

# “华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

## 题 目                      关于跳台跳水体型系数设置的建模分析

### 摘                      要：

跳水运动有悠久的历史，在我国早在宋朝就有出现，当时被叫做水秋千。现代竞技跳水始于 20 世纪初，1900 年，瑞典运动员在第 2 届奥运会上作了精彩的跳水表演，一般公认这是最早的现代竞技跳水。它是一项优美的水上运动，从高处用各种姿势跃入水中或是从跳水器械上起跳，在空中完成一定动作姿势，并以特定动作入水的运动。研究跳水动作完成的时间、难度系数，和对其造成影响的因素，对完善现代跳水运动的竞技性和观赏性都有很大的意义。

本文对跳台跳水运动中具体动作进行分析和研究，将人体近似看成刚体，考虑人体的身高和体重与跳水动作难度系数的关系，建立不同的数学物理模型来模拟人体在跳水过程中的翻转和转体，从而计算运动员完成不同动作的时间。

针对问题一：通过对题目给出的参考文献以及附件的分析讨论，总结出一定的跳水动作难度系数的规律。为得到解决其他问题的有用信息，以问题四作为参考，保留附件 APPENDIX4 中 10 米跳台的 PIKE（屈体）和 TUCK（抱膝）这两组数据为主要研究对象。在运动员跳水的过程中，动作主要为翻滚和转体，翻滚又分为向内翻滚和向外翻滚。本文最终采用线性回归的方法分别对屈体动作难度系数和抱膝动作难度系数同向内翻滚周数、向外翻滚周数、转体周数之间的关系进行线性回归，最终建立相应的数学模型。

针对问题二：将人体看成一个刚体和一个转子的结合，人体在跳水过程中的运动可以看成多段刚体绕定点运动过程的结合。利用欧拉运动学方程和角动量定理，建立起角度，角速度，转动惯量，人体身高和体重等物理量之间的联系。可以将所有的跳水动作分为五个阶段：第一阶段是纯粹的翻转运动；第二阶段转子有少量的转体但主要还是翻转运动；第三阶段翻转运动和转体运动都有；第四阶段和第二阶段类似，只是转子方向相反而且转子趋向关闭；第五阶段和第一阶段类似，也是纯粹的翻转运动。计算出每个阶段的时间得到运动员完成整个动作的时间。

针对问题三：通过问题二建立的模型，很明显可以看出运动员的体型对模型

有较大的影响，所以校正系数的设定是必要的。将跳水动作分为屈体向内、屈体向外、抱膝向内、抱膝向外这 4 种情况，分别讨论这四种情况下的体型校正系数，通过问题一建立的模型与问题二建立的模型比较得出。

针对问题四：给定一名运动员的体型参数，代入问题二中给出人体的刚体模型，将原始表格按照动作的不同划分为屈体向外，屈体向内，抱膝向外和抱膝向内四个动作，并分别求出每个动作的校正系数，从而由原始国际泳联十米跳台跳水难度系数得到考虑到体型影响的新的动作难度系数，通过对比难度系数之间的差异和分析运动员体型之间的关系进而可以得出关于难度系数和体型之间存在密切的关系，且需要在原始难度系数基础上乘以一个体型校正系数从而使不同体型的运动员可以公平竞技。

## 目录

一、问题的重述.....	4
1.1 跳台跳水研究背景.....	4
1.2 问题的提出.....	4
二、问题的分析.....	5
三、模型假设.....	6
四、符号说明.....	7
五、建模与求解.....	8
5.1 问题一的建模与求解.....	8
5.1.1 问题一的数据处理.....	8
5.1.2 问题一的建模.....	9
5.2 问题二的建模与求解.....	12
5.2.1 问题二的物理模型.....	12
5.2.2 问题二模型的建立.....	16
5.3 问题三的建模与求解.....	21
5.4 问题四的建模与求解.....	22
六、模型展望.....	26
参考文献.....	26

## 一、问题的重述

### 1.1 跳台跳水研究背景

跳水作为一项优美的水上运动，在各大运动竞赛上都是最受瞩目的运动项目之一，1904年在圣路易斯奥运会上跳水首次列入奥运会项目。跳水是一项由个人参加的运动项目，是指运动员在一定高度的器械上起跳，在空中完成一定的动作姿势并以特定动作干净利索优美的姿态入水的一项水上技巧运动，一般分为竞赛性跳水和非竞赛性跳水两大类，竞赛性跳水又分为竞技跳水和高空跳水。跳台跳水是竞技跳水项目之一，在坚硬无弹性的平台上进行，跳台高度分为5米、7.5米和10米，根据参与人数可以分为单人和双人两种。奥运会、世界锦标赛、世界杯赛限用10米跳台。跳台跳水根据起跳方向和动作结构分向前、向后、向内、反身、转体和臂立6组。比赛时，男子要完成4个有难度系数限制的自选动作和6个无难度系数限制的自选动作，女子要完成4个有难度系数限制的自选动作和4个无难度系数限制的自选动作，每个动作的最高得分为10分，裁判员们评分时，根据运动员完成动作的表现优劣及入水效果，各自给出从10到0的动作评分，然后按一定公式计算该运动员该动作的完成分，此完成分乘以该动作的难度系数即为该运动员该动作的最终得分，总分高者名次列前。动作难度系数是表明运动员完成动作的难易程度。国际跳水竞赛规则为每一个跳水动作确定了相应的难度系数，它根据动作组别、竞赛项目（跳板、跳台）、器械高度、动作姿势和翻腾转体的周数等方面的差异来确定其数值。运动员跳水时，动作简单，难度系数就低；动作复杂，难度系数就高。

### 1.2 问题的提出

跳水动作难度系数表明运动员完成动作的难易程度，但是有人对此竞赛规则的公平性持怀疑态度，认为体重身高不同的运动员在完成这些动作时的难易程度不同，如瘦小体型的运动员在做翻腾及转体动作时有体型优势，应当设置体型系数予以校正，这样才能保证最终竞赛得分公平公正。通过建模分析，本文将回答以下问题：

问题一：研究分析附件1的APPENDIX 3-4，关于国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则，你们可以得到哪些对解决以下问题有意义的结论？

问题二：请应用物理学方法，建立模型描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型（身高，体重）之间的关系。

问题三：请根据你们的模型说明，在10米跳台跳水比赛中设置体型校正系数有无必要。如果有，校正系数应如何设置？

问题四：请尝试基于你们建立的上述模型，给出表1中所列的十米跳台跳水动作的难度系数。你们的结果与附件1中规定的难度系数有无区别？如果有区别，请作出解释。

表1：十米跳台难度系数表（部分动作）

动作代码	PIKE		TUCK		动作代码	PIKE		TUCK	
	原	新	原	新		原	新	原	新
	B	B	C	C		B	B	C	C

105	2.3		2.1		5154	3.3		3.1	
107	3.0		2.7		5156	3.8		3.6	
109	4.1		3.7		5172	3.6		3.3	
1011	--	--	4.7		5255	3.6		3.4	
205	2.9		2.7		5257	4.1		3.9	
207	3.6		3.3		5271	3.2		2.9	
209	4.5		4.2		5273	3.8		3.5	
305	3.0		2.8		5275	4.2		3.9	
307	3.7		3.4		5353	3.3		3.1	
309	4.8		4.5		5355	3.7		3.5	
405	2.8		2.5		5371	3.3		3.0	
407	3.5		3.2		5373	--	--	3.6	
409	4.4		4.1		5375	--	--	4.0	

[动作代码说明] (1) 第一位数表示起跳前运动员起跳前正面朝向以及翻腾方向，1、3 表示面朝水池，2、4 表示背向水池；1、2 表示向外翻腾，3、4 表示向内翻腾。(2) 第三位数字表示翻腾圈数，例如 407，表示背向水池，向内翻腾 3 周半。(3) B 表示屈体，C 表示抱膝。(4) 如果第一位数字是 5，表示有转体动作，此时，第二位数字意义同说明 (1)，第三位数字表示翻腾圈数，第四位数字表示转体圈数，例如 5375，表示面向水池向内翻腾 3 周半，转体 2 周半。

## 二、问题的分析

针对本文提出的问题，我们逐一做如下分析：

问题一的分析：根据参考文献和资料可以知道跳台跳水根据起跳方向和动作结构分为：1.Front（面向池向前跳水） 2.Back（面对台向后跳水） 3.Reverse（面对池反身跳水） 4.Inward（面对台向内跳水） 5.Twisting（转体跳水） 6.Armstand（臂立跳水）这六组；跳水动作的姿势可以分为直体 Straight（A）、屈体 Pike（B）、抱膝 Tuck（C）、翻腾兼转体的任意姿势 Free（D）。根据题目要求，为得到有助于解决其他问题的有意义的结论，参照第四题的表格应该选取附件 APPENDIX4 中 10 米跳台的 PIKE 和 TUCK 这两组数据为主要研究对象，继而对数据中还未经过计算的动作难度系数进行补全。在跳水过程中消耗时间的主要动作是翻腾和转体，考虑到翻腾动作分为向内翻腾和向外翻腾，可以分别对屈体难度系数和抱膝难度系数与向外翻腾周数、向内翻腾周数以及转体周数做线性回归分析，得到相应的数学模型，并在附件 APPENDIX3-4 给出跳水动作难度系数

的数据中找出一定的规律。

问题二的分析：要完整描述运动员在跳水过程中的动作，就要正确描述跳水动作中的翻腾和转体动作。可以建立一个模型：将运动员的身体看成一个刚体加上一个转子，跳水运动员跳水过程中的翻腾动作可以看成刚体绕重心进行的旋转，跳水过程中的转体动作可以看成转子打开后，人体绕转子进行旋转。并以重心到头顶作为  $z$  轴，重心到胸腔作为  $y$  轴，重心到手臂作为  $x$  轴，建立一个空间直角坐标系。通过这个坐标系可以准确描述出运动员在跳水过程中空间位置的变化。刚体绕定点运动的情况可以用欧拉运动和动力学方程来进行描述，通过这个方程和角动量定理我们可以找到角速度，转动惯量和运动员在坐标系下空间位置之间的关系。从而得出完成转体和翻腾需要的时间，根据每个跳水动作包含转体和翻腾个数和，就可以算出完成这个动作所消耗的时间。而运动员的身高体重会影响运动员的重心位置和刚体的转动惯量，这对完成转体和翻腾消耗的时间会有影响。这样就可以找到运动员完成各个运动的时间和运动员身高体重之间的关系。

问题三的分析：该问题主要分为两问，第一问探讨设置体型校正系数有无必要，第二问在第一问的基础上讨论体型校正系数如何设置。虽然问题二模型只给出了体型和时间的关系，但时间和跳水动作难度系数是相关的，一般来说时间越短的跳水动作越简单，难度系数应该越小，跳水动作的难度系数和时间成正比。因此，跳水动作的难度系数和转体周数，翻腾周数和运动员的体型相关。运动员的体型会影响跳水动作的难度，所以有必要设置一个体型校正系数，来抵消跳水运动员因为体型带来的差别。根据问题一给出的模型来看，所有的跳水动作可以分为四种情况，第一种情况是曲体向内翻腾，第二种情况是曲体向外翻腾，第三种情况是抱膝向内翻腾，第四种情况是抱膝向外翻腾（转体不分向内和向外）。在这四种不同的情况下，问题一模型和问题二模型对于相同的跳水动作会得出不同的两个值，校正系数的大小可以被设置为这两个值的比值，利用体型校正系数就可以消除体型对跳水动作难度系数的影响。

问题四的分析：需要结合动作代码说明对表格内容进行分析，理解每个动作代码的含义，知道每个动作代码表示翻转和转体的个数和属于的不同的情况，结合一般运动员的身高和体重情况，通过代入具体的问题二改进模型来算出具体的值。如果得出来的值和表中难度系数没有多大区别，那说明校正系数设置的较好，身高和体重等体型因素被很好的消除了。如果有比较大的区别，那说明校正系数设置的不够好，可能是忽略了某些因素，也有可能是忽略了某些情况。

### 三、模型假设

针对本文提出的问题，我们做了如下假设：

- 1、在分析问题1时，我们把人体看做刚体。
- 2、假设运动员完成跳水动作是在下落时段。
- 3、假设跳水动作分析和数据来源是可靠的。
- 4、假设运动员在跳水的过程中不会受到其他额外的动作干扰。
- 5、我们规定面向水池为向外跳水，面向跳台为向内跳水。
- 6、假设运动员变换动作是瞬间完成的。
- 7、假设人体密度是均匀的。

#### 四、符号说明

符号	符号说明	单位
$y_1$	屈体难度系数	
$x_1$	向内翻腾周数	周
$x_2$	向外翻腾周数	周
$x_3$	转体周数	周
$y_2$	抱膝难度系数	
$L$	身体框架中的角动量	$kg \cdot m^2 / s$
$I$	是惯性张量	
$A$	旋转圆盘中产生的角动量	$kg \cdot m^2 / s$
$\Omega$	刚体角速度	rad/s
$\Phi$	表示运动员沿 x 轴翻腾的角度	度
$\theta$	表示运动员沿 z 轴翻腾的角度	度
$\Psi$	表示运动员沿 y 轴翻腾角度	度
$R$	转动矩阵	
$h$	角动量	$kg \cdot m^2 / s$
$\omega_d$	转子角速度	rad/s
$I_d$	运动员旋转的转动惯量	
$l$	整个身体的角动量（完成一个空翻的角动量）	$kg \cdot m^2 / s$
$t$	实际时间	s
$\tau$	无量纲时间	
$\sigma, \delta, \rho$	无量纲的参数	
$E$	能量	焦耳

$T_i$	跳水动作完成的第 $i$ 阶段所需要的时间	s
$v$	速度	m/s
$g$	重力加速度	m/s <sup>2</sup>
$p$	人体密度	kg/m <sup>3</sup>
$T_{tot}$	总时间	s
$H$	人的身高	m
$K$	椭圆积分	
$h_1$	脚到膝盖长度	m
$h_2$	膝盖到腰部高度	m
$h_3$	腰部到头顶高度	m
$w$	角速度	rad/s
$P$	标准难度系数	
$M$	难度系数与翻腾和转体耗费时间的比例系数	
$m$	翻腾周数	周
$n$	为转体周数	周
$\hat{T}_f$	翻腾一周所用时间（无量纲）	
$\hat{T}_z$	转体一周所用时间（无量纲）	
$D$	人体宽度	m
$\alpha$	修正系数	

## 五、建模与求解

### 5.1 问题一的建模与求解

#### 5.1.1 问题一的数据处理

通过对附件以及各种资料的解读，我们考虑到跳水的过程中主要动作为向外翻腾、向内翻腾以及转体，对附件 1 的 APPENDIX 4 中的表格进行如下处理：



保留 10 米跳台中 PIKE（屈体）和 TUCK（抱膝）这两组跳水动作的姿势的数据，并利用 SPASS 对缺失数据进行补全。

### 5.1.2 问题一的建模

（1）对屈体动作难度系数、向外翻腾周数、向内翻腾周数和转体周数这四个变量进行相关性分析，得到如下相关性矩阵：

表 1 屈体难度系数相关性

		向外翻腾周数	向内翻腾周数	转体周数	屈体难度系数
向外翻腾周数	Pearson 相关性	1	-.555**	.146	.306
	显著性（双尾）		.006	.508	.156
	N	23	23	23	23
向内翻腾周数	Pearson 相关性	-.555**	1	.234	.490*
	显著性（双尾）	.006		.283	.018
	N	23	23	23	23
转体周数	Pearson 相关性	.146	.234	1	.723**
	显著性（双尾）	.508	.283		.000
	N	23	23	23	23
屈体难度系数	Pearson 相关性	.306	.490*	.723**	1
	显著性（双尾）	.156	.018	.000	
	N	23	23	23	23

相关系数是变量之间相关程度的重要指标，其取值区间为[-1,1]，样本相关系数用 $|r|$ 表示，总体相关系数用 $\rho$ 表示。 $|r|$ 值越大，变量之间的线性相关程度越高； $|r|$ 值越接近于 0，变量之间的线性相关程度越低。 $r > 0$ 为正相关， $r < 0$ 为负相关， $r = 0$ 表示不相关。

将相关性分为以下几个程度：

$ r $	0	(0,0.3)	(0.3,0.5)	(0.5,0.8)	(0.8,1)	1
相关程度	零相关	微相关	切实相关	密切相关	高度相关	完全相关

由此我们可以得出屈体动作难度系数与向内翻腾周数、向外翻腾周数以及转体周数密切相关。然后利用 SPASS 对屈体难度系数、向内翻腾周数、向外翻腾周数及转体周数这四个变量进行线性回归分析，得到如下表格：

表 2 模型摘要

模型	R	R 平方	调整后的 R 平方	标准估算的错误	Durbin-Watson(U)
1	.945 <sup>a</sup>	.893	.876	.2748	.972

a. 预测变量：（常量），转体周数，向外翻腾周数，向内翻腾周数

b. 因变量：屈体难度系数

表 3 系数<sup>a</sup>

模型	非标准化系数		标准系数	t	显著性	共线性统计	
	B	标准错误	贝塔			容许	VIF

1	(常量)	1.655	.122		13.555	.000		
	向外翻腾周数	.339	.050	.654	6.810	.000	.612	1.634
	向内翻腾周数	.414	.054	.747	7.638	.000	.591	1.692
	转体周数	.376	.068	.453	5.505	.000	.836	1.197

a. 因变量：屈体难度系数

表 4 共线性诊断<sup>a</sup>

模型	维度	特征值	条件指数	方差比例			
				(常量)	向外翻腾周数	向内翻腾周数	转体周数
1	1	2.675	1.000	.03	.02	.02	.03
	2	1.001	1.635	.00	.15	.23	.00
	3	.174	3.924	.03	.41	.44	.85
	4	.150	4.228	.94	.41	.31	.12

a. 因变量：屈体难度系数

由上表可知条件指数小于 10，自变量之间没有共线性。

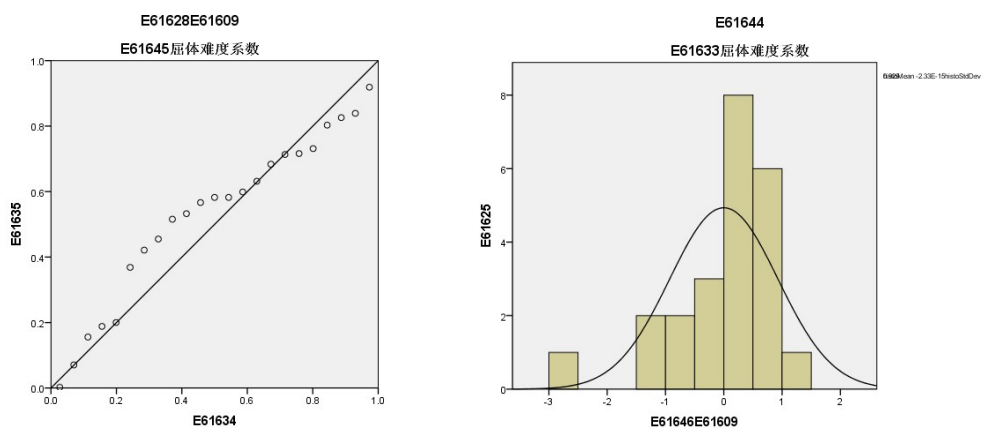


图 1 残差分布

直方图的形态符合正态分布，所以我们人就大体上认为数据的残差是符合正态分布的。

综上所述，我们选用该模型为最终模型，根据表 3 中的系数可得数学模型为：

$$y_1 = 0.339x_1 + 0.414x_2 + 0.376x_3 + 1.655 \quad (1)$$

其中  $y_1$  为屈体动作难度系数， $x_1$  为向外翻腾周数， $x_2$  为向内翻腾周数， $x_3$  为转体周数。

(2) 同理，对抱膝动作难度系数、向外翻腾周数、向内翻腾周数和转体周数这四个变量进行相关性分析，得到如下相关性矩阵：

表 5 抱膝难度系数相关性

		向外翻腾周数	向内翻腾周数	转体周数	抱膝难度系数
向外翻腾周数	Pearson 相关性	1	-.555**	.146	.313
	显著性 (双尾)		.006	.508	.146
	N	23	23	23	23
向内翻腾周数	Pearson 相关性	-.555**	1	.234	.389

显著性（双尾）		.006		.283	.066
N		23	23	23	23
转体周数	Pearson 相关性	.146	.234	1	.809**
	显著性（双尾）	.508	.283		.000
	N	23	23	23	23
抱膝难度系数	Pearson 相关性	.313	.389	.809**	1
	显著性（双尾）	.146	.066	.000	
	N	23	23	23	23

同理，我们可以得出抱膝动作难度系数与向内翻腾周数、向外翻腾周数以及转体周数密切相关。然后利用 SPASS 对屈体难度系数、向内翻腾周数、向外翻腾周数及转体周数这四个变量进行线性回归分析，得到如下表格：

表 8 模型摘要<sup>b</sup>

模型	R	R 平方	调整后的 R 平方	标准估算的错误	Durbin-Watson(U)
1	.930 <sup>a</sup>	.864	.842	.3313	2.092

a. 预测变量：（常量），转体周数, 向外翻腾周数, 向内翻腾周数

b. 因变量：抱膝难度系数

表 7 系数<sup>a</sup>

模型	非标准化系数		标准系数	t	显著性	共线性统计	
	B	标准错误	贝塔			容许	VIF
1 （常量）	1.525	.147		10.365	.000		
向外翻腾周数	.290	.060	.523	4.832	.000	.612	1.634
向内翻腾周数	.319	.065	.537	4.879	.000	.591	1.692
转体周数	.541	.082	.607	6.562	.000	.836	1.197

a. 因变量：抱膝难度系数

表 8 共线性诊断<sup>a</sup>

模型	维度	特征值	条件指数	方差比例			
				（常量）	向外翻腾周数	向内翻腾周数	转体周数
1	1	2.675	1.000	.03	.02	.02	.03
	2	1.001	1.635	.00	.15	.23	.00
	3	.174	3.924	.03	.41	.44	.85
	4	.150	4.228	.94	.41	.31	.12

a. 因变量：抱膝难度系数

由上表可知条件指数小于 10，自变量之间没有共线性。

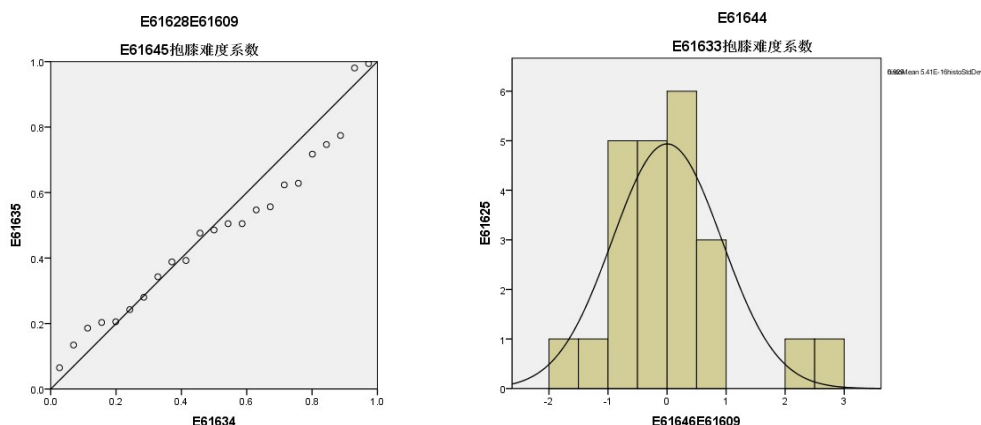


图 2 残差分布

直方图的形态符合正态分布，所以我们人就大体上认为数据的残差是符合正态分布的。

综上所述，我们选用该模型为最终模型，根据表 7 中的系数可得数学模型为：

$$y_1 = 0.290x_1 + 0.319x_2 + 0.541x_3 + 1.525 \quad (2)$$

其中  $y_2$  为屈体动作难度系数， $x_1$  为向外翻腾周数， $x_2$  为向内翻腾周数， $x_3$  为转体周数。

通过对附件 1 的 APPENDIX 3-4 中的表格进行分析和规律总结，运动员跳水时，动作简单，难度系数就低；动作复杂，难度系数就高。对于同一动作，因器械高度不同，难度系数也有区别，即同样代码的动作，5 米跳台的难度系数最高，7.5 米跳台的难度系数次之，10 米跳台难度系数最低。在同一高度的比赛中，同样数字代码的动作，A 比 B 的难度系数高，B 比 C 的难度系数高，C 比 D 的难度系数高。

## 5.2 问题二的建模与求解

### 5.2.1 问题二的物理模型

为了方便量化分析运动员在跳水过程中受力和运动情况，我们假设运动员在跳水过程中的模型设为刚体模型。运动员基本上都在达到最高点时开始做跳水动作，这时运动员的初速度为 0，身体直立和跳板夹角基本成 90 度。为了方便分析运动员在完成运动时的力学情况，我们将人体简化成一个刚体和一个转子连接，转子可以打开和关闭，转子用圆盘表示，当转子打开表示手臂开始旋转，当转子关闭表示手臂停止不动。这样模型可以通过角度变化，来表示跳水动作中的翻腾和扭曲。人体的简化模型如下图所示，将人体分为三个部分  $B_1, B_2, B_3$ ，每一部分的重量为  $M_1, M_2, M_3$ ，三个部分的重心分别为  $C_1, C_2, C_3$ ， $J_{ij} (i=1,2,3)$  表示第  $i$  部分的重心连接第  $j$  部分的位置矢量。同时我们以人体重心为原点，x 轴代表指向身体一侧，y 轴代表身体到胸腔那一侧，z 轴代表指向头部那一侧。这样就可以通过胸部绕一个轴旋转。这个想法是为了利用转盘旋转向上/向下运动的模型。因此会得到一个关于 Y 轴的角动量  $A = (0, h, 0)^t$ 。

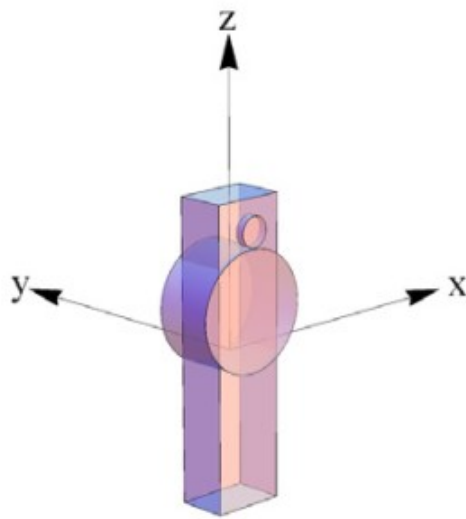


图 3

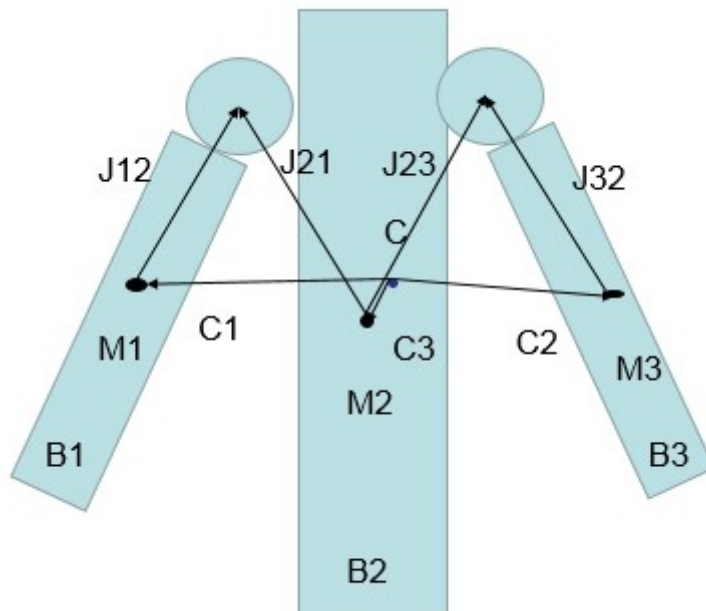


图 4

跳水过程是一个简单的翻腾转体动作，可分为五个阶段:开始作为一个稳定的旋转运动对主轴导致纯翻腾(第 1 阶段),通常这是中间的轴惯性矩原理不稳定平衡。一段时间后,一个形状发生变化，转子打开，其中一个手臂向下转动(第 2 阶段)，这使得身体不对称和生成一些新主轴和常数之间的倾斜角动量矢量。因此身体开始转体动作阶段(第 3 阶段),直到另一个形状的变化(第 4 阶段)停止,身体然后经历纯翻腾运动(第 5 阶段)。

对主要的跳水动作进行分类，可以发现跳水动作大致分为直体，屈体，抱膝和自由。动作主要可以分解为两类，第一类是翻腾，第二类是转体。进行翻腾动作时，如果使用直体姿势，则会导致转动惯量大，很难完成动作，因而一般采用屈体或者抱膝完成翻腾动作；而在进行转体动作时，采用直体的转动惯量较小，更适合完成动作。因此我们只要求出翻腾或转体一周的平均时间，然后根据动作

里翻腾或转体的周数就可以求出完成整个动作的时间。如果运动员是背向水池起跳对周数没有影响。

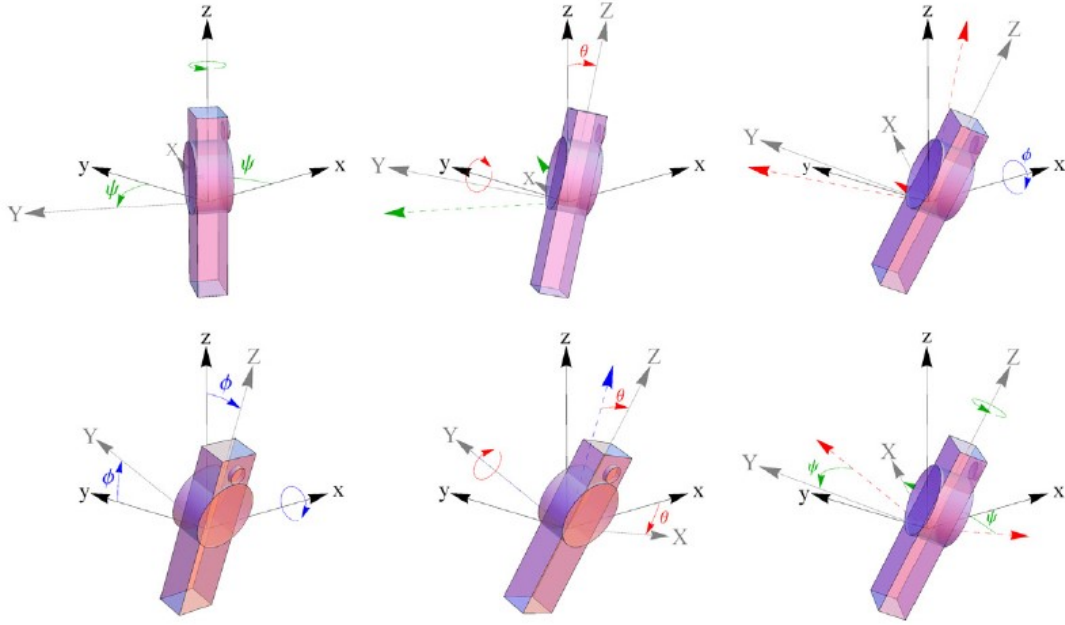


图 5

在假设运动员身体为刚体的前提下，结合具体的跳水场景，根据欧拉运动学方程可以得到。根据参考文献可以得到一般情况下的欧拉方程：

$$\dot{L} = L \times \Omega, \Omega = I^{-1}(L - A) \quad (3)$$

$L$  是身体框架中的角动量， $I$  是惯性张量， $A$  是旋转圆盘中产生的角动量，利用  $I$  的恒常性，我们能够推导出运动方程。

$$R^T l = I \Omega + A \quad (4)$$

其中  $\Omega$  由  $R$  决定，对于任何的矢量  $V \in R^3$ ，都可以得到  $\Omega \times V = R^T \dot{R} V$ 。所以可以得到运动员在跳水中，带有转子的刚体方程为：

$$l \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ -\cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中  $\Phi$  表示运动员沿  $x$  轴翻腾的角度， $\Theta$  表示运动员沿  $z$  轴翻腾的角度， $\Psi$  表示运动员沿  $y$  轴翻腾角度。这三个角度就可以确定运动员在动作过程中的运动情  $h = \omega_d I_d$ ， $\omega_d$  是圆盘角速度， $I_d$  是绕其对称轴旋转的转动惯量。

将方程 (3) 除以  $l$ ，然后通过标度时间  $I_1 / l$ ，使整个方程无量纲化。得到下列方程

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 1 + \delta \sin^2 \psi + \hat{p} \sec \theta \sin \psi \\ \dot{\theta} &= -\delta \cos \theta \cos \psi \sin \psi - \hat{p} \cos \psi \\ \dot{\psi} &= \gamma \sin \theta - \delta \sin \theta \sin^2 \psi - \hat{p} \tan \theta \sin \psi \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\dot{\theta}$ 表示角度对无量纲时间 $\tau = tl / I_1$ 的求导。

通过对角度导数的求解给整个方程提供无量纲的参数 $\sigma, \delta, \rho$ 。

$$\delta = \frac{I_1}{I_2} - 1 \quad (7)$$

$$\gamma = \frac{I_1}{I_3} - 1 \quad (8)$$

$$\rho = \frac{h}{l} \quad (9)$$

$$\hat{\rho} = \rho(1 + \delta) \quad (10)$$

旋转体的能量可以表示为 $E = 1/2(L - A)'I^{-1}(L - A)$ ,其中 $L = R'l$ 。无量纲化后就得到了。

$$E = \frac{1}{2}(1 + \gamma \sin^2 \theta + \delta \cos^2 \theta \sin^2 \psi) + \frac{1}{2}\hat{\rho}(\rho + 2 \cos \theta \sin \psi) \quad (11)$$

整个跳水动作可以被分为刚性和非刚性阶段，在刚性阶段 $\rho = 0$ ，因为人体是对称结构所以 $I_1 = I_2 \Leftrightarrow \delta = 0$ 。因此，运动方程以 $\phi' = 0, \dot{\theta} = 0$ 和 $\psi' = \gamma \sin \theta$  (一个常数)开始。所以运动方程可以表示为

$$\phi' = 1 + \rho \sec \theta \sin \psi \quad (12)$$

$$\theta' = -\rho \cos \psi \quad (13)$$

$$\psi' = \gamma \sin \theta - \rho \tan \theta \sin \psi \quad (14)$$

其中

$$\sin \psi = \frac{E - \frac{1}{2}(1 + \rho^2)}{\rho \cos \theta} - \frac{\gamma}{2\rho} \sin \theta \tan \theta \quad (15)$$

运动员完成一个具体的跳水动作可以被分解为 5 步，第一步是刚性阶段，此时转子关闭，只由空翻动作。这个时候 $L = I = (l \ 0 \ 0)'$ 是一个常数，所以 $\phi' = 1$ 和 $\theta = \psi = 0$ 。此时 $\hat{T}_1 = \phi_1 = \frac{l}{I_1} T_1$ 。

在非刚性的二阶段，因为接下来两个阶段消耗时间最少，所以我们让转子在轨道 $L = (l, 0, 0)'$ 打开，并旋转到最大可能的倾角 $\theta_{\max}$ ：

$$\cos \theta_{\max} = \sqrt{\beta^2 + 1} - \beta, \beta = \frac{\rho}{\gamma} \quad (16)$$

他们之间的可逆关系为：

$$\beta = \frac{s^2}{2\sqrt{1-s^2}}, s = \sin \theta_{\max} \quad (17)$$

因为模型具有离散对称性，所以 $\theta_{\max}$ 在 $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ ，取得最大值。从公式 (6) 可以得到 $\sin^2 \theta \pm 2\beta \cos \theta = 0$ 。得到第二阶段消耗的时间 $T_2$ 如下：

$$\frac{l}{I_1} T_2 = \hat{T}_2 = \frac{2k}{s\gamma} K(k^2), k^2 = \frac{1-s^2}{2-s^2} \quad (18)$$

考虑到 $\theta'$ 方程，分离变量从 0 到 $\theta_{\max}$ 进行积分，得到下列公式。

$$\int_0^{\theta_{\max}} \frac{2d\theta}{\gamma\sqrt{4\beta^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} = \int d\tau = \hat{T}_2 \quad (19)$$

所以

$$T_2 = \frac{I_1}{l} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{2d\theta}{\gamma\sqrt{4\beta^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} \quad (20)$$

第三阶段是扭转和空翻都有的刚体运动过程，在这个阶段中有  $\theta = \theta_{\max}$ ，而且  $\theta$  是一个常数，而且  $\psi_3 = \hat{T}_3 \gamma \sin \theta_{\max}$ ，扭转的缩放周期是  $\hat{p}_3 = 2\pi/(\gamma \sin \theta_{\max})$ ，而且由于阶段二和阶段四加起来产生了一个半扭转，阶段三产生了  $n-1/2$  个扭转。阶段三的时间公式如下。

$$\frac{l}{I_1} T_3 = \hat{T}_3 = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hat{p}_3 = \frac{2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{\gamma \sin \theta_{\max}} \quad (21)$$

阶段四和阶段二的过程是相似的，它们唯一的区别在于转子的方向是相反的。所以  $T_4 = T_2$ 。阶段五也是只存在空翻过程，和阶段一类似，所以  $T_1 = T_5$ 。

所以，如果一个完整的动作中包含了  $m$  个空翻和  $n$  个扭转，那么它消耗的总时间就为  $T_{\text{tot}} = 2T_2 + T_3 + 2T_5$ 。所以消耗总时间公式如下。

$$\frac{l}{I_1} T_{\text{tot}} - 2m\pi = 2 \frac{l}{I_1} T_2 - 2\phi_2 \quad (22)$$

### 5.2.2 问题二模型的建立

一些数值的确定:关于  $A = (0, h, 0)'$ ，我们有  $h = w_d I_d$ ，其中  $w_d$  是转子的角速度， $I_d$  是当前时刻关于其对称轴的转动惯量，当从状态 1 到状态 2 时，一只手臂由下到上，而从状态 4 到状态 5，一个手臂由上到下，状态 3 时两只手臂同时运动，相对平行。在该模型中对于每一只手臂当做一个实心圆柱体，其惯性张量近似有  $I_d = 2$ 。该模型考虑对称情况下，对于整个身体的转动惯量可以看做  $(I_1, I_2, I_3) = (20, 20, 1)$ ，整个身体角动量近似为  $l = 40\pi$ 。

我们假定运动员都是立定起跳，从最高点落下开始完成动作，先经过  $T_1$  的时间翻腾，此时运动员的速度为  $v = gT_1$ ，由  $v = rw$ ，身体看作绕重心旋转的刚体，问题转化为求重心位置，对于完成翻腾动作，可分为屈体和抱膝两种方式。假设一名运动员分为三个部分，第一部分脚到膝盖长度为  $h_1$ ，第二部分膝盖到腰部高度为  $h_2$ ，第三部分腰部到头顶高度为  $h_3$ ，运动员的身高为  $H$ ，有

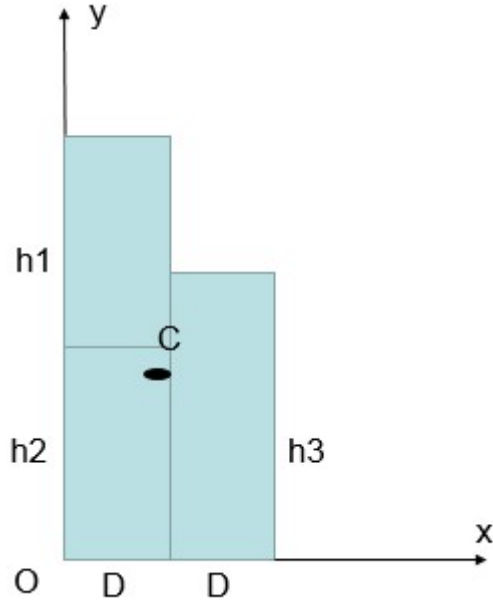
$$H = h_1 + h_2 + h_3 \quad (23)$$

假设人体的质量均匀分布，密度相同均为  $p$ 。

(1) 屈体状态下

整个身体可看做一个对折的长方体刚体模型，人体宽度设为  $D$ ，简化模型如下：





通过分割法可以求得重心的坐标  $C_1(X_1, Y_1)$ ，其中

$$X_1 = \frac{D(h_1 + h_2)\frac{D}{2} + Dh_3\frac{3D}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)} \quad (24)$$

$$Y_1 = \frac{D(h_1 + h_2)\frac{h_1 + h_2}{2} + Dh_3\frac{h_3}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)} \quad (25)$$

所以此时的旋转半径为  $r_1$ ：

$$r_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \quad (26)$$

翻腾动作绕重心旋转，此时转动的角速度可求得为：

$$w_1 = \frac{v_1}{r_1} \quad (27)$$

$$h_1 = w_1 I_d, \quad I_d \approx 2。 \quad (28)$$

五个阶段用的无量纲总时间为：

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{tot1} &= 2\hat{T}_1 + 2\hat{T}_2 + \hat{T}_3 \\
&= 2\phi + 2 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{2d\theta}{\gamma \sqrt{4\beta^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} + \frac{2\pi(n - \frac{1}{2})}{\gamma \sin \theta_{\max}} \\
&= 2\phi + 2 \int_0^{\arccos \left[ \frac{\sqrt{\frac{\rho_1^2}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right)^2} + 1} - \frac{\rho_1}{I_3}}{\frac{I_1}{I_3} - 1}} \right]} \frac{2d\theta}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right) \sqrt{4 \left( \frac{\rho_1}{\frac{I_1}{I_3} - 1} \right)^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} \\
&\quad + \frac{2\pi \left( n - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right) \sin \left[ \arccos \left( \frac{\sqrt{\frac{\rho_1^2}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right)^2} + 1} - \frac{\rho_1}{I_3}}{\frac{I_1}{I_3} - 1} \right) \right]}
\end{aligned} \tag{29}$$

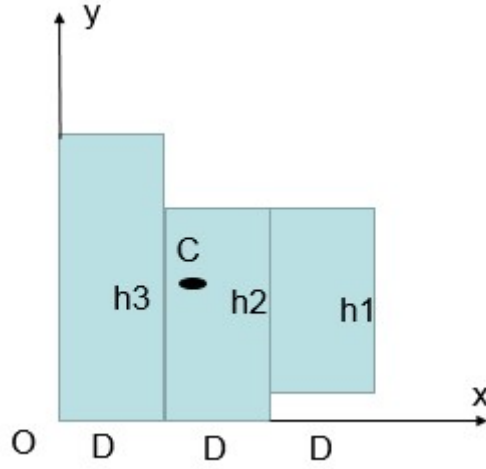
将式（9）、（26）、（27）、（28）依次带入上式即可求出最终模型为：

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{tot1} &= 2\phi + 2 \int_0^{\arccos \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\left( \frac{v_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} I_d \right)^2}{l} + \frac{v_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} I_d}}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right)^2} + 1 - \frac{I_1}{I_3}} \right\}} \frac{2d\theta}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right) \sqrt{4 \left\{ \frac{\left( \frac{v_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} I_d \right)^2}{l} + \frac{v_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} I_d \right\} - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} \\
&\quad + \frac{2\pi \left( n - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right) \sin \left[ \arccos \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\left( \frac{v_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} I_d \right)^2}{l} + \frac{v_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} I_d}}{\left(\frac{I_1}{I_3} - 1\right)^2} + 1 - \frac{I_1}{I_3}} \right\} \right]}
\end{aligned} \tag{30}$$

其中  $X_1 = \frac{D(h_1 + h_2) \frac{D}{2} + Dh_3 \frac{3D}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)}$ ,  $Y_1 = \frac{D(h_1 + h_2) \frac{h_1 + h_2}{2} + Dh_3 \frac{h_3}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)}$ 。

(2) 抱膝状态下

整个身体可看做一个对折的长方体刚体模型，人体宽度设为  $D$ ，简化模型如下：



通过分割法可求得重心坐标为  $C_2(X_2, Y_2)$ ，其中

$$X_2 = \frac{Dh_1 \frac{5D}{2} + Dh_2 \frac{3D}{2} + Dh_3 \frac{D}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)} \quad (31)$$

$$Y_2 = \frac{Dh_1(h_2 + \frac{h_1}{2}) + Dh_2 \frac{h_2}{2} + Dh_3 \frac{h_3}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)} \quad (32)$$

此时旋转半径为  $r_2$ ：

$$r_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} \quad (33)$$

翻腾动作绕重心旋转，此时转动的角速度可求得为：

$$w_2 = \frac{v_1}{r_2} \quad (34)$$

$$h_2 = w_2 I_d, \quad I_d \approx 2 \quad (35)$$

同理，五个阶段用的无量纲总时间为：

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{tot2} &= 2\hat{T}_1 + 2\hat{T}_2 + \hat{T}_3 \\
&= 2\phi + 2 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{2d\theta}{\gamma \sqrt{4\beta^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} + \frac{2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{\gamma \sin \theta_{\max}} \\
&= 2\phi + 2 \int_0^{\arccos \left( \sqrt{\frac{\rho_2^2}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right)^2} + 1} - \frac{\rho_2}{\frac{I_1-1}{I_3}} \right)} \frac{2d\theta}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right) \sqrt{4 \left(\frac{\rho_2}{\frac{I_1-1}{I_3}}\right)^2 - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} \\
&\quad + \frac{2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right) \sin \left\{ \arccos \left[ \sqrt{\frac{\rho_2^2}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right)^2} + 1} - \frac{\rho_2}{\frac{I_1-1}{I_3}} \right] \right\}}
\end{aligned} \tag{36}$$

将式（8）、（31）、（30）、（32）带入上式即可求出最终模型为：

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{tot2} &= 2\phi + 2 \int_0^{\arccos \left\{ \sqrt{\frac{\left( \frac{\frac{v_1}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} I_d}{l} \right)^2}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right)^2} + 1} - \frac{\frac{v_1}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} I_d}{\frac{I_1-1}{I_3}} \right\}} \frac{2d\theta}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right) \sqrt{4 \left\{ \frac{\left( \frac{\frac{v_1}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} I_d}{l} \right)^2}{\frac{I_1-1}{I_3}} \right\} - \sin^2 \theta \tan^2 \theta}} \\
&\quad + \frac{2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right) \sin \left\{ \arccos \left[ \sqrt{\frac{\left( \frac{\frac{v_1}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} I_d}{l} \right)^2}{\left(\frac{I_1-1}{I_3}\right)^2} + 1} - \frac{\frac{v_1}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} I_d}{\frac{I_1-1}{I_3}} \right] \right\}}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\text{其中 } X_2 = \frac{Dh_1 \frac{5D}{2} + Dh_2 \frac{3D}{2} + Dh_3 \frac{D}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)}, \quad Y_2 = \frac{Dh_1(h_2 + \frac{h_1}{2}) + Dh_2 \frac{h_2}{2} + Dh_3 \frac{h_3}{2}}{D(h_1 + h_2 + h_3)}。$$

### 5.3 问题三的建模与求解

问题二模型只给出了体型和时间的关系，但时间和跳水动作难度系数是相关的，一般来说时间越短的跳水动作越简单，难度系数应该越小，跳水动作的难度系数和时间成正比。这样来看，跳水动作的难度系数和转体周数，翻腾周数和运动员的体型相关。

对于跳水动作可分为屈体向外，屈体向内，抱膝向外和抱膝向内四种情况，我们分别分析不同状况下的难度系数与翻腾周数，转体周数和运动员体型的关系：

(1) 屈体向外时：

由问题一中模型可以得到难度系数标准方程为：

$$y_1 = 0.654x_1 + 0.453x_3 \quad (38)$$

其中  $x_1, x_2$  分别为翻腾周数和转体周数。国际泳联 10 米跳台难度系数规则表中未考虑体型的影响，只考虑到翻腾和转体周数的关系，设：

$$P_1 = M(m\hat{T}_f + n\hat{T}_z) \quad (39)$$

其中  $P$  为标准难度系数， $M$  为难度系数与翻腾和转体耗费时间的比例系数， $m$  为翻腾周数， $n$  为转体周数， $\hat{T}_f$  为翻腾一周所用时间， $\hat{T}_z$  为转体一周所用时间。

由问题二中模型可得到在屈体向外时可得到 5 个状态所用的总时间为  $\hat{T}_{tot1}$ ，所以在模型下，考虑了运动员体型的状况下，可得到改进的难度系数为：

$$\hat{P}_{g1} = M\hat{T}_{tot1} \quad (40)$$

因此可以得到在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为：

$$\alpha_1 = \frac{\hat{P}_{g1}}{P_1} = \frac{\hat{T}_{tot1}}{0.654m + 0.453n} \quad (41)$$

(2) 屈体向内时：

$$y_2 = 0.747x_1 + 0.453x_3 \quad (42)$$

其中  $x_1, x_2$  分别为翻腾周数和转体周数。国际泳联 10 米跳台难度系数规则表中未考虑体型的影响，只考虑到翻腾和转体周数的关系，设：

$$P_2 = M(m\hat{T}_f + n\hat{T}_z) \quad (43)$$

其中  $P$  为标准难度系数， $M$  为难度系数与翻腾和转体耗费时间的比例系数， $m$  为翻腾周数， $n$  为转体周数， $\hat{T}_f$  为翻腾一周所用时间， $\hat{T}_z$  为转体一周所用时间。

由问题二中模型可得到在屈体向外时可得到 5 个状态所用的总时间为  $\hat{T}_{tot1}$ ，所以在模型下，考虑了运动员体型的状况下，可得到改进的难度系数为：

$$\hat{P}_{g2} = M\hat{T}_{tot1} \quad (44)$$

因此可以得到在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为：

$$\alpha_2 = \frac{\hat{P}_{g2}}{P_2} = \frac{\hat{T}_{tot1}}{0.747m + 0.453n} \quad (45)$$

(3) 抱膝向外时:

$$y_3 = 0.523x_2 + 0.453x_3 \quad (46)$$

其中  $x_1, x_2$  分别为翻腾周数和转体周数。国际泳联 10 米跳台难度系数规则表中未考虑体型的影响, 只考虑到翻腾和转体周数的关系, 设:

$$P_3 = M(m\hat{T}_f + n\hat{T}_z) \quad (47)$$

其中  $P$  为标准难度系数,  $M$  为难度系数与翻腾和转体耗费时间的比例系数,  $m$  为翻腾周数,  $n$  为转体周数,  $\hat{T}_f$  为翻腾一周所用时间,  $\hat{T}_z$  为转体一周所用时间。

由问题二中模型可得到在屈体向外时可得到 5 个状态所用的总时间为  $\hat{T}_{tot1}$ , 所以在模型下, 考虑了运动员体型的状况下, 可得到改进的难度系数为:

$$\hat{P}_{g3} = M\hat{T}_{tot2} \quad (48)$$

因此可以得到在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为:

$$\alpha_3 = \frac{\hat{P}_{g3}}{P_3} = \frac{\hat{T}_{tot2}}{0.523m + 0.607n} \quad (49)$$

(4) 抱膝向内时:

$$y_4 = 0.537x_2 + 0.453x_3 \quad (50)$$

其中  $x_1, x_2$  分别为翻腾周数和转体周数。国际泳联 10 米跳台难度系数规则表中未考虑体型的影响, 只考虑到翻腾和转体周数的关系, 设:

$$P_4 = M(m\hat{T}_f + n\hat{T}_z) \quad (51)$$

其中  $P$  为标准难度系数,  $M$  为难度系数与翻腾和转体耗费时间的比例系数,  $m$  为翻腾周数,  $n$  为转体周数,  $\hat{T}_f$  为翻腾一周所用时间,  $\hat{T}_z$  为转体一周所用时间。

由问题二中模型可得到在屈体向外时可得到 5 个状态所用的总时间为  $\hat{T}_{tot1}$ , 所以在模型下, 考虑了运动员体型的状况下, 可得到改进的难度系数为:

$$\hat{P}_{g4} = M\hat{T}_{tot2} \quad (52)$$

因此可以得到在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为:

$$\alpha_4 = \frac{\hat{P}_{g4}}{P_4} = \frac{\hat{T}_{tot2}}{0.537m + 0.607n} \quad (53)$$

由以上四种不同跳水动作时, 不同体型的运动员会在难度系数上有差异, 如果相同对待不同体型的运动员, 他们在完成同一动作时的难度会不同, 比如体型较小的运动员和体型较大的运动员在完成同一难度的动作的时候, 体型较小的完成转体和翻腾的时间更短, 更具有优势, 所以必须有一个体型校正系数, 本文通过问题一中的模型和问题二中的模型得到四种不同跳水动作的校正系数, 用来消除体型对跳水动作难度系数的影响。因此在实际比赛中非常有必要加入体型校正系数用来消除体型给不同提醒运动员完成动作难度带来的不公平, 从而使跳水的难度系数更加合理。

#### 5.4 问题四的建模与求解

有第三问的数学模型可以得知, 运动员体型的不同, 最终会对完成动作使用的时间带来影响, 从而对难度系数产生影响, 本文选用一名跳水运动员作为例子

来进行计算从而得到比较直观的结果。为了方便模型的计算,我们选择曹缘(2010年广州亚运会双人10米台冠军)的身高体重数据作为标准来计算在该模型下各跳水动作的难度系数,他的身高是  $H=160\text{cm}$ , 体重是  $42\text{kg}$ 。可以得到他的各个部位的长度如下:

腰部到头顶长度为:

$$h_3 = 88\text{cm}$$

腰部到膝盖长度为:

$$h_2 = 33\text{cm}$$

膝盖到脚底长度为:

$$h_1 = 39\text{cm}$$

人体刚性模型中假设人体宽度:

$$D = 15\text{cm}$$

由第三问可以得到四种不同动作的校正系数如下:

(1) 在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为:

$$\alpha_1 = \frac{\hat{P}_{g1}}{P_1} = \frac{\hat{T}_{tot1}}{0.654m + 0.453n} = 0.953 \quad (54)$$

(2) 在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为:

$$\alpha_2 = \frac{\hat{P}_{g2}}{P_2} = \frac{\hat{T}_{tot1}}{0.747m + 0.453n} = 0.964 \quad (55)$$

(3) 在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为:

$$\alpha_3 = \frac{\hat{P}_{g3}}{P_3} = \frac{\hat{T}_{tot2}}{0.523m + 0.607n} = 0.947 \quad (55)$$

(4) 在屈体向外跳水动作时可以得到修正系数为:

$$\alpha_4 = \frac{\hat{P}_{g4}}{P_4} = \frac{\hat{T}_{tot2}}{0.0537m + 0.607n} = 0.951 \quad (57)$$

新难度系数就是旧难度系数乘以校正系数。

现在对问题表中所有数据进行分类,第一类是屈体(PIKE)下的向外的跳水动作,对应校正系数为  $\alpha_1 = 0.953$ :

动作代码	翻转圈数	转体圈数	难度系数(原)	难度系数(新)
105	2.5	0	2.3	2.20
107	3.5	0	3.0	2.86
109	4.5	0	4.1	3.91
1011	5.5	0	--	--
205	2.5	0	2.9	2.76
207	3.5	0	3.6	3.43
209	4.5	0	4.5	4.29
5154	2.5	2	3.3	3.15

5156	2.5	3	3.8	3.62
5172	3.5	1	3.6	3.43
5255	2.5	2.5	3.6	3.43
5257	2.5	3.5	4.1	3.91
5271	3.5	0.5	3.2	3.05
5273	3.5	1.5	3.8	3.62
5275	3.5	2.5	4.2	4.00

第二类是抱膝(TUCK)下的向外的跳水动作,对应的校正系数为 $\alpha_2 = 0.964$  :

动作代码	翻转圈数	转体圈数	难度系数(原)	难度系数(新)
105	2.5	0	2.1	2.03
107	3.5	0	2.7	2.60
109	4.5	0	3.7	3.57
1011	5.5	0	4.7	4.53
205	2.5	0	2.7	2.60
207	3.5	0	3.3	3.18
209	4.5	0	4.2	4.05
5154	2.5	2	3.1	2.99
5156	2.5	3	3.6	3.47
5172	3.5	1	3.3	3.18
5255	2.5	2.5	3.4	3.28
5257	2.5	3.5	3.9	3.76
5271	3.5	0.5	2.9	2.80
5273	3.5	1.5	3.5	3.37
5275	3.5	2.5	3.9	3.76

第三类是屈体(PIKE)下的向内的跳水动作,对应的校正系数为 $\alpha_3 = 0.947$  :

动作代码	翻转圈数	转体圈数	难度系数(原)	难度系数(新)
305	2.5	0	3.0	2.84
307	3.5	0	3.7	3.50
309	4.5	0	4.8	4.55
405	2.5	0	2.8	2.65
407	3.5	0	3.5	3.31
409	4.5	0	4.4	4.17
5353	2.5	1.5	3.3	3.13
5355	2.5	2.5	3.7	3.50
5371	3.5	0.5	3.3	3.13
5373	3.5	1.5	--	--
5375	3.5	2.5	--	--



第三类是抱膝（PIKE）下的向内的跳水动作，对应的校正系数为 $\alpha_4 = 0.951$ ：

动作代码	翻转圈数	转体圈数	难度系数（原）	难度系数（新）
305	2.5	0	2.8	2.66
307	3.5	0	3.4	3.23
309	4.5	0	4.5	4.28
405	2.5	0	2.5	2.38
407	3.5	0	3.2	3.04
409	4.5	0	4.1	3.90
5353	2.5	1.5	3.3	3.14
5355	2.5	2.5	3.7	3.52
5371	3.5	0.5	3.3	3.14
5373	3.5	1.5	--	--
5375	3.5	2.5	--	--

我们将原始表格划分为四个部分进行了计算得到对应的结果，不同动作对应的校正系数不同，所以得到的难度系数更新值也不同，由计算结果我们可以得知经过校正后的难度系数均小于国际泳联十米跳台跳水难度系数，相对误差在3%到5%之间，在可接受范围之内，说明体型的改变确实对难度系数产生一定的影响。这是由于我们选用的是中国著名跳水运动员曹缘来带入模型进行计算的，曹缘曾多次取得十米跳台的冠军，其体型相比一般跳水运动员要更适合跳水，身体在完成动作时更加灵活和轻松，所以其完成相同难度系数动作时要更加容易，所以能完成的更好可能性大，从而在完成相同难度的动作时很大可能比其他选手得到更高的分数。而在本文引入校正系数后，在考虑跳水运动员的体型后，带入问题2和问题3的模型中可以得到校正后的难度系数，对应该问题中，曹缘经过校正后在完成相同动作其难度系数要低，因此导致得分改变。通过校正系数的引入，对于不同体型的跳水运动员，能起到一个更加平衡的作用，从而使比赛更加公平，让不同体型的运动员也能同台竞技。

问题四最终表格为：

动作代码	PIKE		TUCK		动作代码	PIKE		TUCK	
	原	新	原	新		原	新	原	新
	B	B	C	C		B	B	C	C
105	2.3	2.20	2.1	2.03	5154	3.3	3.15	3.1	2.99
107	3.0	2.86	2.7	2.60	5156	3.8	3.62	3.6	3.47
109	4.1	3.91	3.7	3.57	5172	3.6	3.43	3.3	3.18
1011	--	--	4.7	4.53	5255	3.6	3.43	3.4	3.28
205	2.9	2.76	2.7	2.60	5257	4.1	3.91	3.9	3.76

207	3.6	3.43	3.3	3.18	5271	3.2	3.05	2.9	2.80
209	4.5	4.29	4.2	4.05	5273	3.8	3.62	3.5	3.37
305	3.0	2.84	2.8	2.66	5275	4.2	4.00	3.9	3.76
307	3.7	3.50	3.4	3.23	5353	3.3	3.14	3.1	3.14
309	4.8	4.55	4.5	4.28	5355	3.7	3.52	3.5	3.52
405	2.8	2.65	2.5	2.38	5371	3.3	3.14	3.0	3.14
407	3.5	3.31	3.2	3.04	5373	--	--	3.6	--
409	4.4	4.17	4.1	3.90	5375	--	--	4.0	--

## 六、模型展望

本文采用刚体模型作为跳水动作过程人体的转动过程中身体的变化，仍然存在不足之处，主要体现在下面几个方面：

1、在本文问题一中，本文仅仅考虑了 10 米跳台的屈体和抱膝时向外和向内翻腾，通过线性拟合的方法得到难度系数和不同状况下的翻腾和转体周数的关系，没有将到直体和自由动作下的数据考虑在内，所以可能得到的线性回归模型不够完善，适用范围小。

2、问题二中，在考虑人体的模型时，为了简化计算将人体简化为一个刚体模型，手臂看做两个圆柱，其他部位看做一个长方体，密度均匀，这样得到的模型虽然大大简化，但是在实际中可能会有一些误差存在。

3、第三问中，在计算难度系数和时间的关系时，本文按照难度系数与动作完成的时间按照正比关系近似求解，在实际中难度系数与动作完成时间可能是其他线性或者非线性关系，因此可能会有偏差。

4、问题四中，本文在根据问题二和问题三中模型计算更新后难度系数时采用的是运动员曹缘 2010 年的数据，该数据可能不是完全准确的，以此得到的结果会和实际有一定偏差，我们应当采用大量运动员的数据的进行计算从而对比得到更具准确的数据结果，更具有说服力。

## 参考文献

- [1] S. Bharadwaj, N. Duignan, H. R. Dullin, K. Leung, and W. Tong, The diver with a rotor, *Indag. Math. (N.S.)*, 2016.
- [2] A. Cabrera, A generalized Montgomery phase formula for rotating self-deforming bodies, *J. Geom. Phys.*, 57:1405-1420, 2007.
- [3] C. Frohlich, Do springboard divers violate angular-momentum conservation?, *Amer. J. Phys.*, 47: 583-592, 1979.
- [4] T. Iwai, Classical and quantum mechanics of jointed rigid bodies with vanishing total angular momentum, *J. Math. Phys.*, 40 :2381-2399, 1999.
- [5] M. R. Yeadon, The biomechanics of twisting somersaults: Part III. Aerial twist, *J. Sports Sci.*, 11 :. 209-218,1993.
- [6] C. Frohlich, Do springboard divers violate angular-momentum conservation? *Amer. J. Phys.* 47(7)(1979)583–592.
- [7] Cliff Frohlich, The physics of somersaulting and twisting, *Sci. Am.* 242 (3)(1980)154–164.
- [8] Richard Montgomery, How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century, *Amer. J. Phys.* 59(5)(1991)394–98.
- [9] William Tong, Coupled Rigid Body Dynamics with Application to Diving (Ph.D. thesis), University of Sydney, 2016.
- [10] M. R. Yeadon, The simulation of aerial movement—IV. A computer simulation model, *J. Biomech.* 23(1990)85–89.
- [11] M. R. Yeadon, The biomechanics of twisting somersaults: Part I. Rigid body motions, *J. Sports Sci.* 11(1993)187–198.
- [12] M. R. Yeadon, The biomechanics of twisting somersaults: Part III. Aerial twist, *J. Sports Sci.* 11(1993)209–218.
- [13] 郭小炜. 刚柔耦合系统的动力学建模与响应分析[D]. 重庆大学, 2016.
- [14] 刘延柱. 多刚体系统动力学的旋量-矩阵方法[J]. 力学学报, 1988(04):335-344.