{37} \rightarrow Z_{38} \rightarrow Z_{39} \rightarrow Z_{40} \rightarrow Z_{43} \rightarrow X_4$	140	5.08	
5	$X_5 \rightarrow Z_{57} \rightarrow Z_{56} \rightarrow Z_{55} \rightarrow Z_{54} \rightarrow X_5$	132	4.73	1236
	$X_5 \rightarrow Z_{50} \rightarrow Z_{49} \rightarrow Z_{48} \rightarrow Z_{46} \rightarrow Z_{51} \rightarrow X_5$	127	4.65	
	$X_5 \rightarrow Z_{47} \rightarrow Z_{45} \rightarrow Z_{44} \rightarrow X_5$	153	5.35	

## 附录 2：模型进一步讨论的结果

增加区级邮路总路程的区级邮路规划：

邮路 $i$	最佳邮路	总费用（元）	耗时（小时）
1	$D \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_{10} \rightarrow Z_{14} \rightarrow X_1$ $\rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{15} \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_{62} \rightarrow D$	$780 \times 2$	4.92
2	$D \rightarrow Z_{67} \rightarrow Z_{64} \rightarrow X_2 \rightarrow Z_{17}$ $\rightarrow Z_{27} \rightarrow Z_{18} \rightarrow Z_{63} \rightarrow Z_{66} \rightarrow D$	$795 \times 2$	4.83
3	$D \rightarrow Z_{65} \rightarrow Z_{28} \rightarrow X_3 \rightarrow Z_{33} \rightarrow Z_{31}$ $\rightarrow Z_{32} \rightarrow Z_{30} \rightarrow Z_{29} \rightarrow Z_{68} \rightarrow D$	$759 \times 2$	4.73
4	$D \rightarrow Z_{69} \rightarrow Z_{70} \rightarrow Z_{71} \rightarrow Z_{41} \rightarrow X_4$ $\rightarrow Z_{40} \rightarrow Z_{43} \rightarrow Z_{42} \rightarrow Z_{73} \rightarrow Z_{72} \rightarrow D$	$699 \times 2$	4.50
5	$D \rightarrow Z_{61} \rightarrow Z_{58} \rightarrow Z_{53} \rightarrow X_5$ $\rightarrow Z_{52} \rightarrow Z_{59} \rightarrow Z_{60} \rightarrow D$	$801 \times 2$	4.77

邮路分割的结果：

选取的相邻支局	总行程	两子圈的耗时		是否可行
$Z_{13}, Z_1$	199	0.78	6.52	否
$Z_1, Z_3$	226	2.27	5.93	否
$Z_3, Z_2$	222	3.45	4.62	是
$Z_2, Z_6$	231	3.83	4.53	是
$Z_6, Z_7$	245	5.62	3.22	否

$Z_7, Z_5$	253	5.97	3.13	否
$Z_5, Z_4$	246	7.18	1.68	否

各县级网络的邮路规划：

第 1 个县级网络（邮路耗时上限 5.20 小时）

邮路	邮路耗时（小时）	总耗费用（元）
$X_1 \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_3 \rightarrow X_1$	3.45	666
$X_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_4 \rightarrow X_1$	4.62	

第 2 个县级网络（耗时上限 5.29 小时）

邮路	邮路耗时（小时）	总耗费用（元）
$X_2 \rightarrow Z_{19} \rightarrow Z_{20} \rightarrow Z_{26} \rightarrow X_2$	4.53	759
$X_2 \rightarrow Z_{25} \rightarrow Z_{24} \rightarrow Z_{23} \rightarrow Z_{22} \rightarrow Z_{21} \rightarrow X_2$	4.56	

第 4 个县级网络（耗时上限 5.62 小时）

邮路	邮路耗时（小时）	总耗费用（元）
$X_4 \rightarrow Z_{39} \rightarrow Z_{38} \rightarrow Z_{37} \rightarrow X_4$	3.25	714
$X_4 \rightarrow Z_{35} \rightarrow Z_{34} \rightarrow Z_{36} \rightarrow X_4$	5.18	

第 5 个县级网络（邮路耗时上限 5.32 小时）

邮路	邮路耗时（小时）	总耗费用（元）
$X_5 \rightarrow Z_{57} \rightarrow Z_{56} \rightarrow Z_{55} \rightarrow Z_{54} \rightarrow X_5$	4.73	1236
$X_5 \rightarrow Z_{50} \rightarrow Z_{49} \rightarrow Z_{48} \rightarrow Z_{46} \rightarrow Z_{51} \rightarrow X_5$	4.65	
$X_5 \rightarrow Z_{47} \rightarrow Z_{45} \rightarrow Z_{44} \rightarrow X_5$	5.35	

附录 3：本文用到的主要程序

1、问题一求解的部分相关程序

%本程序计算的段为县局集合（X1,z10,z8,z9,z16,z15）的最优路线。

```
d=[0    40    30    20    27    36
    40    0    11    20    25    21
    30    11    0    10    14    13
    20    20    10    0    9    18
    27    25    14    9    0    9
    36    21    13    18    9    0];
```

%（X1,z10,z8,z9,z16,z15）最短距离矩阵。

bian=[0 5 2 -8 -3 2];%县级邮车分别在 z8、z9、z10、z15、z16 的邮件净交换数量。

```

l=ones(120,6);
l(:,2:6)=perms(2:6);
for i=1:size(l,1)
    S0(i,1)=61;%容量约束为 61;
    for j=2:size(d,1)
        S0(i,j)=S0(i,j-1)+bian(l(i,j));
    end
end
m=1;
for i=1:120
    if all(S0(i,:)<=65)&((d(l(i,1),l(i,2))+d(l(i,2),l(i,3))+d(l(i,3),l(i,4))+d(l(i,4),l(i,5))+...
d(l(i,5),l(i,6))+d(l(i,6),l(i,1)))/30+25/60)<6
        %时间约束为 6 小时
        S(m,:)=S0(i,:);
        lu(m,:)=l(i,:);
        m=m+1;
    end
end
for i=1:size(lu,1)
    lu(i,7)=d(lu(i,1),lu(i,2));
    for j=2:5
        lu(i,j+6)=d(lu(i,j),lu(i,j+1));
    end
    lu(i,12)=d(lu(i,6),lu(i,1));
end
lu;
S2=65-S;
for i=1:size(lu,1)
    for j=1:6
        m(i,j)=S2(i,j)*lu(i,j+6);
    end
end
for i=1:size(lu,1)
    lu(i,13)=sum(m(i,:))/65;
    lu(i,14)=sum(lu(i,7:12))/30+25/60;
end
[xl,yl]=find(lu==min(lu(:,14)));\%求解最优路径（目标为空车率引起的损失最小）

```

2、问题二中区级邮政线路的求解程序

%本程序为计算由地市局出发覆盖其县局的区级邮政线路的通用函数程序。

%输入数据第一个为地市局标号，输入的规模宜不超过 11 个点。

```

function dt=qiujielujing(leil)
%输入量 leil 为相关邮局的编号组合，第一个值应为地市局编号。
load zongshuju
d=D(leil,leil);

```

```

num=size(d,1);
zshu=1;
for i=1:(num-1)
    zshu=zshu*i;
end
l=ones(zshu,num);
l(:,2:num)=perms(2:num);
for i=1:size(l,1)
    for j=1:num-1
        l(i,num+j)=D(lei1(l(i,j)),lei1(l(i,j+1)));
    end
    l(i,2*num)=D(lei1(l(i,num)),lei1(l(i,1)));
    l(i,2*num+1)=sum(l(i,num+1:2*num))*3;%求解总路程
    l(i,2*num+2)=sum(l(i,num+1:2*num))/65+5/60*(num-1)+5/60;
    %区级邮车平均时速为 65km/h,在各县局处理邮件耗时 10 分钟,在各支局处
    理的邮件耗时 5 分钟。

```

```

end
[xl,yl]=find(l==min(l(:,2*num+1)));%找出总路程最小的路径
dt=l(xl,:);

```

### 3、问题二中县级邮政线路的通用求解程序

%输入数据最好为邮局编号, 第一个为县局编号。

%本程序计算的是由县局出发覆盖其支局。

```
function dt=xianjiyoulu(lei1)
```

%输入量 lei1 为相关邮局的编号组合, 第一个值应为县局编号。

```
load zongshuju
```

```
d=D(lei1,lei1);
```

```
num=size(d,1);
```

```
zshu=1;
```

```
for i=1:(num-1)
```

```
    zshu=zshu*i;
```

```
end
```

```
l=ones(zshu,num);
```

```
l(:,2:num)=perms(2:num);
```

```
for i=1:size(l,1)
```

```
    for j=1:num-1
```

```
        l(i,num+j)=D(lei1(l(i,j)),lei1(l(i,j+1)));
```

```
    end
```

```
    l(i,2*num)=D(lei1(l(i,num)),lei1(l(i,1)));
```

```
    l(i,2*num+1)=sum(l(i,num+1:2*num))*3;%求解总路程
```

```
    l(i,2*num+2)=sum(l(i,num+1:2*num))/30+5/60*(num-1);
```

%县级邮车平均时速为 30km/h,在各支局处理的邮件耗时 5 分钟。

```
end
```

```
[xl,yl]=find(l==min(l(:,2*num+1)));%找出总路程最小的路径
```

```
dt=l(xl,:);
```