

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学 校 解放军理工大学、海军航空工程学院

参赛队号	90045020	
队员姓名	1.张 苏	(解放军理工大学)
	2.马思特	(海军航空工程学院)
	3.孙泽健	(海军航空工程学院)

# 全国第八届研究生数学建模竞赛



## 题目 吸波材料与微波暗室问题的数学建模

### 摘 要

尖劈形材料吸波性能的分析建立在辐射波的运动遵循几何光学的基础上。直接依次推算辐射波在尖劈空隙的多次反射会存在解析表达求解困难、计算复杂度高的问题。利用反射辐射波与其映射镜像即直射辐射波路径线对称的特性，针对二维和三维情形，分别建立半圆镜像与半圆柱镜像模型，将辐射波在尖劈空间的多次反射的复杂情形等效为辐射波路径线对等分半圆和半圆柱的切割。藉此，理论分析了尖劈材料几何参数、反射率与辐射波最终反射方向、次数、强度的定量关系。

尔后，建立了迭代模型仿真辐射波在尖劈空隙的多次反射，验证了半圆镜像与半圆柱镜像模型下的理论结果的正确性。将上述两个模型推广到辐射波从尖劈上方任意位置射入空隙的情形，扩展了模型的适用性。理论与仿真表明影响尖劈吸波性能的主要几何参数为尖劈角  $2\alpha$ ，平均反射率随  $\alpha$  的减少而降低。给出了尖劈吸波材料的设计原则。

微波暗室的研究依据波动说，一束辐射波经反射会形成一个余弦辐射体。离散化处理视在天线的辐射形成不同方向与大小的能量波束，可计算静区直接得到的功率。继续离散化分析各能量波束反射形成的余弦辐射体将导致计算不可行。首先建立加权能量分布模型。为计算静区吸收到的反射能量，分析了天线辐射经一次反射后剩余能量在微波暗室墙面的分布问题。能量经一次反射后，设想此时反射率突变为 0 和 1 计算静区吸收的能量的情况。将反射率在 0-1 之间时静区吸收的反射功率视作上述两种极端情况的加权。得到反射率在 0.05 时始终满足  $\gamma \leq 0.03$  而反射率为 0.5 时不满足的结论。此模型下，反射率为 0.5 和 0.05 时均有  $t=2s$  时  $\gamma$  最小。此模型高效的同时存在简化较多的问题，导致不能考虑诸如天线辐射功率变化这样的因素。

建立随机反射模型做进一步研究。为使计算可行，在余弦辐射体上随机选取一个方向的能量波束代表余弦辐射体。设计概论密度函数使其在余弦辐射体主轴方向附近产生的概率高，这样产生的波束更具代表性。因波束在反射过程中能量随反射次数的增加指

数递减，有限次反射的 Monte Carlo 实验即可较为准确的模拟。随机反射模型的计算结果同样表明反射率在 0.05 时始终满足  $\gamma \leq 0.03$  而反射率为 0.5 时不满足。此模型下，反射率为 0.5 和 0.05 时分别有  $t=1.9565s$  和  $t=1.913s$  时  $\gamma$  最小。

**关键词：**几何光学 镜像映射 对称 波动说 能量分布 加权 Monte Carlo

# 1 引言

随着通信技术、隐身技术、仿真试验技术以及各种电子战武器装备的发展，微波暗室以及吸波材料也普遍受到重视和关注，得到了迅速的发展，并广泛应用于雷达、通信、微波技术、航空以及卫生医疗设备中，从而对微波暗室的性能提出了更高的要求，特别是暗室的造型、背景电平等要求更为苛刻。但微波暗室的性能，很大程度上决定于所选用的吸波材料和设计工艺，因此，我们有必要对微波暗室的吸波材料进行研究，对微波暗室性能测试进行了解。尤其是利用现代计算机仿真技术辅助分析和设计，使材料的吸收性能与材料的外形及参数相联系。

## 2 尖劈形状吸波体的性能分析

### 2.1 模型假设

- (1) 只考虑辐射波在尖劈空隙的反射而不考虑其在尖劈内部的折射。
- (2) 辐射波的辐射路线的形成符合几何光学中的基本原则。

### 2.2 模型的分析与建立

问题一需要说明尖劈形吸波材料如何有效的降低等效的辐射波反射率，如果直接分析辐射波在三维尖劈空隙间多次反射的路径会导致推导困难、计算复杂度高。本文从二维尖劈出发，在只考虑辐射波从尖劈顶点进入尖劈空隙的情况下，利用辐射波虚像路径与反射路径对称的原理，建立了二维半圆镜像模型分析这一问题。此模型表明，辐射波在尖劈空隙中多次反射与射线切割一个被等分的圆是等价的。因此，可以结合几何知识直接理论计算辐射波在尖劈空隙中多次反射直至离开尖劈时的反射方向、反射次数以及强度。进一步的，将此模型推广到辐射波从尖劈空隙上方任意位置进入的情况，推导了此时的反射方向、反射次数以及强度等与入射光线参数之间的定量关系，建立了理论模型。尔后，为了验证理论模型的正确性，建立了仿真验证模型直接模拟辐射波在尖劈空隙多次反射的情形。

在此基础上，分析了三维空间中辐射波在尖劈空隙中多次反射的情形。利用向量分解，将三维空间中辐射波的运动分解为  $ZOY$  二维平面运动与沿  $X$  轴运动两个向量的和。结合二维模型，分析了辐射波在三维尖劈空隙中多次反射的情形。

研究辐射波在尖劈空隙中多次反射的目的在于设计反射率低（吸波性能好）的尖劈形吸波体，因此通过数值计算系统分析了尖劈几何体相关参数与反射率的关系，总结了尖劈几何形状设计时的设计依据。

第一问具体组织如下：

一、建立二维半圆镜像模型与三维半圆柱镜像模型分别理论推导二维与三维时最终反射波线的方向、反射次数、反射波的辐射强度与已知反射率、几何参数之间的关系。

二、对二维与三维的情形分别建立迭代验证模型检验理论推导的正确性。

三、数值计算系统分析辐射波任意角度、位置射入尖劈形吸波材料时的其吸波性能与几何参数的关系，为尖劈形吸波材料的设计提供依据。

## 2.2.1 二维半圆镜像模型

### 2.2.1.1 辐射波线无横向偏移的半圆镜像模型

我们首先考虑辐射波线经过尖劈尖顶点（无横向偏移）的情形。

由于在实际情况中辐射波线方向不断在尖劈中发生改变，其路径非常复杂。通过分析波线反射的情形，利用辐射波反射路径与其成像的对称性，可以发现辐射波的反射路线可以等价于对圆切割的问题。从而可以直观的观察辐射波线在尖劈空隙中的实际路径，由此我们可以建立二维空间中的半圆镜像模型。

我们在空间中对尖劈空隙进行镜像映射，从而使波线传播方向在镜像映射空间内为射线的延长线，具体情况如图 2.1 所示。当入射波进入入射点  $C$  时，做尖劈空隙  $A_0O_0B_0$  的镜像  $A_1O_0B_1$ ，可以发现到达第二个入射点即  $A_0O_0$  上的点  $C_1$  的镜像  $C'_1$  恰好为入射线的延长线与  $A_1O_0$  的交点，因此可以用入射波线的延长线与尖劈镜像的交点来分析反射光线。

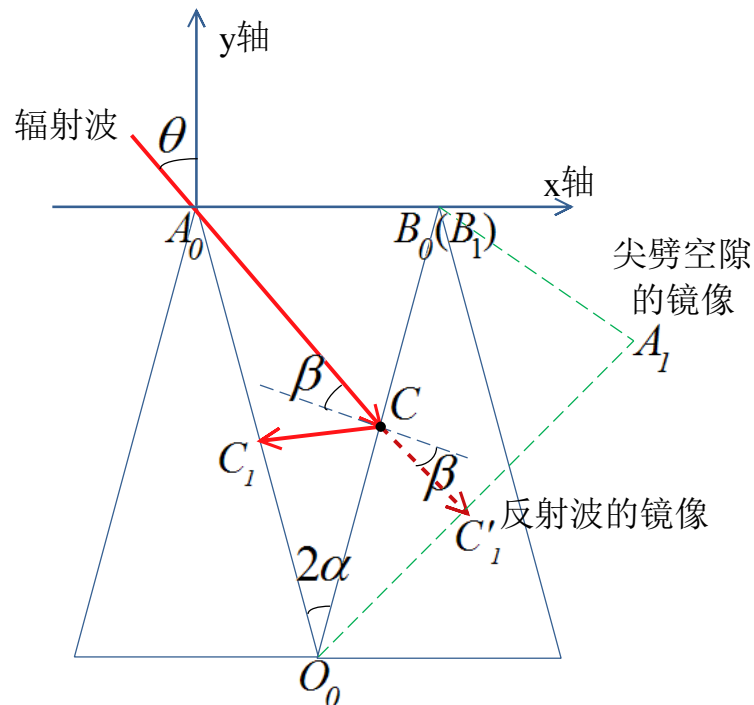


图 2.1 二维波线路径示意图

由图 2.1 可以看到，通过对尖劈空隙进行镜像，其对称轴为辐射波的反射面，可以将波的反射问题等效与在镜像空间内直线相交的问题。那么继续这个方法连续多次镜像，多次镜像空间可以构成一个半圆，辐射波在尖劈空隙中多次反射的问题即可转化为辐射波在多镜像空间内与直线相交的问题，具体情况见图 3.2 和图 3.3。

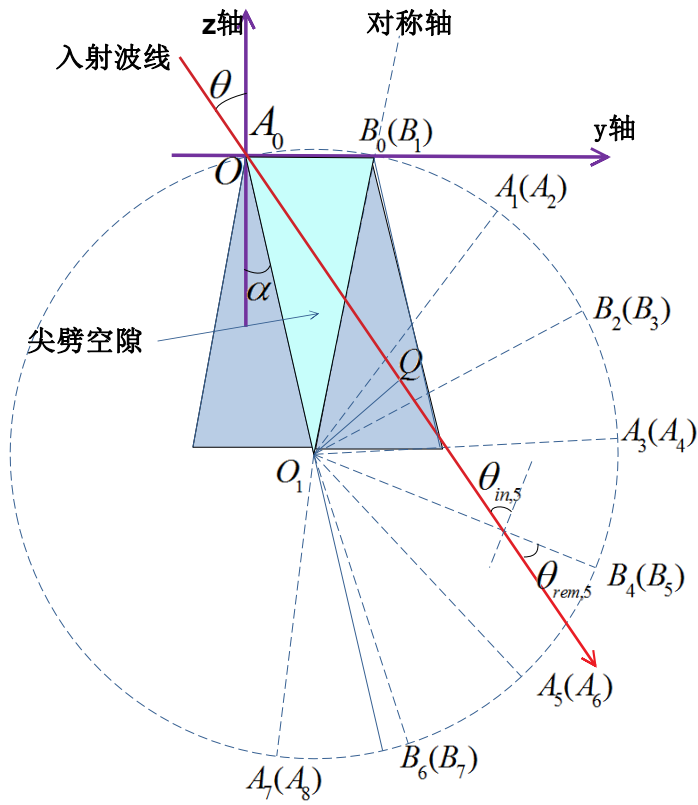


图 2.2 二维半圆镜像模型示意图

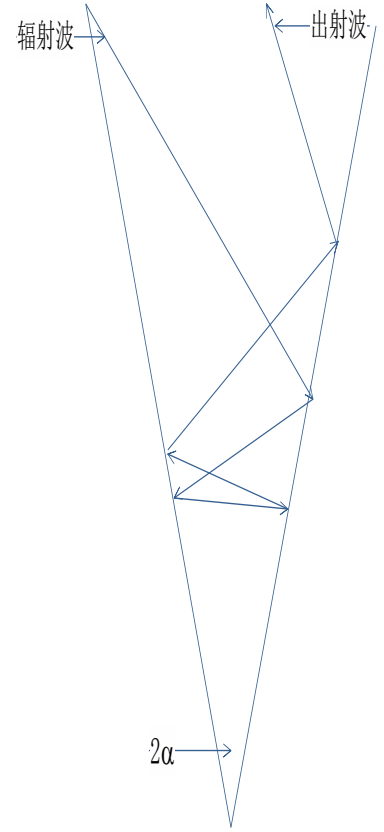


图 2.3 半圆镜像模型中辐射波真实路径

由图 2.2 和图 2.3 可以看到，由于反射波线关于反射面的对称线即是入射波线延长线，所以在尖劈空隙连续镜像的过程中，可以等价位辐射波线方向保持不变并与尖劈空隙的多个镜像相交的过程，辐射波线方向保持不变，由此我们可以清晰地观察到辐射波线在尖劈空隙中的路径。

下面我们在半圆镜像模型中对辐射波在尖劈间隙中多次反射的问题进行分析。

这里需要说明的是，当入射角  $\theta \in (0, \alpha)$  时，辐射波将射入尖劈的尖端，实际中这种情况很少发生，因此只需研究入射角  $\theta \in (\alpha, \pi/2)$  的情况。

### 1) 反射次数 $n$

在图 3.2 中可以观察到，辐射波从坐标系  $O$  点入射时，经过  $n$  次反射，最终会从第  $n$  个尖劈空隙镜像  $A_n O_1 B_n$  中射出。所以只需确定辐射波线最终从哪个尖劈空隙镜像射出，即可计算出  $n$  值。辐射波线与  $OO_1$  的夹角为  $\theta - \alpha$ ，计算出射点的弧长关系，给出反射次数  $n$  的计算式为

$$n = \left\lfloor \frac{\pi - 2(\theta - \alpha)}{2\alpha} \right\rfloor \quad \theta \in \left( \alpha, \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.1)$$

式中  $\lfloor \cdot \rfloor$  为向下取整运算。

### 2) 第 $i$ 次反射的入射角 $\theta_{in,i}$

辐射波线路径在多反射空间中为直线，入射角  $\theta_{in,i}$  是辐射波线与尖劈反射面法线的夹角，又设第  $i$  次反射的辐射波线与尖劈面朝外部空间方向的夹角为

$$\theta_{rem,i} = \theta - \alpha + 2i\alpha, \quad (2.2)$$

而  $\theta_{in,i}$  和  $\theta_{rem,i}$  满足关系式

$$\theta_{rem,i} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta_{in,i} & \theta_{rem,i} < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} + \theta_{in,i} & \theta_{rem,i} \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (2.3)$$

综上所述，有辐射波第  $i$  次反射时入射角为

$$\theta_{in,i} = \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right| \quad \theta \in \left( \alpha, \frac{\pi}{2} \right), 1 \leq i \leq n, \quad (2.4)$$

### 3) 辐射强度 $P_n$

定义  $P_0$  为辐射波的入射强度， $P_j$  为经过  $j$  次反射以后辐射波的强度，由题目所给的反射率定义式，以及上面给出的反射次数和每次反射入射角的计算式，可以计算出  $P_j$  为

$$P_j = P_{j-1} \rho \cos \theta_{in,j} \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.5)$$

那么最终射出时的辐射强度为

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \rho^n \prod_{i=1}^n \cos \theta_{in,i} \\ &= P_0 \rho^n \prod_{i=1}^n \cos \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 4) 出射方向 $\theta_{out}$ (最终反射波线方向)

定义辐射波线出射方向为与  $z$  轴正向的夹角  $\theta_{out}$ ，向  $y$  轴正向方向为正。辐射波线经  $n$  次反射从尖劈射出时，其与最后反射的尖劈面外方向的夹角为  $\theta_{rem,n} = \theta - \alpha + 2n\alpha$ 。当  $n$  为偶数时，辐射波线从尖劈空隙左表面射出， $\theta_{out} = \theta_{rem,n} - \alpha$ 。当  $n$  为奇数时，辐射波线从尖劈空隙右表面射出， $\theta_{out} = \alpha - \theta_{rem,n}$ 。那么最终辐射波线从尖劈空隙射出时出射方向为

$$\theta_{out} = \begin{cases} \theta + 2(n-1)\alpha & n = 2k, k \in Z^+, \\ -\theta - 2(n-1)\alpha & n = 2k-1, k \in Z^+, \end{cases} \quad (2.7)$$

#### 2.2.1.2 辐射波线从尖劈空隙上方任意位置入射的半圆镜像模型

下面我们考虑更一般的情况，即辐射波线不经过尖劈尖顶点射入尖劈空隙。辐射波线入射时与  $z$  轴夹角仍为  $\theta$ ，在尖劈空隙正上方即  $y$  轴上的截距为  $t$ 。我们继续使用二维半圆镜像模型进行分析，如下图 2.4 所示。

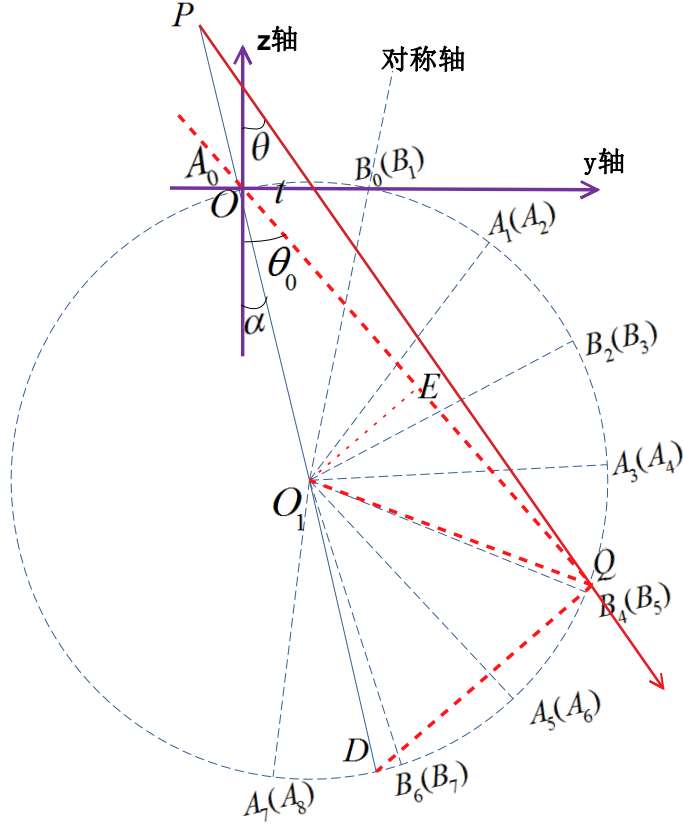


图 2.4 辐射波线横向偏移的半圆镜像模型

### 1) 反射次数 $n$

在图 3.4 中可以观察到，辐射波入射位置发生横向偏移时，应当计算其无横向偏移的等效入射角  $\theta_0$ ，为此先求得  $L_{OP}$  和  $\sin \angle O_1QP$

$$L_{OP} = t \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\theta - \alpha)}, \quad (2.8)$$

$$\sin \angle O_1QP = \frac{h / \cos \alpha + L_{OP}}{h / \cos \alpha} \cdot \sin(\theta - \alpha), \quad (2.9)$$

最后求得  $\theta_0$  为

$$\theta_0 = \frac{\theta - \alpha + \angle O_1QP}{2} + \alpha, \quad (2.10)$$

由等效角  $\theta_0$ ，求得反射次数  $n$

$$n = \left\lfloor \frac{\pi - 2(\theta_0 - \alpha)}{2\alpha} \right\rfloor, \quad (2.11)$$

式中  $\lfloor \rfloor$  为向下取整运算。

### 2) 第 $i$ 次反射的入射角 $\theta_{in,i}$

偏移入射时，直线间的角度关系不变，因此每次反射的入射角  $\theta_{in,i}$  与二维模型中相同，辐射波线第  $i$  次反射时入射角为

$$\theta_{in,i} = \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right| \quad \theta \in \left( \alpha, \frac{\pi}{2} \right), 1 \leq i \leq n, \quad (2.12)$$



### 3) 辐射强度 $P_n$

同上原因，给出  $P_j$  表达式

$$P_j = P_{j-1} \rho \cos \theta_{in,i} \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.13)$$

那么最终射出的辐射强度为

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \rho^n \prod_{i=1}^n \cos \theta_{in,i} \\ &= P_0 \rho^n \prod_{i=1}^n \cos \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right|, \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 4) 出射方向 $\theta_{out}$ (最终反射波线的方向)

辐射波出射方向定义不变，那么最终辐射波线从尖劈空隙射出时的出射方向为

$$\theta_{out} = \begin{cases} \theta + 2(n-1)\alpha & n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+, \\ -\theta - 2(n-1)\alpha & n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^+, \end{cases} \quad (2.15)$$

由半圆镜像模型可以得到以下结论

1) 辐射波以入射角  $\theta$  射入尖劈空隙中，在空隙中发生多次反射，不断接近空隙底部，最终到达空隙中的最低点，又从最低点返回到外部空间，不存在波线在空隙中无限深入而不向上返回的情况，另外辐射功率在多次反射中不断衰减，尖劈形吸波体达到了大量吸收辐射波的作用。

2) 反射的辐射波线与尖劈面朝外部空间方向的夹角  $\theta_{rem,i}$  随着反射次数  $i$  的增加，每次增加  $2\alpha$ 。而同时每次反射的入射角随反射次数  $i$  的增加，前  $n/2$  次增大，后  $n/2$  减小。入射角增大时辐射波向尖劈间隙内部传播，减小时向尖劈间隙外部传播。

3) 反射次数的最大值  $N$  取决于尖劈角大小

由半圆镜像模型我们可以看出，反射次数极大值  $N$  和尖劈角  $\alpha$  有关，而尖劈角的大小直接决定了半圆镜像模型中尖劈空隙的对称个数，反射点为入射波线和各对称轴的焦点，当入射波线和尖劈左表面接近平行时，反射次数最多，其极限值为

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \alpha} n = \lim_{\theta_0 \rightarrow \alpha} \left\lfloor \frac{\pi - 2(\theta_0 - \alpha)}{2\alpha} \right\rfloor = \frac{\pi}{2\alpha} \quad \theta_0 \in \left( \alpha, \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.16)$$

4) 可以计算出总波程  $l$ ，首先计算  $O_1$  点到波线路径的距离（ $O_1$  到垂心  $E$  的距离）为

$$d = (L_{Op} + \frac{h}{\cos \alpha}) \sin(\theta - \alpha), \quad (2.17)$$

又由于  $\alpha$  很小，在这里我们采取一些近似运算，认为总波程  $l$  为辐射波线在圆上的截线长度，则

$$l = 2\sqrt{\left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)^2 - d^2}. \quad (2.18)$$

## 2.2.2 三维半圆柱镜像模型

在三维空间中，我们对尖劈空隙进行连续镜像的过程中，得到了一个假想的半圆柱，由于其在  $ZOY$  平面内的投影的路径与二维空间中情形一致，所以我们可以二维半圆镜像模型的基础上进行变化得到三维半圆柱镜像模型。在三维时引入辐射波线与  $ZOY$  平面的夹角为  $\varphi$ ，辐射波线在  $ZOY$  平面内投影与  $Z$  轴夹角为  $\theta$ ，三维半圆柱镜像模型如图 2.5 所示。

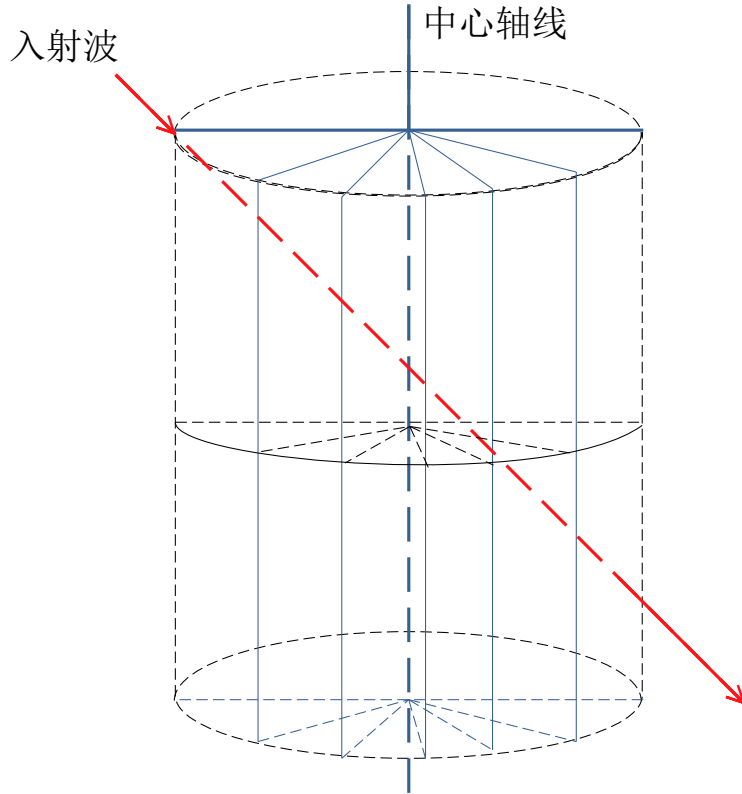


图 2.5 三维半圆柱模型示意图

### 1) 反射次数 $n$

在三维空间中，辐射波线路径可看作是二维在  $ZOY$  平面内路径和在  $X$  轴方向路径的合成。引入  $\varphi$  后，入射角和出射角都变为立体角，出射时其方向向  $X$  轴方向移动，反射次数与二维空间中反射次数一致，即：

$$n = \left\lfloor \frac{\pi - 2(\theta_0 - \alpha)}{2\alpha} \right\rfloor, \quad (2.19)$$

式中  $\lfloor \rfloor$  为向下取整运算。

### 2) 第 $i$ 次反射的入射角 $\theta_{in,i}$

三维空间中，每次反射入射角变为立体角，入射角  $\theta_{in,i}$  与投影入射角  $\sigma_{in,i}$  以及  $\varphi$  的关系如图 2.6 所示。

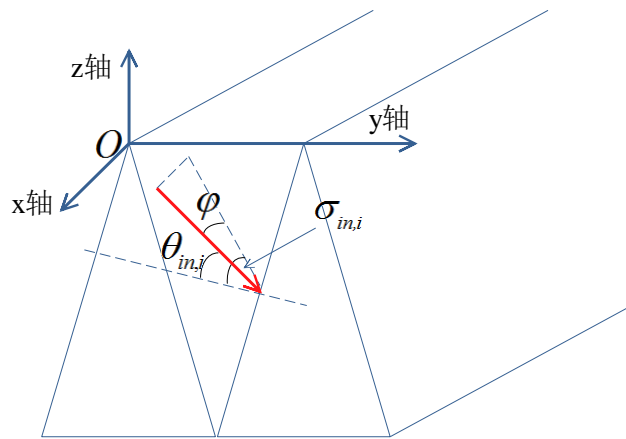


图 2.6 三维立体角与平面角的关系

由图 2.6 可知角的相互关系为

$$\cos \theta_{in,i} = \cos \sigma_{in,i} \cdot \cos \varphi, \quad (2.20)$$

由二维半圆镜像模型得,第  $i$  次反射时投影入射角为

$$\sigma_{in,i} = \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right| \quad \theta \in \left( \alpha, \frac{\pi}{2} \right), 1 \leq i \leq n, \quad (2.21)$$

第  $i$  次反射时入射角为

$$\theta_{in,i} = \arccos(\cos \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right| \cdot \cos \varphi), \quad (2.22)$$

### 3) 辐射强度 $P_n$

变为立体角后, 给出  $P_j$  计算式

$$\begin{aligned} P_j &= P_{j-1} \rho \cos \theta_{in,i} \\ &= P_{j-1} \rho \cos \varphi \cos \sigma_{in,i} \quad (1 \leq j \leq n), \end{aligned} \quad (2.23)$$

那么最终射出时的功率  $P_n$  为

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \rho^n \prod_{i=1}^n \cos \theta_{in,i} \\ &= P_0 \rho^n \cos^n \varphi \prod_{i=1}^n \cos \sigma_{in,i} \\ &= P_0 \rho^n \cos^n \varphi \prod_{i=1}^n \cos \left| \theta - \alpha + 2i\alpha - \frac{\pi}{2} \right|, \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 4) 出射方向 $\theta_{out}$ (最终反射波线的方向)

辐射波线出射时与  $ZOY$  平面的夹角仍然为  $\varphi$ , 在  $ZOY$  平面内与二维空间中的情形一致, 出射方向为

$$\theta_{out} = \begin{cases} \theta + 2(n-1)\alpha & n = 2k, k \in Z^+, \\ -\theta - 2(n-1)\alpha & n = 2k+1, k \in Z^+, \end{cases} \quad (2.25)$$

除此之外, 我们还可以求得总波程  $L$  和  $X$  轴位移  $L_x$ , 总波程为

$$L = \frac{l}{\cos \varphi}, \quad (2.26)$$

$X$  轴位移为

$$L_x = l \tan \varphi. \quad (2.27)$$

由此, 三维空间中的半圆柱镜像模型建立完成, 为二维半圆镜像模型在三维空间的延伸, 其中辐射波线在第三维的倾斜角对反射次数不产生影响, 只对出射角和射出时的辐射功率产生影响。

## 2.3 迭代验证模型的建立

利用镜像模型我们可以清晰地观察辐射波路线在尖劈空隙内的路径, 为了检验改模型的正确性, 我们可以直接求解辐射波在尖劈空隙多次反射的实际路径, 由此我们建立了辐射波线迭代验证模型。

### 2.3.1 二维迭代验证模型

坐标系如图 2.7 所示，

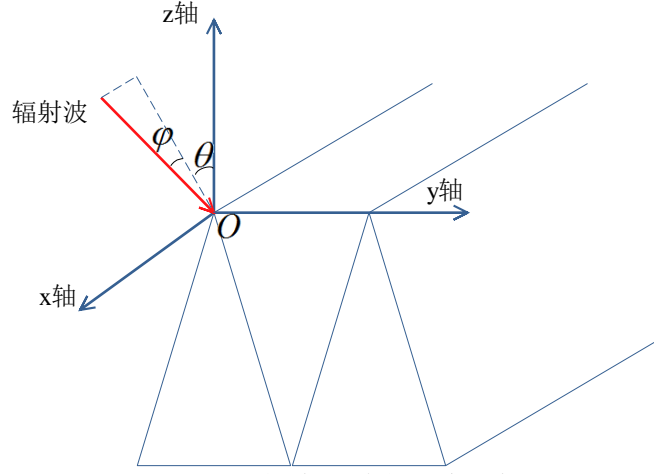


图 2.7 尖劈吸波体坐标系

我们首先考虑二维的模型，则尖劈左右表面的直线方程为

$$\begin{cases} z = -y \cot \alpha, & (\text{尖劈左表面}) \\ z = (y - d) \cot \alpha, & (\text{尖劈右表面}) \end{cases} \quad (2.28)$$

设迭代的入（反）射波线的点斜式方程为

$$z = k_0(y - a_0) + b_0, \quad (2.29)$$

其中  $(a_0, b_0)$  为上一次反射的反射点， $k_0$  为直线的斜率，并设  $(a_0, b_0)$  关于反射面的对称点（尖劈左右表面交替成为反射面）为  $(x_0, y_0)$ 。

对于尖劈左表面，可知两点连线的中点  $((y_0 + a_0)/2, (z_0 + b_0)/2)$  在发射面上，所以

$$\frac{z_0 + b_0}{2} = -\frac{y_0 + a_0}{2} \cot \alpha, \quad (2.30)$$

两点连线的方向为反射面所在直线的法向量，所以

$$\frac{z_0 - b_0}{y_0 - a_0} = \tan \alpha, \quad (2.31)$$

由此建立方程组

$$\begin{cases} \frac{z_0 + b_0}{2} = -\frac{y_0 + a_0}{2} \cot \alpha, \\ \frac{z_0 - b_0}{y_0 - a_0} = \tan \alpha, \end{cases} \quad (2.32)$$

解得

$$\begin{cases} y_0 = \frac{a_0(\tan \alpha - \cot \alpha) - 2b_0}{\tan \alpha - \cot \alpha}, \\ z_0 = (y_0 - a_0) \tan \alpha + b_0, \end{cases} \quad (2.33)$$

又知下一次反射的反射点  $(a_1, b_1)$  为反射面所在直线方程和入（反）射波线方程的交点，所以

$$\begin{cases} b_1 = -a_1 \cot \alpha, \\ b_1 = k_0(a_1 - a_0) + b_0, \end{cases} \quad (2.34)$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = \frac{k_0 a_0 - b_0}{\cot \alpha + k_0}, \\ b_1 = -a_1 \cot \alpha, \end{cases} \quad (2.35)$$

并可求得下一入（反）射波线斜率为

$$k_1 = \frac{b_1 - z_0}{a_1 - y_0}, \quad (2.36)$$

最终得到了下一次入（反）射直线为

$$z = k_1(y - a_1) + b_1, \quad (2.37)$$

由尖劈左表面的直线方程知其法线向量为  $\vec{q}_{lef} = (\cot \alpha, 1)$ ，入（反）射直线向量  $\vec{q}_{ent} = (1, k_0)$ ，所以入射角

$$\cos \beta_{lef} = \frac{|\cot \alpha + k_0|}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 + k_0^2}}, \quad (2.38)$$

则波线反射后的辐射强度  $p_1$  为

$$p_1 = p_0 \cos \beta_{lef}. \quad (2.39)$$

其中  $p_0$  为波线反射前的辐射强度。

对于尖劈右表面，我们利用同样的方法，建立方程组

$$\begin{cases} \frac{z_0 + b_0}{2} = (\frac{y_0 + a_0}{2} - d) \cot \alpha, \\ \frac{z_0 - b_0}{y_0 - a_0} = -\tan \alpha, \end{cases} \quad (2.40)$$

求得

$$\begin{cases} y_0 = \frac{a_0(\tan \alpha - \cot \alpha) + 2b_0 + 2d \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}, \\ z_0 = (a_0 - y_0) \tan \alpha + b_0, \end{cases} \quad (2.41)$$

又求得

$$\begin{cases} a_1 = \frac{b_0 - k_0 a_0 + d \cot \alpha}{\cot \alpha - k_0}, \\ b_1 = (a_1 - d) \cot \alpha, \\ k_1 = \frac{b_1 - z_0}{a_1 - y_0}, \end{cases} \quad (2.42)$$

最终也得到了下一次入（反）射直线为

$$z = k_1(y - a_1) + b_1, \quad (2.43)$$

由尖劈右表面的直线方程知其法线向量为  $\vec{q}_{rig} = (\cot \alpha, -1)$ ，入（反）射直线向量  $\vec{q}_{ent} = (1, k_0)$ ，所以入射角

$$\cos \beta_{rig} = \frac{|\cot \alpha - k_0|}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 + k_0^2}}, \quad (2.44)$$

则波线反射后的辐射强度  $p_1$  为

$$p_1 = p_0 \cos \beta_{rig}. \quad (2.45)$$

其中  $p_0$  为波线反射前的辐射强度。

### 3) 迭代终止条件

满足如下条件时，辐射波线会从尖劈空隙中辐射到外部，

$$\begin{cases} b_1 > 0, & (\text{反射波线越过尖劈顶射出}), \\ \text{或} \\ 90^\circ - |\arctan k| < \alpha, & (\text{反射波线朝上射出}), \end{cases} \quad (2.46)$$

停止迭代。

最终的迭代次数即为反射次数  $n$ ，设  $k_n$  为最终的斜率，最终反射波线的方向（与  $Z$  轴夹角）

$$\theta_{out} = \arctan k_n, \quad (2.47)$$

设  $\beta_i$  为第  $i$  次反射的入射角（在  $\beta_{lef}$  和  $\beta_{rig}$  间交替），则最终射出的辐射强度为

$$p_n = p_0 \sum_{i=1}^n \cos \beta_i. \quad (2.48)$$

### 4) 初始条件的输入

由已知的入射角  $\theta$ （入射波线与  $Z$  轴的交角），和  $Y$  轴偏移量  $t$ ，可以得到  $k_0, a_0, b_0$  的初始值，即

$$\begin{cases} k_0 = -\cot \theta, \\ a_0 = \frac{t \cot \theta + d \cot \alpha}{\cot \theta + \cot \alpha}, \\ b_0 = \cot \theta (t - a_0), \end{cases} \quad (2.49)$$

可以得到初始的入射直线

$$z = k_0(y - a_0) + b_0. \quad (2.50)$$

综上所述，理论推导的二维空间中的定量关系见表 2.1。

表 2.1 二维空间中的定量关系

反射次数 $n$	$n$ 为模型的迭代次数
最终反射波线的方向（与 $Z$ 轴夹角）	$\theta_{out} = \arctan k_n$
最终辐射强度	$p_n = p_0 \sum_{i=1}^n \cos \beta_i$

## 2.3.2 三维迭代验证模型

由建立的二维模型，我们可以拓展成为三维模型，改变反射面的直线方程为平面方程，其表达形式保持不变，设反射点为  $(c_0, a_0, b_0)$ （其中  $a_0, b_0$  的值与二维模型相同），其对称点为  $(x_0, y_0, z_0)$ ，设波线的前一次的入（反）射方向为  $\vec{p}_0 = (f, 1, k_0)$ ，后一次的反射方向为  $\vec{p}_1 = (f, 1, k_1)$ （其中  $k_0, k_1$  的值与二维模型相同），则前一次入（反）射直线方程为

$$\frac{x - c_0}{f} = \frac{y - a_0}{1} = \frac{z - b_0}{k_0}, \quad (2.51)$$

最终我们可以得到下一次反射的反射点  $(c_1, a_1, b_1)$  和反射方向  $\vec{p}_1$ ，由此可以得到下一次的入（反）射直线为

$$\frac{x - c_1}{f_1} = \frac{y - a_1}{1} = \frac{z - b_1}{k_1}, \quad (2.52)$$

则当入射波线与  $ZOY$  轴成角  $\varphi$  时,  $c_0, c_1$  以及  $f$  为

$$\begin{cases} f = \frac{\sqrt{(1+k_0^2)(1+\cos^2 \varphi)}}{\cos \varphi}, \\ c_0 = (t-a_0)f, \\ c_1 = c_0 + f, \end{cases} \quad (2.53)$$

且

$$\cos \beta'_{lef} = \frac{|\cot \alpha + k_0|}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha} \sqrt{1+k_0^2}} \cos \varphi, \quad (2.54)$$

$$\cos \beta'_{rig} = \frac{|\cot \alpha - k_0|}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha} \sqrt{1+k_0^2}} \cos \varphi, \quad (2.55)$$

则波线反射后的辐射强度  $p_1$  为

$$p_1 = p_0 \cos \beta'_{lef} \text{ 或 } p_1 = p_0 \cos \beta'_{rig}. \quad (2.56)$$

其中  $p_0$  为波线反射前的辐射强度。

最终的迭代次数同样为反射次数  $n$ , 设  $k_n$  为最终的斜率, 则最终反射波线的方向 (与  $Z$  轴夹角)

$$\theta_{out} = \arccos \frac{1}{\sqrt{f^2 + 1 + k_n^2}}, \quad (2.57)$$

设  $\beta'_i$  为第  $i$  次反射的入射角 (在  $\beta'_{lef}$  和  $\beta'_{rig}$  间交替), 则最终射出的辐射强度为

$$p_n = p_0 \sum_{i=1}^n \cos \beta'_i. \quad (2.58)$$

综上所述, 理论推导的三维空间中的定量关系见表 2.2。

表 2.2 三维空间中的定量关系

反射次数 $n$	$n$ 为模型的迭代次数
最终反射波线的方向 (与 $Z$ 轴夹角)	$\theta_{out} = \arccos \frac{1}{\sqrt{f^2 + 1 + k_n^2}}$
最终辐射强度	$p_n = p_0 \sum_{i=1}^n \cos \beta'_i$

且二维和三维的迭代验证模型的具体算法如下所示:

**Step1:** 给定初始辐射波入射角  $\theta$  及尖劈角  $\alpha$ , 初始化反射点  $(c_0, a_0, b_0)$  以及辐射波线方向  $\vec{p}_0$ , 初始化计数器;

**Step2:** 求出反射波方向  $\vec{p}_1$ , 计数器加一, 求出波反射后的强度;

**Step3:** 求出反射波与另一尖劈面反射点坐标;

**Step4:** 判断  $Y$  轴纵坐标  $b > 0$  或  $\pi/2 - |\text{atan}(k_1)| < \alpha$  是否满足。若满足, 该辐射波射出尖劈, 迭代终止, 否则, 辐射波继续反射, 转 Step2。

### 2.3.3 迭代验证模型对半圆(柱)镜像模型的结果验证

以  $\alpha = \pi/30$  为例, 随机选取  $\theta_{in}$  的数值, 求解得到各参数的数值见表 2.3。

表 2.3  $\alpha = \pi/30$ 时所求参数值一览

$\theta_{in}$	$7^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$80^\circ$	$89^\circ$
$n$	14	13	11	8	5	3	2	1
$\theta_{out}$	$79^\circ$	$75^\circ$	$66^\circ$	$45^\circ$	$24^\circ$	$15^\circ$	$8^\circ$	$5^\circ$
$P_{out}$	$5.52 \times 10^{-8}$	$6.43 \times 10^{-7}$	$2.54 \times 10^{-5}$	0.0014	0.025	0.1191	0.247	0.4981

将有二维空间中的半圆镜像模型和迭代验证模型得出的反射波辐射强度和反射次数进行比较（以  $\alpha = \pi/30$  为例），见图 2.7 和图 2.8。三维空间中半圆柱镜像模型和迭代验证模型得出的反射波辐射强度进行比较，见图 2.9。

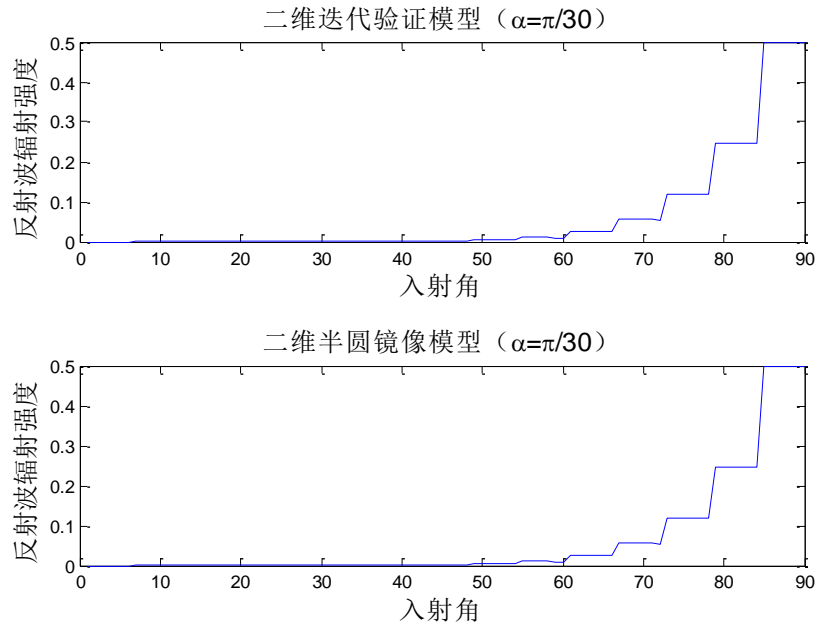


图 2.7 二维空间中两模型求解辐射强度的结果比较

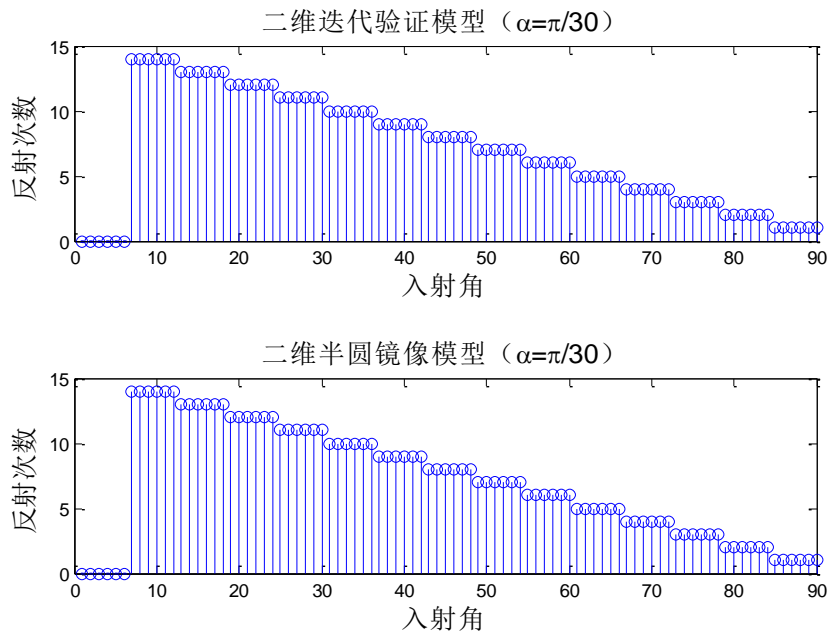


图 2.8 二维空间中两模型求解反射次数的结果比较



由图 2.7 所示，二维空间中，两模型的求解得到辐射强度曲线形状一致，计算两者之间的最大误差不超过 $10^{-17}$ ，而由图 2.8 所示，两模型求解得到反射次数结果完全相同，可见半圆镜像模型的可信度是非常高的。

三维空间中半圆柱镜像模型和迭代验证模型得出的反射波辐射强度进行比较（以 $\alpha = \pi/30$ 为例），见图 2.9，由于三维情况下反射次数和二维时相同，所以在此不做比较。

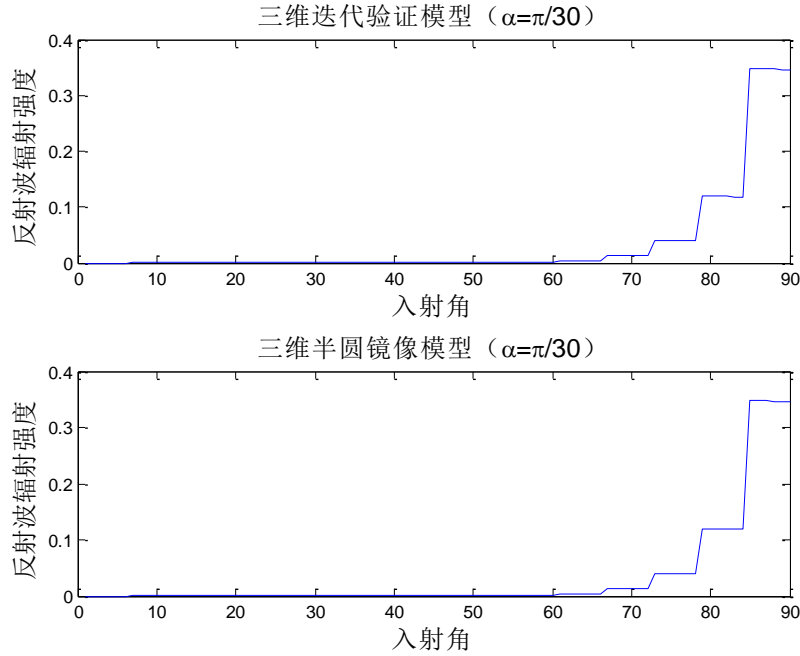


图 2.9 三维空间中两模型求解辐射强度的结果比较

由图 2.9 所示，在三维情况下，两模型求解得到辐射强度的变化曲线形状也完全相同，计算其最大误差不超过 $10^{-21}$ ，可见在三维空间中的半圆柱镜像模型可信度也非常高。

## 2.4 尖劈反射体的设计

上述的理论与仿真是为了设计合理的尖劈形吸波材料提供设计依据，尖劈形吸波材料的主要的性能指标为反射率 $\rho$ ，即：

$$\rho = E\left(\frac{P_n}{P_0}\right) \quad (2.59)$$

也就是对不同方向、偏移射入尖劈空隙的波束的剩余能量与入射能量之比求期望。由于尖劈反射辐射波的情况较为复杂，不便于进行理论分析。因此这里进行仿真计算，直接采用统计平均的方法计算不同几何外形尖劈的平均反射率 $\rho$ 。

由前述理论推导结论可以分析，当辐射能量从尖劈顶点处进入尖劈空隙时，反射率与 $\alpha$ 相关，当从任意位置进入尖劈空袭时，反射率与 $\alpha$ 相关的同时，也与 $H$ 相关，仿真发现，当 $H$ 变化时，对 $\rho$ 的影响不大。这里主要呈现不同的 $\alpha$ 时的平均反射率。如图 2.10 所示。

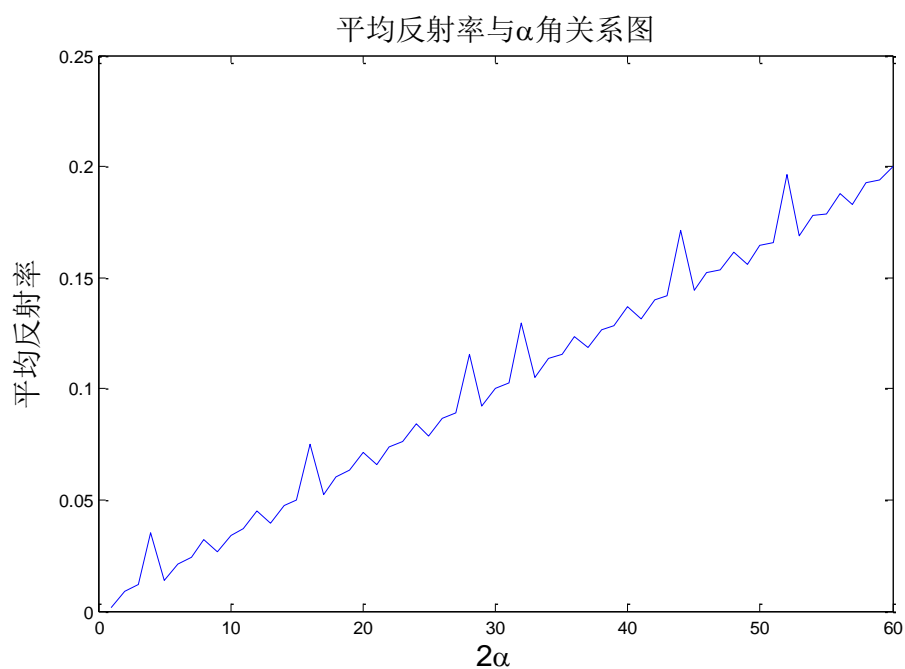


图 2.10 尖劈顶角  $\alpha$  不同时的平均反射率  $\rho$

可以得到如下结论：

$\alpha$  取值越小，尖劈的反射率  $\rho$  越低，因此尖劈的设计应当选取较小的  $\alpha$ 。考虑到生产工艺等问题，适当的选取较大  $H$  也是有意义的。否则，当  $H$  很小时，严格的  $\alpha$  很小的尖劈形吸波材料很难制造。

为了直观表现电磁波经尖劈型吸波材料对电磁波能量的吸收，设计了尖劈型吸波体吸波功能演示动画，如图 2.11 和图 2.12 所示。

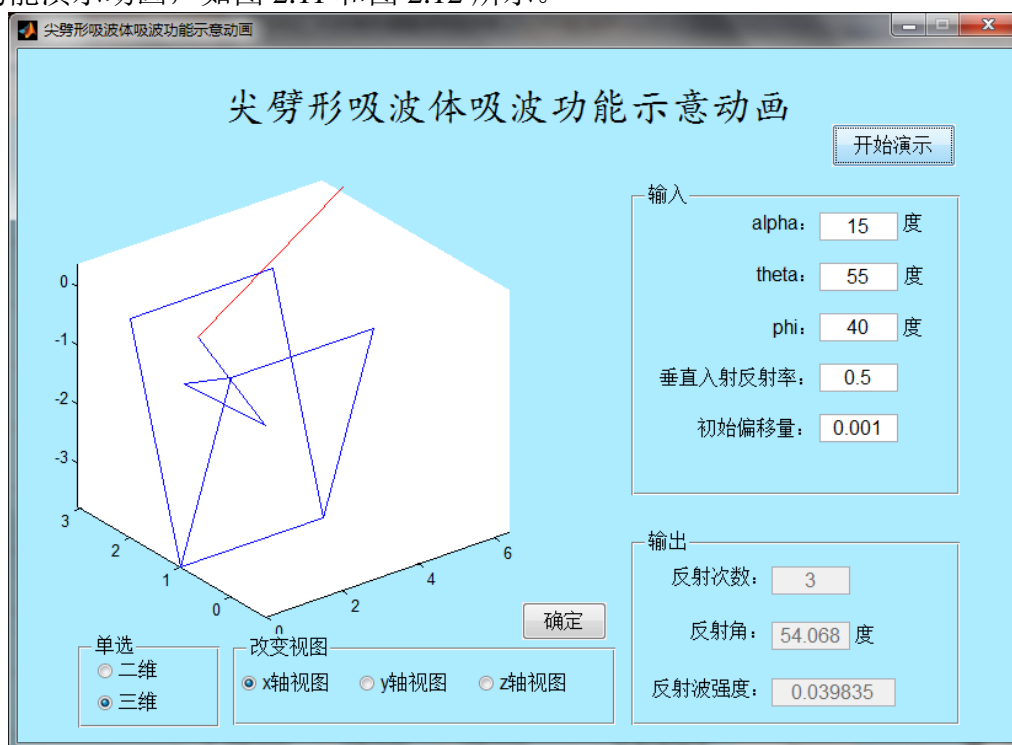


图 2.11 尖劈形吸波体三维情况的演示界面

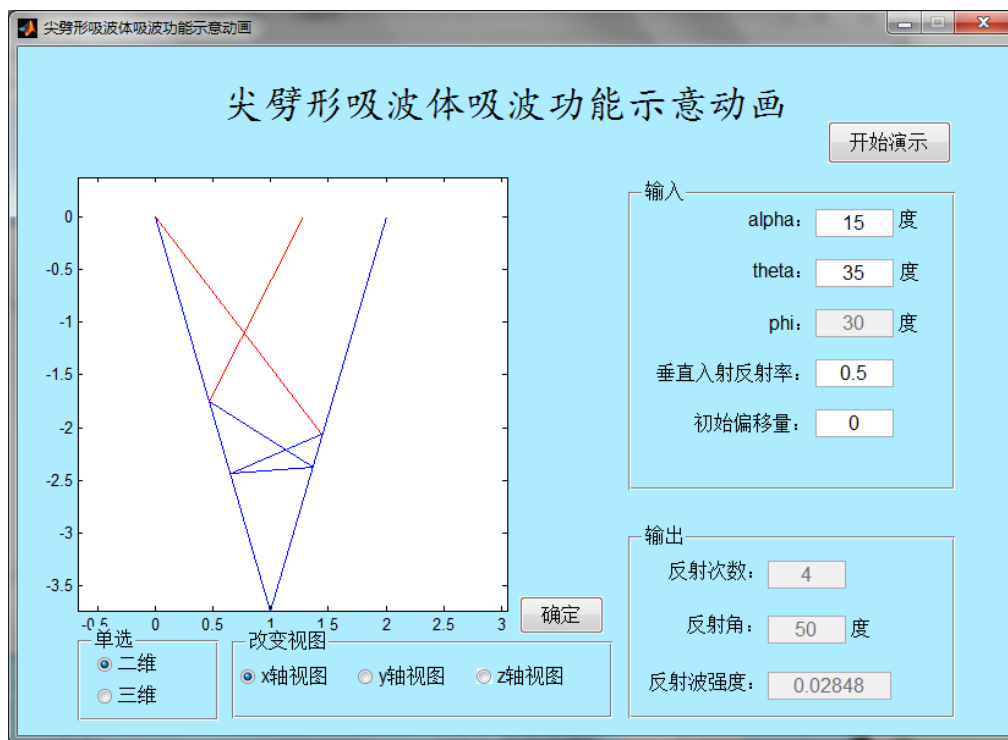


图 2.12 尖劈形吸波体二维情况的演示界面

### 3 导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能研究

#### 3.1 模型的分析与准备

##### 3.1.1 模型的分析

微波暗室中所有 6 个面的墙壁由高效吸波材料铺成，当目标模拟器发射辐射波时，一部分直射进入静区内，被导引头强烈感应，且只有直射辐射波具有模拟目标的作用。其它的经墙壁的衰减反射进入到静区的辐射波，对直射波产生了干扰。所以微波暗室应尽可能减小反射波的干扰，为测试导引头提供良好的测试条件。

视在天线在  $P$  点沿  $PQ$  方向形成一个余弦辐射体，本问需要研究静区接收直射的辐射强度与反射强度的比例，能量从视在天线直接辐射到静区的视作直接吸收，静区不再反射能量出来。而能量辐射到墙面的情况的问题较为复杂，如果采用常规的离散化思想处理，那么一束能量射线到墙面之后将形成对应的一个余弦辐射体，需要将这个余弦辐射体进一步做离散化处理，若干次反射之后，这会形成一个组合爆炸问题，导致计算上的不可行，因此需要设计可以计算的模型来研究这一问题。

对于直接辐射到静区上的能量，直接对视在天线形成的余弦辐射体进行离散化处理后即可计算，对于反射到静区上的能量，本文形成两种模型来研究这一问题。

模型一为能量分布估计模型，在这一模型中，我们将视在天线辐射出的能量分为两部分，第一部分为从视在天线直射被静区吸收以及其他吸波墙面直接消耗的能量，通过这一步的分析可以精确估计静区直接吸收的能量以及经吸波墙面消耗后剩余的能量，对于静区接收的经吸波墙面反射的能量大小的估计问题，将之等价为剩余能量在吸波墙面各个区域的分配的问题，首先分析当吸波墙面反射率为 1 和 0 时两种极端情况时，墙面各个区域对能量的分配问题，发现当墙面反射率为 1 时，剩余能量分配将呈现均匀分配的情况，而当墙面反射率为 0 时，剩余能量的分配可以近似等价为一个镜像视在天线发射剩余能量，形成一个余弦辐射体，尔后墙面各部分将剩余能量一次性完全消耗。当反

射率介于 0 与 1 之间时，假定其为上述两种情况的综合，即一部分能量被各个吸波墙面均匀消耗，另一部分能量相当于在镜像视在天线处发射一次性被各吸波墙面吸收。通过这样的简化与假设，可以避免独立分析多个离散化后的余弦辐射体，避免组合爆炸问题。

但是，当视在天线的发射功率改变时，会影响辐射线在微波暗室内的有效反射次数，模型一不能够考虑这一问题，

模型二基于 Monte Carlo 思想，设想了一种全新的随机反射法则，产生大量给定初值的能量波束射入暗室空间，按照随机反射的法则在暗室空间中来回反射，直到射入静区终止，当实验次数足够多时，将得到接近真实的求解结果。

由题意假设，视在天线反射功率的强度分布满足余弦辐射体，而每一束辐射波照射到四周墙壁上，又以反射波线为主轴，产生一个新的辐射体，可以看出其辐射强度矢径的终点轨迹并非一个标准的球体，而是以反射角为偏转角发生偏转，我们称此为侧倾余弦反射体，见图 3.1。

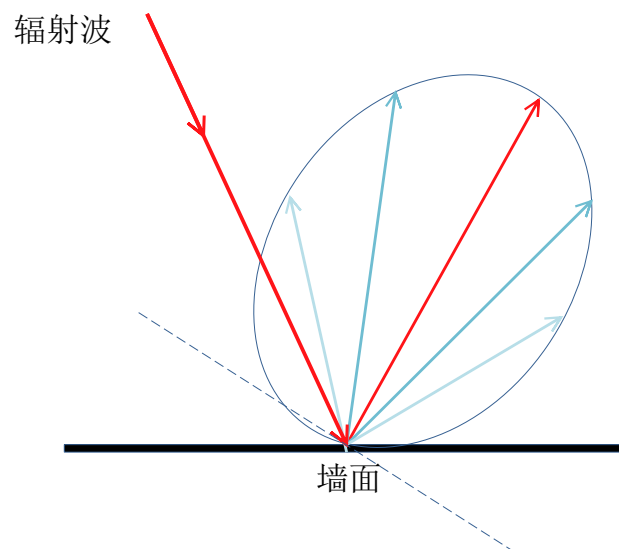


图 3.1 辐射波反射过程中产生的侧倾余弦辐射体

由此可知，一次辐射源发出的辐射波照射在墙面上时，墙上的每一点又成为一个新的余弦辐射体，除与辐射源连线垂直于墙面的点产生的余弦辐射体为无偏移的正球体，其他都为侧倾余弦辐射体，具体情况见图 3.2。以至于暗室中任一方向上的辐射波强度难以计算，无数子辐射波强度相互叠加，其变化规律极为复杂。

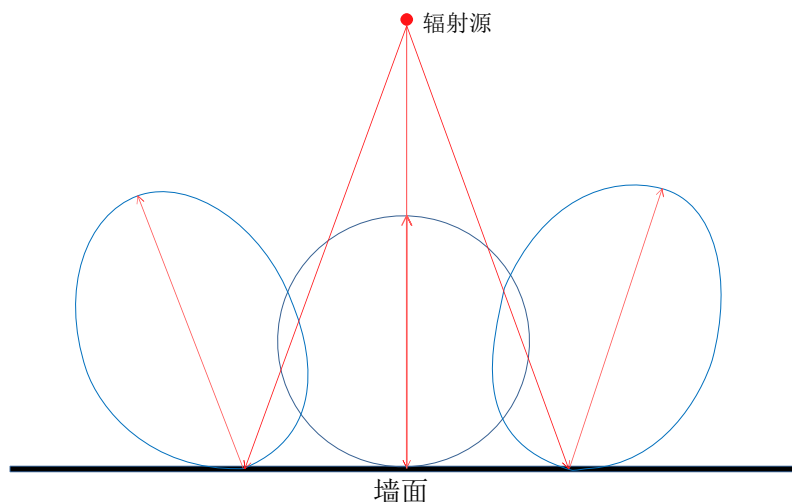


图 3.2 暗室空间中反射波线的具体情况

### 3.1.2 辐射波线的离散化

由于辐射源发出的辐射波在整个暗室空间中连续存在，充满整个空间，给实际计算带来不小的难度，由此我们引出能量波束的概念。

能量波束

我们将辐射源发出的余弦辐射体空间离散化，按球坐标分成若干份，定义一份的主方向及其辐射的能量为能量波束。

在球坐标系中，一个方向可由方位角  $\varphi$  和高低角  $i$  两个角确定，且在此方向上的辐射强度  $I$  也可以由包含方位角  $\varphi$  和俯仰角  $i$  的某个函数  $I(i, \varphi)$  表示，又由于一次辐射源辐射强度  $I$  轴对称，所以  $I(i, \varphi) = I(i)$ ，特别在余弦辐射体中，

$$I(i) = I_N \cos i \quad -\frac{\pi}{2} \leq i \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.1)$$

由于  $I(i)$  为连续变化的函数，所以对应一个极微小的立体角  $d\omega$ ，在此立体角内，辐射强度  $I$  可以近似看成一个常数。

为此我们首先将方位角  $\varphi$  和俯仰角  $i$  进行离散化，在  $[0, 2\pi]$  范围内对  $\varphi$  取  $N_\varphi$  份，在  $[-\pi/2, \pi/2]$  范围内对  $i$  取  $N_i$  份，得到了  $N_\omega$  个立体角  $d\omega$ ，此立体角内辐射波线看成一条能量波束，所以在以辐射源为中心的坐标系内，共发出  $N_\omega$  条能量波束，其中

$$N_\omega = N_\varphi \times N_i, \quad (3.2)$$

得到的每个立体角  $d\omega$  中的辐射强度  $I$  为此角内俯仰角  $i$  中心值的函数 ( $i_-, i_+$  为上下边界值)，即

$$I_i = I_N \cos i = I_N \cos \frac{i_- + i_+}{2}, \quad (3.3)$$

对于立体角  $d\omega$ ，其所具有的能量为

$$\begin{aligned} d\Phi &= I_i \cdot d\omega \\ &= I_i \cdot \sin i \, di \, d\varphi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

离散化以后

$$\begin{aligned} d\Phi &= I_i \cdot \sin i \cdot \frac{\pi}{N_i} \cdot \frac{2\pi}{N_\varphi} \\ &= \frac{2\pi^2 I_n \cos i \sin i}{N_\omega}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

最终一条能量波束所具有的能量为

$$d\Phi = \frac{\pi^2 I_n \sin 2i}{N_\omega}. \quad (3.6)$$

### 3.1.3 坐标系变换

由于描述余弦辐射体在各个方向上辐射强度的矢径变化需要用到球坐标系，而描述整个微波暗室空间最好用直角坐标系（见图 3.3），所以必须对两种坐标系进行变换。

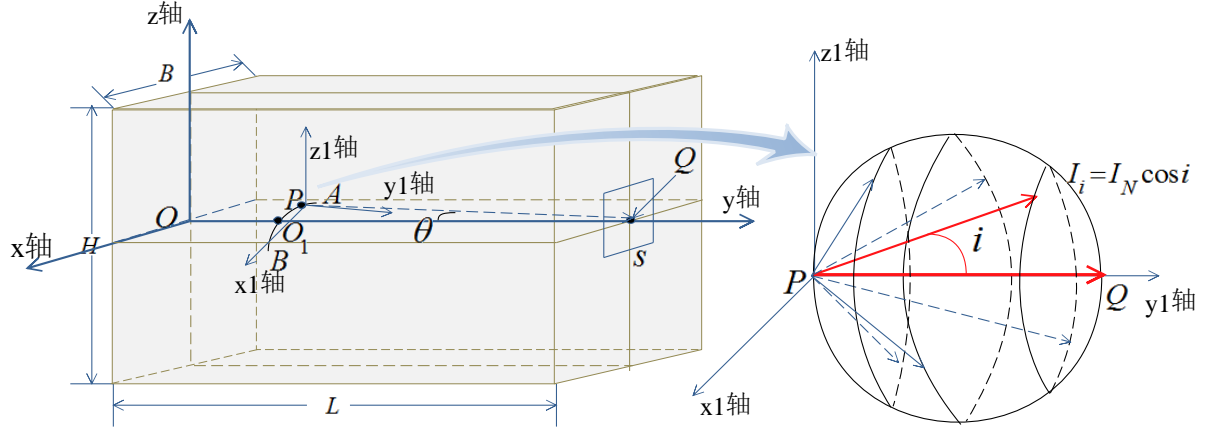


图 3.3 描述余弦辐射体的球坐标系和暗室直角坐标系

### 3.1.3.1 坐标旋转变换

在球坐标系中，给定方位角  $\varphi$  和俯仰角  $i$  以及半径  $d$  即可确定空间中任一点，转换到直角坐标系中其三维坐标为

$$(d \sin i \cos \varphi, d \cos i, d \sin i \sin \varphi),$$

当  $d$  为常数时，也可以确定一条能量波束，设能量波束反射产生的余弦辐射体主轴在球坐标系中为  $Y$  轴方向，即

$$\vec{m} = (0, e, 0),$$

通过两次旋转变换（一次绕  $Z$  轴旋转和一次绕  $X$  轴旋转），将主轴方向转化为在暗室空间直角坐标系中的方向

$$\vec{n} = (f, g, h),$$

辐射源（即在球坐标系中  $d = 0$  时的原点坐标）在直角坐标系中坐标为

$$P = (a, b, c),$$

为此需要进行一次坐标平移变换，使  $P$  点为坐标原点，即

$$P = (0, 0, 0).$$

1) 绕  $Z$  轴的旋转变换

首先求得旋转角  $\theta_z$  为

$$\theta_z = \arccos \frac{g}{\sqrt{f^2 + g^2}}, \quad (3.7)$$

再根据绕  $Z$  轴逆时针旋转变换公式

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

由此得到了新的坐标系  $O'$ 。

2) 绕  $X$  轴的旋转变换

首先求得旋转角  $\theta_x$  为

$$\theta_x = \arccos \frac{g}{\sqrt{h^2 + g^2}}, \quad (3.9)$$

再根据绕  $X$  轴逆时针旋转变换公式

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

由此得到了新的坐标系  $O''$ 。

### 3.1.3.2 坐标平移变换

最后，需将辐射源所在原点平移到  $P=(a,b,c)$  点，进行平移变换

$$\begin{bmatrix} X''' \\ Y''' \\ Z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

最终通过公式

$$\begin{bmatrix} X''' \\ Y''' \\ Z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

将余弦辐射体所在直角坐标系  $O$  变换为暗室空间的直角坐标系  $O'''$ 。

### 3.1.4 波束能量透射墙面的判断

判断某一波束能量透射在哪个墙面上是问题而的基本问题，按如下方法计算。  
每一面墙的反点坐标计算

(1) 前墙面，  $y=L$ ，

$$d = \frac{L - y_0}{-\sin i \sin \varphi \sin \theta_x - \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \cos \theta_x + \cos i \cos \theta_z \cos \theta_x}, \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} x = d \sin i \cos \varphi \cos \theta_z + d \cos i \sin \theta_z + x_0 \\ y = -d \sin i \sin \varphi \sin \theta_x - d \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \cos \theta_x + d \cos i \cos \theta_z \cos \theta_x + y_0 \\ z = d \sin i \sin \varphi \cos \theta_x - d \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \sin \theta_x + d \cos i \cos \theta_z \sin \theta_x + z_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

当  $(x, y, z)$  满足  $x \in (-B/2, B/2)$ 、 $z \in (-H/2, H/2)$  条件时我们认为此反射点位于  $y=L$  前面墙上，此时有

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = L \\ z_1 = z \end{cases} \quad (3.15)$$

此次反射辐射波的入射角为

$$\theta_{in} = \arccos \frac{|y_1 - y_0|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}, \quad (3.16)$$

反射线的方向为

$$(x_1 - x_0, -(y_1 - y_0), z_1 - z_0),$$

(2) 后墙面，  $y=0$ ，

$$d = \frac{-y_0}{-\sin i \sin \varphi \sin \theta_x - \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \cos \theta_x + \cos i \cos \theta_z \cos \theta_x}, \quad (3.17)$$

通过上面公式可计算  $(x, y, z)$ ，当  $(x, y, z)$  满足  $x \in (-B/2, B/2)$ 、 $z \in (-H/2, H/2)$  条件时

我们认为此反射点位于  $y=0$  后面墙上，此时有

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \\ z_1 = z \end{cases} \quad (3.18)$$

此次反射辐射波的入射角为

$$\theta_{in} = \arccos \frac{|y_1 - y_0|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}, \quad (3.19)$$

反射线的方向为

$$(x_1 - x_0, -(y_1 - y_0), z_1 - z_0),$$

(3) 左墙面,  $x = -B/2$ ,

$$d = \frac{-B/2 - x_0}{\sin i \cos \varphi \cos \theta_z + \cos i \sin \theta_z} \quad (3.20)$$

计算  $(x, y, z)$ , 当  $(x, y, z)$  满足  $y \in (0, L)$ 、 $z \in (-H/2, H/2)$  条件时我们认为此反射点位于  $x = -B/2$  左面墙上，此时有

$$\begin{cases} x_1 = -B/2 \\ y_1 = y \\ z_1 = z \end{cases} \quad (3.21)$$

此次反射辐射波的入射角为

$$\theta_{in} = \arccos \frac{|x_1 - x_0|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \quad (3.22)$$

反射线的方向为

$$(-(x_1 - x_0), y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

(4) 右墙面,  $x = B/2$ ,

$$d = \frac{B/2 - x_0}{\sin i \cos \varphi \cos \theta_z + \cos i \sin \theta_z}, \quad (3.23)$$

计算  $(x, y, z)$ , 当  $(x, y, z)$  满足  $y \in (0, L)$ 、 $z \in (-H/2, H/2)$  条件时我们认为此反射点位于  $x = B/2$  右面墙上，此时有

$$\begin{cases} x_1 = B/2 \\ y_1 = y \\ z_1 = z \end{cases} \quad (3.24)$$

此次反射辐射波的入射角为

$$\theta_{in} = \arccos \frac{|x_1 - x_0|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}, \quad (3.25)$$

反射线的方向为

$$(-(x_1 - x_0), y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

(5) 上墙面,  $z = H/2$ ,

$$d = \frac{H/2 - z_0}{\sin i \sin \varphi \cos \theta_x - \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \sin \theta_x + \cos i \cos \theta_z \sin \theta_x}, \quad (3.26)$$

计算  $(x, y, z)$ , 当  $(x, y, z)$  满足  $x \in (-B/2, B/2)$ 、 $y \in (0, L)$  条件时我们认为此反射点位于



$z = H/2$  上面墙上，此时有

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = H/2 \end{cases} \quad (3.27)$$

此次反射辐射波的入射角为

$$\theta_{in} = \arccos \frac{|z_1 - z_0|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}, \quad (3.28)$$

反射线的方向为

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, -(z_1 - z_0))$$

(6) 下墙面， $z = -H/2$ ，

$$d = \frac{-H/2 - z_0}{\sin i \sin \varphi \cos \theta_x - \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \sin \theta_x + \cos i \cos \theta_z \sin \theta_x}, \quad (3.29)$$

计算  $(x, y, z)$ ，当  $(x, y, z)$  满足  $x \in (-B/2, B/2)$ 、 $y \in (0, L)$  条件时我们认为此反射点位于  $z = -H/2$  下面墙上，此时有

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = -H/2 \end{cases} \quad (3.30)$$

此次反射辐射波的入射角为

$$\theta_{in} = \arccos \frac{|z_1 - z_0|}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}, \quad (3.31)$$

反射线的方向向量为

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, -(z_1 - z_0))$$

### 3.2 加权能量分布模型

加权能量分布模型首先将某一时刻视在天线发射的微波能量按照余弦辐射体进行离散化处理，计算静区吸收的功率以及经过各个吸波墙面一次反射后剩余的能量。由于问题二要求计算静区直接接收的功率与经过反射接收的功率的比值。因此能量分布估计模型关键的在于研究经过吸波墙面一次反射后剩余的辐射波辐射的功率在微波暗室中是如何分布的。题目并不需要区分能量是多次反射还是一次反射进入静区的，加权能量分布模型从总体着手，将剩余的能量加权分配，降低模型计算的复杂度。所谓加权，即在剩余能量分配时首选研究反射率突变为  $\rho = 0$  和  $\rho = 1$  时反射能量的在墙面的分配，尔后加权计算  $\rho \in (0, 1)$  时剩余能量在墙面各个吸波材料处的分配。藉此可以计算静区接收到的反射能量。

通过计算  $t$  时刻静区接收到的直射能量  $P_{S,t}$  与经过反射后静区接收到的能量  $P'_{S,t}$  计算  $\gamma_t$  如下：

$$\gamma_t = \frac{P'_{S,t}}{P_{S,t}}, \quad (3.32)$$

下面分别阐述  $P_{S,t}$  与  $P'_{S,t}$  的计算。首先需要阐述辐射波线与暗室吸波墙面交点的计算以及辐射波线反射后剩余能量的计算。

### 3.2.1 静区直接接收功率 $P_{S,t}$ 以及一次反射后剩余的能量 $P_{R,t}$ 的计算

在 0-4s 中将时间做  $K$  等分, 其中  $t = \frac{k}{K}(4s)$ , 依据  $t$  计算  $\theta_t = \frac{k}{K} \cdot \frac{\pi}{8}$ , 并计算  $t$  时  $P$  点坐标的位置  $(x_t, y_t)$ 。

将视在天线辐射的能量按照球面坐标  $\varphi, i$  两个方向做  $M$  与  $N$  次等分, 即有  $\varphi_m = 2\pi \frac{m}{M}, i_n = \frac{\pi}{2} \frac{n}{N}$ 。其中  $m \in [0, M]$ 。因此, 对于时刻  $t$ , 静区直接接收到的能量有:

$$P_{S,t} = \sum_{\{m,n,t\} \in Q} P_{m,n,t}, \quad (3.33)$$

其中,  $\{m,n,t\} \in Q$  表示  $t$  时刻, 视在天线  $m, n$  方向的能量可以直射到静区上。具体按照如下流程计算:

Step1: 赋初值  $m=1$ 。

Step2: 赋初值  $n=1$ 。

Step3: 针对  $t$  时刻确定  $P$  的位置  $(x_t, y_t)$ , 以  $PQ$  为辐射主方向, 对余弦辐射半球进行离散化处理, 产生某一位置  $(\varphi_{m,t}, i_{n,t})$  的能量波束, 并计算该能量波束的功率  $P_{m,n,t}$ , 将其计入总功率  $P_{T,t}$ 。 $P$  的坐标以及能量波束的方向的计算按照模型准备中提供的方法计算。

Step4: 按模型准备提供的方法计算能量波束与暗室墙面相交的位置:

A. 如果交点在静区内, 则将  $P_{m,n,t}$  记入静区直接吸收的能量  $P_{S,t}$ 。

B. 如果交点在静区外, 则将能量波束经反射后还剩余的功率  $\rho \cos \alpha P_{m,n,t}$  记入剩余总功率  $P_{R,t}$ 。

Step5: 取  $n = n + 1$ , 返回 Step3, 计算余弦辐射体另外一个方向能量波束对静区直接吸收的功率  $P_{S,t}$  和一次反射后剩余总功率  $P_{R,t}$  的影响。当  $n = N$ , 取  $m = m + 1$  返回 Step2。当  $m = M$ , 终止计算。

上述计算过程中, 由模型的准备中提供的相关准备来计算  $P_{m,n,t}$ ,  $\rho \cos \alpha P_{m,n,t}$ 。

### 3.2.2 一次反射后剩余功率的分配的分析以及 $P'_{S,t}$ 的计算

当能量从  $P$  点以余弦辐射体的形式射入各个墙面之后, 经反射剩余的能量  $P_{R,t}$  在各个墙面形成了无数个余弦辐射体, 直接分析计算非常困难。为简化此时的分析与计算, 考虑两种极端情况:

A. 视在天线的能量经直射在墙面形成无数个余弦辐射体后, 墙面的反射率  $\rho$  突变为  $\rho=1$ 。即吸波材料会尽最大的可能将能量反射出去。相当于微波暗室内进入了一种近似于由混沌到均匀的状态, 微波暗室墙面中几乎每个点都形成一个余弦辐射体, 向不同方向辐射能量, 每个方向接收到能量后继续向其他方向反射, 由于  $\rho=1$ , 导致墙面接收到辐射能量后各个方向尽可能将能量辐射至其他方向, 在这个过程中, 由于余弦辐射体能量辐射方向很广, 加之墙面一次性吸收的能量很少, 微波暗室的各个位置接收到能量经过多次反射会愈来愈接近平均值, 即剩余的能量在微波暗室内平均分布。如图 3.4 所示; 因此, 若  $t$  时刻经一次反射剩余能量为  $P_{R,t}$ , 者有  $\rho=1$ :

$$P'_{S,t} \big|_{\rho=1} = \frac{s^2}{2BL + 2BH + 2LH} P_{R,t}, \quad (3.34)$$

其中,  $s$  为静区的边长,  $B, L, H$  分别为静区的宽, 长, 高。

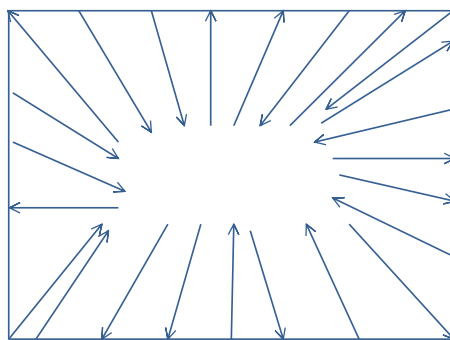


图 3.4  $\rho=1$  微波暗室内各个墙面不断接收与辐射能量最终达到均衡

B. 视在天线的能量经直射在墙面形成无数个余弦辐射体后, 墙面的反射率  $\rho$  突变为  $\rho=0$ 。墙面上各个余弦辐射体吸收到能量后, 辐射其剩余的能量, 这些能量将被墙面一次性吸收。分析每个余弦辐射体辐射能量的情况, 如果一个新的余弦辐射体附近的余弦辐射体能量比较密集, 那么产生这个余弦辐射体的反射点的关于  $PQ$  镜像处将会吸收到较多的能量, 如图 3.5 所示:

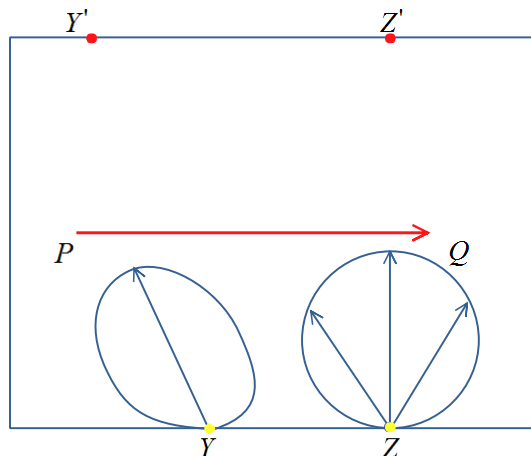


图 3.5  $\rho=0$  反射形成的余弦辐射体镜像处吸收到较多的能量

从图中可以观察到,  $Z$ 、 $Y$  点余弦辐射体辐射的能量主要被其镜像  $Z'$ 、 $Y'$  接收。

同理, 如果一个新的余弦辐射体附近能量比较稀疏, 那么产生这个余弦辐射体的反射点的镜像处将会吸收到较少的能量。

因此, 剩余能量的分配相当于在  $P$  点的镜像处做了一个新的视在天线  $P'$  这一视在天线将剩余的能量  $P_{R,t}$  按照一个余弦辐射体分布至各处。如图 3.6 所示:

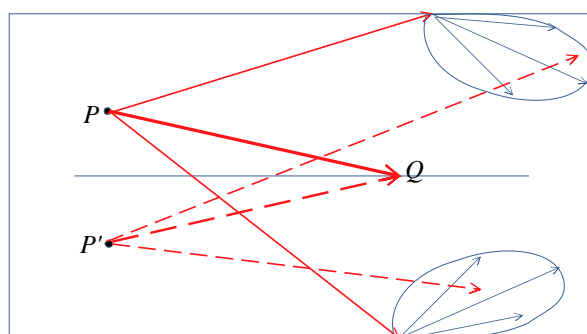


图 3.6  $\rho=0$  新的余弦辐射体镜像近似等价于  $P$  点的镜像  $P'$  将剩余能量射出

当  $P$  的坐标为  $(x_t, y_t)$  时,  $P'$  的坐标为:

$$(x'_t, y'_t, 0) = (-R \sin \theta_t, L - b + R \cos \theta_t, 0), \quad (3.35)$$

类似于 3.2.1, 按照如下算法计算静区接收到的能量  $P'_{S,t} |_{\rho=0}$ :

静区直接接收到的能量有:

$$P'_{S,t} |_{\rho=0} = \sum_{\{m,n,t\} \in U} P'_{m,n,t}, \quad (3.36)$$

其中,  $\{m,n,t\} \in U$  表示  $t$  时刻, 镜像视在天线的镜像在  $m, n$  方向的能量可以直射到静区镜像上。具体按照如下流程计算:

Step1: 赋初值  $m=1$ 。

Step2: 赋初值  $n=1$ 。

Step3: 针对  $t$  时刻确定  $P'$  的位置  $(x_t, y_t)$ , 以  $P'Q'$  为辐射主方向, 对余弦辐射半球进行离散化处理, 产生某一位置  $(\varphi_{m,t}, i_{n,t})$  的能量波束, 并计算该能量波束的功率  $P'_{m,n,t}$ 。

Step4: 计算能量波束与吸波墙面相交的位置:

如果交点在静区内, 则将  $P'_{m,n,t}$  记入静区直接吸收的能量  $P'_{S,t} |_{\rho=0}$ 。

Step5: 取  $n=n+1$ , 返回 Step3。当  $n=N$ , 取  $m=m+1$  返回 Step2。当  $m=M$ , 终止计算。

其中  $P'_{m,n,t}$  为剩余能量在  $P'$  点形成的镜像余弦辐射体的能量, 因此有

$$P'_{m,n,t} = \frac{P_{R,t}}{P_{T,t}} P_{m,n,t}, \quad (3.37)$$

C. 当  $\rho \in (0,1)$  时, 设此时静区吸收的剩余的能量为两种极端情况的加权, 有:

$$P'_{S,t} = \rho P'_{S,t} |_{\rho=1} + (1-\rho) P'_{S,t} |_{\rho=0}, \quad (3.38)$$

因此, 可以计算能量分布模型下各个时刻的比例:

$$\gamma_t = \frac{P'_{S,t}}{P_{S,t}} = \frac{\rho P'_{S,t} |_{\rho=1} + (1-\rho) P'_{S,t} |_{\rho=0}}{\sum_{\{m,n,t\} \in Q} P_{m,n,t}}, \quad (3.39)$$

### 3.2.3 加权能量分布模型下静区到直射能量与总能量的功率比 $\gamma_t$

按照能量分布模型计算  $\rho$  取值不同时的各个时刻的  $\gamma_t$  如图 3.7 所示:

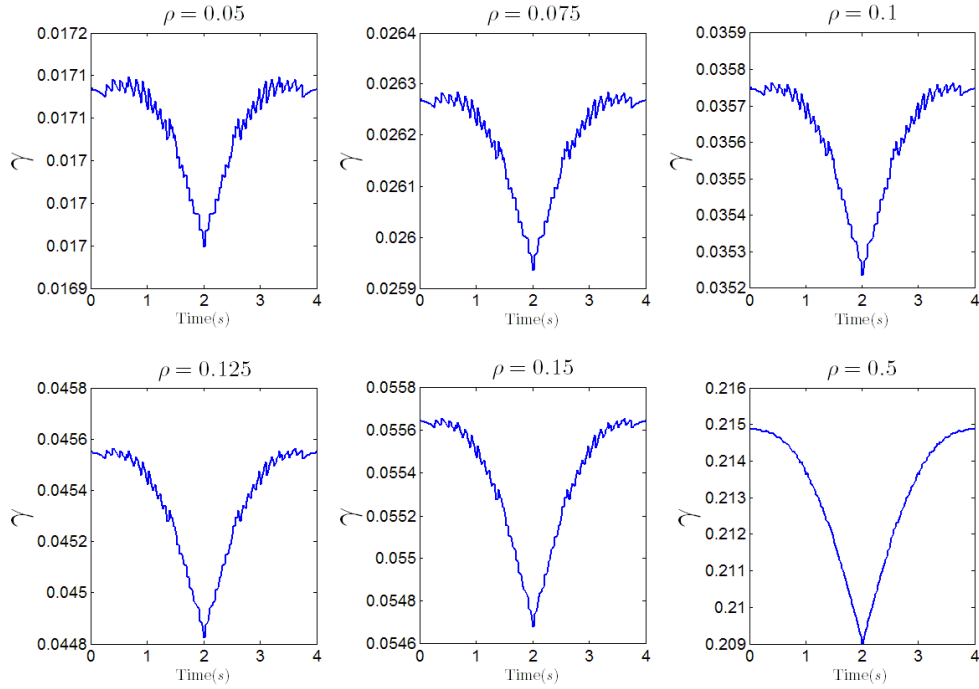


图 3.7 加权能量分布模型中不同  $\rho$  取值时  $\gamma$  的值

由上图分析可以看到，在加权能量分布模型中：

当  $\rho = 0.05$  时，满足  $\gamma_t \leq 0.03$  的要求，当  $t = 2s$  时，能够取到  $\gamma_t$  最小， $\min(\gamma)|_{\rho=0.05} = 0.0169$ 。

当  $\rho = 0.5$  时，不满足  $\gamma_t \leq 0.03$  的要求，当  $t = 2s$  时，能够取到  $\gamma_t$  最小， $\min(\gamma)|_{\rho=0.5} = 0.2$ 。

在加权能量分布模型中，视在天线在最中间时， $\gamma_t$  取值最小。当  $\rho \leq 0.075$  时，可以满足  $\gamma_t \leq 0.03$  的要求。

### 3.3 基于 Monte Carlo 方法的随机反射模型

#### 3.3.1 模型假设

- 1) 当某一根能量射线斜入射到墙面而产生反射时，反射波按照余弦辐射体辐射规律分布，其最强方向为能量射线的反射方向。
- 2) 经过多次反射后辐射波的功率已经十分微弱，可以忽略不计。
- 3) 不考虑辐射波在空间中传播时的损耗。
- 4) 当辐射波反射时，其能量除了被墙体吸收外，其余全部反射。

#### 3.3.2 随机反射模型

##### 3.3.2.1 能量波束的随机反射

为了简化计算，我们运用将连续变量离散化处理的方法，将充满整个空间的辐射波线看成对应的方位角  $\varphi$  和俯仰角  $i$  的能量波束，所有能量波束的功率为常值。

但实际情况中能量波束在墙面反射时，其反射点仍会产生一个侧倾余弦辐射体，向外射出连续存在辐射波。这样离散后的变量再度连续化。在无数次反射后，辐射波线仍

充满整个暗室空间，难以计算各个方向上的辐射功率。

所以我们采取随机反射的处理办法，认为能量波束的反射不服从下述两种情况：

- 1) 严格的反射定律，即反射角必等于入射角。
- 2) 侧倾余弦辐射体强度分布的扩散反射，即一条能量波束反射后又变为充满整个暗室空间的辐射波。

### 随机反射法则

认为能量波束的反射服从以下随机反射法则：

- 1) 能量波束反射后仍为一条能量波束。
- 2) 反射后的方向可能是暗室空间中的任一方向。
- 3) 射向空间中任一方向的概率分布和任一方向的辐射强度分布相同（矢径终点轨迹即为侧倾余弦辐射体），一次辐射源射出能量波束的随机方向服从均匀分布。
- 4) 每次反射损失的能量服从反射率损失法则。
- 5) 从一次辐射源射出的能量波束的辐射功率服从余弦辐射体的辐射规律。

采用如此的处理方法体现了 Monte Carlo 思想，大量随机事件的结果反映了事物的真实情况，我们利用计算机软件进行仿真实验，产生大量给定初值的能量波束射入暗室空间，按照随机反射的法则在暗室空间中来回反射，直到射入静区终止，当实验次数足够多时，将得到接近真实的求解结果。

这里尤其需要注意的是，一次辐射源射出能量波束的随机方向服从均匀分布，而其功率却服从余弦辐射体的规律，自第一次反射后，随机方向的确定服从随机反射法则，而其功率却不因随机方向的选取而改变，从而使直射进入静区的辐射功率尽可能服从真实情况。

#### 3.3.2.2 确定能量波束的概率密度函数的确定

由于反射产生的侧倾余弦辐射体为不规则体，所以其辐射强度分布难以用函数准确描述，从而随机反射的概率分布也难以用函数准确描述，所以我们采用近似等效方法，侧倾余弦辐射体等效为正余弦辐射体，此正余弦辐射体的主轴即为服从反射定律的反射方向，具体情况见图 3.8，从而可以得到随机反射的概率分布为

$$p(i, \varphi) = p(i) = KI_N \cos i. \quad (3.40)$$

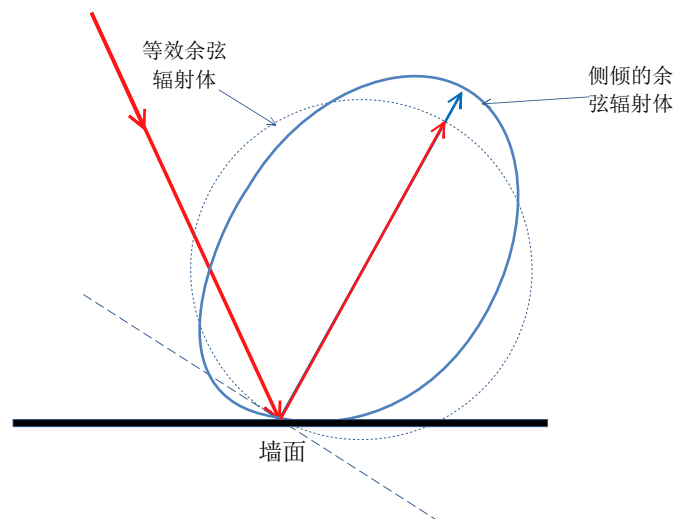


图 3.8 将侧倾余弦辐射体等效为正余弦辐射体

其中，有两种情况需要特殊考虑，基于处于此范围方向的概率值非常低的事实，我

们进行以下处理：

1) 对于处于墙面以下的部分,我们假定当产生的随机方向为在此范围时，重新产生一个随机方向。

2) 对于余弦辐射体位于反射点所在法平面以下的部分，在等效的过程中概率值变为 0，我们默认不可能产生此范围的随机方向。

为使随机产生的能量波束的方向在统计意义上接近余弦辐射体，设计如下概率密度，由：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(i, \varphi) di d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \cdot I_N \cos i di d\varphi = 1, \quad (3.41)$$

我们求得

$$K = \frac{1}{2\pi I_N}, \quad (3.42)$$

由此确定随机方向的概率密度函数为

$$p(i, \varphi) = p(i) = \frac{\cos i}{2\pi}. \quad (3.43)$$

该概率密度函数能够体现各方向辐射功率的大小，辐射功率大方向得到选择的概率也大。

在实际操作中我们按均匀分布产生  $\varphi$ ，按  $p(i) = \cos i$  的概率分布生成  $i$ ，从而确定随机方向。

### 3.3.2.3 一次迭代过程及初始值的确定

#### 1) 一次迭代过程

能量波束在暗室空间中的反射过程，可以看成是一个迭代过程，我们在已知反射点

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

和反射的余弦辐射体主轴方向

$$\vec{n}_0 = (f_0, g_0, h_0),$$

确定的情况下，

随机生成  $i, \varphi$ ，其中  $i$  服从  $P(i)$  的概率密度函数， $\varphi$  服从  $(0, 2\pi)$  的均匀分布，由此确定能量波束的在球坐标系中的方向为（其中  $d$  为路经长）

$$\vec{l} = (d \sin i \sin \varphi, d \cos i, d \sin i \cos \varphi) \quad d \geq 0, \quad (3.44)$$

尔后，经过已知的两次旋转变换和一次平移变换（见 4.1.3），得到能量波束在暗室空间坐标系中的方向为

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} d \sin i \cos \varphi \cos \theta_z + d \cos i \sin \theta_z \\ -d \sin i \sin \varphi \sin \theta_x - d \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \cos \theta_x + d \cos i \cos \theta_z \cos \theta_x \\ d \sin i \sin \varphi \cos \theta_x - d \sin i \cos \varphi \sin \theta_z \sin \theta_x + d \cos i \cos \theta_z \sin \theta_x \end{bmatrix}^T,$$

其中

$$\theta_z = \arccos \frac{g_0}{\sqrt{f_0^2 + g_0^2}}, \quad (3.45)$$

$$\theta_x = \arccos \frac{g_0}{\sqrt{h_0^2 + g_0^2}}, \quad (3.46)$$

再由已知的方法确定反射墙面以及反射点（见 4.1.4），求得了新反射点

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1),$$

再利用反射定律（入射角等于反射角），求得新的反射的余弦辐射体主轴方向

$$\vec{n}_1 = (f_1, g_1, h_1),$$

至此一次迭代完成。

## 2) 初始值的确定

我们知道初始的  $P_0$  点应为  $AB$  弧上的  $P$  点，尽管其并非反射点，设  $\omega$  为视在天线的偏转角速度， $\eta$  为  $PQ$  和  $Y$  轴的夹角，则

$$\omega = \frac{\beta}{4}, \quad (3.47)$$

$$\eta = \begin{cases} \frac{\beta}{2} - \omega t & t \in [0, 2], \\ \omega(t-2) & t \in [2, 4], \end{cases} \quad (3.48)$$

可以求得  $P$  点坐标为

$$P = \begin{cases} (-R \sin \eta, L - R \cos \eta, 0) & t \in [0, 2], \\ (R \sin \eta, L - R \cos \eta, 0) & t \in [2, 4], \end{cases} \quad (3.49)$$

作为初始的  $P_0$ ，则  $PQ$  的方向可作为初始的主轴方向为

$$\vec{n} = \begin{cases} (R \sin \eta, R \cos \eta, 0) & t \in [0, 2], \\ (-R \sin \eta, R \cos \eta, 0) & t \in [2, 4]. \end{cases} \quad (3.50)$$

### 3.3.2.4 模型的建立与求解算法

设  $P_0$  为一次辐射源射出的能量波束的辐射功率，即

$$P_0 = (E + \frac{1}{4}Et) \cos i_{0j} \quad t \in (0, 4), \quad (3.51)$$

其中  $E$  为在  $A$  点辐射功率，在 0 到 4s 的时间内，视在天线由  $A$  运动到  $B$ ，辐射功率也有  $E$  增加到  $2E$ 。

在进行仿真实验中，我们考虑到能量波束进行多次反射，其辐射功率已经极低，继续运算没有意义，所以我们设定了反射次数的最大值限制。

假定我们共作了  $I$  次实验，发出了  $I$  条能量波束。对于第  $j$  次统计的情况，从辐射源直接发出的辐射波线，我们首先按照均匀概率选取辐射方位角  $\varphi_0$  和俯仰角  $i_0$ ，规定其初始功率  $P_{0j}$  为

$$|P_{0j}| = (E + \frac{1}{4}Et) \cos i_{0j} \quad t \in (0, 4), \quad (3.52)$$

$\angle P_{0j} = F(t, \varphi, i)$ ，由于起始能量波束必将从视在天线  $P$  点处产生， $P$  的位置与时间相关。因此， $\angle P_{0j}$  与  $t, \varphi, i$  相关，具体计算见模型准备。

则对于第  $j$  次统计的情况，得的入射角  $\theta_{ij}$  为

$$\theta_{ij} = \arccos \frac{\tilde{L}_{ij}}{L_{ij}}, \quad (3.53)$$

其中  $L_{ij}$  为路径长， $\tilde{L}_{ij}$  为  $L_{ij}$  在反射墙面法线方向上的分量。则可确定辐射波第  $i$  次反射的辐射功率为



$$P_{ij} = P_{i-1,j} \frac{\tilde{L}_{ij}}{L_{ij}} \quad i=1,2,\dots,I, \quad (3.54)$$

设某一辐射波最终经过  $K$  次反射后落入静区，那么其终止功率  $P_{out,j}$  为

$$\begin{aligned} P_{out,j} &= P_{Kj} \\ &= P_0 \prod_{i=1}^K \frac{\tilde{L}_{ij}}{L_{ij}} \\ &= (E + \frac{1}{4}Et) \prod_{i=1}^K \frac{\tilde{L}_{ij}}{L_{ij}}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

静区直接接收到的能量有：

$$P_{S,t} = \sum_{\{j\} \in Q} P_{out,j}, \quad (3.56)$$

其中， $\{j\} \in Q$  表示  $t$  时刻，视在天线能量可以直射到静区上即  $K=0$  的  $P_{out,j}$ 。

静区经反射接收到的能量有：

$$P'_{S,t} = \sum_{\{j\} \in R} P_{out,j}, \quad (3.57)$$

其中， $\{j\} \in R$  表示  $t$  时刻，视在天线能量可以直射到静区上即  $1 \leq K \leq T$  的  $P_{out,j}$ 。

最终求得静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比  $\gamma$  的值为

$$\gamma_t = \frac{P'_{S,t}}{P_{S,t}} = \frac{\sum_{\{j\} \in R} P_{out,j}}{\sum_{\{j\} \in Q} P_{out,j}}, \quad (3.58)$$

得到随机反射模型

算法的基本流程如下：

**Step1.**初始时刻  $t$ ，计算此时辐射源  $P$  点的位置坐标为初始坐标  $(x_0, y_0, z_0)$ ，余弦辐射体的主轴方向  $\vec{n}_0 = (f_0, g_0, h_0)$ 。

**Step2.**从一次辐射源产生第  $j$  条辐射线，按照均匀分布随机产生方位角  $\varphi$  和高低角  $i$ ，由  $\varphi, i$  生成其初始辐射功率  $P_{0j}$ ，若射入静区内，则累加静区直射总功率。

**Step3.**根据起始点坐标  $(x_0, y_0, z_0)$ 、 $\vec{n}_0 = (f_0, g_0, h_0)$  以及方位角  $\varphi$  和俯仰角  $i$ ，判断此辐射波的反射墙面，计算其反射点坐标位置  $(x_1, y_1, z_1)$ 、入射角  $\theta_{in}$  以及下一次反射的主轴方向的方向向量  $\vec{n}_1 = (f_1, g_1, h_1)$ 。

**Step4.**计算反射过程中能量波束的功率损耗，更新其功率值为  $P_{ij}$ 。

**Step5.**对于反射点的反射波，按照余弦概率随机产生新的  $i$ ，按均匀分布生成新的  $\varphi$ 。

**Step6.**重复 Step3，直到反射波落入静区或反射次数大于限制最大值。当落入静区时，记录此  $P_{i,j}$ 。

**Step7.**重复 Step2，直到达到最大计算次数。

**Step8.**通过统计落入静区的反射功率总和与直射功率总和，计算此刻位置的微波功率比值  $\gamma_t$ 。

**Step9.**以一定的步长改变时刻  $t$ ，重复 Step1 进行计算，直到  $t$  达到 4s，计算终止。

### 3.3.3 随机反射模型下静区到直射能量与总能量的功率比 $\gamma_t$

按照能量分布模型计算  $\rho$  取值不同时的各个时刻的  $\gamma_t$  如图 3.9 所示：

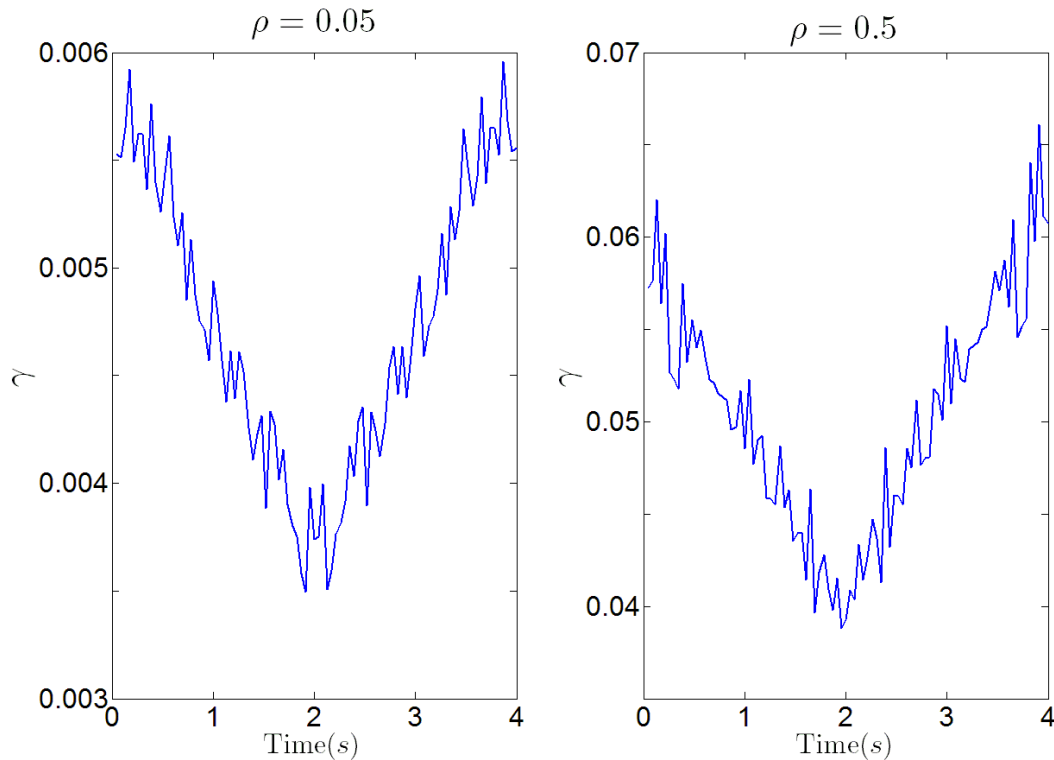


图 3.9 随机反射模型中不同  $\rho$  取值时  $\gamma$  的值

由上图分析可以看到，在随机反射模型中：

当  $\rho = 0.05$  时，满足  $\gamma_t \leq 0.03$  的要求，当  $t = 1.913s$  时，能够取到  $\gamma_t$  最小， $\min(\gamma_t)_{\rho=0.05} = 0.0$ 。

当  $\rho = 0.5$  时，不满足  $\gamma_t \leq 0.03$  的要求，当  $t = 1.9565s$  时，能够取到  $\gamma_t$  最小， $\min(\gamma_t)_{\rho=0.5} = 0.03$ 。

由于随机模型的计算复杂度较高，限于时间，没有做  $\rho$  在其他取值时的  $\gamma_t$ 。

### 3.4 加权能量分布模型与随机反射模型的结果分析与比较

加权能量分布模型与随机反射模型的仿真结果总体上是一致的，反映了这两种模型在分析微波暗室性能时有一定的一致性与合理性。

加权能量分布模型计算效率高，但是该模型建立在较多的假设与推断上，如果模型分析结论与实验结果不符，比较难提出新的方法修正该模型，同时该模型也较难兼顾功率变化等问题。

随机反射模型计算消耗较大，但是该模型可以结合实测结果有效分析模型存在的问题与不足，在此基础上，提高仿真次数，可以有效提高模型对微波暗室描述的准确性。

## 4 模型改进方向

由于题中信息有限，所以本文模型在实际应用时仍存在改进空间，若信息充足，则为使模型更具实用性，可在如下三方面进行改进：

- 1) 加权能量分布模型中对于多次反射的辐射波采用了加权功率平均的方法进行了

计算, 这样虽然模型较为简单, 但是在反射能量的分布情况上不够精确, 可以考虑多反射波强度叠加等效来建立更加精确的模型。

2) 在问题二的模型中都将尖劈等效为平面进行处理, 这样会与实际情况有所出入, 可以结合问题一和问题二的模型来建立更加接近实际的模型。

3) 在随机反射模型中, 概率分布函数是余弦辐射体的分布规律, 可以建立与入射角相关的概率分布函数, 使模拟的情况更加真实。

## 参考文献

[1] 王相元, 朱航飞, 钱鉴等, 微波暗室吸波材料的分析和设计, 微波学报, 第 16 卷 4 期: 390-398, 2000.12。

[2] 吕述平, 刘顺华, 微波暗室用角锥吸波材料外形的设计和分析, 材料科学与工艺, 第 15 卷 4 期, 573-574, 2006.10。

[3] 罗伯特(法), 蒙特卡罗统计方法, 世界图书出版公司, 第 12 期: 109-185, 2009.10。