

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目

特殊工件磨削加工问题研究

摘 要

本文对特殊工件的磨削加工过程进行抽象、建模和求解；根据工件母线方程设计加工方案，并对方案进行了误差分析，然后提出修整策略。

磨床是通过下台、中台的平移变换和上台的旋转变换，使得工件母线始终与砂轮相切。为了便于坐标变换和建模，建立两个平面直角坐标系：底座和砂轮所在的刚性坐标系 $\{A\}$ 和工件母线所在坐标系 $\{B\}$ ，其中，母线方程通过横轴正方向平移 b 变换到坐标系 $\{B\}$ 。在 $\{A\}$ 下设定加工基准，加工基准由砂轮的初始位置和上台的初始旋转角构成。根据工件母线方程设定砂轮几何尺寸，同时发现圆柱形砂轮是轮式砂轮圆弧半径趋近无穷时的特殊情况。

建立三层优化模型：第一层保证误差最小化（误差分析包括局部误差和全局误差，局部误差是运动轨迹与母线方程在坐标系 $\{B\}$ 下 y 方向偏差的最大值，全局误差是偏差的均值），通过优化工件在坐标系 $\{B\}$ 下的磨削步长，得出指令的脉冲序列；第二层以磨削用时最小化为目标，优化脉冲指令的发射时间；第三层以脉冲频率变化最小为目标，用三次样条插值优化脉冲分布，以使工作台稳定运行和加工表面光滑。

问题1和问题2中，认为切点位于垂直于砂轮转轴的中截面上，在坐标系 $\{A\}$ 下是固定点，并在建模过程中要求工件母线始终在该点与砂轮接触并相切。根据母线方程，利用坐标变换，误差分析策略等建立优化模型，确定加工基准、砂轮尺寸、脉冲数及分布，得出问题1和问题2中工件加工时耗分别为46.75min和50.95min。

问题3和问题4实际上分别是对问题1和问题2策略的修整。这两个问题中的切点不断变化，以使得砂轮圆弧表面均匀磨损。问题3中的切点在坐标系 $\{A\}$ 下沿 x 正向平移；问题4中的切点在坐标系 $\{A\}$ 下沿砂轮圆弧旋转。模型思想分别类同问题1和问题2，得到问题3和问题4中工件加工时耗分别为45.19min和48.08min。

文章最后对模型进行了评价，并针对不足的地方提出改进策略。

关键词：特殊工件磨削 加工基准 坐标变换 脉冲指令工序 三层优化

参赛队号 10247038

队员姓名 李发智 王上 郑凯飞

参赛密码 _____
(由组委会填写)

中山大学承办

目 录

1	问题重述	2
2	基本假设	2
3	符号说明	2
4	基本理论	3
4.1	坐标变换	3
4.1.1	坐标平移变换	3
4.1.2	坐标旋转变换	4
4.1.3	一般变换	4
4.2	曲率的概念及计算	5
4.2.1	曲率的概念	5
4.2.2	曲率的计算公式	6
5	问题分析	6
5.1	设定坐标系	6
5.2	加工基准分析	7
5.3	砂轮尺寸几何分析	8
5.4	机理分析	9
5.5	误差原理	10
5.6	脉冲分布	11
6	模型的建立与求解	11
6.1	问题 1 和问题 2 的模型建立与求解	11
6.1.1	问题 1 和问题 2 的模型建立	11
6.1.2	问题 1 和问题 2 的模型求解	13
6.2	问题 3 的模型建立与求解	16
6.2.1	修整策略	16
6.2.2	问题 3 的模型建立	16
6.2.3	问题 3 的模型求解	17
6.3	问题 4 的模型建立与求解	19
6.3.1	修整策略	19
6.3.2	问题 4 的模型建立	19
6.3.3	问题 4 的模型求解	20
7	模型的评价与改进	21
7.1	模型的评价	21
7.2	模型的改进	22
7.2.1	模型 1 的改进	22
7.2.2	模型 2 的改进	22
7.2.3	模型 3 的改进	23
7.2.4	模型 4 的改进	23
8	参考文献	23
9	附件	23

1 问题重述

某科研单位和工厂研制了一种大型精密内外圆曲线磨床，用来加工具有复杂母线旋转体的特殊工件。本题的研究内容是：运用数学建模的方法，根据旋转体工件的光滑母线方程 $y = f(x)$ ，给出一个合理的加工方案，在尽可能短的时间内完成磨削，并作加工误差分析。

根据上述要求，需依次研究下列 4 个问题（单位：mm）：

问题 1 和问题 2 为在给定母线方程以及砂轮样式的前提下，给出加工方案，并对方案作误差分析。

问题 3 和问题 4 中为了使砂轮表面的磨损尽量均匀，需要分别针对问题 1 和 2 的条件，给出新的修整策略。给出加工方案，并对方案作误差分析。

2 基本假设

1. 不考虑各组步进电机、变速器，功放伺服机构和精密丝杠——螺母副的各种误差；
2. 认为控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级(10^{-3} 秒)，即认为打磨是瞬间完成的；
3. 三工作台的可移动范围足够大，能满足工件的加工要求；
4. 工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次磨削成形，砂轮尺寸可任意选择。
5. 砂轮与工件开始接触磨削前，工作台应有一小段预运动，加工方案从预动后开始。
6. 砂轮在预动过程中可以在底座上往复调节，即可调节到与夹具基准面刚好接触的位置。
7. 砂轮的旋转轴不会碰到工件工作箱；
8. 工件母线方程一阶、二阶可导；
9. 对于工件，磨削过程是从左至右进行的；
10. 加工基准的砂轮初始位置为初始切点位置。

3 符号说明

符 号	含 义
$\{*\}$	坐标系，本题中“*”代表 A 、 B 、 C
b	工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离, $b = 250mm$
R	中台转轴到上工作台的控制丝杠——螺母副中心线的距离, $R = 300mm$
φ	砂轮直径
a	砂轮厚度
Δa	砂轮厚度微元
r	轮式砂轮横断面外轮廓线半径
α	轮式砂轮横断面外轮廓线张角, $\alpha \leq 180^\circ$
$\Delta \alpha$	轮式砂轮横断面外轮廓线张角微元
ρ	母线的曲率半径
ϕ	初始切点处砂轮的法向量方向角

θ_0	步进电机的步进角度， $\theta_0=1^\circ$
h	丝杆的螺距， $h=12mm$
ω	变速器的传动比， $\omega=10:1$
Δx	磨床下台理论平移量
Δy	磨床中台理论平移量
$\Delta \theta$	磨床上台理论旋转角度
$\Delta \theta_0$	加工基准内上台的初始旋转角
$\Delta x'$	磨床下台实际平移量
$\Delta y'$	磨床中台实际平移量
$\Delta \theta'$	磨床上台实际旋转角度
n_x	磨床下台移动距离 Δx 对应的脉冲数
n_y	磨床中台移动距离 Δy 对应的脉冲数
n_θ	磨床上台旋转角度 $\Delta \theta$ 对应的脉冲数

4 基本理论

4.1 坐标变换

平面中任意点 P 在不同坐标系中的描述是不同的，平面上任意一点 P 相对于平面直角坐标系 $\{A\}$ 的位置，可以用 2×1 列向量 ${}^A\vec{p}$ （称位置矢量）来表示

$${}^A\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

其中 p_x ， p_y 是点 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的两个坐标分量。

下面描述坐标系之间的变换关系。

4.1.1 坐标平移变换

假设坐标系 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 的方位相同，但是原点不重合，如图4-1所示。

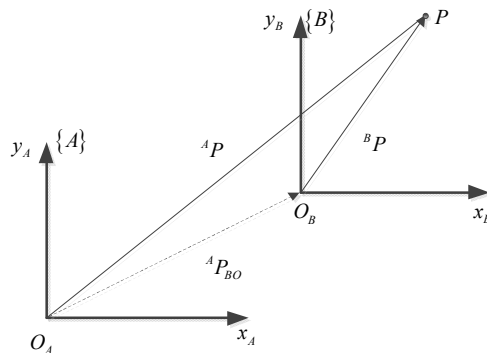


图 4-1 坐标平移变换

用位置矢量 ${}^A\vec{p}_{B0}(p_{xB0}, p_{yB0})$ 描述坐标系 $\{B\}$ 的原点在坐标系 $\{A\}$ 中的位置，把 ${}^A\vec{p}_{B0}$

称为坐标系 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的平移矢量。如果点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置矢量 ${}^B\vec{P}(p_{xB}, p_{yB})$ ，则它相对于坐标系 $\{A\}$ 的位置矢量 ${}^A\vec{P}(p_{xA}, p_{yA})$ 可由矢量叠加得出，即

$${}^A\vec{P} = {}^B\vec{P} + {}^A\vec{P}_{B0} \quad (4-2)$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xB0} \\ p_{yB0} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

4.1.2 坐标旋转变换

假设坐标系 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 的坐标原点相同，但是坐标轴方位不同，如图4-2所示。

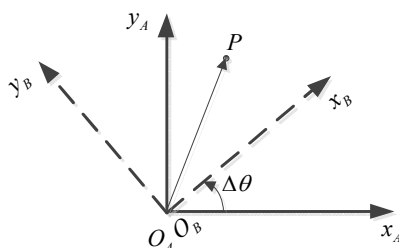


图 4-2 坐标旋转变换

为了确定空间某刚体 B 的方位，另设一个直角坐标系 $\{B\}$ 与此刚体固接。用坐标系 $\{B\}$ 的三个单位主矢量 \vec{x}_B 、 \vec{y}_B 相对于坐标系 $\{A\}$ 的方向余弦组成的 2×2 矩阵 ${}^A_B R$ 来表示刚体 B 相对于坐标系 $\{A\}$ 的方位， ${}^A_B R$ 表达式如下：

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A x_B & {}^A y_B \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

$$\text{或} \quad {}^A_B R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

${}^A_B R$ 称为旋转矩阵，上标 A 代表参考坐标系 $\{A\}$ ，下标 B 代表被描述的坐标系 $\{B\}$ 。

坐标系 $\{A\}$ 旋转角 θ 到坐标系 $\{B\}$ 的旋转矩阵为：

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

θ 为坐标系 $\{A\}$ 的 x 轴正方向与坐标系 $\{B\}$ 的 x 轴正方向之间的夹角。

任意一点 P 在两个不同的坐标系中 $\{A\}$ 、 $\{B\}$ 的描述 ${}^A\vec{P}$ 和 ${}^B\vec{P}$ ，具有下面的变换关系：

$${}^A\vec{P} = {}^A_B R \cdot {}^B\vec{P} \quad (4-7)$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

4.1.3 一般变换

一般的情况是坐标系 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 的方位不相同，而且坐标原点的位置也不重合，如

图4-3所示。

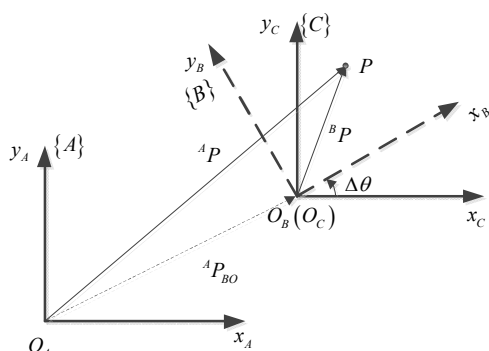


图 4-3 坐标一般变换

这种情况下，我们用矢量 ${}^A\vec{P}_{B0}$ 描述坐标系 $\{B\}$ 的原点相对于 $\{A\}$ 的位置；用旋转矩阵 ${}^A_B R$ 描述 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的方位。任意一点 P 在两个不同的坐标系中 $\{A\}$ 、 $\{B\}$ 的描述 ${}^A\vec{P}$ 和 ${}^B\vec{P}$ ，具有下面的变换关系：

$${}^A\vec{P} = {}^A_B R \cdot {}^B\vec{P} + {}^A\vec{P}_{B0} \quad (4-9)$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xB0} \\ p_{yB0} \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

一般变换对应的逆变换为：

$${}^B\vec{P} = ({}^A_B R)^{-1} ({}^A\vec{P} - {}^A\vec{P}_{B0}) \quad (4-11)$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_{xA} - p_{xB0} \\ p_{yA} - p_{yB0} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

4.2 曲率的概念及计算

曲率是刻画曲线弯曲程度的数学量，是一个局部概念。

4.2.1 曲率的概念

设曲线 C 具有连续转动的切线，在 C 上选定一点 M_0 ，作为度量弧的基点。如图 4-4。

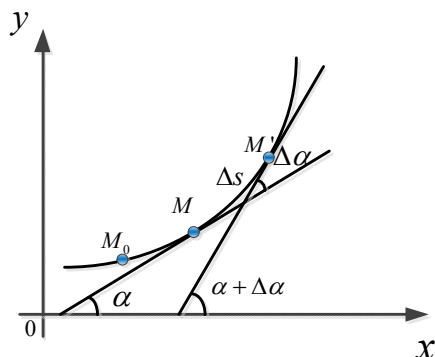


图 4-4 曲率计算示意图

设曲线 C 上的点 M 对应于弧 s ，切线的倾角为 α ，曲线上另一点 M' 对应于弧 $s + \Delta s$ ，切线的倾角为 $\alpha + \Delta \alpha$ 。那么，弧段 MM' 的长度为 $|s|$ ，当切点从 M 移到点 M' 时，切线

转过的角度为 $|\Delta\alpha|$ 。比值 $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 表示单位弧段上的切线转角，刻画了 MM' 的平均弯曲程度。称它为弧长段 MM' 的平均曲率。记作 \bar{k} ， $\bar{k} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 。当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时(即： $M \rightarrow M'$)，上述平均曲率的极限就称做曲线在点 M 处的曲率，记作 k ， $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ ，当 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$ 存在时，有 $k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ 。

4.2.2 曲率的计算公式

设曲线的直角坐标方程为 $y = f(x)$ ，且 $f(x)$ 具有二阶导数。 $\tan \alpha = y'$ (α 是曲线的切线与 x 轴正向夹角)，两边对 x 求导得 $\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx} = y''$ ， $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{y''}{1 + (y')^2}$ ，

$d\alpha = \frac{y''}{1 + (y')^2} dx$ ，又 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ ，据曲率计算公式有

$$k = \left|\frac{d\alpha}{dx}\right| = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4-13)$$

一般称 $\rho = \frac{1}{k}$ 为曲线在某一点的曲率半径。曲线上一点处的曲率半径越大，曲线在该点处的曲率越小(曲线越平坦)；曲率半径越小，曲率越大(曲线越弯曲)。

5 问题分析

本题需运用数学建模的方法，根据旋转体工件的母线方程 $y = f(x)$ ，给出一个合理的加工方案，在尽可能短的时间内完成磨削，并作加工误差分析。

加工方案指为了完成加工任务的各个步骤(含具体内容)以及相应的数据，包括如何确定加工基准，如何选择加工次序，如何选择砂轮几何尺寸，如何确定三组控制步进电机在各时间段(自主进行时间分段)中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布等。

误差分析主要包括实际加工曲线与理论曲线在整体与局部的误差，误差的来源分析，采用什么数学量来表示上述误差，以及所采取的措施在减少加工误差方面的实际效果等。

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。

5.1 设定坐标系

本题中涉及到磨床上台的旋转，下台和中台的平移，为清晰地描述它们的运动关系，设立如下三个平面直角坐标系。如图 5-1。

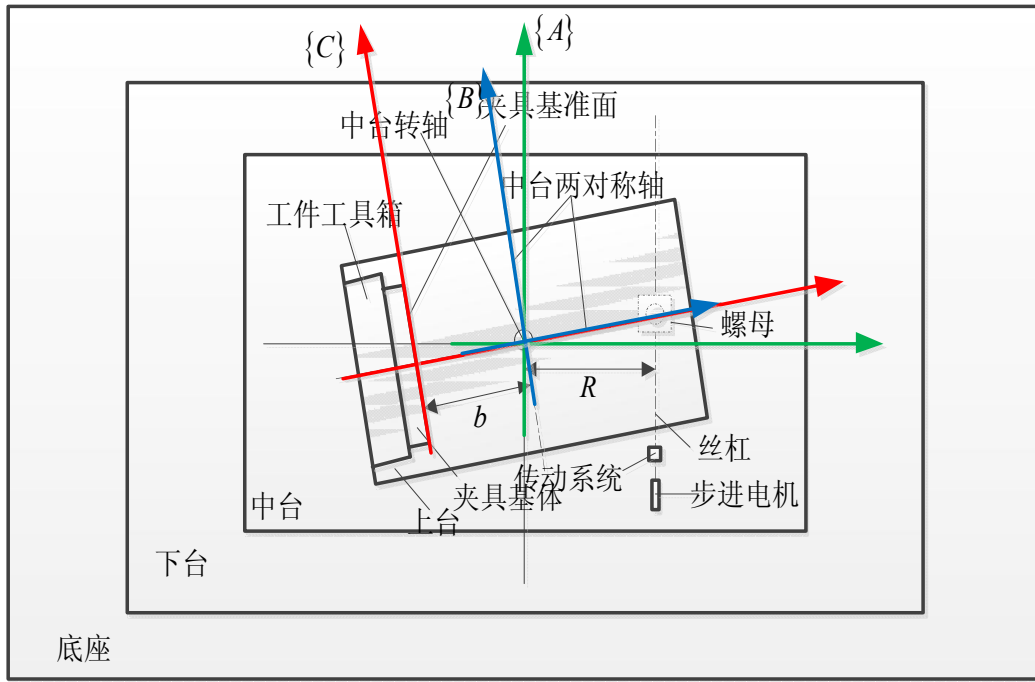


图 5-1 坐标系示意图

坐标系 $\{A\}$ ，底座两对称轴构成的直角坐标系，原点为两坐标轴的交点。坐标系 $\{A\}$ 是刚性坐标系，砂轮位于该坐标系。

坐标系 $\{B\}$ ，上台两对称轴构成的直角坐标系，原点为两坐标轴的交点（即中台转轴）。

坐标系 $\{C\}$ ，以夹具基准面的垂直投影为纵坐标，上台横轴为横坐标，其交点为坐标原点。坐标系 $\{C\}$ 与坐标系 $\{B\}$ 位于同一平面内，只是做了横轴方向的平移。原始工件母线方程根据坐标系 $\{C\}$ 设定。

5.2 加工基准分析

首先对磨床上台、中台、下台的位置初始化。初始状态为三个台的对称轴在俯视条件下完全重合，此时的坐标原点为 $(0,0)$ ，上台的旋转角为 0 。

母线的初始方程为 $y=f(x), x \in [c, d]$ ，建立在坐标系 $\{C\}$ 中。根据坐标平移变换，则在坐标系 $\{B\}$ 中，母线方程就变为 $y=f(x+b), x \in [c-b, d-b]$ 。对于坐标系 $\{B\}$ ，母线是刚性物体。在坐标系 $\{B\}$ 中，工件母线始终与砂轮相切。为了满足始终相切，对坐标系 $\{B\}$ 做旋转变换和平移变换，其中，平移变换是通过下台和中台的移动实现的，旋转变换是通过上台的旋转实现的。

由假设 6，设定加工基准时不需要调节下台和中台，仅仅需要调节上台使得工件母线起点 $(x=0)$ 与砂轮相切。在坐标系 $\{B\}$ 上，母线在 $x=-b$ 处的法线为：

$$y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}(x+b) \quad (5-1)$$

则上台初始的旋转角 $\Delta\theta_0$ 为

$$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \phi \quad (5-2)$$

其中 ϕ 为初始切点处砂轮的法向量方向角。

$\Delta\theta_0$ 的正负表示上台的旋转方向，为负表示逆时针方向旋转，为正表示顺时针方向旋转。

工件的母线起点在坐标系 $\{B\}$ 中的坐标为 $(-b, f(0))$ ，该点经过旋转变换，在坐标系 $\{A\}$ 中的坐标 (p_{xo}, p_{yo}) 为

$$\begin{bmatrix} p_{xo} \\ p_{yo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta_0 & -\sin \Delta\theta_0 \\ \sin \Delta\theta_0 & \cos \Delta\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ f(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cos \Delta\theta_0 - f(0) \sin \Delta\theta_0 \\ -b \sin \Delta\theta_0 + f(0) \cos \Delta\theta_0 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

(p_{xo}, p_{yo}) 即为砂轮在坐标系 $\{A\}$ 中的坐标。

得到加工基准：在坐标系 $\{A\}$ 中，上台旋转的角度为 $\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \phi$ ，砂轮位置为 $(-b \cos \Delta\theta_0 - f(0) \sin \Delta\theta_0, -b \sin \Delta\theta_0 + f(0) \cos \Delta\theta_0)$ 。

5.3 砂轮尺寸几何分析

在坐标系 $\{B\}$ 或 $\{C\}$ 中，砂轮与工件始终相切。我们在坐标系 $\{C\}$ 内进行分析，以确定出砂轮几何尺寸。

1. 确定砂轮圆弧半径 r

在坐标系 $\{C\}$ 内，工件母线方程为 $y = f(x)$ 。根据 4.2 所述曲率半径的算法，可以求出母线的二阶导数 $f''(x)$ 和曲率半径 $\rho(x)$ 。要确保工件与砂轮始终相切，在磨削外表面时，在 $f''(x) \geq 0$ 的 x 区间内，曲率半径的最小值为 $\min \rho(x)$ ，此时应满足 $r \leq \min \rho(x)$ 即可确保在打磨过程中工件与砂轮始终相切，我们取值为 $r = \min \rho(x)$ ；若 $f''(x) \geq 0$ 的 x 区间为 \emptyset ，则 $r = +\infty$ ，即为圆柱形砂轮。

2. 确定砂轮的直径 φ

要使得砂轮磨削到工件的所有部位，砂轮的半径 $\frac{\varphi}{2}$ 必须不小于母线方程的最大值和最小值之差，即

$$\varphi \geq 2[\max f(x) - \min f(x)] \quad (5-4)$$

根据目前市场上的砂轮规格，取直径 φ 的区间为 $[150\text{mm}, 300\text{mm}]$ 。考虑到本文磨削的工件横坐标跨度为 600mm ，则砂轮直径取值为：

$$\varphi = \max \{150, 2[\max f(x) - \min f(x)]\} \quad (5-5)$$

3. 确定砂轮厚度 a

砂轮的厚度 $a \leq 2r$ 且为常数，当 r 比较小时，令 $a = 2r$ ；一般情况下， r 都比较大，可通过目前普遍采用的砂轮尺寸来确定。在本论文中，当 $r \leq 10\text{mm}$ ，取 $a = 2r$ ，其他情况取 $a = 20\text{mm}$ 。

4. 确定砂轮圆弧张角 α

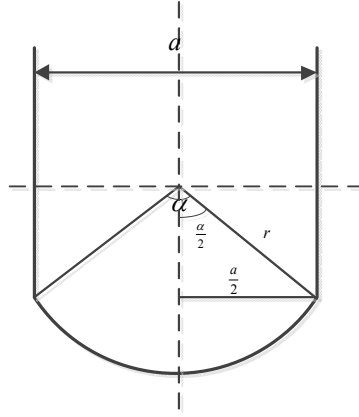


图 5-2 砂轮张角求解示意图

由图 5-2 的几何关系容易得到：

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2r} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \frac{a}{2r} \quad (5-6)$$

a 一定，当 $\alpha \rightarrow 0$ ，砂轮的弧度越趋于平缓，到达极端情况 $\alpha = 0$ 时，轮式砂轮就变成圆柱形砂轮。所以，圆柱形砂轮是轮式砂轮的特殊情况。

5.4 机理分析

在坐标系 $\{B\}$ 中，曲线方程 $y = f(x+b)$ ，对 $\forall (x_0, y_0)$ ，当 $x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x_0$ ，则有 $f(x_0) \rightarrow f(x_0 + \Delta x_0 + b)$ ，即 $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0 + b) - f(x_0 + b)$ 。点 (x_0, y_0) 处的法线方程为：

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0 + b)}(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0 + b) \quad (5-7)$$

当磨削过程进行到点 (x_0, y_0) 时，设坐标系 $\{B\}$ 转过的角度为 θ ，坐标的平移总量为

p_{xB}, p_{yB} 。

1. 确定脉冲数(正变换)

当 $x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x_0$ ，法线转过的角度 $\Delta\theta$ 为：

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \arctan\left(-\frac{1}{f'(x_0 + \Delta x + b)}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{f'(x_0 + b)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{1}{f'(x_0 + b)}\right) - \arctan\left(\frac{1}{f'(x_0 + \Delta x + b)}\right) \end{aligned} \quad (5-8)$$

为了保证工件与砂轮始终相切，需要将坐标系 $\{B\}$ 内的点 $(x + \Delta x_0, f(x + \Delta x_0 + b))$ 变换到坐标系 $\{A\}$ 下砂轮的初始位置 (p_{xo}, p_{yo}) 处，变换方程为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{xo} \\ p_{yo} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \Delta\theta) & -\sin(\theta + \Delta\theta) \\ \sin(\theta + \Delta\theta) & \cos(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x_0 \\ f(x_0 + \Delta x_0 + b) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xB} + \Delta x \\ p_{yB} + \Delta y \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \Delta x &= p_{xo} - \cos(\theta + \Delta\theta)(x_0 + \Delta x_0) + \sin(\theta + \Delta\theta)f(x_0 + \Delta x_0 + b) - p_{xB} \end{aligned} \quad (5-9)$$

$$\Rightarrow \Delta y = p_{yo} - \sin(\theta + \Delta\theta)(x_0 + \Delta x_0) - \cos(\theta + \Delta\theta)f(x_0 + \Delta x_0 + b) - p_{yB} \quad (5-10)$$

由上可知，一组 $(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta)$ 即可表征工件在磨床的三层工作台上的运动情况。

$\Delta x, \Delta y, \Delta\theta$ 有正负情况，为正表示表示工作台向坐标轴的正向移动或顺时针旋转；为负表示工作台向坐标轴的负向移动或逆时针旋转。

以下分析将 $\Delta x, \Delta y, \Delta \theta$ 转化成脉冲信号：

每一个脉冲信号代表的位移 s_0 为：

$$s_0 = \frac{\varphi_0 h}{360\omega} \quad (5-11)$$

其中, θ_0 为步进电机的步进角度, h 为丝杆的螺距, ω 为变速器的传动比。

下台和中台移动 Δx , Δy 对所对应的脉冲数 n_x , n_y 为分别为：

$$n_x = \left\| \frac{\Delta x}{s_0} \right\| = \left\| \frac{360\omega\Delta x}{\theta_0 h} \right\| \quad (5-12)$$

$$n_y = \left\| \frac{\Delta y}{s_0} \right\| = \left\| \frac{360\omega\Delta y}{\theta_0 h} \right\| \quad (5-13)$$

上台旋转 $\Delta \theta$ 所对应的脉冲数 n_θ 为：

$$n_\theta = \left\| \frac{R \tan(\Delta \theta)}{s_0} \right\| = \left\| \frac{360\omega R \tan(\Delta \theta)}{\theta_0 h} \right\| \quad (5-14)$$

注： $\|*\|$ 表示对 “*” 四舍五入取整，脉冲的正负表示电机的转动方向。

根据正变换得到工序指令 (n_x, n_y, n_θ) 。

2. 脉冲轨迹还原(逆变换)

因脉冲指令 (n_x, n_y, n_θ) 必须是整数，所以该组指令不能保证将 $(x_0 + \Delta x_0, f(x_0 + \Delta x_0 + b))$ 定位到目标点 (p_{x0}, p_{y0}) ，而是定位到一个很接近的点 (p_x, p_y) 。

根据(5-12)，可得 x 方向上的实际平移量 $\Delta x'$ 为：

$$\Delta x' = n_x s_0 \quad (5-15)$$

同理

$$\Delta y' = n_y s_0 \quad (5-16)$$

$$\Delta \theta' = \arctan \frac{n_\theta s_0}{R} \quad (5-17)$$

根据坐标逆变换，还原脉冲轨迹 (p_x, p_y) ，即

$$\begin{bmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \Delta \theta') & -\sin(\theta + \Delta \theta') \\ \sin(\theta + \Delta \theta') & \cos(\theta + \Delta \theta') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xB} + \Delta x' \\ p_{yB} + \Delta y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_x = (p_{x0} - p_{xB} - \Delta x') \cos(\theta + \Delta \theta') + (p_{y0} - p_{yB} - \Delta y') \sin(\theta + \Delta \theta') \quad (5-18)$$

$$\Rightarrow p_y = -(p_{x0} - p_{xB} - \Delta x') \sin(\theta + \Delta \theta') + (p_{y0} - p_{yB} - \Delta y') \cos(\theta + \Delta \theta') \quad (5-19)$$

5.5 误差原理

工序指令集磨削出的曲线方程为 $y = p(x)$ ，母线方程为 $y = f(x)$ ，在 $\forall x_i$ 处的偏差为 $|p(x_i) - f(x_i)|$ ，为了便于计算，将 x 离散成 M 个点。则局部误差为 $|p(x_i) - f(x_i)|$ ，全局误差为局部误差的均值，即 $\sum_{i=1}^M |p(x_i) - f(x_i)| / M$ ，建立目标函数

$$\min_{\Delta} \left\{ 10^{-\sigma} \max_i \{ |p(x_i) - f(x_i)| \} + \sum_{i=1}^M |p(x_i) - f(x_i)| / M \right\} \quad (5-20)$$

式中, σ 表示局部误差与全局误差的数量级之差，以确保优化目标视局部误差和全局误差同等重要。通过优化 Δ ，可得出一组误差最小的工序指令集。

5.6 脉冲分布

脉冲指令执行过程是一个时间序列，为了减小前后两个脉冲发射时间间隔之差，本文采用三次样条对累积时间和累积脉冲数的样本点进行插值，以求得平滑变化的相邻脉冲发射时间间隔。具体分析如下：

假设通过模型计算出工序指令为： $t_i, (1 \leq i \leq N)$,

$$\begin{pmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{\theta 1} & t_1 \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{\theta 2} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{xN} & n_{yN} & n_{\theta N} & t_N \end{pmatrix} \quad (5-21)$$

对上式做累积计算得到

$$\begin{pmatrix} |n_{x1}| & |n_{y1}| & |n_{\theta 1}| & t_1 \\ \sum_{j=1}^2 |n_{xj}| & \sum_{j=1}^2 |n_{yj}| & \sum_{j=1}^2 |n_{\theta j}| & \sum_{j=1}^2 t_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N |n_{xj}| & \sum_{j=1}^N |n_{yj}| & \sum_{j=1}^N |n_{\theta j}| & \sum_{i=j}^N t_j \end{pmatrix} \quad (5-22)$$

分别对时间序列 $\left(\sum_{j=1}^i t_j, \sum_{j=1}^i |n_{xj}|\right), \left(\sum_{j=1}^i t_j, \sum_{j=1}^i |n_{yj}|\right), \left(\sum_{j=1}^i t_j, \sum_{j=1}^i |n_{\theta j}|\right), (1 \leq i \leq N)$ 做三次样条插值，可得到每个脉冲的发射时间间隔，即得到脉冲分布。

6 模型的建立与求解

6.1 问题 1 和问题 2 的模型建立与求解

6.1.1 问题 1 和问题 2 的模型建立

问题 1 和问题 2 考虑砂轮与工件切点固定不变，切点位于与砂轮转轴垂直的最大中截面上，其法线方向角为 $\frac{\pi}{2}$ ，可求得磨削问题 1 和问题 2 中的工件的加工基准。上台初始旋转角为：

$$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (6-1)$$

砂轮初始位置

$$\begin{cases} p_{xo} = -b \cos \Delta\theta_0 - f(0) \sin \Delta\theta_0 \\ p_{yo} = -b \sin \Delta\theta_0 + f(0) \cos \Delta\theta_0 \end{cases} \quad (6-2)$$

将母线以步长 Δl 离散化，得到点对序列

$$(-b, f(0)), (\Delta l - b, f(\Delta l)), \dots, (i\Delta l - b, f(i\Delta l)), \dots, (N\Delta l - b, f(N\Delta l))$$

根据机理，一个步长 Δl 可得到一组磨床工序指令

$$\begin{pmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{\theta 1} \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{\theta 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{xN} & n_{yN} & n_{\theta N} \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

因为脉冲指令 (n_x, n_y, n_θ) 是取整之后的结果，所以按照得到的工序指令磨削工件所得的表面曲线与母线存在误差。在此，以 Δl 为优化变量，以误差最小为目标建立优化模型。

工序指令集磨削出的曲线方程为 $y = p(x)$ ，母线方程为 $y = f(x)$ ，在 $\forall x_i$ 处的偏差为 $|p(x_i) - f(x_i)|$ ，为了便于计算，将 x 离散成 M 个点。则局部误差为 $|p(x_i) - f(x_i)|$ ，全局误差为局部误差的均值，即 $\sum_{i=1}^M |p(x_i) - f(x_i)| / M$ ，建立目标函数

$$\min_{\Delta l} \left\{ 10^{-\sigma} \max_i \{|p(x_i) - f(x_i)|\} + \sum_{i=1}^M |p(x_i) - f(x_i)| / M \right\} \quad (6-4)$$

式中， σ 表示局部误差与全局误差的数量级之差，以确保优化目标视局部误差和全局误差同等重要。通过优化 Δl ，可得出的一组误差最小的工序指令集。

求得的指令集保证了加工误差最小，下面来分析如何节省加工时间。

根据题目，控制脉冲宽度的时间尺度不大于ms级(10^{-3} 秒)，可以认为是瞬时发射，而不考虑其发射时间。另外，对步进电机的控制脉冲的最高工作频率不大于每秒100脉冲，即脉冲的发射时间不能少于1/100s，则有

$$\begin{cases} \Delta t_x \geq \frac{1}{100} \\ \Delta t_y \geq \frac{1}{100} \\ \Delta t_\theta \geq \frac{1}{100} \end{cases} \quad (6-5)$$

工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟250—300转，每转动100转，花费的时间是20s~24s，在这段时间内，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过4mm，即 x 方向上的脉冲数不超过1200个($4/s_0$)，即脉冲频率区间为[50,60]，本文取区间上限，即60，则得到下台电机发射脉冲时间间隔约束为

$$\Delta t_x \geq \frac{1}{60} \quad (6-6)$$

综合(6-5)、(6-6)，得到

$$\begin{cases} \Delta t_x \geq \frac{1}{60} \\ \Delta t_y \geq \frac{1}{100} \\ \Delta t_\theta \geq \frac{1}{100} \end{cases} \quad (6-7)$$

每条工序指令时间的执行时间 t_i 为

$$t_i = \max \{ \Delta t_x n_{xi}, \Delta t_y n_{yi}, \Delta t_\theta n_{\theta i} \} \quad (6-8)$$

以磨削工件总时间最小化为目标，建立如下模型

$$\min T = \sum_{i=1}^k t_i \quad (6-9)$$

该模型以式(6-6)为约束。通过模型计算出工序指令的最小发射时间 $t_i, (1 \leq i \leq N)$,

$$\begin{pmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{\theta 1} & t_1 \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{\theta 2} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{xN} & n_{yN} & n_{\theta N} & t_N \end{pmatrix} \quad (6-10)$$

脉冲指令执行过程是一个时间序列，为了减小前后两个脉冲发射时间间隔之差，本文采用三次样条对累积时间和累积脉冲数的样本点进行插值，以求得平滑变化的相邻脉冲发射时间间隔。具体分析如下：

对(6-10)做累积计算得到

$$\begin{pmatrix} |n_{x1}| & |n_{y1}| & |n_{\theta 1}| & t_1 \\ \sum_{j=1}^2 |n_{xj}| & \sum_{j=1}^2 |n_{yj}| & \sum_{j=1}^2 |n_{\theta j}| & \sum_{j=1}^2 t_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N |n_{xj}| & \sum_{j=1}^N |n_{yj}| & \sum_{j=1}^N |n_{\theta j}| & \sum_{j=1}^N t_j \end{pmatrix} \quad (6-11)$$

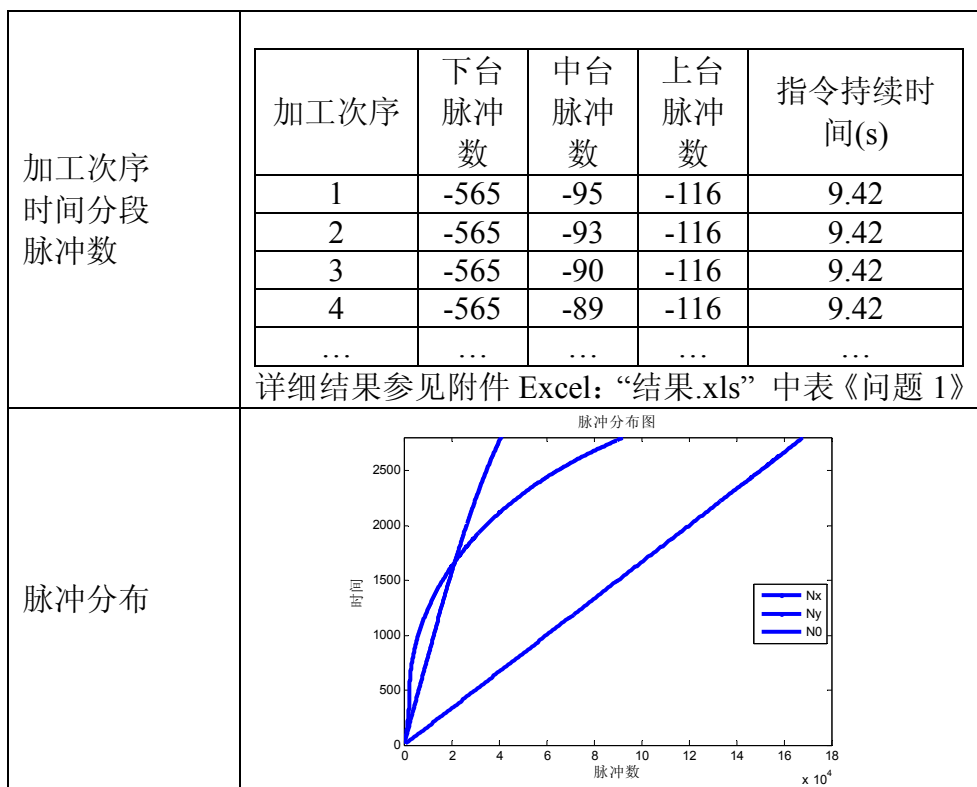
分别对时间序列 $\left(\sum_{j=1}^i t_j, \sum_{j=1}^i |n_{xj}| \right), \left(\sum_{j=1}^i t_j, \sum_{j=1}^i |n_{yj}| \right), \left(\sum_{j=1}^i t_j, \sum_{j=1}^i |n_{\theta j}| \right), (1 \leq i \leq N)$ 做三次样条插值，可得到每个脉冲的发射时间间隔，即得到脉冲分布。

6.1.2 问题 1 和问题 2 的模型求解

考虑到优化变量 Δl 的取值范围较小，而且式(6-3)的最优化有非常典型的非线性特征。为了求得更加精确的解。这里利用遍历算法，以 0.01mm 为步长，以下界 0 上界 4mm 为边界进行遍历，最终求得加工方案为：

表 6-1 问题 1 的加工方案

加工基准	坐标系 $\{A\}$ 下坐标(-247.80, 134.15)，上台转角-0.95°
砂轮的几何尺寸	厚度 a = 20mm，直径 φ =150mm
迭代步长	坐标系 $\{B\}$ 下： 1.71 mm
指令组数	351 组
总耗时(min)	46.7544
误差(mm)	平均误差=7.2974e-4； 最大误差=0.026；



对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

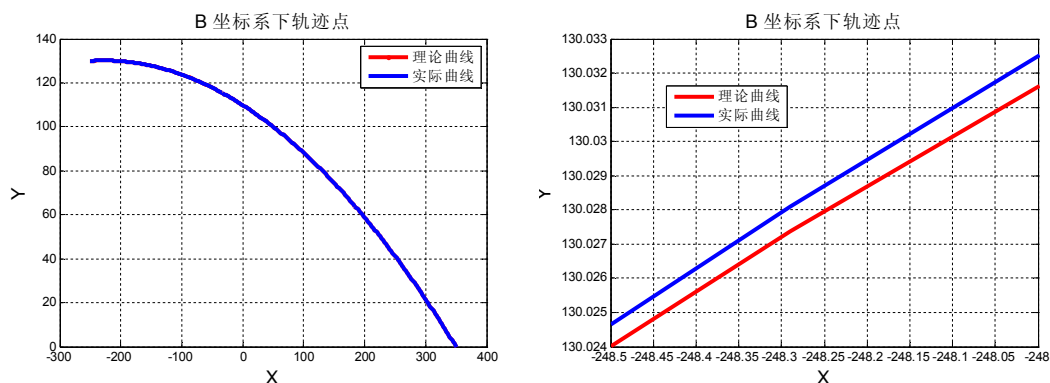


图 6-1 实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

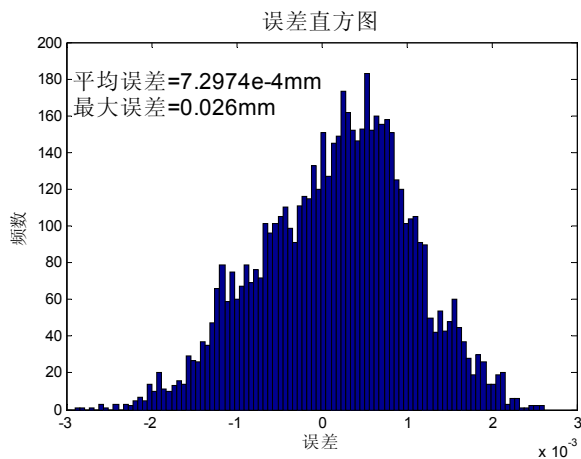
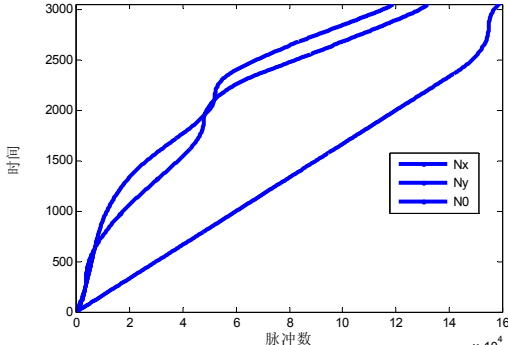


图 6-2 误差分布

表 6-2 问题 2 的加工方案

加工基准	坐标系 $\{A\}$ 下坐标(-223.14,188.62), 上台转角-9.04°																																	
砂轮的几何尺寸	厚度 $a = 20\text{mm}$, 直径 $\varphi = 150\text{mm}$ 外轮廓线半径 $r = 718.27\text{mm}$,外轮廓线张角 $\alpha = 1.60^\circ$																																	
迭代步长	坐标系 $\{B\}$ 下: 0.6 mm																																	
指令组数	1000 组																																	
总耗时(min)	50.94711																																	
误差(mm)	平均误差= 7.1928e-4; 最大误差=0.029;																																	
加工次序 时间分段 脉冲数	<table><tr><th>加工次序</th><th>下台脉冲数</th><th>中台脉冲数</th><th>上台脉冲数</th><th>指令持续时间(s)</th></tr><tr><td>1</td><td>-149</td><td>40</td><td>53</td><td>2.48</td></tr><tr><td>2</td><td>-149</td><td>39</td><td>53</td><td>2.48</td></tr><tr><td>3</td><td>-149</td><td>40</td><td>53</td><td>2.48</td></tr><tr><td>4</td><td>-149</td><td>39</td><td>53</td><td>2.48</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>				加工次序	下台脉冲数	中台脉冲数	上台脉冲数	指令持续时间(s)	1	-149	40	53	2.48	2	-149	39	53	2.48	3	-149	40	53	2.48	4	-149	39	53	2.48
	加工次序	下台脉冲数	中台脉冲数	上台脉冲数	指令持续时间(s)																													
	1	-149	40	53	2.48																													
	2	-149	39	53	2.48																													
	3	-149	40	53	2.48																													
	4	-149	39	53	2.48																													
...																														
详细结果详见附件 Excel: “结果.xls” 中表《问题 2》																																		
脉冲分布	<p>脉冲分布图</p> 																																	

对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

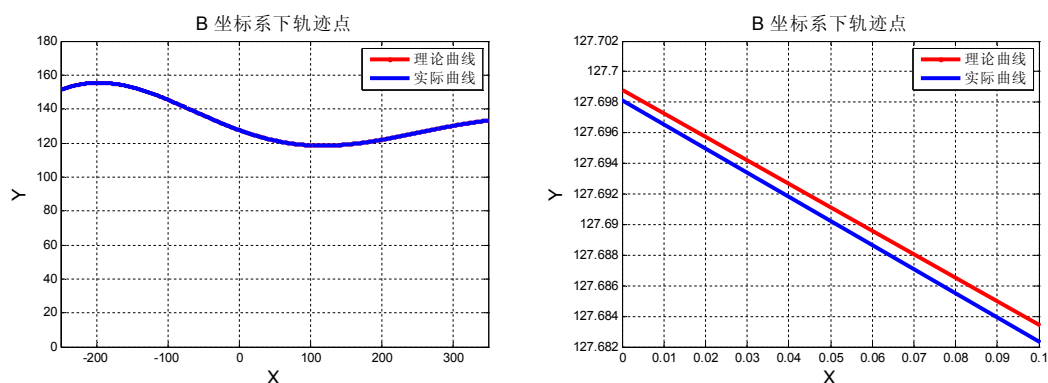


图 6-3 实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

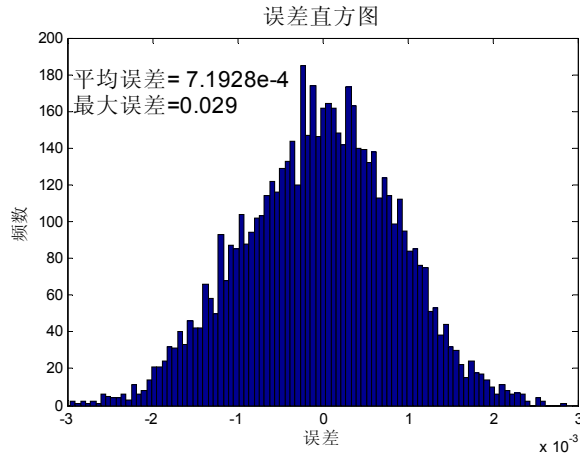


图 6-4 误差分布

6.2 问题 3 的模型建立与求解

6.2.1 修整策略

为了加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀，应该使砂轮与工件的切点不只是固定的一个点，而是在砂轮表面移动。在坐标系 $\{A\}$ 中，当工件前进时，使用 6.1 中的模型只能求得砂轮表面相同切点下的加工方案。而为了使切点在砂轮表面的不同位置，那么工件就需要在法线方向平移。而平移的过程就是修政策略的核心。如图 6-5 所示，利用 6.1 中的模型，工件应该移动到位置 1，切点位置为切点 1，而为了使工件和砂轮的切点移动到切点 2，那么工件在移动到这个位置的时候，还应该在切点处沿法线方向平移，实际位置为经过平移修正的位置 2。

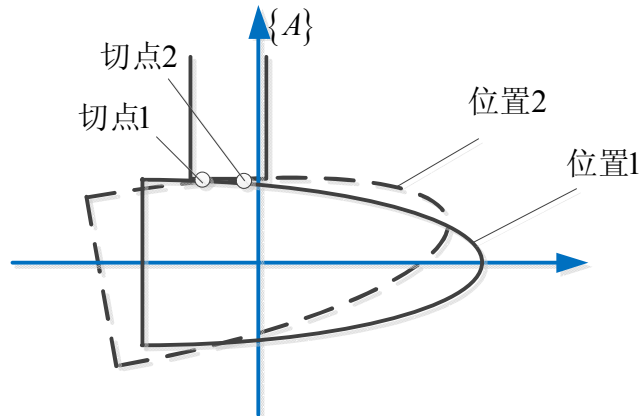


图 6-5 模型 1 的修整策略示意图

而由于在坐标系 $\{A\}$ 中，工件的修整过程沿直线运动，那么只需要下平台和中平台移动。根据修整策略，建立的模型如下。

6.2.2 问题 3 的模型建立

为了使砂轮表面磨损均匀，厚度为 a 的砂轮中厚度 Δa 截面（垂直于砂轮旋转轴）磨削工件母线的范围为 Δx_0 。若设 m 为砂轮厚度的等分数，有

$$m = \frac{d-c}{\Delta x_0} = \frac{a}{\Delta a} \Rightarrow \Delta a = \frac{a \Delta x_0}{d-c} = \frac{a}{m} \quad (6-12)$$

加工基准：

在坐标系 $\{A\}$ 下，轮式砂轮圆弧起点处法线方向角为 $\phi = \frac{\pi}{2}$ ，上台旋转角为：

$$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (6-13)$$

根据式(5-3)，可求得砂轮的初始位置 (p_{x0}, p_{y0}) ，运行到第 k 个指令集 $(0 \leq k \leq m)$ 的切点为 $(p_x + k\Delta a, p_y)$ 。

根据式(5-5)，求得 $\Delta\theta$ ，执行第 k 个指令集的变化方程为

$$\begin{bmatrix} p_{x0} + k\Delta a \\ p_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \Delta\theta) & -\sin(\theta + \Delta\theta) \\ \sin(\theta + \Delta\theta) & \cos(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\Delta x_0 - b \\ f(k\Delta x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xB} + \Delta x \\ p_{yB} + \Delta y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta x = p_{x0} + k\Delta a - \cos(\theta + \Delta\theta)(k\Delta x_0 - b) + \sin(\theta + \Delta\theta)f(k\Delta x_0) - p_{xB} \quad (6-14)$$

$$\Rightarrow \Delta y = p_{y0} - \sin(\theta + \Delta\theta)(k\Delta x_0 - b) - \cos(\theta + \Delta\theta)f(k\Delta x_0) - p_{yB} \quad (6-15)$$

根据式(5-12)、(5-13)、(5-14)可求得 (n_x, n_y, n_θ) ，根据式(5-15)、(5-16)、(5-17)可求得 $\Delta x', \Delta y', \Delta\theta'$ ，逆变换为：

$$\Rightarrow p_x = (p_{x0} + k\Delta a - p_{xB} - \Delta x')\cos(\theta + \Delta\theta') + (p_{y0} - p_{yB} - \Delta y')\sin(\theta + \Delta\theta') \quad (6-16)$$

$$\Rightarrow p_y = -(p_{x0} + k\Delta a - p_{xB} - \Delta x')\sin(\theta + \Delta\theta') + (p_{y0} - p_{yB} - \Delta y')\cos(\theta + \Delta\theta') \quad (6-17)$$

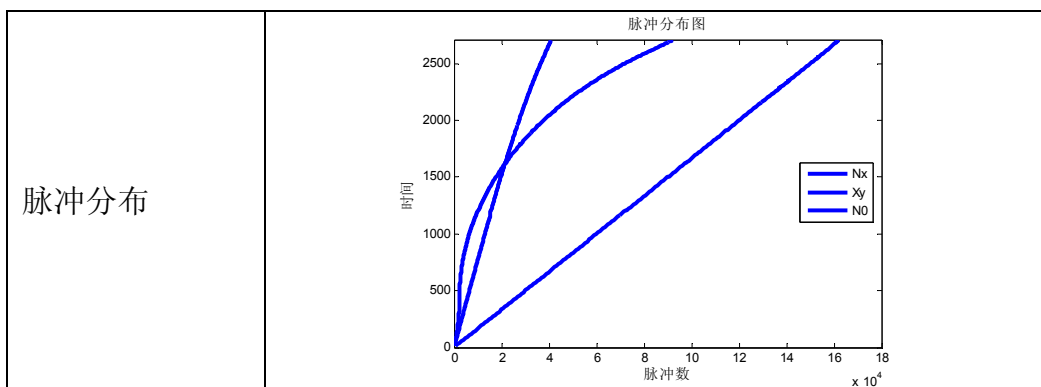
其余同问题 1 的模型。

6.2.3 问题 3 的模型求解

利用 6.1.2 中所述的遍历算法，可以求得加工方案为：

表 6-3 问题 3 的加工方案

加工基准	坐标系 $\{A\}$ 下坐标(-247.80,134.15)，上台转角-0.94°																																		
砂轮的几何尺寸	厚度 $a = 20\text{mm}$ ，直径 $\varphi = 150\text{mm}$																																		
迭代步长	坐标系 $\{B\}$ 下： 1.72 mm																																		
指令组数	349 组																																		
总耗时(min)	45.1897																																		
误差(mm)	平均误差= 7.4151e-4； 最大误差= 0.025；																																		
加工次序 时间分段 脉冲数	<table><tr><td>加工次序</td><td>下台 脉冲 数</td><td>中台 脉冲 数</td><td>上台 脉冲 数</td><td>指令持续时 间(s)</td></tr><tr><td>1</td><td>-551</td><td>-95</td><td>-117</td><td>9.18</td></tr><tr><td>2</td><td>-551</td><td>-94</td><td>-117</td><td>9.18</td></tr><tr><td>3</td><td>-552</td><td>-91</td><td>-117</td><td>9.20</td></tr><tr><td>4</td><td>-552</td><td>-90</td><td>-117</td><td>9.20</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>					加工次序	下台 脉冲 数	中台 脉冲 数	上台 脉冲 数	指令持续时 间(s)	1	-551	-95	-117	9.18	2	-551	-94	-117	9.18	3	-552	-91	-117	9.20	4	-552	-90	-117	9.20
	加工次序	下台 脉冲 数	中台 脉冲 数	上台 脉冲 数	指令持续时 间(s)																														
	1	-551	-95	-117	9.18																														
	2	-551	-94	-117	9.18																														
	3	-552	-91	-117	9.20																														
	4	-552	-90	-117	9.20																														
																														
详细结果详见附件 Excel：“结果.xls” 中表《问题 3》																																			



对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

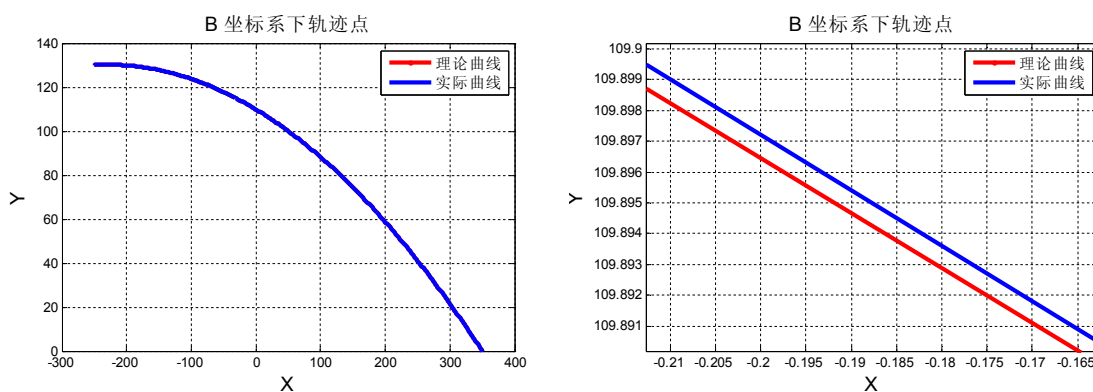


图 6-6 实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

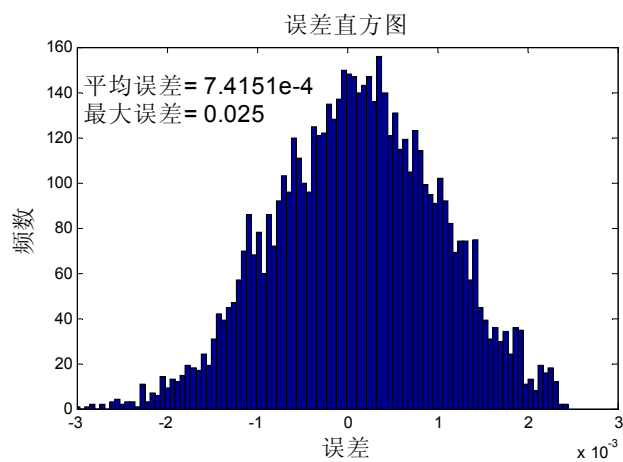


图 6-7 误差分布

6.3 问题 4 的模型建立与求解

6.3.1 修整策略

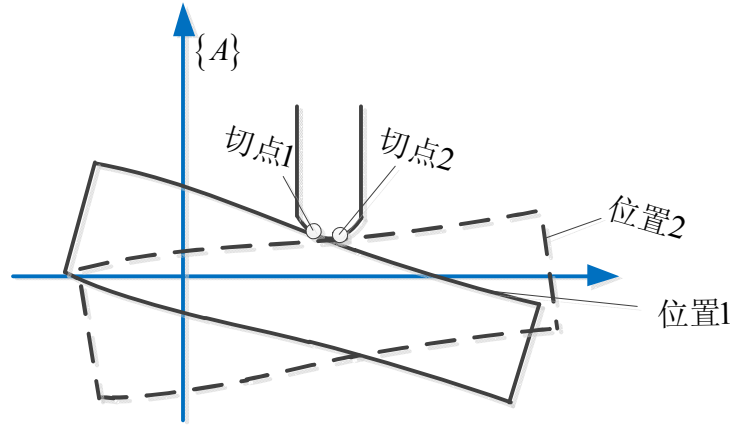


图 6-8 模型 2 的修整策略示意图

此问题的修改策略和 6.2.1 中的修整策略类似，不同的地方在于，砂轮采用了轮式。砂轮与工件的切点围绕砂轮圆弧方程变化，切点处的法向量不断旋转变换（如图 6-8 所示），建立了模型如下。

6.3.2 问题 4 的模型建立

在坐标系 $\{A\}$ 下，轮式砂轮圆弧起点处法线方向角 $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ ，上台旋转角为：

$$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (6-18)$$

根据(5-3)，求得砂轮的初始位置

$$\{p_{x_0}, p_{y_0}\} = (-b \cos \Delta\theta_0 - f(0) \sin \Delta\theta_0, -b \sin \Delta\theta_0 + f(0) \cos \Delta\theta_0) \quad (6-19)$$

在坐标系 $\{A\}$ 下，砂轮圆弧的方程为：

$$\left[x - \left(r \sin \frac{\alpha}{2} + p_{x_0}\right)\right]^2 + \left[y - \left(r \cos \frac{\alpha}{2} + p_{y_0}\right)\right]^2 = r^2 \quad (6-20)$$

将角度 m 等分，有

$$m = \frac{d-c}{\Delta x_0} = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} \Rightarrow \Delta\alpha = \frac{\alpha \Delta x_0}{d-c} = \frac{\alpha}{m} \quad (6-21)$$

第 k 次 ($0 \leq k \leq m$) 的切点为：

$$\left(p_{x_0} + 2r \sin \frac{\alpha}{2} - r \sin\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{m}\right)\alpha, p_{y_0} + 2r \cos \frac{\alpha}{2} - r \cos\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{m}\right)\alpha\right) \quad (6-22)$$

坐标系 $\{B\}$ 的旋转角为：

$$\Delta\theta = \arctan\left(\frac{1}{f'((k-1)\Delta x)}\right) - \arctan\left(\frac{1}{f'(k\Delta x)}\right) + \Delta\alpha \quad (6-23)$$

根据坐标变换有

$$\Delta x = p_{xo} + 2r \sin \frac{\alpha}{2} - r \sin(\frac{1}{2} - \frac{k}{m})\alpha - \cos(\theta + \Delta\theta)(k\Delta x_0 - b) + \sin(\theta + \Delta\theta)f(k\Delta x_0) - p_{xB} \quad (6-24)$$

$$\Delta y = p_{yo} + 2r \cos \frac{\alpha}{2} - r \cos(\frac{1}{2} - \frac{k}{m})\alpha - \sin(\theta + \Delta\theta)(k\Delta x_0 - b) - \cos(\theta + \Delta\theta)f(k\Delta x_0) - p_{yB} \quad (6-25)$$

根据式(5-12)、(5-13)、(5-14)可求得 (n_x, n_y, n_θ) ，根据式(5-15)、(5-16)、(5-17)可求得 $\Delta x', \Delta y', \Delta \theta'$ ，逆变换为：

$$p_x = \left[p_{xo} + 2r \sin \frac{\alpha}{2} - r \sin(\frac{1}{2} - \frac{k}{m})\alpha - p_{xB} - \Delta x' \right] \cos(\theta + \Delta\theta') + \left[p_{yo} + 2r \cos \frac{\alpha}{2} - r \cos(\frac{1}{2} - \frac{k}{m})\alpha - p_{yB} - \Delta y' \right] \sin(\theta + \Delta\theta') \quad (6-26)$$

$$p_y = - \left[p_{xo} + 2r \sin \frac{\alpha}{2} - r \sin(\frac{1}{2} - \frac{k}{m})\alpha - p_{xB} - \Delta x' \right] \sin(\theta + \Delta\theta') + \left[p_{yo} + 2r \cos \frac{\alpha}{2} - r \cos(\frac{1}{2} - \frac{k}{m})\alpha - p_{yB} - \Delta y' \right] \cos(\theta + \Delta\theta') \quad (6-27)$$

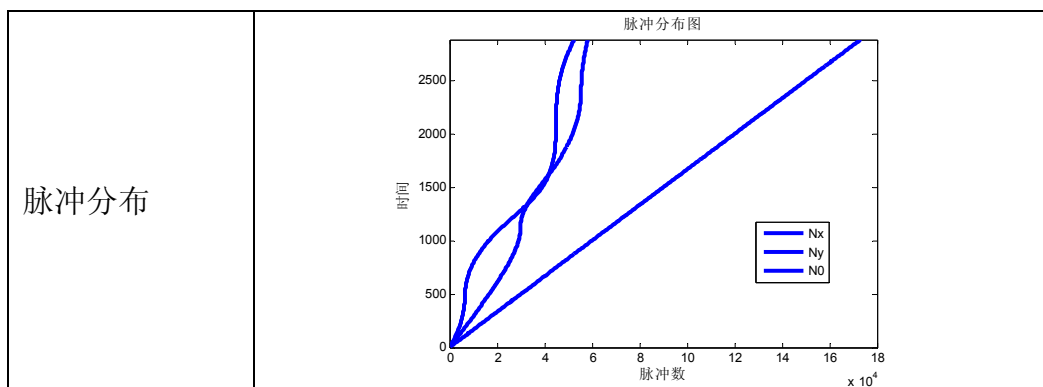
6.3.3 问题 4 的模型求解

利用 6.1.2 中所述的遍历算法，可以求得加工方案为：

表 6-4 问题 4 的加工方案

加工基准	坐标系 $\{A\}$ 下坐标(-225.74,185.49)，上台转角-8.24°			
砂轮的几何尺寸	厚度 $a = 20\text{mm}$ ，直径 $\varphi = 150\text{mm}$ 外轮廓线半径 $r = 718.27\text{mm}$,外轮廓线张角 $\alpha = 1.60^\circ$			
迭代步长	坐标系 $\{B\}$ 下：0.68 mm			
指令组数	883 组			
总耗时(min)	48.08			
误差(mm)	平均误差= 7.2679e-4; 最大误差= 0.028			
加工次序 时间分段 脉冲数	加工次序	下台 脉冲 数	中台 脉冲 数	上台 脉冲 数
	1	-311	-137	-179
	2	-311	-136	-179
	3	-311	-134	-180
	4	-312	-133	-180

详细结果详见附件 Excel：“结果.xls” 中表《问题 4》				



对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

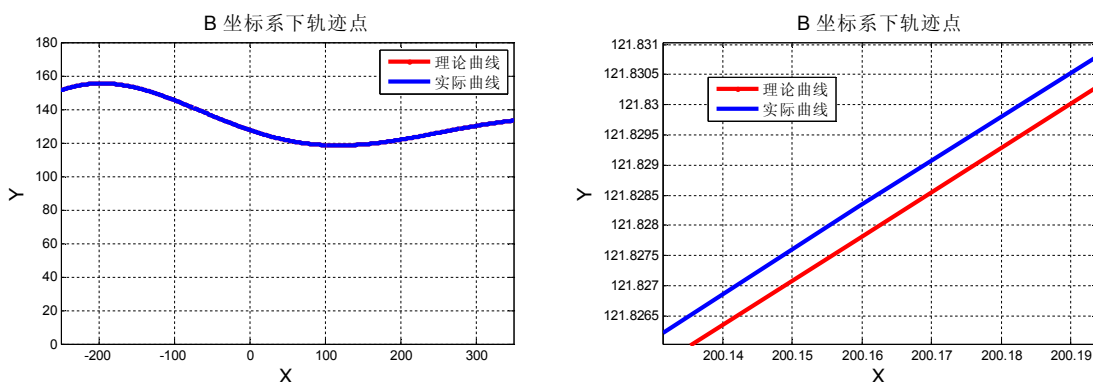


图 6-8 实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

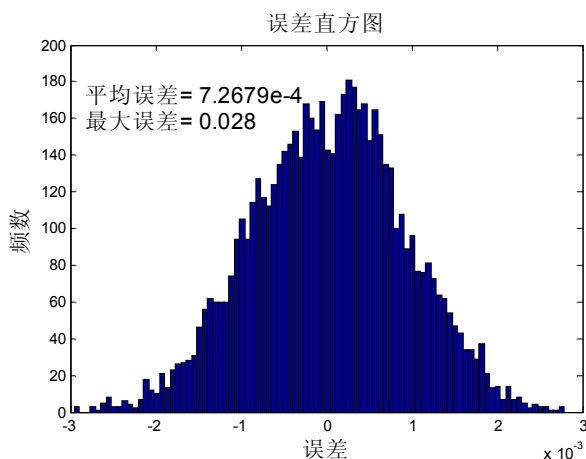


图 6-9 误差分布

7 模型的评价与改进

7.1 模型的评价

本文先后进行了问题分析，模型建立，数据处理，基于最小误差的遍历求解，加工方案的确定，误差分析等工作。对模型中几个关键问题进行分析，包括坐标系的设定、加工基准的确定、砂轮几何尺寸对问题的影响、机理分析、误差分析以及如何确定脉冲分布。

问题 1 和问题 2 转化为以全局误差和局部误差为目标的最优化问题，并且根据问题

的特性提出了较为快捷的遍历算法，并且用 matlab 求解得到合理的加工方案。

问题 3 提出了一种能使圆柱型砂轮表面的磨损尽量均匀的修整策略，可利用下台和中台的移动实现。而问题 4 则提出了一种基于轮式砂轮的修整策略，可利用下中上台的移动实现，并且用 matlab 求解得到合理的加工方案。

总体来说，本文较好的解决了题目中提出的 4 个问题，但还存在一些不足需要改进，改进方案如下。

7.2 模型的改进

7.2.1 模型 1 的改进

改进 1: 在模型 1 中考虑的磨削轨迹为连接控制点的折线 $p_1(x)$ ，而实际轨迹是经过控制点的切线所连成的折线 $p_2(x)$ ，应用 $p_2(x)$ 替代 $p_1(x)$ 。如图 7-1 所示。

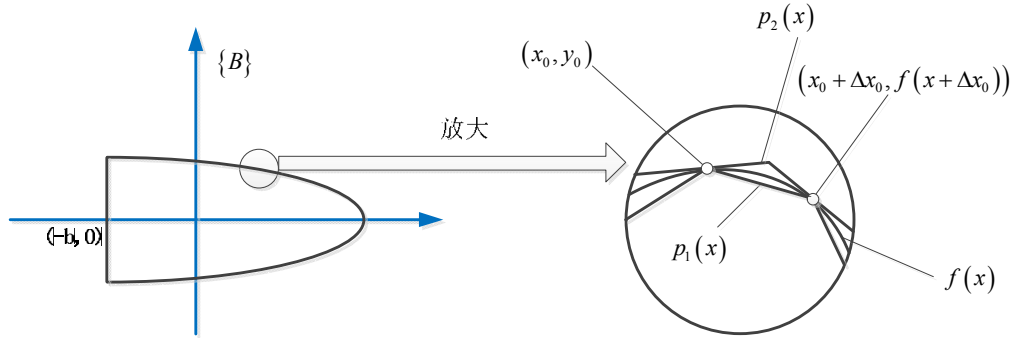


图 7-1 模型 1 的改进 1 示意图

改进 2: 模型建立中是以 $|p(x) - f(x)|$ 的均值为全局误差，可以采用 $p(x)$ 和 $f(x)$ 围成的面积 $\int |p(x) - f(x)| dx$ 来度量全局误差。如图 7-2 所示。

结合改进 1 和改进 2，步长 Δl 优化模型(或误差优化模型)改进为：

$$\min_{\Delta l} \left\{ 10^{-\sigma} \max_i \{|p(x_i) - f(x_i)|\} + \int |p_2(x) - f(x)| dx \right\} \quad (7-1)$$

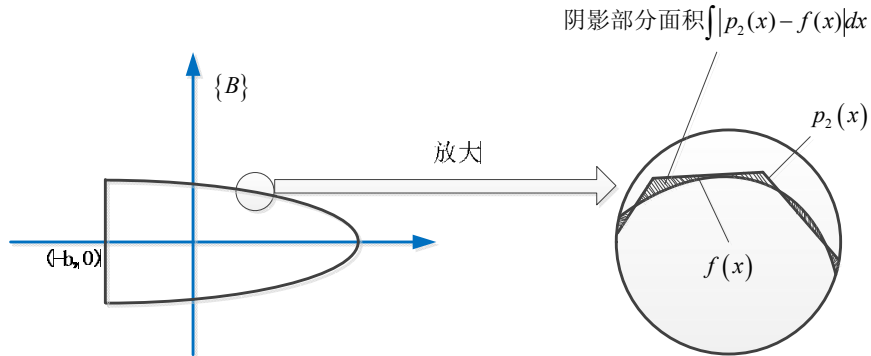


图 7-2 模型 1 的改进 2 示意图

7.2.2 模型 2 的改进

在模型 2 中考虑的磨削轨迹为连接控制点的折线 $p_1(x)$ ，而实际轨迹是与控制点相切的圆弧围成的曲线 $p_3(x)$ 。全局误差和步长 Δl 优化模型也可做相应的改进，如图 7-3。

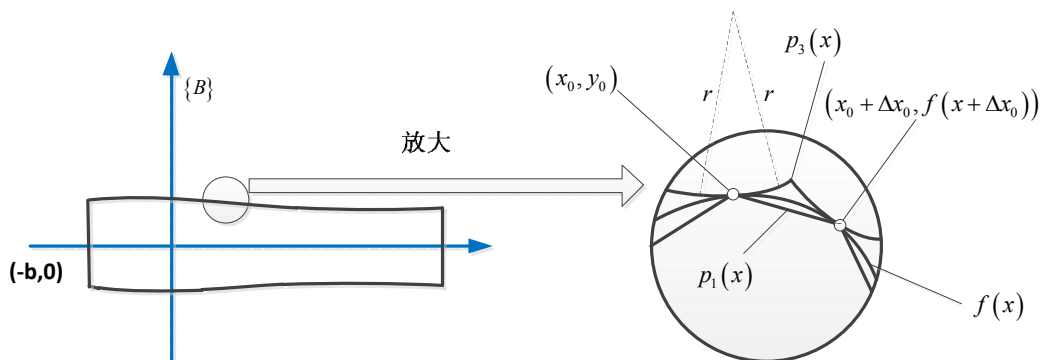


图 7-3 模型 2 的改进示意图

7.2.3 模型 3 的改进

考虑模型 3 时，用相等比例的 Δa 磨削相等比例的母线横坐标的变化量 Δx_0 来起到砂轮磨损均匀效果。这种方法有不妥之处，可改进为相等比例的 Δa 磨削相等比例的母线变化量 Δe ，即

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta a}{a} \quad (7-2)$$

其中， $e = \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ 是母线长度。通过母线长度积分反解出移动 Δe 对应的母线横轴的移动量 Δx_0 ，进而通过机理得出工序指令。

7.2.4 模型 4 的改进

可做同模型 3 类似的改进，如下

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \quad (7-3)$$

其余同模型 3 的改进。

8 参考文献

- [1]. 王晓东 编著，算法设计与分析[M]，北京：清华大学出版社，2003 年 8 月：266
- [2]. 林铨云，董加礼 编著，多目标优化的方法与理论[M]，吉林：吉林教育出版社，1992.8
- [3]. 求是科技，Matlab7.0 从入门到精通人民邮电出版社，2006
- [4]. 刑文训，谢金星，现代优化计算方法，清华大学出版社，2005
- [5]. 黄宣国，空间解析几何与微分几何，复旦大学出版社，2003
- [6]. 张艳军，周瑾，梁敏，2007 年全国研究生数学建模大赛：机械臂运动路径设计问题，武汉大学

9 附件

附件 1：结果（excel）

附件 2：程序源代码