

所属类别	2021 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号

## 电动汽车无线电能优化匹配研究

### 摘要

为了对电动汽车进行安全、快速、便捷的电能，无线电能逐渐成为电动汽车发展的新方向。本文建立了在电动汽车无线充电过程中无线电能传输效率的数学模型，并给出了优化操作提升无线电能传输效率的可行建议，同时在 MATLAB/Simulink 仿真和 Ansoft 磁仿真中加以验证。

针对问题一，建立了串联-串联补偿结构（PSSS）无线电能传输系统的二端口等效数学模型。通过计算了电压与电流传输函数，从而得到电动汽车无线电能系统发射频率、匹配阻抗与无线电能传输效率的数学模型。之后，基于该模型计算 10 次实验无线充电的电能传输效率，同时通过 MATLAB/Simulink 仿真和 Ansoft 磁仿真验证了数学模型的准确性，并得到随着线圈距离的增加，线圈互感下降，无线电能传输效率降低的结论。

针对问题二，在 Neumann 公式分析了传输距离与线圈互感相互关系的基础上，基于支持向量机和粒子群算法建立了传输距离与线圈的互感之间的数学模型。进而通过问题一模型，获取了电动汽车无线电能系统发射频率、匹配阻抗和传输距离与无线电能传输效率的数学模型。基于改进后的数学模型，计算第 1 次实验中两线圈在不同距离的无线电能传输效率。改进后模型结果与问题一模型对比验证了问题二关于传输距离数学模型无线电能传输效率计算的准确性。

针对问题三，利用问题一的数学模型，针对一般遗传算法容易出现早熟的问题，采用改进的遗传退火算法，在要求约束下进行无线电能传输效率全局最大寻优。在发射频率、匹配阻抗的约束操作下，对样本 1 的无线电能传输效率进行全局最大寻优，记录样本在无线电能传输效率最大的情况下，各优化后操作变量的值。结果发现提高发射频率和匹配阻抗有利于无线电能传输效率增加。最终计算得到的无线电能效率最大值为 67.96%，相比于优化前效率提升约为 50%。

针对问题四，通过物理建模发现偏移距离与线圈互感线性相关，因此问题二中关于无线电能传输效率模型可以被转化为在无线电能传输效率约束下发射频率、匹配阻抗与线圈互感的数学模型。基于问题三中改进的遗传退火算法进行线圈互感全局最小寻优，即对偏移距离的全局最大寻优。此时线圈互感最小的值对应无线充电系统对偏移距离容许的最大值。计算得出，在满足所设效率要求下，互感最小需要大于 27.869 $\mu$ H，进一步可知最大偏离应小于 24cm。

**关键词：**串联-串联补偿结构（PSSS）；无线电能传输效率；支持向量机；粒子群算法；改进遗传退火算法

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

电动汽车相对传统汽车效率高，排放少，发展电动汽车产业已然成为我国汽车产业转型发展先机的战略选择，也成为应对日益严峻的能源和环境问题的必由之路。并且电动汽车存在着噪音小、维修方便等优势，也受到消费者的青睐。电动汽车的迅速发展也带来一系列问题，为了对电动汽车进行安全、快速、便捷的电能，无线电能成为发展的方向。但现阶段由于电动汽车厂家众多，无线电能设备与不同生产厂家的电动汽车并不能互联互通，“专车专用”的原则造成了电力资源的极大浪费。因此有必要建立线圈参数与无线电能传输效率的模型，从而对无线电能的非车载部分进行优化，使得无线电能设备与不同生产厂家的电动汽车之间互联互通。

## 1.2 问题提出

鉴于以上背景，本文需要建立数学模型解决以下问题

**问题一：**在发射与接收线圈完全谐振的条件下，建立电动汽车无线电能系统**发射频率、匹配阻抗与无线电能传输效率**的数学模型。同时结合附件的相关数据，计算 10 次实验无线电能的电能传输效率。

**问题二：**不同电动汽车因自身的设计不同，其无线电能车载部分与地面距离可以自主设计，导致两线圈之间的距离发生变化。基于问题一的数学模型，建立**发射频率、匹配阻抗、两线圈距离与无线电能传输效率**的数学模型。在第 1 次实验中两线圈的距离 100mm 变化为 150mm、200mm、250mm 时，比较分析问题一和问题二所建立模型所计算的计算无线电能的电能传输效率。

**问题三：**通过改变**发射频率、匹配阻抗**可以提升传输效率。需给出在第 1 次实验（两线圈距离固定为 100mm）情况下，通过调整**发射频率、匹配阻抗**使得传输效率达到最大，同时计算传输效率最大值。

**问题四：**当电动汽车停车进行无线电能时，很难保证发射线圈和接收线圈完全垂直射影重合，总会出现或多或少的偏离，其中线圈半径为  $r$ ，接收线圈（距离发射线圈高  $h$ ）圆心向  $X$  轴正方向偏离了  $a$  (mm)。基于问题二模型，建立考虑两线圈偏移影响的无限电能传输效率模型。基于重新建立的模型，计算距地面垂直距离  $h$  为 100mm 时，在最高传输效率大于 80%前提下计算  $a$  的最大值。

# 2 问题分析

## 2.1 问题一分析

为了建立电动汽车无线电能系统无线电能传输效率的数学模型，我们需要计算无限电能过程中输入与输出功率。首先，计算在谐振条件下系统的输入阻抗，从而计算系统的输入功率。其次，计算在谐振条件下无线系统输出功率。基于以上的物理关系建立发射频率、匹配阻抗、两线圈距离与无线电能传输效率的数学模型，以此来评估附件中 10 次实验无线电能的电能传输效率。与此同时，建立相关的仿真模型验证无线电能传输效率的准确性。

## 2.2 问题二分析

因电动汽车的设计不同，导致无线电能系统两线圈距离发生变化，进而影响两线圈之前的传输效率。耦合线圈的物理机制揭示了两线圈距离将极大的影响耦合线圈之间的互感，而在问题一发现互感是影响传输效率的关键因素之一。因此需要建立两线圈距离

与耦合线圈互感之间的关系，从而在不需要互感条件下，建立发射频率、匹配阻抗、两线圈距离与无线电能传输效率的数学模型。

### 2.3 问题三分析

无线电能系统的电能传输效率可以通过改变发射频率和匹配阻抗而提升。基于问题2所建立的数学模型通过寻优算法探究在可控发射频率和匹配阻抗范围内最大的无线电能传输效率。

### 2.4 问题四分析

当发射线圈和接收线圈不重合将影响发射线圈和接收线圈之间的互感，从而影响无线电能传输效率。因此需要刻画两线圈偏移量与互感之间的数学模型，从而建立偏移量与无线电能传输效率之间的数学模型。基于此，探究在最低限度的传输效率的前提下，计算两线圈最大的偏移量。

## 3 模型假设

根据电动汽车无线电能实际情况，针对本题，做出如下假设：

- (1) 发射线圈和接收线圈线路阻抗相同；
- (2) 电源为大电网，电源内阻为0；
- (3) 忽略整流电路所带来的损耗；

## 4 主要符号说明

符号	符号说明
$k_{12}$	电感耦合系数
$\omega_n$	标么化发射频率
$\omega_o$	谐振频率
$L_1$	发射端电感
$L_2$	接收端电感
$\eta$	无线电能传输效率
$G$	遗传算法的最大迭代数
$p_c$	交叉概率
$p_m$	变异概率
$f$	种群中个体适应度
$P$	概率
$q$	累计概率

## 5.模型建立与求解

### 5.1 问题一模型建立与求解

#### 5.1.1 模型建立

##### (1) RLC 串联谐振电路分析

谐振系统是电动汽车无线电能的核心。由题干可知无线电能系统是由车载部分与非车载部分组成。车载部分由一个RLC电路与负载组成，非车载部分由电源和另一个RLC

电路组成。根据题干无线电能系统结构等效图可以看出，所述 RLC 电路为 RLC 串联谐振电路。RLC 串联谐振电路如下图所示：

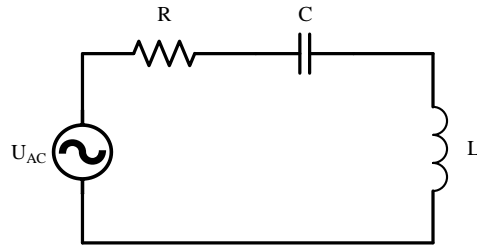


图 1 RCL 串联谐振电路

其中，电阻  $R$ ，电容  $C$ ，电感  $L$  串联在电路中，交流电源  $U_{AC}$  频率为  $f$ ，对应角频率为  $\omega=2\pi f$ ，则可得电路阻抗、电流分别为

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1)$$

$$I_s = \frac{U_{AC}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2)$$

当交流电源频率  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  时，电路发生谐振，此时阻抗呈现纯电阻特性，电路感性无功与容性无功互相抵消。

## (2) 谐振式无线电能传输系统分析

为分析无线电能传输系统的传输效率，可将负载的等效电路接于二端口网络的输出端<sup>[1]</sup>，即将系统视为一有载二端口网络。二者电磁耦合特性可通过漏感等效模型表述，如图 2 所示。

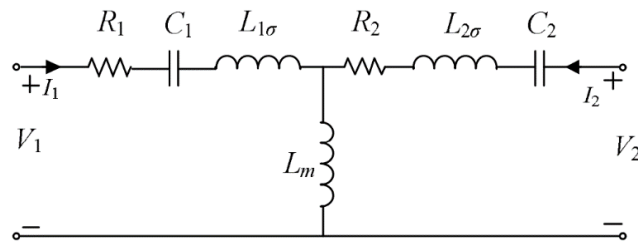


图 2 T 型二端口网络模型

定义有效匝数比，则系统漏感、互感、励磁电抗与电感  $L_{1,2}$ 、匝数比  $n=N_2/N_1$ 、耦合系数  $k_{12}$  的关系有：

$$\begin{cases} L_{1\sigma} = (1 - k_{12}) L_1 \\ L_m = k_{12} L_1 \\ L_{2\sigma} = (1 - k_{12}) L_2 / n^2 \approx (1 - k_{12}) L_2 / n_e^2 = L_{1\sigma} \end{cases} \quad (3)$$

为研究网络传输问题，可将二者视为一线性无源二端口网络。当选择电流的参考方向为流入二端口网络时，可通过 A 参数建立输出信号与输入信号之间的关系，其传输方程可表示为式(4)：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

为使问题简化,认为该二端口网络具有对称结构,且源、负载线圈与振荡器只通过相邻互感耦合。定义归一化角频率系数  $\omega_n = \omega / \omega_0$ , 即实际工作角频率与自然谐振角频率之比, 并取自然谐振角频率  $\omega_0 = 1 / \sqrt{L_1 C_1}$ , A 参数可表示为式(5):

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{i_2=0} = \frac{1}{k_{12}} \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{j}{Q_1} \right) = A_{22} \\ A_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{i_2=0} = \frac{-j\omega L_1}{k_{12}} \left[ k_{12}^2 - \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{j}{Q_1} \right)^2 \right] \\ A_{21} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{i_2=0} = \frac{1}{j\omega L_1 k_{12}} \end{cases} \quad (5)$$

除负载及振荡器  $a_2$  电感  $L_2$  外, 电路可表示为由电压源  $V_{eq}$  及等效阻抗  $Z_{eq}$  组成的戴维南等效电路。其中  $I_{eq}$ 、 $I_D$  为网孔电流, 二者的等效电路折算方法如图 3 所示, 回路方程满足式, 化简后负载对振荡器的作用由反射阻抗  $Z_D$  体现。

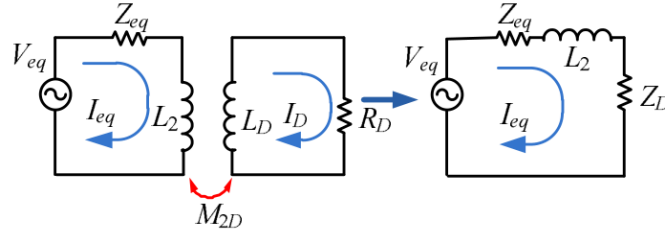


图 3 负载终端等效电路

$$\begin{cases} V_{eq} = (Z_{eq} + j\omega L_1) I_{eq} - j\omega M_{12D} I_D \\ 0 = (R_D + j\omega L_D) I_D - j\omega M_{12D} I_{eq} \end{cases} \quad (6)$$

对于  $Z_D$ , 由于负载  $Q$  值远远小于线圈  $Q$  值, 因此有  $R_L \gg R_D + j\omega L_D$ , 则  $Z_D$  可近似表示为:

$$Z_D \approx \omega M_{2D}^2 / R_D = k_{2D}^2 Q_D \omega L_1 \quad (7)$$

输出响应对输入激励信号的增益特性可通过电压传输函数  $K_V$  与电流传输函数  $K_I$  体现, 即:

$$K_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{A_{11} V_2 + A_{12} (-I_2)} = \frac{1}{A_{11} + A_{12} / Z_D} \quad (8)$$

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{A_{21} V_2 + A_{22} (-I_2)} = \frac{-1}{A_{21} Z_D + A_{22}} \quad (9)$$

引入谐振电路中功率因数的概念, 谐振电路的功率因数可表示为式(10), 它反映了电路中有功功率与视在功率的比值, 因此也可通过该参数反应系统传输效率。

$$\eta = \left| \frac{V_2 I_2}{V_1 I_1} \right| = \left| \frac{V_2}{V_1} \right| \cdot \left| \frac{I_2}{I_1} \right| = |K_V| \cdot |K_I| = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{k_{2D}^2 Q_D}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 + Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 k_{2D}^2 Q_D} \right)^{-1} \quad (10)$$

式(10)可以化简为

$$\eta = \frac{k_{12}^2 L_1 L_2 R_L \omega_0^2 \omega_n^4}{R_1 R_L^2 \omega_n^2 + k_{12}^2 L_1 L_2 R_L \omega_0^2 \omega_n^4 + L_2^2 R_1 \omega_0^2 (-1 + \omega_n^2)^2} \quad (11)$$

由式(10)可以看出, 传输效率是关于  $k_{12}$ 、 $Q_1$ 、 $k_{2D}$  和  $Q_D$  的多元函数。当系统间距及结构固定时,  $k_{12}$  与  $Q_1$  均为常数, 此时分母取最小时效率极大。根据高等数学均值不等式原则, 该条件可表示为:

$$\frac{k_{2D}^2 Q_D}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 + Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 k_{2D}^2 Q_D} \geq 2\sqrt{k_{12}^2 Q_1^2 + 1} (k_{12} Q_1)^{-2} \quad (12)$$

此时, 系统传输效率极大值可表示为式(12)。

$$\eta_{\max} \big|_{k_{2D}^2 Q_D} = \sqrt{k_{12}^2 + Q_1^{-2}} = k_{12}^2 Q_1^2 \left( \sqrt{k_{12}^2 Q_1^2 + 1} + 1 \right)^{-2} \quad (13)$$

### 5.1.2 模型求解

将附件 1、附件 2 参数带入上述模型计算附件 1 中 10 次实验无线电能传输效率, 可得:

表 1 无线电能传输效率

实验序号	两线圈距离 (mm)	线圈互感 ( $\mu H$ )	传输效率 (%)
1	100	63.83	17.70
2	125	51.49	12.28
3	150	40.17	7.85
4	175	33.24	5.52
5	200	28.24	4.04
6	225	26.17	3.49
7	250	24.78	3.14
8	275	22.12	2.52
9	300	21.25	2.33
10	325	20.53	2.18

可以发现随着线圈距离的增加, 线圈互感下降, 无线电能传输效率降低。

### 5.1.3 模型验证

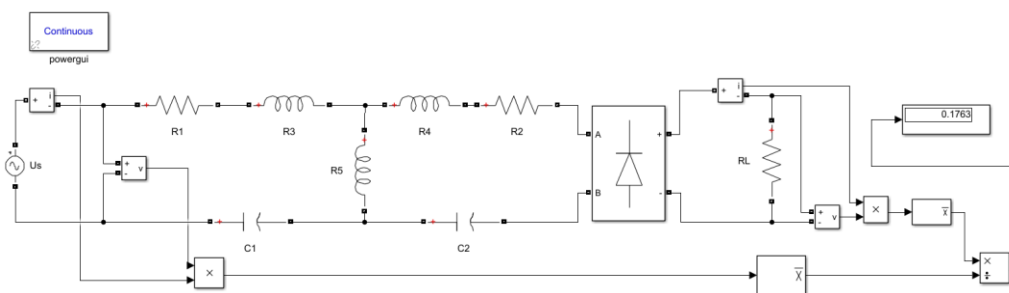


图 4 Simulink 模型图

利用 MATLAB/Simulink 工具箱对所建数学模型进行验证，Simulink 工具箱效率求解结果如下：

表 2 MATLAB Simulink 工具箱效率求解结果

实验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
传输效率 (%)	17.63	12.24	7.81	5.47	4.02	3.46	3.11	2.50	2.30	2.16

将数据绘制曲线，如图 5：

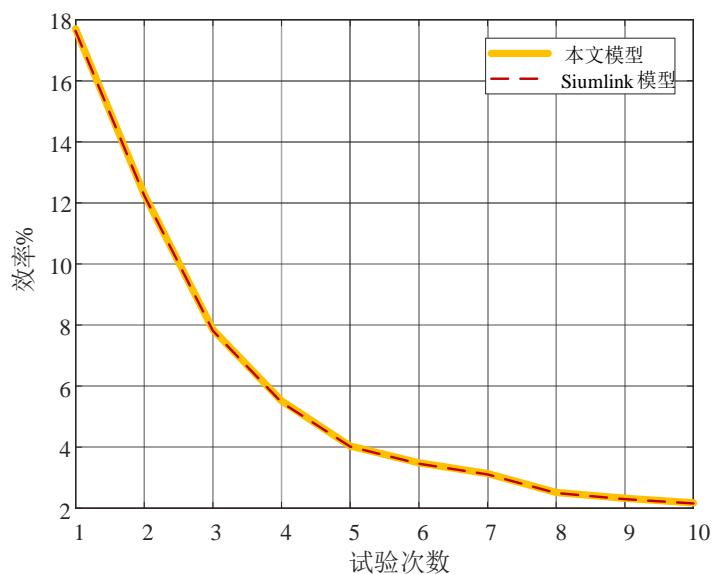


图 5 数学模型与 Simulink 求解结果对比

可以看出所建数学模型与 Simulink 工具箱求解结果基本一致，并且值得注意的是 Simulink 工具箱求解的效率要比本文所建模型偏低，这是因为本文模型忽略了整流电路损耗。

与此同时，在 Ansoft 软件建立的无线电能系统的分布帮助学习距离与互感之间的相互关系。

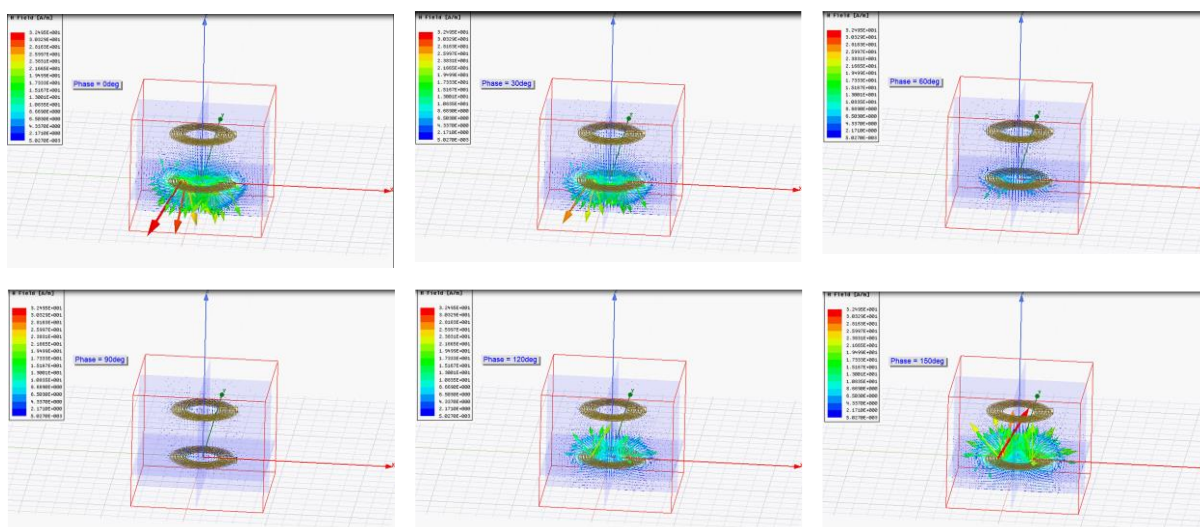


图 6 无线电能系统磁场向量在不同电流角度分布图

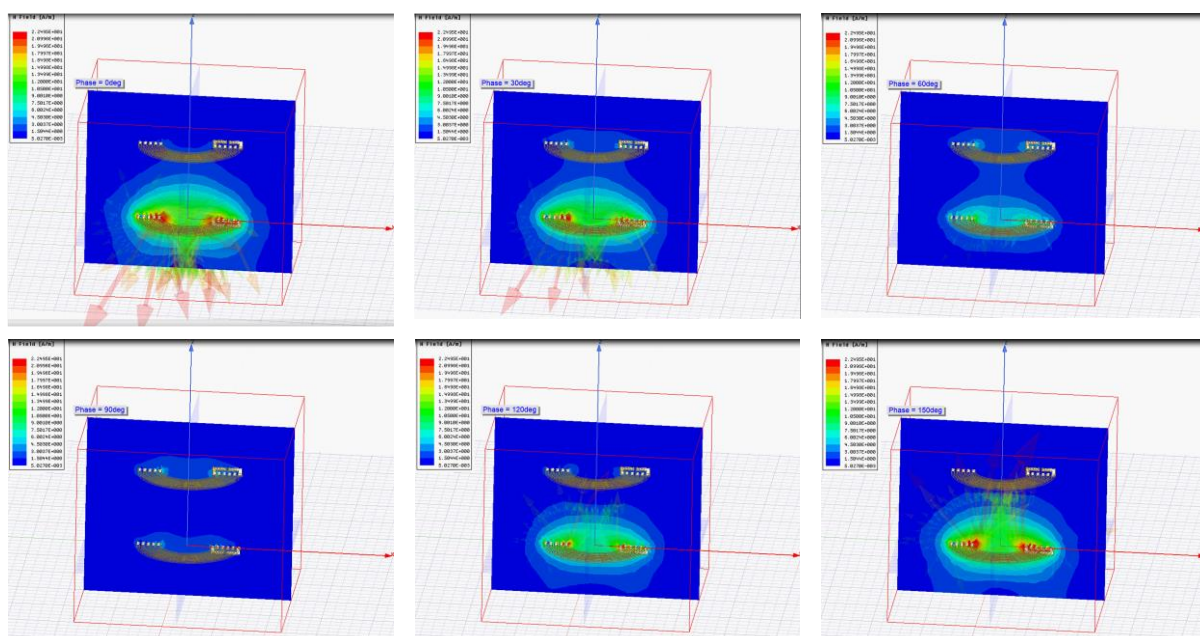


图 7 无线电能系统磁场在不同电流角度分布图

由磁力线疏密程度以及磁场云图颜色变化可以看出，发射线圈和接收线圈之间的磁场耦合区域，磁场强度最大。发射线圈产生的磁场，其中一部分不经过接收端再次返回到发射线圈，形成闭合磁路，这部分磁场没有形成两线圈之间的耦合，不向接收端传递能量，成为漏磁。另一部分磁场经过接收端线圈之后，才返回发射端，形成闭合磁路，发射端和接收端主要依靠这部分磁场实现两线圈之间的能量传递。

## 5.2 问题二模型建立与求解

要分析两线圈间距离对传输效率的影响，首先需要分析两线圈距离改变对系统的影响。考虑两线圈同轴且平行的情形<sup>[2]</sup>，其结构如图 8 所示。



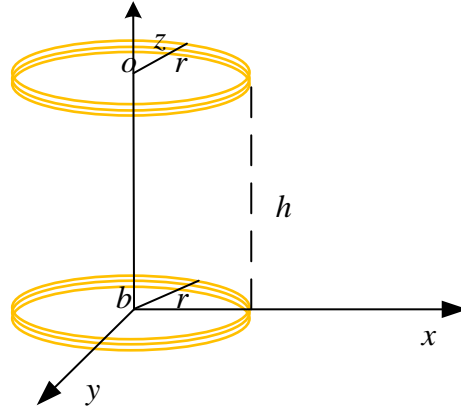


图 8 同轴平行线圈

两线圈圆心分别为  $(0,0,z_1)$ 、 $(0,0,z_2)$ ，轴向距离为  $h$ ，流过两个线圈的电流分别为  $I_1$ 、 $I_2$ ，在两线圈上分别取一点 P 和 Q，坐标分别为  $P(r,\theta,z_1), Q(r,\varphi,z_2)$ ，则 PQ 两点间的距离可以表示为：

$$d = |r_2 - r_1| = \left[ 2r^2 - 2r^2 \cos(\varphi - \theta) + h^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

将 PQ 两点间的距离代入纽曼公式即可得到两线圈的互感计算公式：

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\varphi - \theta) d\theta}{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\varphi - \theta) + h^2}} \quad (15)$$

结果表明，两线圈距离的改变会影响线圈的互感  $M$ ，从而间接改变无线电能系统的输出功率和传输效率。要建立发射频率、匹配阻抗、两线圈距离与无线电能传输效率的数学模型，需要以 10 次实验的离散数据为基础拟合两线圈距离  $h$  与线圈互感  $M$  的函数关系  $M = f(h)$ 。这一关系是非线性的，保证数学模型的精确性和可行性的关键是提高  $M = f(h)$  曲线的拟合精度。

### 5.2.1 最小二乘支持向量机(LSSVM)算法

传统的曲线拟合方法操作简单，但是曲线拟合的精度不高，且需选取合适的拟合函数。基于神经网络学习<sup>[3]</sup>的曲线拟合方法虽然具有较高的准确性，但仍以训练误差最小化为目标，当参数选取不当时会产生局部最优现象，且算法本身计算较为复杂，收敛速度慢。Vapnik<sup>[4]</sup>于 20 世纪 90 年代提出了支持向量机(SVM)算法，以结构风险最小化为原则，得到的解具有全局唯一性，因而得到了广泛的研究。Suykens 在文献[5]中提出了改进的最小二乘支持向量机(Least Squares Support Vector Machine, LSSVM)算法，从而将非线性问题转变成了线性问题，进一步简化了计算，提高了曲线的拟合精度。

首先定义非线性有限样本集  $S = \{(x_i, y_i), i=1,2,\dots,n\}$ ， $x_i$  为输入， $y_i$  为输出。LSSVM 算法采用一个非线性映射  $\varphi$  将样本数据集  $S$  映射到高维特征空间  $\varphi(x_i)$ ，在此空间中构建拟合函数  $y = w\varphi(x) + b$  ( $w$  为权向量， $b$  为偏置常数)，根据结构风险最小化的原则，寻找最优的超平面，从而确定参数  $w$  和  $b$  的值。LSSVM 算法描述为：

$$\begin{cases} \min_{w,b,\xi} J(w,e_i) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \gamma \sum_{i=1}^n e_i^2 \\ s.t. y_i = w^T \varphi(x_i) + b + e_i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (16)$$

式中， $\gamma$ 为正规化参数， $e_i$ 为误差变量。引入拉格朗日方法求解该模型：

$$L(w, b, e, a) = J(w, e) - \sum_{i=1}^n a_i [w^T \varphi(x_i) + b + e_i - y_i] \quad (17)$$

式中 $a_i$ 为拉格朗日乘子。根据 KKT 条件可以得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i) \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial e_i} = 0 \Rightarrow a_i = \gamma e_i \\ \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow w^T \varphi(x_i) + b + e_i - y_i = 0 \end{cases} \quad (18)$$

消除中间项 $w, e_i$ ，则可将模型转化为线性方程组模型。

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n^T \\ I_n & \Omega + \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中， $I_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ ， $\Omega = \varphi(x_i)^T \varphi(x_j) = K(x_i, x_j)$ ， $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ， $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 。 $K(x_i, x_j)$ 为核函数，一般选取径向基(RBF)函数作为核函数，表示为：

$$K(x, x_i) = \exp(-x - x_i^2 / 2\delta^2) \quad (20)$$

式中， $\delta$ 为核参数。由此得到非线性拟合函数为

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i K(x, x_i) + b \quad (21)$$

LSSVM 算法具有小样本求解精度高，运算速度快等优点，但模型的准确度和运算速度依赖于对核参数 $\delta$ 和正规化参数 $\gamma$ 的选取。核参数的改变会影响映射函数从而影响特征空间的复杂程度，而不同的特征空间中最优的 $\gamma$ 也不同。

### 5.2.2 PSO-LSSVM 拟合模型的建立

LSSVM 模型的拟合效果取决于参数 $\delta$ 和 $\gamma$ 的选取，我们考虑采用粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)优化 LSSVM 参数，进一步提高了模型的性能。

PSO 算法的原理是在随机解的基础上通过迭代进行寻优，利用适应度为评价条件进行搜索从而得到全局最优解。假设在 $M$ 维搜索空间中， $D$ 个粒子的初始坐标为 $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im})$ ，初始飞行速度为 $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im})$ ，( $m = 1, 2, \dots, M, i = 1, 2, \dots, D$ )， $D$ 个粒子的最优位置为 $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im})$ 。PSO 算法的实现步骤如下：

- (1) 粒子群初始化：设定粒子群的规模、初始位置和速度以及迭代次数。
- (2) 计算粒子的适应度。
- (3) 通过迭代更新速度和位置。迭代公式表示为：

$$\begin{cases} v_{im}^{k+1} = \omega v_{im}^k + c_1 r_1 (P_{im} - u_{im}^k) + c_2 r_2 (P_{gm} - u_{im}^k) \\ u_{im}^{k+1} = u_{im}^k + v_{im}^{k+1} \end{cases} \quad (22)$$

式中：  $v_{im}^{k+1}$  为目前代粒子的移动速度，  $v_{im}^k$  为上一代粒子的移动速度，  $c_1$ 、  $c_2$  为学习因子，一般取  $c_1 = c_2 = 2$ ，  $r_1$ 、  $r_2$  为[0,1]区间内的随机数，  $\omega$  为惯性权重。

(4) 构建样本均方根相对误差  $e_M$  作为适应度函数，其表达式为：

$$e_M = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2 / y_i^2 \right\}^{1/2} \quad (23)$$

式中：  $y_i$  为实际值，  $\hat{y}_i$  为拟合值，  $n$  为样本数。根据式(8)计算更新后粒子的适应度，当适应度达到最小时即可得到粒子的最优位置，从而确定  $\delta$  和  $\gamma$  的最优值。

### 5.2.3 模型求解

采用上述 PSO-LSSVM 拟合模型对 10 次实验的数据样本进行回归分析，得到结果如图 9 所示。为了对比该模型的优劣性，同时将多项式拟合的结果图 10 作为比较，分析两种拟合模型的拟合性能。

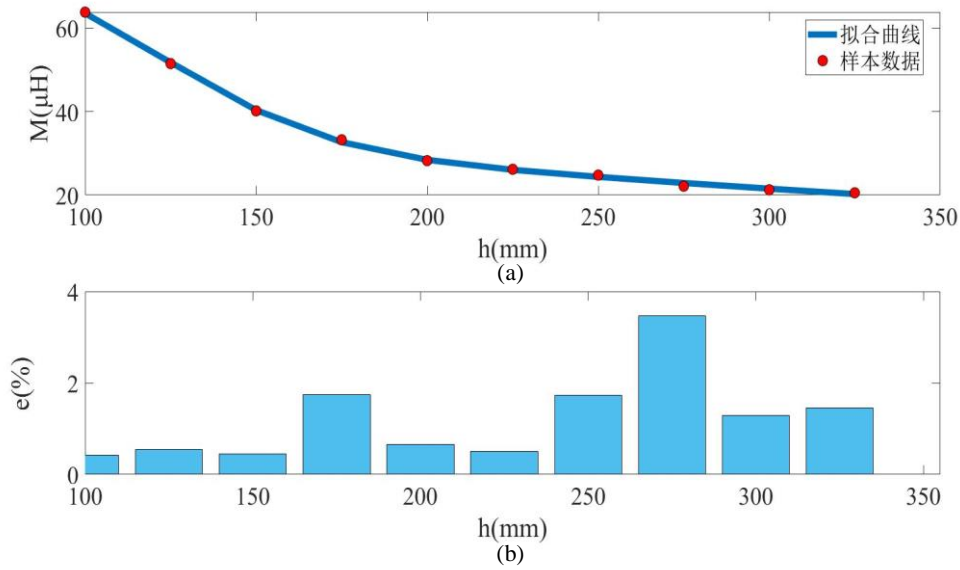


图 9 PSO-LSSVM 拟合模型结果 (a)拟合曲线与样本数据的对比 (b)拟合误差(e)分析

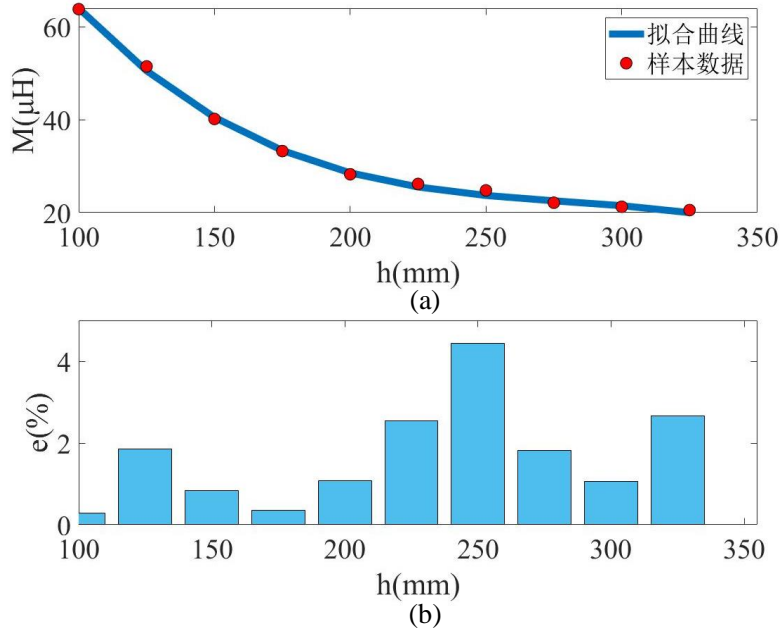


图 10 多项式拟合模型结果 (a)拟合曲线与样本数据的对比 (b)拟合误差(e)分析

结果表明, PSO-LSSVM 拟合模型的拟合精度比多项式拟合模型的拟合精度高, 证明了模型的可行性和有效性。根据 PSO-LSSVM 拟合模型得到的两线圈互感  $M$  与两线圈距离  $h$  的关系可以表示为

$$M = 5.286 \exp[-(h + 5.951)^2 / 17.17] + 0.523 \exp[-(h - 0.231)^2 / 0.0425] \quad (24)$$

基于式(11), 发射频率、匹配阻抗、两线圈距离与无线电能传输效率的数学模型可以表示为:

$$\eta = \frac{(27.94e^{-\frac{(h+5.951)^2}{8.585}} + 0.274e^{-\frac{(h-0.231)^2}{0.021}})R_L\omega_0^2\omega_n^4}{R_1R_L^2\omega_n^2 + (27.94e^{-\frac{(h+5.951)^2}{8.585}} + 0.274e^{-\frac{(h-0.231)^2}{0.021}})R_L\omega_0^2\omega_n^4 + L_2^2R_1\omega_0^2(-1 + \omega_n^2)^2} \quad (25)$$

计算两线圈距离分别为 100mm、150mm、200mm、250mm 时无线充电的电能传输效率得到表 3。

表 3 模型求解结果比较		
两线圈距离 (mm)	第 1 问模型传 输效率 (%)	第 2 问模型传 输效率(%)
100	17.70	17.57
150	7.85	7.91
200	4.04	4.09
250	3.14	3.04

可以看出, 第 1 问模型与第 2 问模型计算得出的传输效率基本相等, 进一步验证了模型的准确性。

### 5.3 问题三模型建立与求解

#### 5.3.1 问题分析

本题要求利用问题 1 得到的无线电能效率模型，在保证发射频率、匹配阻抗分别在 5~100kHz 和 100~200 $\mu$ H 范围的前提下，结合无线电能的效率计算公式，构建优化模型，利用模型对第 1 个数据样本进行优化。

该题考察的主要是利用已知模型，在一定的边界条件下，对目标的寻优问题。即寻找无线电能效率模型最大值，各个操作变量不超过其取值范围的情况下，寻找最优的无线电能效率并记录优化的操作措施。本题是不适用于用标准算法求解的优化问题，其目标函数具有潜在的非线性，因此本文采用遗传退火算法对问题 3 得到的无线电能效率模型进行寻优。

#### 5.3.2 模型建立与求解

在问题 1 中，已经确定了 2 个主要变量，包括发射频率、匹配阻抗。在进行本问题的建模与求解前，首先需要从附件中找出主要操作变量的对应取值范围，并对其进行归一化处理，即发射频率标么值为 30kHz，即标么化范围为 0.167~3.333，匹配阻抗标么值为 160 $\mu$ H，即标么化范围为 0.625~1.250，作为优化模型中每个操作变量的限制条件。其结果分别为

##### (1) 遗传算法概述

遗传算法（Genetic Algorithms, GA）是一种基于自然选择原理和遗传学机理的搜索寻优算法，它模拟自然界中的生命进化机制，在人工系统中实现特定目标的优化。遗传算法的本质是通过群体搜索技术，根据“适者生存”的原则逐代进化，最终得到最优解或是准最优解。其基本算法的操作是：初始群体的产生，求解每一个个体的适应度，根据适者生存的原则选择优良个体，被选出的优良个体两两配对，通过随机交叉其染色体的基因并随机变异某些染色体的基因生成下一代群体，按照这种方法使群体逐代进化，直到满足进化终止条件。该过程可以通过图 11 进行描述。生物遗传概念在遗传算法中的对应关系如表 4 所示。

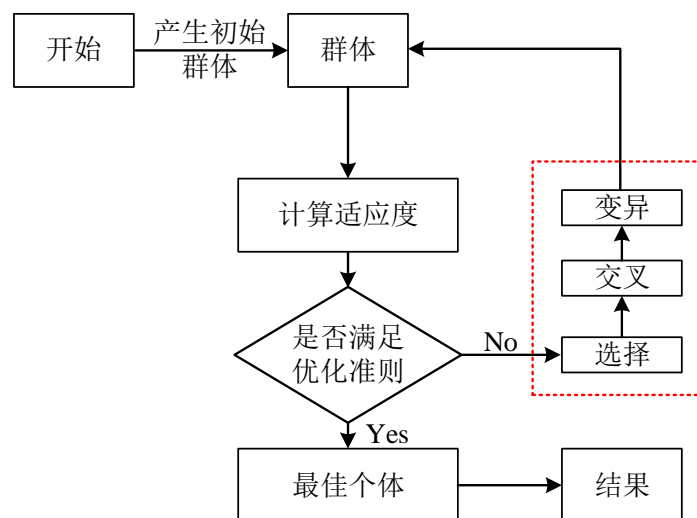


图 11 遗传算法的基本过程

该算法的具体实现方法是：首先根据问题，确定一个可行的求解域，确定一种编码方法，通过数值串或字符串表示可行求解域中的每一个解；之后对每一个解应该有一个度量好坏的依据，该依据为适应度函数，一般由目标函数构成；第三步确定进化参数群

体规模  $M$ 、交叉概率  $p_c$ 、变异概率  $p_m$ 、进化终止条件。进化终止条件可以设定到某一代进化结束，也可以根据近似最优解的精度是否满足要求来确定。

为了便于计算，每一代群体的个体数目一般都取相等。群体规模越大，越容易找到最优解，但是其计算所需要的时间也相应地增加。

表 4 生物遗传概念在遗传算法中的对应关系

生物遗传概念	遗传算法中的作用
适者生存	算法停止时，最优目标值的解有最大的可能被留住
个体	解
染色体	解的编码
基因	解中每一个分量的特征
适应性	适应度函数值
种群	根据适应度函数值选取的一组解
交叉	通过交叉原则产生一组新解的过程
变异	编码的某一分量发生变化的过程

## (2) 遗传算法说明

本文要建立的是一个对电能传输效率的最大寻优模型。根据第 3 小结的说明，首先需要确定求解的遗传算法参数，包括种群大小  $M$ ；最大代数  $G$ ；交叉概率  $p_c$ ；变异概率  $p_m$ ；染色体长度（二进制编码长度）。

本文采用二进制的编码策略，用随机数列  $x_1, x_2, \dots, x_m$  作为染色体，其中，所有数据已经进行了最大-最小归一化处理，均处于  $[0, 1]$  的区间内，每一个随机序列都与种群中的一个个体对应，在本题中，通过调用多个函数逐步实现遗传算法的功能，现对主要函数的功能予以简要说明：

### ① 种群初始化

一般通过随机生成的方式来创建一个需要的种群。本文中，该函数利用 **rand** 函数和 **round** 函数生成对应的种群个体。具体操作是，根据输入的种群大小  $M$  和二进制编码长度，利用 **rand** 函数生成对应种群大小和染色体二进制长度的矩阵，该矩阵中的值均为  $0 \sim 1$  之间的随机数，再通过 **round** 函数“四舍五入”生成只包含 0 和 1 的矩阵，这样就得到确定种群大小、染色体长度的种群个体。该函数返回一个初始化的二进制种群矩阵。

### ② 适应度计算（种群评估）

本文直接将目标函数值作为个体的适应度。该函数将通过输入的二进制数值计算得到目标函数值。

### ③ 新种群选

该函数的目的是通过输入二进制种群及其适应度值，得到选择以后的二进制种群矩阵。本文中的选择算法采用轮盘赌选择，该方法又可以称为比例选择方法，它的基本思想是：各个个体被选中的概率与其适应度大小成正比。

其具体操作可分为以下 6 步。

- (1) 计算出群体中每个个体的适应度  $f(i=1,2,\dots,M)$ ,  $M$  为群体大小；
- (2) 计算出每个个体被遗传到下一代群体中的概率；

$$P(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_{j=1}^N f(x_j)} \quad (26)$$

- (3) 计算出每个个体的累计概率；

$$q_i = \sum_{j=1}^i P(x_j) \quad (27)$$

(4) 在[0, 1]区间内产生一系列均匀分布的伪随机数  $ms$  并从小到大排序;

(5) 逐个筛选个体, 筛选方法为: 若  $ms[1] < q[1]$ , 那么选择个体 1, 将; 否则, 选择个体  $k$ , 使得  $q[k-1] < r \leq q[k]$  成立;

(6) 重复(4)(5)共  $M$  次。

#### ④ 交叉运算

该步骤是遗传算法中产生新的个体的主要操作过程, 通过二进制的父代种群数量以及给定的交叉概率, 得到交叉后的种群。

#### ⑤ 变异运算

该步骤是产生新个体的另一种操作。先随机产生变异点, 再根据变异概率阈值将变异点的原有基因取反。

#### ⑥ 最优解筛选

该函数用于筛选出每次迭代中的最优解和所有迭代后的全局最优解。

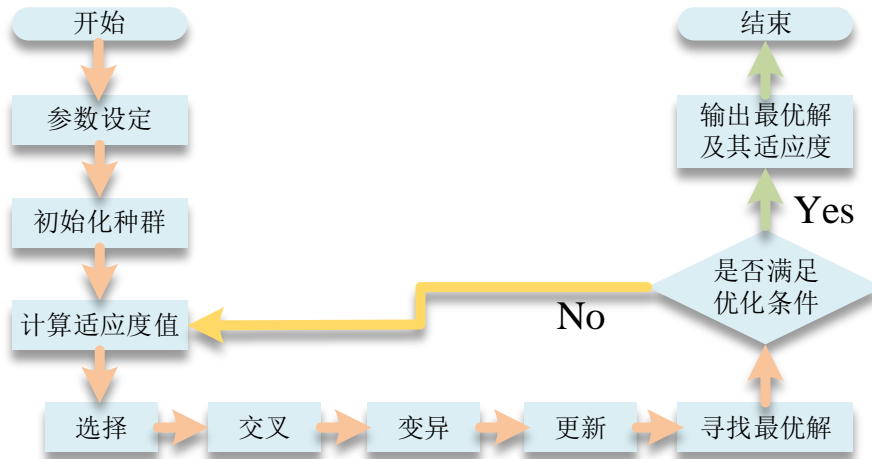


图 12 遗传算法的实现过程

遗传算法的实现过程如图 12 所示, 具体实现方法不再赘述。需要注意的是, 此处遗传算法代码实现的是最小寻优的过程, 而本题要实现的是最大值寻优, 我们将目标函数的结果取负, 从而实现最大寻优的目的。

在本题遗传算法的实现过程中, 遇到了早熟的现象, 即种群中的所有个体都陷于同一极值而停止进化。为了解决这一问题, 本文进行了以下操作进行算法改进:

1、动态确定变异概率, 防止优良基因因变异而遭到破坏, 又可以在陷入局部最优解的时候, 引入新的基因。

2、择优交叉, 提高适应度值高的个体的交叉率。

3、适当增加种群数量, 增加其基因的多样性, 减小陷入局部最优解的可能。但这种方法牺牲了部分算法性能。

### 5.3.3 结论

利用上一小节所构建的遗传算法, 对样本 1 在限制内进行寻优。本题中的优化求解是标幺化发射频率、标幺化匹配阻抗在范围限制在[0.167~3.333, 0.625~1.250]的前提下进行的。



图 13 展示了样本 1 经遗传退火算法进行优化的过程。

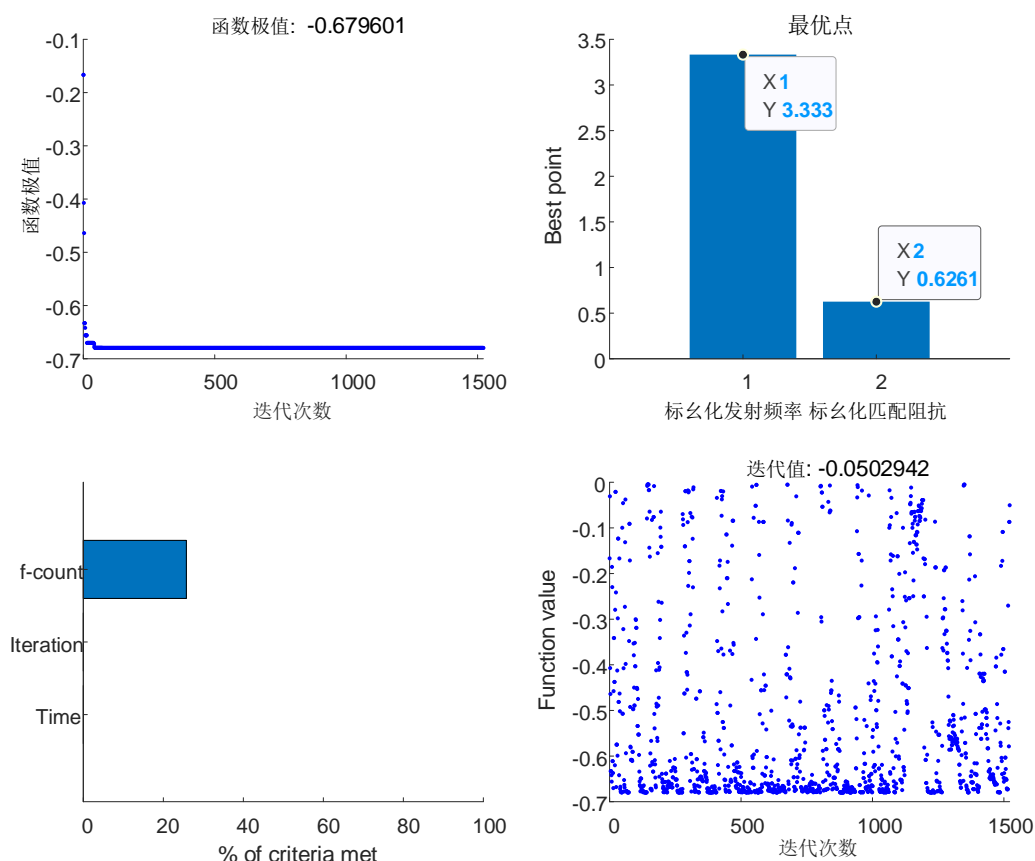


图 13 遗传退火算法进行优化

如图 13 所示，可以看出经过 1500 次迭代，函数极值逐渐减小并收敛，最终无线电能效率收敛于 67.96%，其原无线电能效率为 17.7%，经计算可得其优化提升效率约为 50%。通过改变发射频率、改变匹配阻抗可以有效提升无线充电系统传输效率。

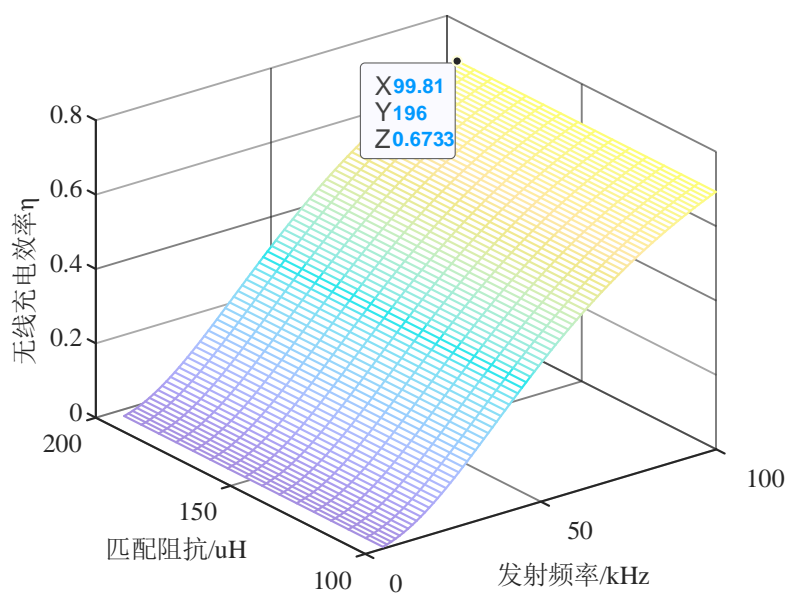


图 14 匹配阻抗和发射频率与无线电能效率关系图



图 14 为匹配阻抗和发射频率与无线电能效率关系图，可以发现无线电能效率在可操作范围内的最大的无线电能效率为 67.33%，与优化算法的结论相一致，验证了优化算法的有效性。

## 5.4 问题四模型建立与求解

### 5.4.1 错位对线圈互感的影响

实际中由于司机停车习惯的原因，不能保证每次都停在同一位置处，因此线圈之间会存在错位的情况，这种情况也是实际中真实存在的。线圈的错位会直接影响到线圈的互感，而互感是线圈之间传输能量的关键因素。如图所示，线圈大小距离保持不变，此时线圈水平方向错位距离为  $a$ 。

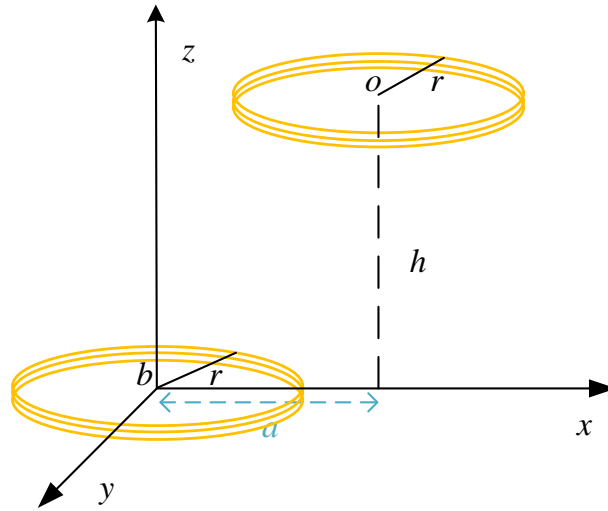


图 15 错位平行线圈

如图 15 所示，两个线圈处于错位平行的位置，两个线圈圆心分别为  $o(0, 0, 0)$ 、 $b(0, a, h)$ ，线圈的轴向距离为  $h$ ，流过两个线圈的电流分别为  $I_1$ 、 $I_2$ ，在线圈上分别取 2 点 P 和 Q，坐标分别为  $P(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ 、 $Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi + a, h)$ ，则可以计算得到：

$$\begin{cases} dl_1 = r(\cos\theta - \sin\theta)d\theta \\ dl_2 = r(\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi \\ dl_1 dl_2 = r^2 \cos(\theta - \varphi) d\theta d\varphi \end{cases} \quad (28)$$

根据 Neumann 公式可以计算此时线圈的互感为：

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi)}{\sqrt{r^2(\cos\theta - \cos\varphi)^2 + (L + r\sin\theta - r\sin\varphi) + h^2}} d\varphi \quad (29)$$

所计算错位距离和线圈的互感之间的关系，如图 16 所示。

由图 16 不难发现，随着错位距离  $a$  的增加，互感减小，即线圈耦合程度减小，并且可以发现互感和错位距离  $a$  的绝对值单调变化，因此效率固定情况下，所需要互感的最小值即对应了错位距离  $a$  的最大值。

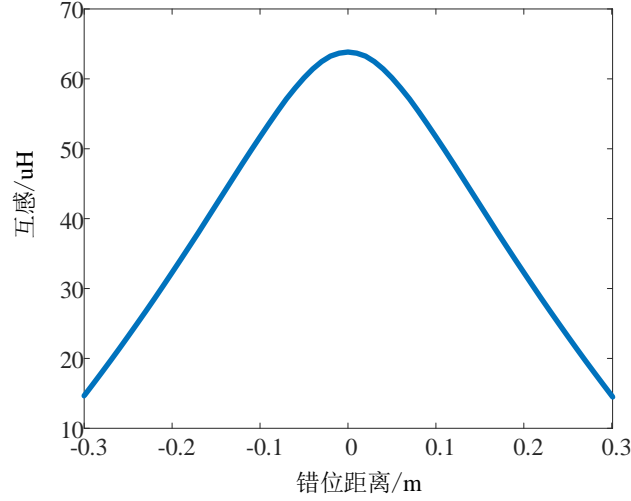


图 16 互感随偏移距离变化曲线

#### 5.4.2 模型建立与求解

由于问题三中计算最大传输效率不高于 80%，因此在此假设最高传输效率大于 60% 前提下  $a$  的最大值。此时发射效率、匹配阻抗、互感与无线电能效率曲线相互有关。基于此，最高传输效率（60%）作为约束条件，在合适的发射效率和匹配阻抗下，寻找到满足 60% 传输效率所需要最小互感，并基于此推出错位距离  $a$  最大值。

根据式(11)，发射效率、匹配阻抗、互感之间的约束条件可转化为：

$$M = \sqrt{\frac{\eta R_1 R_L^2 \omega_n^2 + \eta L_2^2 R_1 \omega_0^2 (-1 + \omega_n^2)^2}{(1 - \eta) R_L \omega_0^2 \omega_n^4}} \quad (30)$$

通过 5.3.2 构建的遗传算法，在限定的发射频率以及  $L_1$  计算  $M(\omega_n, L_1)$  的最小值。

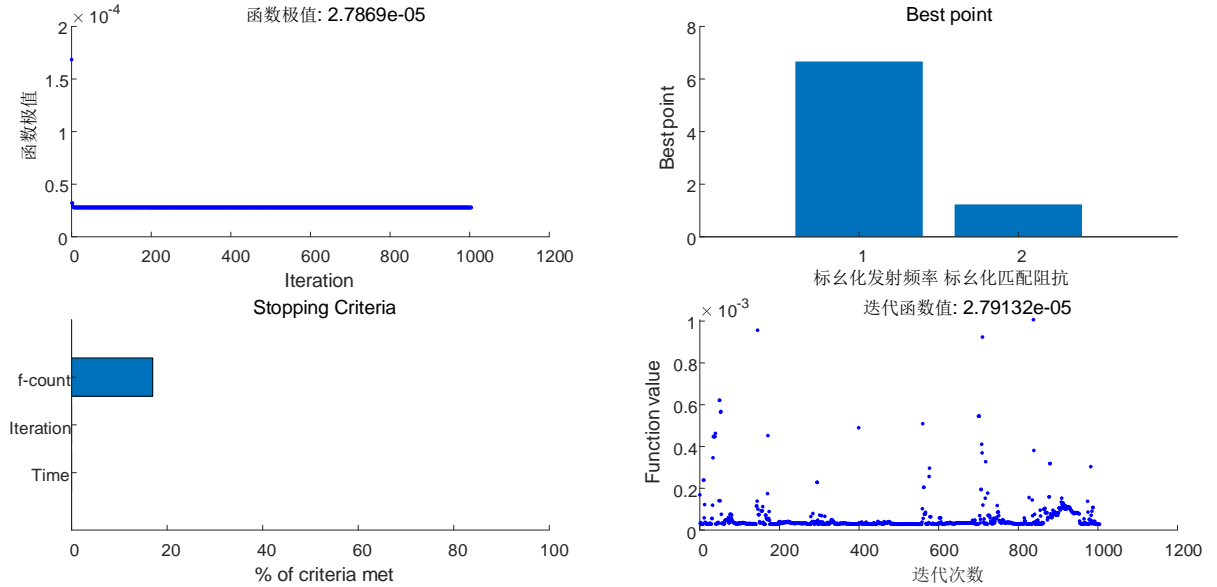


图 17 遗传退火算法计算结果

如图 17 所示，可以看出经过 1000 次迭代，函数极值逐渐减小并收敛，最终互感收敛于  $27.869\mu\text{H}$ 。

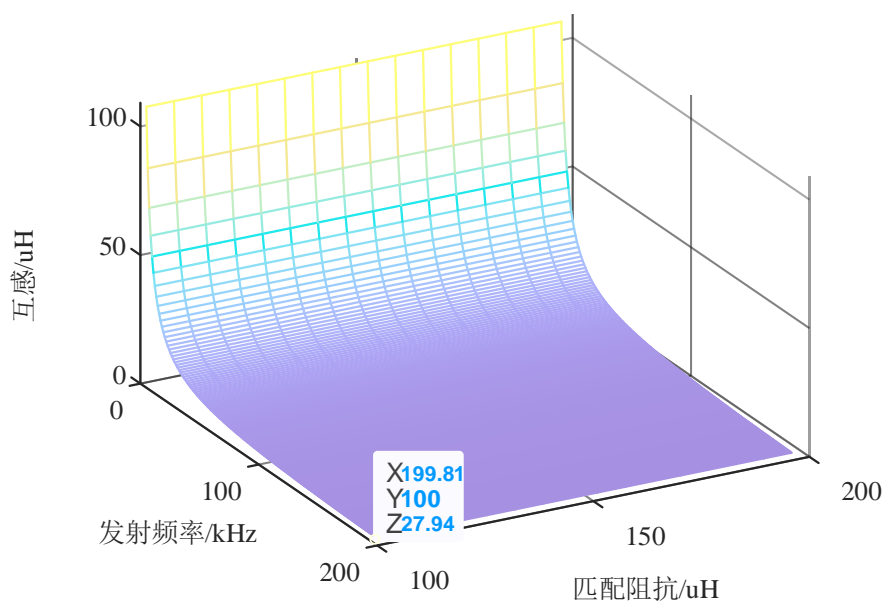


图 18 互感、发射频率、匹配阻抗的关系曲线

并通过建立互感、发射频率、匹配阻抗的关系曲线如图 18，验证寻优算法正确性。根据最低的互感量，结合 5.4.1 节互感与偏移距离的关系计算得出最大偏差 24cm 可以保证满足传输效率 60%的要求。

## 六、总结

本文的工作建立了串联-串联补偿结构（PSSS）无线电能充电装置输入变量与无线电能传输效率的数学模型，并给出了增加无线电能传输效率的优化操作的建议。

1.针对无线电能传输效率的数学模型，本文建立了针对该 PSSS 无线电能充电的二端口等效模型，计算对应的电压和电流传输函数，准确建立了无线电能传输效率的数学模型。最后利用 MATLAB/Simulink 仿真验证了数学模型的合理性。

2.针对传输距离与线圈互感的潜在非线性，采用支持向量机建立传输距离和线圈互感之间的联系，为了最优的使用支持向量机方法，粒子群算法被使用来寻找最优支持向量机参数。通过比较模型一和模型二的误差变化，验证了模型二中改进的数学模型的准确性。

3.针对无线电能效率的优化选择，采用遗传算法对问题一中目标函数进行寻优。在建模过程中，罚函数会导致传统遗传算法“早熟”，因此本文对传统的遗传算法进行了改进，采用了动态确定变异概率，择优交叉，适当增加种群数量等方法，减小了函数陷入局部最优解的可能。最后，筛选出无线电能传输效率的涨幅最大的样本及其优化后的操作变量。最终计算得到的无线电能效率最大值为 67.96%，相比于优化前效率提升约为 50%。

4.针对偏移距离对无线电能传输效率的约束可以转化为在无线电能传输效率约束下偏移距离的极大值，即探究互感的极小值。同时采用改进的遗传退火算法进行线圈互感全局最小寻优。增加发射频率和提高匹配阻抗有助于降低对线圈互感的要求，即可以增加满足效率的前提下容许的最大偏移距离。

## 参考文献

- [1]张献. 基于电磁—机械同步共振的无线电能传输与转换方法研究[D].河北工业大学,2012.
- [2]朱勇. 电动汽车无线充电系统建模与电磁安全性研究[D].重庆大学,2016.
- [3]吕新明,孙汉旭.基于函数链神经网络的磁化曲线拟合方法[J].机电产品开发与创新,2007(02):3-5.
- [4]Stephan R. Sain. The Nature of Statistical Learning Theory[J]. Technometrics,2012,38(4).
- [5]J.A.K. Suykens,J. Vandewalle. Least Squares Support Vector Machine Classifiers.[J]. Neural Processing Letters,1999,9(3).

## 附录

改进遗传算法代码

```
from numpy import *
import pandas as pd
import xlrd
import matplotlib.pyplot as plt

def loadDataSet(fileName):
    dataMat = [ ]
    fr = xlrd.open_workbook(fileName)
    sheet = fr.sheets()[0]
    cols = sheet.ncols
    for i in range(cols):
        #curLine = line.strip().split('\t')
        fltcol = list(sheet.col_values(i))
        '''
        if i <= 3:
            print(fltcol)
        '''

        dataMat.append(fltcol)
    return dataMat

def distEclud(vecA, vecB):
    return sqrt(sum(power(vecA-vecB, 2)))

def randCent(dataSet,k):
    n = shape(dataSet)[1]
    centroids = mat(zeros((k,n)))
    for j in range (n):
        minJ = min(dataSet[:,j])
        rangeJ = float(max(dataSet[:,j]) - minJ)
        centroids[:,j] = minJ + rangeJ * random.rand(k, 1)
    return centroids

def kMeans(dataSet, k, distMeas=distEclud, createCent=randCent):
    m = shape(dataSet)[0]
    clusterAssment = mat(zeros((m,2)))
    centroids = createCent(dataSet, k)
    clusterChanged = True
    while clusterChanged:
        clusterChanged = False
```

```

for i in range(m):
    minDist = inf; minIndex = -1
    for j in range(k):
        distJI = distMeas(centroids[j,:],dataSet[i,:])
        if distJI < minDist:
            minDist = distJI; minIndex = j
    if clusterAssment[i,0] != minIndex: clusterChanged = True
    clusterAssment[i,:] = minIndex,minDist**2
#print(centroids)
for cent in range(k):
    ptsInClust = dataSet[nonzero(clusterAssment[:,0].A==cent)[0]]

    if len(ptsInClust)!= 0:
        centroids[cent,:] = mean(ptsInClust, axis=0)

    #centroids[cent,:] = mean(ptsInClust, axis=0)
return centroids, clusterAssment

```

'''

```

def kMeans(dataset, tezhengshu, jisuan_distance = distEclud, readdata = randCent):
    dataset_lie_shu=shape(dataset)[1]
    dataset_hang_shu=shape(dataset)[0]

    tongji_juzhen=array(ones([dataset_hang_shu,2]))
    #ll=numpy.ones([dataset_hang_shu, 1])
    #print(type(ll))
    #print_date(dataset,numpy.array(numpy.ones([dataset_hang_shu,1])).flatten())
    creat_random_juzhen= creat_cluter (dataset,dataset_lie_shu,4)
    clu_change=True
    lun_index=1
    while clu_change:
        clu_change=False
        for i in range(dataset_hang_shu):
            juli_juzhen=[(jisuan_distance(creat_random_juzhen[j,:],dataset[i,:])) for j in range(4)]
            zhi_min_juli_juzhen=min(juli_juzhen)
            index_min_juli_juzhen=juli_juzhen.index(zhi_min_juli_juzhen)
            if tongji_juzhen[i,0] != index_min_juli_juzhen:
                clu_change=True
                tongji_juzhen[i,:]=index_min_juli_juzhen,zhi_min_juli_juzhen
        for i in range(4):
            belong_juzhen=nonzero(tongji_juzhen[:,0] == i)[0]

```

```

        #print(belong_juzhen)
        belong_dataset=dataset[belong_juzhen]
        if len(belong_juzhen) != 0:
            creat_random_juzhen[i,]=mean(belong_dataset,axis=0)
            print("第%d 轮第%d 个簇点改变: "%(lun_index,i))
            print(creat_random_juzhen)
        lun_index+=1
    return creat_random_juzhen,tongji_juzhen

def creat_cluter(dataset,dataset_lie_shu,tezhengshu):
    temp_cluter=array(zeros([tezhengshu,dataset_lie_shu]))
    for i in range(dataset_lie_shu):
        min_lie=min(dataset[:,i])
        max_lie=max(dataset[:,i])
        kuadu_lie=max_lie-min_lie
        ran_lie=kuadu_lie*(random.rand())+min_lie
        temp_cluter[:,i]=ran_lie
    return array(temp_cluter)
'''
#####

def dist(vec1, vec2):

    return sqrt(sum(square(vec1 - vec2)))

def main():
    datMat = mat(loadDataSet('shuju_nom.xlsx'))

    myCentriods, clustAssing = kMeans(datMat, 30)
    print(myCentriods)
    #print(clustAssing)

    index = 0
    dis = []
    for i in clustAssing[:,0]:
        dis.append(dist(array(datMat[index]), myCentriods[int(i)].view()))
        print(dist(array(datMat[index]), myCentriods[int(i)].view()))

    data1 = pd.DataFrame(myCentriods.T)
    data2 = pd.DataFrame(clustAssing[:,0].T)
    data3 = pd.DataFrame(array(dis).T)

    writer = pd.ExcelWriter('output.xlsx')
    data1.to_excel(writer, 'page_1', float_format='%.5f')

```

```
data2.to_excel(writer, 'page_2', float_format='%d')
data3.to_excel(writer, 'page_3', float_format='%.5f')
writer.save()
writer.close()

if __name__ == '__main__':
    main()
```