

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第九届“华为杯” 全国研究生数学建模竞赛

学 校                      中国石油大学（北京）

---

参赛队号                      85101007

---

1. 李威

---

队员姓名      2. 徐冰

---

3. 黄雪锋

---

## 第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 有杆抽油系统的数学建模及诊断

### 摘 要

有杆抽油系统是油气田开发领域中占据主导地位的采油地面设备,本文从研究抽油机悬点运动出发,合理假设,依次建立了有杆抽油系统的运动规律模型、Gibbs 求解模型、功图量油中有效冲程和面积模型、波动方程反解阻尼系数模型。

针对问题一,四连杆机构将电机的圆周运动转变为抽油杆的往复运动,为使附录 4 定义的机构能完成周期运动,对滑块 D 进行了分析认为此点处不仅存在转动同时存在一定移动。在对悬点的运动规律研究时,在不同的假设基础上分别建立两种模型: B 点为曲柄滑块运动模型和 B 点正常运动的精确分析模型,通过几何关系来得出滑块转角与位移、速度、加速度关系。同时与附件所给数据对比得出:钢缆的伸缩和驴头的影响对于悬点的位移有较大的影响。

针对问题二,根据给定的 Gibbs 模型,通过采用分离变量法、Fourier 级数逼近得出相应的位移和载荷的解。在本问中选取初始条件:悬点处为坐标原点、时间起始

点为 0 时刻;边界条件:悬点动载荷函数  $D(t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (\sigma_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t)$  和光杆

位移函数  $U(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (v_n \cos n\omega t + \delta_n \sin n\omega t)$ 。在模型求解过程中由于 Gibbs 的波动方

程中去掉了重力项,在输入时将光杆载荷中减去抽油杆的空气重力;对于阻尼系数的

选取时，本文通过对图版图形数字化处理，分段拟合输入，最终利用 MATLAB 编程得出单杆和多杆下的泵示功图；同时通过改变阻尼系数对其进行敏感性分析。

针对问题三，利用第二问中的泵功图，建立两种功图量油模型：A. 有效冲程法模型，B. 面积法模型。A 模型中通过有效冲程的物理定义和取小原则建立，基于合理的泵功图数据，采用曲率法及五点平均法，确定凡尔点位置，进而计算得到泵的有效冲程，得出产液量为  $Q = 1440 N_s \cdot (S_{pe} A_p - \Delta Q_p) \cdot \eta_v \cdot \rho_{\text{混合液}}$ ；B 模型是通过示功图

可以反应油井工况原理得出关系式  $Q_{\text{泵功量油}} = \frac{A}{A_p} Q_{\text{理论}}$ ，利用有向面积法从而计算

出产液量。对比两种模型，最终推荐倾向于有效冲程法的计算数据。

针对问题四，主要的思想是能够利用测得的杆上有限个点的载荷和位移，代入 Gibbs 模型能够反解出阻尼系数。在应用过程中首先对波动方程进行有限差分分解，在悬点附近采集数据进行矩阵化处理，利用最小二乘法求解矛盾方程组系数从而反求出阻尼系数，这种利用实测数据进行反求阻尼系数可以很好的避免假设对结果的影响。

**关键词：**Gibbs 模型 Fourier 级数逼近 功图量油 有限差分法 反解

## 目 录

1 问题重述 .....	5
2 问题分析 .....	6
3 基本假设 .....	6
4 问题一 .....	7
4.1 符号说明 .....	7
4.2 题设分析.....	8
4.3 模型的建立 .....	9
4.3.1 简化为曲柄滑块机构的模型.....	9
4.3.2 精确分析模型 .....	11
4.4 结果分析对比 .....	14
5 问题二 .....	15
5.1 符号说明 .....	15
5.2 Gibbs 模型及原理.....	15
5.4 模型的处理及求解 .....	18
5.4.1 阻尼系数的计算.....	18
5.4.2 输入数据的预处理及原因解释.....	20
5.4.3 算法实现.....	23
5.5 模型准确性分析 .....	26
6 问题三 .....	28
6.1 有效冲程法计算产量 .....	28
6.1.1 有效冲程 <sup>[8]</sup> 的引出 .....	28
6.1.2. 泵功图确定有效冲程 .....	28
6.1.3 模型的解 .....	31
6.2 面积法计算产量 .....	34
6.2.1 面积法原理 .....	34
6.2.2 模型的求解 .....	35

7 问题四 .....	37
7.1 方程差分化反解阻尼系数思想.....	37
7.2 思想矩阵化 .....	38
7.3 收敛条件及方程可解条件.....	40
7.3 实际情况下数据采集思想.....	41
7.4 思想合理性分析 .....	42
8 模型的评价和改进 .....	42

## 1 问题重述

目前，开采原油广泛使用的是有杆抽油系统（垂直井）。电机旋转运动转化为抽油杆上下往返周期运动，带动设置在杆下端的泵的两个阀的相继开闭，从而将地下上千米深处蕴藏的原油抽到地面上来。

描述抽油杆中任意一水平截面处基本信息的通用方法是示功图：它是该点随时间  $t$  而变化的荷载（合力，向下为正）数据作为纵坐标，以该点垂直方向上随时间  $t$  而变化的位置相对于  $t=0$  时刻该点位置的位移数据作为横坐标构成的图形。函数关系表现为位移-荷载关于时间  $t$  的参数方程。一个冲程中示功图是一条封闭的曲线。

抽油杆上端点称为悬点，在一个冲程期间，仪器以一系列固定的时间间隔测得悬点 E 处的一系列位移数据和荷载数据，据此建立悬点 E 的示功图称为悬点示功图。

“泵”是由柱塞、游动阀、固定阀、部分油管等几个部件构成的抽象概念，泵中柱塞处的示功图称为泵功图。因为受到诸多因素的影响，在同一时刻  $t$ ，悬点处的受力（荷载）与柱塞的受力是不相同的；同样，在同一时刻  $t$ ，悬点处的相对位移与柱塞的相对位移也不相同。因此悬点示功图与泵功图是不同的。示功图包含了很多信息，其中就有有效冲程，泵的有效冲程是指泵中柱塞在一个运动周期内真正实现从出油口排油的那段冲程。工程上一般根据示功图形状与理论示功图进行对比来判断抽油机工作状态。

通过悬点示功图可以初步诊断该井的工作状况，如产量、气体影响、阀门漏液、沙堵等等。要精确诊断油井的工作状况，最好采用泵功图。然而，泵在地下深处，使用仪器测试其示功数据实现困难大、成本高。因此，通过数学建模，把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图并最终确定泵功图，以准确诊断该井的工作状况，是一个很有价值的实际问题。

请解决以下问题：

问题一：光杆悬点运动规律

电机旋转运动通过四连杆机构转变为抽油杆的垂直运动。假设驴头外轮廓线为部分圆弧、电机匀速运动，悬点 E 下只挂光杆。求出悬点 E 的一个冲程的运动规律：位移函数、速度函数、加速度函数。并与有荷载的悬点位移数据进行比较。

问题二：泵功图计算

1966 年，Gibbs 给出了悬点示功图转化为地下示功图的模型，由于受计算机速度的限制，直到近些年才得以被重新重视。请使用 Gibbs 模型，给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法；分别计算出附件中两口油井的泵功图数据；并分别绘制出悬点示功图和泵功图。

问题三：泵功图的应用（选做 1 问）

1) 建立 2 个不同的由泵功图估计油井产量的模型，其中至少一个要利用“有效冲程”；并利用附件中的数据分别估算两口油井一天的产液量。

2) 如图 5 (C) 形式的泵功图表示泵内有气体, 导致泵没充满。请建立模型或算法, 以由计算机自动判别泵功图数据是否属于泵内有气体的情况。并所给附件对应的泵功图进行计算机诊断是否属于泵内充气这种情况。

问题四: 深入研究的问题 (选做 1 问)

1) 请对 Gibbs 模型进行原理分析, 发现它的不足。在合理的假设下, 重新建立抽油系统模型或对现有模型进行改进; 并给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程, 包括: 原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法; 利用所给附件数据重新进行计算; 对计算结果与问题二的计算结果进行比较, 分析模型的优缺点。

2) Gibbs 模型在数学上可简化为“波动方程”:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t}$  其中  $a$  为已知常数,  $c$  称为阻尼系数, 鉴于大多数的阻尼系数公式是作了诸多假设后推出的, 并不能完整地反应实际情况。如果能从方程本身和某些数据出发用数学方法估计参数  $c$ , 贡献是很大的。对此, 请你进行研究, 详细给出计算  $c$  的理论推导过程并尽可能求出  $c$ 。如果需要题目之外的数据, 请用字母表示之并给出计算  $c$  的推导过程。

## 2 问题分析

问题 1 的主要内容是在一定的假设基础上, 将悬点的位移转化为游梁两端点的位移, 再根据抽油机四连杆机构简图进行几何关系分析, 从而将滑块的转动与悬点的位移相应的联立起来, 得出悬点的位移函数, 对方程求导即可进一步得出悬点的速度与加速度函数。

问题 2 的分析是基于 Gibbs 模型的基础上, 并利用分离变量法求得截断的 Fourier 级数近似解; 而边界条件就是地面情况下的示功图, 初始条件即为初始时刻得到的悬点载荷或位移的关系。通过上述方程组可以得出地下泵的载荷和位移的解, 此时利用傅立叶系数、阻尼系数既可以求出泵的位移函数、载荷函数。但是值得注意的是对于阻力系数的确定由于方法很多, 在选用的过程中需要考虑最终算出的泵示功图是否符合, 来加以准确化。

问题 3 中对于产量的计算是在泵功图的基础上求的, 此时若能够找到产量与泵功图之间的联系或建立两者相关的模型即可求出对于油井产液量的确定。而对于抽油杆采油来说运用最为广泛的是“功图量油”技术。而其中最为普遍的为有效冲程和面积法来测产量, 故利用给出的相关数据及示功图就可以求解该问。

对于问题 4 主要的思想是能够利用测得的杆上有限个点的载荷和位移, 利用 Gibbs 模型能够反求出阻尼系数。而对于这一点, 首先需要对波动方程进行离散化, 对于实测数据进行矩阵处理, 最后利用最小二乘法理论进行系数求解最后得到的阻尼系数。

## 3 基本假设

本文总体基于以下基本假设:

1. 抽油杆为钢制且均匀；
2. 抽油机的油管是锚定的，不考虑抽油管的长度变化；
3. 驴头外轮廓线为部分圆弧，电机匀速运动；
4. 不考虑地面传动装置运动件的惯性对电动机负荷扭矩的影响；
5. 光杆与第一级抽油杆粗细相同，将其与第一级抽油杆同等看待，长度也计入第一级。

## 4 问题一

该问题主要是根据抽油机四连杆机构简图进行几何关系分析，从而将滑块的转动与悬点的位移联立相应的关系，从而进一步可以得出悬点的速度与加速度函数。

### 4.1 符号说明

符号	含义	单位
$\varphi$	连杆与轴线 BB' 之间夹角	度
$r$	曲柄半径	mm
$l$	连杆长度	mm
$a$	前臂 OA 长度	mm
$b$	后臂 OB 长度	mm
$S_A$	B 点运动位移	mm
$\Psi$	连杆与轴线 BB' 之间夹角	mm
$S_B$	B 点运动位移	mm
$\Psi$	连杆与轴线 BB' 之间夹角	
$S_A$	A 点运动位移	m
$V_A$	A 点运动速度	m/s
$a_A$	A 点运动加速度	$mm/s^2$
$S_E$	E 点运动位移	m
$V_E$	E 点运动速度	m/s



$a_E$	E 点运动加速度	$mm/s^2$
$\lambda$	$r/l$	—
$\omega$	D 点运动的角速度	—
I	游梁轴中心到曲柄轴中心的水平距离；	m
J	曲柄轴中心到游梁轴中心距离	m
C	曲柄轴中心与底座间的高度	m
$\chi$	C 与 J 的夹角	度
F	游梁轴中心与底座底部间的高度	m
$\rho$	K 与 J 的夹角	度
$\varphi$	C 与 J 的夹角	度
K	游梁轴中心到曲柄轴中心的距离	m
$\psi_b$	驴头在下死点位置的 $\Psi$ 角	度
$\psi_t$	驴头在上死点位置的 $\Psi$ 角	度
$\alpha$	曲柄半径 R 与连杆 P 之间的夹角	度
$\beta$	游梁后臂 C 与连杆 P 之间的夹角	度
$\theta$	曲柄转角	度
$\varphi$	曲柄初相角	度

## 4.2 题设分析

通过对于机构（如图5-1）中给定条件的分析，若D点处仅存在转动，不能确定游梁AB水平时BDO'是否成一条直线且处于垂直于AB的位置，因而无法直接由几何关系求得OO'。

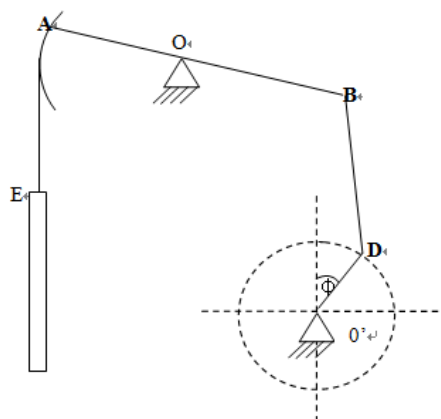


图 4-1 抽油机四连杆机构简图

此时若假设其AB、BDO'垂直关系成立，由题目数据解三角形得到OO'，使得 $OO' + O'D > OB + BD$ 成立，则本机构显然不能完成圆周运动。为此，我们必须进一步提出假设，由工程实际可知，B、D两处铰接存在间隙，且在D点处，既存在转动副又存在移动副，其中移动副只允许B、D在 $\Delta(\Delta = (OO' + O'D) - (OB + BD))$ 范围能相对运动，即时将D视为曲柄滑块。如此，才能实现附录4中机构的周期运动

由此，我们得知，滑块D位于上顶点是E到达下死点，而E到达上死点需滑块D运动到OO'延长线与D运动圆周的交点处，并非6点钟方向，故基于该点进行如下模型建立。

### 4.3 模型的建立

游梁式抽油机悬点的运动规律可简化为简谐运动模型和曲柄滑块机构模型。由于简谐运动模型考虑的条件过于理想化，忽略了抽油机运行时的多种复杂情况，只能用于粗略估算和简单分析。所以实际应用中常采用曲柄滑块模型来进行一般的计算和分析。此时为了更好的了解抽油机悬点的运动规律，下面从考虑做曲柄滑块运动和精确分析两种方法来进行运动分析。

#### 4.3.1 简化为曲柄滑块机构的模型

##### 1) 模型的假设：

- a) 电机匀速运动，D点绕O'点旋转的角速度不变；
- b) 由于题设中连杆BD长度较曲柄半径O'D较长，故B点以很小的弧度运动，理想化将其考虑为直线运动；
- c) E与A点之间不考虑钢缆伸缩变形；
- d) 不考虑驴头转动在A、E之间位移变化的影响，即保证A、E点位移变化相同。

## 2) 模型的建立<sup>[1]</sup>:

对于连杆运动时, 当  $t=0$  时刻 (即  $\varphi=0$ ) 时, 油梁与连杆的连接点  $B$  在  $B'$  处, 为距曲柄轴心最远, 此时  $E$  位于下死点; 当  $\varphi=\pi$  时,  $B$  点在  $B''$  处, 为距曲柄轴心最近位置, 此时  $E$  位于上死点 (如图 5-2)

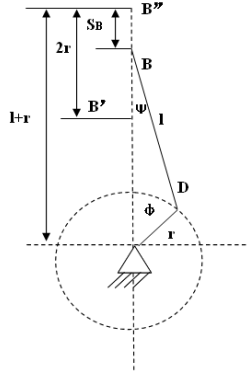


图 4-2 简化为曲柄滑块机构的简图

故此时  $O'B'=l+r$ ,  $O'B''=l-r$ ,  $B$  点最大位移为  $S_B = 2r$ 。

此时从图形中可以得出:

$$S_B = BB' = O'B' - O'B = l + r - O'B \quad (4-1)$$

在三角形  $O'DB$  得:

$$O'B = O'C + BC = r \cos \phi + l \cos \psi \quad (4-2)$$

故:

$$\begin{aligned} X_B &= l + r - (r \cos \phi + l \cos \psi) \\ &= r(1 - \cos \phi) + l(1 - \cos \psi) \\ &= r[(1 - \cos \phi) + 1/\lambda(1 - \cos \psi)] \end{aligned} \quad (4-3)$$

由三角形  $O'DB$ , 利用正弦定理, 有

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{r}{l} \sin \phi \\ \cos \psi &= \sqrt{1 - \sin^2 \psi} \approx \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (4-4)$$

通过上述式子得:

$$S_B = r[(1 - \cos \phi) + \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi})] \quad (4-5)$$

将上面式子中  $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi}$  进行二项式展开简化有：

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \approx 1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \phi}{2} \quad (4-6)$$

故最终得出 B 点位移公式为：

$$S_B = r(1 - \cos \phi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \phi) \quad (4-7)$$

通过求出的 B 点的位移公式利用杠杆原理，得出 A 点位移公式为：

$$S_A = S_B \frac{a}{b} \quad (4-8)$$

又由于假设即不考虑 E 与 A 点之间钢缆伸缩变形；也不考虑驴头转动在 A、E 之间位移变化的影响，此时有：  $S_E = S_A$

故求的 E 点的位移函数为：

$$S_E = \frac{ar}{b}(1 - \cos \phi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \phi) \quad (4-9)$$

此时将 E 点的位移函数对时间求导，得出的速度函数为：

$$V_E = \frac{arw}{b}(\sin \phi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\phi) \quad (4-10)$$

此时将 E 点的速度函数对时间求导，得出的加速度函数为：

$$a_E = \frac{arw^2}{b}(\cos \phi + \lambda \cos 2\phi) \quad (4-11)$$

#### 4.3.2 精确分析模型

由于上面建立的模型是假设较为理想情况的 B 点的位移为竖直方向上直线运动，而实际情况下 B 点运动时是有一定的幅度的，故在此基础上进行进一步的精确分析。

1) 模型假设：

a) 电机均匀运动，D 点绕 O' 点旋转的角速度不变；

- b) E 与 A 点之间不考虑钢缆伸缩变形；
- c) 不考虑驴头转动在 A、E 之间位移变化的影响，即保证 A、E 点位移变化相同。

## 2) 模型<sup>[2]32-38</sup>的建立：

对于通过机构图（如图 4-3）中可以得出以下几何关系：

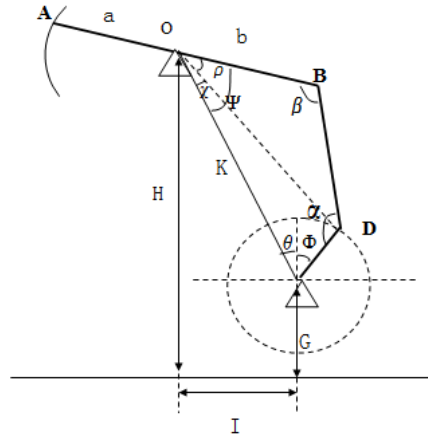


图 4-3 抽油机精细分析机构简图

对于在三角形 OO'D 和 OBD 里面通过正弦、余弦定理可以得出如下：

$$J = \sqrt{K^2 + r^2 - 2Kr \cos(D\theta + \phi)} \quad (4-12)$$

$$K = \sqrt{I^2 + (H - G)^2} \quad (4-13)$$

$$\psi = x + \rho \quad (4-14)$$

$$\chi = \cos^{-1} \left( \frac{b^2 + J^2 - P^2}{2bJ} \right) \quad (4-15)$$

$$\rho = \sin^{-1} \left[ \frac{r}{J} \sin(D\theta + \phi) \right] \quad (4-16)$$

当 A 点位移上死点和下死点时有：

$$\psi_b = \cos^{-1} \left[ \frac{b^2 + K^2 - (l + r)^2}{2bK} \right] \quad (4-17)$$

$$\psi_t = \cos^{-1} \left[ \frac{b^2 + K^2 - (l-r)^2}{2bK} \right] \quad (4-18)$$

式中  $D$  为曲柄旋转方向指数， $D=1$  时曲柄背向支架旋转， $D=-1$  曲柄指向支架旋转。

当曲柄转角  $\Phi$  为时，悬点相对于下死点的位移为：

$$S_A = a[\psi_b - \psi] \quad (4-19)$$

悬点速度和加速度分别为位移对时间  $t$  的一阶导数和二阶导数：

$$v_A = \frac{dS_A(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = wS'_A(\theta) = -wa\psi'$$

$$a_A = \frac{d^2S_A(\theta)}{d\theta^2} \frac{d^2\theta}{dt^2} = w^2S''_A(\theta) = -w^2a\psi''$$

通过题设假设可以得出  $E$  点的位移、速度、加速度函数如下：

$$S_E = a[\psi_b - \psi] \quad (4-20)$$

$$v_E = \frac{dS_E(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = wS'_E(\theta) = -wa\psi' \quad (4-21)$$

$$a_E = \frac{d^2S_E(\theta)}{d\theta^2} \frac{d^2\theta}{dt^2} = w^2S''_E(\theta) = -w^2a\psi'' \quad (4-22)$$

### 3) 结果分析：

通过上述计算的方程，带入相应的数据可以得出如下（如图 4-4）：

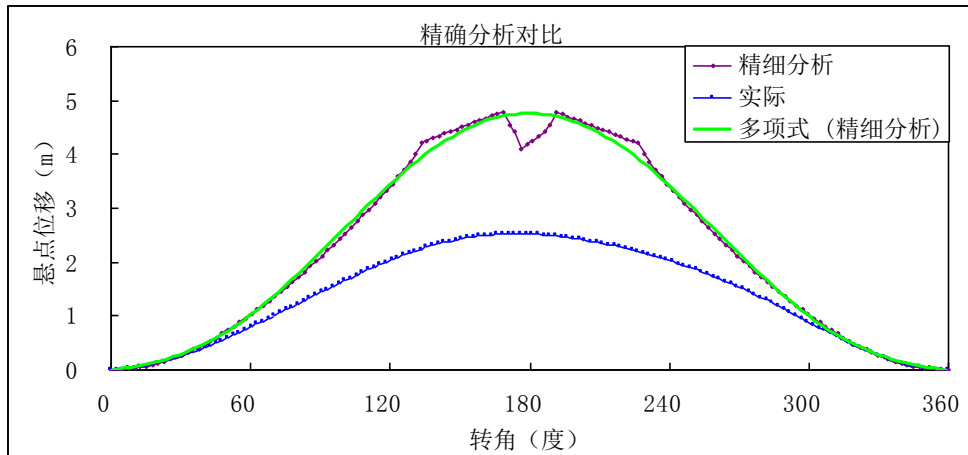


图 4-4 悬点位移-时间对比曲线图

在计算过程中，当转角在：135.944 度~166.154 度或 193.846 度~224.056 度之间时，求反函数是数据范围超过了实数的定义范围，故不能计算，此时鉴于这种情况将两个区间的值进行插值话，故得出上述图形；同时由于计算出来的数据不是较为顺滑均匀，故将其拟合成正弦或余弦曲线。

#### 4.4 结果分析对比

对附件 1 的数据进行分析，得到一些论断。论断的基础在于：上冲程的悬点处的载荷要明显的大于下冲程的悬点载荷。论断为：上冲程的起始点（下死点）位移为 0m，结束点（上死点）位移为行数据最大 2.5250m，下冲程的起始点（上死点）为行数据最大 2.5250m，结束点（下死点）位移为 0m；此时对于一个冲程总共的 144 个点分成了上冲程 70 数据点，下冲程 75 个数据点。

通过两种模型出来的悬点位移—转角的关系如下（图 4-5）：

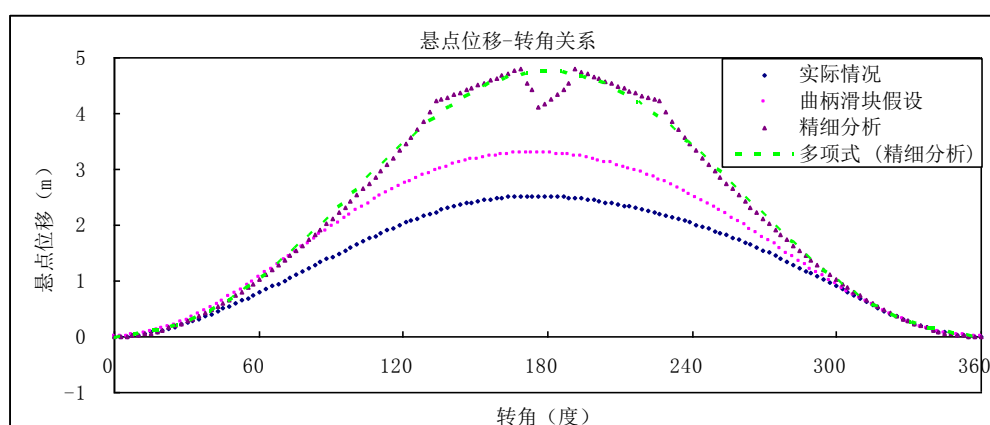


图 4-5 悬点位移-时间方法对比图

从上图可以明显看出，两个模型下得到的悬点位移随转角的变化差异与实测值相差较大。分析出现这样差异的原因以下几点：

- 实际情况，悬点下面悬挂有光杆，钢缆受到自身的重力及悬点处的下部载荷力及惯性力的影响，钢缆会发生微小的拉伸，而不是模型中假设的不可伸缩。钢缆在上冲程过程中始终保持着复杂的受力变化过程，其总体的趋势是伸长量逐渐变大，下冲程过程中是反过程，伸长量逐渐变小；
- 对于假设为曲柄滑块运动时，通过调研可知此时的条件为： $0 < r/l < 1/4$ ，而题设中给定的为 0.2585，此时大于 1/4，故不是很满足条件，出现偏差；
- 对于精细分析时，由于没有上述的条件假设，此时 A 点运动为弧形，导致驴头在纵向上用来缓冲纵向上面位移变化的影响加大，故此时出现的不是很规则的正弦或余弦图像，与实际悬点位移相比相差更大，故说明驴头对于悬点位移的控制相比钢缆更大。

综上所述，对 A 点的理论曲线，如果对其进行弱处理（即补偿因后臂梁处的 B 点的实际位移偏小及、钢缆的伸缩变化和驴头的转动），理论上可以得到近似于实际情况的曲线。由于钢缆的力学性质和驴头的情况未知并且产生实际数据的偏差原因很多，所以未给出具体的理论推导。

## 5 问题二

### 5.1 符号说明

符号	符号说明	单位
x	任一断面的深度	m
t	时间	s
a	应力波在抽油杆中的传播速度	s <sup>-1</sup>
c	粘滞阻尼系数，一般取 4960 m/s	m/s
D(t)	光杆示功图测得悬点动载荷与时间函数	N
W <sub>r</sub>	抽油杆住在井液中的质量	N
u(t)	光杆示功图测得悬点位移与时间函数	m
u(x,t)	抽油杆在 x 断面不同时间 t 的位移	m
F(x,t)	抽油杆在 x 断面不同时间 t 的载荷	N
E	抽油杆的弹性模量	N/m <sup>2</sup>
A <sub>r</sub>	抽油杆的截面积	m <sup>2</sup>
w	曲柄角速度	rad/s
n	傅里叶级数所取项数，一般取 10	——
$\sigma_o, \sigma_n, \tau_n, \gamma_o, \gamma_n, \delta_n$	D (t)、u (t) 的傅里叶系数	——
On, Pn	位移函数和载荷函数中的系数	——
k	2 $\pi$ 周期分为 k 份	——
p	从 0 到 k 各分点序号	——
D (p)	p 点的动载荷	N
U (p)	p 点的位移	m

### 5.2 Gibbs 模型及原理

1966 年美国 S.G.Gibbs 建立了抽油杆系统的一维粘滞阻尼波动方程，边界条件利用光杆示功图(悬点示功图)的载荷时间曲线和位移时间曲线，并用分离变量求得截断的傅里叶级数近似解<sup>[3, 4]</sup>。

#### 1) 基本公式

描述抽油杆运动和应力传播的粘滞阻尼波动方程如下：



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5-1)$$

2) 边界条件<sup>[5]168-172</sup>:

其两个以截断傅里叶级数表示的边界条件,悬点动载荷函数  $D(t)$ 和光杆位移函数  $u(t)$ :

$$D(t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (\sigma_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t) \quad (5-2)$$

$$U(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (v_n \cos n\omega t + \delta_n \sin n\omega t) \quad (5-3)$$

计算时将  $2\pi$  周期分为  $k$  份, 因此傅里叶系数  $\sigma_n, \tau_n, \gamma_n, \delta_n$  可用数值积分结果表述如下:

$$\sigma_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D_p \cos\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) (n=1, 2, \dots, \bar{n}) \quad (5-4)$$

$$\tau_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D_p \sin\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) (n=1, 2, \dots, \bar{n}) \quad (5-5)$$

$$v_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D_p \cos\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) (n=0, 1, 2, \dots, \bar{n}) \quad (5-6)$$

$$\delta_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D_p \sin\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) (n=1, 2, \dots, \bar{n}) \quad (5-7)$$

3) 初始条件:

悬点处为坐标原点, 时间起始点为 0 s 时刻, 位移起始点为 0 m 。

### 5.3 模型的求解步骤<sup>[1]46-56 83-89, [6]454-459</sup>

- 取得光杆动载荷、位移与时间的函数, 即  $D(t)$ 和  $U(t)$ 。方法为将地面示功图数字化。并根据已知值计算傅里叶四个系数。
- 计算粘滞阻尼系数  $c$ 。(方法之一)

$$\text{Gibbs 公式: } c = \frac{\pi a c_d}{2L} \quad (5-8)$$

式中  $c$ ——阻尼系数,  $s^{-1}$ ;

$a$ ——声速, 一般取  $4960\text{m/s}$ ;

$C_d$ ——无量纲阻尼因子, 可以图 5-1 可得到;

$L$ ——泵深,  $\text{m}$ ;

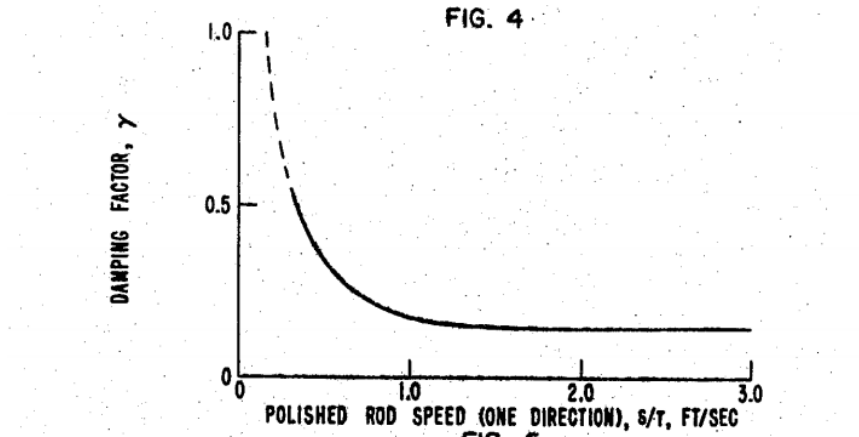


图 5-1 光杆速度与无量纲阻尼系数关系

c) 计算特殊系数:

$$\alpha_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2}} \quad (5-9)$$

$$\beta_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2}} \quad (5-10)$$

d) 计算位移函数和载荷函数中的系数:

$$k_n = \frac{\sigma_n \alpha_n + \tau_n \beta_n}{EA_r (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \quad (5-11)$$

$$\mu_n = \frac{\sigma_n \beta_n - \tau_n \alpha_n}{EA_r (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \quad (5-12)$$

式中  $E$ ——钢材的弹性模量,  $2.1 \times 10^{11} \text{Pa}$

$A_r$ ——抽油杆截面积,  $\text{m}^2$ 。

$$O_n(x) = (k_n ch\beta_n x + \delta_n sh\beta_n x) \sin \alpha_n x + (\mu_n ch\beta_n x + v_n ch\beta_n x) \cos \alpha_n x \quad (5-13)$$

$$P_n(x) = (k_n ch\beta_n x + \delta_n sh\beta_n x) \cos \alpha_n x + (\mu_n ch\beta_n x + v_n ch\beta_n x) \sin \alpha_n x \quad (5-14)$$

$$\begin{aligned} O_n'(x) = & \left[ \frac{\tau_n}{EA_r} sh\beta_n x + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) ch\beta_n x \right] \sin \alpha_n x \\ & + \left[ \frac{\tau_n}{EA_r} ch\beta_n x + (v_n \beta_n - \delta_n \alpha_n) sh\beta_n x \right] \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (5-15)$$

$$\begin{aligned} P_n'(x) = & \left[ \frac{\tau_n}{EA_r} ch\beta_n x + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) sh\beta_n x \right] \cos \alpha_n x \\ & + \left[ \frac{\tau_n}{EA_r} sh\beta_n x + (v_n \beta_n - \delta_n \alpha_n) ch\beta_n x \right] \sin \alpha_n x \end{aligned} \quad (5-15)$$

e) 计算位移函数和载荷函数:

$$U(x,t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t) \quad (5-16)$$

$$F(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + EA_r \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n'(x) \cos n\omega t + P_n'(x) \sin n\omega t) \quad (5-17)$$

$U(x,t)$ ——抽油杆在  $x$  断面不同时间  $t$  的位移,  $m$ ;

$F(x,t)$ ——抽油杆在  $x$  断面不同时间  $t$  的载荷,  $N$ ;

f) 计算新的边界值, 根据力的连续性定理, 有

$$\sigma_{02} = \sigma_0; \quad \sigma_{n2} = EA_r O_n'; \quad \tau_{n2} = EA_r \rho_n'; \quad v_{o2} = \frac{\sigma_0}{EA_r} L_1 + v_o$$

$$v_{n2} = O_n(x); \quad \delta_{n2} = P_n(x) \quad (5-18)$$

以此为条件继续计算下一级杆末  $U(x,t)$ 、 $F(x,t)$ , 并依此计算到最后一级抽油杆的末端, 即为泵功图。

## 5.4 模型的处理及求解

### 5.4.1 阻尼系数的计算

Gibbs 模型计算阻尼系数的方法有两种，而由于题中数据的局限性，故选择上面提到的方法来计算阻尼系数。

由于在读取参考文献中光杆速度与无量纲阻尼系数的关系图版时，存在较大的误差甚至错误，为了提高读取精度，本文中首先通过图形数字化软件进行预处理。其处理过程如下：

（1）将整条曲线分为四段（如表 5-1），每段根据线段弯曲程度进行数据点数的数量多少选择。第一段选取 14 个点数据，第二段由于曲线弯曲明显，选取 23 个数据点，第三段选取 11 个数据点，第四段直线处理。

表 5-1 软件选点数据表

第一段:		第二段:		第三段:		第四段:	
速度m/s	cd	速度m/s	cd	速度m/s	cd	速度m/s	cd
0.048089	0.99938	0.101947	0.499612	0.304317	0.170975	0.4572	0.14
0.050031	0.960579	0.106767	0.476138	0.320189	0.166845	0.9144	0.14
0.050046	0.929599	0.111826	0.456589	0.334856	0.161917		
0.053915	0.883369	0.116884	0.438608	0.349767	0.157383		
0.056334	0.852809	0.120979	0.423754	0.362752	0.154789		
0.059001	0.806173	0.126518	0.405387	0.379586	0.151846		
0.063109	0.763476	0.132057	0.387411	0.394734	0.148885		
0.067699	0.719215	0.137593	0.374142	0.409883	0.146707		
0.072046	0.679266	0.143612	0.358134	0.426955	0.14416		
0.078559	0.636204	0.151074	0.340965	0.443545	0.142783		
0.082179	0.60801	0.158777	0.323015	0.457011	0.142155		
0.086763	0.577083	0.16744	0.306645				
0.091586	0.545766	0.176344	0.292238				
0.101947	0.499612	0.186691	0.274711				
		0.195594	0.261088				
		0.203774	0.250203				
		0.213878	0.239731				
		0.234325	0.219576				
		0.245391	0.208724				
		0.258139	0.198675				
		0.273773	0.188268				
		0.287963	0.179805				
		0.304317	0.170975				

（2）通过绘制图形（如图 5-2），将四段散点数据进行拟合。选取三次多项式，拟合的结果图所示。拟合评价值，R 平方值接近于 1，说明拟合效果很好，完全可以在误差很小的情况要求下对无量纲阻尼因子曲线进行数值计算，得到  $C_d$  所对应的值，并且进行使用。

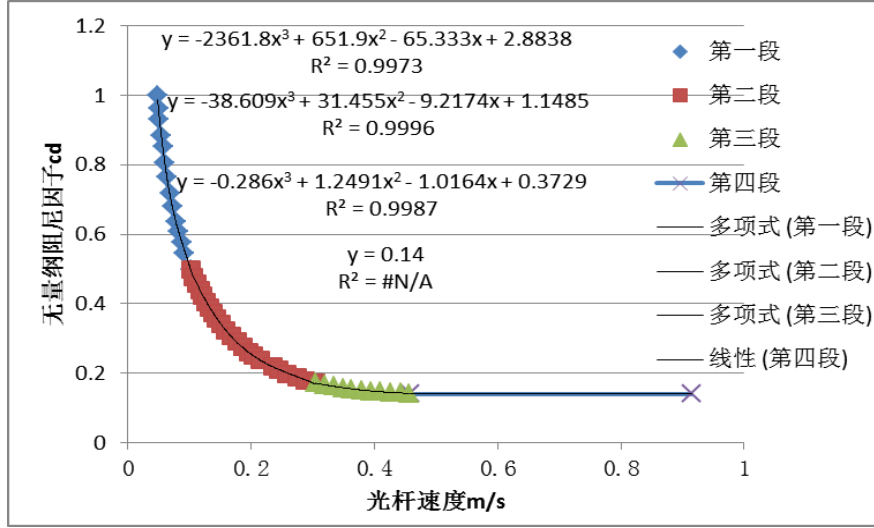


图 5-2 图形数字化结果曲线

(3) 在本题目的计算中，光杆速度进行了这样的处理：用全部散点时间所对应的简谐运动所得到的悬点瞬时运动速度的均方根值来表示抽油杆的平均速度，用这个值来表示光杆速度值，进而查得相应的  $C_d$  值。处理的假设依据于 Gibbs 的另外两个假设条件：光杆悬点运动为简谐运动，抽油杆柱一周所损耗的功应该等于等效粘滞阻尼所消耗的功。

光杆速度的计算公式：

$$v = \sum_{i=1}^k \sqrt{\frac{a}{b} \times w \times r \times \sin(w \times t(i))} \quad (5-19)$$

式中，a——前臂长，m；

b——后臂长，m；

r——曲柄半径，m；

w——曲柄角速度，rad/s；

t(i)——散点时间值，s。

#### 5.4.2 输入数据的预处理及原因解释

一维波动方程原型<sup>[7]197-208</sup>：

$$E_r A_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_r A_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v_e \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_r A_r g \quad (5-20)$$

吉布斯波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5-21)$$

从上面式子可以看出，吉布斯在推导波动方程时，进行了简化，由于重力项为常数，为了差分计算方便，去掉了该项。因此输入到编制程序的软件里的初始数据需要进行处理，必须要从光杆载荷中减去抽油杆的空气重力，由于其在液体中，故应减去其在液体中的重力。从而得到的新动载荷-时间曲线以及位移-时间曲线，这两条曲线组成了稳定解所需的边界条件。

具体处理如下：

对于附件 1，其抽油杆在液体中的重力：

$$d = 22\text{mm};$$

$$A_r = 1/4 * \pi * (d/1000)^2;$$

$$g = 9.81\text{m/s}^2;$$

$$L = 793\text{m};$$

$$\rho_l = 846 * (1 - 0.98) + 1000 * 0.98;$$

$$\rho_r = 8456\text{kg/m}^3;$$

$$W_r = (-) * g * A_r * L = 2.2035\text{e} + 004 (\text{N})$$

对于附件 2，共有三级杆柱，其抽油杆在液体中的重力分为三部分：

由于三个杆的参数为：

$$d1 = 25\text{mm}; d2 = 22\text{ mm}; d3 = 19\text{ mm};$$

$$L1 = 523.61\text{m}; L2 = 664.32\text{m}; L3 = 618.35\text{m};$$

$$\rho_l = 846 * (1 - 0.912) + 1000 * 0.912;$$

$$A_r(1) = 1/4 * \pi * (d(1)/1000)^2;$$

$$A_r(2) = 1/4 * \pi * (d(2)/1000)^2;$$

$$A_r(3) = 1/4 * \pi * (d(3)/1000)^2;$$

$$W_{rr}(1) = (\rho_g - \rho_l) * g * (Ar(1) * L(1) + Ar(2) * L(2) + Ar(3) * L(3));$$

$$W_{rr}(2) = (\rho_g - \rho_l) * g * (Ar(2) * L(2) + Ar(3) * L(3));$$

$$W_{rr}(3) = (\rho_g - \rho_l) * g * Ar(3) * L(3);$$

由上面分析可知，需带入 Gibbs 方程中的悬点载荷值为实测的值减去  $W_{rr}(1)$  值。得到的悬点的动载荷-时间曲线以及位移-时间数据并做曲线如下：

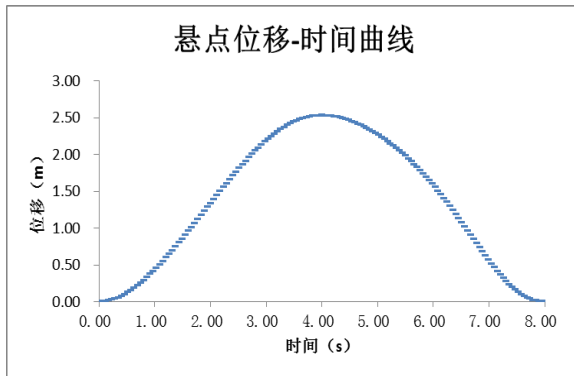


图 5-3 附件 1 井悬点位移-时间曲线

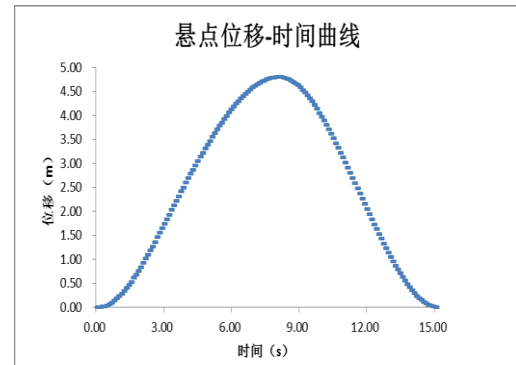


图 5-4 附件 2 井悬点载荷-时间曲线

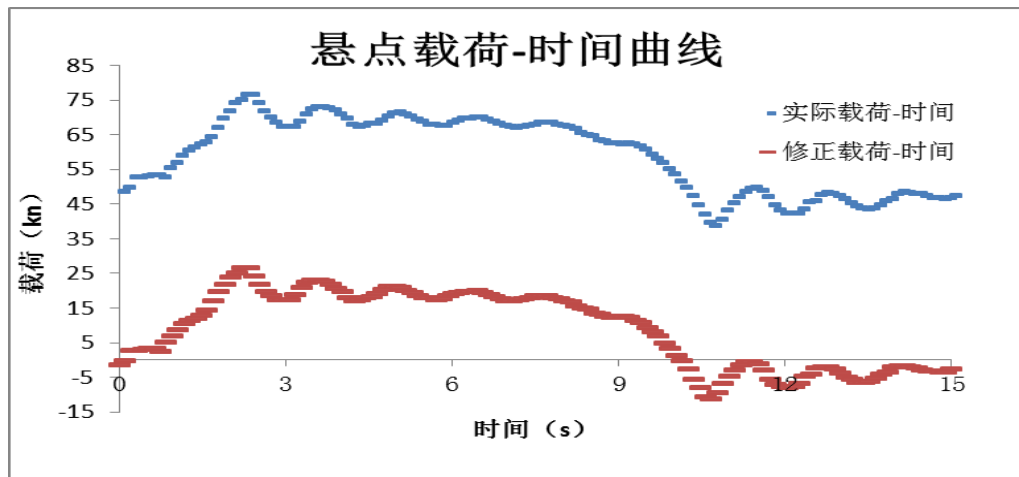


图 5-5 附件 1 井悬点位移-时间曲线

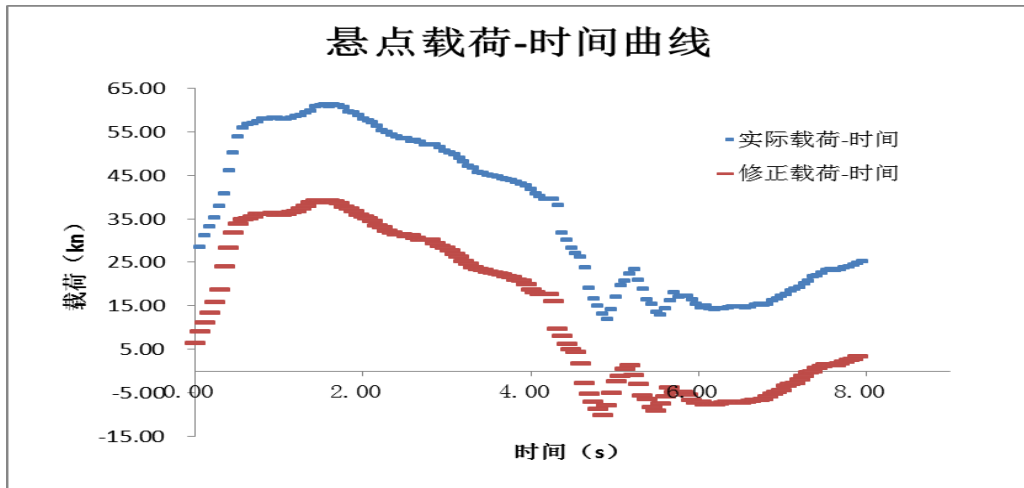


图 5-6 附件 2 井悬点载荷-时间曲线

### 5.4.3 算法实现

由于数据涉及到较为复杂的矩阵处理，故本文采用 **MATLAB** 软件编程实现，用 **M** 文件进行程序的存储，执行文件，既可以得到该点处的位移-时间，载荷-时间值。

具体程序参见附录：附件 1 为本问题中附件 1 井模型求解程序；附件 2 为本问题求附件 2 井的模型求解程序。

### 5.5 模型的解

(1) 附件 1 代表的是第一口井，抽油杆为一级，在数据处理时，由于泵的位移及载荷数据是其在 792.5m (x) 处的时变数值，并且第一级杆的下方没有接其它杆柱，因此不用添加下面杆柱的液体中重力的影响。此时直接用 **MATLAB** 求得的位移-时间，载荷-时间数据，即为泵的实时数据。下面图（图 5-7）表（表 5-2）为该附件中的悬点示功图和泵示功图对比曲线。（规定载荷向下方向为正。）

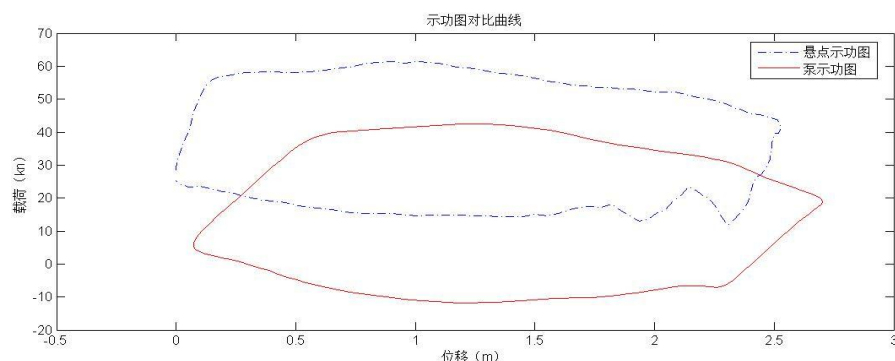


图 5-7 附件 1 井悬点及泵示功图对比曲线（计算阻尼系数 0.6039）

表 5-2 附件 1 井泵示功图数据表



泵位移(m)	泵载荷(kn)	泵位移(m)	泵载荷(kn)	泵位移(m)	泵载荷(kn)	泵位移(m)	泵载荷(kn)
0.1047	9.7869	1.7537	37.5611	2.5932	12.2289	1.4405	-11.0932
0.1353	12.0086	1.8015	36.8535	2.5635	10.4236	1.3903	-11.3209
0.1736	14.5542	1.8500	36.1958	2.5319	8.4220	1.3392	-11.5258
0.2171	17.3587	1.8997	35.5941	2.4992	6.2878	1.2876	-11.6825
0.2634	20.3308	1.9503	35.0451	2.4662	4.0866	1.2359	-11.7676
0.3103	23.3621	2.0018	34.5372	2.4341	1.9114	1.1843	-11.7652
0.3559	26.3381	2.0534	34.0527	2.4034	-0.1577	1.1329	-11.6678
0.3992	29.1547	2.1043	33.5700	2.3752	-2.0302	1.0817	-11.4770
0.4394	31.7095	2.1534	33.0697	2.3497	-3.6416	1.0304	-11.2010
0.4768	33.9393	2.1997	32.5331	2.3272	-4.9465	0.9792	-10.8546
0.5121	35.8048	2.2424	31.9478	2.3074	-5.9182	0.9278	-10.4516
0.5462	37.2972	2.2811	31.3083	2.2899	-6.5669	0.8766	-10.0066
0.5805	38.4355	2.3157	30.6161	2.2737	-6.9231	0.8255	-9.5266
0.6160	39.2616	2.3466	29.8788	2.2579	-7.0433	0.7750	-9.0154
0.6535	39.8327	2.3743	29.1082	2.2413	-6.9972	0.7256	-8.4680
0.6937	40.2141	2.4000	28.3179	2.2229	-6.8622	0.6775	-7.8740
0.7366	40.4709	2.4246	27.5213	2.2016	-6.7122	0.6311	-7.2243
0.7822	40.6613	2.4491	26.7297	2.1769	-6.6115	0.5867	-6.5067
0.8299	40.8318	2.4743	25.9510	2.1486	-6.6064	0.5442	-5.7189
0.8794	41.0148	2.5006	25.1893	2.1167	-6.7226	0.5032	-4.8605
0.9300	41.2258	2.5280	24.4500	2.0817	-6.9643	0.4636	-3.9469
0.9813	41.4664	2.5561	23.7341	2.0443	-7.3148	0.4247	-2.9976
1.0331	41.7257	2.5843	23.0442	2.0054	-7.7434	0.3859	-2.0387
1.0852	41.9828	2.6115	22.3839	1.9657	-8.2115	0.3469	-1.1050
1.1377	42.2115	2.6368	21.7581	1.9263	-8.6761	0.3073	-0.2222
1.1906	42.3832	2.6590	21.1708	1.8874	-9.1025	0.2676	0.5847
1.2439	42.4707	2.6774	20.6236	1.8495	-9.4630	0.2281	1.3094
1.2975	42.4514	2.6911	20.1115	1.8123	-9.7460	0.1901	1.9560
1.3512	42.3092	2.6998	19.6210	1.7758	-9.9517	0.1547	2.5510
1.4047	42.0363	2.7033	19.1270	1.7393	-10.0943	0.1237	3.1373
1.4576	41.6344	2.7013	18.5928	1.7021	-10.1960	0.0988	3.7691
1.5097	41.1130	2.6940	17.9701	1.6636	-10.2828	0.0814	4.5136
1.5605	40.4929	2.6816	17.2080	1.6233	-10.3798	0.0728	5.4343
1.6101	39.7984	2.6643	16.2522	1.5809	-10.5053	0.0738	6.5945
1.6585	39.0587	2.6441	15.1471	1.5361	-10.6692	0.0846	8.0358
1.7063	38.3036	2.6202	13.8070	1.4893	-10.8692	0.1047	9.7855

(2) 附件 2，抽油杆有三级，每次计算完上一级杆的参数后，需要对已有的傅里叶级数及初始边界条件进行修正，修正的方法如上面原理所述。计算到泵处的位移及载荷以后，由于下面没有其他的杆柱的液体中重力的影响。那么直接用 MATLAB 程序所得到的位移-时间，载荷-时间数值，即为泵的实时数据。如下为该附件中悬点示功图和泵示功图对比曲线（如图 5-8）及泵功图的数据表（如表 5-3）。

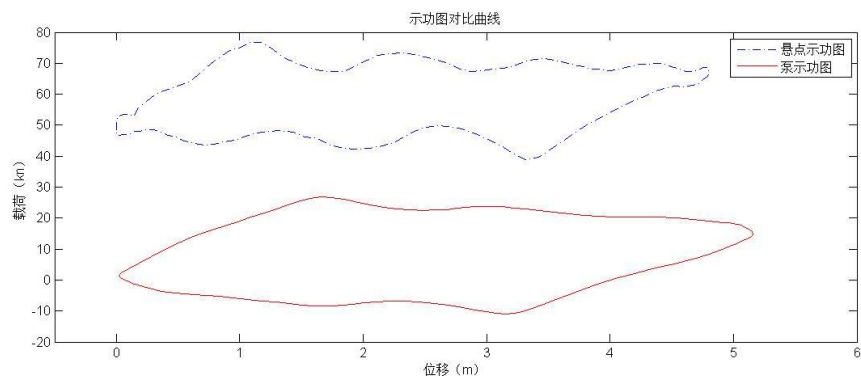


图 5-8 附件 2 井悬点及泵示功图对比曲线（计算阻尼系数 0.6039）

表 5-3 附件 2 井泵位移-载荷关系表

泵位移(m)	泵载荷(kn)	泵位移(m)	泵载荷(kn)	泵位移(m)	泵载荷(kn)	泵位移(m)	泵载荷(kn)
0.0393	2.3216	2.8359	23.4252	5.1406	15.9684	2.5734	-7.5260
0.0651	2.9619	2.9055	23.7002	5.1531	15.5553	2.4510	-7.1109
0.1001	3.6870	2.9744	23.8566	5.1597	15.1149	2.3297	-6.9136
0.1419	4.5087	3.0470	23.8536	5.1581	14.6395	2.2136	-6.9309
0.1878	5.4283	3.1271	23.6771	5.1466	14.1197	2.1055	-7.1262
0.2361	6.4368	3.2173	23.3396	5.1246	13.5465	2.0069	-7.4380
0.2859	7.5177	3.3185	22.8772	5.0927	12.9146	1.9173	-7.7908
0.3374	8.6518	3.4299	22.3417	5.0525	12.2254	1.8346	-8.1083
0.3920	9.8211	3.5485	21.7919	5.0063	11.4876	1.7554	-8.3248
0.4514	11.0138	3.6704	21.2832	4.9568	10.7176	1.6758	-8.3951
0.5180	12.2257	3.7910	20.8597	4.9061	9.9365	1.5919	-8.2998
0.5934	13.4615	3.9056	20.5480	4.8557	9.1664	1.5009	-8.0453
0.6787	14.7310	4.0107	20.3545	4.8058	8.4250	1.4012	-7.6609
0.7735	16.0455	4.1039	20.2666	4.7551	7.7205	1.2932	-7.1912
0.8761	17.4115	4.1849	20.2568	4.7014	7.0475	1.1786	-6.6863
0.9836	18.8248	4.2548	20.2889	4.6417	6.3854	1.0607	-6.1934
1.0922	20.2661	4.3160	20.3250	4.5729	5.6989	0.9435	-5.7476
1.1978	21.6989	4.3720	20.3322	4.4923	4.9428	0.8310	-5.3677
1.2971	23.0708	4.4263	20.2877	4.3984	4.0685	0.7268	-5.0537
1.3874	24.3180	4.4818	20.1813	4.2914	3.0333	0.6331	-4.7896
1.4679	25.3734	4.5405	20.0153	4.1732	1.8091	0.5509	-4.5475
1.5393	26.1756	4.6028	19.8021	4.0471	0.3907	0.4798	-4.2950
1.6040	26.6790	4.6680	19.5602	3.9178	-1.1990	0.4180	-4.0017
1.6657	26.8619	4.7341	19.3097	3.7902	-2.9078	0.3631	-3.6458
1.7286	26.7324	4.7985	19.0672	3.6691	-4.6575	0.3127	-3.2175
1.7967	26.3290	4.8583	18.8434	3.5579	-6.3519	0.2645	-2.7203
1.8731	25.7182	4.9111	18.6407	3.4587	-7.8879	0.2174	-2.1691
1.9596	24.9861	4.9556	18.4543	3.3712	-9.1688	0.1715	-1.5859
2.0561	24.2284	4.9913	18.2738	3.2935	-10.1175	0.1279	-0.9945
2.1608	23.5371	5.0192	18.0860	3.2219	-10.6878	0.0886	-0.4143
2.2703	22.9892	5.0410	17.8782	3.1517	-10.8711	0.0565	0.1437
2.3807	22.6360	5.0588	17.6409	3.0782	-10.6986	0.0339	0.6801
2.4877	22.4971	5.0749	17.3690	2.9974	-10.2377	0.0230	1.2069
2.5880	22.5594	5.0910	17.0622	2.9064	-9.5827	0.0249	1.7453
2.6794	22.7797	5.1077	16.7237	2.8044	-8.8425	0.0393	2.3216
2.7615	23.0936	5.1247	16.3580	2.6925	-8.1256		

(3) 为了说明清楚附件 2 井悬点及泵示功图的曲线（如图 5-9）的得到过程，可通过下面的图形进行说明。

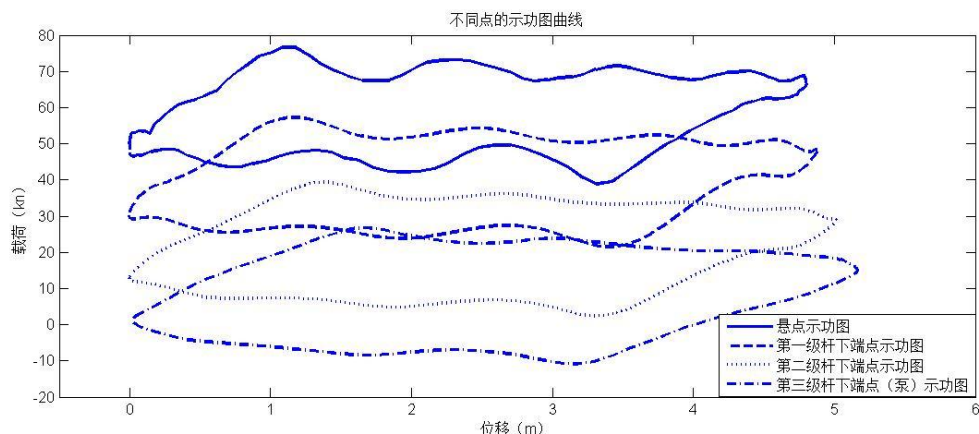


图 5-9 附件 2 井悬点和各级杆下端点示功图对比曲线

从上到下四个不规则封闭图形分别为悬点、第一级杆下端点、第二级杆下端点及第三级杆下端点（泵示功图）示功图。从上面可以认识到，各连接点的冲程随着深度的增加逐渐增加，但是增加幅度不大，最大在 0.5m 左右。同时各点的载荷变化范围逐渐变大。

位移的变化可理解为抽油杆伸缩，受液体的浮力等原因导致，主要理解为惯性力将越往下面的点的位移变化越大。而载荷的变化是越往下面，受力越复杂，这里未对其变化进行理论及公式分析。具体的分析见 6) 准确性分析。

## 5.5 模型准确性分析

首先阐明一个观点：示功图的封闭区域的面积为该点处的做功数值，悬点处的做功为泵做功及其他损失消耗的功的总和，理论上悬点处的做功数值要大于泵处做功数值。

而经过数值计算得到对于单级杆（附件 1）的悬点示功图面积为 93.5912，泵示功图封闭曲线面积为 103.7743，泵的面积大于悬点面积。

对于多级杆（附件 2）的悬点示功图面积为 98.2032，泵示功图封闭曲线面积为 121.7774，同样有泵的面积大于悬点面积。

对这两口附件中井，按照已有的数据，用 MATLAB 编制程序，对阻尼系数的直接赋值，通过不同的输出位移和载荷的变化曲线，进行对比，发现规律。得到的对比曲线（如图 5-10）如下：

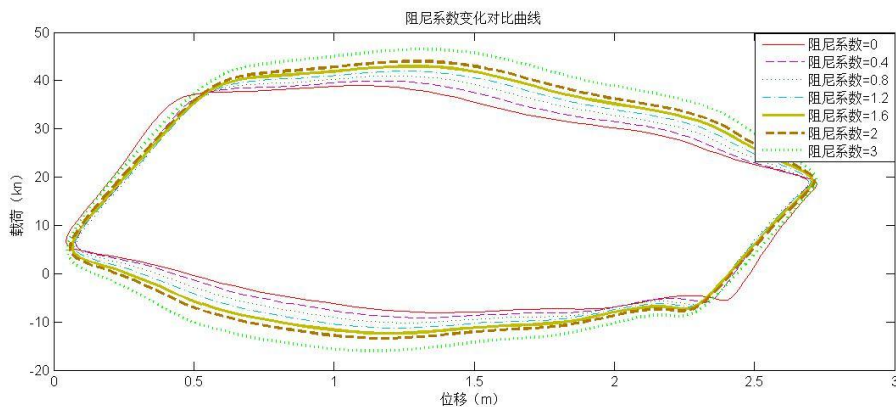


图 5-10 附件 1 井泵功图随阻尼系数变化对比曲线

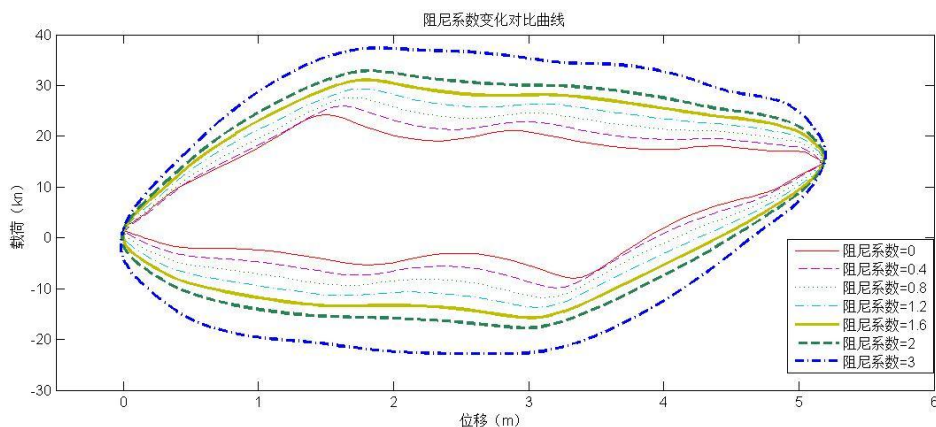


图 5-11 附件 2 井泵功图随阻尼系数变化对比曲线

通过上述图形可以得到三点认识：

- 阻尼系数对泵的载荷及冲程都有影响，其中对载荷的影响相对而言要大，对冲程的影响要小；
- 对冲程的影响中，对总冲程基本无影响，但有效冲程随着阻尼系数的变大而变小；
- 随着阻尼系数的增加，封闭区域的面积逐渐增大。

通过源程序进行计算得到的附件 1 井和附件 2 井的阻尼系数的值分别为 1.3764、0.6039。在图上的阻尼系数等于 0 和 2 之间存在。

由上面的认识及附件 1 井和附件 2 井的悬点、泵示功图对比曲线及数值计算的面积大小关系可以得到论断：

在本题的计算过程中附件 1 井和附件 2 井的计算的阻尼系数稍大于精确值(附件 2 井要更大些)，使得泵的示功图封闭曲线面积要明显大于地面悬点示功图的封闭曲

线面积。也说明了阻尼系数是一个非常重要而且敏感的参数，需要对 Gibbs 所提供的算法进行改进。

综上所述，虽然按照了 Gibbs 的方法循规蹈矩的进行了地面悬点示功图到地下泵示功图的转换，但转换的结果不理想，需要对阻尼系数进行进一步的研究，以得到符合实际的值。

## 6 问题三

### 6.1 有效冲程法计算产量

#### 6.1.1 有效冲程<sup>[8]</sup>的引出

抽油泵的吸入过程从固定阀打开时开始到固定阀关闭时结束，柱塞在这一段时间走过的距离即为固定阀开闭点之间的距离，记为  $S_x$ ；排出过程从游动阀打开时开始到游动阀关闭时结束，柱塞在这一段时间走过的距离即为游动阀开闭点之间的距离，记为  $S_p$ 。 $S_x$  的大小由固定阀的开闭点位置决定， $S_p$  由游动阀的开闭点位置决定；在  $S_x > S_p$  情况的情况下，柱塞有效冲程  $S_{pe} = S_p$ ；在  $S_x < S_p$  情况的情况下，柱塞有效冲程  $S_{pe} = S_x$ ；所以，柱塞有效冲程总是等于  $S_x$  与  $S_p$  其中的较小值，即  $S_{pe} = \min(S_x, S_p)$ 。

#### 6.1.2.泵功图确定有效冲程

有效冲程是柱塞的一个冲程中真正起到抽汲作用的行程，也是计算井下泵的实际排量所必需的参数，柱塞有效冲程主要依据泵示功图上阀开闭点的位置来确定。

由抽油泵的工作原理、观察理论泵示功图的几何特征可知，泵示功图上阀开闭点处曲率变化较大，且固定阀开闭点在上冲程的高载荷段，而游动阀的开闭点在下冲程的低载荷段。具体求取步骤为：

##### 1) 泵示功图各点的曲率 ( $K_i$ ) 计算模型<sup>[9]</sup>

泵示功图曲线上任意一点  $P_i$  的曲率  $K_i$  根据与其相邻的五个数据点： $P_i(S_{i-2}, f_{i-2})$ 、 $P_i(S_{i-1}, f_{i-1})$ 、 $P_i(S_i, f_i)$ 、 $P_i(S_{i+1}, f_{i+1})$ 、 $P_i(S_{i+2}, f_{i+2})$  之间的几何关系计算（如图 6-1）。

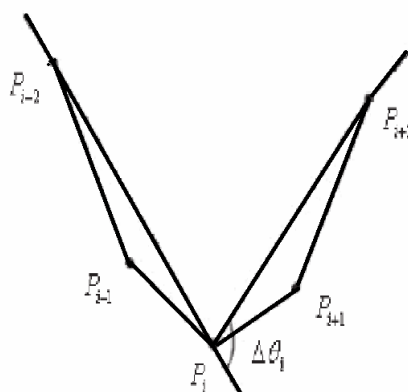


图 6-1 离散点曲率计算示意图

$$\text{则 } P_i \text{ 点的曲率为: } K_i = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta l_i} \quad (6-1)$$

其中： $\Delta\theta_i$  为直线  $P_{i-2}P_i$  到直线  $P_iP_{i+2}$  的有向旋转角度，计算公式：

$$\Delta\theta_i = \arctan\left(\frac{(f_i - f_{i+2})(S_i - S_{i-2}) - (f_i - f_{i-2})(S_i - S_{i+2})}{1 + (S_i - S_{i-2})(S_i - S_{i+2})}\right) \quad (6-2)$$

弧长  $\Delta l_i$  的近似计算公式如下：

$$\Delta l_i = \overline{P_{i-2}P_{i-1}} + \overline{P_{i-1}P_i} + \overline{P_iP_{i+1}} + \overline{P_{i+1}P_{i+2}} \quad (6-3)$$

## 2) 求泵功图各点的曲率变化 $\delta K_i$

根据泵示功图上任一离散采集点  $P_i(X_i, F_i)$  的曲率  $K_i$  及其后一采集点  $P_{i+1}(X_{i+1}, F_{i+1})$  的曲率  $K_{i+1}$  即可求出点  $P_i(X_i, F_i)$  的曲率变化量  $\delta K_i$ ；，即  $\delta K_i = |K_{i+1} - K_i|$ 。

## 3) 消除或降低点的曲率变化量 $\delta K_i$ 的波动误差

由于泵示功图的获取是采用数值计算方法得到的，泵示功图封闭曲线中含有大量高频成分，为了消除或降低其引起的曲率变化的波动，在实际算法中采用五点平均法求的中间点的曲率变化量  $\delta K_i$ ，以提高算法精度。即

$$\delta K'_i = (\delta K_{i-2} + \delta K_{i-1} + \delta K_i + \delta K_{i+1} + \delta K_{i+2}) / 5 \quad (6-4)$$

## 4) 寻找泵示功图的 4 个最大曲率变化点

在求得泵示功图上所有离散采集点  $P_1, P_2, \dots, P_f$  的曲率变化量  $\delta K'_1, \delta K'_2, \dots, \delta K'_f$  的前提下，运用穷举比较法，找到所有离散采集点中 4 个曲率变化最大点  $P_{m1}, P_{m2}, P_{m3}, P_{m4}$ 。

有效冲程计算产液量在获得柱塞的有效冲程后，结合有杆抽油系统的基础数据及原油的物性参数，并考虑抽油泵的漏失量，可以下式计算得到油井产液量<sup>[10]21-23</sup>：

$$Q = 1440 N_s \bullet S_{pe} A_p \bullet \eta_v \bullet \rho_{\text{混合液}} \quad (6-5)$$

式中， $Q$ ——油井的实际产量，t/d；

$N_s$ ——抽油机的冲次；

$S_{pe}$ ——柱塞有效冲程；

$A_p$ ——柱塞横截面积；

$Q_p$ ——抽油泵一个冲次的漏失量；

$\rho_{\text{混合液}}$ ——油井混合液体密度， $\rho_{\text{混合液}} = f_w \bullet \rho_{\text{水}} + f_o \bullet \rho_{\text{油}}$ ， $f_w$ 、 $f_o$  分别为含水率和含油率。

$\eta_v$ ——泵排出压力条件下油管内混合物的体积系数。

对上式，除  $\eta_v$  外，其余参数均可由附件中数据查得。

$\eta_v$  的求解：

$$\eta_v = \frac{1}{(1 - n_w) B_o + n_w B_w} \quad (6-6)$$

式中： $n_w$ ——标准条件(Pst, Tst)下混合液的含水率，%；

$B_o$ ——井下(P, T)条件下原油的体积系数，m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>；

$B_w$ ——井下(P, T)条件下水的体积系数，m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>。

对上式，除  $B_w$  外，其余参数均可由附件中数据查得。

$B_w$  的求解：

体积系数  $B_w$  是指油田水在泵出口处的体积与在地面的体积之比，可由下式

$$B_w = C_0 + C_1(145.03p) + C_2(145.03p)^2 \quad (6-7)$$

式中， $p$ ——井下压力，MPa；

$C_0$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ ——系数

$$C_i = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$$

$\theta$ ——井下温度， $\theta = 1.8t + 32, F$ ；

系数  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$  的取值按天然气饱和水计算，如表（表 6-1）所示

表 6-1 系数  $a_0, a_1, a_2$  对应表

		系数 $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 的值		
—		$a_0$	$a_1$	$a_2$
脱气水	$C_0$	$9.947 \times 10^{-1}$	$5.8 \times 10^{-6}$	$1.02 \times 10^{-6}$
	$C_1$	$-4.228 \times 10^{-6}$	$1.8376 \times 10^{-8}$	$-6.77 \times 10^{-11}$
	$C_2$	$1.3 \times 10^{-10}$	$-1.3855 \times 10^{-12}$	$4.285 \times 10^{-15}$
天然气饱和水	$C_0$	$9.911 \times 10^{-1}$	$6.35 \times 10^{-6}$	$0.85 \times 10^{-6}$
	$C_1$	$-1.093 \times 10^{-6}$	$-0.3497 \times 10^{-8}$	$0.457 \times 10^{-11}$
	$C_2$	$-0.50 \times 10^{-10}$	$0.6429 \times 10^{-12}$	$-1.43 \times 10^{-15}$

此时，我们求得  $\eta_{v1} = 1.0153$ 。

### 6.1.3 模型的解

(1) 对于附件 1 井：

通过对上述思路进行分析，运用 MATLAB 编程计算（程序见附录 3.1），得到附件一中曲率变化量  $\delta K_i$  与相应点位移的关系（如图 6-2）：



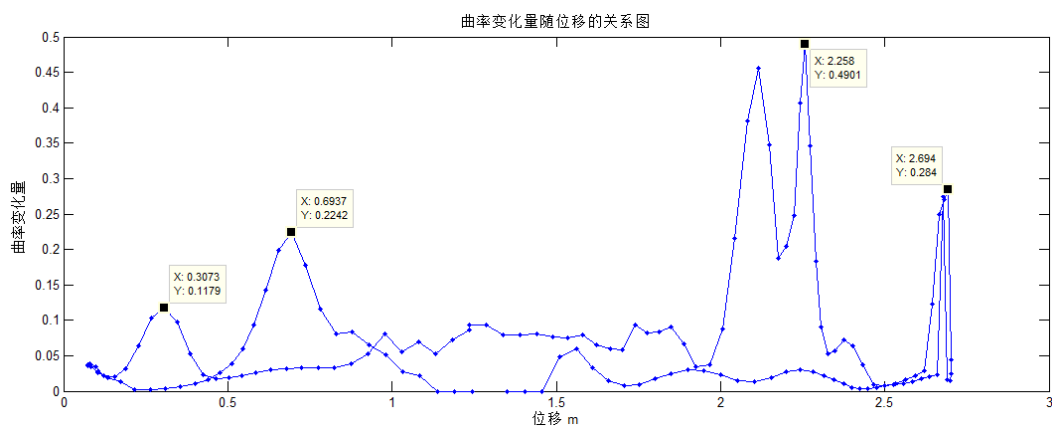


图 6-2 曲率变化量随位移的关系图

由上图初步判断：沿着泵功图顺时针方向，在上冲程的高载荷段， $\delta K_i$  较大的两个点为 A、B，作为固定阀的开闭点；在下冲程的低载荷段， $\delta K_i$  最大的两个点 C、D，作为游动阀的开闭点

再将上图与问题二中得到的泵功图在统一坐标图下进行比较（如图 6-3）：

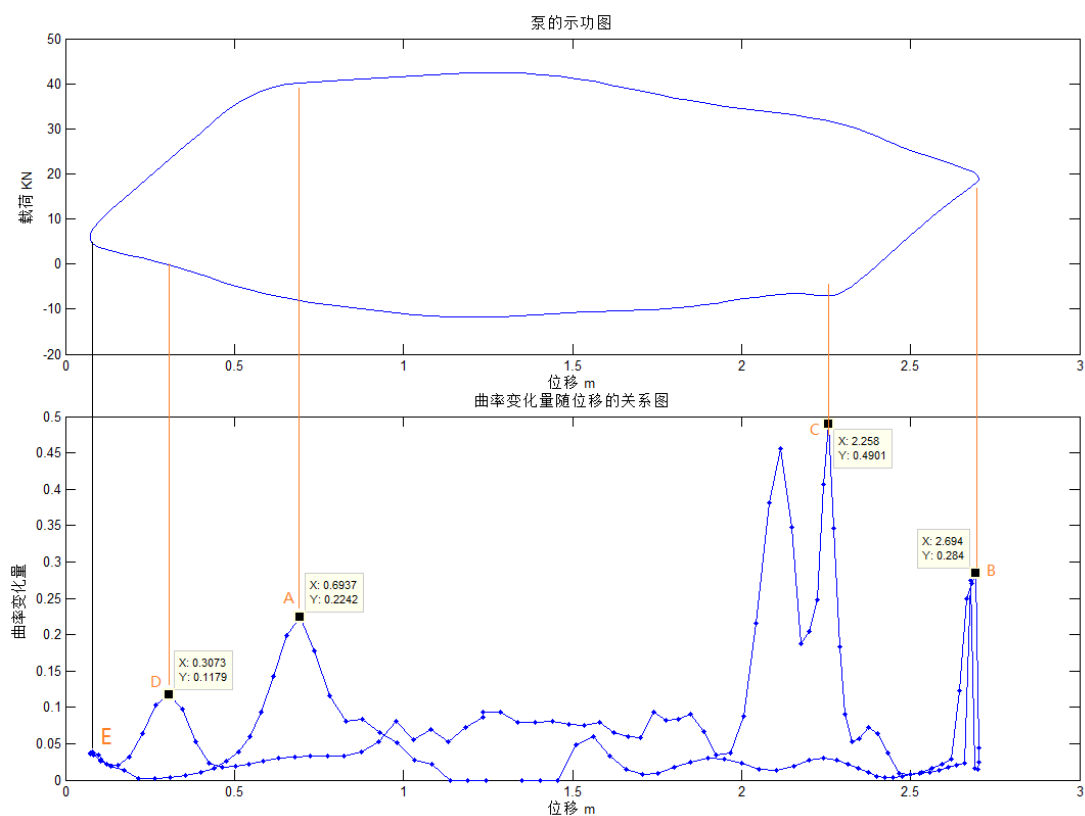


图 6-3 泵功图与曲率变化比较图

图形分析：由上图直观得知，A、B、C、对应于泵功图阀开闭点处曲率变化较大处，而点 D 曲率变化量虽然大于点 E，但其与对应的泵功图变化出现稍许误差（D 与 E 水平轴距离 $<0.15\text{m}$ ），分析原因在于,图中的尖点值是在所有由载荷量和位移量构成

的离散点群中全局求得的离散曲率变化量，因而存在着一定风险，但由泵功图的变化趋势，我们有理由将 E 取代 D 作为游动阀的闭点，至此得知 A、B、C、E 即为四个阀开闭点，对应坐标如图所示。

易得固定阀开闭点之间的距离  $S_x$  为 A、B 横坐标间距，游动阀开闭点之间的距离  $S_p$  为 C、D 横坐标间距，又问题分析中有效冲程  $S_{pe} = \min(S_x, S_p)$ ，因而得  $S_{pe} = S_x = 2.0003 \text{ (m)}$ 。

将  $S_{pe}$  及附件 1 有关数据带入上文所述泵排量公式得附件 1 中油井日产液量

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 1440 N_s \bullet S_{pe} A_p \bullet \eta_v \bullet \rho_{\text{混合液}} \\
 &= 1440 * 7.6 * 2.003 * \pi * (70/1000)^2 / 4 * 1.0153 * \rho_{\text{混合液}} \\
 &= 86.02880572 \text{ t/d};
 \end{aligned}$$

(2) 对于附件 2 井:

通上面完全类似的，此时多级抽油杆井下，得到泵功图和曲率变化量的比较图(如图 6-4)

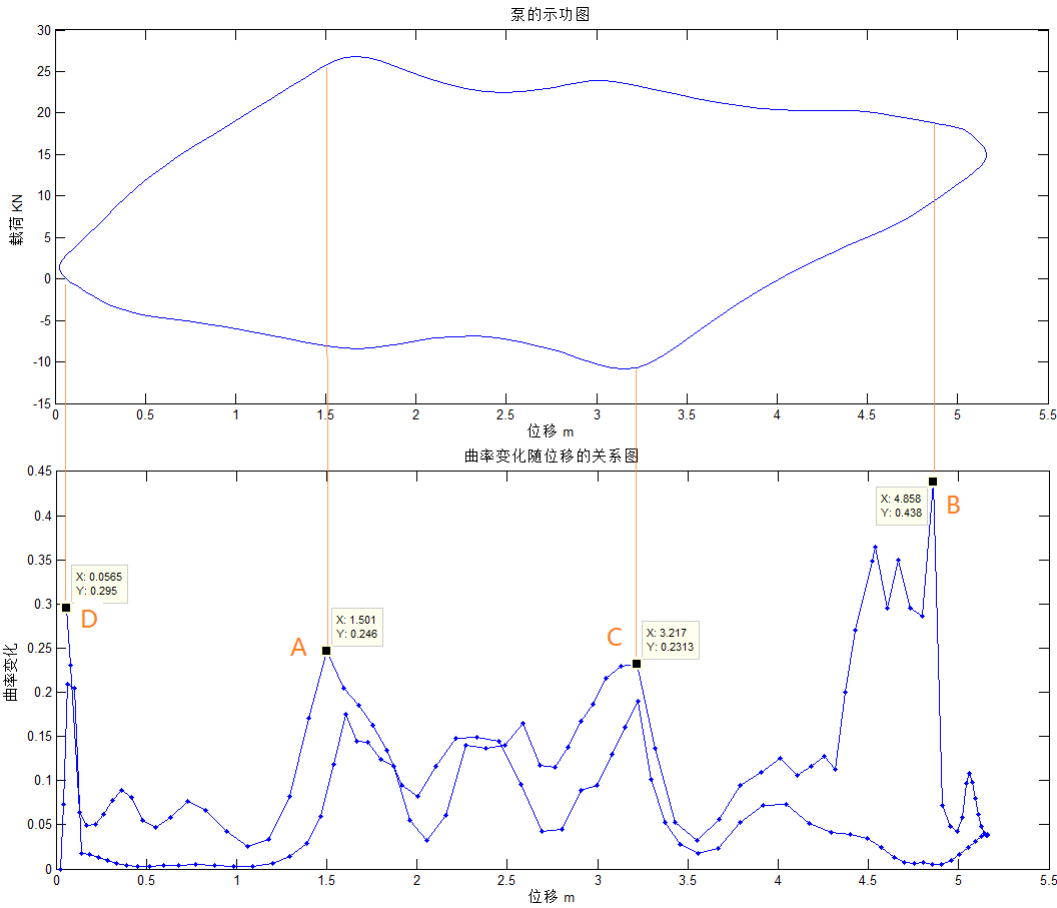


图 6-4 泵功图和曲率变化量的比较图

图形分析及计算结果：类似于附件 1 中油井的分析，得到附件 2 中油井其有效冲程  $S_{pe} = \min(S_x, S_p) = S_p = 3.1605$  (m)；将  $S_{pe}$  及附件 2 有关数据带入上文所述泵排量公式得附件 2 中油井日产液量

$$Q_2 = 1440 N_s \cdot S_{pe} A_p \cdot \eta_v \cdot \rho_{\text{混合液}} = 65.372646672 \text{ t/d};$$

## 6.2 面积法计算产量

### 6.2.1 面积法原理

面积法<sup>[11]</sup>思想：由数学方法（如本文求解吉布斯波动方程）求得油井的泵功图，其间考虑到由悬点示功图到泵功图转化过程中诸如动载阻尼、泵筒内间隙引起的活塞漏失和油稠的影响因素，最后通过悬点示功图做出其合理的理论地面示功图，与计算得到的泵功图作比较，将理论产液量与实际产液量的比例关系转换为地面示功图面积与泵功图面积的比例关系。而上述功图均可由 MATLAB 编程求得。

具体思路如下：

下图（如图 6-5），黑色不规则封闭曲线为实测地面功图（本文采用附件中悬点各类数据作出悬点示功图），外围平行四边形为理论示功图，下方红色封闭曲线为泵功图（本文是运用 MATLAB 方程将悬点示功图转化得到）

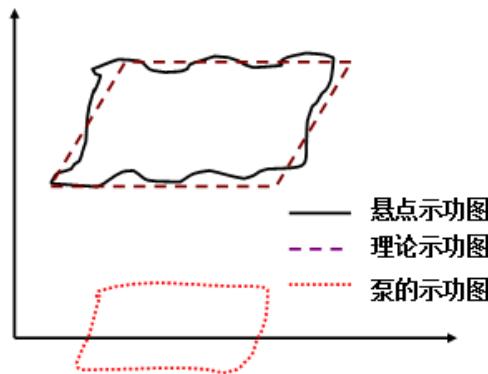


图 6-5 数学解析功图

由此，理论示功图和泵功图面积关系为：

$$\frac{A}{A_p} = \frac{Q_{\text{泵功量油}}}{Q_{\text{理论}}} \quad (6-8)$$

其中： $Q_{\text{理论}} = 1440 \times \frac{\pi(D)^2}{4} \times S_{\text{光杆冲程}} \times n \times \rho_{\text{混合液}}$  为理论产液量； $n$  为冲次； $\rho_{\text{混合液}}$  为混合液比重。

至此本模型求解的关键点在于求得功图面积。

### 6.2.2 模型的求解

(1) 对于附录 1 井：

利用附件 1 中悬点荷载及位移数据，运用 matlab 编程（程序见附录 3.2, 3.3）做出悬点示功图与理论示功图（如图 6-6）、泵功图（如图 6-7）分别为：

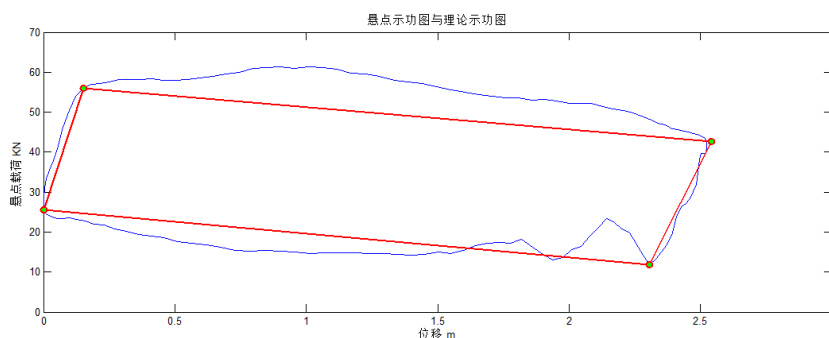


图 6-6 附件 1 井悬点示功图与理论示功图

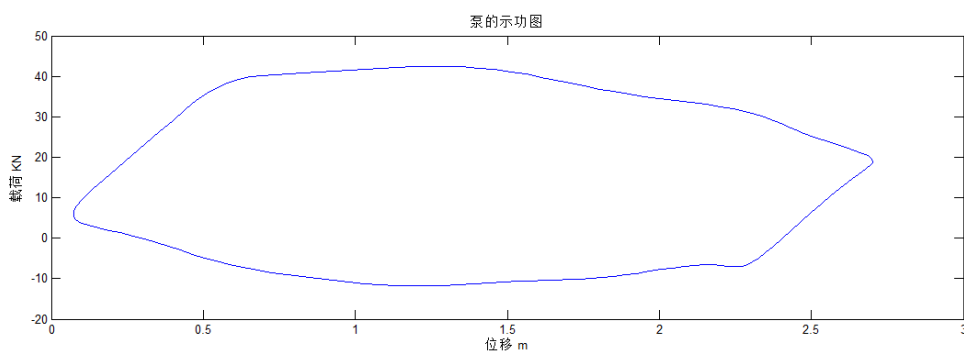


图 6-7 附件 1 井泵功图

面积求解：理论施工图近似为平行四边形，面积易得，泵功图可看做平面多边形，其面积可采用平面多边形有向面积方法<sup>[12]</sup>编程求得，（程序见附录 3.4）故得到各自面积为  $A_p = 74.101294 \text{ KN} \cdot \text{m}$   $A = 103.7743 \text{ KN} \cdot \text{m}$

产液量：由以上数据得到附加 1 中油井日产液量：

$$Q_{1\text{面积法}} = Q_{1\text{理论}} \times \frac{A}{A_p} = 1440 \times \frac{\pi \left( \frac{70}{1000} \right)^2}{4} \times 2.5 \times 7.6 \times \rho_{\text{混合液}} \times \frac{103.7743}{74.101294}$$

$$= 147.1709836 \text{ t/d}$$

(2) 对于附件 2 井:

完全类似与上面, 对于附件 2 所示多级杆油井, 得到其悬点示功图与理论示功图 (如图 6-8)、泵功图 (如图 6-9) 分别为:

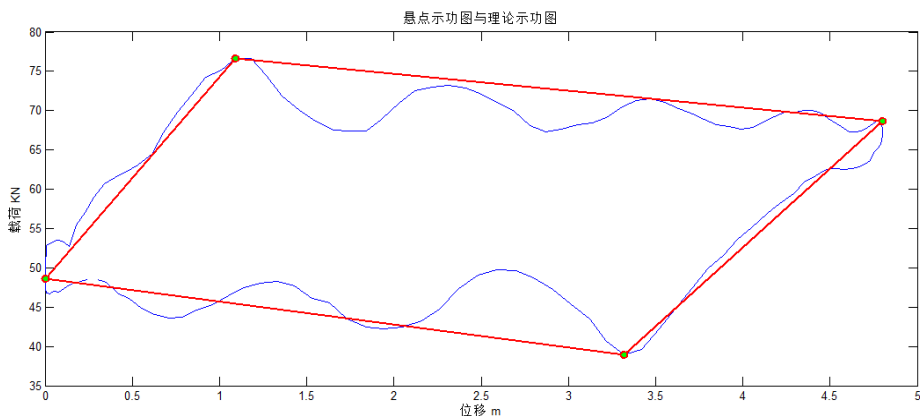


图 6-8 附件 2 井悬点示功图与理论示功图

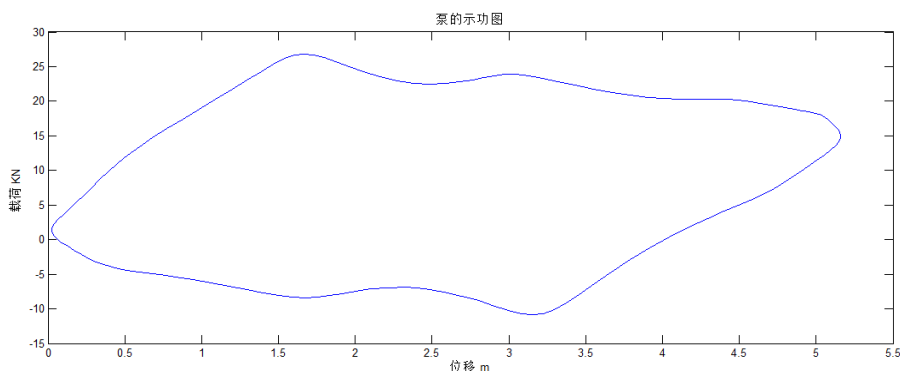


图 6-9 附件 2 井泵功图

与求解附件 1 油井之各图面积相同的程序, (附录中不再重复) 得到附件 2 中各示功图面积为  $A_p = 112.846900 \text{ KN} \cdot \text{m}$   $A = 121.7774 \text{ KN} \cdot \text{m}$

由此, 带入数据附加 2 中得到油井日产液量:

$$Q_{2\text{面积法}} = Q_{2\text{理论}} \times \frac{A}{A_p} = 1440 \times \frac{\pi \left( \frac{44}{1000} \right)^2}{4} \times 4.868 \times 4 \times \rho_{\text{混合液}} \times \frac{121.7774}{112.846900}$$

$$= 108.1466 \text{ t/d}$$

两种模型求解结果分析:

两种方法估算出的产量值存在明显差异,分析其原因在于:运用面积法时,在相同供液条件(泵充满程度一样)和机采设备情况下,油质好(粘度低)的油井算出来的产量就比油稠的要高很多,误差较大,而由附件 1、2 中原油粘度(30mPa\*s)和密度(0.864(g/cm<sup>3</sup>))的值可知,附件 1、2 油井中原油接近稠油,其本身计算结果存在较大误差,因而与模型①计算结果存在明显差异是合理的,因此,本问题结果可靠性,推荐倾向于模型①的计算数据。

## 7 问题四

### 7.1 方程差分化反解阻尼系数

Gibbs 描述抽油杆运动和应力传播的粘滞阻尼波动方程“波动方程”的数学公式为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7-1)$$

将该波动方程的差分化处理<sup>[7]270-284</sup>,用牛顿有限差分方程解式,并约定以下符号:

在  $x$  方向上取等步长  $\Delta x$  的节点(如图 4-1),以角标  $i$  表示;在时间  $t$  方向取等步长  $\Delta t$  的节点,以角标  $j$  表示,  $j=i=0, 1, \dots, N$ 。

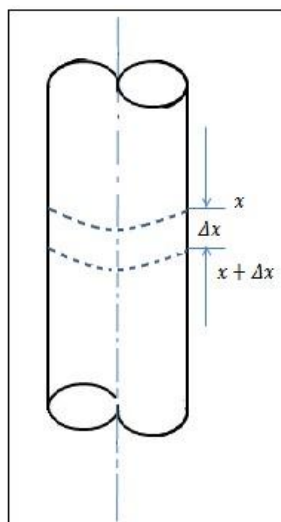


图 4-1 抽油杆运动微元模型

根据牛顿前差分公式

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j-1} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t}\end{aligned}\quad (7-2)$$

得到牛顿中心差分公式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} \quad (7-3)$$

同理：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (7-4)$$

将以上式子带入波动方程，化简就得

$$u_{i,j+1} = \frac{\left[\frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (2 + c\Delta t)u_{i,j} - u_{i,j-1}\right]}{(1 + c\Delta t)} \quad (7-5)$$

将同类项合并做参数系数处理得到：

$$u_{i,j+1} = \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2(1 + c\Delta t)} u_{i+1,j} + \frac{(2 + c\Delta t - 2\frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2})}{(1 + c\Delta t)} u_{i,j} + \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2(1 + c\Delta t)} u_{i-1,j} - \frac{1}{(1 + c\Delta t)} u_{i,j-1} \quad (7-6)$$

得到：

$$u_{i,j+1} = Au_{i+1,j} + Bu_{i,j} + Cu_{i-1,j} + Du_{i,j-1} \quad (7-7)$$

$$A = C = \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2(1 + c\Delta t)}, B = \frac{(2 + c\Delta t - 2\frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2})}{(1 + c\Delta t)}, D = -\frac{1}{(1 + c\Delta t)} \quad (7-8)$$

如果对于上述式子（7-7）中，假设  $u_{i,j+1}$ ， $u_{i+1,j}$ ， $u_{i,j}$ ， $u_{i-1,j}$ ， $u_{i,j-1}$  已知，即可通过（7-8）反推求出  $c$  值。

## 7.2 矩阵化

对上面的方程（7-7）进行标准化矩阵处理，得到

$$Y=X \times K; \quad (7-9)$$

$$Y=\begin{bmatrix} u_{x,t+\Delta t+(i+0)\Delta t} \\ u_{x,t+\Delta t+(i+1)\Delta t} \\ \vdots \\ u_{x,t+\Delta t+(i+n-1)\Delta t} \end{bmatrix}, \quad K=\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}, \quad (7-10)$$

$$X=\begin{pmatrix} u_{x+\Delta x,t+(i+0)\Delta t} & u_{x,t+(i+0)\Delta t} & u_{x-\Delta x,t+(i+0)\Delta t} & u_{x,t-\Delta t+(i+0)\Delta t} \\ u_{x+\Delta x,t+(i+1)\Delta t} & u_{x,t+(i+1)\Delta t} & u_{x-\Delta x,t+(i+1)\Delta t} & u_{x,t-\Delta t+(i+1)\Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{x+\Delta x,t+(i+n-1)\Delta t} & u_{x,t+(i+n-1)\Delta t} & u_{x-\Delta x,t+(i+n-1)\Delta t} & u_{x,t-\Delta t+(i+n-1)\Delta t} \end{pmatrix}; \quad (7-11)$$

$n$ ——将抽油杆一个周期冲程分成  $n$  等份；

$t$ ——代表是时间参考点，比如工作日的上午 8 点 0 分 0 秒，对计算无影响，s；

$\Delta t$ ——所选取的时间微元；

$x$ ——也是一个参考点位置，可以认为是海平面高度此时取 0；

$t+(i+0)\Delta t$ ——代表测量开始的时间点， $i$  的取之依赖于这个数值，如果按  $t$  为上午 8 点 0 分 0 秒，开始测量的时间为上午 9 点 0 分 0 秒，则  $i$  值为 1 个小时的时间长度除以  $\Delta t$ ；

$i$ ——是一个固定值，且为整数，由实际工程中进行数据采集时的初始时间取值点而定，通过固定三个位置点，改变  $i$  值，可实现不同起始时刻的选取，从而进行多个测量，每个测量得到一个阻尼系数值，理论上相差不大，对这些值进行平均处理，可从理论上降低因单个测量导致的误差。

本公式仅适合单井的数据采集并进行标准化数据矩阵处理，若测量多个井的位移时间数据，通过改变  $x$ ， $i$  值，即可达到多口井的数据处理。

很明显，本矩阵方程是方程数多于未知变量的线性方程组，应用最小二乘原理，可以得到其最适解(即矛盾方程组)，系数向量  $K$  的最优估计则<sup>[13]</sup>为

$$K_b=(X^T X)^{-1} X^T Y; \quad (7-12)$$

方程的求解依赖于这几个数据的获得，由图可以直观的了解：

$$u_{i,j+1}, u_{i+1,j}, u_{i,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j-1}$$



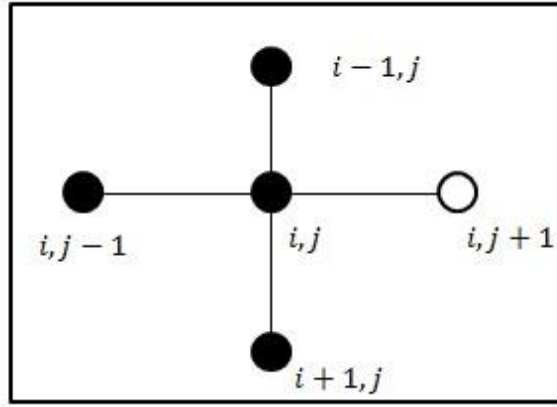


图 7-2 有限差分格式

从上面的方程可知，这里面涉及到三个位置，即  $u_i, u_{i+1}, u_{i-1}$ ，下面的分析中用  $u_x$ ，

$u_{x+\Delta x}$ ， $u_{x-\Delta x}$  代替；

通过实际的技术（第 5 节介绍）对这些数值进行实时采集，总的来看就是抽油杆上相邻的三个点在不同时刻的位移量。将这三个点的位置确定，固定后对这三个点的位移-时间关系数据进行采集，将这些数据做成上面的矩阵形式。通过编制程序，因为最小二乘法的最优估计矩阵表达式，在一般的程序集上都有该算法，用这样的源程序<sup>[14]</sup>（具体算法见附件 4.1）进行计算机实现，即可得到所需的 K 矩阵，即系数矩阵。

由得到的系数矩阵，反求阻尼系数的表达式为：

$$c = (1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2 A}) / \Delta t, c = (1 - \frac{(1 - 2 \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2})}{B - 1}) / \Delta t, \quad (7-13)$$

$$c = (1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2 C}) / \Delta t, c = (1 - \frac{-1}{D}) / \Delta t;$$

### 7.3 收敛条件及方程可解条件

- a) 对有限差分分解公式的收敛条件进行分析：令阻尼系数  $c=0$  带入方程（7-6）中，R.W.亨别克指出，有限差分得项  $u_{i,j}$  的系数如果是负值，其解不稳定，所以有限差分得收敛条件是：

$$1 - \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = 1 - a^2 (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 \geq 0 \quad (7-14)$$

b) 对向量  $\mathbf{K}$  的最优估计矩阵解  $\mathbf{K}_b = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$  进行分析, 此公式可以得到结果的条件为  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  可逆, 即

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_{x+\Delta x, j+i\Delta t} & u_{x, j+i\Delta t} & u_{x-\Delta x, j+i\Delta t} & u_{x, j-\Delta t+i\Delta t} \\ u_{x+\Delta x, j+(i+1)\Delta t} & u_{x, j+(i+1)\Delta t} & u_{x-\Delta x, j+(i+1)\Delta t} & u_{x, j-\Delta t+(i+1)\Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{x+\Delta x, j+(i+n-1)\Delta t} & u_{x, j+(i+n-1)\Delta t} & u_{x-\Delta x, j+(i+n-1)\Delta t} & u_{x, j-\Delta t+(i+n-1)\Delta t} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u_{x+\Delta x, j+i\Delta t} & u_{x, j+i\Delta t} & u_{x-\Delta x, j+i\Delta t} & u_{x, j-\Delta t+i\Delta t} \\ u_{x+\Delta x, j+(i+1)\Delta t} & u_{x, j+(i+1)\Delta t} & u_{x-\Delta x, j+(i+1)\Delta t} & u_{x, j-\Delta t+(i+1)\Delta t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{x+\Delta x, j+(i+n-1)\Delta t} & u_{x, j+(i+n-1)\Delta t} & u_{x-\Delta x, j+(i+n-1)\Delta t} & u_{x, j-\Delta t+(i+n-1)\Delta t} \end{pmatrix};$$

影响其可逆的两个因素为  $\Delta t$  和  $\Delta x$  的取值。根据本节中收敛性要求, 可以定出  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  的比值范围, 我们假定  $\Delta x$ , 根据这个假定值, 得到  $\Delta t$  的取值范围, 一般取最大的  $\Delta t$  值, 同时  $\Delta t$  的取值要是泵一个冲程周期的整数倍  $n$ 。这样得到的  $\Delta t$  和  $\Delta x$  的取值后, 进行数据采集, 得到  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ , 判断是否可逆, 若可逆, 可继续下面的计算, 若不可逆, 则重新调整  $\Delta x$ , 并按照相应的步骤继续运算, 直到满足要求即可。

### 7.3 实际情况下数据采集

数据采集的内容为抽油杆上相邻的三个点在不同时刻的位移量。这三个点为

$u_x(t)$ ,  $u_{x+\Delta x}(t)$ ,  $u_{x-\Delta x}(t)$ ; 既然悬点的位移-时间数据可以测得, 那么悬点下面的第一级抽油杆上的离悬点比较近的点的位移-时间变化数据也可以通过技术的进步及应用进行采集。这样的数据采集测点如下图所示:

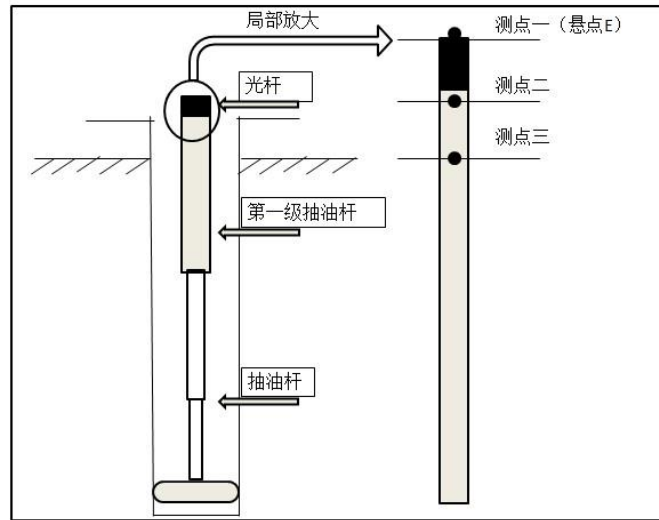


图 7—3 第一级抽油杆测点设计图

规定图上的测点一 (悬点 E) 为上面三点中的  $u_{x-\Delta x}(t)$ , 测点二为  $u_x(t)$ , 测点三为  $u_{x+\Delta x}(t)$ 。

通过这样的测试既可以得到第 3 小节需要的三点的位移-时间变化,进而就可以得到计算阻尼系数值了,以便用于其他参数的计算。

#### 7.4 合理性分析

1) 本题中的数据是从实际的油田井的数据实时获得的,能够很好的反应实际情况,而且计算的精度较高,如果测点的测试技术可行(在距离地面的近 20 米的区域内设置两个测试点,这样的技术应该可以实现),完全可以应用到实际中,进行使用。

2) 本算法中考虑了测试数据的多次周期完成,可对得到的  $n$  个阻尼系数进行平均化处理,得到误差较小的阻尼系数值。

3) 对于测点的选取,一般工程上在进行修井作业时,需要将抽油杆的很多条油管取出,一个油管的长度大约在 9 到 10 米,那么可以在距离悬点最近的两个油管的末端处装备测试仪器,此时  $\Delta x$  的取值即为一根油管的长度(9-10 米)。

4) 本算法实际就是用差分方法离散波动方程,并对多点实时数据进行矩阵处理,并用最小二乘法理论进行系数求解,再反求系数中阻尼系数的过程。最后得到的阻尼系数可用到第二问中提到的 Gibbs 悬点示功图到泵施工图的转化理论中。

5) 本方法是从数学估计方法的角度,应用最小二乘原理,严格地确定差分方程中的四个系数  $A, B, C, D$ ,并通过矩阵求解,反求出相应的  $c$  值。而其他的方法,如迭代法,需要根据设定的  $c$  得到泵功图,这个过程每次试错都需要绘制泵功图曲线,花费大量的调试时间,并且人工试错很难准确的给出  $c$  最佳初始迭代值,避免带来一定的盲目性和不确定性。从具有很大的改进意义。

6) 由于测点的实时数据采集在工程现场能否实现还需要研究,但其超出了本理论研究的范围,它只是一种工程实现问题,若在将来可以实现,就可以依靠这个理论解法进行阻尼系数的精确计算。

### 8 模型的评价和改进

本文的核心模型是基于 S.G.Gibbs 提出的有杆抽油系统动态参数计算机仿真的一维模型,即 Gibbs 波动方程,虽然波动方程在不断发展和完善中,但尚存不足<sup>[15]</sup>。当运用高转差率或超高转差率电动机驱动有杆抽油系统时,电机转速存在波动,对系统动态参数存在影响,虽然目前的一维模型考虑了此点,但在建模时做了线性化处理:假设电动机的机械特性曲线为直线,不考虑地面传动装置运动件的惯性对点击负荷扭矩的影响,因而,模型只适应于低转差率电机驱动的有杆抽油系统。

问题一,通过简化 B 点处运动轨迹与否,建立了抽油机悬点的两种运动规律模型,比较两种模型的位移-时间曲线发现,两曲线趋势和走向大体一致,但相应时刻两曲线位移量相差甚远。分析可知,将 B 简化会曲柄滑块运动得到的模型本身存在

曲线歪曲的误差，只能用于一般性分析和计算，而另一种精确分析模型更符合理论研究。

问题二，按照了 Gibbs 的方法循规蹈矩的进行了地面悬点示功图到地下泵示功图的转换，但转换的结果不理想，准确性差。表现为，计算过程中附件 1 井和附件 2 井的计算的阻尼系数稍大于理想值（附件 2 井要更大些），使得泵的示功图封闭曲线面积（做功多少）要明显大于地面悬点示功图的封闭曲线面积。同时做了两口井的阻尼系数对示功图形状和位置影响的单因素分析对比，发现了阻尼系数对示功图的封闭面积影响较大，而决定泵冲程的示功图位置影响要小。说明了阻尼系数是一个非常重要而且敏感的参数，需要对 Gibbs 所提供的算法进行改进，以得到符合实际的值。

问题三，建立泵功量油的两种模型——有效冲程法模型、面积法模型；在问题二得到的泵示功图的基础上，对油井产量进行了模型假设基础上的估计值。对比结果可知，两模型结果相去较远，因为面积法的运用存在局限性，对于附件 1、2 中的近似稠油井情况不能有效预测，因而有效冲程法模型更具预测性和可靠性。

问题四，我们用有限差分方法分解 Gibbs 波动方程，并对多点实时数据进行测量及做采集数据的矩阵处理，结合有限差分方程，用最小二乘法理论进行矛盾方程组系数求解，再反求矛盾方程组系数矩阵中的阻尼系数。然后将得到的阻尼系数用到第二问中提到的 Gibbs 悬点示功图到泵施工图的转化理论中，可得到本理论基础上的泵处载荷和位移的时变数据。此过程中进行了求解阻尼系数理论公式的推导，提出了实际工程中的数据采集的测点测量的方法，以及测点数据在有限差分方程中的使用。其中部分参数（如位置步长，时间步长的取值方法等）仅给出了理论上的解释和估计，未进行具体的实际问题检验，具有一定的局限性；提出的悬点处下方设置测点的方法未在实际工程中应用，影响其适用性和推广性。

## 参考文献

- [1] 王鸿勋，张琪. 采油工艺原理[M]. 北京：石油工业出版社，46-56，83-89，1985.
- [2] 韩修廷. 有杆泵采油原理及应用[M]. 北京：石油工业出版社，32-36，2007.
- [3] Gibbs. S. G N A B. Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells[J]. J.Pet.Tech., Jan. 1966.
- [4] G G S. Method of Determining Sucker Rod Pump Performance: United States Patent Office, Sep.1967.
- [5] 陈宪侃. 抽油机采油技术[M]. 北京：石油工业出版社，168-172，2004.

- [6] 万仁溥. 采油工程手册[M]. 石油工业出版社, 454-459, 2000.
- [7] 崔振华等. 有杆抽油泵[M]. 北京: 石油工业出版社, 197-208 270-284, 1994.
- [8] 杨伟. 功图法在油井产量计量中的应用研究[J]. 机械, :64-672011(4).
- [9] 王天柱, 史建山, 李丹. 利用泵示功图的井口产液量计算[J]. 中国西部科技, :21-23 2012(5).
- [10] 岳广韬. 抽油机井地面示功图量油技术研究[D]. 中国石油大学石油工程学院: 37-40, 2011.
- [11] 余金泽, 彭永刚, 关成尧, 等. “功图量油”技术的发展[J]. 中国石油和化工 :51-5 2009(4) 4.
- [12] 喻德生. 关于平面多边形有向面积的一些定理[J]. 赣南师范学院学报:14-17 1999(3).
- [13] 何惠, 张建云. 马斯京根法参数的一种数学估计方法[J]. 水文, :15-18.1998(5)
- [14] Zhujiang. c语言实现, 用最小二乘法求解方程数多于未知变量的线性方程组的最适解[EB/OL]. [9月23日]. <http://blog.csdn.net/zhujiang1001/article/details/4043304>.
- [15] 崔振华, 刘元虎. 机械采油系统工程[M]. 北京: 石油工业出版社, 162-163, 1985.