

参赛密码 _____

(由组委会填写)



"华为杯"第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 东南大学

参赛队号 10286374

队员姓名 1.李欣
2.秦晨
3.肖丰

题 目 无人机在抢险救灾中的优化运用

摘 要:

对于地震等自然灾害,及时高效的灾后救援十分重要,无人机能在救援行动中发挥重要作用。本文针对无人机的优化运用,探讨了有关无人机的几个问题。

针对第一个问题,要求在给定时间内对指定区域 3000 米以下的部分进行巡查。先通过 MATLAB 绘图功能实现问题的可视化,找到待搜索区域;由于飞机高度恒定为 4200m,需要躲避高于 4200m 的部分的障碍,并且要求路线尽可能短,以此为条件,使用避障 A 星算法,规划从出发点到待搜索区域的路径;再根据实际情况,在每个重点区域范围内规划相应路径。结合避障 A 星算法和搜索区域内部规划方法,得到无人机的数量和每架无人机的规划路程。一共派出 6 架无人机,覆盖率达到 84.38%,每架无人机路线都在图中有所体现。进一步地,要求每 3 小时对巡逻点至少进行两次巡逻,根据无人机飞行时间,分析出最多同时有三轮无人机飞行。根据平均扫描带宽计算出无人机的数量为 45 架,合理划分区域并设计路线。

对于问题二,共派出 30 架无人机,使用无人机携带生命探测仪搜索海拔 3000 米以下的生命迹象,探测仪的有效探测距离最大 1000 米。设计让无人机在较稳定高度范围内飞行,按照高度区间把待搜索范围进行分层,每层分别指派无人机进行搜索。对每层的待搜索区域,用骨骼提取算法提取出大致的路线计算出路线总长度,再将若干条断开的路线用最短的方式连起来,用规划模型确定最短时间,得到无人机完成生命探测工作的最短时间为 5.282 小时。文章还介绍了用 nurbs 曲线进行轨迹平滑的方法。

对于第三个问题,为解决灾区通信中断问题,为 72 个地面移动终端分别分配一架无人机以完成通信任务,以这 72 架无人机所在位置为圆心作出半径为 3km 的圆形,对于无人机中间不能通信的部分添加中继无人机。无人机在直径为 2 千米的圆形内移动时,能满足无人机和通信终端不超过 3 千米的要求,如果相邻无人机之间距离不大于 2km,两者可以共用一架无人机。最后求出无人机的数

量为 97 架。

针对问题四，对公式里的参数进行分析，得到距离、飞行速度和传输速率之间的关系。在给定速度和高度的情况下，算出每个移动终端的传输数据量，对传输数据量小于 500M 的移动终端，合理增加无人机与该终端的传输时间。用 K-means 算法对 72 个终端进行聚类分析，将终端分为 3 类。用遗传算法找到各无人机的最短路径，求出各自需要的时间，包括增加的时间，3 个时间的最大值为 6.46h，故总时间为 6.46h。

关键词：无人机 A 星避障算法 通信中继 遗传算法 最优路径

目 录

摘 要:	1
1 问题重述.....	5
1.1 问题背景.....	5
1.2 待解决的问题.....	5
2 模型假设及符号说明.....	6
2.1 模型假设.....	6
2.2 符号说明.....	7
3 问题一模型建立与求解.....	8
3.1 问题分析及模型建立.....	8
3.1.1 问题 1 (a) 分析.....	8
3.1.2 问题 1 (b) 分析.....	9
3.2 问题 1 (a)	10
3.2.1 问题的可视化.....	10
3.2.2 避障 A 星算法介绍及应用.....	13
3.2.3 待搜索区域内部路线规划.....	14
3.3 问题 1 (b)	18
4 问题二模型建立与求解.....	20
4.1 问题二描述及分析.....	20
4.2 模型建立与解算.....	21
4.2.1 问题的可视化.....	21
4.2.2 骨骼提取.....	23
4.2.3 NURBS 的无人机轨迹平滑	26
5 问题三模型建立与求解.....	30
5.1 问题三描述及分析.....	30
5.2 模型建立与解算.....	31
5.2.1 初步无人机位置安排.....	31
5.2.2 无人机数量添加情况.....	33
5.2.3 无人机数量减少情况.....	35
6 问题四模型建立与求解.....	37
6.1 问题四描述及分析.....	37
6.2 模型建立.....	38

6.2.1 问题的可视化.....	38
6.2.2 模型建立与求解.....	39
7 模型的优缺点.....	45
7.1 模型的优点.....	45
7.2 模型的缺点.....	45
8 参考文献.....	45

1 问题重述

1.1 问题背景

2017 年 8 月 8 日,四川阿坝州九寨沟县发生 7.0 级地震,造成了不可挽回的人员伤亡和重大的财产损失。由于预测地震比较困难,及时高效的灾后救援是减少地震损失的重要措施。无人机同直升机相比,体型小巧、飞行成本较低且起飞和飞行时受到的限制较少。而且直升机飞行的高度过高,不利于搜寻到较小的物体和人,无人机也对这一点有所改善。另外,直升机搜救所存在的最大问题,是在山区飞行时,需要飞行员具备十分高超的驾驶技术,稍有不慎就会造成重大损失,而无人机不需要飞行员冒着巨大危险驾驶。搜救的山区地形险恶,无人机作为一种新型运载工具,能有效避免搜救过程中搜救人员的二次伤害。

综上所述,无人机具备机动性强、灵活度高、成本低等优势,能够在救援行动中发挥重要作用。

给定的震区高程数据共有 2913 列, 2775 行, 第一行第一列表示(0,0)点处的海拔高度值(单位: 米), 相邻单元格之间的距离为 38.2 米, 即第 m 行第 n 列单元格中的数据代表坐标 $(38.2(m-1), 38.2(n-1))$ 处的高度值。震区 7 个重点区域的中心位置也相应给出。

无人机的机型参数如下: 平均飞行速度 60 千米/小时, 最大续航时间为 8 小时, 飞行时的转弯半径不小于 100 米, 最大爬升(俯冲)角度为 $\pm 15^\circ$, 与其它障碍物(含地面)的安全飞行距离不小于 50 米, 最大飞行高度为海拔 5000 米。所有无人机均按规划好的航路自主飞行, 无须人工控制, 完成任务后自动返回原基地。

1.2 待解决的问题

针对给出的震区, 本文依次解决以下无人机优化运用的几个问题。

问题 1 在 4 小时之内使区域 S 内海拔 3000 米以下的地方尽可能多地被巡查到, 求出最少需要多少架无人机, 以及此时的覆盖率, 并设计每架无人机的飞行路线, 画出相应的飞行路线图及巡查到的区域(不同的无人机的飞行路线图用不同的颜色表示)。

进一步, 为及时发现次生灾害, 使用无人机在附件 1 给出的高度低于 4000 米的区域(不限于 S)上空巡逻。求出最少需要多少架无人机、如何设定每架无人机的飞行时间、路线, 以保证在 72 小时内, 上述被巡查到的地方相邻两次被巡查的时间间隔不大于 3 小时(无人机均需从 H 出发并在 8 小时内回到 H , 再出

发的时间间隔不小于 1 小时)。

问题 2 使用无人机携带生命探测仪搜索生命迹象，能够给灾后救援提供准确的目标定位。规划出无人机的飞行路线，使附件 1 所给出的全区域内海拔 3000 米以下部分能被探测到的面积尽可能大，且使从第一架无人机飞出到最后一架完成任务的无人机回到基地的时间间隔尽量短。

问题 3 大地震发生后，地面电力设施被破坏，灾区通信中断。求出最少需要多少架无人机、每架无人机的飞行路线如何，以保证在白天 12 小时内，附件 2 中的任意两个地面终端之间都能实现不间断通信(作为中继的无人机之间的切换时间忽略不计，地面终端的移动距离不超过 2 千米)。

问题 4 指挥中心拟从 H 派出 3 架无人机携带通信装备向灾区内的 72 个地面终端(分布见附件 2)发送内容不同，总量均为 500M(1M 按 10^6 比特计算)的数据。设每台通信装备的总功率是 5 瓦，可同时向不超过 10 个地面终端发送数据。为无人机设计恰当的航线、速度以及所服务的用户，并为每一个用户分配恰当的功率，使得无人机完成所有任务的时间总和尽量短。

2 模型假设及符号说明

2.1 模型假设

针对问题 1，提出的假设有：

假设 1 将扫到的区域的表面积的计算方法简化，先求出待搜索区域的平均海拔高度，根据无人机飞行高度确定平均带宽。

假设 2 简化覆盖率的计算方法，用实际扫描区域的水平投影面积比待搜索区域水平投影总面积来计算覆盖率。

假设 3 无人机的飞行高度恒为 4200 米，为方便建模，假设 H 点的海拔高度也是 4200 米。在现实情况下，如果 H 点的海拔高度不是 4200 米，在到达待搜索范围前以不大于 $\pm 15^\circ$ 的爬升(俯冲)角度调整高度即可，对模型影响不大。

假设 4 无人机飞行时的转弯半径不小于 100 米，则无人机可以以大于 100 米的转弯半径转弯。在本题中飞机一般以平均带宽的一半作为转弯半径，该长度远大于 100 米，符合要求。

针对问题 2，提出的假设有：

假设 5 待探测区域地形比较复杂，认为无人机飞行高度相对较难改变。为了尽量少地改变无人机的飞行高度，设计让无人机在较稳定高度范围内飞行。

假设 6 将题目中的复杂地形情况简化为在水平面上的探测工作，以计算大致的探测带宽。

针对问题 3，提出的假设有：

假设 7 无人机不能悬停，但是可以在空中盘旋，只要满足转弯半径不小于 100 米的要求即可。

假设 8 无人机和移动终端几乎在同一海拔高度上，在实际情况下，为满足无人机与其它障碍物(含地面)的安全飞行距离不小于 50 米，可安排无人机的海拔高度高于移动终端 50m，这个高度相对较小，在计算时认为实际距离和水平投影距离大致相等。

针对问题 4，提出的假设有：

假设 9 无人机可服务多个移动终端，根据 72 个终端的位置信息，有时候无人机仅能服务一个信号终端，有时候能服务多个。为简化模型，设定无人机最多服务于两个信号终端。

假设 10 假定无人机行驶到第一个终端以及从最后一个终端返回 H 点时的速度是 100km/h，以节省总时间，而在服务信号终端的时候飞行速度是 60km/h，以取得较多的时间传输数据。

假设 11 无人机到达信号终端所在点再飞走，至少可以在一个服务直径内传输数据，若无人机在一个带宽范围内数据未传完，再加上一个服务半径的时间，加上后满足所有信号终端的情况。

2.2 符号说明

符号	意义
S	7 个重点区域中心方圆 10 公里的范围的集合
$A-G$	7 个重点区域的代号

H	无人机基地
n	第 n 个节点（方格）
$g(n)$	从起始点到节点 n 所经过的实际路程
$h(n)$	节点 n 到终点所花费的估算路程
$f(n)$	无人机经过的总路程
i	第 i 个地面终端
t	接收到无人机信息的时刻
$r_i(t)$	无人机 t 时刻发送的信息速率
B_i	无人机服务 i 的子信道带宽
$p_i(t)$	无人机为第 i 个地面用户所在的子信道分配的功率
$d(u,i)$	t 时刻无人机与 i 之间的欧氏距离
ρ_0	信道特性参数，取为 4.314×10^{-10}

3 问题一模型建立与求解

3.1 问题分析及模型建立

3.1.1 问题 1（a）分析

大地震发生后，及时了解灾区情况是制订救援方案的重要前提。为此，使用无人机携带视频采集装置巡查 7 个重点区域中心方圆 10 公里(并集记为 S)以内的灾情。假设无人机飞行高度恒为 4200 米，将在地面某点看无人机的仰角大于 60° 且视线不被山体阻隔视为该点被巡查。若所有无人机均从基地 $H(110,0)$ (单位：千米)处派出，且完成任务后再回到 H ，在 4 小时之内使区域 S 内海拔 3000 米以下的地方尽可能多地被巡查到。求出最少需要多少架无人机，以及此时覆盖率是多少，并设计每架无人机的飞行路线，画出相应的飞行路线图及巡查到的区域（不同的无人机的飞行路线图用不同的颜色表示）。

将问题 1（a）给出的条件进行梳理，主要有以下几点：

- 待搜索范围 S ：以 7 个重点区域中心方圆 10 公里的范围的集合，应理解为以七个中心点为圆心作出的半径为 10 公里的圆的范围，7 个重点区域的代号分别为 $A-G$ 。
- 搜索高度：待搜索范围 S 中海拔低于 3000m 的部分。
- 无人机飞行高度恒为 4200 米，则对于高度大于 4200 米的区域范围，无人机

不能通过，只能绕行，因此需要考虑飞行过程中躲避障碍物的问题。

- 所有无人机均从基地 $H(110,0)$ (单位: 千米) 处派出, 且完成任务后再回到 H , 整个过程的时间限定为 4 小时, 包括无人机的来回时间和搜索时间。
- 对于地面上的某点, 如果看无人机的仰角大于 60° 且视线不被山体阻隔时认为该点被巡查。此条件暗含无人机搜索范围不可能有所偏斜。从无人机的角度来看, 其巡视范围类似于点光源照射的情况, 无人机最大俯视视线的边缘与铅垂线的最大角度是 30° , 如下图所示。

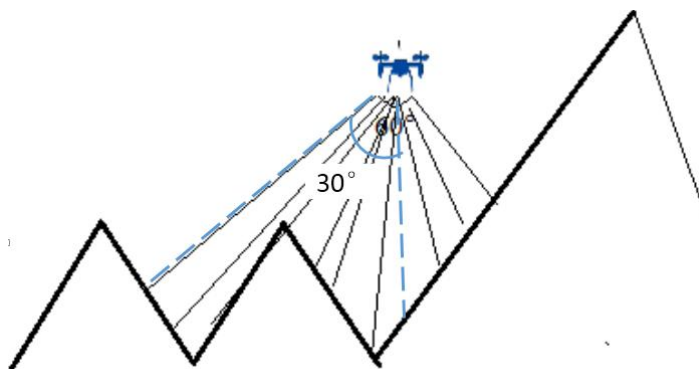


图 1 无人机巡视范围示意图

3.1.2 问题 1 (b) 分析

进一步, 为及时发现次生灾害, 使用无人机在附件 1 给出的高度低于 4000 米的区域 (不限于 S) 上空巡逻。求出最少需要多少架无人机、如何设定每架无人机的飞行时间、路线, 以保证在 72 小时内, 上述被巡查到的地方相邻两次被巡查的时间间隔不大于 3 小时 (无人机均需从 H 出发并在 8 小时内回到 H , 再出发的时间间隔不小于 1 小时)。

将问题 1 (b) 给出的条件进行梳理, 主要有以下几点:

- 本问中没有限制待搜索范围, 只限定了高度, 需要搜索整个范围内高度低于 4000 米的区域。
- 无人机均需从 H 出发并在 8 小时内回到 H , 这 8 小时包括无人机的来回时间和搜索时间。
- 每架无人机可以再出发, 再出发的时间间隔不小于 1 小时。
- 时间限定为 72 小时, 能巡逻到的地方至少每 3 小时巡逻一次。
- 无人机飞行高度恒为 4200 米, 则对于高度大于 4200 米的区域范围, 无人机不能通过, 只能绕行, 因此仍需要考虑飞行过程中躲避障碍物的问题。

3.2 问题 1 (a)

3.2.1 问题的可视化

要求得到最少数量的无人机，并且使得覆盖率尽可能高，给出无人机的飞行路线。解决本问题的步骤是：先通过 MATLAB 绘图功能实现问题的可视化，找到待搜索区域；由于飞机高度恒定为 4200m，需要躲避高于 4200m 的部分的障碍，以此为条件规划从出发点到待搜索区域的路径；再在每个重点区域范围内规划相应路径。

将题目附件 1 给出的所有点在 MATLAB 中绘制出来，从不同角度看到的地形情况如图 2 所示：

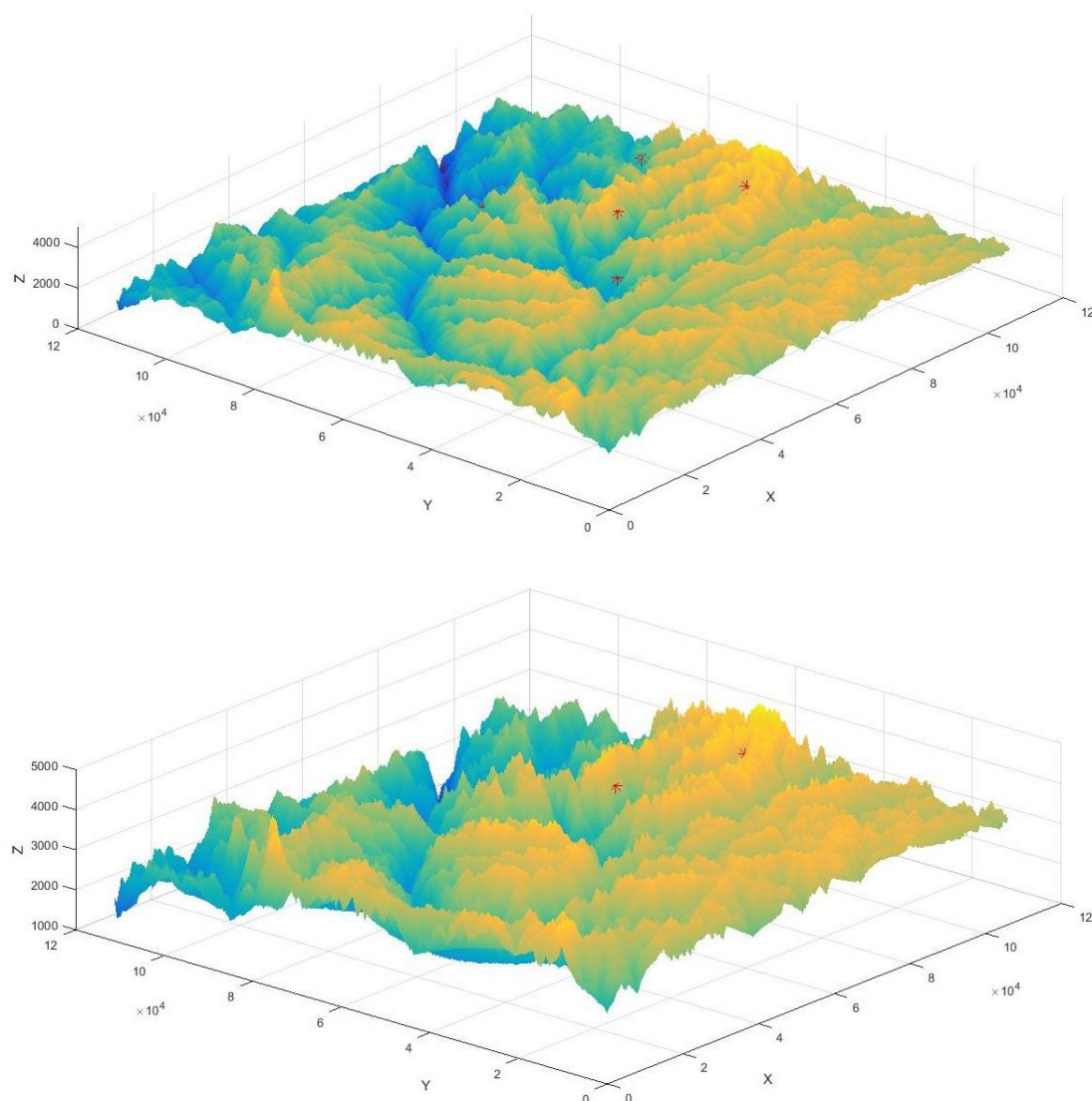
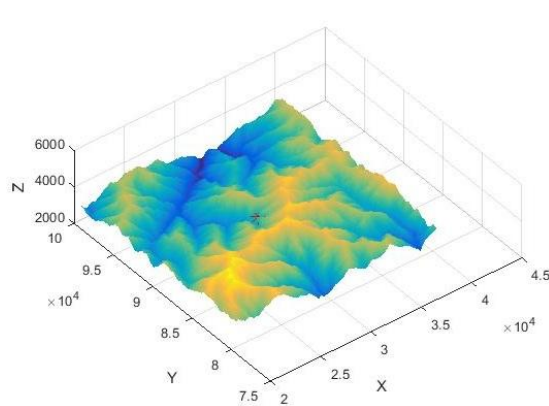


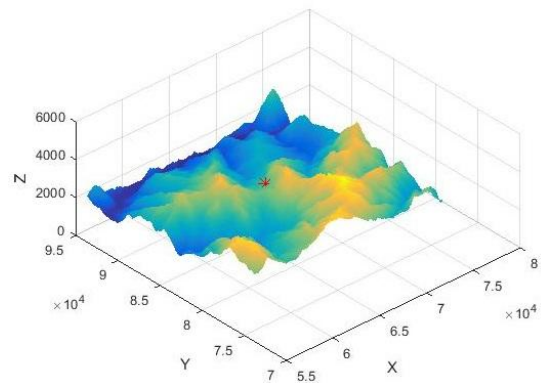
图 2 不同角度地形概况

黄色表示地势较高的区域，蓝色表示地势较低的区域，从上图可以看出，整

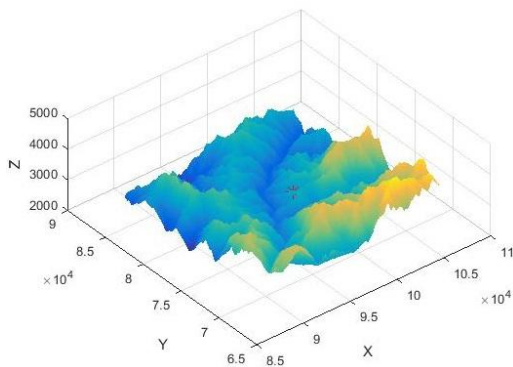
体的地形情况比较复杂。在整个区域范围中，第一问给出了七个重点区域，在上图中也用红色标志注明，以这些重点区域为中心，所在半径是 10 公里的圆的范围是待搜索区域。在 MATLAB 中表示出七个圆的外接正方形所包含的区域地形的三维图形，从而直观地展现出待搜索区域的地形地貌，如下图所示。



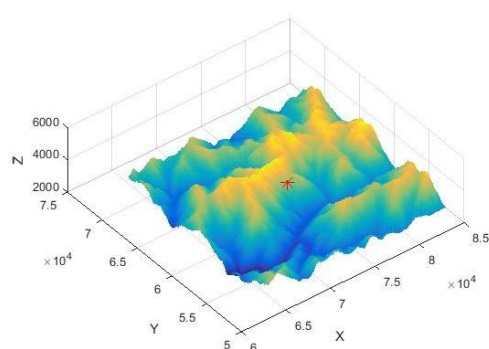
A 为中心的正方形区域地形图



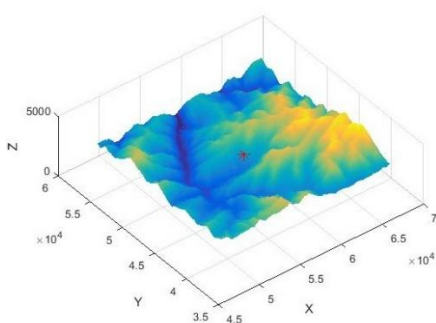
B 为中心的正方形区域地形图



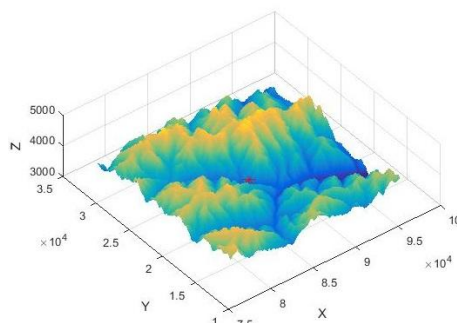
C 为中心的正方形区域地形图



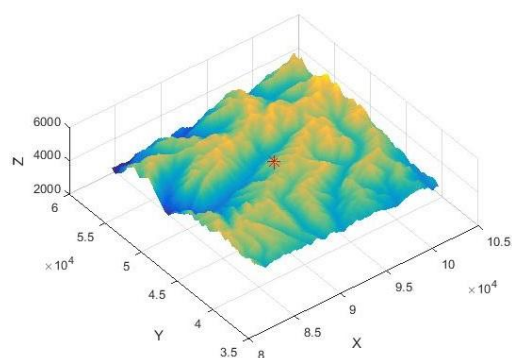
D 为中心的正方形区域地形图



E 为中心的正方形区域地形图



F 为中心的正方形区域地形图



G 为中心的正方形区域地形图

图 3 各区域地形图

从上图可以看出，每个重点区域的地形情况都比较复杂，起伏落差比较大，用 MATLAB 找出七个圆所在范围内海拔低于 3000m 的区域。由于无人机的飞行高度恒为 4200 米，在图中绘制出高度大于 4200 米的区域范围，表示这些区域是无人机不能飞行的，只能绕行。同时，在图中表示出各个重点搜索区域的位置关系。无人机的飞行高度恒为 4200 米，故飞行无需考虑三维情况，且此时用二维图形的展现效果更为理想，所以作出二维俯视图，如下图所示。

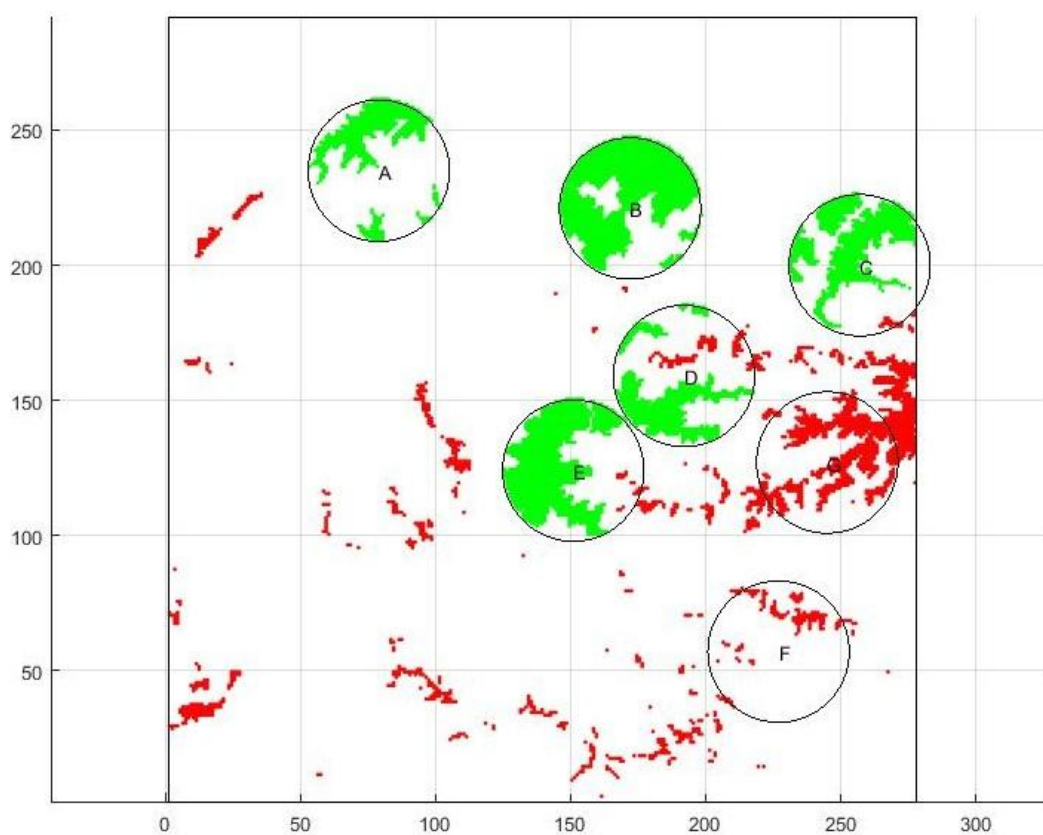


图 4 待搜索范围和障碍区域

在上图中，圆圈内的绿色部分表示待搜索区域，红色部分区域表示障碍物，

即海拔高于 4200m 的部分。可以看出，F 和 G 中心区域几乎没有海拔 3000 米以下的部分，根据题目要求，无需对 F 和 G 进行搜索。由于 A 区域距离较远，经计算，至多只能指派一架无人机去搜索 A 区域中离 H 较近的部分。还可以看出，虽然飞行过程中两个区域之间直线最短，但是由于障碍物的存在，很可能不能直线飞行，考虑到避障问题，使用避障 A 星算法，规划出避障的合理路线。

3.2.2 避障 A 星算法介绍及应用

根据题目中的要求，需要进行无人机的路径规划，还要考虑避障问题，即避开途中海拔高度高于 4200 米的地方。避障 A 星算法是一种常用的路径规划算法，该算法是基于全局视觉地图下进行的路径规划。

A 星算法是通过估算函数来实现的，无人机每走一步都需要计算估算函数的值，该估算函数值最小的节点就是无人机下一步需要到达的位置，估算函数的一般表达式如下：

$$f(n) = g(n) + h(n) \quad (1)$$

在该公式中， $g(n)$ 是指无人机从路径的起始点到路径规划中节点 n 所经过的实际路程，这是因为无人机已经从起

始点运动到节点 n ，可以计算实际走过的路径长度，函数 $g(n)$ 的值为实际数值； $h(n)$ 是从节点 n 到路径规划的终点所花费的估算路程。在整个路径规划中函数 $h(n)$ 的值可能不是最优，我们称函数 $h(n)$ 为估算函数。函数 $f(n)$ 是函数 $g(n)$ 的值与函数 $h(n)$ 的代数和，表示无人机在整个路径规划中所经过的总路程。

避障 A 星算法的运算流程如下：

第一步：初始化，生成 OPEN 和 CLOSED 列表。

第二步：加载初始值，把起始点的信息载入在第一步生成的 OPEN 列表中，在生成的 OPEN 列表中只包含起始节点，并记做 $f=h$ 。

第三步：查找 OPEN 列表，若查找后得到 OPEN 列表中没有数值，则路径规划失败退出，转向执行第二步续寻找路径规划的起始节点；若 OPEN 列表内已经加载路径规划的目标节点，则执行第四步。

第四步：查找函数 $f(n)$ 的值，利用估算函数计算 OPEN 列表中的数值，查找列表中所有节点 $f(n)$ 值的最小的点记为最佳节点 BESTNODE，将把这个节点载入 CLOSED 列表中，并把这个节点作为当前节点，进行下一步运算。

第五步：判断目标点，根据估算函数判断最佳节点是否为路径的目标点。如果是，那么算法结束，并输出规划出的路径节点；如果不是路径中规定的目

标点，就把当前节点的临近节点载入 OPEN 列表中，进行第三步。依次循环，直至找到规定的目标节点。

第六步：输出路径，保存最佳节点，并将其保存在 CLOSED 列表中，根据 CLOSED 列表中的节点输出规划路径。

使用避障 A 星算法，规划出每架无人机的路线，下图给出第一架和第六架的路线。

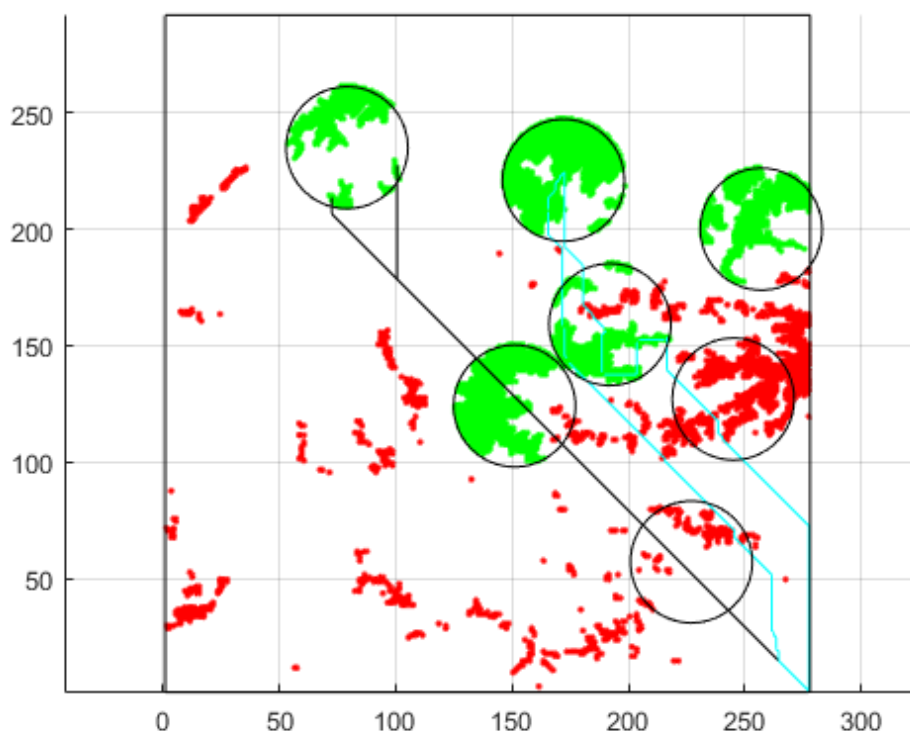


图 5 避障 A 星算法规划第一架和第六架无人机路线图

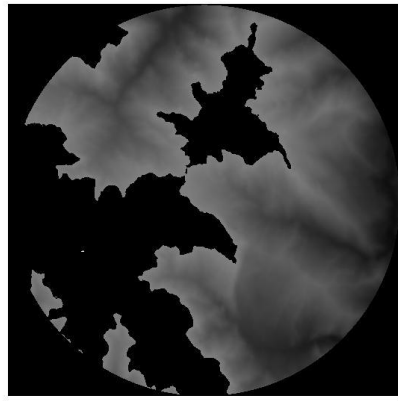
从图上可以看出，在本问题中使用避障 A 星算法具有较好的避障效果，飞行路程也比较合理。

3.2.3 待搜索区域内部路线规划

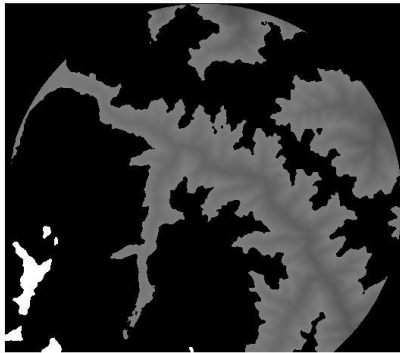
本问题中，每个重点区域的地形情况都比较复杂，用 MATLAB 分别绘制出七个圆所在范围内海拔低于 3000m 的点的集合。同时，由于无人机的飞行高度恒为 4200 米，故也在图中绘制出高度大于 4200 米的区域范围，表示这些区域是无人机不能飞行的，只能绕行。图中灰色表示待搜索区域，灰色越深表示海拔越低，白色表示障碍区域，也就是海拔高于 4200 米的区域，得到的每个区域的效果图如下图所示。



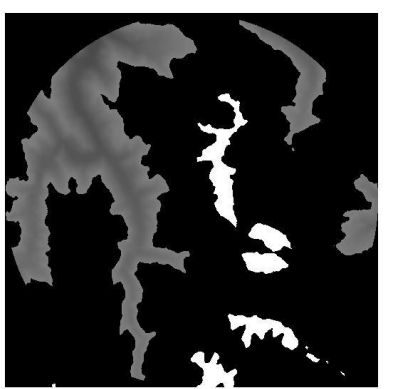
A 为中心的待搜索区域与障碍图



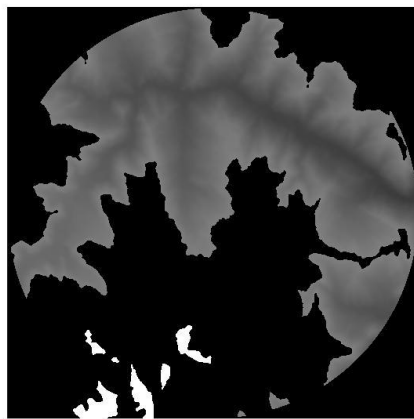
B 为中心的待搜索区域与障碍图



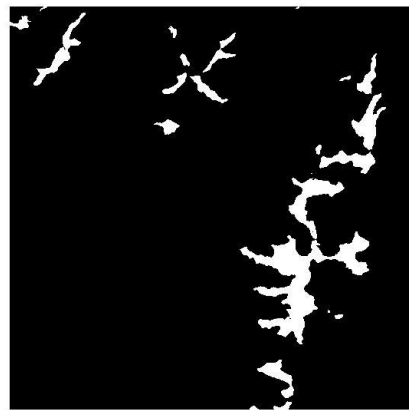
C 为中心的待搜索区域与障碍图



D 为中心的待搜索区域与障碍图



E 为中心的待搜索区域与障碍图



F 为中心的待搜索区域与障碍图



G 为中心的待搜索区域与障碍图

图 6 以 A-G 各点为中心的各待搜索区域与障碍图

通过观察待搜索区域内部可以看出，海拔在 3000 米以下的部分往往集中分布在圆的一侧，如果沿着各同心圆的扇形边缘来搜索的话，既没有障碍物，路线也比较清晰明了，因此选择在待搜索区域内部沿着同心圆的扇形边缘搜索，能取得比较好的效果。

在此还需要对搜索带宽进行算法的简化，先计算出待搜索区域的平均海拔，再利用高度差算出平均带宽，规划出内部路径。平均带宽计算示意图如下：

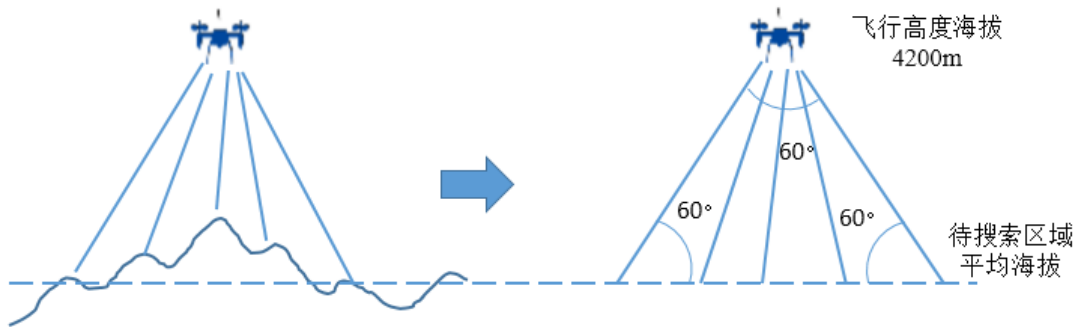


图 7 平均带宽计算示意图

平均海拔 h_a 与平均带宽 w_a 计算公式：

$$h_a = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{n} \quad (2)$$

$$w_a = 2(h - h_a) \tan \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

其中， h_a 表示待搜索区域平均海拔， h_i 表示第 i 个点的高度， n 表示点的总

数量。 w_a 表示平均宽度， h 表示无人机飞行高度，为4200m， θ 表示无人机搜索范围角度，为 60° 。经计算， $h_a=2001.06\text{m}$ ， $w_a=2539.2\text{m}$ ，取2540m。

结合避障 A 星算法和搜索区域内部规划方法，使用 MATLAB 进行编程，得到规划的路程如下图所示。

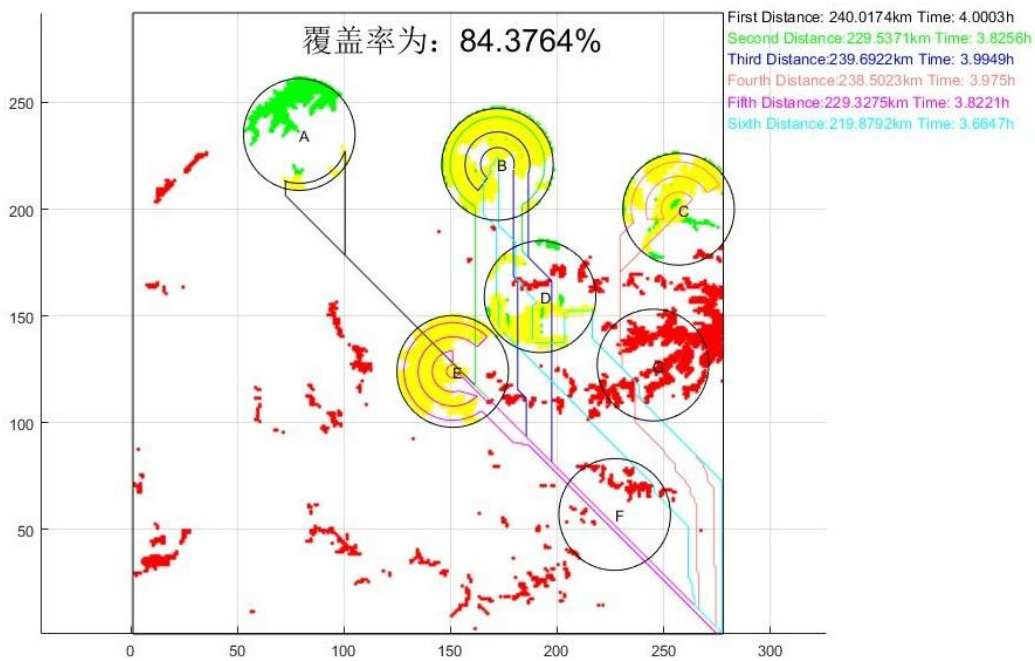


图 8 无人机飞行路程规划

在上图中，圆圈内的绿色部分表示待搜索区域，红色部分表示障碍物。前文中已经分析，无需对 F 和 G 进行搜索。由于 A 区域距离较远，飞行时间又有 4 小时的时间限制，经计算，至多只能指派一架无人机去搜索 A 区域中离 H 较近的部分，出于人道主义，决定指派一架飞机去 A 区域搜索距离 H 点较近的部分。图中使用了各种颜色的线条表示各架无人机的飞行路线，部分路线有所重合和遮挡，但出发点和返回点均为 H（H 位于图中的右下角），以此为依据能较为清晰地看出各无人机的飞行路线。

使用 MATLAB 计算出每架无人机的飞行路程以及飞行时间(速度为 60km/h)，上图右上角对应不同颜色分别表示出了无人机的路程和时间，整理在下表中。

表 1 无人机路线规划表

无人机编号	颜色	路程 (km)	时间 (h)	搜索区域
1	黑	240.02	4.00	A
2	绿	229.54	3.83	B、D
3	深蓝	239.69	3.99	B、D
4	粉红	238.50	3.98	C

5	玫红	229.33	3.82	E
6	天蓝	219.60	3.66	B、D

结合图和表，可以看出，1号无人机搜索A区域中距离H较近的部分，由于4小时的时间限制，A区域只能扫描到一小部分。B区域的待搜索面积较大，派出了2、3、6号无人机进行搜索，无人机往返于B和H之间时，路过D区域并且扫过了D区域的大部分面积，对于D区域剩余小部分面积，经计算再另外指派飞机不合算。4号飞机扫描C区域，5号飞机扫描E区域。每架无人机的飞行路程符合要求，飞行时间不超过4小时。

综上，一共派出6架无人机，覆盖率达到84.38%，每架无人机路线如图所示。

3.3 问题1 (b)

通过对条件的梳理，本题的思路是先派出第一轮无人机，将待搜索区域遍历搜索第一遍。当第一轮无人机恰好派出3小时的时候，派出第二轮无人机，跟随第一轮无人机的路线。第一轮无人机派出6小时，派出第三轮无人机，也按照相同的路线飞行。第一轮无人机派出9小时，第一轮无人机已完成至多8小时的飞行任务并且多出1个小时的时间，可以再次起飞。不同时点的无人机飞行情况如下表所示。

表2 不同时点的无人机飞行情况

是否飞行	第一轮	第二轮	第三轮
0小时	是	否	否
3小时	是	是	否
6小时	是	是	是
8小时	否	是	是
9小时	是	是	是
11小时	是	否	是
.....

通过分析和上表可以看出，最多同时有三轮无人机飞行，因此只要求出遍历搜索需要多少架无人机，该数量的3倍就是无人机的总数量。

通过计算平均扫描带宽和无人机的飞行路程，在8小时的限定时间内对整个区域进行合理规划。平均带宽 h_{al} 的计算方法和之前类似，每架飞机的扫描面积以及飞机架数计算如下：

$$S_i = h_{a1}(t_{\text{总}} - t_{i1} - t_{i2}) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n S_i \geq S_{\text{总}} \quad (5)$$

式中 S_i 表示第 i 个区域的面积， h_{a1} 表示平均带宽， $t_{\text{总}}$ 为 8 小时， t_{i1} 和 t_{i2} 分别表示第 i 架无人机的往返时间， $S_{\text{总}}$ 表示待搜索区域的总面积，计算出 $n=15$ 。

绘图的时候用红色表示海拔 4200 米以上的部分，即障碍范围，蓝色表示海拔 4000 米至 4200 米的部分，白色部分就是 4000 米以下的部分，也就是待搜索范围。用黄色实线分割区域，斜条纹阴影表示区域范围，其他颜色实线表示无人机飞行轨迹。绘制出来的图形如下图所示。

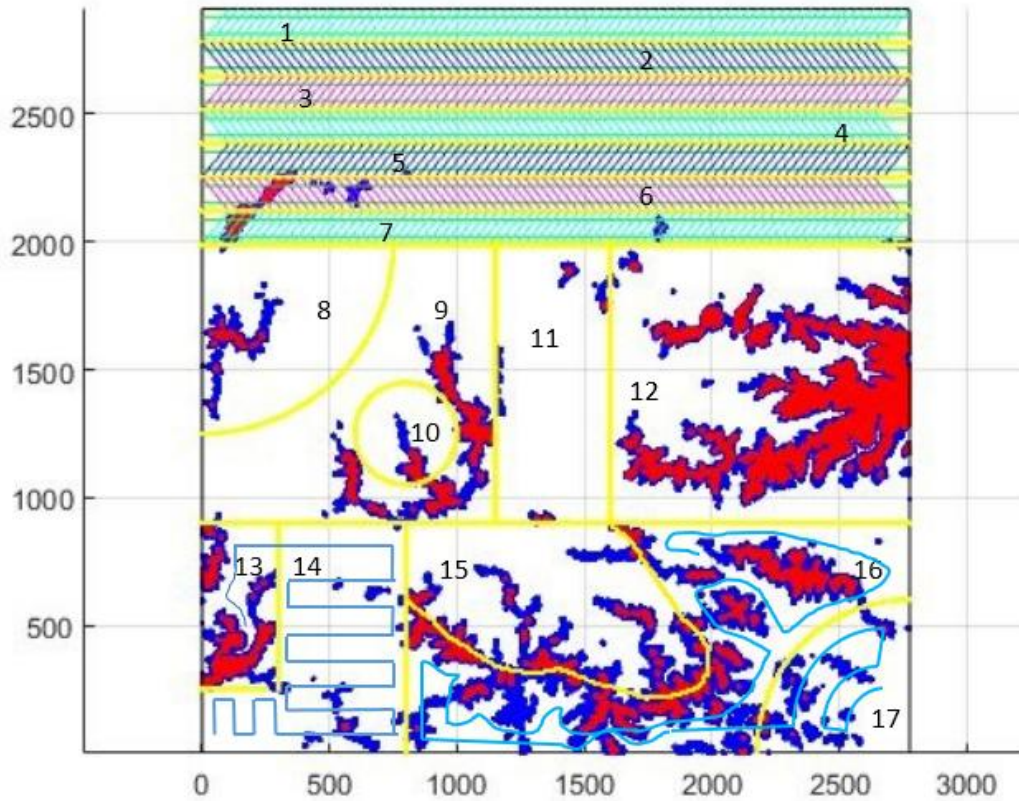


图 9 区域划分及部分路线图

可以看出，图中的 1-7 号区域障碍物较少，划分出的区域都是规则的矩形，区域内部的实线表示无人机的飞行轨迹。而 8-17 号区域由于障碍物较多，如果划分成规则的形状不太合理，很可能出现区域内部被障碍物分隔开的情况，因此有的地方按照障碍物的大致路线来划分，可以减少无人机在障碍物之间来回穿行的情况，如 15 号区域与 16 号区域的划分。

对不规则图形的路径规划，如果全部在图上画出会对图形造成遮挡，因此选取部分区域表示出飞行路径。上图中一共有 17 个区域，其中 13 和 14 号区域共

用一架无人机，16 和 17 号区域也共用一架无人机，它们之间的边界黄色实线是为了区别出形状和飞行路线，内部的蓝色实线是飞行路线示意图（不代表实际的飞行路线，实际飞行路线更平滑，这里只是示意图），其余区域独自使用一架无人机，故搜索第一遍共需 15 架无人机。根据之前的分析，要使得每个点每 3 小时巡逻到一次，共需要 45 架无人机。对各架无人机进行编号，编号分别为 j ，1-15 号分别巡逻 j 号区域，16-30 号无人机分别巡逻 $j-15$ 号区域，31-45 号无人机分别巡逻 $j-30$ 号区域。不同编号的无人机每次飞行的时间如下表所示。

表 3 各编号无人机飞行时间

无人机编号	1-15		16-30		31-45	
飞行次数	出发时间	返回时间	出发时间	返回时间	出发时间	返回时间
1	0	8	3	11	6	14
2	9	17	12	20	15	23
3	18	26	21	29	24	32
4	27	35	30	38	33	41
5	36	44	39	47	42	50
6	45	53	48	56	51	59
7	54	62	57	65	60	68
8	63	71	66	/	69	/

从上表可以看出，16-45 号飞机第八次飞行的返回时间超出限定的 72 小时，故在表中不显示。

4 问题二模型建立与求解

4.1 问题二描述及分析

使用无人机携带生命探测仪搜索生命迹象，能够给灾后救援提供准确的目标定位。拟从基地 $H(110,0)$ ， $J(110,55)$ (单位：千米)处总共派出 30 架无人机(各 15 架)，任务完成后回到各自的出发地。探测仪的有效探测距离不超过 1000 米，且最大侧视角(探测仪到可探测处的连线与铅垂线之间的夹角)为 60 度。规划出无人机的飞行路线，使附件 1 所给出的全区域内海拔 3000 米以下部分能被探测到的面积尽可能大，且使从第一架无人机飞出到最后一架完成任务的无人机回到基地的时间间隔尽量短。

对题目中的条件进行梳理，有以下几点：

- 无人机分别从两个基地 $H(110,0)$ ， $J(110,55)$ 飞出，且任务完成后回到各自的

出发地。

- 无人机数量确定，两地各 15 架，共 30 架。
- 探测仪的有效探测距离不超过 1000 米，且最大侧视角(探测仪到可探测处的连线与铅垂线之间的夹角)为 60 度。
- 探测海拔 3000 米以下的部分。

4.2 模型建立与解算

4.2.1 问题的可视化

将海拔 3000 米以下的部分在 MATLAB 中绘制出来，蓝色表示海拔较低的区域，黄色表示海拔较高的区域，画出的结果如图所示。

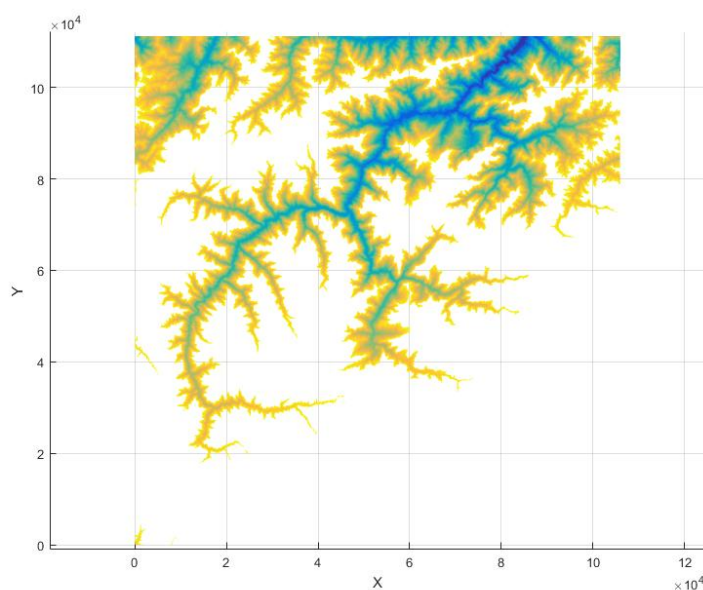


图 10 3000 米以下范围示意图

题目要求探测全区域内海拔 3000 米以下部分，即上图的全部区域。可以看出，待探测区域形状很不规则。对无人机来说，最大爬升(俯冲)角度为 $\pm 15^\circ$ ，且与其它障碍物(含地面)的安全飞行距离不小于 50 米，而待探测区域地形比较复杂，因此无人机飞行高度相对来说是较难改变的。为了尽量少地改变无人机的飞行高度，设计让无人机在较稳定高度范围内飞行。

先计算无人机飞行的稳定高度，将题目中的情况简化为在水平面上的探测工作，如下图所示。

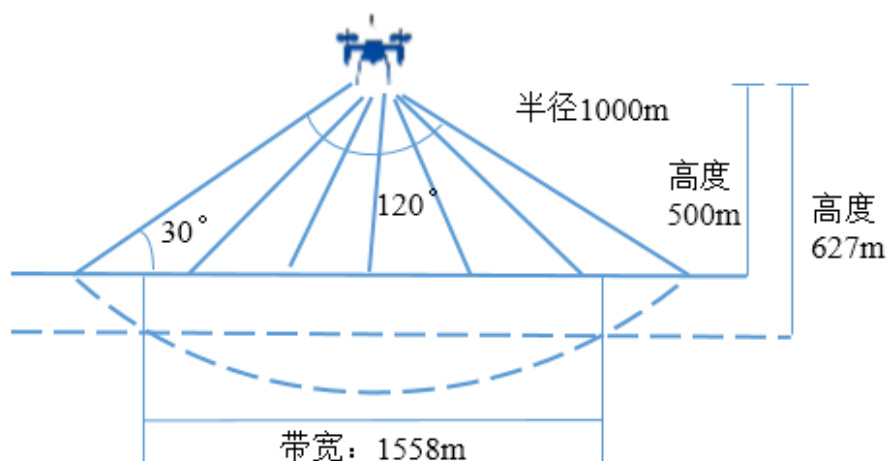


图 11 探测半径 1000 米对应探测高度示意图

如上图所示，无人机探测仪的有效探测距离最大为 1000 米，在探测最大视角为 60° 的情况下，对应的高度是 500 米，此时对应的视觉范围约是 1732.05 米。根据前文分析，应让无人机在较稳定高度范围内飞行，如果将待搜索高度范围分成几个层次，就能使得无人机在稳定高度搜索。经过测算，按照高度范围划分为三等分的分层效果比较好，最低海拔为 1118m，最高海拔为 3000m，差值为 1882m，每层的高度范围为 627m，此时水平投影面上的带宽为 1558m。划分结果如下图所示。

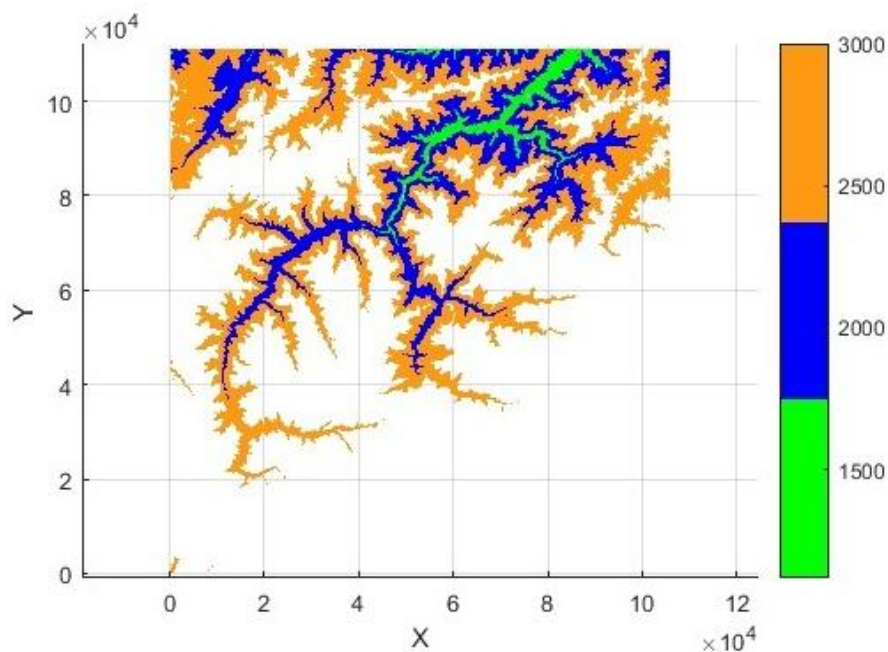


图 12 高度区间划分示意图

如上图所示，绿色区域的海拔范围是 1118 米到 1745 米，蓝色的区域的海拔范围是 1745 米到 2372 米，橙色的区域的海拔范围是 2372 米到 3000 米。

4.2.2 骨骼提取

将上述三个范围分别绘制出来，再分别对它们进行骨骼提取，从而找到无人机的行驶路线。

本文提取骨架算法的步骤如下：

(1) 计算每个像素的最大邻域值，但它不只是计算目标区域中最大正方形边长的像素个数，而是计算该像素的邻域内所包括的最多像素值的个数，并用该值代替像素值。例如在目标区域内，所求像素 P 的第一层邻域内只有 6 个像素是目标，即只有 6 个像素值为 1，则 P 就为 6；当像素 P 的第一层邻域内的所有 8 个像素的值都为 1，即它的第一层邻域全部是目标区域时，则计算第二层邻域。如果像素 P 的第二层邻域的 24 个像素不都在目标区域内时，则用该邻域内的所有像素值为 1 的个数来代替像素 P ；如果 24 个像素都在目标区域内，则继续搜索下一层邻域，直到它的邻域内的像素有不是目标区域为止。

(2) 从中轴变换图中找到相应的骨架点。在 4 邻域内，当最多只有一个像素值大于中心像素值时，该像素就被认为是骨架点。

在使用上述提取骨架的过程中，将不连续的折线分别设定为不同的颜色，并且对它们进行编号和长度计算，运行结果如下图所示。

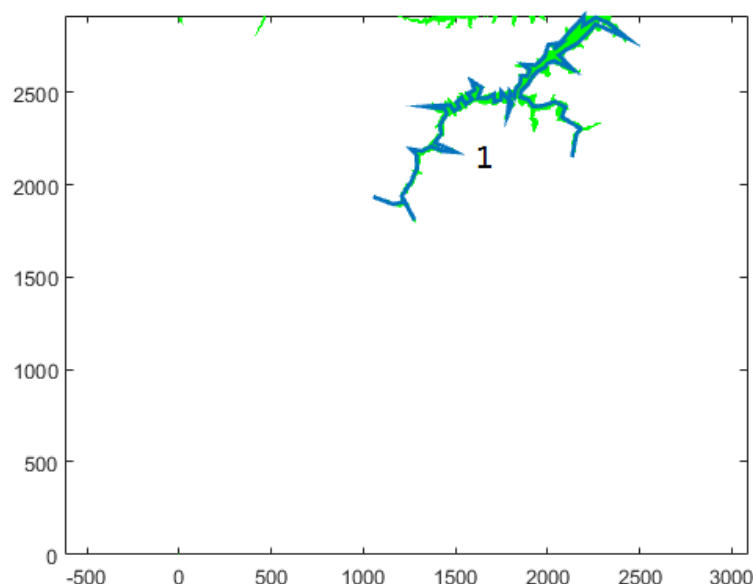


图 13 海拔 1118 米到 1745 米的区域骨骼提取示意图

从上图可以看出，海拔 1745 米以下的区域较小，而且提取的线条是一条连续的折线，情况较为简单。

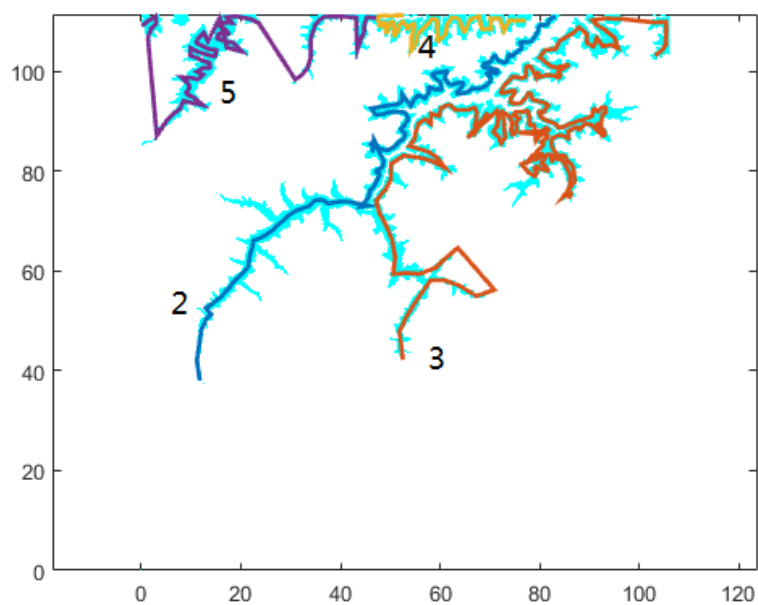


图 14 海拔 1475 米到 2372 米的区域骨骼提取示意图

从上图看出，海拔 1475 米到 2372 米的区域提取的线条较为复杂，有 4 条连续折线组成。

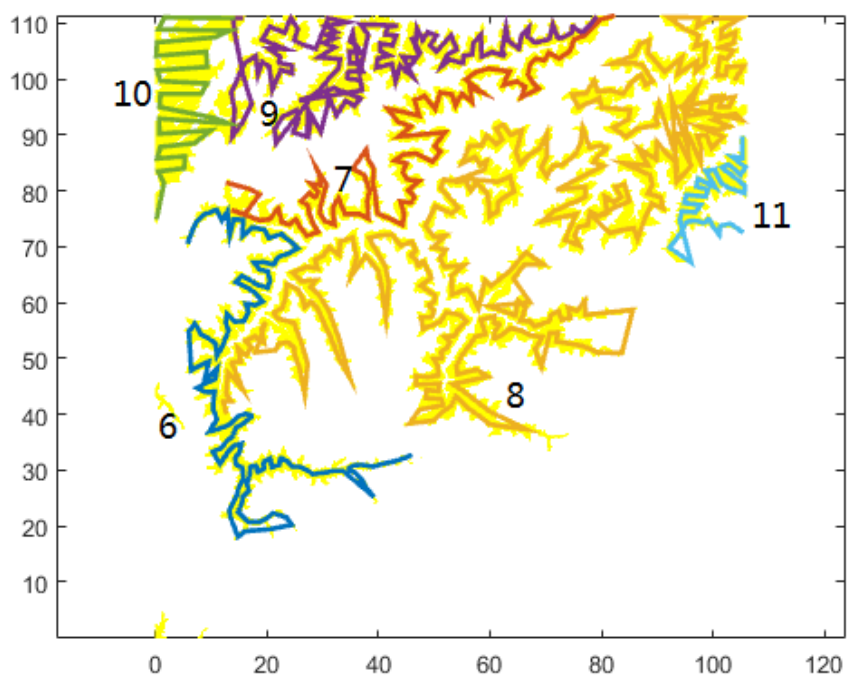


图 15 海拔 2372 米到 3000 米的区域骨骼提取示意图

从上图看出，海拔 2372 米到 3000 米的区域提取的结果更为复杂，有 6 条连续折线组成。在下表中给出这 11 条线的长度计算结果，从而计算出线条总长度，

用作飞机指派的基础数据。

表 4 提取出的各线段长度

编号	长度 (KM)
1	202.22
2	179.85
3	413.95
4	75.64
5	167.01
6	250.46
7	237.93
8	1029.80
9	382.50
10	155.77
11	87.38

搜救路线序列如下所示：

1 2 3 4 16 15 22 21 5 6 18 17 11 12 19 20 9 10 7 8 13 14

通过遗传算法得到搜救路线连接之后，将所有的 11 条搜索路径连接成为一个完整的搜救序列 Seq ，现需要将该序列分割成 30 份，每份的路径对应一架飞机，加上出发点到该路径的起始点的距离，得到该架无人机所需要完成的工作量。

设分割点为：

$$X = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, 29 \quad (6)$$

起始点为 S 点和 E 点对应 x_0, x_{30} 。那么每一段轨迹对应的路程为：

$$distance_i = \begin{cases} d(x_i, H) + d(x_{i+1}, H) + path(x_i, x_{i+1}), & flag_i = 1 \\ d(x_i, G) + d(x_{i+1}, G) + path(x_i, x_{i+1}), & flag_i = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $d(x_i, H)$ 表示第 i 个分割点到 H 点的距离，同理 $d(x_i, G)$ 第 i 个分割点到 G 点的距离， xi 表示轨迹序列的索引值。设置 $flag$ 来表示该段轨迹由 G，或者 H 出发点发出的无人机搜寻。目标函数为：

$$\begin{aligned} & \min(\max(distance_i)), i = 1, 2, \dots, 30 \\ & st \begin{cases} \sum flag_i = 15 \\ 0 < xi < xi + 1 < size(Seq) \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

用来表示使得指派到所有无人机的任务中距离最长的任务最小化，即分配尽可能平均的任务，才能使得总时间最短，因为任务总量一定，任务分配的平均那么最大的那个值就最小。

约束条件为 H 点和 G 点所派出的飞机总数都是 15 架，另外索引值是递增的且在序列的长度范围之内。

模型的求解采用遗传算法求解，类似与后面将要重点介绍的求解方法，只是在可行解的编码上稍有不同，可行解的编码可以采用前 30 位为索引值，后 30 位为 bool 值。得到的最长搜救轨迹如图所示：

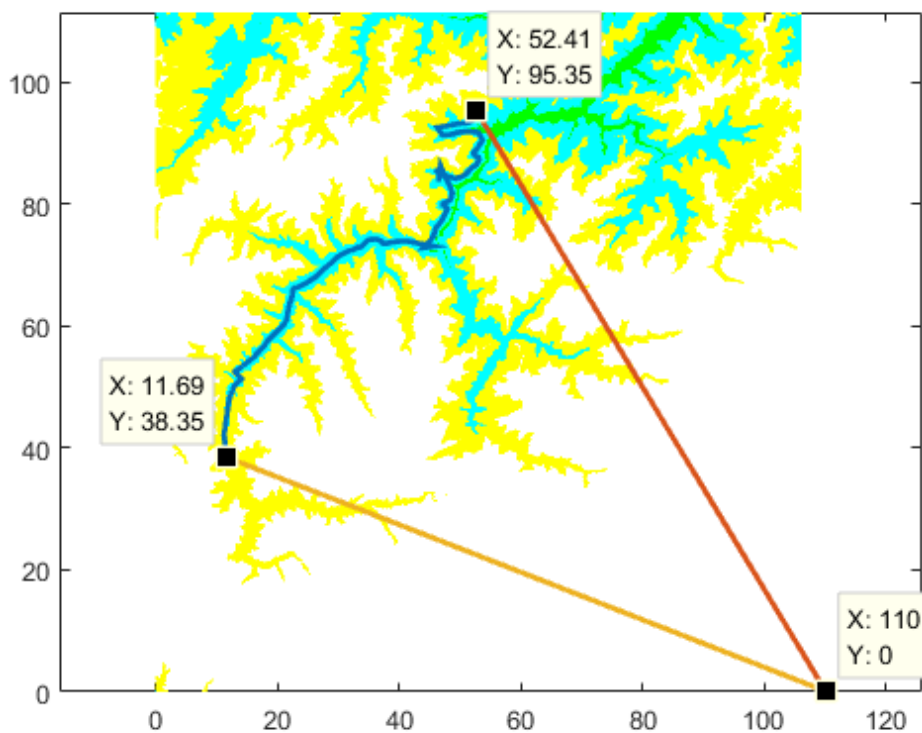


图 16 最长搜救轨迹

最长搜救轨迹对应着最长时间，得到无人机完成生命探测工作的最短时间为 5.282 小时。

4.2.3 NURBS 的无人机轨迹平滑

一条 k 次 NURBS 曲线可以表示为一段有理多项式函数，其有多种表达方式，其中较常用两种如下所述：

(1) 有理分式表达式，如下式所示：

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)} \quad (9)$$

式中 ω_i 为权因子, $\omega_0, \omega_n > 0, \omega_i \geq 0$; d_i 为控制顶点, 顺序连成控制多边形;
 $N_{i,k}(u)$ 是由矢量节点 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$ 决定的 k 次规范 B 样条基函数。B 样条基函数的德布尔-考克斯递推公式如下式所示。

$$\left[\begin{array}{l} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 \end{cases} \\ N_{i,0}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-i}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u_i}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-i}(u) \\ \text{规定: } \frac{0}{0} = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

对于非周期曲线, 常将两端节点的重度度设置为 $k+1$, 即 $u_0 = u_1 = \dots = u_k$,
 $u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k}$, 且常将两端点值分别设为 0 与 1。这样, NURBS 曲线端点具有了与贝齐尔曲线的端点性质, 即曲线的首末端点与控制顶点的首末端点重合, 并在端点处与控制多边形相切。

人们希望能够根据给定的点列, 计算控制顶点使其定义的非均匀有理 B 样条曲线通过给定的点列。这样就可以用求得的控制顶点对原有的或构想的曲线做初步的逼近, 而后调整控制顶点, 最终获得满意的结果。要想计算出控制点, 首先先计算出节点矢量。求解的步骤可以分为以下几步:

(1) 求节点矢量

本文建立的是 3 次 B 样条曲线的插补, 所以对于给定的 m 个行径点 $P_m = [p_1, p_2, \dots, p_m]$, 节点矢量 U 有:

$$U = [0, 0, 0, 0, \frac{P_1 P_2}{SUM(d)}, \frac{P_1 P_2 + P_2 P_3}{SUM(d)}, \dots, \frac{P_1 P_2 + P_2 P_3 + \dots + P_{m-2} P_{m-1}}{SUM(d)}, 1, 1, 1, 1] \quad (11)$$

其中:

$$P_{i-1} P_i = \sqrt{(P_{i-1,X} - P_{i,X})^2 + (P_{i-1,Y} - P_{i,Y})^2 + (P_{i-1,Z} - P_{i,Z})^2} \quad (12)$$

$$SUM(d) = P_1 P_2 + P_2 P + \dots + P_{m-2} P_{m-1} + P_{m-1} P_m \quad (13)$$

这样 U 中共有 m+6 个节点。

(2) 建立方程组

在已知节点矢量之后，就需要反解出控制点。控制点的个数为 m+2 个，根据公式 (2.6) NURBS 的矩阵表达形式达形式，在第 i 个区间的左边界应该是第 i-1 个行径点，第 i 个区间的右边界应该为第 i+1 个区间的左边界。所以根据插值要求应该有一下方程组：

$$\begin{aligned} p_0(0) &= q_1 \\ p_i(1) &= p_{i+1}(0) = q_{i+2} \quad (i = 0, 1, \dots, n-3) \\ p_{n-2}(1) &= q_n \end{aligned} \quad (14)$$

带入式得：

$$q_{i+1} = p_i(0) = \frac{[1 \ 0 \ 0 \ 0] M_i \begin{bmatrix} \omega_i d_i \\ \omega_{i+1} d_{i+1} \\ \omega_{i+2} d_{i+2} \\ \omega_{i+3} d_{i+3} \end{bmatrix}}{[1 \ 0 \ 0 \ 0] M_i \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_{i+1} \\ \omega_{i+2} \\ \omega_{i+3} \end{bmatrix}} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1) \quad (15)$$

由于

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0] M_i = [m_{11} \ m_{12} \ m_{13} \ m_{14}] = \left[\frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} \quad 1 - m_{11} - m_{13} \quad \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+2}^2} \quad 0 \right] \quad (16)$$

所以

$$q_{i+1} = \frac{\frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} \omega_i d_i + (1 - \frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} - \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+2}^2}) \omega_{i+1} d_{i+1} + \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+2}^2} \omega_{i+2} d_{i+2}}{\frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} \omega_i + (1 - \frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} - \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+2}^2}) \omega_{i+1} + \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+2}^2} \omega_{i+2}} \quad (17)$$

令：

$$a_i = \frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} \omega_i, b_i = (1 - \frac{(\Delta_{i+3})^2}{\Delta_{i+2}^2 \Delta_{i+1}^3} - \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+1}^2}) \omega_{i+1}, c_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_{i+2}^3 \Delta_{i+1}^2} \omega_{i+2} \quad (18)$$

则有

$$(a_{i+1} + b_{i+1} + c_{i+1})q_{i+1} = a_{i+1}d_i + b_{i+1}d_{i+1} + c_{i+1}d_{i+2}, i=0,1,2,...,m-1 \quad (19)$$

上述共有 m 个等式，但是所求的控制点的个数为 $m+2$ 个，所以还需要两个方程。这时后引入行径点的导数。引入边界导矢，因为机器人在启动和停止是的速度是 0，所以边界导数则为 0。其中边界导数 $Q_0 = q'_0, Q_{m+1} = q'_{m+1}$ ，此时通过求导可得：

$$\begin{aligned} a_0 &= -3, b_0 = 3, c_0 = 0 \\ a_{m+1} &= -3, b_{m+1} = 3, c_{m+1} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

这样我们就得到了 $m+2$ 个方程组，求解 $m+2$ 个未知数。为了简便我们先将权重全部设置为 1，所以可以得到方程组的矩阵形式。

由于节点矢量的区间是 $[0, 1]$ 所以需要将 t 先变换成 $0, 1$ 之间的数， $t' = t/t_f$ ，然后确定那个 t' 所在的区间，只有确定了其所在的区间才能根据公式确定 t 时刻的坐标。具体采用的确定区间的方法是用二分法确定的。

因为所求的是三次 B 样条曲线，所以可以求得三次曲线的基函数 $N_{i,3}$ 。

求行径点的过程可以由公式 (2.1) 得到，在已知基函数的情况下，将基函数乘上控制点的坐标然后累加即可得到行径点的坐标，因为在笛卡尔坐标下是三维的，所以应该分别计算 X,Y,Z 的点，用的都是同一个公式。

下面将用一组给定的点来实验 NURBS 曲线的效果。给定的点的序列为

P=[30 60 120 150 260 280 300 340 380 300;

100 160 100 40 110 100 120 220 180 10;

200 200 200 200 200 200 200 200 200];

得到的 NURBS 曲线为：

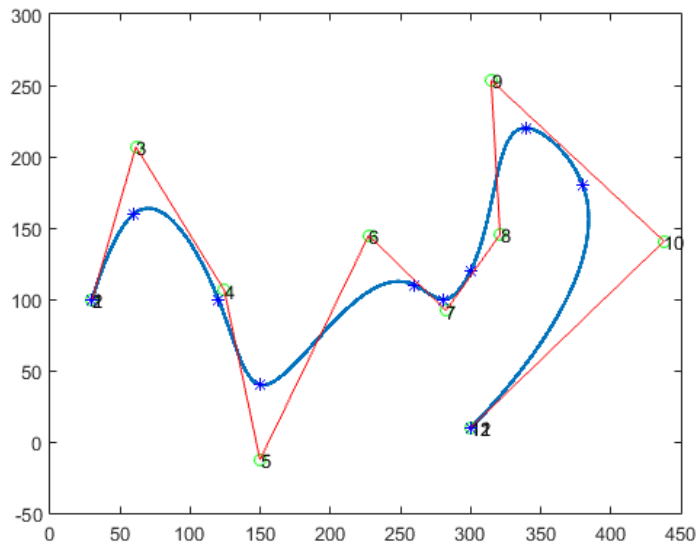


图 17 给定行径点的情况下得到的三次 NURBS 轨迹

对本问题找出的路线也可以进行轨迹平滑,使其更接近实际,满足无人机转弯半径的需求。

5 问题三模型建立与求解

5.1 问题三描述及分析

大地震发生后,地面电力设施被破坏,灾区通信中断。太阳能无人机(白天不受续航能力限制,其余条件同前述)可以作为地面移动终端之间的通信中继,为灾区提供持续的通信保障(地面终端只能与无人机进行通信,无人机之间只要不超过最大通信距离就可以互相通信,地面与地面之间的通信由无人机转接)。假设无人机在空中飞行时,可与距离 3000 米以内的移动终端通信,无人机之间的最大通信距离为 6000 米,求出最少需要多少架无人机、每架无人机的飞行路线如何,以保证在白天 12 小时内,附件 2 中的任意两个地面终端之间都能实现不间断通信(作为中继的无人机之间的切换时间忽略不计,地面终端的移动距离不超过 2 千米)。

对问题三中的条件进行梳理,有以下几点:

- 太阳能无人机白天不受续航能力限制,其余条件同前述。
- 无人机可与距离 3000 米以内的移动终端通信,无人机之间的最大通信距离为 6000 米。
- 作为中继的无人机之间的切换时间忽略不计,地面终端的移动距离不超过 2 千米,认为地面终端在半径为 2 千米的圆内任意移动。

分析以上条件，地面终端在移动的同时，无人机也在移动，要在地面终端的移动距离不超过 2 千米情况下，保证各无人机与对应地面终端距离 3000 米以内。

5.2 模型建立与解算

5.2.1 初步无人机位置安排

根据假设，认为无人机可以在空中盘旋，只要满足转弯半径不小于 100 米的要求即可。而且无人机和移动终端几乎在同一海拔高度上，在实际情况下，如果移动终端的运动不规则，防止无人机与移动终端撞击，为满足无人机与其它障碍物(含地面)的安全飞行距离不小于 50 米，可安排无人机的海拔高度高于移动终端 50m。该高度相对于水平距离 1 千米到 3 千米是很小的，因此角度 α 也很小，可以在计算时认为实际距离和水平投影距离大致相等。



图 18 无人机和移动终端高度情况示意图

下图中给出了移动终端和无人机距离最远的情况，在这种情况下满足 3000 米的要求，则在其他移动情况下也能满足要求。

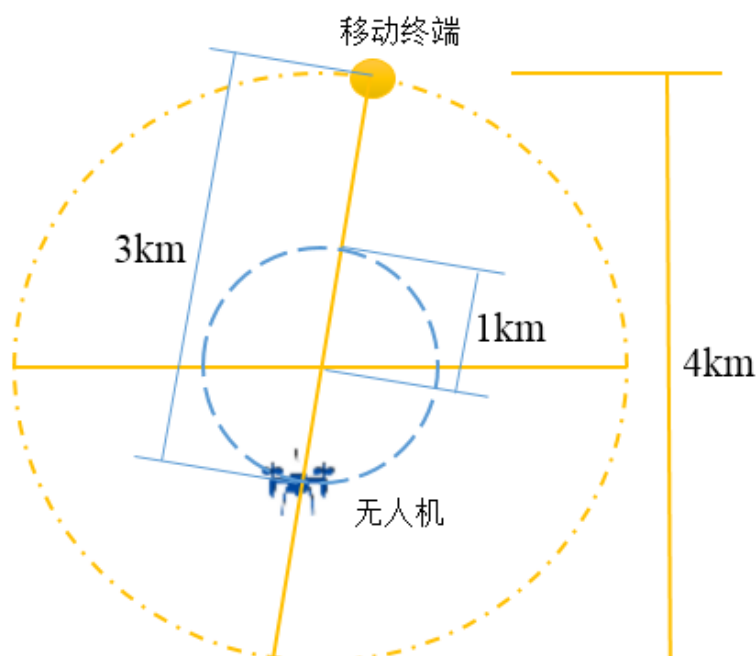


图 19 移动终端和无人机距离最远俯视图

分析上图可以看出，由于移动终端运动范围在半径为 2 千米的橙色圆内，且

移动终端和无人机最远距离不能超过 3 千米，当无人机在半径为 1 千米的蓝色圆形内移动时，无人机和移动终端最远距离也能满足不超过 3 千米的要求，所以安排无人机在移动终端所在圆的圆心 1 千米范围内移动，能始终满足移动终端的信号需求。

初步安排每个移动终端对应一架无人机，再讨论无人机之间需要添加的情况和多个终端合用一架无人机的情况。

下面分析无人机之间需要添加无人机的情况，此时认为无人机盘旋半径很小，相对来说几乎不产生位移。为分析两台无人机之间何时需要再添加无人机，先分析下图。

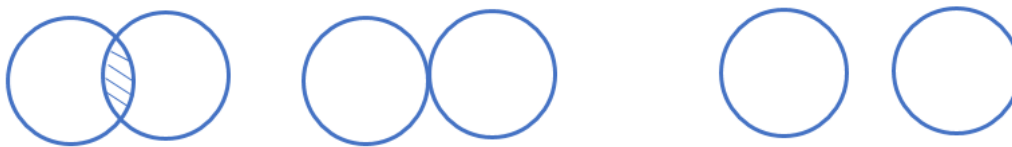


图 20 无人机之间可以通信和不可通信的情况

上图中蓝色圆圈半径为 3km，无人机位于蓝色圆圈圆心处。当相邻两个蓝色圆圈相切或者相交时，两无人机之间距离小于 6km，两者可以通信，如左图和中图所示。当相邻两个蓝色圆圈相离时，两无人机之间需要再添加无人机，如上图右图所示。

根据以上分析，需要以初步安排的 72 架无人机所在位置为圆心作出半径为 3km 的圆形，在图形中，能串联起来的圆形标注成同一个编号，相同编号的无人机之间无需再添加无人机，不同编号的无人机需要添加无人机以保证通信。作出的图形如下图所示。

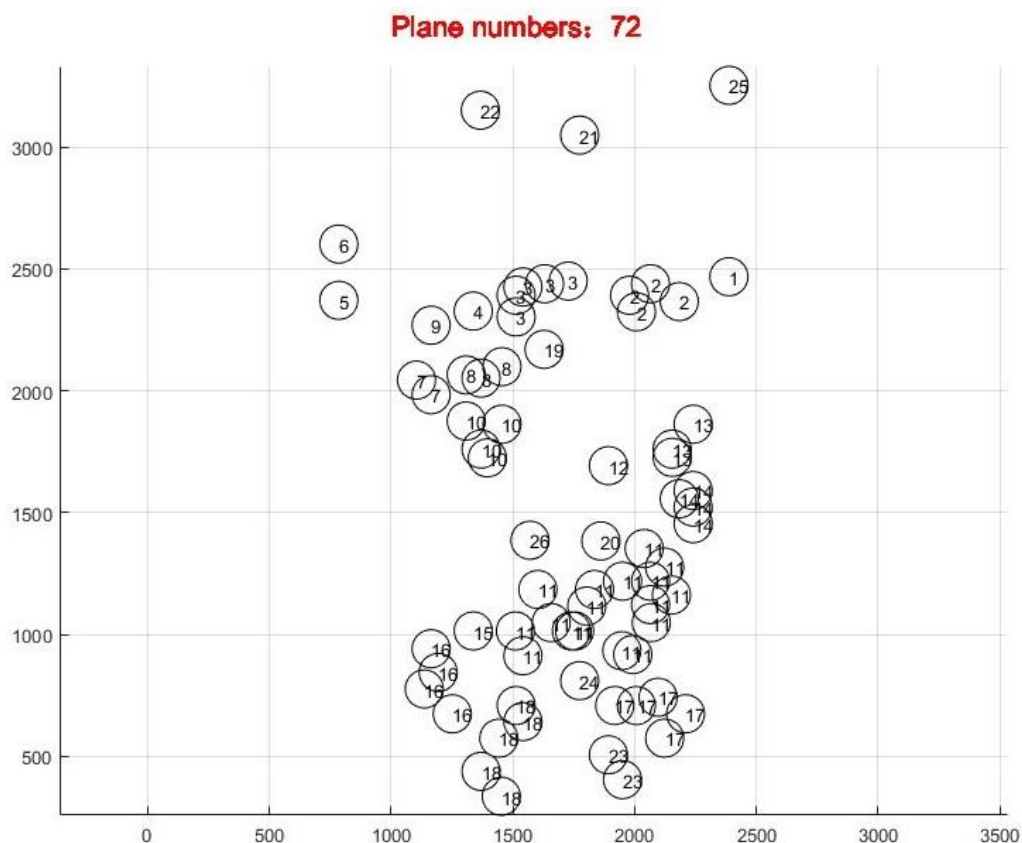


图 21 初步安排的 72 架无人机相互通信示意图

从图上可以看出，无人机的编号一共有 26 种，需要添加无人机，使得它们都能串联起来。

5.2.2 无人机数量添加情况

对于需要添加无人机的圆圈，用以下方法确定添加的数量。以无人机为圆心作出半径为 6km 的圆，如下图中橙色圆圈所示。



图 22 两台无人机之间需要再添加无人机的情况

如上图右图所示，若橙色圆圈相交，橙色阴影表示相交部分，将新无人机安置在这部分阴影中的某个位置，就可以实现两架无人机之间的通信。如果如左图所示，橙色圆圈相离，则新添一架无人机不够，还需要画出更大的圆圈来观察两

圆的相交情况。

由于 72 个移动终端的通信点位置比较分散，进一步讨论在三架无人机的情况下如何确定添加无人机的数量，如下图所示。

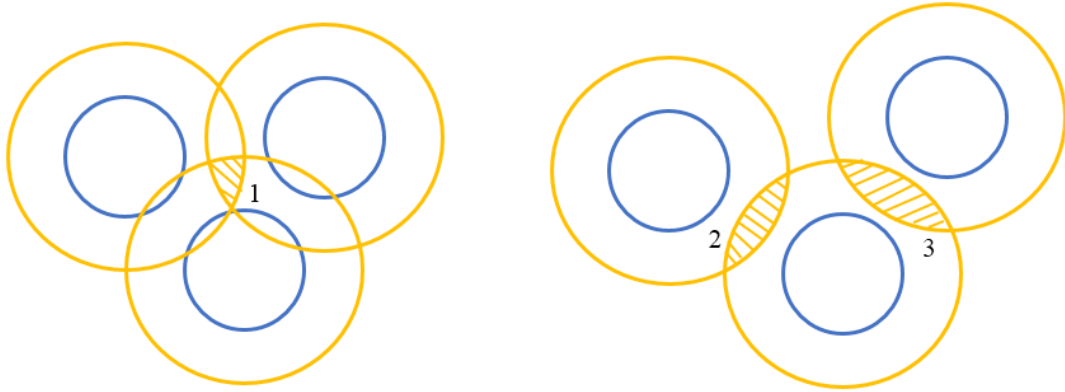


图 23 三台无人机之间需要再添加无人机的情况

以三架无人机所在位置为圆心作出半径为 6km 的圆形，如果三者有交集，如上图左边的情况，则将一架新的无人机安插在交集中任意一点位置，就能将三架无人机连通起来。如果三者没有交集，只是两两有交集，则需要在各自的交集中安排一架无人机，至少需要添加两辆无人机。如果不是上述两种情况，参考上文讨论的两台无人机之间需要再添加无人机的情况。

通过以上分析，初步安排的 72 架无人机的编号一共有 26 种，需要用上述方法添加无人机，使得它们都能串联起来。经过上述算法，计算出添加的无人机数量为 29 架，添加后的无人机编号只有一种，效果图如下。

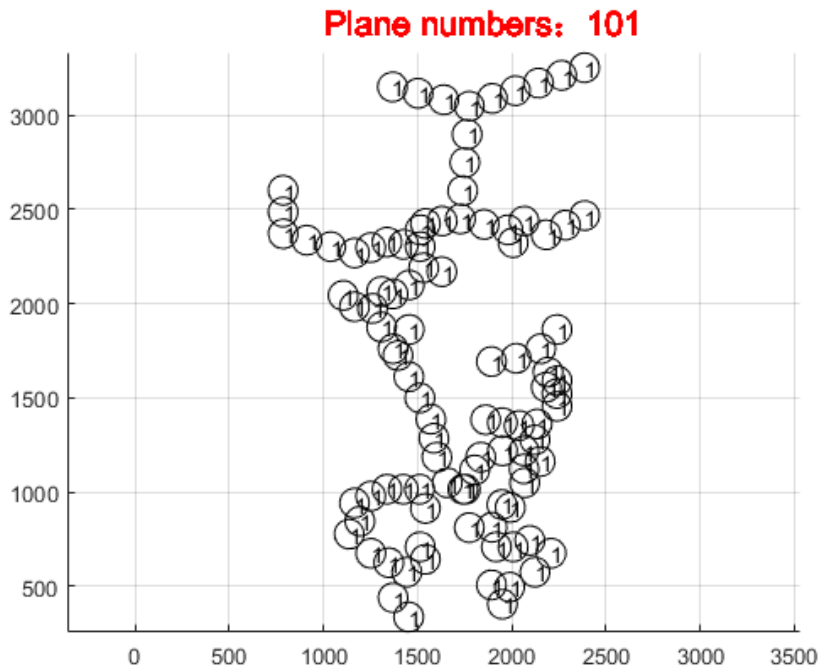


图 24 添加无人机后的分布图

如上图所示，在合适位置添加无人机后，可以使得无人机全部串联起来，所有无人机之间可以完成通信，满足题目的要求。

5.2.3 无人机数量减少情况

下面分析无人机活动范围有重合的时候，无人机数量可以对应减少的情况。

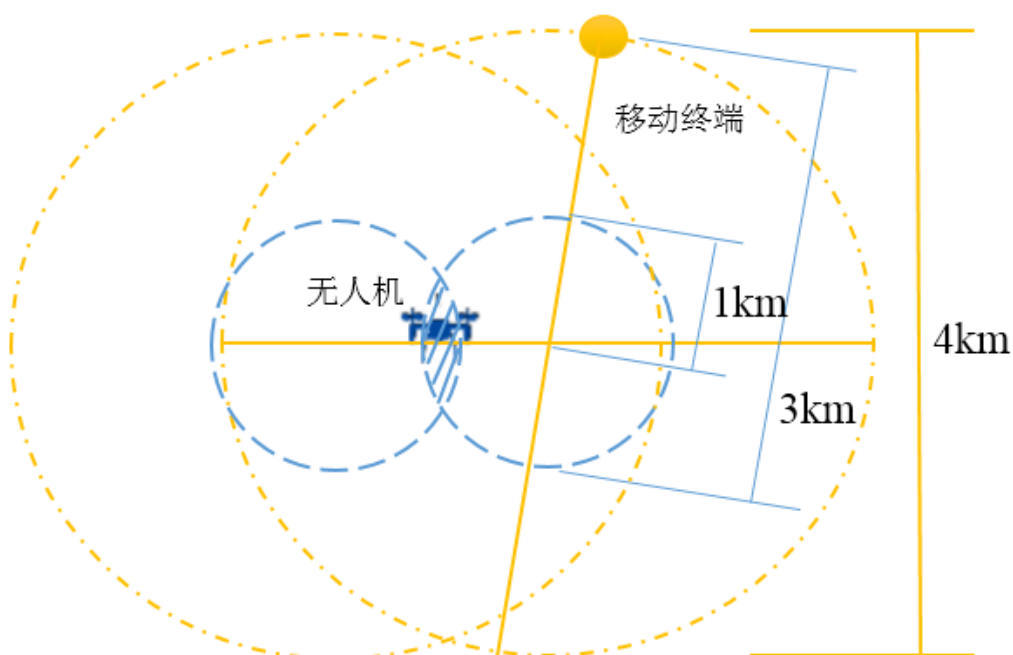


图 25 无人机活动范围重合微观示意图

如上图所示，如果地面移动终端距离比较接近，两者对应的无人机活动范围有交集，那么只需要一辆无人机在上述交集的某一点工作，就可以同时服务于两个地面移动终端。因此绘制出以上述 101 架无人机所在位置为中心，半径为 1 千米的圆形，对有交集的情况，相应减少无人机的数量。经过绘图与测算，得出可以减少 4 架无人机，绘图情况如下。

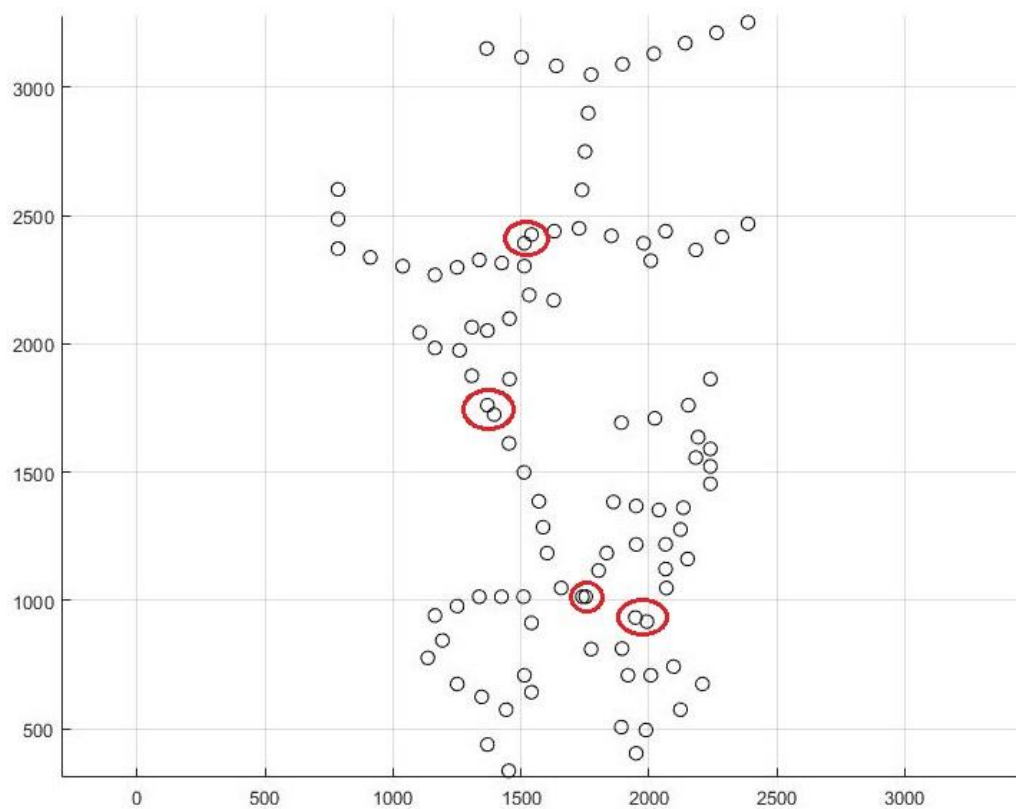


图 26 无人机活动范围重合宏观示意图

从图中可以直观看出相交的圆圈有四组，用红色标志圈出来，因此可以减少四架无人机。综合以上分析，最终得到的无人机数量为 97 架，各架无人机的服务范围如下图所示。

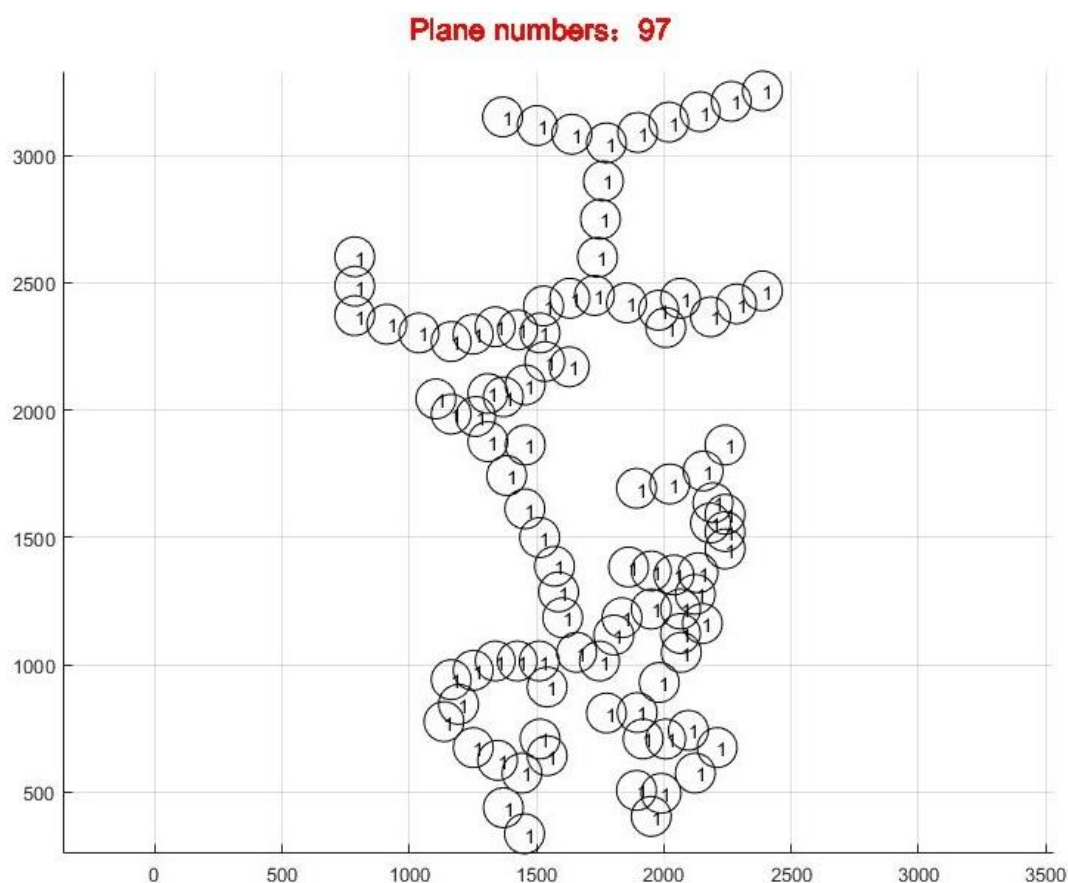


图 27 最终无人机安排示意图

如上图所示，最终安排 97 架无人机数量作为通信中继，所有无人机可以串联起来，因此满足题目中的通信要求。综合考虑了无人机添加和减少的情况，得到了较好的结果。

6 问题四模型建立与求解

6.1 问题四描述及分析

指挥中心拟从 H 派出 3 架无人机携带通信装备向灾区内的 72 个地面终端 (分布见附件 2) 发送内容不同，总量均为 500M (1M 按 10^6 比特计算) 的数据。设每台通信装备的总功率是 5 瓦，可同时向不超过 10 个地面终端发送数据。数据传输过程可以简化为：当地面终端 i 看无人机的仰角大于 30° 、距离不超过 3000 米且没有山体阻隔时，如果无人机当前服务用户少于 10 个，则开始向 i 发送数据，并瞬间完成所有用户的功率再分配，否则，搁置 i 的需求，直到有地面用户退出，若此时 i 仍在可服务区域，则为 i 服务（先到先服务）。如果在一个服务时间区间（即无人机和终端之间满足可传输数据条件的的时间范围）内不能传完全部数据，则以后区间可以续传。再设 i 用户在时刻 t 接收到无人机发送的信息速率为

$$r_i(t) = B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0 d^2(u,i)} \right) \quad (\text{比特/秒}), \quad \text{其中 } B_i \text{ 表示无人机服务 } i \text{ 的子信道带宽}$$

(取值见附件 2, 单位 Hz), $p_i(t)$ 表示 t 时刻无人机为第 i 个地面用户所在的子信道分配的功率, 单位: w(瓦), $d(u,i)$ 表示 t 时刻无人机与 i 之间的欧氏距离, 单位: 米。 ρ_0 为信道特性参数, 为简单起见, 取为 4.314×10^{-10} (单位略), 假设无人机飞行速度在 60~100 千米/小时之间可调(水平面内最大加速度 ± 5 米/秒², 铅垂面内最大加速 ± 2 米/秒², 可同时在两个方向上加速), 为无人机设计恰当的航线、速度以及所服务的用户, 并为每一个用户分配恰当的功率, 使得无人机完成所有任务的时间总和尽量短。

6.2 模型建立

6.2.1 问题的可视化

地面终端看无人机的仰角大于 30° , 距离不超过 3000 米时, 此时无人机能成功发送数据, 绘制服务范围如下图所示。

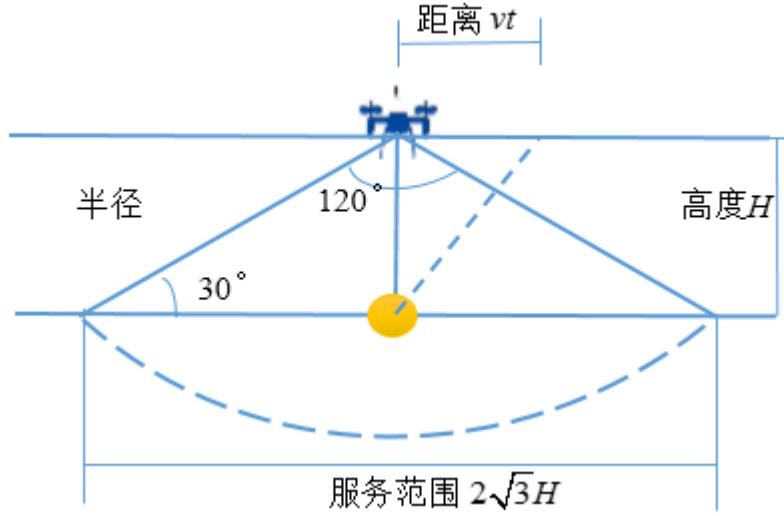


图 28 无人机服务范围示意图

如上图所示, 无人机经过移动终端正上方, 此时无人机和通信终端传输时间较大, 为走过两个半径的时间。地面终端看无人机的仰角大于 30° , 则无人机传送角度范围为 120° 。设高度为 H , 则服务范围是 $2\sqrt{3}H$ 。设无人机从正上方开始移动 t 时间, 这段时间无人机运动的距离是 vt 。

根据题中的含义, 由于 i 用户在时刻 t 接收到无人机发送的信息速率为

$$r_i(t) = B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0 d^2(u,i)} \right) \quad (21)$$

又有

$$d^2(u,i) = (vt)^2 + H^2 \quad (22)$$

将式 (22) 代入式 (21)，则能推出

$$r_i(t) = B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0((vt)^2 + H^2)} \right) \quad (23)$$

6.2.2 模型建立与求解

在公式两边同时乘上 dt ，等式两边都表示瞬时发送信息量：

$$r_i(t)dt = B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0((vt)^2 + H^2)} \right) dt \quad (24)$$

将无人机路过某个地面终端的过程看成对称的两部分，每部分经历的时间是 $\sqrt{3}H/v$ ，再对上式两边同时在 $t \in [0, \sqrt{3}H/v]$ 区间上积分，用 M 表示无人机路过某个地面终端传输数据的总量，则有：

$$\frac{M}{2} = \int_0^{\sqrt{3}H/v} r_i(t)dt = \int_0^{\sqrt{3}H/v} B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0((vt)^2 + H^2)} \right) dt \quad (25)$$

得到下列公式：

$$M = 2 \int_0^{\sqrt{3}H/v} B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0((vt)^2 + H^2)} \right) dt \quad (26)$$

当服务范围最大时，高度 H 为 1500m。当高度高于 1500m 时，速率会有所降低，服务范围也会减少，故高度不宜高于 1500m。作出式 在 $H \in [0, 1500]$ 范围内的函数图像，可以得到下图。

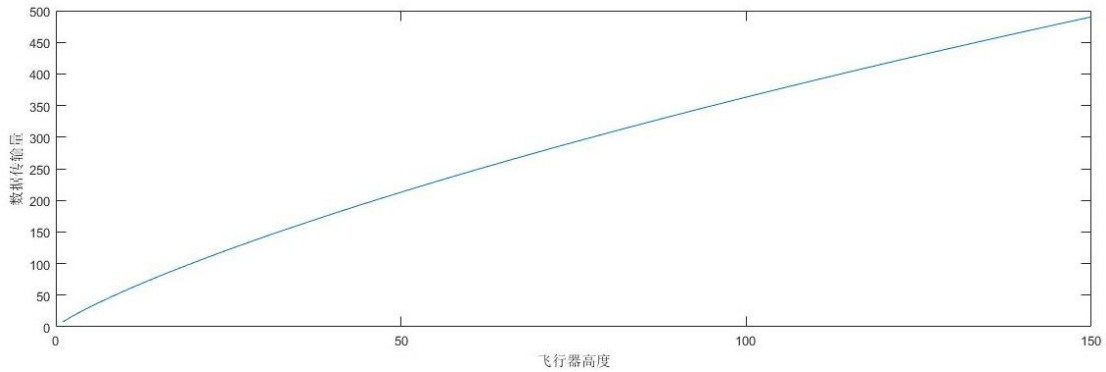


图 29 无人机发送的信息速率随高度变化图

可见，在其他条件相同的情况下，当 $H \in [0, 1500]$ 时，无人机发送的信息总

量随高度增大而增大，因此取 $H=1500\text{m}$ 。

服务两个终端的时候 $5w$ 的功率分给两个移动终端，则 $p_i(t)$ 为 $2.5w$ ，服务一个终端时 $p_i(t)$ 为 $5w$ 。对每一个移动终端，其他数据都是已知的，对 t 积分就可以求出每个移动终端的传输数据量。如果算出的传输数据量大于 500M ，说明在无人机飞过终端的时候可将数据传输完，否则就不能传输完，无人机需要在服务范围内多停留一会，这时在服务范围内多飞行一个服务半径的路程，即 $\sqrt{3}H$ ，此时可以满足所有移动终端的要求。画出 72 个移动终端的位置，并将传输数据量小于 500M 的中心点标为红色，一共有 21 个这样的终端，计算出最短路径使用的时间后，再加上每架无人机飞行范围需增加的终端花费的时间。这些终端的情况表示在下图中。

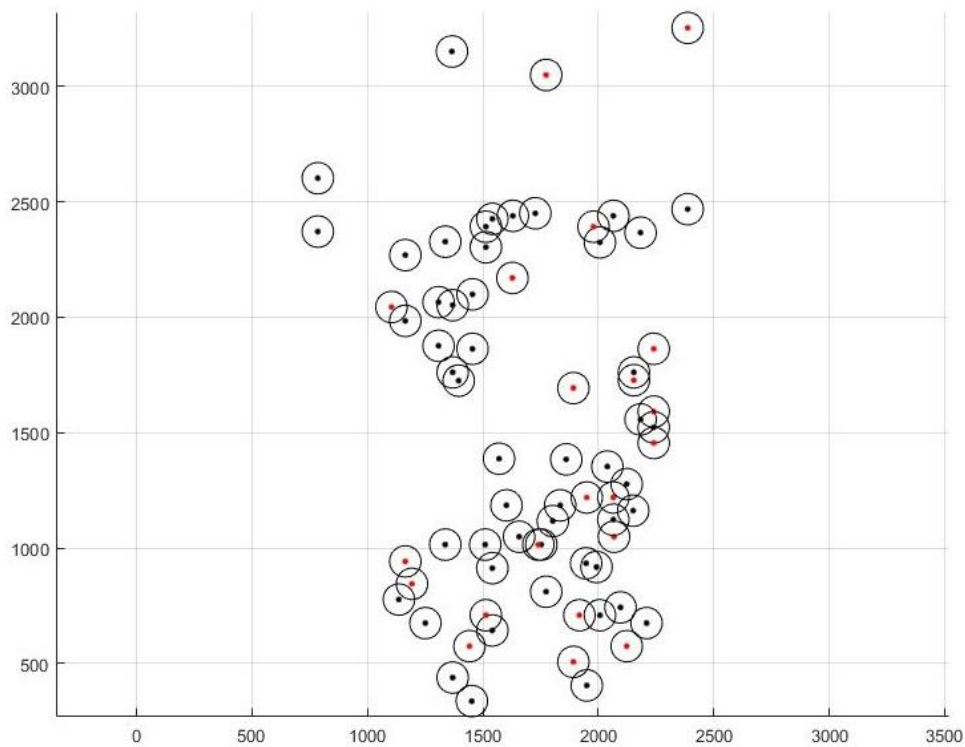


图 30 传输数据量是否达到 500M 的移动终端示意图

由于派出了 3 架无人机，各自为一部分移动终端传输数据，因此对 72 个移动终端进行聚类分析，用 K-means 算法将终端分为三类，如下图所示，每种颜色表示一类。

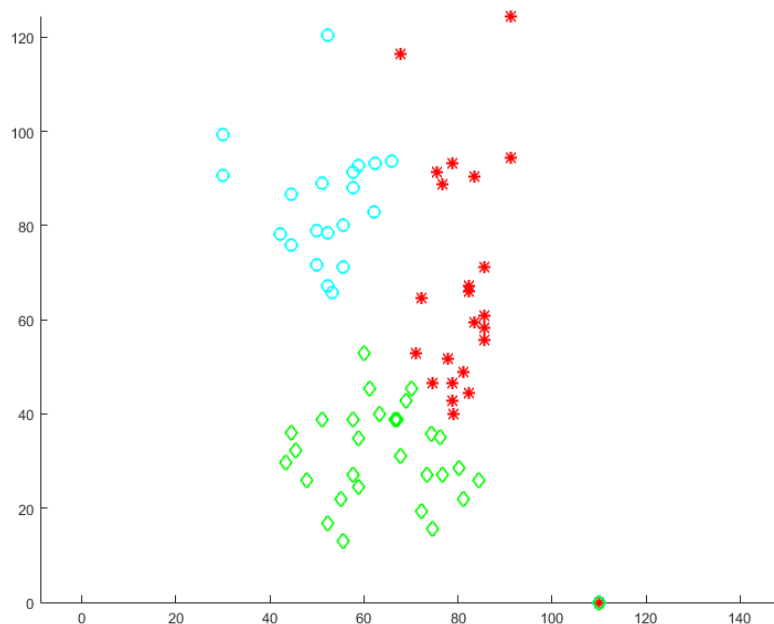


图 31 移动终端分类结果示意图

此时问题转化为旅行商问题，可以用遗传算法来解决。对各个范围内的移动终端内部规划遍历所有节点的最短路径，算法如下：

(1) 可行解集合确定

首先确定可行解的集合，在一个 n 个节点的遍历问题中，共有 $n!$ 种可行解，可以用一个序列来表示如下式，其中 x_i 为 1 到 n 中不重复的整数。

$$[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

(2) 编码

对于一个初始序列串，我们可以直接将这个串作为 DNA，直接对序列串进行遗传操作就可。

种群的初始化过程就是将 1 到 N 的整数随机打乱顺序作为初始 DNA 进行遗传迭代。

(3) 计算样本的适应度函数值

适应度函数值可以看成目标函数值，在这里就是节点序列下的距离之和，适应度值大的被认为是较优秀的样本，相反我们将适应值较小的样本，即劣质的样本。当一个序列为 [1 3 5 4 2] 时那么目标函数为 $d_{13}+d_{35}+d_{54}+d_{42}$ 。我们需要目标越小越好，所以我们可以选择一个较大的正数来减去目标函数作为适应值。

(4) 选择优秀的样本作为父代

选择父代的方法这里介绍两者，一种是轮盘赌选择，一种是基于排序的选

择。我们使用的是轮盘赌选择。其步骤如下所示：

STEP1: 将群体的适应度函数值累加求和；

STEP2: 计算每个样本占样本和的比例，作为概率，并依次求得累加概率；

STEP3: 产生一个 0 到 1 之间的随机数，若这个随机数落到累加概率和的区域那么就选取该区域的样本为父代。

STEP4: 一直运行知道产生所需求的父代个数。

(5) 交叉操作

在得到父代样本之后选择两个其中父代样本相互交叉产生子代，得到上述父代的两两组合，每个组合中，选择两个交叉点，这两个交叉点之间的 DNA 进行互换，实际意义是随机地对原始序列进行微调，也就是所谓的遗传，而我们前面是选择了优秀的个体进行遗传，所以交叉的结果使得子代继承了两个父代的优秀基因。

(6) 变异操作

如果只进行上面的交叉操作的话那么对于生物来说是不会进化的，而对于我们要求的函数来说会一直收敛到一个局部最优里面去无法继续优化，所以我们要设置变异，使得 DNA 中某个位点的基因进行突变，保证了种群的多样性，使得种群不至于收敛到局部最优而无法跳出。

(7) 当程序达到终止的条件如循环到 500 代或者收敛到一个局部最优无法跳出的时候跳出程序结束。一般的我们在求解问题的时候都要运行几次算法，再选取较好的结果作为解。

最后通过多次求解，并且不断地调整分组内部的节点，使得组与组之间的任务量相近，并且得到最优解，结果如下图所示。

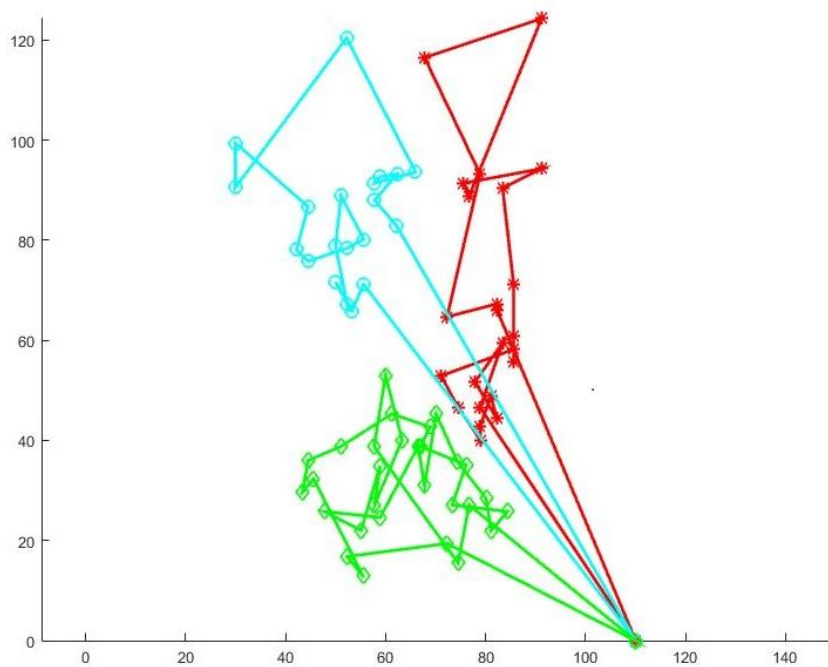


图 32 各类移动终端最短路径示意图

上图中，绿色标记的移动终端中有 8 个传输数据量不够 500M，红色的有 10 个，蓝色的有 3 个。因此算出各架飞机的初步总路径后，绿色终端的无人机再加上 8 个服务半径花费的时间，红色的加上 10 个，蓝色的加上 3 个。假定无人机行驶到第一个终端以及从最后一个终端返回 H 点时的速度是 100km/h，以节省总时间，而在服务信号终端的时候飞行速度是 60km/h，以取得较多的时间传输数据。每增加一个半径，增加的飞行时间是 $\sqrt{3}H/v=0.0433$ 小时。计算出来的总飞行时间见下表。

表 5 各无人机总飞行时间计算表

颜色	线段总长度 (km)	速度 100km/h 的路程 (km)	速度 60km/h 的路程 (km)	增加半径数	总飞行时间 (h)
红	402.60	128	275.00	10	6.29
蓝	386.93	185	201.63	3	5.34
绿	401.15	85	315.82	8	6.46

从上图可以看出，三架无人机总飞行时间比较均匀，最长飞行时间为 6.46h，故总时间为 6.46h。三架无人机经过的部分点序列如下表所示：

表 6 三架无人机经过的部分点序列

红色轨迹经过点序列	蓝色轨迹经过点序列	绿色轨迹经过点序列
-----------	-----------	-----------

X 坐标	y 坐标	z 坐标	x 坐标	y 坐标	z 坐标	x 坐标	y 坐标	z 坐标
110	0	3	110	0	3	110	0	3
78.9	46.6	4.092	62.2	82.9	2.917	72.3	19.4	4.072
83.4	59.5	3.239	57.8	88	2.681	52.3	16.8	4.105
77.9	51.7	2.722	62.3	93.2	1.83	44.5	36	3.799
82.2	44.4	4.241	58.9	92.7	1.674	51.1	38.8	3.161
85.6	58.2	3.213	57.8	91.4	1.965	61.2	45.3	3.28
85.6	55.6	4.348	66	93.6	1.662	68.9	42.7	4.439
85.6	60.8	3.525	52.2	120.4	1.907	67	38.8	3.29
85.6	71.2	2.968	30	90.6	3.23	76.1	35.1	3.136
83.4	90.4	2.386	30	99.4	2.667	73.3	27.1	4.071
91.2	94.3	2.514	44.5	86.7	2.733	84.4	25.8	3.779
75.6	91.4	2.377	42.2	78.1	3.296	81.1	22	4.265
76.7	88.8	2.563	44.5	75.8	2.657	80.1	28.4	4.004
91.2	124.3	2.465	52.3	78.4	2.534	74.4	35.7	3.413
67.8	116.5	1.83	55.6	80.2	3.02	70.1	45.3	3.72
78.9	93.2	1.453	51.1	88.9	2.633	67.8	31	3.623
72.3	64.7	3.655	50	78.9	1.703	66.5	38.8	3.113
82.3	67.3	4.128	52.3	67.3	3.043	58.9	24.6	3.433
82.3	66	3.825	50	71.7	2.693	47.8	25.8	3.543
110	0	3	53.3	65.9	2.279	55.1	22	3.463
			55.6	71.2	3.824	58.9	34.9	3.609
			110	0	3	57.8	27.1	3.647
						63.3	40.1	3.482
						60	53	2.993
						57.7	38.8	3.292
						74.5	15.5	4.261
						76.7	27.1	4.079
						110	0	3

7 模型的优缺点

7.1 模型的优点

(1) 在解决问题一的过程中, 通过建立适当的模型, 将复杂的航迹规划转化为求解定点的最短路径(包括避障)与局部规划问题, 采用 A 星算法设计从出发点分别到 7 个目标点的路径, 取得了较好的效果; 还通过设计每 3 小时派遣飞机沿着之前飞机路径行驶, 大大的简化了模型的设计, 给出了较优的时刻表。

(2) 问题二中, 对要进行扫描的区域进行分层, 回避了飞机变换高度的复杂问题, 也比较符合实际情况; 采用骨架提取算法规划出无人机的飞行路线, 还介绍了轨迹平滑算法, 具有较好的实用价值。

(3) 问题三中, 通过建模方法和对一些条件的适当简化, 简化了问题的求解过程, 算出了较好的结果, 而且对过程和结果的展示十分直观。

(4) 问题四中, 采用 Kmeans 算法将 72 个地面终端分成 3 类, 并且将模型简化成旅行商问题, 采用遗传算法求出最短路程, 使得三架无人机的飞行时间较为接近, 取得了较优的效果。

7.2 模型的缺点

(1) 对于问题一, 将复杂地势上的搜索情况简化为在水平面上的情况, 对覆盖率计算有一定的影响。

(2) 对于第二个问题, 仔细分析了无人机沿高度分层飞行的情况, 但忽略了在从出发点到待扫描区域的过程中的障碍影响, 这里的简化也对结果准确性产生一定影响。

8 参考文献

[1]郭强.基于改进的 A 星算法和 B 样条函数的无人机路径规划研究. 天津大学硕士学位论文, 2011 年 12 月。

[2]丁臻极.城市环境下多无人机应急救援任务分配技术研究.南京航空航天大学硕士学位论文, 2016 年 12 月。

[3] 路染妮.旋转翼无人机自主避障路径规划. 科技广场, 2013.5。

[4]于莹莹, 陈燕, 李桃迎.改进的遗传算法求解旅行商问题. 控制与决策, 2014,29(08)。

[5]杨尚东.微小型无人机平台中继在应急通信中的应用. 情报交流, 2015 年第 5 期。

[6]田贵超,黎明,韦雪洁.旅行商问题(TSP)的几种求解方法.计算机仿真, 2006, (08): 153-157

[7] 陈湘,高嵩,李源,李志鹏.一种盘旋算法在无人机搜索任务中的应用研究.价值工程, 2012, 36: 1-3[7]