



学 校 中国科学院光电技术研究所

参赛队号 80151002

队员姓名	1.李杰
	2.李自强
	3.段倩文

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 面向下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型

摘 要：

本文基于经验公式建立了 VCSEL 激光器的工作电流与输出光功率强度关系的 L-I 模型，基于速率方程建立了 VCSEL 的带宽模型(小信号响应模型)。本文将参数估计问题转化为最优化问题求解，将估计出的参数代入模型中效果良好。本文研究了温度等对 L-I 模型的影响，并探讨了如何设计激光器参数可以使激光器具有更大的传输带宽。

问题一：根据 VCSEL 的 L-I 模型，搭建用于参数估计即数据拟合的最小二乘模型，从而使用非线性算法对该模型进行求解。本文首先使用 Lingo 软件在 20℃ 的条件下对简化 L-I 模型进行无初值参数估计值，得到模型中各参数的初步估计值，然后将其和题目中给定初值进行对比、选择，得到较优的参数初值；将上述参数初值作为迭代优化的初值，使用 OptimalTool 工具箱中基于 Nelder-Mead 单纯形法的 fminsearch 函数正式对该最小二乘模型进行求解，得到较优的参数估计值；之后再次使用 cftool 工具箱对使用 OptimalTool 工具箱中估计出的参数进行验算，根据相关拟合指标 SSE、R-square、RMSE 以及验证集泛化性能来分析拟合优度，得到拟合优秀但未过拟合的参数结果。为解答问题一并分析模型性能，我们又分别使用了上述两种工具箱来估计参数，并将优化得到的参数代入方程中建立出光功率 P 的一元四次方程，为求解该方程的数值解，我们使用了 fminsearch 对构建的零点方程做优化。之后根据两组参数分别解得 P ，并绘制出其误差图，以对结果进行一种精确性分析，反映出结果十分稳健可信；之后则画出 10℃，20℃，30℃，……，90℃ 等温度下 L-I 曲线图，并通过 L-I 曲线图分析出限制最低输光功率时的最高温度值。

问题二：对问题一中 VCSEL 的 L-I 模型进行优化。首先问题一为了简化模型，使得模型的变量 V 作为定量来带入求解的，即 V 不随温度而改变，而实际上当环境温度不再是 20°C 时，定量的 V 将不能满足模型的精确要求，数据中提供的 V 也难免具有较大的累积观测误差，由此导致的直接结果就是 90°C 情况下的输出光功率严重低下以致没有丝毫输出光，这似乎与客观事实有些相背。为进一步改进模型，本问题优化时根据题目所给数据找到变量 V 满足的关系式 $V=f(I,T)$ ，然后再带入求解；画出了 10°C ， 20°C ， 30°C ，.....， 90°C 等温度下 L-I 曲线图，并通过 L-I 曲线图分析出限制最低输光功率时的最高温度值，并与问题一做比较。

问题三：首先根据题目中给定的基于速率方程的带宽模型建立 VCSEL 的带宽模型，然后使用非线性最小二乘算法对模型中提到的三个约束条件进行求解，估计出模型参数，改变模型中定量(环境温度和偏置电流)的值，得到不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线(即 S21 曲线);然后分析激光器的环境温度、器件温度和偏置电流对器件带宽曲线的影响；探索了在固定温度 20°C ，固定偏置电流 7.5mA 的情况下增大带宽的方法，得出了改变激光器特定参数的结论；并研究了激光器哪些参数对带宽平坦度有影响。

问题四：通过两种思路来优化问题三中的带宽模型。由于本文使用算法时间开销并不多，基本可以满足要求，本题将主要讨论如何使激光器得到更优的带宽响应。第一种思路是问题三的带宽模型在推导过程中由于近似忽略掉其中一项，现将那一项加入考虑，得到精确的模型表达式，进而获取更宽的 3dB(或 10dB)带宽；第二种思路是，发现信号带宽和带宽曲线平坦度与激光器参数中的注入效率 η_i 、光子寿命 τ_p 相关，通过适当调整 η_i 和 τ_p 可以获取带宽更宽且较为平坦的带宽曲线。

关键词：VCSEL 激光器；非线性最小二乘；fminsearch 函数；多变量优化；多目标优化；cftool 工具箱

一、问题重述

1.1 问题背景

光纤中传输的激光信号具有远高于电信号传输速率的特点(激光信号传输带宽远大于电信号传输带宽),更适合于未来高速率的传输网络。工程师们在光纤通信传输系统设计前,往往会通过计算机仿真的方式研究系统设计的指标,以便快速找到最适合的解决方案。因此在进行系统仿真时,需要准确掌握系统中各个器件的特性以保证仿真模型的精度。激光器作为光纤通信系统的核心器件是系统仿真中需要考虑的一个重要因素。

垂直腔面发射激光器(VCSEL)自问世以来便跻身于光通讯、光互联、光存储以及光打印等诸多领域并在其中发挥着重要的作用^[1]。首先激光器是将电能转换成光能的半导体器件,能量转换的过程,也是电子的电能为光子光能的过程,在转换过程中,伴随着电子的运动,半导体器件会产生一定的热量。从能量守恒的角度看,转换为热能的热量越多(发热导致的能量浪费了),器件温度越高,那么转化为光能的能量越少(输出功率越低),可以利用的能量就越少。因此需要研究 VCSEL 激光器特性。

1.2 问题分析

本题的主要任务,就是得到能准确反映 VCSEL 激光器特性的数学模型。激光器输出的光功率强度与器件的温度相关,当器件温度(受激光器自身发热和环境温度的共同影响)改变后,激光器输出的光功率强度也会相应发生变化。在进行建模时,我们既要准确反映 VCSEL 激光器特性,还要考虑:激光器输出的功率强度与温度的关系——即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用;如何设计激光器参数可以使激光器具有更大的传输带宽——即可以实现更快的传输速率。在无线通信中,器件带宽通常采用幅度 3dB 衰减位置的信号带宽来衡量——即 3dB 带宽。在光纤通信中,由于系统可用幅度衰减范围更大,通常采用幅度 10dB 衰减位置的信号带宽进行衡量——10dB 带宽。

需要通过建立数学模型,解决以下几个问题:

问题一:通过已知的 VCSEL 的 L-I 模型(L: light,表示光功率强度,也可以表示为 P; I: Intensity of current,表示工作电流)和题中给定数据,估计出 L-I 模型中参数 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$,并画出 10℃, 20℃, 30℃, ……., 90℃等温度下的 L-I 曲线;假设 2mW 时的光功率强度很弱,用户无法检测,求出此时激光器所处的最高温度。

问题二:从问题一中 VCSEL 的 L-I 模型出发,分析其精度和产生误差的原因,然后画出改进后 10℃, 20℃, 30℃, ……., 90℃等温度下 L-I 曲线图,对比问题一的 L-I 的曲线图,简述具体的优化效果。

问题三:构建 VCSEL 的带宽模型,也称小信号模型。就是给激光器输入不同频率的幅度非常小的信号(“不同频率”是从 0 频到指定频率按一定步长进行扫描,例如从 0 开始以 0.5GHz 为步长,扫描到 30GHz),获得对应频率点输出信号的幅度(功率)。

- ① 根据构造的模型和题中所给数据画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线(即 S21 曲线),其中一条必须是 20℃下 7.5mA 偏置电流的仿真输出曲线。
- ② 分析激光器的温度和偏置电流对带宽响应曲线的影响。
- ③ 如果可将激光器工作环境固定在 20℃,偏置电流为 7.5mA,可通过什么

手段获得更宽的带宽。

- ④ 改变某些参数时，激光器的带宽响应曲线在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置，找出具体参数并改变参数值使得这部分带宽曲线越平坦。

问题四：试找出更好地带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB(或 10dB)带宽。如果有，请给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题三模型进行比较。

二、模型假设

1. 假设激光器转换效率受温度影响较小，近似于常数；
2. 假设所有非光输出能量的损耗都转化为热能；
3. 小信号带宽模型中，信号幅值很小，即驱动电流等于偏置电流；
4. 假设增益因子本身较小，其与小信号的乘积就更小，即可忽略；
5. 温度受外界环境温度和自身的温度影响，自身的温度与器件产生的瞬时功率相关，即受电压-电流特性影响。

三、符号说明

符号	说明	单位
P_0	激光器光功率	mW
A_m	响应幅度	dB
I	实测驱动电流	mA
$I_{off}(T)$	与温度相关的偏置电流	mA
I_{th0}	电流常数	mA
R_{th0}	VCSEL 热阻抗	K/mW
I_b	阈值电流	mA
V	实测电压	V
f	小信号频率	GHz
N	激光器载流子数	/
S	激光器光子数	/
N_s	激光器稳态时载流子数	/
S_s	激光器稳态时光子数	/
T_0	环境温度	°C
T	器件温度	°C
k	比例因子	/
τ_n	载流子复合寿命	/
τ_p	光子寿命	/
ε	增益压缩因子	/
S	激光器光子数	/

四、问题一的模型建立与求解

4.1 问题描述及分析

垂直腔面发射激光器(VCSEL)是一种快速发展,功能较为成熟的半导体激光器。近年来,随着湿法氧化技术在 VCSEL 上的应用,VCSEL 和边发射激光器相比,其串联电阻很大,有源区体积很小,当注入电流增大时,器件升温很严重,所以温度特性是 VCSEL 的关键特性之一。在描述这种温度特性的理论中,有一个 P-I 经验公式已获得了大多数人的认可,即如公式(1-1)所示^[3]。

$$P_0 = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (1-1)$$

再次说明其中各变量含义,如下表:

表 1-1 变量说明

变量	含义
P_0	激光器输出的光功率
I	注入到激光器的外部驱动电流,包含外部加载的偏置电流 I_b 和信号电流 I_s (根据假设3,此处 I_s 为0)
$I_{th}(N, T)$	阈值电流,其与载流子数 N 和温度 T 相关; 激光器电流 I 超过该值时激光器发光
$\eta(t)$	$L-I$ 曲线的斜率,其与温度相关;从能量转换角度看,斜率对应于转换效率($L-I$ 曲线横坐标是电流 I ,纵坐标是出光功率 P ,斜率越高则电-光转换效率越高);
$I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$	其中 I_{th0} 为常数,是与温度相关的经验热偏置电流 (即激光器内部的偏置电流,随激光器温度而变化,有别于外部人为加载的激光器偏置电流 I_b)。

根据假设 1, (1-1)式可以简化为

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (1-2)$$

将 $I_{off}(T)$ 表示为:

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (1-3)$$

式(1-3)中的温度 T 受外界环境温度 T_0 和自身的温度影响,自身的温度与器件产生的瞬时功率 IV 相关,即受 V-I 特性(电压-电流特性)影响:

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (1-4)$$

其中:

R_{th} : VCSEL 热阻抗; τ_{th} : 热时间常数; T_0 : 环境温度;
 I : 偏置电流 I_b (输入电流); V : 输入电压;

题目要求根据所给数据以及参数模型,确定模型参数 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 的数值,并得到在 10°C , 20°C , 30°C , ..., 90°C 等温度下的 L-I 曲线。假定当激光器在直流输入时,输出的平均光功率低于 2mW ,用户的光猫无法检测到信号;因此需要求出保证用户正常使用时的最高环境温度。

对以上提出的模型进行可行性分析后提出假设:

1.为简化模型,假设激光器转换效率受温度影响较小,即公式(1-1)中 $\eta(t)$ 近似于常数;

2.假设已知数据是稳态数据,则公式(1-4)中 V 不需考虑瞬态变化,即无需对其进行时序建模,可直接将观测数据带入^[2];

3.假设所有非光输出能量的损耗都转化为热能,则根据能量守恒定律,由观测所得的电压电流和光功率数据得到热功率数据 P_r ,如公式(1-8);

4.由于激光器注入电流为直流,则公式(1-4)中 $\frac{dT}{dt}$ 为 0。

由以上假设,可将模型中公式化简得到

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (1-5)$$

$$I_{off}(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4 \quad (1-6)$$

$$T = T_0 + P_r R_{th} \quad (1-7)$$

$$P_r = (IV - P_0) \quad (1-8)$$

由上可知,要得到 L-I 曲线,需对 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 进行参数估计。

4.2 非线性最小二乘模型建立

由 4.1 中模型可知,其要对公式(1-5)-(1-8)中的 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 进行参数估计,找到 P-I 的关系从而得到 L-I 曲线图。针对上述问题,我们采用基于最小二乘的拟合方法来求解模型参数。拟合即是用解析表达式 $y=f(x,c)$ 逼近离散数据的一种方法,其中 $f(x,c)$ 为拟合模型, $c=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ 是待定参数。根据 $f(x,c)$ 的不同形式,常用的拟合方法有多项式拟合、高斯拟合、傅里叶拟合、指数拟合、线性拟合、幂函数拟合和自定义函数拟合等。当 c 在 f 中线性出现时,称其为线性拟合模型,反之称为非线性拟合模型。衡量拟合优度的标准有很多种,最常用的一种做法是选择参数 c 使得拟合模型与实际观测值在各点的残差平方和达到最小,即最小二乘法。令 $y_i^*=f(c_i, r_i(x))$, 其中 $r_i(x)$ 是事先给定的一组线性无关的函数, c_i 是待估计参数,拟合准则是使 y_i 与 y_i^* 的距离 δ_i 的平方和最小,则其标准模型如下:

$$\min J(a_1, a_2, \dots, a_m) = \min \sum_i \delta_i^2 = \min \sum_i [y_i^* - y_i]^2 \quad (1-9)$$

本模型将根据 VCSEL 的 L-I 模型构建非线性最小二乘模型,即由所给数据 I、V 对 P 进行拟合,从而得到 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 参数估计。该模型如公式(1-9)-(1-11)所示,其等效为如下优化模型:

$$J(P_i^*, P_i | \theta) = \min \sum_i (P_i^* - P_i)^2 \quad (1-10)$$

$$P_i^* = \theta_1(I_i - \theta_2 - (\theta_4 + \theta_5(293.15 + (I_i U_i - P_i^*)\theta_3) + \theta_6(293.15 + (I_i U_i - P_i^*)\theta_3)^2 + \theta_7(293.15 + (I_i U_i - P_i^*)\theta_3)^3 + \theta_8(293.15 + (I_i U_i - P_i^*)\theta_3)^4)) \quad (1-11)$$

Ps: 式 (1-9) θ_1 - θ_8 表示参数向量 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 中的各分量参数, 下文同;

Ps: 式 (1-10) 中参数 θ_2 与 θ_4 虽均为常数, 但考虑其具有不同的物理意义, 因此需要分开求解。

根据上述(1-10)-(1-11)的优化模型公式中, 接下来需输入已知的表格实验数据 I_i, U_i, P_i 对 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 进行优化估计。

4.3 模型求解

4.3.1 Lingo 初解

根据上文分析, 非线性最小二乘拟合的模型较为复杂, 一般优化算法对初始迭代点要求较高, 因此首先求解其简化得到的非线性最小二乘模型以做初步分析, 即将待估参数 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 变为 $\theta'=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1)$, 得到模型如公式(1-12)。(也可由 Lingo 直接求该非线性模型以做后续求解参考, 此处只简化模型, 其解得的(1-9)-(1-11)所示模型的局部最优解和性能分析可见附录)

$$P_i^* = \theta_1'(I_i - \theta_2' - (\theta_4' + \theta_5'(293.15 + (I_i U_i - P_i^*)\theta_3')) \quad (1-12)$$

该简易模型将可在无初始值的情况下直接求解, 其结果不仅可以初步用来检测模型对数据拟合的有效性, 还可以和题目给定初值进行对比并得到较优初始值。在此可采用 Lingo 软件编程实现, 求得在一定参数范围的全局极小值及其对应的全局最优解($\eta^*, I_{th0}^*, R_{th}^*, a_0^*, a_1^*$)。

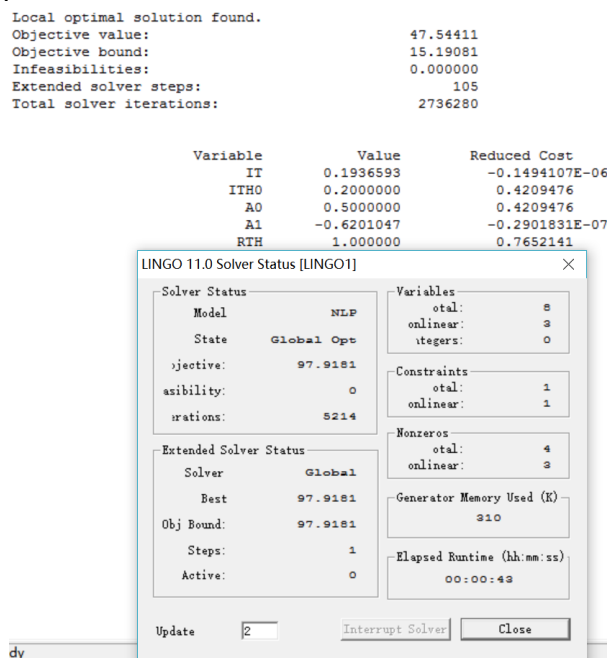


图 1-1 Lingo 全局最优解

Lingo 全局最优解的分析总结如下:

从图 1-1 可以看出, 其在无初始值的条件下迭代求得模型残差的平方和为 97.9181, 具备一定的可信度, 并且为后面的求解过程提供了较优的参数初值。从影子价格(Reduced Cost)可以看出, 该优化结果较为粗糙, 参数 Itho、a0 和 Rth 对其目标函数影响较为灵敏(其对应的影子价格较大), 这是因为模型过于简化而对数据拟合能力有限的缘故, 所以需接下来进一步对精确模型进行参数寻优。

4.3.2 OptimalTool 求解

将 Lingo 软件得出的简易模型的全局最优解与题目给定的初始参数值相互对比，并调整相关参数的初始优化参数，而后带入 Matlab 软件中的 OptimalTool 工具箱对模型(1-10)式进行迭代优化求解。

由(1-10)式可知，该优化问题显然不是一个凸问题，而是一个非线性多变量优化问题，且 P^* 无法显式表达从而无法直接优化。为此我们调整优化目的为使用已知的电流和电压数据在恰当的参数下，应使得功率 P^* 尽可能地逼近实验所得功率数据 P ，即转换为如公式(1-13、14)所示的模型，该模型的优化的准则或者说代价函数 J 就是这两者的误差平方和，我们的问题转化为最小化 J ，其只是实验数据 P_i 的函数，故不再需要显式表达 P 。由此我们只需求解下述最小二乘即可估计出参数 $\theta_1=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ：

$$J(P_i^*, P_i | \theta) = \min \sum_i (P_i^* - P_i)^2 \quad (1-13)$$

$$P_i^* = \theta_1(I_i - \theta_2 - (\theta_4 + \theta_5(293.15 + (I_i U_i - P_i)\theta_3) + \theta_6(293.15 + (I_i U_i - P_i)\theta_3)^2 + \theta_7(293.15 + (I_i U_i - P_i)\theta_3)^3 + \theta_8(293.15 + (I_i U_i - P_i)\theta_3)^4)) \quad (1-14)$$

对于上述优化模型求解，比较常见的算法有梯度下降法、牛顿法和拟牛顿法等，这些算法虽然简单可靠，但需梯度甚至二阶梯度信息，且在本问题中更容易陷入局部最小，因此采用 Matlab 中的 OptimalTool 工具箱中的 fminsearch 函数进行优化，该函数使用 Nelder-Mead 单纯形法，是一种无需梯度信息直接搜索法，能够较好的避免陷入局部最小。

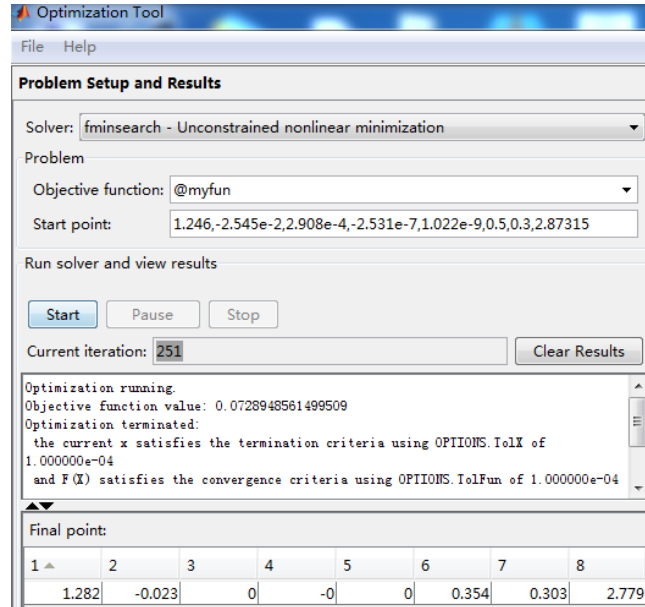


图 1-2 OptimalTool 工具箱求解参数

使用 OptimalTool 工具箱最小值代价函数 J 即公式(1-13)时，需将代价函数写入 myfun，使用上文调整好的初始值开始迭代优化，由图(1-2)可以看出，函数在迭代了 251 次后收敛，此时的代价函数值也即误差平方和(SSE)仅为 0.07289，而且得到的参数，均在正常的范围内(如下表所示)，验证了模型的正确性和可靠性，符合 VCSEL 物理特性。

表 1-2 参数结果列表

参数	参数数值	单位
a ₀	1.28204031109325	mA
a ₁	-0.0229712121492861	mA/K
a ₂	0.000109556459533337	mA/K ²
a ₃	-4.54825497296072e-07	mA/K ³
a ₄	1.02009003377180e-09	mA/K ⁴
η	0.353998636592818	----
I _{th0}	0.303072445217598	mA
R _{th}	2.77943164782470	K/mW

4.3.3 cftool 验算和模型分析

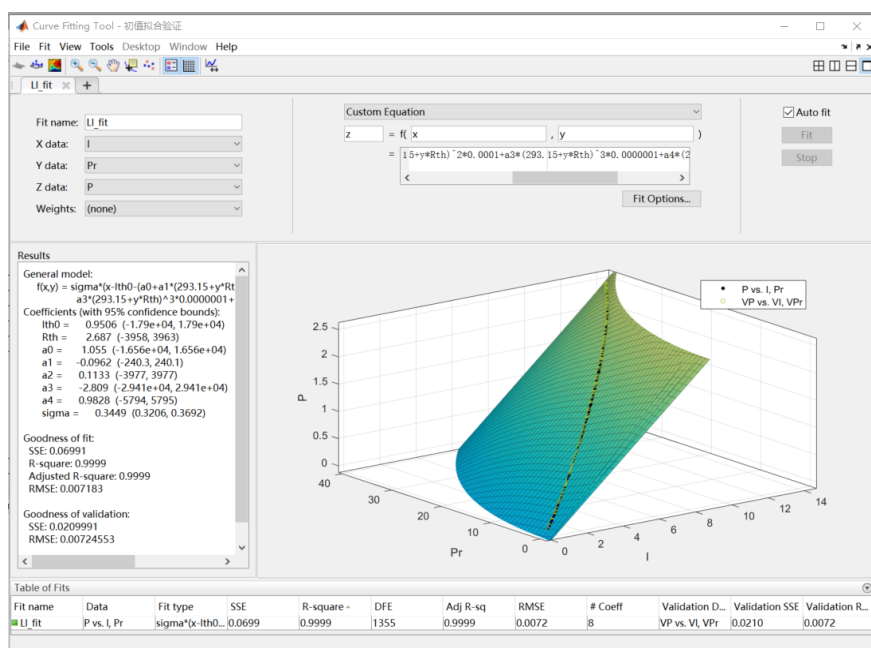
为将上述优化问题转换成拟合问题，需构造一个新的自变量 P_{ri} ，即根据非线性最小二乘模型将所用公式书写如下，式(1-16)即为待拟合模型：

$$\theta = \arg \min_{\theta} J(P_i^*, P_i | \theta) = \arg \min_{\theta} \sum_i (P_i^* - P_i)^2 \quad (1-15)$$

$$\begin{aligned} P_i^* &= f(I_i, P_{ri} | \theta) \\ &= \theta_1(I_i - \theta_2 - (\theta_4 + \theta_5(293.15 + P_{ri}\theta_3) + \theta_6(293.15 + P_{ri}\theta_3)^2 \\ &\quad + \theta_7(293.15 + P_{ri}\theta_3)^3 + \theta_8(293.15 + P_{ri}\theta_3)^4)) \end{aligned} \quad (1-16)$$

$$P_{ri} = I_i V_i - P_i \quad (1-17)$$

由 4.3.1 中的 Lingo 求解得到较为优化的参数初始值，将其与题目给定的初试参数值进行比较，选择得到较优初始参数值，通过 cftool 的 Trust-Region 信赖域方法对等式(1-16)进行最小二乘拟合，得到参数 $\theta_2=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 值，其间得到拟合效果图，如图 1-3 所示。

图 1-3 cftool 中 Trust-Region 解得参数 θ_2 的拟合效果图

为验证 4-3-2 中 OptimalTool 工具箱解得参数 θ_1 的拟合效果，将其参数结果带入 cftool 中作为拟合初值，但并不进行进一步迭代拟合，仅以其参数绘出相应拟合曲面并得到拟合优度指标，以判断转换最小二乘模型的正确性和稳定性。可以从图 1-4 中看出，OptimalTool 工具箱中 Nelder-Mead 单纯形法解得的参数 θ_1 与 cftool 工具箱中 Trust-Region 信赖域方法迭代产生的解 θ_2 具有相似的拟合曲面，两种算法的不谋而合正是说明了最小二乘的可行性和该模型的鲁棒稳定性。

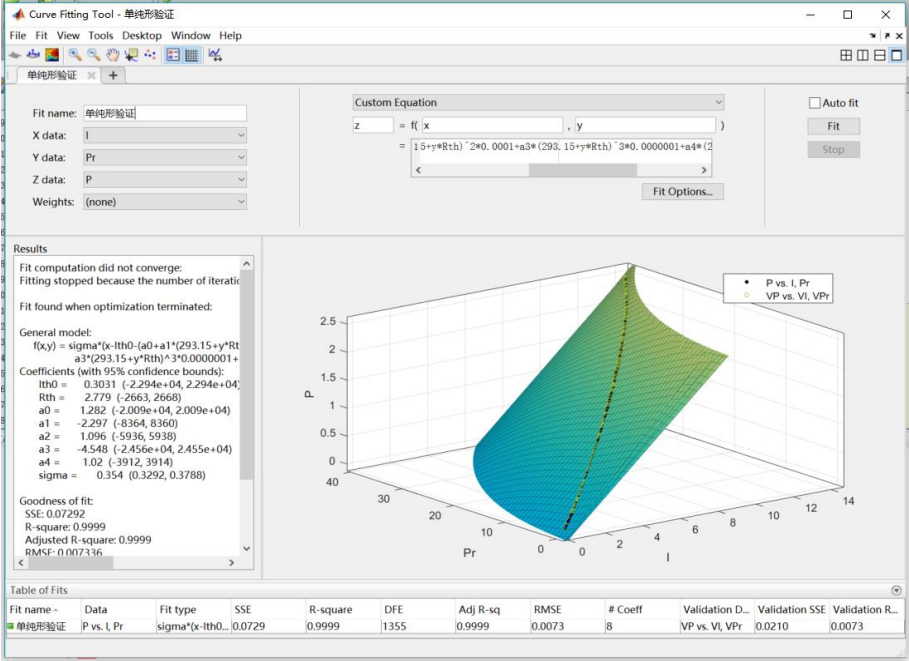


图 1-4 OptimalTool 中 Nelder-Mead 单纯形法解得参数 θ_1 的拟合效果图

上述参数对数据的拟合效果除了上图所示的直观展示外，我们还求得了衡量两组参数对数据的拟合优度指标如表 1-3 所示；对于 fit 数据集(拟合数据集)，其 $SSE \approx 0$ 表示拟合精度很高， $R\text{-square} \approx 1$ 表示模型对数据解释能力极强。而对于 validation 验证集(从 1401 个待拟合数据中抽取的 400 个不直接参加拟合而用于验证的数据组成的集合)，其 $SSE \approx 0$ 表示其没有发生过拟合， $R\text{-square} \approx 1$ 表示模型对新数据泛化能力极强。

表 1-3 拟合优度指标比较

参数值	Cftool 工具箱求解	OptimalTool 工具箱求解
SSE of fit	0.07151	0.07292
R-square	0.9999	0.9999
Adjusted R-square	0.9999	0.9999
RMSE of fit	0.007265	0.007336
SSE of validation	0.0206363	0.0210393
RMSE of validation	0.00718268	0.00725246

为进一步分析其拟合指标，以对激光器的 L-I 模型参数估计问题具有更深层次了解，我们对图 1-3 的参数结果做出详细分析，如表 1-4 所示：

表 1-4 参数结果

参数值	Cftool 工具箱求解	OptimalTool 工具箱求解
说明	括号中的数值为该参数的 95%置信区间	
η	0.3514 (0.3268, 0.376)	0.354 (0.3292, 0.3788)
I_{th0}	-0.1543 (-2.62e+04, 2.62e+04)	0.3031(-2.294e+04, 2.294e+04)

R_{th0}	2.626(-2989, 2994)	2.779 (-2663, 2668)
a_0	2.038 (-2.371e+04, 2.371e+04)	1.282(-2.009e+04, 2.009e+04)
a_1	-1.789 (-6850, 6847)	-2.297 (-8364, 8360)
a_2	0.7204 (-5907, 5908)	1.096(-5936, 5938)
a_3	-4.259 (-2.947e+04, 2.946e+04)	-4.548(-2.456e+04, 2.455e+04)
a_4	1.116 (-5085, 5087)	1.02 (-3912, 3914)

函数
模型

$$f(I, Pr) = \eta(I - I_{th0} - (a_0 + a_1(293.15 + Pr R_{th})10^{-2} + a_2(293.15 + Pr R_{th})^2 10^{-4} + a_3(293.15 + Pr R_{th})^3 10^{-7} + a_4(293.15 + Pr R_{th})^4 10^{-9}))$$

ps : 上式中的 10^{-2} 、 10^{-4} 、 10^{-7} 和 10^{-9} 是 a_1 、 a_2 、 a_3 和 a_4 的缩放因子，便于参数在不同量级的变量之间非等步长寻优；

从上表格数据中可以看出，两个解之间各参数非常接近且都符合一定实际或物理意义，但是参数的置信区间较为宽广，且可以看到图 1-3 和图 1-4 中拟合曲面的 90%置信度的上下包络曲面和模型曲面并无太大差别，由此可以知道该模型具有较大鲁棒性，寻优空间较为平坦，这无疑降低了我们对其优化的难度。

4.4 问题解答

上文通过采用最小二乘的算法已经估计出了参数 θ 的值，但为了得到 20℃ 时的 L-I 曲线中的 P，需要解 P 的一元四次方程，其解析解的求解无疑将是既耗时又耗力低效的工作。为避免这一难题，本节构建了 P 的最小二乘数值解法，下面将介绍由电流 I_i 、 U_i 反解出光功率 P 数值解的步骤：

首先将参数 θ 值带入(1-11)式消去参数 θ 得到零点方程(1-18)：

$$P_i^* - f(I_i, U_i, P_i^*) = 0 \quad (1-18)$$

而后得到使得等式左侧逼近于 0 的最小二乘模型函数：

$$P = \arg \min_P (f(I_i, U_i, P) - P)^2 \quad (1-19)$$

再次，利用题目数据 I_i 、 U_i (由假设得知每种温度下对应电压值不变) 带入(1-13)式，然后用题目数据 P_i 作为初值来遍历；最后，对从 10℃ 开始遍历一直到 90℃ (每次加 10℃，实际编程时使用开尔文度量)，得到 10℃，20℃，30℃，...，90℃ 等温度下的 L-I 曲线(横坐标是电流强度，纵坐标是光功率)，如图 1-4 所示。另需注意的是，由实际情况可知低于阈值电流的时候激光器是不会有发光功率的，更不可能使 $P_0 \leq 0$ ，因此将 $P_0 \leq 0$ 的数据置零，得到最终 L-I 曲线如图 1-5。

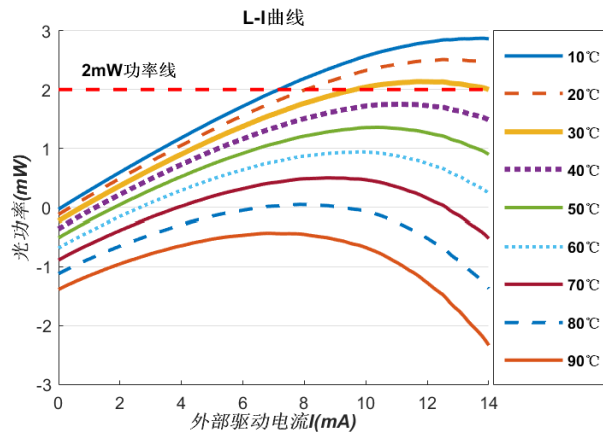


图 1-4 不同温度(10℃，20℃，30℃，...，90℃)下的 L-I 曲线

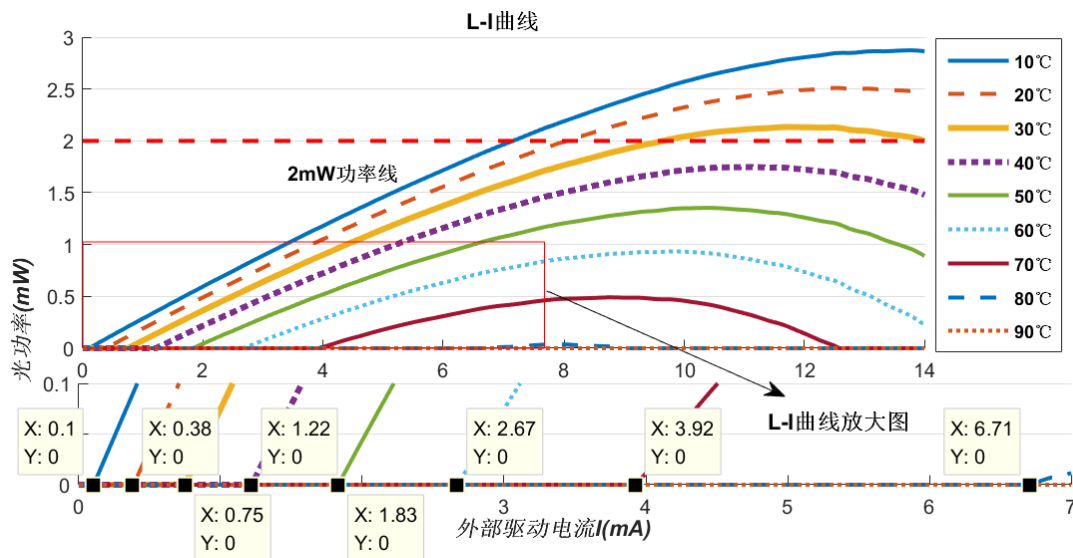


图 1-5 不同温度(10°C, 20°C, 30°C, ..., 90°C)下的 L-I 曲线(实际 L-I 曲线)

为了验算上面介绍的由电流 I_1 反解出光功率 P 的最小二乘方法, 图 1-6 绘出不同温度、不同偏置电流情况下解算 P 时, 式(1-19)的值, 即数值解 P 与精确解的残差平方和图。由图 1-6 可以看到, 各点的残差平方和基本上是有规律分布的且均为 10^{-9} 量级, 在不同的温度下相差不大, 即可以由此判定上述反解方法的正确性和可靠性, 以及上述求得的 P 是较为精确有效的数值解, 自然而然图 1-4 和 1-5 给出的 L-I 曲线也是值得信赖的。

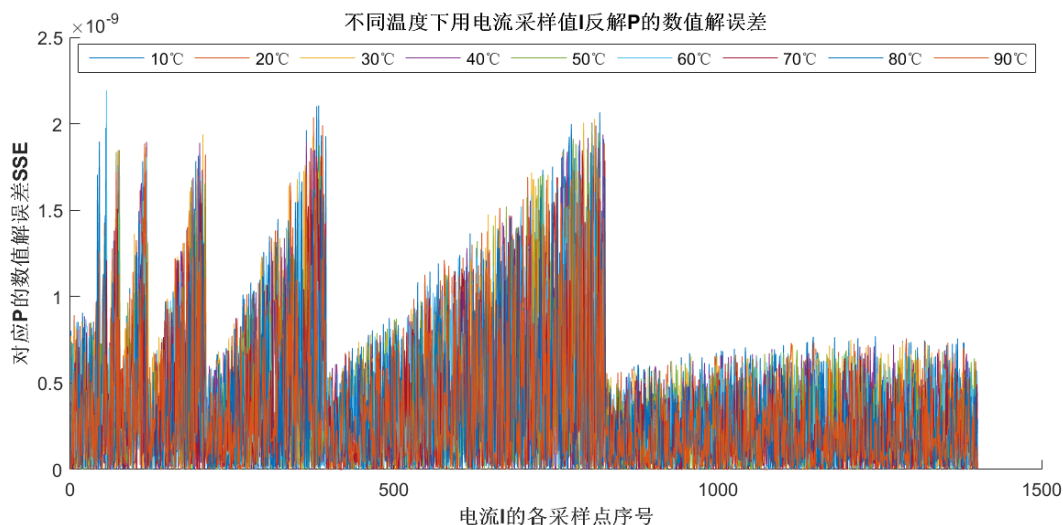


图 1-6 不同温度不同偏置电流下最小二乘反解 P_0 的数值解误差

但为了从另一个角度证明模型的稳定和数值解的有效性, 我们做出了图 1-7 所示的分析。如图所示, 图 1-7 是分别用 OptimalTool, cftool 两种不同优化方法得到的模型参数而反解得到的 P_0 残差图, 因 P_0 是一维列向量, 则图中的每条曲线都代表在当时的温度下两个工具箱的拟合残差, 图中标出的具体特征点是同一组功率序号对应当时温度下的功率残差值。从右图可以看出, 10°C 时残差几乎为零, 证明两个工具箱拟合程度较一致, 随着温度的升高, 残差越来越大, 但数值总是小于 0.025; 说明当温度参数发生变化时, 两个工具箱的拟合程度大体是一致的, 均可得到 L-I 曲线模型解, 充分论证了该算法的合理性。

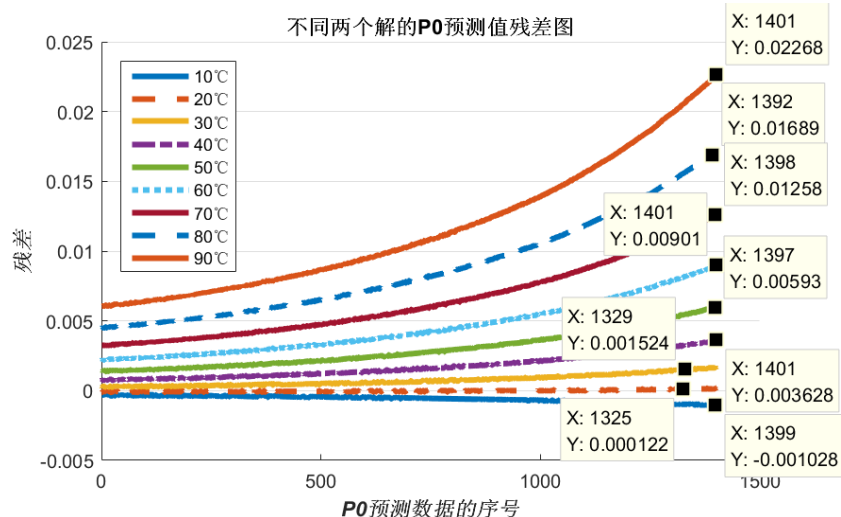


图 1-7 解 01 和 02 反求 P_0 的残差图

由图 1-5 可以看出,随着温度的升高,输光功率减少。而当温度高至 80°C 时,激光器几乎已经发不出光了。题目中假设当激光器的输光功率低于 2mW 时,用户无法检测到信号,那为了保证用户可以正常使用网络,需确定 2mW 时激光器所处环境的最高温度。首先从图 1-5 中可以看出,温度应该是在 30°C - 35°C 之间,因此需要对 30°C - 40°C 之间的温度进行遍历,编程采取步长为 0.01°C ,也就是说,要对 30°C - 40°C 之间的每个 0.01°C 对应的光功率值进行遍历,实则是对 1401×500 的矩阵进行遍历,当其功率值小于 2mW 时进行记录,得到如图 1-8 所示的包络图,搜索到的温度范围是 33.45°C - 33.58°C (该范围上下界分别是两组参数 01 和 02 的求解结果,考虑到该粗糙模型具有一定波动性,此处给出此温度范围)。

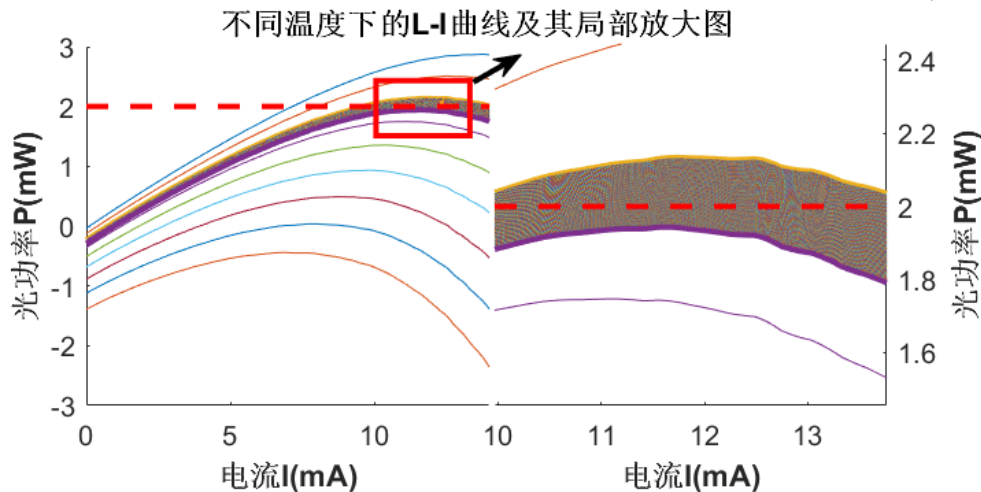


图 1-8 2mW 时对应的温度包络图

五、问题二的模型建立与求解

5.1 问题的描述与分析

题目要求针对问题一的精度和误差的原因,提出对模型的改进。问题一中为了简化模型提出了关于激光器实测电压的假设,假设内容是:已知数据是稳态数据,则等式(1-4)中 V 不需要考虑瞬态变化,即无需对其进行时序建模,可直接将观测数据带入。此假设忽略了在不同温度下电压与电流之间的关系,因此我们认为这个假设是模型误差产生的主要原因。在问题一其他假设不变的基础上进行建模,由先验知识^{[1][4]}可得 VCSEL 的电压-电流(V-I)关系如下所示:

$$V = f(I, T) \quad (2-1)$$

$$V = (b_0 + b_1 I + b_2 I^2 + \dots)(c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \dots) \quad (2-2)$$

注：T 为器件内部温度。

首先根据等式(2-2)和问题一中所给 V-I 数据采用最小二乘的方法对参数 $b=(b_0, b_1, b_2, \dots)$, $c=(c_0, c_1, c_2, \dots)$ 进行估计，然后采用问题一的建模方式求解。

5.2 模型建立与求解

5.2.1 求解 $V=f(I, T)$ 中的待估参数

首先通过给定表格数据中的 V_i, I_i 得到等式(2-3)，通过最小二乘模型(1-9)得到等式(2-4)

$$V_i^* = (b_0^* + b_1^* I_i + b_2^* I_i^2 + \dots)(c_0^* + c_1^* T_i + c_2^* T_i^2 + \dots) \quad (2-3)$$

$$J = \arg \min_{b, c} (V_i^* - V_i)^2 \quad (2-4)$$

其次采用 cftool 拟合工具箱对等式(2-3)(2-4)进行求解，在拟合的过程中，针对等式(2-3)，首先不考虑温度 T 与 V 的关系，只对 V-I 进行拟合，对比表格数据中的 V-I，得到较好地参数值 b，其次加入 T 变量，发现 c_i 取值较大时，拟合效果很差，之后改用较小的 c_i 值，发现拟合效果有所改善，但不是很理想。因此得出结论：V=f(I, T) 关系中，温度 T 对电压影响很小，主要是电流 I 的影响。我们使用 cftool 工具箱拟合，得到参数 b, c 值，效果图如图 2-1 所示：

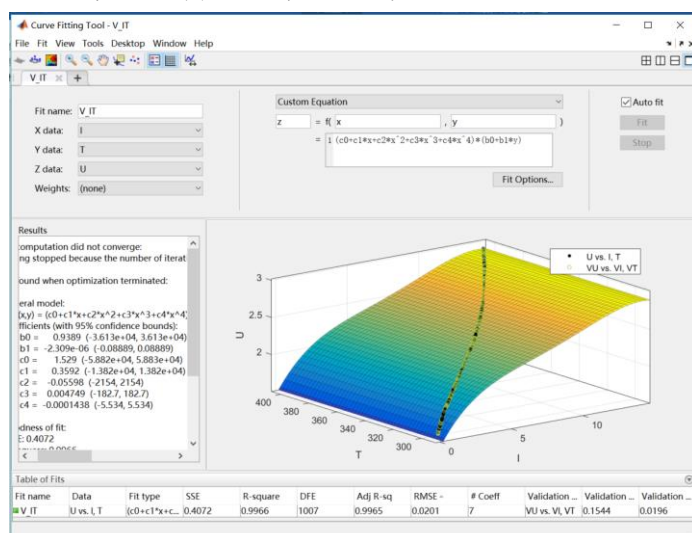


图 2-1 V=f(I, T) 的拟合效果图

图中黑色点线表示待拟合的数据点，绿色点表示从表格数据 V_i, I_i 中随机抽走的做验证集 400 个数据，其用来验证拟合的泛化能力；图中 $SSE_Fit=0.4072$ 和 $R\text{-square}_Fit=0.9966$ 表示模型的拟合优度很高，而 $SSE_Validation=0.1544$ 和 $RMSE_Validation=0.0196$ 表示拟合的泛化能力很强，即未存在过拟合现象

基于上述结论，我们同时也做出了 $V=f(I)$ 的拟合图，采用(2-5)的等式：

$$V_i^* = b_0^* + b_1^* I_i + b_2^* I_i^2 + \dots \quad (2-5)$$

也是使用 cftool 工具箱进行拟合，拟合结果如图 2-2 所示：

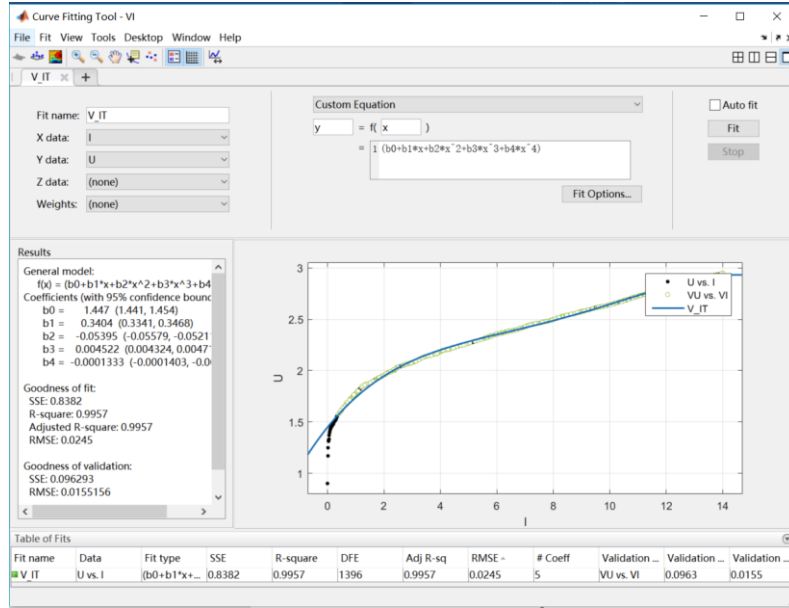


图 2-2 $V=f(I)$ 的拟合效果图

图中黑色点线表示待拟合的数据点，绿色点表示从表格数据 V_i, I_i 中随机抽走的做验证集 400 个数据，其用来验证拟合的泛化能力；图中 $SSE_Fit=0.4072$ 和 $R\text{-square_Fit}=0.9966$ 表示模型的拟合优度很高，而 $SSE_Validation=0.1544$ 和 $RMES_Validation=0.0196$ 表示拟合的泛化能力很强，即未存在过拟合现象

而综上两图，就 SSE 数据来说 $V=f(I, T)$ 和 $V=f(I)$ 均拟合的非常好，即待估参数 b, c 是可靠的，但从 Validation 角度来说， $V=f(I, T)$ 的泛化能力不如 $V=f(I)$ 好，因此我们采用 $V=f(I)$ 的模型带入后续计算。

5.2.2 求解 20℃ 时 P_0 中的待估参数

从 5.2.1 中分析可知， $V=f(I)$ ，则将模型计算所用公式书写如下：

$$P_{0i}^* = \eta(I_i - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (2-6)$$

$$I_{off}(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4 \quad (2-7)$$

$$T = T_0 + (I_i f(I_i) - P_{0i}) R_{th} \quad (2-8)$$

$$J = \arg \min_{\theta} (P_{0i}^* - P_{0i})^2 \quad (2-9)$$

注： $\theta = (\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$

将等式(2-7)(2-8)带入等式(2-6)得到等式(2-9)中的 P_{0i}^* ，(2-9)中 P_i 即表格数据，待估参数为 $\theta = (\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ，然后对(2-9)采用非线性最小二乘算法，使用 matlab 中 cftool 工具箱进行拟合即可得到待估参数 θ 。

5.2.3 求解不同温度时的 P_0

首先根据(2-6)得到零点方程(2-10)

$$P_{0i}^* - f(I_i, P_{0i}^*) = 0 \quad (2-10)$$

等式(2-10)中已知变量是 I ，未知变量是 P ，但由于其是隐性表达式，因此不

存在解析解，只能如 4.4 中那样求其数值解。因此构造等式(2-11)

$$J = \min(f(I_i, P_{0_i}^*) - P_{0_i}^*)^2 \quad (2-11)$$

采用 matlab 自带函数 `fminsearch` 求解(2-11)的数值解，其中 $P_{0_i}^*$ 的初值采取 20℃ 时 P_0 值，然后进行迭代。编程实现时外部添加一个循环，使得外部温度从 10℃ 开始，带入等式(2-8)，每次增加 10℃，最后得到 10℃，20℃，30℃，……，90℃ 等温度下的使得(2-11)最优的 $P_{0_i}^*$ 值，进而得到 10℃，20℃，30℃，……，90℃ 等温度下的 L-I 曲线。

5.3 问题解答

5.3.1 模型精度和误差分析

首先画出问题一中 20℃ 的 L-I 曲线中的 P 与给定数据 P 的残差图，如图 2-3 所示。然后再将 5.2.2 中改进后的 20℃ 的 L-I 曲线中的 P 与给定数据 P 的残差图画出来，如图 2-4 所示，再将两条曲线进行对比。

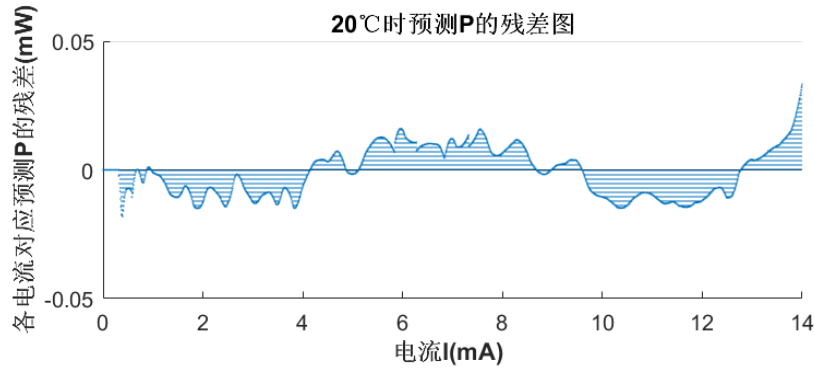


图 2-3 问题一模型中 20℃ 的 L-I 曲线中的 P 与给定数据 P 的残差图

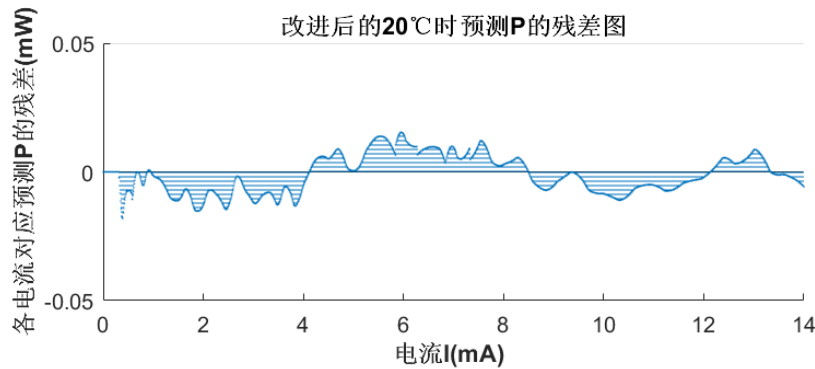


图 2-4 问题一优化过后 20℃ 的 L-I 曲线中的 P 与给定数据 P 的残差图

对图 2-3 和 2-4 进行分析，20℃ 的 L-I 曲线中的 P 与给定数据 P 的残差随着电流增加是周期变化的，所以我们认为题目中给定数据存在一定的随机噪声，因此预测误差由两部分组成，即采集 P - I 数据时的随机噪声和模型误差。对比两张图发现，改进后的模型在较大电流处对残差有明显的改善，因此说明改进后的模型是有效可靠的。而改进后仍无法去除掉的随电流周期性变化的噪声可能是测量数据的系统误差，例如采集设备增大电流时引起传感器特性周期性变化等引起的测量误差，与建模精度无关。残差图所残留的误差只是说明测量数据不够准确，而不是模型精度不够。

5.3.2 L-I 曲线对比和分析

根据上述模型和算法，求解各点 P ，并在图中画出改进前和改进后的 10°C ， 20°C ， 30°C ，.....， 90°C 等温度下的 L-I 曲线，如图 2-5 和 2-6 所示。

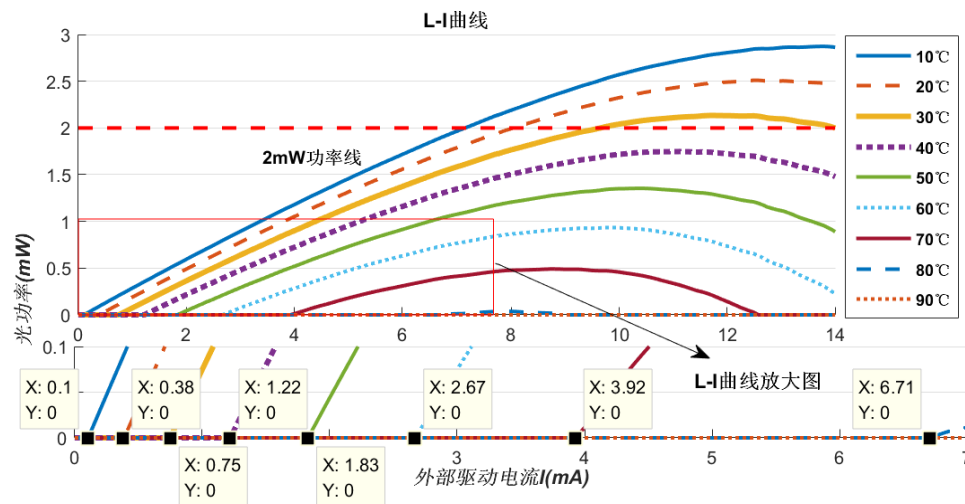


图 2-5 优化前的 10°C ， 20°C ， 30°C ，.....， 90°C 等温度下 L-I 曲线

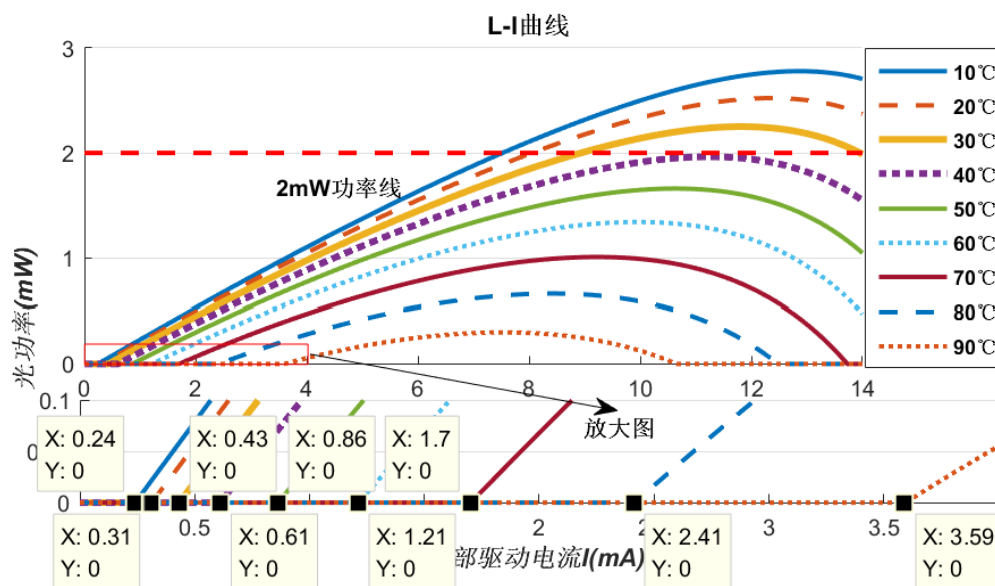


图 2-6 优化后的 10°C ， 20°C ， 30°C ，.....， 90°C 等温度下 L-I 曲线

从图 2-5 和 2-6 比较可得，首先，优化之前的 L-I 曲线在 80°C 时，光功率就已经近乎等于 0 了，优化后的 L-I 曲线图在 90°C 还能发出微弱的光信号，而且针对问题一中关于最低出光频率 2mW 对应的最高环境问题，优化前的温度是 33.45°C - 33.58°C ，优化后的温度是 38.7°C ，联系实际应用中的情况，优化后的模型的准确性有了明显的提高。其次，由给定数据可观察出低于阈值电流的时候激光器是不会有发光功率的(即 $P_0=0$)，从给定数据知阈值电流为 0.38，在 2mW 以上可用输光功率的温度下(即 10°C - 40°C)，对优化后的阈值电流与优化前的进行对比(见图中局部放大图)，发现优化后的阈值电流明显更接近 0.38。最后，无论从光功率还是阈值电流的观点出发，优化后的模型都比优化前的数据更可靠。

六、问题三的模型建立与求解

6.1 问题的描述与分析

VCSEL 的传输带宽越宽，用户上网的网速也就越快。为了适应未来的高速传输网络需求，期望设计出具有更宽带宽的激光器。带宽模型，通常也称为小信号响应模型，就是给器件输入不同频率的幅度非常小的信号(带宽模型曲线横坐标是频率，纵坐标是光功率幅度)，获得对应频率点输出信号的幅度(功率)；这里“不同频率”是从 0 频到指定频率按一定步长进行扫描，例如从 0 开始以 0.5GHz 为步长，扫描到 30GHz。

首先我们需要建立激光器小信号幅频响应参数模型，使用较为成熟的算法估计出模型中的参数，并画出在不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线，并分析激光器的温度与偏置电流对带宽响应曲线的影响；

其次是在 20℃、7.5mA 偏置电流的条件下，应如何操作以获得更宽的带宽；

最后已知激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置，分析造成这种现象的原因；同时指出应如何改进参数以使这部分带宽曲线更平坦。

6.2 模型建立与求解

6.2.1 模型建立

(1) 首先根据先验知识^[5]可得到激光器速率方程(3-1)和输光功率倍率方程(3-2)，即：

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \end{cases} \quad (3-1)$$

其中各符号说明如下：

N : 载流子数

t : 时间

η_i : 注入效率；或转换效率；

q : 物理常量，电子电量， 1.6×10^{-19} 库伦

N_0 : 透明载流子数，当载流子数 N 大于透明载流子数的时候

激光器有源区发生粒子束反转，满足产生激光的其中一个条件

I : 注入的外部驱动电流；

$I_{off}(T)$: 与温度相关的偏置电流

τ_n : 载流子复合寿命

τ_p : 光子寿命

G_0 : 增益系数，激光产生的阈值条件，增益大于总损耗；

S : 光子数

β : 受激辐射耦合系数

ε : 增益压缩因子

VCSEL 输出的光功率与光子数成正比，比例因子为 k ，如等式(3-2)所示。

$$P_0 = kS \quad (3-2)$$

(2) VCSEL 的小信号响应建模的思路为：

a). 求出稳态下的电流 I_s 、载流子数 N_s 、光子数 S_s ；稳态，即无驱动信号情况下，激光器中的电流为直流信号，此时电流是稳定的，载流子数、光子数也都是稳定的；

b. 加载小信号(小信号为信号幅度非常小的信号，不同频率处的信号幅度不同，因此小信号是与频率相关的小幅度信号)，可以假定小信号引入了与频率相关的电流、载流子数、光子数，数学表达可以写成： $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$ ；

c. 给 VCSEL 加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

$$\begin{aligned} I(t) &= I_s + i(f)e^{j2\pi ft} \\ N(t) &= N_s + n(f)e^{j2\pi ft} \\ S(t) &= S_s + s(f)e^{j2\pi ft} \end{aligned} \quad (3-3)$$

注：其中 $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$ 足够小。

(3) 根据以上数学表达式可推导出 VCSEL 的小信号响应模型数学表达式。

推导过程如下所示：

当外部驱动电流保持恒定，载流子数 N 与光子数 S 将在一段时间的瞬态后达到稳定状态，此时 N 和 S 对时间求导为 0(稳态下，载流子和光子数变化为 0)，那么等式(3-1)可以写为

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (3-4)$$

$$-\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (3-5)$$

现在考虑在已知输光功率 P_0 情况下激光器中载流子的浓度问题。将式(3-2)带入等式(3-5)，此时求出的 N 为稳态下载流子浓度，记为 N_s ，等式(3-5)得到

$$\begin{aligned} &\left. \begin{aligned} &-\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \\ &P_0 = kS \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &-\frac{P_0}{k\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0N_sP_0}{k + \varepsilon P_0} - \frac{G_0N_0P_0}{k + \varepsilon P_0} = 0 \\ &\left(\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) N_s = \frac{G_0N_0P_0}{k + \varepsilon P_0} + \frac{P_0}{k\tau_p} \\ &\frac{\beta(k + \varepsilon P_0) + \tau_n G_0P_0}{\tau_n(k + \varepsilon P_0)} N_s = \frac{k\tau_p G_0N_0P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0)}{k\tau_p(k + \varepsilon P_0)} \\ &N_s = \frac{\tau_n}{\beta(k + \varepsilon P_0) + \tau_n G_0P_0} \cdot \frac{k\tau_p G_0N_0P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0)}{k\tau_p} \\ &N_s = \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0N_0P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中, P_0 为通过仪器测量到的激光器的实测光功率, 即问题一中给定的光功率数据, $\lambda=(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta, \eta_i)$ 为参数。根据实测光功率和参数值, 从等式(3-6)可以计算出激光器中载流子浓度 N_s 。

根据计算出来的载流子浓度 N_s 可以进一步计算激光器中用于转换成光能的激光器驱动电流 I_{cur} 和激光器中稳态下理论上可计算处的光子数 S_s 。

将等式(3-2)和等式(3-6)计算出的载流子浓度 N_s 带入等式(3-4)中, 求出的电流 I 即为根据速率方程从理论上所计算出的激光器发光的驱动电流 I_{cur} :

$$\frac{\eta_i (I_{cur} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s - N_0) P_0}{k + \varepsilon P_0} = 0 \quad (3-7)$$

$$I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left(\frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T)$$

根据计算出的稳态下载流子浓度 N_s , 从等式(3-4)可以计算稳态下理论上的光子数 S_s :

$$\frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (3-8)$$

在通常的 VCSEL 激光器中, $\varepsilon S_s \ll 1$, 根据等式(3-8)得到理论计算出的激光器稳态工作时的光子数:

$$\frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} = G_0 (N_s - N_0) S_s \quad (3-9)$$

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)}$$

根据前面介绍知道, 激光器输光功率与光子数成正比, 比例因子为 k , 那么根据理论计算出的光子数 S_s 可以计算出理论上的光功率:

$$P_{od} = k S_s \quad (3-10)$$

至此, 我们已经计算出了激光器理论的光功率和理论上的驱动电流的值(P_{od} ; I_{cur}), 而通过仪器可以测量出激光器的光功率、驱动电流、电压(P_0 ; I ; V)。

现在进一步考虑加载小信号的情况以获得小信号响应的理论表达式。将等式(3-3)带入速率方程等式(3-1):

$$\begin{aligned} & \frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} \\ &= \frac{\eta_i (I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \\ & \frac{d(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{dt} \\ &= -\frac{S_s + s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta (N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \end{aligned} \quad (3-11)$$

稳态方程(3-4)，(3-5)中载流子浓度和光子数均为稳态理论值 N_s 和 S_s 时，等式重写为下面的形式：

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (3-12)$$

$$-\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (3-13)$$

将等式(3-12)和等式(3-13)带入等式(3-10)的第一个式子进行化简的：

$$\begin{aligned} \frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} &= \frac{\eta_i(I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\ &\quad - \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \\ (j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\ &\quad - G_0 \frac{(N_s - N_0)S_s + S_s n(f)e^{j2\pi ft} + (N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft} + n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\ &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\ &\quad - \frac{G_0 n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\ &\quad + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft} + G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \end{aligned} \quad (3-14)$$

增益压缩因子 ε 本身较小，它与小信号的乘积 $\varepsilon s(f)$ 值较小，现考虑在等式(3-14)中假定可以忽略其影响，即 $\varepsilon s(f) \rightarrow 0$ ；再考虑等式(3-14)中第四项，该项中包含的 $e^{j2\pi(2f)t}$ 相比其他项为 2 倍频高次项，高频信号在系统响应中不在考虑范围内，可忽略不考虑。由此，等式(3-14)可简化为

$$\begin{aligned} (j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} \\ &\quad + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s} \end{aligned} \quad (3-15)$$

根据等式(3-12)，等式(3-15)的前三项为 0，在略掉因子 $e^{j2\pi ft}$ 后，等式(3-15)化简为

$$(j2\pi f)n(f) = \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (3-16)$$

用同样的方法，等式(3-11)的第二个式子可以化简为

$$(j2\pi f)s(f) = -\frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} + \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (3-17)$$

由等式(3-17)得到

$$n(f) = \frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)}{\beta/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)} s(f) \quad (3-18)$$

根据前面的描述, 信号的响应等于对应频率处输出与输入信号的比值, 假定小信号响应为线性频率响应 $h(f)$, 按照定义表示为小信号带来的输出信号 $p(f)$ 与输入信号 $i(f)$ 的比值(功率比上电流)

$$h(f) = \frac{p(f)}{i(f)} = k \frac{s(f)}{i(f)} \quad (3-18)$$

将等式(3-18)带入等式(3-16), 并化简为等式(3-18)的形式得到

$$\begin{aligned} h(f) &= k \frac{s(f)}{i(f)} \\ &= \frac{k\eta_i}{q} \cdot \frac{1}{\left[\frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)}{\beta/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)} \right] \left[\frac{j2\pi f + 1/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)}{+G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)} \right]} \end{aligned} \quad (3-19)$$

通常, 我们在通信系统里面的信号响应有如下形式

$$h(f) = \frac{X}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (3-20)$$

将等式(3-19)写成等式(3-20)的形式, 那么,

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} Z &= \left[\frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \right] \cdot \left[\frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] + \left[\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] \cdot \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \\ &= \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 S_s}{\tau_p(1 + \varepsilon S_s)} - \frac{(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(1 + \varepsilon S_s)} \end{aligned} \quad (3-22)$$

将 $P_s = kS_s$ 带入等式(3-21)和等式(3-22), 将稳态下的光子数 S_s 用光功率 P_s 表示

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (3-23)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p(k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (3-24)$$

等式(3-16)和等式(3-17)是忽略了 $\varepsilon s(f)$ 项得到的, 为了进一步提高精度, 假定只忽略高阶项, 而不忽略 $\varepsilon s(f)$ 项, 则可以得到

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (3-25)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (3-26)$$

最后，响应函数需要进行归一化处理，因此不必关心刚才等式里面的 X 表达式是什么，在归一化处理时 X 被抵消掉了。归一化小信号响应为

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (3-37)$$

将上述的 Y 和 Z 带入等式(3-37)，即可获得 VCSEL 的小信号响应数学表达式。在该表达式中存在许多的参数，需要采用非线性最优化获取最佳的参数值，使得在相同的温度和偏置电流影响下，按照等式(3-37)输出的响应 $H(f)$ 与实测的响应输出一致(题目中给定的表格数据曲线幅度)。

(4) 由(3)的推导过程可以总结得出：根据实测激光器光功率 P_0 值和参数 $\lambda=(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta, \eta_i)$ ，我们可以计算出载流子浓度 N_s ；将计算出的载流子浓度 N_s 带入等式(3-7)，可以得到理论上的驱动电流 I_{cur} ，该理论值与实测驱动电流值相减可以得到第 1 个误差约束关系，如等式(3-38)所示。

$$\min |I_{cur} - I|^2 \quad (3-38)$$

再将计算出的载流子浓度 N_s 带入等式(3-9)和等式(3-10)，可以得到理论上的激光器光功率，将该理论光功率值与实测激光器光功率 P_0 相减可以得到第 2 个误差约束，如等式(3-39)所示。

$$\min |P_{od} - P_0|^2 \quad (3-39)$$

第 3 个误差约束将由理论计算出的小信号响应与测试的小信号响应值给出，如等式(3-40)所示。

$$\min |S_{21} - A_m|^2 \quad (3-40)$$

其中： $S_{21} = 10 \log |H(f)|$ 。

6.2.2 模型求解

首先总结上述推导过程，将求解模型时使用的公式重写如下所示：

$$N_s = \frac{P_0 / (k \tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \quad (3-41)$$

$$I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left(\frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T) \quad (3-42)$$

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)} \quad (3-43)$$

$$P_{od} = kS_s \quad (3-44)$$

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (3-45)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (3-46)$$

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (3-47)$$

$$J1 = \min |I_{cur} - I|^2 \quad (3-48)$$

$$J2 = \min |P_{od} - P_0|^2 \quad (3-49)$$

$$J3 = \min |S_{21} - A_m|^2 \quad (3-50)$$

$$S_{21} = 10 \log |H(f)| \quad (3-51)$$

$$J = \arg \min_{\lambda} (J1 + J2 + J3) \quad (3-52)$$

其次介绍模型求解过程，本题有三个约束条件，分别对这三个条件分析：

(1)根据等式(3-41)的 N_s 求出等式(3-42)的 I_{cur} ，然后对等式(3-47)利用非线性最小二乘方法估计在 20℃时的参数 $\lambda=(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta, \eta_i)$ 。即使用等式(3-48)的残差平方和最小来估计参数 λ ，其中需要用到问题一给出的数据 P_0, I, V 和问题一的 L-I 模型中估计所得的参数 $\theta=(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ (值得注意的是 θ 中的 η 是问题一中的估计参数，与此处需要估计的 η_i 不同)。

(2)和(1)中方法相同，根据等式(3-44)求出 P_{od} ，然后对等式(3-49)利用非线性最小二乘方法估计在 20℃时的参数 $\lambda=(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta, \eta_i)$ 。

(3)根据等式(3-41)和(3-44)求出等式(3-45)和(3-46)(注意此时 S_s 中的变量 I 取值并非问题一中的一列数据，而是偏置电流 $I_b=7.5\text{mA}$ ，因此求出的结果 Y 和 Z 均是一个数，而不是一列数)，然后将结果带入(3-47)中，最后对等式(3-50)利用非线性最小二乘方法估计在温度为 20℃，偏置电流为 7.5mA 时的参数 $\lambda=(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta, \eta_i)$ 。

(4)当分别使用约束(1)和(2)进行优化时，得到的理论计算电流值与实测电流值相差较小，理论功率值与实测功率值相差较小，但 S_{21} 曲线与数据相差很大。当使用约束(3)进行优化时， S_{21} 曲线与数据拟合很好，但 P_{od} 与 P_0 、 I_{cur} 与 I_0 都相差较大，因此需要对这三个约束同时进行优化。

6.3 问题解答

6.3.1 问题(a)的解答

由上述可知，本题的参数估计是有三个约束条件的多约束(或叫作多目标)优化问题，单独使用其中某一个约束都不能得到理想的参数。因此求解该多目标优化问题时，使用评价函数法将多目标优化转化为一个单目标优化问题来解，而且

该单目标优化问题的目标函数是用多目标问题的各个目标函数构造出来的,称为评价函数(或叫作代价函数)。评价函数法中主要有线性加权法和乘除法。所谓线性加权法就是将各个目标函数分别乘上权值再相加得到评价函数,权值代表各个目标的重要性,一般根据经验和实际情况选择;所谓乘除法就是将各个目标函数相乘得到评价函数。通过仿真实验发现使用线性加权法,各个权值均为1的情况下结果最好,使用 optimtool 工具箱优化求得的参数满足激光器相应参数的物理意义, S21 曲线拟合良好,理论电流值(7.1783mA)和实测电流值(7.5mA)误差在5%以内,理论功率值(2.1187mW)和实测功率(1.9042mW)值误差稍大,不过算得的理论功率值也在合理范围内。如下表所示(表 3-1)是求得的各个参数值:

表 3-1 参数值表

参数名称	参数值
η	1.03844813750832
β	4.79853295649234e-06
τ_n	5.85232476781398e-11
k	1.18610248762731e-05
G_0	703799.256012186
N_0	807106.177392943
τ_p	9.78128979163662e-12
ε	4.56319862208049e-08

根据优化得到的参数作出 20℃、7.5mA 下模型的带宽响应曲线(即 S21 曲线),并与所给数据进行对比,如图 3-1 所示。

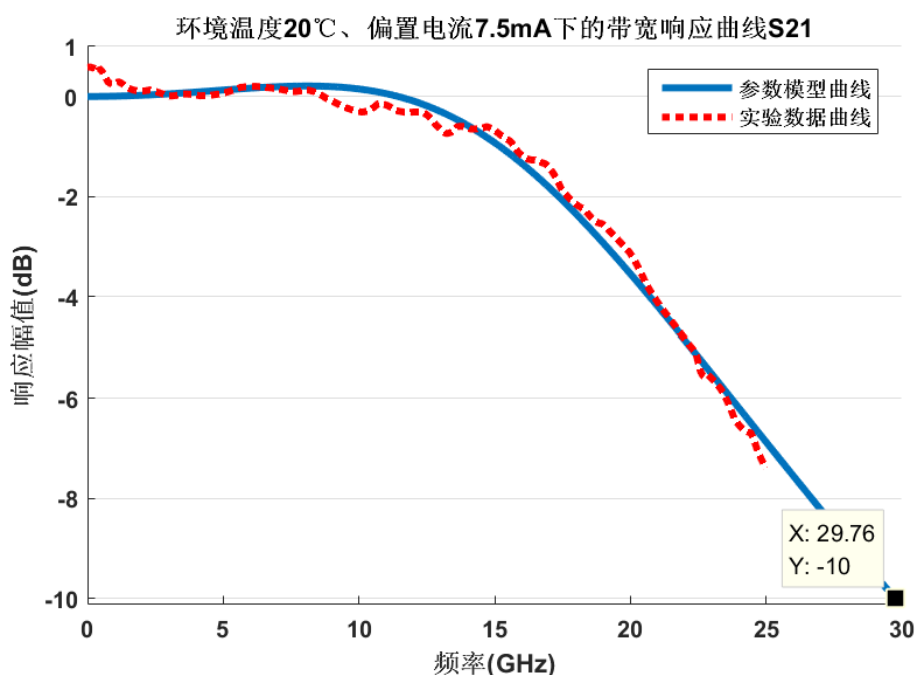


图 3-1 环境温度 20℃、偏置电流 7.5mA 的带宽响应曲线 S21

固定环境温度为 20℃，改变偏置电流，得到 S21 曲线，如图 3-2 所示：

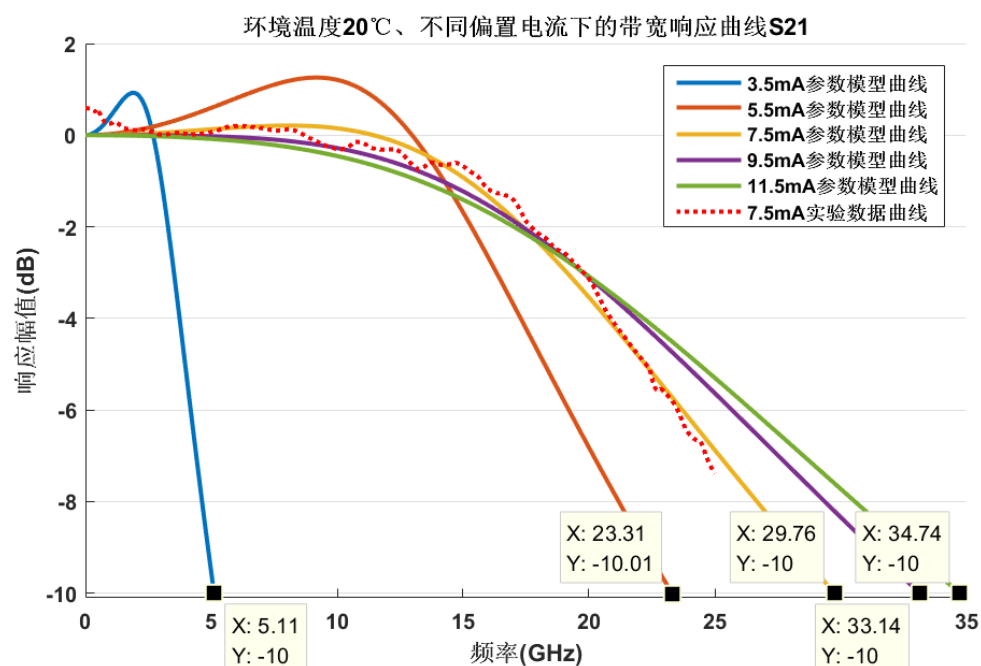


图 3-2 环境温度 20℃、不同偏置电流下的带宽响应曲线 S21

固定偏置电流为 7.5mA，改变偏置电流，得到 S21 曲线，如图 3-3 所示：

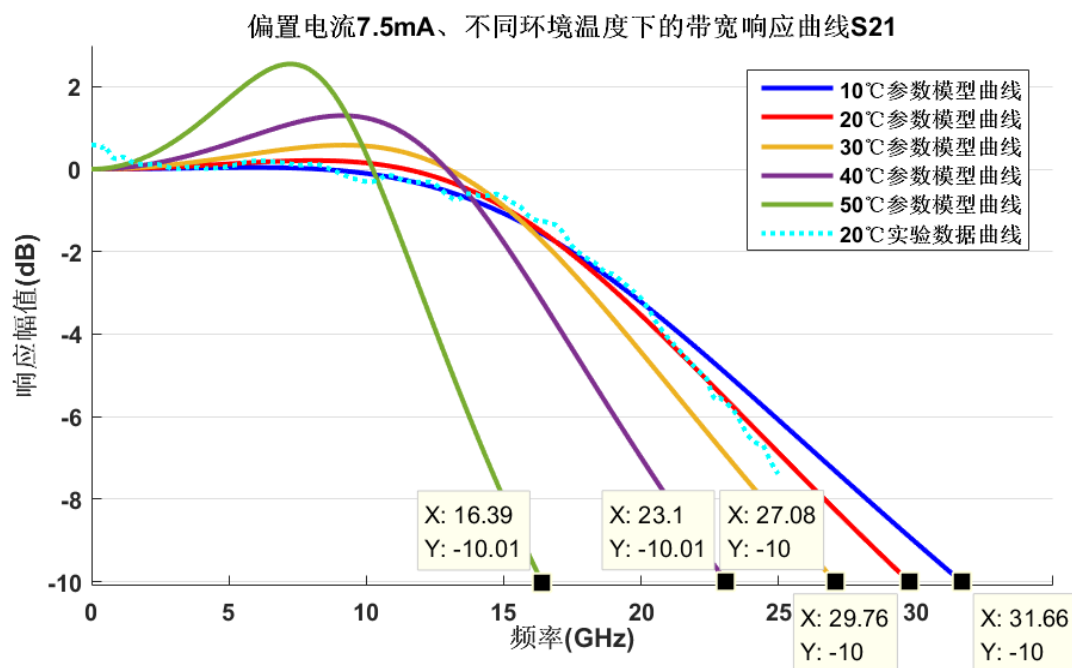


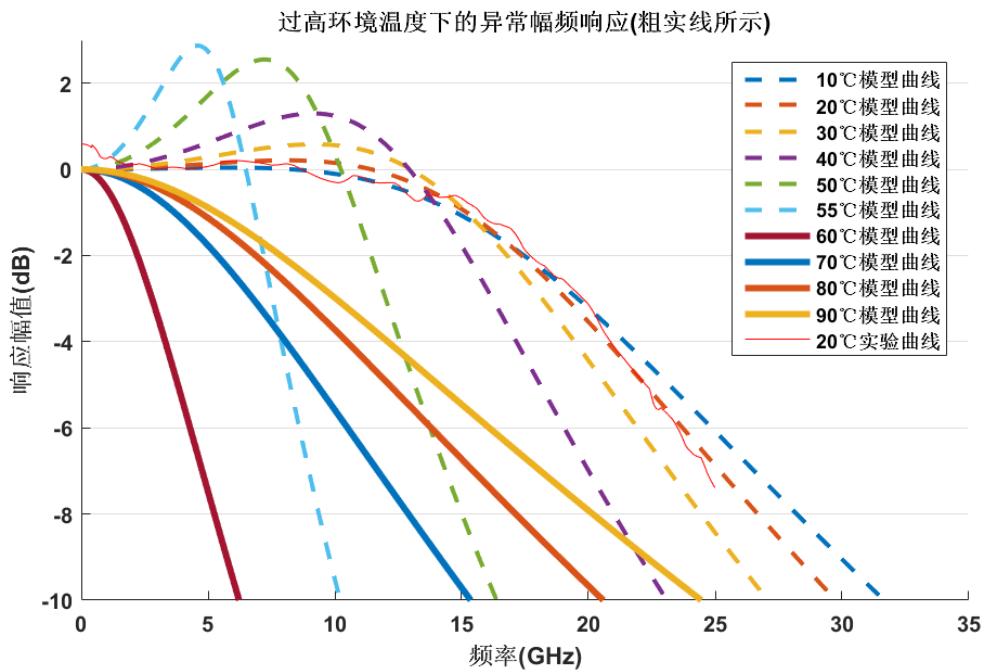
图 3-3 偏置电流 7.5mA、不同环境温度下的带宽响应曲线 S21

6.3.2 问题(b)的解答

由(a)中的结果图 3-2 和图 3-3 可以看出,在室温 20℃时,偏置电流为 3.5mA 时,带宽为 5.11GHz,偏置电流为 5.5mA 时,带宽为 23.31 GHz,偏置电流为 7.5mA 时,带宽为 29.76 GHz,偏置电流为 9.5mA 时,带宽为 33.14 GHz,偏置电流为 11.5mA 时,带宽为 34.74 GHz,可以看出在同一室温下,偏置电流在合理范围内变化时,偏置电流越大,信号的响应带宽越大,并且偏置电流越大,增加相同的偏置电流时,带宽的增加越小;在偏置电流 7.5mA 时,温度为 10℃时,带宽为 31.66GHz,温度为 20℃时,带宽为 29.76GHz,温度为 30℃时,带宽为 27.08GHz,温度为 40℃时,带宽为 23.1GHz,温度为 50℃时,带宽为 16.39GHz,因此在同一偏置电流下,室温在合理范围内变化时,温度越高,信号的响应带宽越小,并且温度越高,增加相同的温度,带宽减小越大。

分析认为,室温相同时,偏置电流越大,激光器产生的热越多,所以激光器的温度会随着偏置电流的增加而升高,从问题一结果可知,激光器温度的升高会使激光器功率降低,从而响应带宽变小,因此激光器响应带宽会随着偏置电流的增加而变大,而带宽增加的幅度会随着偏置电流的变大而减小;在偏置电流相同时,根据问题一建立的模型中等式(1-2)、(1-3)和(1-4)可知,激光器温度和室温直接正相关,而激光器输出功率(也就是幅度的平方)和激光器温度的四次方负相关,那么幅度和室温大概呈二次方负相关,因此室温越大,响应带宽越小,且温度越高,增加相同的温度,带宽减小越大。

另外,如图 3-4 所示,仿真实验中,当室温过大或驱动电流过小时,S21 曲线出现不符合上述规律的异常。这是因为,当温度过高或者驱动电流过小而导致输光功率过小时,小信号假设不再成立,此时驱动电流不能等价于偏置电流,信号电流的影响变得不可忽略,因此模型不能真实反映此时的幅频特性;另外由问题一也可知,当温度过高时,激光器有可能就没有光功率输出,比如 90℃时,此时当然就不能由模型画出幅频响应曲线。



前面分析了环境温度对带宽的影响，现在分析激光器器件温度对带宽的影响，此时因为 T 与功率 P 解耦，因此不需要使用优化方法求解，直接带入求解即可。如图所示，是器件温度从 10 度增加到 90 度的 S_{21} 曲线，可以看出，幅频响应带宽随着器件温度的上升而减小。

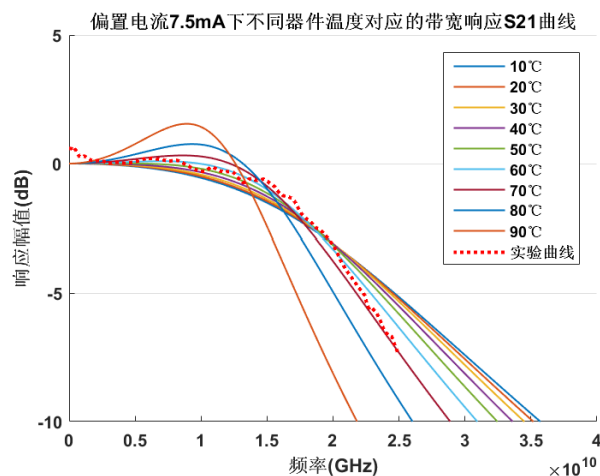


图 3-5 偏置电流 7.5mA 下不同器件温度对应的带宽响应 S_{21} 曲线

6.3.3 问题(c)的解答

根据热传递，器件工作时间长了以后发出的热量会影响到其环境温度，反过来说，器件周边的环境温度会影响到器件内部的温度。因此，当我们将器件放在一个精密的恒温箱中的时候，也就保证了器件内部和外部表面的温度恒定。此时若将偏置电流固定在 7.5mA，那么根据上面的结论，激光器的幅频响应带宽将不再变化。但这只是针对同一个激光器的结论，事实上，通过更改激光器的参数，可以实现带宽的增加。如图 3-5 所示，在 20°C、7.5mA 情况下，通过仿真实验更改激光器的参数，发现适当增加注入效率 η_i 、载流子复合寿命 τ_n 、增益系数 G_0 ，或者适当减小透明载流子数 N_0 、光子寿命 τ_p 时，带宽增加。如图所示：

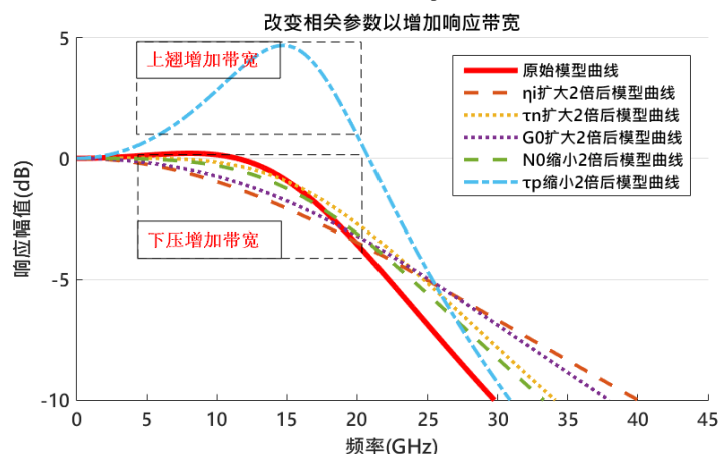


图 3-6 在 20°C、7.5mA 情况下通过改变参数增加的带宽图

从图 3-6 可以看出，参数 τ_p 在缩小 2 倍后，模型的 S_{21} 曲线发生上翘，同时 10dB 带宽变大；而参数 η_i ， τ_n ， G_0 在单独扩大 2 倍以及 N_0 单独缩小 2 倍后都会使 S_{21} 曲线发生下压，同时 10dB 带宽变大。由于每个参数对带宽的影响不尽相同，所以表 3-2 列出了详细的情况，即参数影响曲线的上翘下压情况和 10dB 带宽增加减少情况。

表 3-2 各参数对 S21 曲线和 10dB 带宽的影响

参数	参数符号含义	原始模型参数	参数值缩小 2 倍后的影响	参数值扩大 2 倍后的影响
η	转换效率	1.0384E+00	S21 曲线上翘 10dB 带宽减小	S21 曲线下压 10dB 带宽增加
β	受激辐射耦合系数	4.7985E-06	几乎没有影响	
τ_n	载流子复合寿命	5.8523E-11	S21 曲线上翘 10dB 带宽减小	S21 曲线下压 10dB 带宽增加
k	比例因子	1.1861E-05	几乎没有影响	
G_0	增益系数	7.0380E+05	S21 曲线上翘 10dB 带宽减小	S21 曲线下压 10dB 带宽增大
N_0	透明载流子数	8.0711E+05	S21 曲线下压 10dB 带宽增大	S21 曲线上翘 10dB 带宽减小
τ_p	光子寿命	9.7813E-12	S21 曲线上翘 10dB 带宽增大	S21 曲线下压 10dB 带宽减小
ε	增益压缩因子	4.5632E-08	几乎没有影响	

6.3.4 问题(d)的解答

由(a)和(b)的解答可知,增大温度或减小驱动电流都会使激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度会高于 0 频位置。由(c)的解答可以发现,当减小光子寿命 τ_p 时,激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度也会高于 0 频位置,幅频响应曲线向上翘起。事实上,如图 3-6 所示,通过实验发现,适当减小注入效率 η_i 、载流子复合寿命 τ_n 、增益系数 G_0 ,或者适当增加透明载流子数 N_0 也会出现这种现象。在实际应用中,我们希望这部分带宽曲线越平坦越好,那么我们可以通过适当调节上述参数中的某一项或者某几项来使凸起的部分变平,需要注意的是,调节这些参数的时候要符合该参数的物理含义,不能使该参数在实际当中不可达到(如使透明载流子数 N_0 减小到负值),也不能使驱动电流和环境温度变得不可接受。

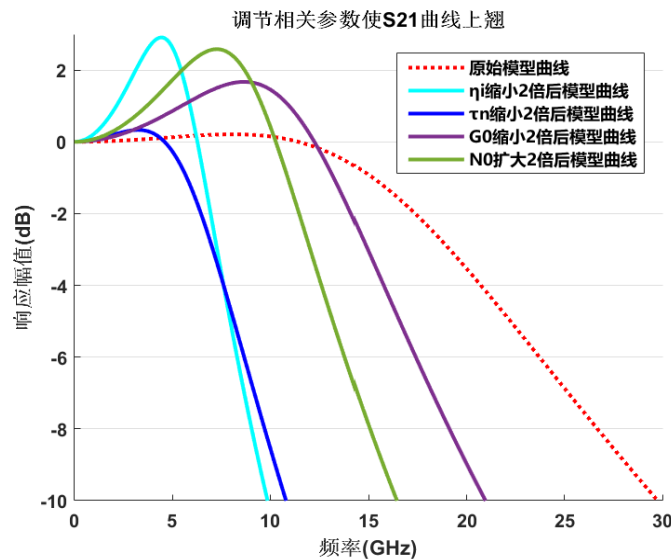


图 3-7 改变参数使得 3dB 范围内幅度高于 0 频位置图

七、问题四的模型建立与求解

7.1 问题的描述与分析

针对 VCSEL 的带宽模型，试找出更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快，或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB(或 10dB)带宽。给出建模方案，可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题 3 的模型进行比较。

7.2 模型建立与问题解答

7.2.1 思路一

在问题三的理论推导中，因为 $\varepsilon S_s \ll 1$ ，所以在式(3-8)推导式(3-9)的过程中做了简化，省略了 εS_s 。此处如果不做简化，可能会得到更准确的计算结果。下面重新推导出准确的 S_s ：

$$S_s = \frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0(N_s - N_0) - \varepsilon(\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n)} \quad (4-1)$$

上式结合式(3-41)、(3-42)、(3-44)、(3-45)、(3-46)、(3-47)和(3-51)，可以得到新的模型，使用问题三得到的参数数据，用此新的模型画出 20℃、7.5mA 时的 S21 曲线，如图 4-1，图 4-2，图 4-3，图 4-4 所示，从图中可以看出，20℃，7.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 10dB 带宽从 29.76GHz 变为 29.85GHz，有 90MHz 的增大；30℃，7.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 10dB 带宽从 27.08GHz 变为 27.15GHz，有 70MHz 的增大；20℃，8.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 10dB 带宽从 31.71GHz 变为 31.82GHz，有 70MHz 的增大；30℃，8.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 10dB 带宽从 29.2GHz 变为 29.29GHz，有 90MHz 的增大。

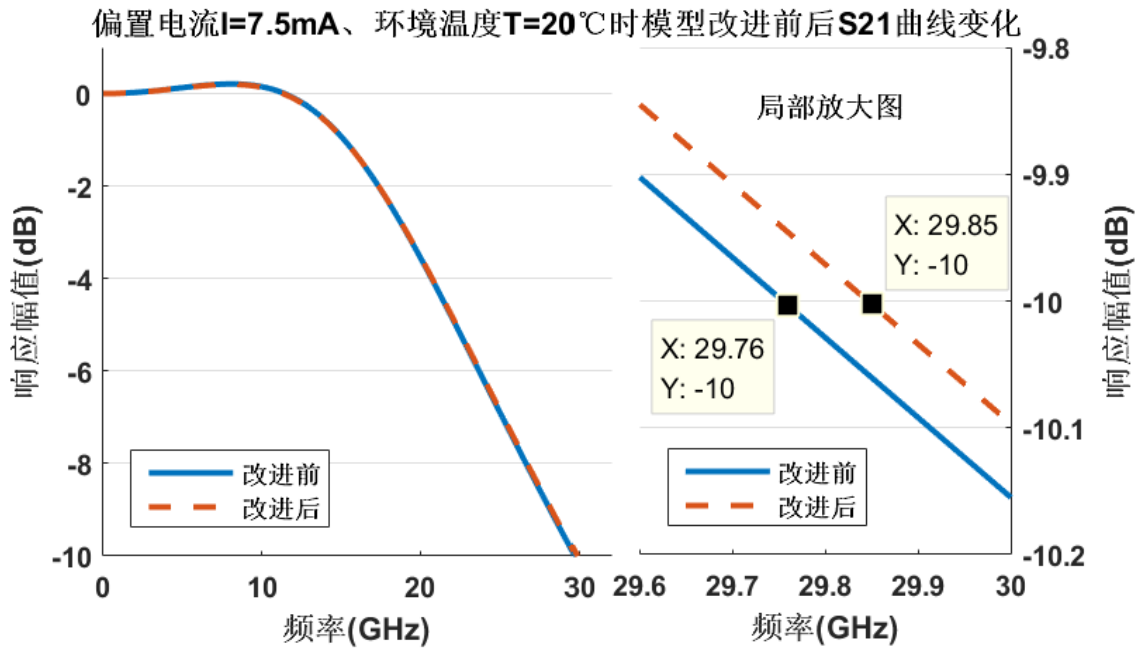


图 4-1 改进后的 VCSEL 的带宽模型曲线在 20℃,7.5mA 时的 S21 图

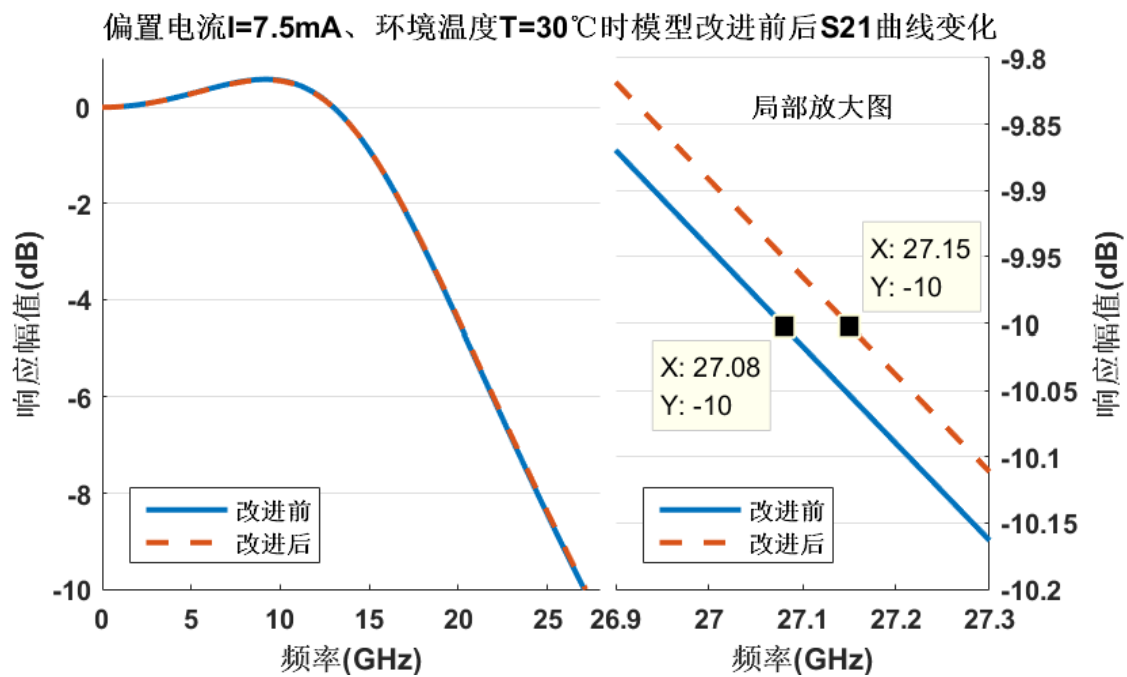


图 4-2 改进后的 VCSEL 的带宽模型曲线在 30°C , 7.5mA 时的 S_{21} 图

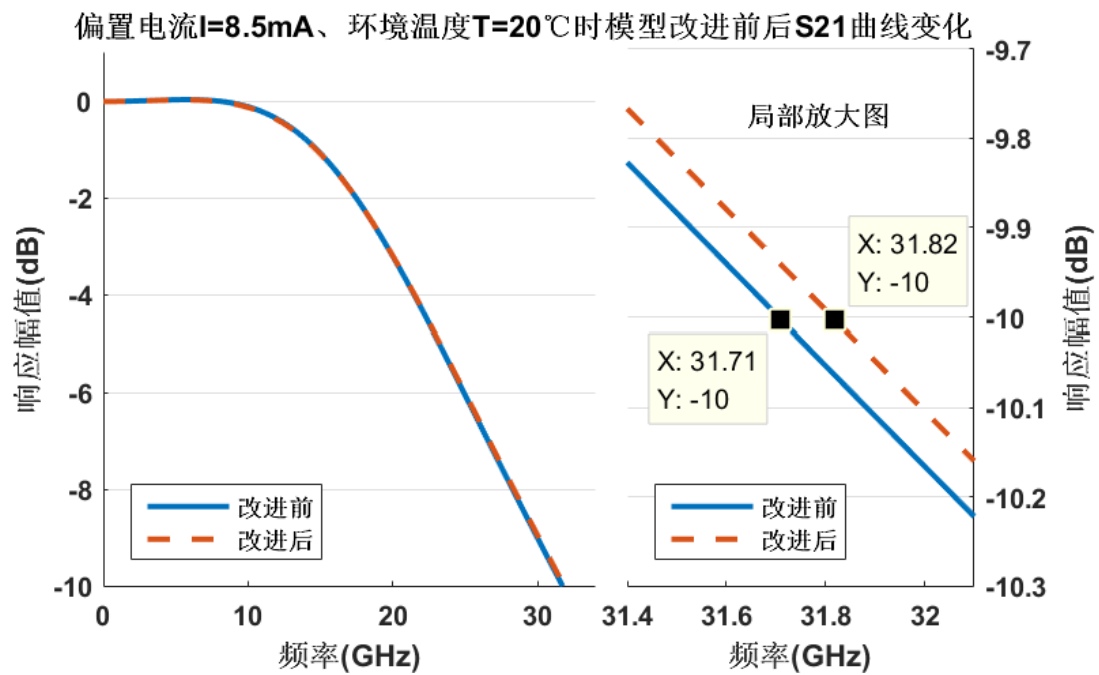


图 4-3 改进后的 VCSEL 的带宽模型曲线在 20°C , 8.5mA 时的 S_{21} 图

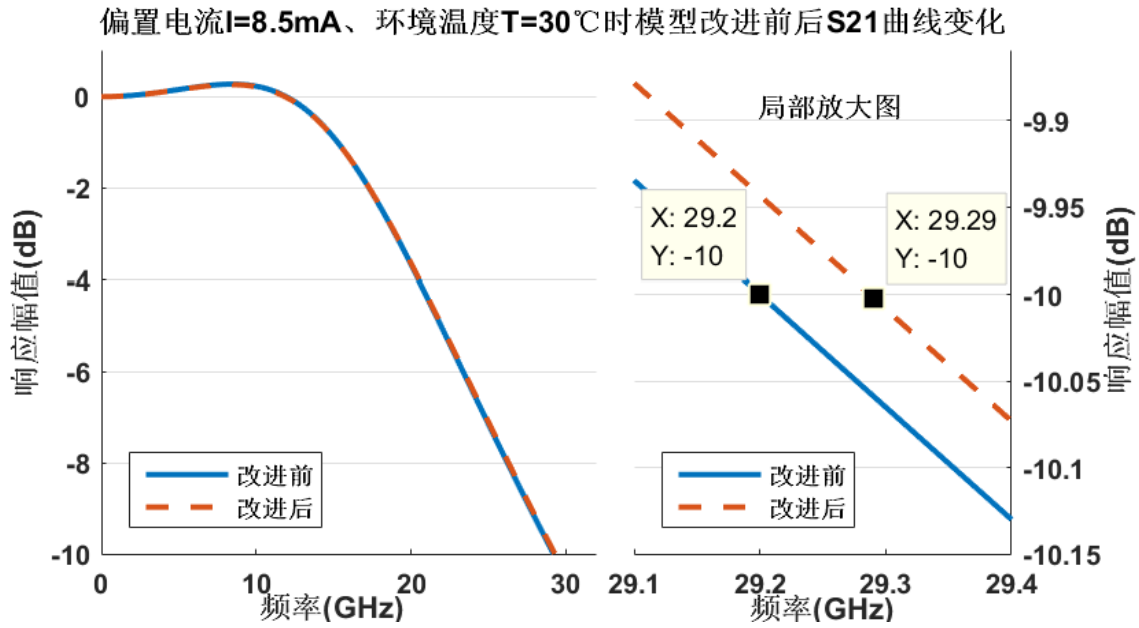


图 4-4 改进后的 VCSEL 的带宽模型曲线在 30°C , 8.5mA 时的 S_{21} 图

7.2.2 思路二

思路一的改进虽然使带宽有所增加，但增加并不多，由问题三中(c)和(d)解答可知，改变激光器的一些参数能使带宽变大，而大多数参数改变后为使带宽变大， S_{21} 曲线都会下压，虽然没有出现曲线的上翘现象，但我们希望 3dB 范围内的这部分带宽曲线越平坦越好，并且曲线下压虽然可以提高 10dB 带宽，但在 3dB 带宽处有可能还会下降。值得注意的是，与其他参数不同，改变参数光子寿命 τ_p 使带宽增加， S_{21} 曲线会上翘。因此可以结合 τ_p 和其他参数适当改变，使带宽增加的同时，3dB 范围内的这部分带宽曲线较平坦。从问题三(c)可知，改变 η_i 效果较明显，因此通过减小 τ_p 增大带宽，增大 η_i 从而增大带宽的同时使曲线下压，消除减小 η_i 带来的曲线上翘^[6]。

通过调节参数 η_i (从 1.0384 变成 1.5384) 和 τ_p (从 $9.7813\text{e-}12$ 变成 $7.7813\text{e-}12$) 得到响应曲线 S_{21} ，如图 4-5, 4-6, 4-7, 4-8 所示: 20°C 、 7.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 3dB 带宽从 19.13GHz 变为 25.04GHz ，有 5.91GHz 的增大；10dB 带宽从 29.76GHz 变为 40.03GHz ，增大了 10.27GHz ，效果较好； 30°C 、 7.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 3dB 带宽从 18.17GHz 变为 24.41GHz ，有 6.24GHz 的增大；10dB 带宽从 27.08GHz 变为 37.41GHz ，有 10.33GHz 的增大； 20°C 、 8.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 3dB 带宽从 19.57GHz 变为 25.28GHz ，有 5.71GHz 的增大；10dB 带宽从 31.71GHz 变为 41.98GHz ，有 10.27GHz 的增大； 30°C 、 8.5mA 所得到的幅频响应曲线中的 3dB 带宽从 18.96GHz 变为 24.93GHz ，有 5.97GHz 的增大；10dB 带宽从 39.48GHz 变为 29.2GHz ，有 10.28GHz 的增大。

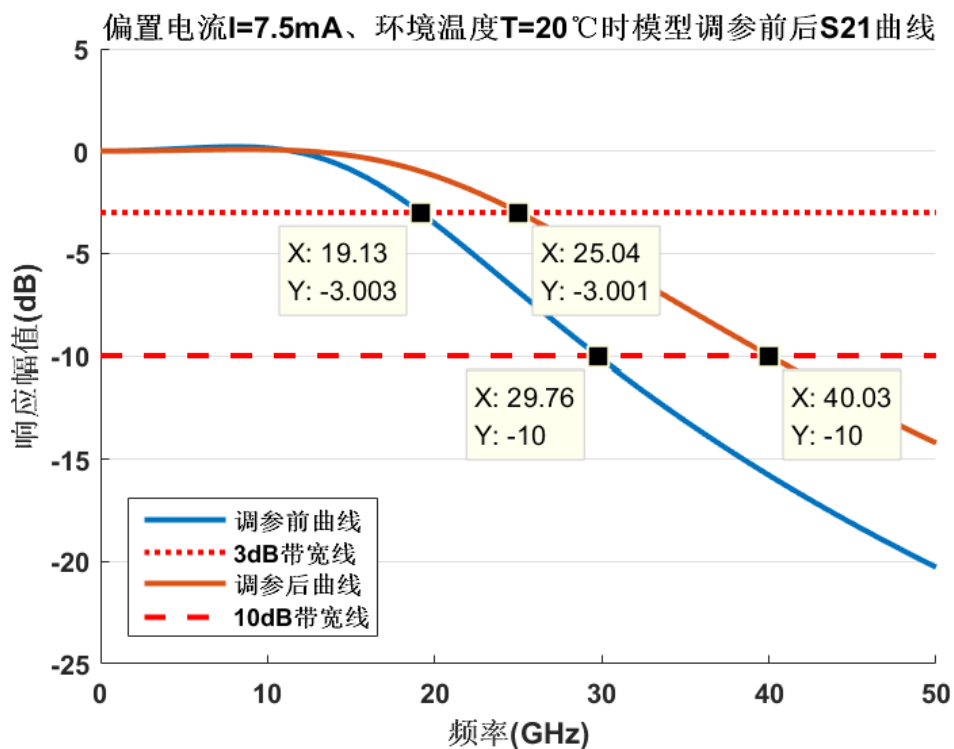


图 4-5 20°C , 7.5mA 时模型调参前后 S21 曲线图

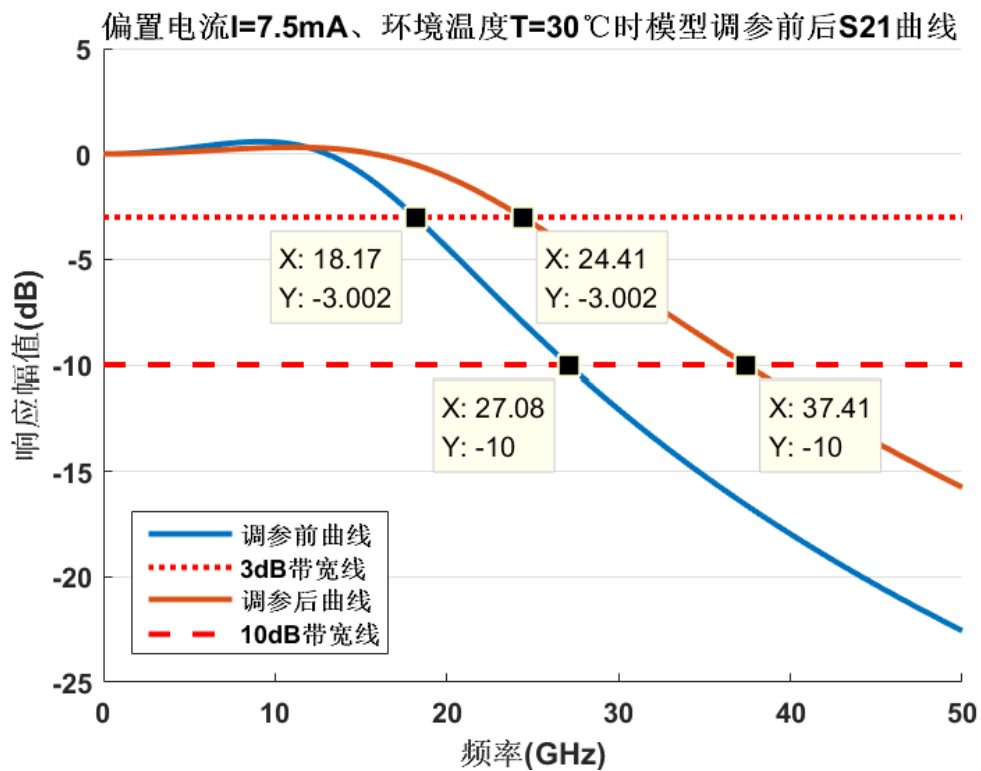


图 4-5 30°C , 7.5mA 时模型调参前后 S21 曲线图

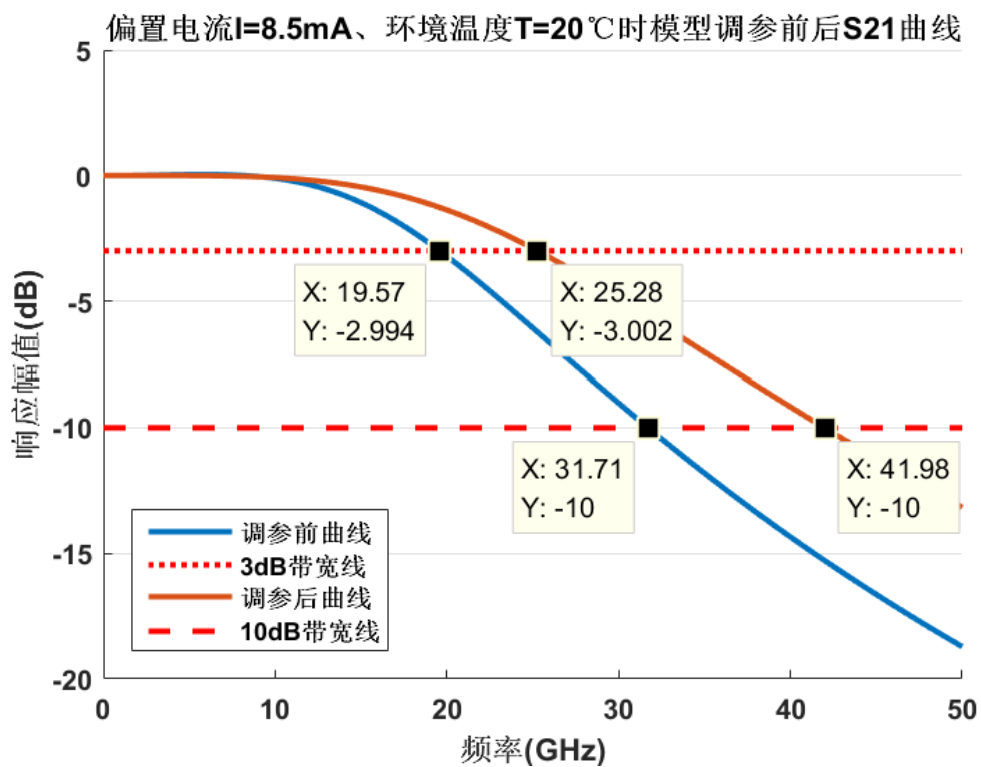


图 4-5 20°C , 8.5mA 时模型调参前后 S21 曲线图

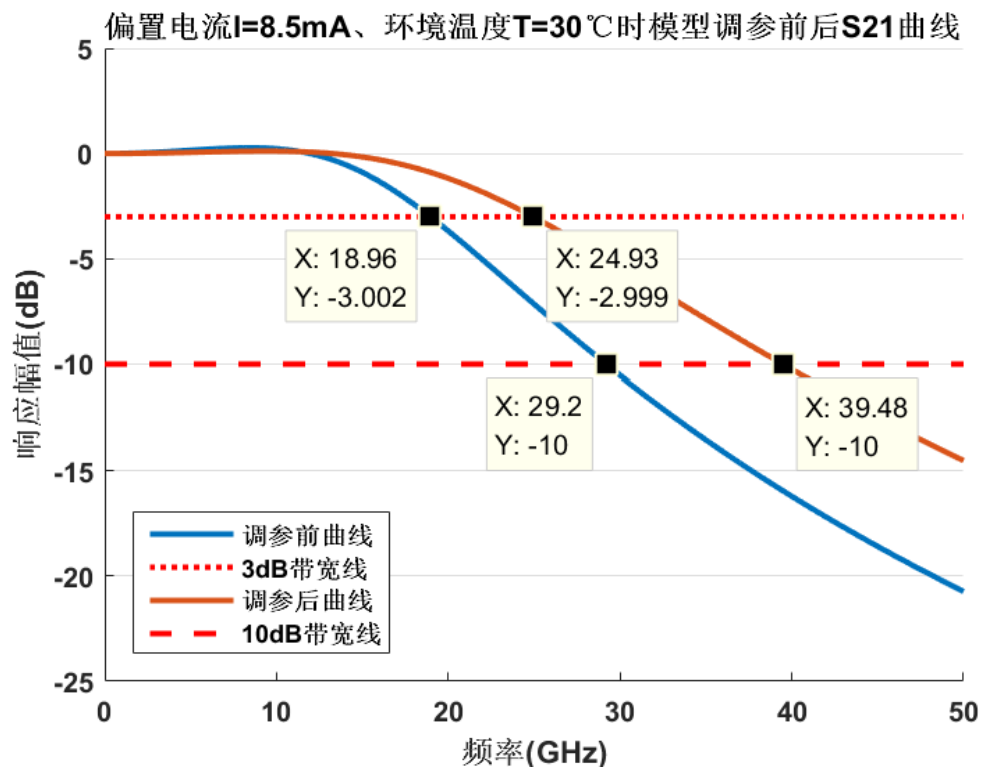


图 4-5 30°C , 8.5mA 时模型调参前后 S21 曲线图

八、总结

根据题设要求以及所提供的原始数据，我们基本完成了所有的建模、优化及其求解，针对每道问题都给出了响应的解答和注释，简要总结如下：

(1)根据 VCSEL 的 L-I 模型，确定出了模型参数 $\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ 的，并画出了 10℃，20℃，30℃，.....，90℃等温度下的 L-I 曲线，并确定出了最低出光频率 2mW 对应的最高环境值；

(2)通过对问题一中 L-I 模型进行优化，根据改进模型画出 10℃，20℃，30℃，.....，90℃等温度下的 L-I 曲线，并与问题 1 中 L-I 曲线进行比较；

(3)建立了 VCSEL 的带宽模型，画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线，并分析了温度和偏置电流对器件带宽曲线的影响；提出在固定外界条件-温度为 20℃，偏置电流为 7.5mA 时，调整哪些参数可以得到更宽的带宽；并提出改进某些参数可以使得 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置的这部分曲线更平坦；

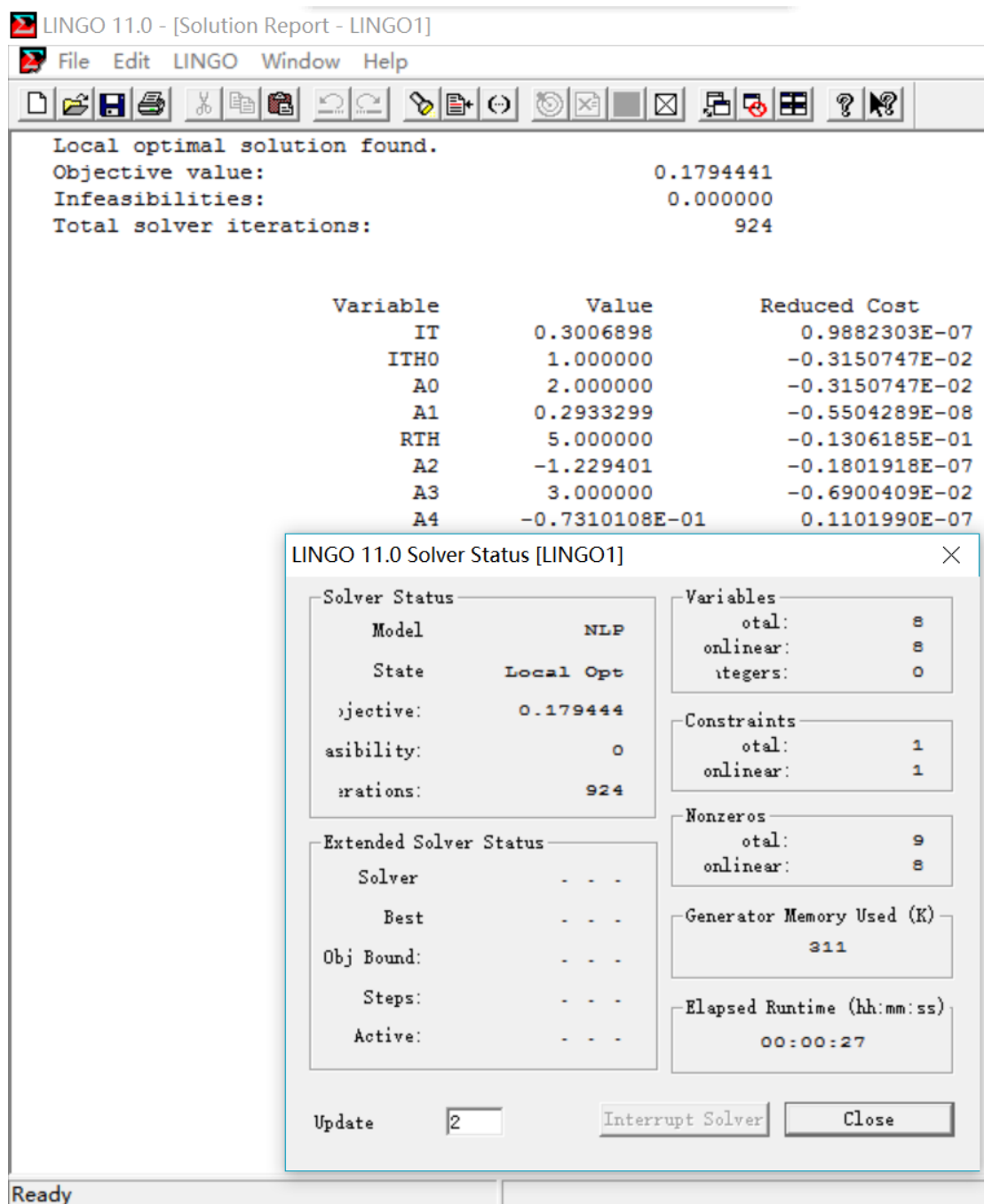
(4)提出了两种思路来改进问题三中 VCSEL 的带宽模型，可以获得较宽的 3dB 或 10dB 带宽。

九、参考文献

- [1].杨浩,垂直腔面发射激光器模式模型的建立,TN248.8,2008.
- [2].Mena P V, Morikuni J J, Kang S M, et al. A simple rate-equation-based thermal VCSEL model[J]. 1999, 17(5):865-872.
- [3].渠红伟, 郭霞, 董立闽,等. 垂直腔面发射激光器温度特性的研究[J]. 激光与红外, 2005, 35(2):83-86.
- [4]. 杨宜, 阮玉, 李正佳. 基于速率方程的垂直腔表面发射半导体激光器温度模型与仿真[J]. 中国激光, 2003, 30(3):193-198.
- [5]. 杨宜, 阮玉, 李正佳. 基于速率方程的垂直腔表面发射半导体激光器温度模型与仿真[J]. 中国激光, 2003, 30(3):193-198.
- [6]. 程俊强. 高速光纤通信系统中垂直腔面发射激光器的特性研究[D]. 北京邮电大学, 2007.

十、附录

公式(1-9)-(1-11)对应的模型，Lingo 局部极值解及其结果分析



Matlab 程序如下

T0.main%解答题目 1 的主函数,可绘出 10-90℃的 L-I 曲线,并输出激光器耐受温度值;

clear

clc

close all

%% 去掉未突破閾值的数据

```

load m
Pr(P==0)=[];
I(P==0)=[];
U(P==0)=[];
P(P==0)=[];
%% 提取验证集
Vk = randi(size(P,1),400,1);
VPr=Pr(Vk);
Pr(Vk)=[];
VI=I(Vk);
I(Vk)=[];
VU=U(Vk);
U(Vk)=[];
VP=P(Vk);
P(Vk)=[];
%% 载入拟合模型参数 theta
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%用于验证单纯形法求得的参数 theta1
% load w
% Ith0=w(7);
% Rth=w(8);
% a0=w(1);
% a1=w(2);
% a2=w(3);
% a3=w(4);
% a4=w(5);
% ita=w(6);
% theta=[Ith0;Rth;a0;a1;a2;a3;a4;ita];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 用于验证 cftool 求得的参数 theta2
'请在 cftool 中 load 已保存的'拟合优化验证.sfit'，并将结果保存到 workspace，而后按下
任意键继续'
cftool
pause
Ith0=fittedmodel.Ith0;
Rth=fittedmodel.Rth;
a0=fittedmodel.a0;
a1=fittedmodel.a1;
a2=fittedmodel.a2;
a3=fittedmodel.a3;
a4=fittedmodel.a4;
ita=fittedmodel.ita;
theta=[Ith0;Rth;a0;a1;a2;a3;a4;ita];
%
theta
=

```

```

[-11.0603576554990;3.48526094127060;11.7246531303044;-0.797838400834298;-0.033064
0052942133;0.0274073797029419;0.302725930968724;0.354961164430455];
% theta=[0.249;2.788;1.315;-2.268;1.075;-4.467;1.007;0.354];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 用于验证某固定参数结果 thetaX
% Ith0=-2.59317868305914;
% Rth=1.47760387600760;
% a0=96.4358449180192;
% a1=-46.9456029066686;
% a2=6.84640468418836;
% a3=-25.2864490816570;
% a4=6.63232884839287;
% ita=0.262002993027906;
% theta=[Ith0;Rth;a0;a1;a2;a3;a4;ita];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 用于验证 optimresults 参数结果
% theta = [0.3;2.6;1.246;-2.545;2.908;-2.531;1.022;0.5];% 建议初始迭代点，图形诡异
% theta=[-23.9243076898289;5.41583359459397;145.637337879340;-67.0741345467316;9.4
6739629812001;-1.98764211448435;-0.114918946395680;0.108619645382411];% U-I 三次
拟合方法，效果不合理
% theta=[1.735301803035981e+02;5.114602489639410;11.171084657357767;-92.74300636
0632080;8.161677662435125;10.420774895891853;-1.141441725556163;0.0798976839840
86];% U-I 四次拟合方法，效果不合理
% theta=[-0.339806855516668;3.221890369290785;3.479526866572492;-0.89939338294382
1;0.100973146487848;-3.025244572203933;0.886814385124952;0.311740680612381];% U-I
四次拟合方法,用的建议初始值做拟合; 37.6℃
% theta=[0.720393141400864;-0.093595016752119;2.778300708183388;-2.59628033078332
0;0.802502974937719;-0.740964580666876;-0.098165509117959;0.332811853718017];% U-
IV 四次拟合方法,用的建议初始值做拟合
%% 反解 P 并画出 L-I 曲线
T = (10:10:90)+273.15;
temp1 = zeros(size(T,2),1);
figure
hold on
load m
% x = I;
% y = I*U-P;
for k = 1:length(T)

    for n=1:size(P,1)
        [PP(n,k), fval(n,k)]=fun_jisuanP(I(n),U(n),P(n),T(k),theta);
    end
    if sum(PP(:,k)>=2)
        temp1(k)=1;
    end
end

```



```

% b2=-0.02037;
% b3=0.0007892;
% U = (b0+b1*I+b2*I.^2+b3*I.^3);
%
%
f=@(z)(ita*(I-Ith0-(a0+a1*(T0+(I*U-z)*Rth)+a2*(T0+(I*U-z)*Rth).^2+a3*(T0+(I*U-z)*Rth).^3+a4*(T0+(I*U-z)*Rth).^4))-z)^2;%不需带缩放的
%
f=@(z)(ita*(I-Ith0-(a0+a1*(T0+(I*U-z)*Rth)*0.01+a2*(T0+(I*U-z)*Rth).^2*0.0001+a3*(T0+(I*U-z)*Rth).^3*0.0000001+a4*(T0+(I*U-z)*Rth).^4*0.000000001))-z)^2;%带缩放的

%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%
%U-I 四次拟合方法,参数见 VI.sift;      %U=(b0+b1*I+b2*I^2+b3*I^3+b4*I^4)

b0=1.447;
b1=0.3404;
b2=-0.05395;
b3 =0.004522;
b4=-0.0001333;
U = (b0+b1*I+b2*I.^2+b3*I.^3+b4*I.^4);
%
f=@(z)(ita*(I-Ith0-(a0+a1*(T0+(I*U-z)*Rth)+a2*(T0+(I*U-z)*Rth).^2+a3*(T0+(I*U-z)*Rth).^3+a4*(T0+(I*U-z)*Rth).^4))-z)^2;%不需带缩放的
f=@(z)(ita*(I-Ith0-(a0+a1*(T0+(I*U-z)*Rth)*0.01+a2*(T0+(I*U-z)*Rth).^2*0.0001+a3*(T0+(I*U-z)*Rth).^3*0.0000001+a4*(T0+(I*U-z)*Rth).^4*0.000000001))-z)^2;%带缩放的

%%%%%%%%%%
%U-IT 性拟合, 参数参见 VIT.sift      %U=(c0+c1*T)*(b0+b1*I+b2*I^2+b3*I^3+b4*I^4)

% c0 =      0.9389;
% c1 =  -2.309e-06;
% b0 =      1.529;
% b1 =      0.3592;
% b2 =     -0.05598;
% b3 =      0.004749;
% b4 =     -0.0001438;
%
%
T
=
(T0-P*Rth+c0*Rth*(b0+b1*I+b2*I.^2+b3*I.^3+b4*I.^4).*I)./(1-c1*Rth*(b0+b1*I+b2*I.^2+b3*I.^3+b4*I.^4).*I);
% % f=@(z)(ita*(I-Ith0-(a0+a1*T+a2*T.^2+a3*T.^3+a4*T.^4))-z)^2;%不需带缩放的
%
f=@(z)(ita*(I-Ith0-(a0+a1*T*0.01+a2*T.^2*0.0001+a3*T.^3*0.0000001+a4*T.^4*0.000000001))-z)^2;%带缩放的
%%%%%%%%%%

```

[illegible]

```
clear
clc
close all
%% 去掉未突破阈值的数据
load m
Pr(P==0)=[];
I(P==0)=[];
U(P==0)=[];
P(P==0)=[];
%% 提取验证集
Vk = randi(size(P,1),400,1);
VPr=Pr(Vk);
Pr(Vk)=[];
VI=I(Vk);
I(Vk)=[];
VU=U(Vk);
U(Vk)=[];
VP=P(Vk);
P(Vk)=[];
%% 载入拟合模型参数 theta
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%用于验证单纯形法求得的参数 theta1
% load w
% Ith0=w(7);
% Rth=w(8);
% a0=w(1);
% a1=w(2);
% a2=w(3);
% a3=w(4);
% a4=w(5);
% ita=w(6);
% theta=[Ith0;Rth;a0;a1;a2;a3;a4;ita];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 用于验证 cftool 求得的参数 theta2
% '请在 cftool 中 load 已保存的'拟合优化验证.sfit'，并将结果保存到 workspace，而后按下任意键继续'
% cftool
% pause
% Ith0=fittedmodel.Ith0;
```



```

% 对
P[0.834745196501312,1.50570690908039e-05,1.66208479332105e-08,1.91466759660657e-
05,1.287576.33253664,417603.486768559,3.55617656168502e-12,1.94661682620548e-08]
% 对
S21[0.130176244104103,1.26220698210597e-05,9.77976684294739e-09,1.36402309456678
e-05,3001625.71208406,355228.224914324,1.11563971530796e-11,2.82460505597332e-08]
;
% 三 个
[1.03844813750832,4.79853295649234e-06,5.85232476781398e-11,1.18610248762731e-05,
703799.256012186,807106.177392943,9.78128979163662e-12,4.56319862208049e-08]
[ital,beta,taon,k,G0,N0,taop,ep] =
deal(1.03844813750832,4.79853295649234e-06,5.85232476781398e-11,1.18610248762731e
-05,703799.256012186,807106.177392943,9.78128979163662e-12,4.56319862208049e-08);
load('S21_5.mat');
f=0:10000000:3.6e+10;
q=1.6e-16;
load('w.mat');
%%
[Pj,T0,I0] = jieP(20,751);%20,751
P0=Pj;
I=I0;
Ns=(P0/(k*taop)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/taon+G0*P0./(k+ep*P0));
Icur=q/ital*(Ns/taon+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
Ss=(ital*(P0/w(6))/q-Ns/taon)/(G0*(Ns-N0));
Ps=k*Ss;
Y=1/taop+1/taon+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)/(1+ep*Ps/k).^2;
Z=1/(taop*taon+G0*Ps/(taop*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)/(taon*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SS21=10*log(H);
% figure;
figure
hold on
ftemp = f/(10^9);
plot(ftemp,SS21);
plot(ftemp(1:length(S21)),S21,'r');
%%
T = [10,20,30,40,50];
for n=1:length(T)
    [Pj,T0,I0] = jieP(T(n),751);%20,751
    P0=Pj;
    I=I0;
    Ns=(P0/(k*taop)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/taon+G0*P0./(k+ep*P0));
    Icur=q/ital*(Ns/taon+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);

```

```

Ss=(itai*(P0/w(6))/q-Ns/taon)/(G0*(Ns-N0));
Ps=k*Ss;
Y=1/taop+1/taon+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)/(1+ep*Ps/k).^2;

Z=1/(taop*taon)+G0*Ps./(taop*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)/(taon*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SSS21(:,n)=10*log(H);
% figure;
end
figure
hold on
ftemp = f/(10^9);
plot(ftemp,SSS21);
plot(ftemp(1:length(S21)),S21,'r');
%%
II = 751+[-400,-200,0,200,400];
for n=1:length(II)
    [Pj,T0,I0] = jieP(20,II(n));% 20,751
    P0=Pj;
    I=I0;
    Ns=(P0/(k*taop)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/taon+G0*P0./(k+ep*P0));
    Icur=q/itai*(Ns/taon+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
    Ss=(itai*(P0/w(6))/q-Ns/taon)/(G0*(Ns-N0));
    Ps=k*Ss;
    Y=1/taop+1/taon+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)/(1+ep*Ps/k).^2;

    Z=1/(taop*taon)+G0*Ps./(taop*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)/(taon*(1+ep*Ps/k).^2);
    H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
    H=abs(H);
    SSSS21(:,n)=10*log(H);
    % figure;
end
figure
hold on
ftemp = f/(10^9);
plot(ftemp,SSSS21);
plot(ftemp(1:length(S21)),S21,'r');
%%
T = [10,20,30,40,50,55,60,70,80,90];
for n=1:length(T)
    [Pj,T0,I0] = jieP(T(n),751);% 20,751
    P0=Pj;
    I=I0;

```

```

Ns=(P0/(k*taop)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/taon+G0*P0./(k+ep*P0));
Icur=q/itai*(Ns/taon+G0*(Ns-N0).*(P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
Ss=(itai*(P0/w(6))/q-Ns/taon)/(G0*(Ns-N0));
Ps=k*Ss;
Y=1/taop+1/taon+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)/(1+ep*Ps/k).^2;

Z=1/(taop*taon)+G0*Ps/(taop*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)/(taon*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SSSSS21(:,n)=10*log(H);
% figure;
end
figure
hold on
ftemp = f/(10^9);
plot(ftemp,SSSSS21);
plot(ftemp(1:length(S21)),S21,'r');
%%
load A
f=0:10000000:5e+10;
for n=1:size(A,1)
    [Pj,T0,I0] = jieP(20,751);%20,751
    P0=Pj;
    I=I0;

Ns=(P0/(A(n,4)*A(n,7))+A(n,5)*A(n,6)*P0./(A(n,4)+A(n,8)*P0))/(A(n,2)/A(n,3)+A(n,5)*P0
./((A(n,4)+A(n,8)*P0)));
    Icur=q/A(n,1)*(Ns/A(n,3)+A(n,5)*(Ns-A(n,6)).*(P0./(A(n,4)+A(n,8)*P0))+I-P0/w(6);
    Ss=(A(n,1)*(P0/w(6))/q-Ns/A(n,3))/(A(n,5)*(Ns-A(n,6)));
    Ps=A(n,4)*Ss;

Y=1/A(n,7)+1/A(n,3)+A(n,5)*Ps/(A(n,4)+A(n,8)*Ps)-A(n,5)*(Ns-A(n,6))/(1+A(n,8)*Ps/A(
n,4)).^2;

Z=1/(A(n,7)*A(n,3))+A(n,5)*Ps/(A(n,7)*(A(n,4)+A(n,8)*Ps))-(1-A(n,2))*A(n,5)*(Ns-A(n,6
))./(A(n,3)*(1+A(n,8)*Ps/A(n,4)).^2);
    H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
    H=abs(H);
    SSSSS21(:,n)=10*log(H);
    % figure;
end
figure
hold on
ftemp = f/(10^9);

```



```

deal(1.03844813750832,4.79853295649234e-06,5.85232476781398e-11,1.18610248762731e
-05,703799.256012186,807106.177392943,9.78128979163662e-12,4.56319862208049e-08);
load('S21_5.mat');
f=0:10000000:3.6e+10;
ftemp = f/(10^9);
q=1.6e-16;
load('w.mat');

T = [20,30,20,30];
II = 751+[0,0,100,100];
f=0:10000000:5e+10;
ftemp = f/(10^9);
for n=1:4
%%
[Pj,T0,I0] = jieP(T(n),II(n));% 20,751
P0=Pj;
I=I0;
Ns=(P0/(k*taop)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/taon+G0*P0./(k+ep*P0));
Icur=q/itai*(Ns/taon+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
Ss=(itai*(P0/w(6))/q-Ns/taon)./(G0*(Ns-N0));
Ps=k*Ss;
Y=1/taop+1/taon+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)./(1+ep*Ps/k).^2;
Z=1/(taop*taon)+G0*Ps./(taop*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)./(taon*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SS21=10*log(H);
figure
hold on
plot(ftemp,SS21);
%%
[Pj,T0,I0] = jieP(T(n),II(n));% 20,751
P0=Pj;
I=I0;
Ns=(P0/(k*taop)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/taon+G0*P0./(k+ep*P0));
Icur=q/itai*(Ns/taon+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
Ss=(itai*(P0/w(6))/q-Ns/taon)./((G0*(Ns-N0))-ep*(itai*(P0/w(6))/q-Ns/taon));
Ps=k*Ss;
Y=1/taop+1/taon+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)./(1+ep*Ps/k).^2;
Z=1/(taop*taon)+G0*Ps./(taop*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)./(taon*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SSS21=10*log(H);
plot(ftemp,SSS21);
title(['偏置电流 I=',num2str(II(n)/100-1),'、环境温度 T=',num2str(T(n)),'℃时模型调整参数

```

```

前后 S21 曲线])
xlabel('频率(GHz)')
ylabel('响应幅值(dB)')
end
%%
T = [20,30,20,30];
II = 751+[0,0,100,100];
for n=1:4
%%
[Pj,T0,I0] = jieP(T(n),II(n));%20,751
P0=Pj;
I=I0;
[итай,beta,таон,k,G0,N0,таоп,ep] =
deal(1.03844813750832,4.79853295649234e-06,5.85232476781398e-11,1.18610248762731e
-05,703799.256012186,807106.177392943,9.78128979163662e-12,4.56319862208049e-08);
Ns=(P0/(k*таоп)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/таон+G0*P0./(k+ep*P0));
Icur=q/итай*(Ns/таон+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
Ss=(итай*(P0/w(6))/q-Ns/таон)/(G0*(Ns-N0));
Ps=k*Ss;
Y=1/таоп+1/таон+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)/(1+ep*Ps/k).^2;
Z=1/(таоп*таон)+G0*Ps./(таоп*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)/(таон*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SS21=10*log(H);
figure
hold on
plot(ftemp,SS21);
plot(ftemp,(-3)*ones(length(ftemp),1),'r--')
%%
[Pj,T0,I0] = jieP(T(n),II(n));%20,751
P0=Pj;
I=I0;
[итай,beta,таон,k,G0,N0,таоп,ep] =
deal(1.53844813750832,4.79853295649234e-06,5.85232476781398e-11,1.18610248762731e
-05,703799.256012186,807106.177392943,7.78128979163662e-12,4.56319862208049e-08);
Ns=(P0/(k*таоп)+G0*N0*P0./(k+ep*P0))/(beta/таон+G0*P0./(k+ep*P0));
Icur=q/итай*(Ns/таон+G0*(Ns-N0).*P0./(k+ep*P0))+I-P0/w(6);
Ss=(итай*(P0/w(6))/q-Ns/таон)/(G0*(Ns-N0));
Ps=k*Ss;
Y=1/таоп+1/таон+G0*Ps./(k+ep*Ps)-G0*(Ns-N0)/(1+ep*Ps/k).^2;
Z=1/(таоп*таон)+G0*Ps./(таоп*(k+ep*Ps))-(1-beta)*G0*(Ns-N0)/(таон*(1+ep*Ps/k).^2);
H=Z./((1i*2*pi*f).^2+(1i*2*pi*f)*Y+Z);
H=abs(H);
SSS21=10*log(H);

```

```
plot(ftemp,SSS21);
plot(ftemp,(-10)*ones(length(ftemp),1),'r--')
title(['偏置电流 I=',num2str(II(n)/100-0.01),'mA、环境温度 T=',num2str(T(n)),'℃时模型调  
参前后 S21 曲线'])
xlabel('频率(GHz)')
ylabel('响应幅值(dB)')
end
```