

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

第九届“华为杯”  
全国研究生数学建模竞赛

学 校                      中国海洋大学

参赛队号                      10423006

队员姓名	1.	靳光震
	2.	高艳秋
	3.	曹安州

---

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## 第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 基于伴随同化方法的空间飞行器轨道估计与误差分析

### 摘 要：

利用观测卫星获得的空间飞行器的轨道参数，结合动力学方程对空间飞行器的轨道进行估计，能够为飞行器类别、飞行意图的判断提供信息基础。

问题一对观测卫星的三维位置估计是基于卫星简化运动方程，利用观测卫星零时刻的位置和速度作为初始条件对运动方程数值求解，得到观测卫星的运动轨迹，并得出观测卫星运行周期。通过与中低轨近圆轨道卫星运行轨迹和周期的对比，验证了计算结果的准确性。

问题二中 06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测数据时间不同步而且数据中包含了随机误差（白噪声），故首先利用低通滤波器对观测数据进行滤波处理，再将观测数据插值为时间统一的序

---

列。然后将观测坐标系下的观测数据转化到基础坐标系中，根据逐点交汇定位的思路，计算出空间飞行器的所在位置。在此基础上，分别利用伴随同化方法和数据拟合方法给出了空间飞行器的位置和速度，并给出位置的估计残差。两种方法得到的结果均与观测数据吻合较好，使用伴随同化方法的误差比使用数据拟合方法的小一个量级。

问题三在前文基础上考虑系统误差对观测数据产生的影响，根据对系统误差的认识和模型假设，认为逐点交汇定位方法可以对系统误差进行估计，推导出了观测数据和系统误差之间的转化关系。利用最小二乘原理，结合观测数据得到系统误差（两颗卫星的  $d\alpha$ 、 $d\beta$  和  $d\theta$ ）。利用系统误差对原观测数据进行校正后，采用伴随同化方法给出了空间飞行器的位置和速度估计，并计算了位置的估计残差。

---

# 基于伴随同化方法的空间飞行器轨道估计与误差分析

## 1. 问题重述

空间信息对抗是现代信息战争中重要的作战和保障手段，是战略防御体系的重要组成部分，目前已成为国际前沿研究热点问题之一。利用中低轨近圆轨道卫星探测空间飞行器发射与轨道参数是实现飞行器监控和作出反应的第一步。

第一问要求基于基础坐标系下观测卫星主动段的简化运动方程和 09 号卫星在零时刻的位置和速度信息计算其在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。第二问要求利用 06 号观测卫星和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的仿真观测数据，在空间飞行器的简化运动方程框架下建立模型给出 0 号空间飞行器的轨道估计，并给出从 50s 到 170s 间隔 10 s 的采样时间点的位置和速度，同时给出估计残差，还要描绘三个位置分量和三个速度分量对时间的变化曲线。第三问在第二问的基础上同时考虑系统误差，要求在完成第二问问题的同时找到对系统误差进行正确估计的方案及其估计结果。第四问探讨只有 09 号观测卫星对 01 号空间飞行器进行轨道估计的问题，完成第三问提出的问题，并进一步考虑在同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下的联合系统误差估计问题。

## 2. 问题分析

问题一：根据理论力学中的两体问题的解，观测卫星的运动轨迹是椭圆。基于基础坐标系下观测卫星主动段的简化运动方程和 09 号卫星在零时刻的位置和速度信息，采用常微分方程初值问题的数值解法求解 09 号观测卫星的位置。

问题二：由于观测数据中包含随机误差，首先进行滤波消除该误差。其次要解决双星逐点交汇定位的问题，其中包含观测数据从观测坐标系向基础坐标系的转化和如何确定空间飞行器的空间位置。最后根据已有的观测数据选择适当的模型模拟空间飞行器的运动轨迹。应当注意两颗卫星观测时间不同步，在解决问题二时，应当在滤波后将观测数据插值为时间统一的序列。

问题三：首先考虑系统误差对观测的影响，推导出观测值、精确值与  $d\alpha$ 、 $d\beta$ 、 $d\theta$  的转化关系。进而利用多组观测数据进行最小二乘拟合，求出  $d\alpha$ 、 $d\beta$  和  $d\theta$ 。

对观测数据进行校正后，重复问题二的过程。

问题四：针对单星定位问题，假设轨道的数学表达形式，采用待定系数法和最小二乘法确定待定系数，从而确定空间飞行器的运动参数。对于多颗卫星观测多个空间飞行器而言，可以借鉴问题三中的方法计算最小二乘意义下的系统误差。

---

### 3. 符号说明与名词解释

#### 3.1 符号说明

$\vec{r}(t)$ : 空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量;

$\ddot{\vec{r}}(t)$ :  $\vec{r}(t)$  对时间  $t$  的二阶导数, 即加速度;

$G_m$ : 地球引力常数 ( $G_m = 3.986005 * 10^{14} m^3 / s^2$ );

$\vec{v}_r(t)$ : 燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度;

$m(t)$ : 瞬时质量,  $\dot{m}(t)$  表示质量变化率;

$\alpha_{old}$ 、 $\beta_{old}$ : 滤波前观测卫星对于空间飞行器的无量纲化简数据

( $\alpha_{old} = y_{s_{old}} / x_{s_{old}}$ ;  $\beta = z_{s_{old}} / x_{s_{old}}$ );

$\alpha_{new}$ 、 $\beta_{new}$ : 滤波后观测卫星对于空间飞行器的无量纲化简数据

( $\alpha_{new} = y_{s_{new}} / x_{s_{new}}$ ;  $\beta = z_{s_{new}} / x_{s_{new}}$ );

$\theta$ : 两条异面直线  $MA$  与  $NB$  的夹角;

$\theta_1$ : 06 号观测卫星与 09 号观测卫星的连线同 06 号观测卫星与空间飞行器的连线的夹角;

$\theta_2$ : 06 号观测卫星与 09 号观测卫星的连线同 09 号观测卫星与空间飞行器的连线的夹角。

#### 3.2 名词解释

白噪声: 平均值函数为 0、自相关函数为  $\delta$  函数的随机过程;

估计残差: 观测数据与模拟值之间的差;

伴随同化方法: 伴随同化方法是变分原理和最优控制论相结合的一种方法, 它将所要解决的实际问题作为条件最小值问题来解决;

### 4. 模型假设

(1) 在存在各种误差的条件下, 每两颗观测卫星与空间飞行器之间的连线, 不一定在同一平面内, 假设两条异面直线的公垂线段的中点为空间飞行器所在的位置;

(2) 假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声;

(3) 假设系统误差只考虑与卫星平台相关的误差, 即不同观测卫星的系统误差相

互没有关联，同一观测卫星对不同空间飞行器的系统误差是一样的；  
 (4) 假设去掉随机误差的观测在逐点交汇定位空间飞行器时，异面直线公垂线的长度可以表征两颗卫星系统误差。

## 5. 模型建立与求解

### 5.1 问题一求解

由理论力学的知识可知，观测卫星的运动方程  $\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t)$  对应的运动应当为椭圆运动，而地心则是椭圆的其中一个焦点<sup>[1]</sup>。采用常微分方程初值问题的数值解法<sup>[2]</sup>可以得到 09 号观测卫星的位置。

将观测卫星的简化运动方程分解到  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向：

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G_m}{r^3}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G_m}{r^3}y \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{G_m}{r^3}z \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (5-1)$$

采用如下的差分格式进行离散：

$$\frac{M^{n+1} - 2M^n + M^{n-1}}{\Delta t^2} = -\frac{G_m}{(r^n)^3} M^n, \text{ 其中, } r^n = \sqrt{(x^n)^2 + (y^n)^2 + (z^n)^2}, \text{ } M \text{ 代表 } x,$$

$y$  或  $z$ 。

由于该差分方程是一个三层时间模式，所以需要用初始时刻的位置和速度先计算下一时刻的位置，才能完成迭代计算。即

$$\begin{cases} x^1 = x^0 + u^0 \Delta t \\ y^1 = y^0 + v^0 \Delta t \\ z^1 = z^0 + w^0 \Delta t \end{cases} \quad (5-2)$$

根据物理学中关于卫星运动（近似圆周运动）的方程式： $\frac{G_m}{r^2} = r \frac{4\pi^2}{T^2}$ ，结合初始时刻 09 号观测卫星的位置，估计 09 号观测卫星的周期大致为 9000s。为了检验数值解的准确性，我们模拟了 50000s，时间步长取 0.1s，共模拟了 500000 步。

图 1 和图 2 分别给出了数值解的结果。通过图 1 和图 2 可以看出，数值求解计算得到的卫星轨迹是一个椭圆，与理论结果吻合，且数值计算得到的 09 号观

测卫星在基础坐标系中的位置具有明显的周期特性，周期约在 9028s 左右，与估计结果基本吻合，因此数值求解结果可以代表 09 号观测卫星的位置。09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 的三维位置见表 1。

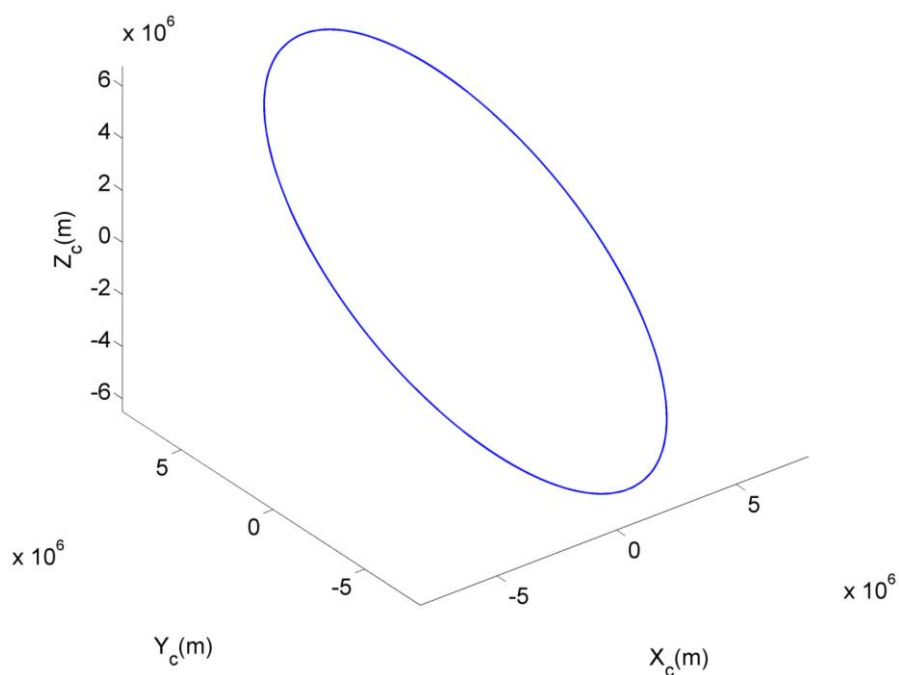


图 1 数值求解得到的 09 号观测卫星的运动轨迹

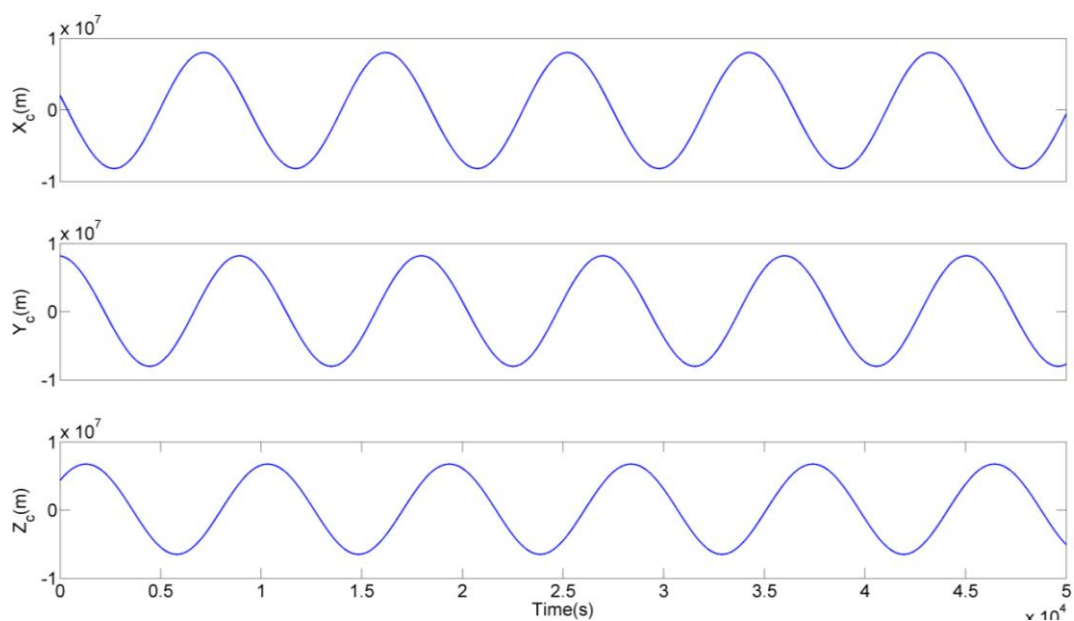


图 2 数值求解得到的 09 号观测卫星在基础坐标系中的坐标随时间的变化

表 1 09 号观测卫星在基础坐标系下的三维坐标

时间 (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)
50.0	1.77327E+06	8.16133E+06	4.51704E+06
100.0	1.50108E+06	8.12670E+06	4.68502E+06
150.0	1.22716E+06	8.08263E+06	4.84755E+06
200.0	9.51807E+05	8.02918E+06	5.00446E+06
250.0	6.75353E+05	7.96642E+06	5.15556E+06

## 5.2 问题二的建模与求解

### 5.2.1 滤波——消除白噪声

本题假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声,白噪声指的是一个白色随机过程 $\omega(t)$ , 它的平均值函数与自相关函数满足以下条件:

$$\mu_{\omega}(t)=E\{\omega(t)\}=0 \quad (5-3)$$

$$R_{\omega\omega}(t_1,t_2)=E\{\omega(t_1)\omega(t_2)\}=(N_0/2)\delta(t_1-t_2) \quad (5-4)$$

在使用观测数据之前,需要消除白噪声对实际数据的影响。我们使用不同的低通滤波器<sup>[3]</sup>对观测数据进行滤波分析,利用得到的新数据与观测数据作差,差的平均值越接近 0,认为越符合白噪声的特点,把此时的差作为白噪声。不同低通滤波器差别体现在权重系数 $\varepsilon$ 的选取,分别选取 $\varepsilon=0.8, 0.85, 0.9, 0.95$ 对给出数据进行滤波处理,滤波后的数据 $\alpha_{new}$ 和 $\beta_{new}$ 与原始数据中 $\alpha_{old}$ 和 $\beta_{old}$ 之间符合如下关系式:

$$\alpha_{new}(i)=\frac{1-\varepsilon}{2}[\alpha_{old}(i-1)+\alpha_{old}(i+1)]+\varepsilon\alpha_{old}(i) \quad (5-5)$$

$$\beta_{new}(i)=\frac{1-\varepsilon}{2}[\beta_{old}(i-1)+\beta_{old}(i+1)]+\varepsilon\beta_{old}(i) \quad (5-6)$$

其中, $i=2,...,n-1$ 。经过比较,当 $\varepsilon=0.95$ 时滤波效果最好,数据 $\alpha$ 和 $\beta$ 的误差平均值分别为 $-7.79E-09$ 和 $-3.31E-09$ 。白噪声变化曲线如下图(清晰起见,仅列出数据 $\alpha$ 上施加的白噪声,数据 $\beta$ 有类似结果)。



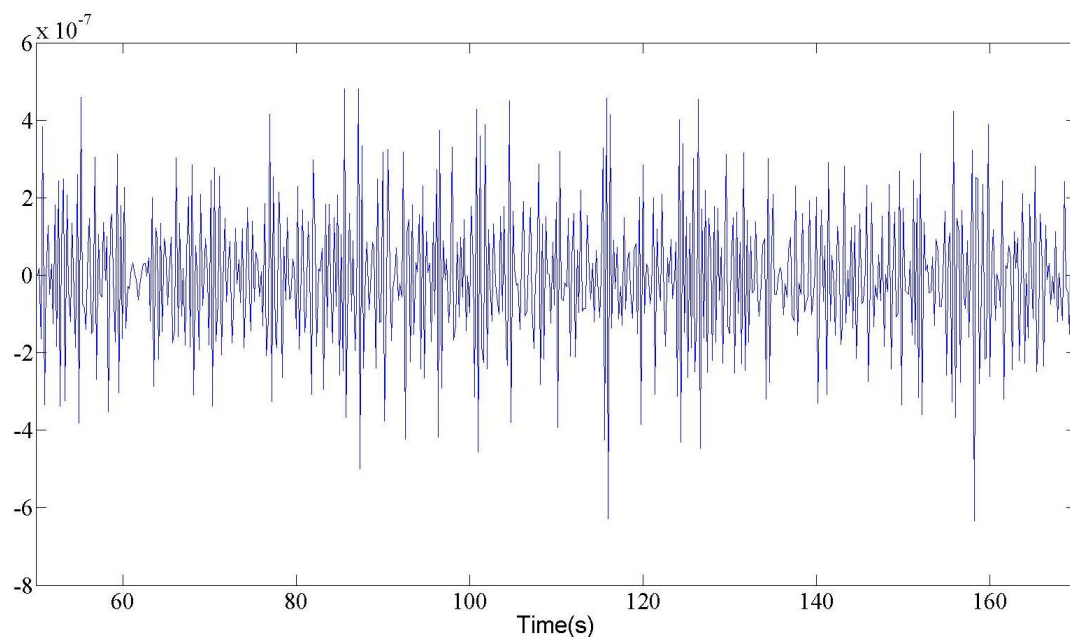


图3 09号观测卫星观测值 $\alpha$ 的白噪声

### 5.2.2 插值

观测数据的时间序列并非从 50s 开始，而且两个观测卫星的观测时间序列不同步，为方便对数据统一处理，需要插值为时间统一的序列。09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测数据 $\alpha$ 和 $\beta$ 随时间的变化见图 4。

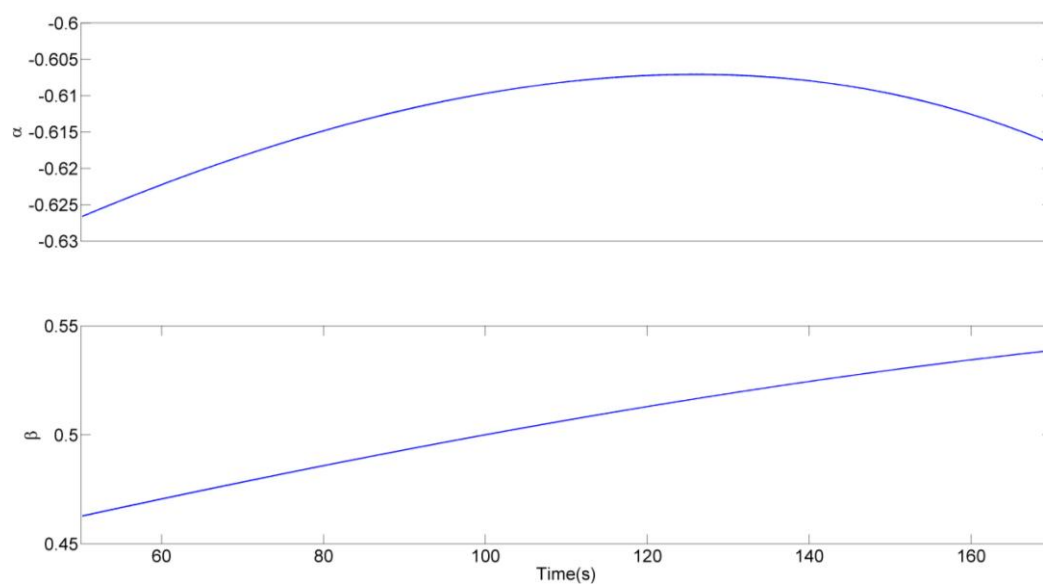


图4 09号观测卫星观测值（ $\alpha$ 和 $\beta$ ）随时间变化曲线

从图 4 中可以看出，观测数据 $\alpha$ 和 $\beta$ 均随时间缓慢变化，故此处可以使用分段线性插值方法<sup>[2]</sup>将观测数据插值为从 50s 开始的、与给定观测时间间隔相同

(0.2s) 的时间序列。

### 5.2.3 坐标系转换

将观测坐标系中的观测转化到基础坐标系中是实现双星逐点交汇定位的基础<sup>[4]</sup>。这一部分给出了坐标转换的基本思路及其推导公式。

如图 5 所示,  $O_c - X_c Y_c Z_c$  表示基础坐标系,  $O_s - X_s Y_s Z_s$  表示观测坐标系,  $Q$  表示观测坐标系中的任意一点。矢量  $\overrightarrow{O_s Q}$  可以分解到  $\overrightarrow{O_s X_s}$ 、 $\overrightarrow{O_s Y_s}$  和  $\overrightarrow{O_s Z_s}$  方向, 其分量分别为  $\overrightarrow{Qx}$ 、 $\overrightarrow{Qy}$  和  $\overrightarrow{Qz}$ 。由于  $\overrightarrow{O_s x_s}$  也即  $\overrightarrow{O_c O_s}$  的方向是确定的, 并且  $\overrightarrow{O_s z_s}$  向北,  $\overrightarrow{O_s y_s}$  向东, 因此可以将  $\overrightarrow{Qx}$ 、 $\overrightarrow{Qy}$  和  $\overrightarrow{Qz}$  在基础坐标系中分解, 不妨设:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Qx} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \\ \overrightarrow{Qy} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k} \\ \overrightarrow{Qz} = a_3 \vec{i} + b_3 \vec{j} + c_3 \vec{k} \end{cases} \quad (5-7)$$

其中,  $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$  和  $\vec{k}$  分别是基础坐标系的单位向量。所以有:

$$\overrightarrow{O_s Q} = (a_1 + a_2 + a_3) \vec{i} + (b_1 + b_2 + b_3) \vec{j} + (c_1 + c_2 + c_3) \vec{k} \quad (5-8)$$

再结合  $O_s$  在基础坐标系中的坐标, 就可以给出  $Q$  点在基础坐标系中的坐标。

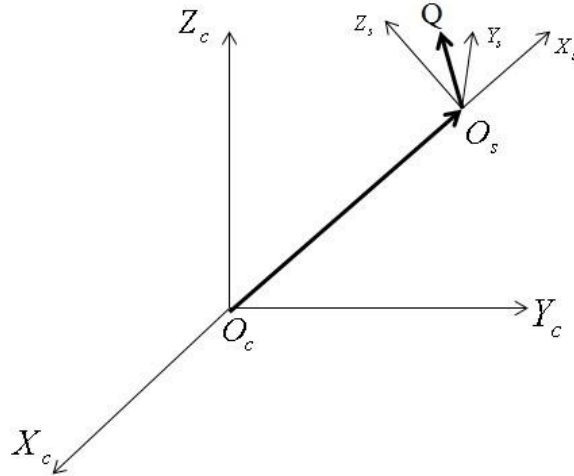


图 5 观测坐标系向基础坐标系转化示意图

设  $O_s$  在基础坐标系中的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 观测到的空间飞行器的参数为  $\alpha$  和  $\beta$ 。 $\alpha$  和  $\beta$  提供了空间飞行器在观测坐标系中的方向信息, 只要再知道该方向上的任意一点, 结合卫星的位置 (即  $O_s$ ), 就可以唯一确定出卫星和空间飞行器

连线在基础坐标系中的精确表达式。当存在两颗及以上的卫星时，就可以利用逐点定位方法确定空间飞行器在基础坐标系中的位置。

设某点在观测坐标系中的坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$ ，在基础坐标系中的坐标为  $(x_2, y_2, z_2)$ 。下面给出坐标转化的推导过程。

向量  $\overrightarrow{O_s x_s}$  在基础坐标系中的单位法向量为：

$$\vec{v}_1 = \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right) \quad (5-9)$$

由于  $\overrightarrow{O_s z_s}$  指向北，所以  $\overrightarrow{O_s z_s}$  在平面  $O_s O_c z_c$  内。从而平面  $O_s O_c z_c$  的法向量即为  $\overrightarrow{O_s y_s}$  的方向向量，因此  $\overrightarrow{O_s y_s}$  在基础坐标系中的单位法向量为：

$$\vec{v}_2 = \left( \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, 0 \right) \quad (5-10)$$

由于  $\overrightarrow{O_s x_s}$  和  $\overrightarrow{O_s y_s}$  已经确定，所以  $\overrightarrow{O_s z_s}$  在基础坐标系中的单位法向量为：

$$\vec{v}_3 = \left( \frac{-x_0 z_0}{\sqrt{x_0^2 z_0^2 + y_0^2 z_0^2 + (x_0^2 + y_0^2)^2}}, \frac{-y_0 z_0}{\sqrt{x_0^2 z_0^2 + y_0^2 z_0^2 + (x_0^2 + y_0^2)^2}}, \frac{x_0^2 + y_0^2}{\sqrt{x_0^2 z_0^2 + y_0^2 z_0^2 + (x_0^2 + y_0^2)^2}} \right) \quad (5-11)$$

于是观测坐标系中的点  $(x_1, y_1, z_1)$  在基础坐标系中的坐标为：

$$(x_2, y_2, z_2) = x_1 \vec{v}_1 + y_1 \vec{v}_2 + z_1 \vec{v}_3 + (x_0, y_0, z_0) \quad (5-12)$$

#### 5.2.4 双星逐点交汇定位

由于实际观测中存在各种误差，每两颗观测卫星与空间飞行器的连线不一定在同一个平面内。在这种情况下，我们认为两条异面直线的公垂线段的中点为空间飞行器所在的位置，公垂线段的长度可以表征两颗卫星的观测误差。

如图 6 所示， $M$  和  $N$  分别表示两颗观测卫星的位置，直线  $MA$  和  $NB$  分别表示从两颗卫星上观测到的空间飞行器与卫星所在的直线， $AB$  为两直线的公垂线段， $AB$  的中点即空间飞行器的实际位置。

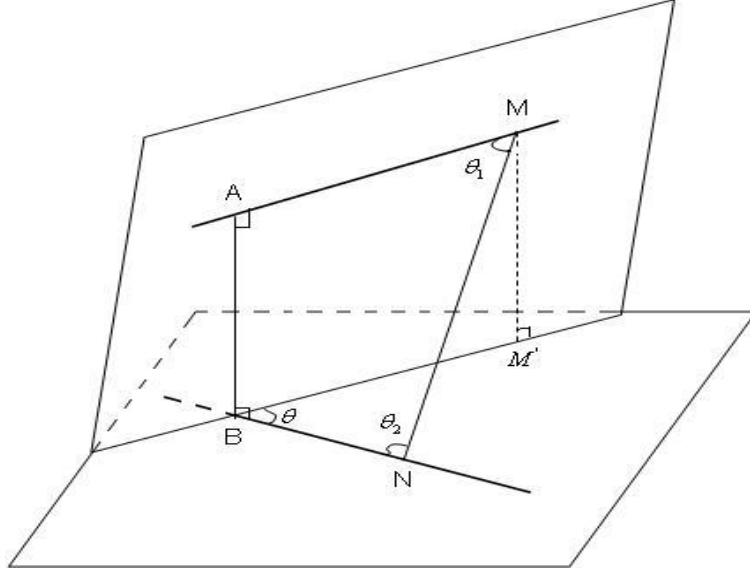


图 6 空间内异面直线的及其公垂线示意图

下面给出空间飞行器实际位置的推导公式。

设两颗观测卫星  $M$  和  $N$  的位置分别为  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\overrightarrow{MA}$  和  $\overrightarrow{NB}$  的单位向量分别为  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  和  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  (可以通过 5.2.3 得到)。则有

$$\theta_1 = \arccos \left( \frac{\alpha_1(x_2 - x_1) + \beta_1(y_2 - y_1) + \gamma_1(z_2 - z_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \right) \quad (5-13)$$

$$\theta_2 = \arccos \left( \frac{\alpha_2(x_1 - x_2) + \beta_2(y_1 - y_2) + \gamma_2(z_1 - z_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right) \quad (5-14)$$

$$\theta = \arccos(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) \quad (5-15)$$

由空间异面直线的定理可知:

$$|\overrightarrow{MA}| = \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5-16)$$

$$|\overrightarrow{NB}| = \frac{\cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5-17)$$

进而可以得到  $A(x_3, y_3, z_3)$  和  $B(x_4, y_4, z_4)$  点的坐标:

$$(x_3, y_3, z_3) = (x_1, y_1, z_1) + |\overrightarrow{MA}|(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad (5-18)$$

$$(x_4, y_4, z_4) = (x_2, y_2, z_2) + |\overrightarrow{NB}|(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \quad (5-19)$$

则空间飞行器在基础坐标系中的位置  $(x, y, z)$  为:

$$(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[ (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) + |\overrightarrow{MA}|(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + |\overrightarrow{NB}|(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \right] \quad (5-20)$$

采用上述方法处理 06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测资料,可以得到 0 号空间飞行器在基础坐标系中的轨迹,分别如图 7 和图 8 所示。

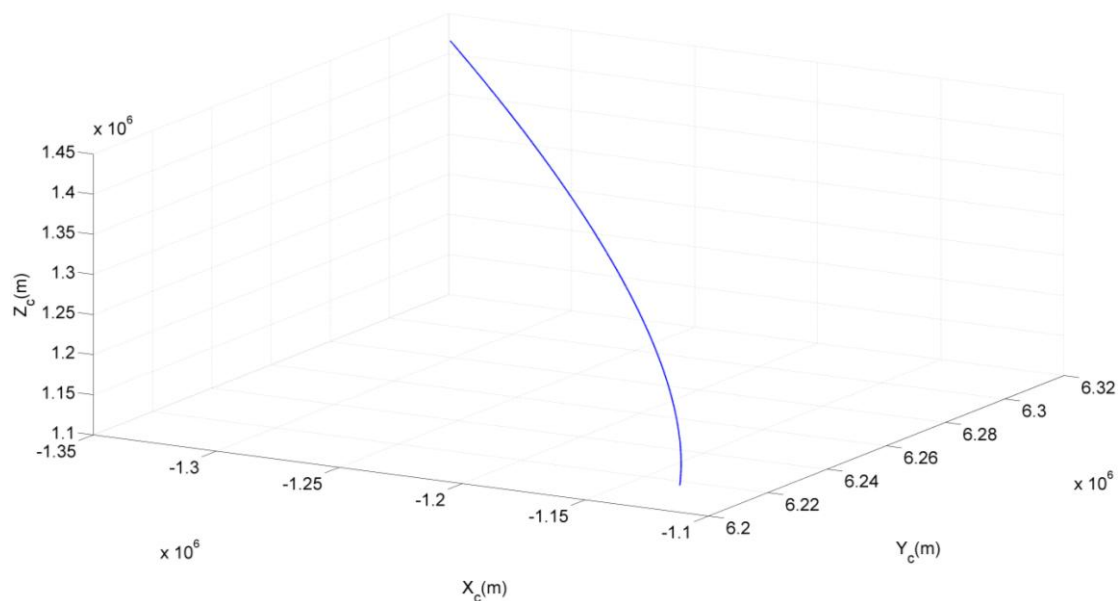


图 7 0 号空间飞行器在基础坐标系中的轨迹

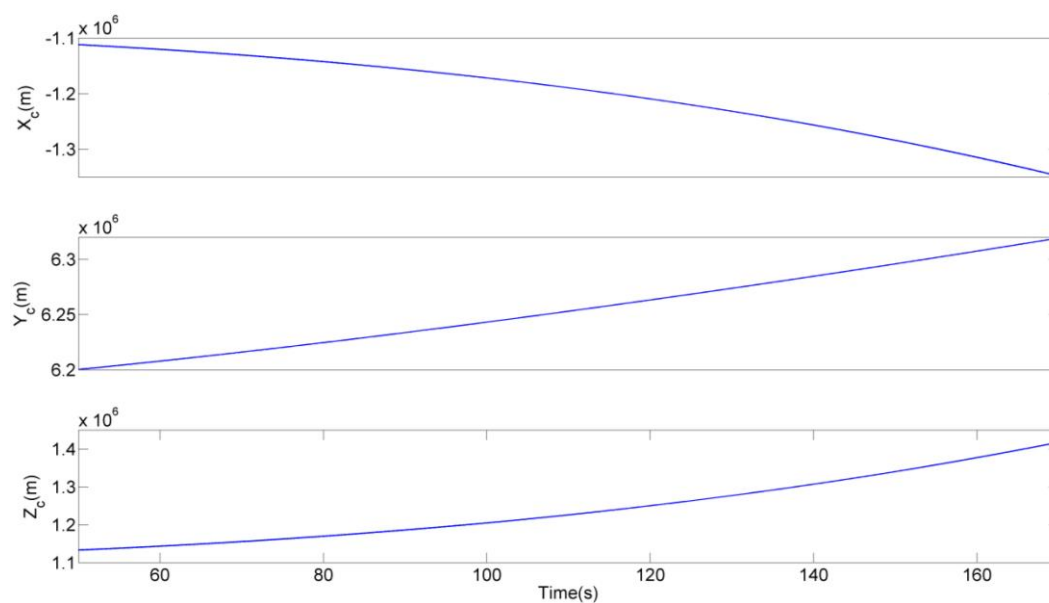


图 8 0 号空间飞行器三维坐标随时间的变化

### 5.2.5 伴随同化方法确定空间飞行器的轨道

伴随同化方法是建立在严格的数学基础之上的一种有效的四维变分同化技术,它将变分原理和最优控制理论相结合<sup>[5]</sup>。伴随同化方法可以用来解决许多不同类型的实际问题,其中包括:对模型中的参数进行优化,对初始条件或边界条件进行优化,对定常流或环流问题以及表面热通量问题进行研究等。伴随同化方

法在本文中的应用是以空间飞行器在基础坐标系下的简化运动方程作为约束条件，由观测到的空间飞行器的位置，得到空间飞行器的轨道参数，进而得到轨道信息。

伴随同化方法中的 Lagrange 乘子法是建立在严格的数学基础之上的一种方法，它将所要解决的实际问题作为条件极值问题来求解。在此过程中将动力学方程组以及定解条件作为约束条件，目标是根据具体问题而设计的代价函数达到极小<sup>[6]</sup>。

设依赖于时间变量的动力学方程（组）为

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(x, c) \quad (5-21)$$

这里向量  $x$  的分量是随时间变化的量（例如位移、速度等）， $t$  表示时间，向量  $c$  表示模型中的参数， $F$  是线性或非线性算子。模型方程(5-21)不封闭，还需要相应的定解条件才能确定其唯一解。 $y$  表示控制变量，它包括初始条件、边界条件、模型中的参数等。 $y$  一旦确定，模型(5-21)的唯一解  $x(y)$  也就随之确定。

当然控制变量必须属于一个可容许的控制集合  $y_{ad}$ 。 $y_{ad}$  可根据有关控制变量的物理学性质以及历史经验来确定。

在解决问题的过程中，研究者的目的是得到模型方程(5-21)的接近观测结果的解  $x$ 。这里的所谓接近用代价函数  $J$  (度量模型方程(5-21)的解与观测结果之间的距离，通常定义为差的平方和)来定义。观测结果包括位移、速度、高度等。这样，变分问题可简述为问题(P)：寻求属于  $y_{ad}$  的  $y^*$  使得代价函数  $J$  达到最小， $y^*$  表示最优的  $y$ 。

以上所述问题是以动力学方程(5-21)作为约束的约束极值问题。此问题可转化为无约束极值问题来求解。当把约束条件作为强约束条件来对待时，经典的 Lagrange（条件极值）乘子法为我们提供了坚实的理论基础。在此构造 Lagrange 函数  $L(x, \lambda, y)$ 。

$$L(x, \lambda, y) = J(x, y) + \langle \lambda, G(x; c) \rangle, \quad G(x; c) = \frac{\partial x}{\partial t} - F(x; c), \quad (5-22)$$

这里  $\lambda$  是 Lagrange 乘子， $\langle \bullet, \bullet \rangle$  是定义在  $G(x; c)$  所属 Hilbert 空间的内积。这样约束极值问题(P)就被转化成关于  $x, \lambda, y$  的无约束问题。在此需说明的是这里的约束条件并不是固定不变的，而是在同化过程中不断得到调整，使得模拟结果尽可能地接近观测结果。在强约束条件  $G(x; c) = 0$  的限制下，确定泛函  $J(x, y)$  的驻点与确定 Lagrange 函数关于变量  $x, \lambda$  和  $y$  的驻点是等价的。表示 Lagrange 函数的驻点的方程组称为约束最小值问题(P)的 Euler-Lagrange 方程组。Euler-Lagrange 最优条件(最优的  $x^*, \lambda^*, y^*$ )将由下述方程组确定：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*, y^*) = 0. \quad (5-23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, \lambda^*, y^*) = 0. \quad (5-24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, \lambda^*, y^*) = 0. \quad (5-25)$$

方程(5-23)就是原来的模型方程。方程(5-24)中的算子是方程(5-23)中的算子的伴随算子，通常称方程(5-24)为方程(5-23)的伴随方程。模型方程随时间正向传播信息，而伴随方程随时间反向传播信息。至于方程(5-25)，给出了 Lagrange 函数关于控制变量的梯度。

Lagrange 乘子法，代价函数关于任何控制变量（初始条件、边界条件、方程中的参数）的梯度在理论上都能够表达出来，这决定了利用 Lagrange 乘子法可以解决许多方面的问题。而且，在 Lagrange 乘子法中，模拟值与观测值的差作为驱动伴随方程的外力，很自然地加到了伴随方程上<sup>[7]</sup>。

Lagrange 乘子法与经典的 Lagrange 条件极值问题的不同有以下几点：

（1）经典的 Lagrange 条件极值问题的约束是一个或者数个，而 Lagrange 乘子法的约束每个时间步都存在一个；

（2）Lagrange 乘子法中的伴随方程需要求解而不能简单消掉；

（3）Lagrange 乘子法需要求解控制方程和伴随方程，以得到需要优化参数的梯度；

（4）Lagrange 乘子法反复利用（3）中的梯度，选取适当的下降算法，不断优化参数。

假设火箭产生的推力加速度项在基础坐标系中分解为  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$ ，且  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  只与时间  $t$  有关（在方程中作为随时间变化的控制参数），所以空间飞行器在基础坐标系下的简化运动方程可以写成如下的形式：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{G_m}{r^3} x + F_x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{G_m}{r^3} y + F_y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{G_m}{r^3} z + F_z \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (5-26)$$

通常代价函数可以构造为：

$$J = \frac{\kappa}{2} \int_{t_1}^{t_2} [(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2 + (z - \hat{z})^2] dt \quad (5-27)$$

其中  $\kappa$  为常数（在本题中取为 1）， $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$  代表观测值， $x$ 、 $y$ 、 $z$  代表数

值模拟结果。

利用 Lagrange 乘子法构造 Lagrange 函数，如下所示：

$$L = J + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \lambda \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{G_m}{r^3} x - F_x \right) + \mu \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{G_m}{r^3} y - F_y \right) + \nu \left( \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{G_m}{r^3} z - F_z \right) \right] dt \quad (5-28)$$

我们的目的是寻求在满足方程组 (5-26) 及其对应的初边值条件下，代价函数达到极小。为求得极小值，我们要求：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \nu} = 0 \quad (5-29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad (5-30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial F_y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial F_z} = 0 \quad (5-31)$$

根据 (5-30)，能够得到伴随方程：

$$\begin{cases} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + G_m \frac{(y^2 + z^2 - 2x^2)\lambda - 3x(y\mu + z\nu)}{r^5} + \kappa(x - \hat{x}) = 0 \\ \frac{d^2 \mu}{dt^2} + G_m \frac{(x^2 + z^2 - 2y^2)\mu - 3y(x\lambda + z\nu)}{r^5} + \kappa(y - \hat{y}) = 0 \\ \frac{d^2 \nu}{dt^2} + G_m \frac{(x^2 + y^2 - 2z^2)\nu - 3z(x\lambda + y\mu)}{r^5} + \kappa(z - \hat{z}) = 0 \end{cases} \quad (5-32)$$

利用梯度下降算法，对控制参数进行修正，根据上述推导得到的校正关系表达式为：

$$\begin{cases} F_x - \tilde{F}_x = \lambda \\ F_y - \tilde{F}_y = \mu \\ F_z - \tilde{F}_z = \nu \end{cases} \quad (5-33)$$

其中  $\tilde{F}_x$ 、 $\tilde{F}_y$  和  $\tilde{F}_z$  是优化前的值， $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  是优化后的值。



方程 (5-26) 的差分格式为：

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}}{\Delta t^2} = -\frac{G_m}{(r^n)^3} x^n - F_x^n \\ \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\Delta t^2} = -\frac{G_m}{(r^n)^3} y^n - F_y^n \\ \frac{z^{n+1} - 2z^n + z^{n-1}}{\Delta t^2} = -\frac{G_m}{(r^n)^3} z^n - F_z^n \\ r^n = \sqrt{(x^n)^2 + (y^n)^2 + (z^n)^2} \end{cases} \quad (5-34)$$

伴随方程 (5-32) 的差分格式为：

$$\begin{cases} \frac{\lambda^{n-1} - 2\lambda^n + \lambda^{n+1}}{\Delta t^2} + G_m \frac{[(y^n)^2 + (z^n)^2 - 2(x^n)^2] \lambda^n - 3x^n(y^n \mu^n + z^n \nu^n)}{(r^n)^5} + \kappa(x^n - \hat{x}^n) = 0 \\ \frac{\mu^{n-1} - 2\mu^n + \mu^{n+1}}{\Delta t^2} + G_m \frac{[(x^n)^2 + (z^n)^2 - 2(y^n)^2] \mu^n - 3y^n(x^n \lambda^n + z^n \nu^n)}{(r^n)^5} + \kappa(y^n - \hat{y}^n) = 0 \\ \frac{\nu^{n-1} - 2\nu^n + \nu^{n+1}}{\Delta t^2} + G_m \frac{[(x^n)^2 + (y^n)^2 - 2(z^n)^2] \nu^n - 3z^n(x^n \lambda^n + y^n \mu^n)}{(r^n)^5} + \kappa(z^n - \hat{z}^n) = 0 \end{cases} \quad (5-35)$$

利用伴随同化方法的工作流程如下：

- (1) 给  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  赋值（初始猜测）。
- (2) 积分正向方程 (5-34)。
- (3) 计算表征模拟结果与观测结果差的平方和的代价函数：

$$J = \frac{\kappa}{2} \int_{t_1}^{t_2} [(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2 + (z - \hat{z})^2] dt$$

其中  $\kappa$  为常数， $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$  代表观测值， $x$ 、 $y$ 、 $z$  代表相应的模拟结果，当代价函数下降到一定程度或者其变化率很小时，进入步骤(8)；如果不满足要求，执行步骤(4)。

- (4) 反向积分伴随方程。
- (5) 计算代价函数关于  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  的梯度。
- (6) 校正  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$ 。
- (7) 返回步骤 (1)，利用改进后的  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  开始下一次校正。
- (8) 结束对  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  的校正，得到与观测值充分靠近的数值模拟结果。

利用伴随同化方法得到从 50 s 到 170s 间隔 10s 的采样点的位置和速度及位置的估计残差，如表 2-4。图 7 和图 8 分别表示 0 号空间飞行器在采样时间范围内的位置和速度曲线。

表 2 0 号空间飞行器的位置模拟值

Time (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)
50	-1.11202E+06	6.20027E+06	1.13305E+06
60	-1.12054E+06	6.20787E+06	1.14326E+06
70	-1.13074E+06	6.21595E+06	1.15539E+06
80	-1.14259E+06	6.22459E+06	1.16960E+06
90	-1.15630E+06	6.23364E+06	1.18602E+06
100	-1.17195E+06	6.24312E+06	1.20482E+06
110	-1.18968E+06	6.25299E+06	1.22614E+06
120	-1.20962E+06	6.26322E+06	1.25015E+06
130	-1.23194E+06	6.27378E+06	1.27705E+06
140	-1.25681E+06	6.28469E+06	1.30704E+06
150	-1.28429E+06	6.29591E+06	1.34027E+06
160	-1.31487E+06	6.30747E+06	1.37718E+06
170	-1.34803E+06	6.31933E+06	1.41750E+06

表 3 0 号空间飞行器的速度模拟值

Time (s)	$u$ (m/s)	$v$ (m/s)	$w$ (m/s)	$ \vec{V} $ (m/s)
50	-6.96939E+02	8.17465E+02	9.40316E+02	1.42764E+03
60	-9.53603E+02	7.66832E+02	1.11394E+03	1.65477E+03
70	-1.09724E+03	8.42609E+02	1.31747E+03	1.91041E+03
80	-1.27859E+03	8.84760E+02	1.53111E+03	2.18217E+03
90	-1.46847E+03	9.27313E+02	1.76059E+03	2.47305E+03
100	-1.66910E+03	9.68954E+02	2.00587E+03	2.78357E+03
110	-1.88317E+03	1.00522E+03	2.26632E+03	3.11336E+03
120	-2.11213E+03	1.03991E+03	2.54464E+03	3.46665E+03
130	-2.36035E+03	1.07414E+03	2.84481E+03	3.84941E+03
140	-2.61877 E+03	1.10637 E+03	3.16143 E+03	4.25126E+03
150	-2.89380 E+03	1.13713 E+03	3.49719 E+03	4.68062E+03
160	-3.22708 E+03	1.17957 E+03	3.90042 E+03	5.19592E+03
170	-3.36689 E+03	1.15585 E+03	4.08279 E+03	5.42017E+03

表 4 0 号空间飞行器的位置估计残差

Time (s)	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)
50	-4.14400E-01	-2.81300E-02	-4.11980E-01
60	1.72815E+01	1.35528E+01	5.68476E+00
70	-2.56023E+01	-2.04622E+01	3.25836E+00
80	1.33891E+01	5.99139E+00	1.08001E+01
90	1.38297E+01	6.07051E+00	3.87634E+00
100	-1.07119E+01	-3.74736E+00	-2.52564E+01
110	1.46210E-01	6.14745E+00	-1.05900E-01
120	1.22921E+01	-5.42108E+00	3.62984E+00
130	1.84681E+00	2.17123E+01	7.56858E+00
140	-2.10827E+01	3.11782E+00	1.00273E+01
150	5.31117E+01	5.64645E+00	-4.12539E+01
160	-7.14229E+01	4.98970E-01	3.05004E+01
170	4.15916E+02	-2.18496E+01	-2.90209E+02

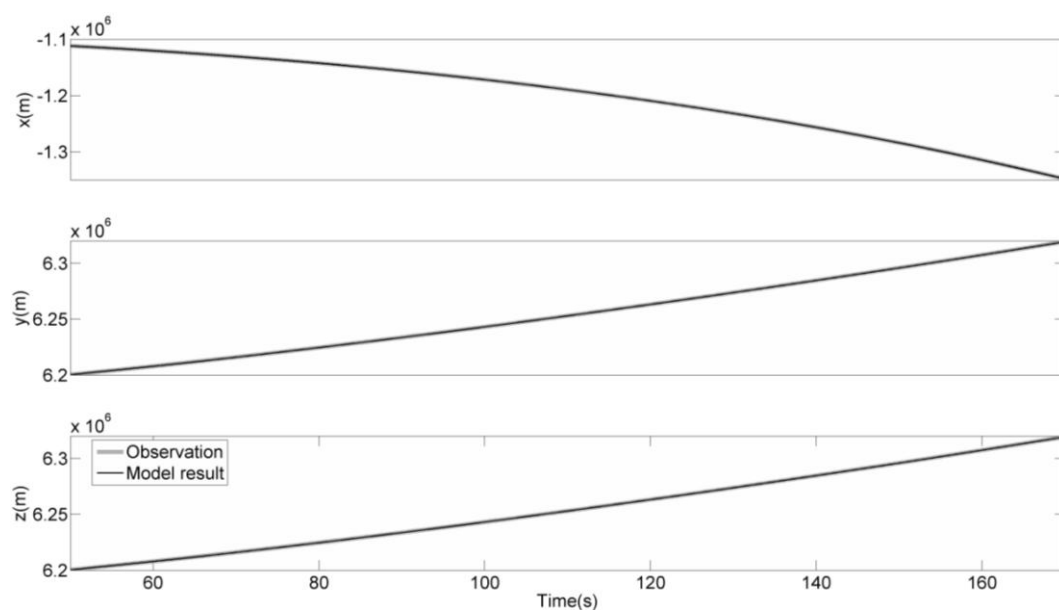


图 9 0 号空间飞行器在采样时间内的位置曲线

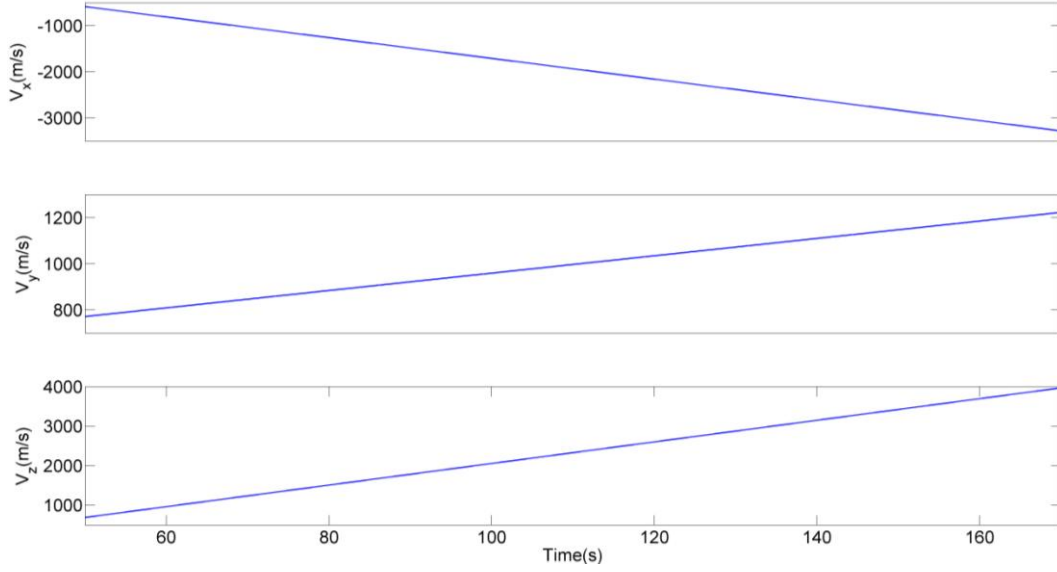


图 10 0 号空间飞行器在采样时间内的速度模拟值

### 5.2.6 拟合方法确定空间飞行器的飞行轨迹

本题中给出了观测卫星在 600 个时间采样点处对空间飞行器的观测数据，考虑使用拟合方法<sup>[2]</sup>得出空间飞行器的飞行轨迹。

根据上文的逐点交汇定位思路，结合观测卫星对空间飞行器的观测数据  $\alpha$  和  $\beta$ ，可以推导出空间飞行器在上述时间采样点处的空间位置观测数据  $(X_0, Y_0, Z_0)$ 。分别对三个空间位置坐标分量进行多项式拟合可以得到空间位置分量随时间变化的函数  $X(t)$ 、 $Y(t)$  和  $Z(t)$ ，由此可以对空间飞行器在 50.0s 到 170.0s 采样时间点的位置进行估计。根据轨道参数的匹配原理<sup>[8]</sup>，空间飞行器的速度分量变化分别是空间位置变化函数对时间的导数，即  $V_x(t) = X'(t)$ ， $V_y(t) = Y'(t)$ ， $V_z(t) = Z'(t)$ ，通过以上方程可以对空间飞行器在各采样点处的速度给出估计。

将简化运动方程表示成坐标分量形式，以  $x$  方向为例，原运动方程可表示为如下等式（方便起见，令运动方程右端第二项  $\vec{v}(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \vec{F}(t)$ ）：

$$a_x(t) = -\frac{G_m}{\left[ \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2 + Z(t)^2} \right]^3} X(t) + F_x(t) \quad (5-36)$$

其中， $a_x(t) = X''(t)$ ，那么  $F_x(t)$  的函数表达式可以求得，同样可以求出  $F_y(t)$  和  $F_z(t)$ ，则对应数据拟合结果的  $\vec{v}(t)$  和  $m(t)$  关系式  $\vec{F}(t)$  可以确定，这对研究不同空

间飞行器之间的差异有重要意义。

根据 06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测数据，由上述方法拟合得到空间飞行器的位置变化函数分别为：

$$\begin{aligned} X(t) &= -11.2330t^2 + 536.781t - 112750 \\ Y(t) &= 1.88221t^2 + 583.230t + 6166030 \\ Z(t) &= 13.6602t^2 - 676.400t + 1135180 \end{aligned} \quad (5-37)$$

对比观测数据变化趋势与拟合方程可以得到如下图像。

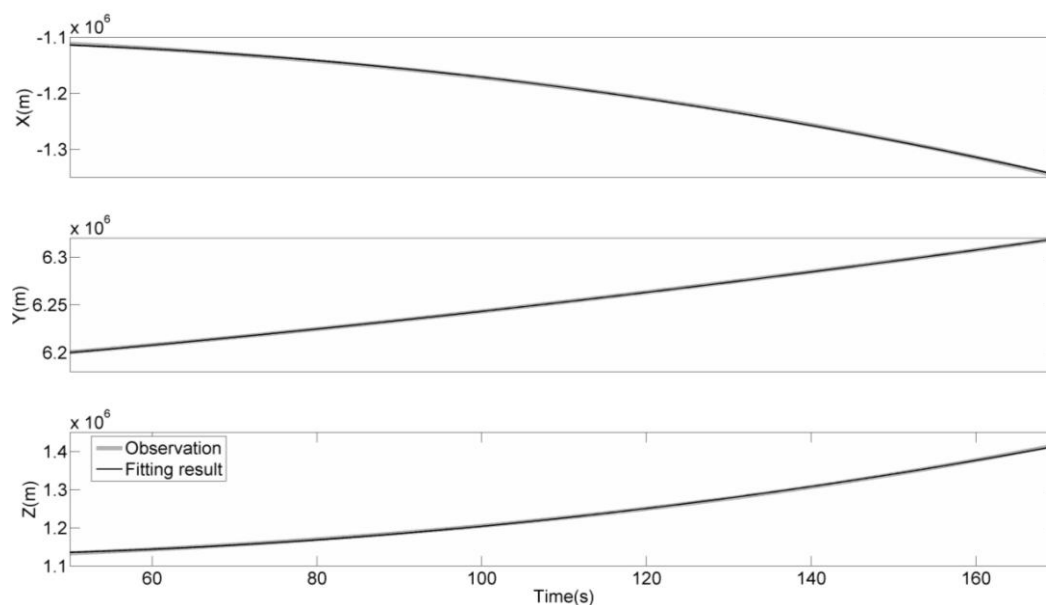


图 11 0 号空间飞行器在采样时间内的位置曲线拟合结果

从图像中可以看到，拟合结果与观测结果几乎完全吻合，二者之间的平均绝对误差与平均相对误差见表 5。

表 5 拟合结果的误差统计表

分量	$X$	$Y$	$Z$
平均绝对误差 ( $\times 10^2$ )	6.97672	1.00821	8.56642
平均相对误差 ( $\times 10^{-4}$ )	5.79295	0.161312	6.89172

通过上表统计的误差可以看出，拟合结果的绝对误差在百米量级，相对于观测数据的误差在万分之一量级。

计算 0 号空间飞行器在各个采样时间点的位置，具体结果见表 6。

表 6 0 号空间飞行器在采样时间点的位置拟合值

Time (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)
50	-1.11399E+06	6.19990E+06	1.13551E+06
60	-1.12098E+06	6.20780E+06	1.14378E+06
70	-1.13022E+06	6.21608E+06	1.15477E+06
80	-1.14170E+06	6.22473E+06	1.16850E+06
90	-1.15543E+06	6.23377E+06	1.18496E+06
100	-1.17140E+06	6.24317E+06	1.20415E+06
110	-1.18962E+06	6.25296E+06	1.22607E+06
120	-1.21009E+06	6.26312E+06	1.25072E+06
130	-1.23281E+06	6.27366E+06	1.27811E+06
140	-1.25777E+06	6.28457E+06	1.30823E+06
150	-1.28498E+06	6.29586E+06	1.34108E+06
160	-1.31443E+06	6.30753E+06	1.37666E+06
170	-1.34613E+06	6.31957E+06	1.41498E+06

分析在各个采样时间点的拟合结果和对应观测数据可以给出各个时间点的位置估计残差  $\Delta X$  (m)、 $\Delta Y$  (m) 和  $\Delta Z$  (m)，具体数值见下表：

表 7 0 号空间飞行器的位置拟合值残差

Time (s)	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)
50	-1.97917 E+03	-3.69853 E+02	2.45956 E+03
60	-4.30955 E+02	-6.05458 E+01	5.22928 E+02
70	4.96079 E+02	1.12606 E+02	-6.14181 E+02
80	8.99390 E+02	1.52668 E+02	-1.09027 E+03
90	8.82551 E+02	1.31800 E+02	-1.06178 E+03
100	5.39132 E+02	4.84698 E+01	-6.97452 E+02
110	5.85129 E+01	-2.67036 E+01	-6.97895 E+01
120	-4.59417 E+02	-9.98992 E+01	5.77507 E+02
130	-8.61536 E+02	-1.00952 E+02	1.07006 E+03
140	-9.79739 E+02	-1.09291 E+02	1.19917 E+03
150	-6.29416 E+02	-3.70661 E+01	7.68599 E+02
160	3.70579 E+02	6.59240 E+01	-4.83890 E+02
170	2.30985 E+03	2.20154 E+02	-2.81579 E+03

同样的可以给出采样时间点的速度变化，图 12 反映了三个速度分量在给定时间范围内的变化趋势。

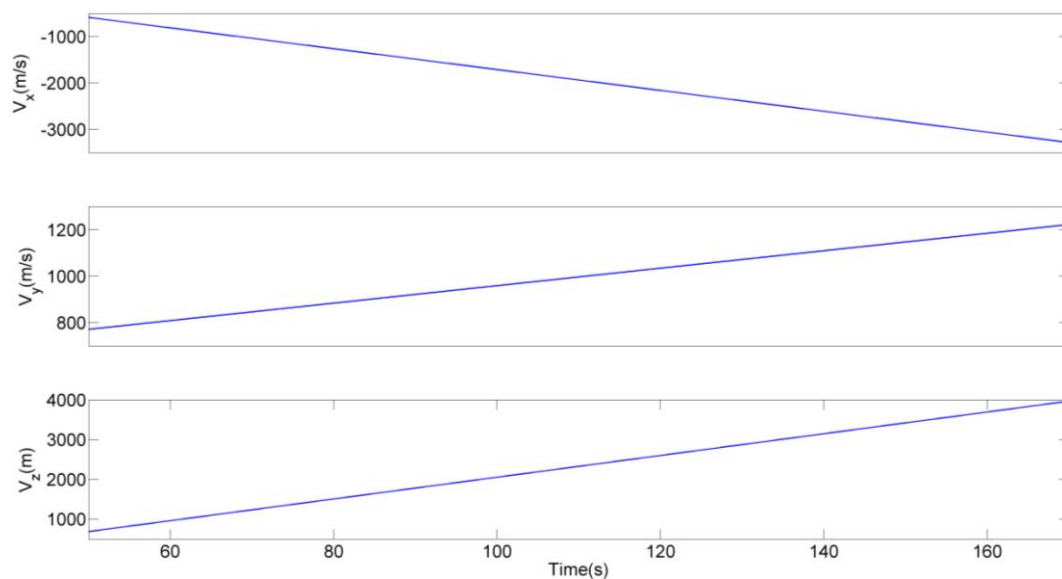


图 12 0 号空间飞行器在采样时间内的速度曲线

很显然，三个方向的速度分量随时间变化的曲线都近似直线，其方程分别为：

$$\begin{aligned} u(t) &= -22.4660t + 536.781 \\ v(t) &= 3.764424 + 583.230 \\ w(t) &= 27.3204t - 676.400 \end{aligned} \quad (5-38)$$

根据速度分量的方程可以得到空间飞行器在采样时间点处的速度，具体数值见表 8。

表 8 0 号空间飞行器的速度拟合值

Time (s)	$u$ (m/s)	$v$ (m/s)	$w$ (m/s)	$ \vec{V} $ (m/s)
50	-5.86518E+2	7.71451E+2	6.89624E+2	1.18942E+03
60	-8.11178E+2	8.09095E+2	9.62829E+2	1.49656E+03
70	-1.03584E+3	8.46739E+2	1.23603E+3	1.82146E+03
80	-1.26050E+3	8.84383E+2	1.50924E+3	2.15611E+03
90	-1.48516E+3	9.22027E+2	1.78244E+3	2.49658E+03
100	-1.70982E+3	9.59671E+2	2.05565E+3	2.84080E+03
110	-1.93448E+3	9.97315E+2	2.32885E+3	3.18754E+03
120	-2.15914E+3	1.03496E+3	2.60206E+3	3.53606E+03
130	-2.38380E+3	1.07260E+3	2.87526E+3	3.88589E+03
140	-2.60846E+3	1.11025E+3	3.14847E+3	4.23669E+03
150	-2.83312E+3	1.14789E+3	3.42167E+3	4.58825E+03
160	-3.05778E+3	1.18554E+3	3.69488E+3	4.94041E+03
170	-3.28246E+3	1.22318E+3	3.96808E+3	5.29304E+03

### 5.2.7 两种方法的比较

通过伴随同化方法和数据拟合的方法都实现了对空间飞行器位置和速度的估计，两个方法得到的最终结果十分接近，而且结果与观测之间的相对误差都小于万分之一。但是这两个方法一种是数值模式计算，另一种则是数据拟合，二者各有优势，下面对两种方法得到的结果进行比较。

下图反映了伴随同化方法和数据拟合方法分别得到的 0 号空间飞行器的运行速度比较。为方便比较，根据轨道参数的匹配原理，结合观测数据可以得到空间飞行器的速度，将该速度作为两种方法所得结果的速度参考值，三者在同一坐标系下进行比较。

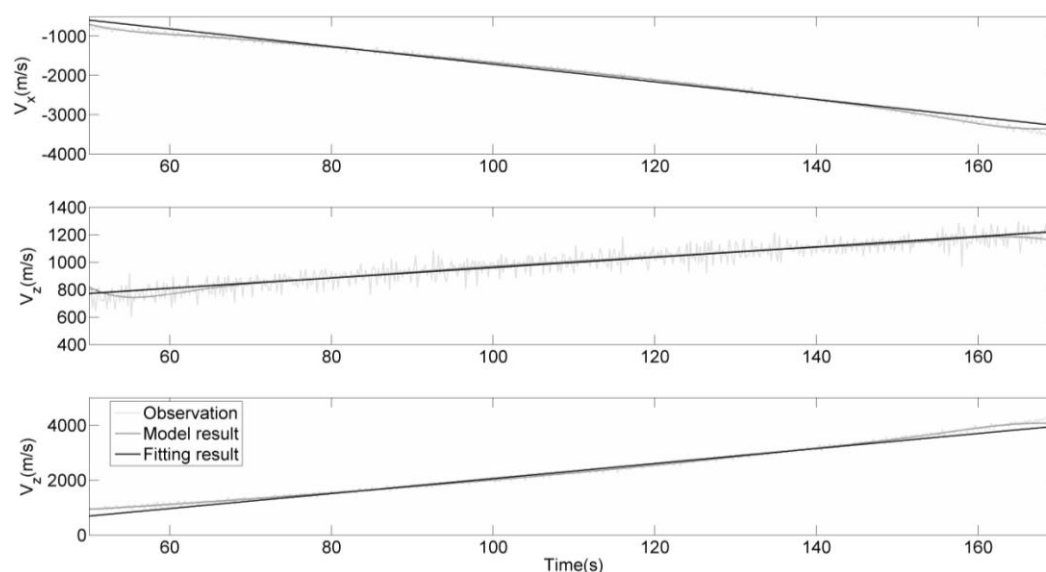


图 13 两种方法得到的速度比较

从图 13 可以看到，两种方法得到的速度均与利用观测数据生成的速度接近，下面分别给出两种方法结果的误差，分析伴随同化方法与数据拟合方法结果的精度。

表 9 两种方法速度结果的误差

	速度	平均绝对误差(m/s)	平均相对误差(%)
伴随同化方法	$u$	3.39348E+01	2.076
	$v$	4.31213E+01	4.502
	$w$	4.24387E+01	2.081
拟合方法	$u$	7.58509E+01	4.757
	$v$	4.38668E+01	4.625
	$w$	9.28405E+01	4.853

由上表可知，两种方法得到速度的结果误差都在 100m/s 以下，相对于观测生成的速度数据相对误差均不超过 5%，伴随同化方法得到的各个速度分量的误差均小于数据拟合方法得到的误差。因此，在第 3 和第 4 题的求解过程中，都采用伴随同化方法求解。



### 5.3 问题三的建模与求解

采用 5.2.1 节中的滤波方案可以消除随机误差。因此，在本节的讨论中，所用到的数据是消除了随机误差的数据。设包含系统误差的观测为 $(\alpha_1, \beta_1)$ ，即观测卫星实际观测到的数据；不包含系统误差的观测为 $(\alpha_0, \beta_0)$ ，最终用于求解空间飞行器轨道的数据。考虑到系统误差由两个平移误差 $d\alpha$ 和 $d\beta$ ，一个旋转误差 $d\theta$ 组成， $(\alpha_0, \beta_0)$ 和 $(\alpha_1, \beta_1)$ 应当满足如下的关系：

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_1 \cos d\theta - \beta_1 \sin d\theta - d\alpha \\ \beta_0 = \alpha_1 \sin d\theta + \beta_1 \cos d\theta - d\beta \end{cases} \quad (5-39)$$

又题目中指出， $d\alpha$ 、 $d\beta$ 和 $d\theta$ 是三个常值小量，因此可以认为 $\sin d\theta$ 和 $\cos d\theta$ 满足： $\cos d\theta \approx 1$ ， $\sin d\theta = d\theta$ 。于是公式（5-34）可以简化为：

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_1 - \beta_1 d\theta - d\alpha \\ \beta_0 = \alpha_1 + \beta_1 d\theta - d\beta \end{cases} \quad (5-40)$$

根据假设，可以计算出在 $(\alpha_1, \beta_1)$ 的观测下计算得到的空间飞行器在基础坐标系中的位置，不妨设为 $P(x_p, y_p, z_p)$ 。同一时刻观测卫星的位置为 $O_s(x_0, y_0, z_0)$ ，那么可以得到 $\overrightarrow{O_s P} = (x_p - x_0, y_p - y_0, z_p - z_0)$ ，利用 5.2.3 节中的观测坐标系的单位方向向量 $\vec{v}_1$ 、 $\vec{v}_2$ 和 $\vec{v}_3$ ，可以得到 $\overrightarrow{O_s P}$ 在观测坐标系中三个方向上的分量长度，即 $x_{0s}$ 、 $y_{0s}$ 和 $z_{0s}$ ：

$$\begin{cases} x_{0s} = \overrightarrow{O_s P} \cdot \vec{v}_1 \\ y_{0s} = \overrightarrow{O_s P} \cdot \vec{v}_2 \\ z_{0s} = \overrightarrow{O_s P} \cdot \vec{v}_3 \end{cases} \quad (5-41)$$

进而可以得到：

$$\begin{cases} \alpha_0 = y_{0s} / x_{0s} \\ \beta_0 = z_{0s} / x_{0s} \end{cases} \quad (5-42)$$

联立（5-40）、（5-41）和（5-42），就可以得到系统误差 $d\alpha$ 、 $d\beta$ 、 $d\theta$ 与已知量 $(x_0, y_0, z_0)$ 和 $(\alpha_1, \beta_1)$ 的关系。根据已有的观测资料，利用最小二乘原理<sup>[2]</sup>，可以求得 $d\alpha$ 、 $d\beta$ 和 $d\theta$ 的大小。表 10 给出了在现有的观测下确定的 06 和 09 号卫星的系统误差。

表 10 06 和 09 号卫星的系统误差

卫星	$d\alpha$	$d\beta$	$d\theta$
06	2.89070E-04	3.23265E-04	-3.45788E-04
09	-3.50795E-04	4.69959E-04	4.68311 E-04

利用公式（5-35）去除观测中的系统误差后，采用 5.2.5 节中的方法重新计算空间飞行器的位置和速度，结果如表 11~表 13、图 14、图 15 所示。

表 11 0 号空间飞行器的位置模拟值

Time (s)	$X$ (m)	$Y$ (m)	$Z$ (m)
50	-1.11261E+06	6.19825E+06	1.13401E+06
60	-1.12110E+06	6.20588E+06	1.14421E+06
70	-1.13128E+06	6.21398E+06	1.15633E+06
80	-1.14311E+06	6.22265E+06	1.17054E+06
90	-1.15680E+06	6.23173E+06	1.18695E+06
100	-1.17244E+06	6.24123E+06	1.20574E+06
110	-1.19015E+06	6.25113E+06	1.22706E+06
120	-1.21008E+06	6.26137E+06	1.25106E+06
130	-1.23238E+06	6.27196E+06	1.27795E+06
140	-1.25723E+06	6.28289E+06	1.30795E+06
150	-1.28471E+06	6.29411E+06	1.34116E+06
160	-1.31526E+06	6.30571E+06	1.37808E+06
170	-1.34850E+06	6.31750E+06	1.41831E+06

表 12 0 号空间飞行器的速度模拟值

Time (s)	$u$ (m/s)	$v$ (m/s)	$w$ (m/s)	$ \vec{V} $ (m/s)
50	-6.94405E+02	8.20350E+02	9.39552E+02	1.42756E+03
60	-9.51274E+02	7.69492E+02	1.11319E+03	1.65415E+03
70	-1.09502E+03	8.45235E+02	1.31678E+03	1.90982E+03
80	-1.27650E+03	8.87302E+02	1.53045E+03	2.18152E+03
90	-1.46652E+03	9.29765E+02	1.75997E+03	2.47237E+03
100	-1.66727E+03	9.71317E+02	2.00527E+03	2.78287E+03
110	-1.88146E+03	1.00749E+03	2.26574E+03	3.11263E+03

120	-2.11054E+03	1.04207E+03	2.54407E+03	3.46592E+03
130	-2.35889E+03	1.07620E+03	2.84423E+03	3.84866E+03
140	-2.61677E+03	1.10853E+03	3.16076E+03	4.25050E+03
150	-2.89141E+03	1.14063E+03	3.49855E+03	4.67987E+03
160	-3.23191E+03	1.17543E+03	3.89395E+03	5.19516E+03
170	-3.31761E+03	1.19755E+03	4.11447E+03	5.41937E+03

表 13 0 号空间飞行器的位置估计残差

Time (s)	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)
50	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
60	1.76240E+01	1.36399E+01	6.09418E+00
70	-2.56197E+01	-2.03003E+01	3.73633E+00
80	1.33270E+01	6.28825E+00	1.11485E+01
90	1.38857E+01	6.20722E+00	3.69574E+00
100	-1.11122E+01	-3.65800E+00	-2.55865E+01
110	4.27800E-01	6.10943E+00	-2.33830E-01
120	1.25380E+01	-5.40120E+00	3.37566E+00
130	1.75470E+00	2.19236E+01	7.21388E+00
140	-2.14468E+01	3.56455E+00	9.82159E+00
150	5.34231E+01	5.61784E+00	-4.15612E+01
160	-7.11132E+01	7.12200E-02	3.07798E+01
170	4.15679E+02	-2.21367E+01	-2.89952E+02

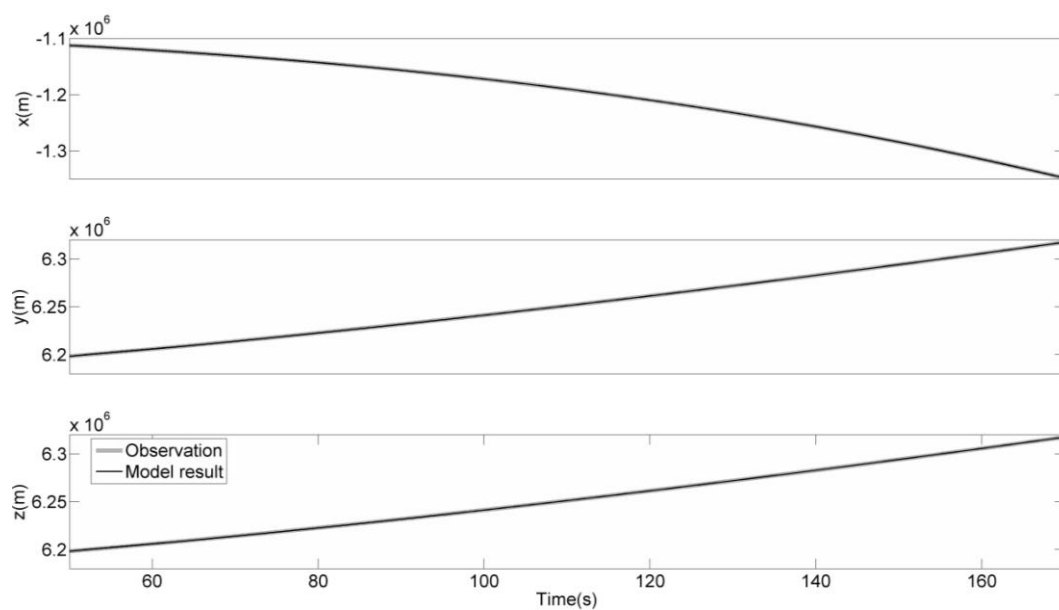


图 14 0 号空间飞行器在采样时间内的位置曲线

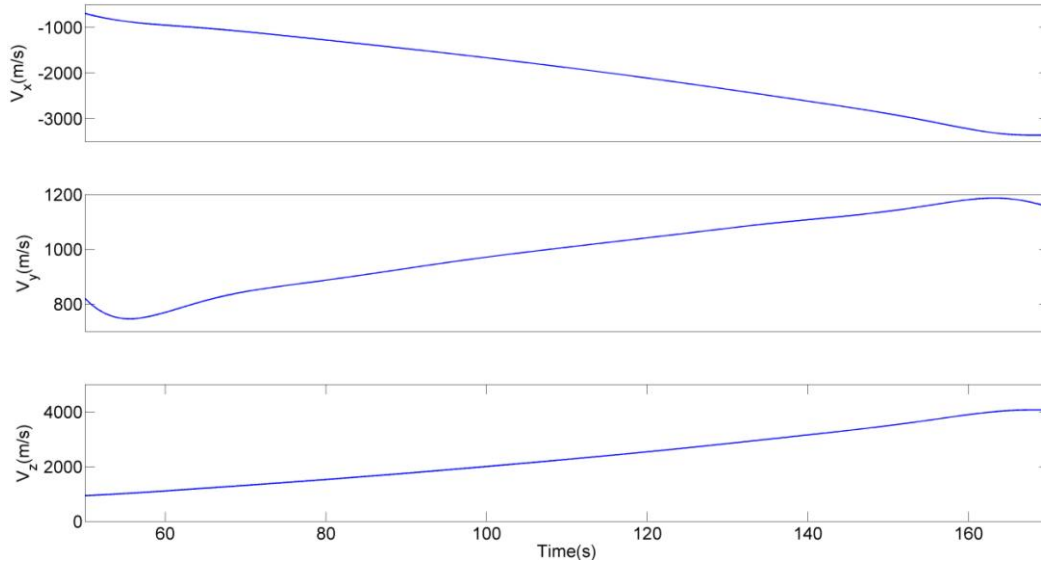


图 15 0 号空间飞行器在采样时间内的速度曲线

## 5.4 问题四设想

### 5.4.1 单星定位问题

根据空间飞行器的飞行特征，设出含有待定参数的空间飞行器轨道方程。利用空间飞行器轨道和卫星轨道可以决定一个向量，而这个向量与观测值（去除白噪声和系统误差的观测）存在转化关系，详见 5.2.3 节。最后利用观测和最小二乘法确定轨道方程中的待定参数，从而可以得到空间飞行器的轨道方程和运动特性。

### 5.4.2 多星多空间飞行器联合估计系统误差

对每一个空间飞行器而言，任意两颗卫星可对其实现定位（利用 5.2 节中的方法），将所有卫星定位的结果取平均，所处的位置即被认为是卫星的实际位置。

对于每颗卫星而言，共同同时观测多颗空间飞行器。利用所有空间飞行器的实际位置和 5.3 节中提供的最小二乘方法，就可以确定该卫星的系统误差。

---

## 参考文献

- [1] 周衍柏, 理论力学教程, 北京: 高等教育出版社, 1986。
- [2] 徐萃薇, 孙绳武, 计算方法引论, 北京: 高等教育出版社, 2007。
- [3] 孙文心, 江文胜, 李磊, 近海环流流体动力学数值模型, 北京: 科学出版社, 2004。
- [4] 王志刚, 施志佳, 远程火箭与卫星轨道力学基础, 西安: 西北工业大学出版社, 2006。
- [5] Le Dimet, F. X. and Talagrand O., Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, *Tellus*, 38A: 97-110, 1986.
- [6] 张继才, 三维正压潮汐潮流伴随同化模型数值建模及应用研究: [博士学位论文], 青岛: 中国海洋大学海洋环境学院, 2005。
- [7] 吕咸青, 海洋数值建模中伴随方法的研究: [博士后研究报告], 青岛: 中国科学院海洋研究所, 2000。
- [8] 王正明, 易东云, 测量数据建模与参数估计, 长沙: 国防科技大学出版社, 1996。