

# 1 问题重述

## 1.1 背景

有杆泵抽油是当前国内外应用最广泛的人工举升采油技术，目前世界上机械采油井数已超过总生产井数的 90% 以上，70% 以上的机械采油井都采用有杆泵抽油模式，我国则有 90% 以上的生产井采用有杆抽油模式。有杆抽油模式采油的简单流程是：电机旋转运动转化为抽油杆上下往返周期运动，带动设置在杆下端的泵的两个阀相继开闭，从而将地下上千米深处蕴藏的原油抽到地面上来。

钢制抽油杆由很多节连接而成，具有相同直径的归位同一级，级数最多可达 5 级，长度可达上千米。描述抽油杆中任意水平截面处基本信息的通用方法是示功图，函数关系可表现为位移-荷载关于时间  $t$  的参数方程。其中，一个冲程中示功图是一个封闭的曲线。抽油杆上端点称为悬点，建立该悬点的示功图称为悬点示功图。而“泵”是由柱塞、游动阀、固定阀、部分油管等几个部件构成的抽象概念，泵中柱塞处的示功图称为“泵功图”。通过悬点示功图可以初步诊断该井的工作状况，如产量、气体影响、沙堵等等。要精确诊断油井的工作状况，最好采用泵功图。而在实际应用中，泵在地下深处，测试起来困难大、成本高。因此，把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图并最终确定泵功图，以准确诊断该井的工作状况，是一个非常有价值的实际问题。

## 1.2 问题

现要求通过数学建模来完成以下任务：

- (1) 分析光杆悬点的运动规律。假设驴头外廓线为部分圆弧、电机匀速运动，光杆悬点下只挂光杆，按附录中给出的四连杆各段尺寸和附件中给出的参数，求出该悬点的一个冲程的规律：位移函数、速度函数、加速度函数。并与指定附件中数据进行比较。
- (2) 泵功图的计算。Gibbs 给出了悬点示功图转化为地下示功图的模型，使用 Gibbs 模型，给出悬点示功图转化为泵功图的详细过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法。利用附件中给出的一级杆的某油井参数和悬点示功图数据，三级杆的另一油井参数和悬点示功图数据，分别计算出这两口油井的泵功图数据，并分别绘制出两油井的悬点示功图和泵功图。
- (3) 泵功图的应用。
  - ① 建立两个不同的由泵功图估计油井产量的模型，其中至少一个要利用“有效冲程”；并利用附件中给出的数据分别估算两口油井一天的产液量。
  - ② 如图 5 (C) 形式的泵功图表示泵内有气体，导致泵没充满。要求建立模型或算法，由计算机自动判别某泵功图数据是否属于泵内有气体的情况。并对附件中对应的泵功图进行计算机诊断，看其是否属于泵内充气的情况。
- (4) 深入研究的问题。
  - ① 要求对 Gibbs 模型进行原理分析，发现它的不足。在合理的假设下，重新建立抽油系统模型或对现有模型进行改进，并给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法。利用附件中给定的数据重新进行计算，对计算结果与问题 (2) 的计算结果进行比较，分析所建模型的优缺点。

- ② Gibbs 模型在数学上可简化为“波动方程”：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t}$$
。其中  $a$  为已知常数，

$c$  为阻尼系数，鉴于大多数的阻尼系数公式是作了诸多假设后推出的，并不能完整地

反应实际情况。如果能从方程本身和某些数据出发用数学方法估计参数  $c$ ，贡献是很大的。要求对此进行研究，详细给出计算  $c$  的理论推导过程并尽可能求出  $c$ 。如果需要题目之外的数据，要用字母表示并给出计算  $c$  的推导过程。

## 2 问题分析

### 2.1 对问题（1）的分析

问题 1 中包含了对光杆悬点运动规律的分析。电机旋转运动通过四连杆机构转变为抽油杆的垂直运动，假设驴头外轮廓线为部分圆弧、电机匀速转动，悬点 E 下只挂光杆，则可将杆抽油系统地面实物图抽象成如图 1 所示的抽油机器四连杆机构简图。假设曲柄滑块 D 在制定轨道内做匀速圆周运动，悬点 E 的运动过程为： $t=0$  时刻，曲柄滑块 D 位于上顶点（ $\phi=0$ ），AB 平行于水平面，E 对应坐标原点（称为 E 的下死点），E 的位移为 0；D 运动到下顶点（ $\phi=\pi$ ）时，E 的位移到达最大（称为 E 的上死点）；D 接着运动到上顶点（ $\phi=2\pi$ ）时，E 又回到位移为 0 的位置，完成一个周期（即一个冲程）。其中，一个冲程有上冲程和下冲程两部分组成，上冲程是抽油杆带着柱塞向上运动，柱塞上的游动阀受管内液体压力而关闭，它是泵内吸入液体，井口排出液体的过程；下冲程是抽油杆带着活塞向下运动，柱塞压缩固定阀和游动阀之间的液体。

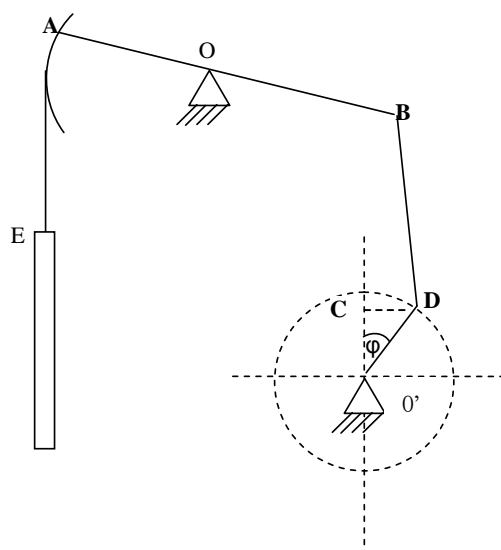


图 1 抽油机器四连杆机构简图

### 2.2 对问题（2）的分析

问题（2）中包含了对泵功图的计算，泵功图直接反应了泵的工作状态。悬点示功图反映悬点载荷与位移的关系曲线，测取悬点示功图最主要的目的是判断井下泵的工作情况，通常习惯上认为凭借地面上悬点示功图就可以分析出井下泵的工作状况，但实际上仅凭地面悬点示功图很难做出较准确的判断，甚至有时根本无法判断井下的工作状况，这是因为油井深度在几百到几千米不等，在柱塞载荷变化经上千米的抽油杆柱传递到地面的过程中，受抽油杆柱或液柱的弹性形变、惯性力等因素影响，使得悬点示功图与泵功图有很大差异，所以人们一直在设法获得有效的泵功图。它的求解不仅有利于对泵况进行准确的分析及故障判断，还可以求出泵的有效排量，从而准确的求出油井产液量。因此，井下泵供图的转化是非常重要的。1966 年，Gibbs 给出了悬点示功图转化为地下

示功图的模型，当时由于受计算机速度的限制，直到近些年来才被重新重视。此处，我们根据 Gibbs 模型，得出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程。我们可以根据附件 1 中给定的只有一级杆的某油井参数和悬点示功数据画出该油井的悬点示功图，根据附件 2 中给定的有三级杆的另一油井参数和悬点示功数据画出该油井的悬点示功图，利用上述计算过程，分别计算出这两口井的泵功图数据，进而分别画出两油井的泵功图。

### 2.3 对问题（3）的分析

1. 在问题（2）中，我们使用 Gibbs 模型，得出了由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，为问题（3）中由泵功图估算油井产液量奠定了基础。用泵功图法计算产液量是数字化油田建设的一项重要技术，具有简化地面流程、降低投资和运行成本，可以实时地动态产液计量等优点。在实际有杆抽油系统应用过程中，产液量的计算流程可归纳为下图所示：



图 2 有杆抽油系统产量计算流程

泵功图包含了计算油井产量所需要数据的信息，通用的计算方法主要有以下几种：利用柱塞的有效冲程法、泵效法和泵功图面积法等。此处，我们采用其中的两种方法建立由泵功图估计油井产量的模型，一是利用有效冲程，二是泵功图面积法。

2. 由于石油是聚集在一定地质构造中的油、气体混合物，所以在抽油过程中总有或多或少的气体进入泵内，致使上冲程时泵内压力因气体的膨胀而不能很快降低，造成固定阀打开之后，从而增载变慢。泵的余隙越大，残余的气体越多，泵口压力也就越低，则固定阀滞后打开的时间越长。下冲程时，泵内气体压缩，使得泵内压力不能迅速提高，造成游动阀打开滞后，使卸载过程缓慢，这个过程体现在图中就如图 5（C）形式，我们可以建立模型或算法，来通过计算机自动判别某泵功图数据是否属于泵内有气体的情况。

### 2.4 对问题 4 的分析

1. Gibbs 对抽油杆柱进行受力分析，建立了一维波动方程，我们在此基础上对现有模型进行了改进。先对 Gibbs 进行原理分析，如图 3 所示，取抽油杆  $\delta x$  段的单元体进行受力分析，假设以悬点为原点，沿井深方向为位移方向，沿杆柱纵向截取一点  $x$  和另一点  $x + \delta x$ ，其间有一段长度为  $L$  的接箍。抽油杆柱密度均匀为  $\rho$ ，截面积恒为  $A$ ， $F_d$  为微

元在  $x$  处的张力， $F_t$  为微元在  $x + \delta x$  处的张力，根据牛顿第二定律（ $\sum F = ma$ ）有：

$$F_b - F_t - F_d = \rho AL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

节点  $x$  和  $x + \delta x$  处的张力可表示为：

$$F_b - F_t - F_d = \rho AL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

节点  $x$  和  $x + \delta x$  处的张力可表示为:

$$F_b = \sigma_{x+\delta x} A \quad (2.3)$$

$$F_t = \sigma_x A \quad (2.4)$$

根据胡克定律,  $\sigma_x$  和  $\sigma_{x+\delta x}$  可表示为

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x, \quad \sigma_{x+\delta x} = E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} \quad (2.5)$$

其中  $\sigma_{x+\delta x}$  在  $x + \delta x$  处的应变泰勒公式表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_x + \dots \quad (2.6)$$

$$\text{微元受到的阻尼为: } F_d = cm \frac{\partial u}{\partial t} = c \rho A L \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\text{代入后可得出波动方程: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.8)$$

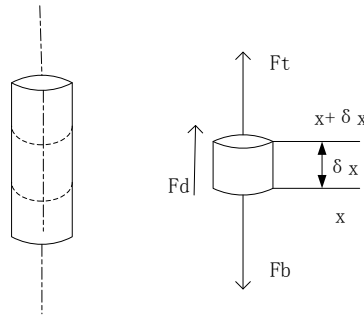


图3 抽油杆运动力学模型

之前采用的 Gibbs 波动方程是仅考虑了抽油杆柱的振动载荷、惯性载荷,在此基础上对现有的模型进行了改进,在实际油井中对抽油杆进行受力分析,我们又考虑了油压、套压,泵内油柱产生的压力及浮力以及抽油杆自身的重力,使模型的建立更符合实际,从而得到更理想的泵功图。

2. 尽管描述抽油杆动力学特性的波动方程在不断完善,促进了有杆抽油系统动态预测、工况诊断技术与示功图油量技术在采油工业中的应用,然而波动方程中阻尼系数的确定一直是困扰研究者的难题,影响阻尼系数的因素很多,主要包括:摩擦阻力、井内液体温度、粘度、密度的影响,还与抽油杆的运动速度、液体流动速度等因素有关。由于液体的速度、密度及流动速度在时时变化,实际阻尼力很难测到,因此在一般情况下在有关计算中,通常以等效阻尼力代替实际阻尼力。目前,确定阻尼系数的方法归结起来有三类:(1)经验计算法;(2)根据不同的假设推导出等效阻尼粘滞阻尼系数;(3)根据示功图计算阻尼系数。这三种方法中,示功图更合理的利用了已知数据,更接近于实际的阻尼系数。

### 3 模型假设

1. 假设以悬点为原点,沿井深方向为位移方向。

2. 假设阻尼系数不随液体温度、密度而变化。
3. 不考虑液体通过游动阀的阻力。

## 4 符号说明

$r$ : 曲柄半径;

$l$ : 连杆长度;

$b$ : 游梁后臂;

$\phi$ : 曲柄转角, rad;

$\omega$ : 曲柄角速度, rad/s;

$t$ : 时间, s;

$\rho_r$ : 抽油杆的密度,  $kg/m^3$ ;

$A_r$ : 抽油杆的截面积,  $m^2$ ;

$D_t$ : 油管直径, m ;

$D_r$ : 抽油杆直径, m;

$D$  为泵径, m。

## 5、模型建立与求解

### 3.1 问题 1 的模型建立与求解

#### 3.1.1 问题 1 的数学模型

分析光杆悬点的运动规律我们采用了以下两种模型<sup>[1]</sup>:

模型 1: 光杆悬点做简谐运动

根据图 1 抽油机四连杆机构简图, 记  $OA=a$ 、 $OB=b$ , 假设  $r/l \approx 0$  及  $r/b \approx 0$ , 即认为是曲柄半径  $r$  比连杆长度  $l$  和游梁后臂  $b$  小很多, 从而忽略它与  $l$  和  $b$  的比值。此时, 可以把光杆悬点 B 的运动看作是简谐运动, 认为 B 点的运动规律和 D 点做圆周运动时在垂直中心线上的投影 C 点的运动规律相同。则:

(1) B 点经过时间  $t$  时的位移  $L_B$  为:

$$L_B = r * (1 - \cos\phi) = r * (1 - \cos\omega t) \quad (3.1)$$

取 E 的下死点对应坐标原点, 向上为坐标正方向, 悬点 A 的位移  $L_A$  为:

$$L_A = \frac{a}{b} L_B = \frac{a}{b} * r * (1 - \cos\omega t) \quad (3.2)$$

(2) 悬点 A 的速度为:

$$V_A = \frac{dL_A}{dt} = \frac{a}{b} * \omega * r * \sin(\omega t) \quad (3.3)$$

(3) 悬点 A 的加速度为:

$$W_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{a}{b} * \omega^2 * r \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

模型 2: 光杆悬点简化为曲柄滑块机构时的运动规律

实际抽油机的  $r/l$  值是不可以忽略的, 特别在冲程长度较大时, 如果忽略会引起很大误差。因此, 取  $r$  与  $l$  的比值为有限值, 即  $0 < r/l < l/4$ , 并把  $G$  点绕游梁支点的弧线运动近似看作直线运动, 则可把抽油机的运动简化为图 4 所示的曲柄滑块运动结构图。

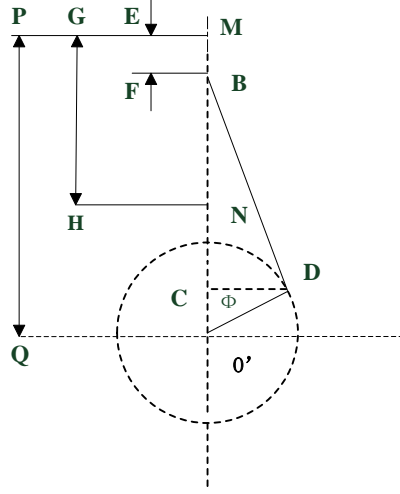


图 4 曲柄滑块运动结构图

$\phi=0$  时, 游梁与连杆的连接点  $B$  位于  $M$  点处, 距离曲柄轴心最远, 相应于悬点  $E$  的下死点,

$\phi=180$  时,  $B$  在  $N$  处, 距离曲柄轴心最近, 相应于悬点  $E$  的上死点。

(1)  $B$  点经过时间  $t$  时的位移  $L_B$  为:

$$L_B = MN = r[(1 - \cos\phi) + \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi})] \quad (3.5)$$

根据三角形的相似性可得  $A$  点的位移:

$$L_A = L_B \frac{a}{b} = r[(1 - \cos\phi) + \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi})] \frac{a}{b} \quad (3.6)$$

由于  $A$  点和  $E$  点可看作一个整体做直线运动, 则  $E$  点的位移:

$$L_E = L_A = r[(1 - \cos\phi) + \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi})] \frac{a}{b} \quad (3.7)$$

(2) 悬点  $E$  的速度为:

为了便于用求导来得到  $A$  点的速度和加速度, 可将  $L_A$  计算式进一步简化, 取其近似式。  $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi}$  按二项式定理展开, 取其前两项可得:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \approx 1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \phi}{2} \quad (3.8)$$

化简得  $A$  点的位移为:

$$L_A = r(1 - \cos\phi) + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \phi \frac{a}{b} \quad (3.9)$$

悬点 E 点的速度为：

$$V_E = V_A = \frac{dL_A}{dt} = \omega r \left( \sin \phi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\phi \right) \frac{a}{b} \quad (3.10)$$

(3) 悬点 E 的加速度为：

$$W_A = \frac{dV_A}{dt} = \omega^2 r (\cos \phi + \lambda \cos 2\phi) \frac{a}{b} \quad (3.11)$$

### 3.1.2 对问题 1 的模型结果分析

针对问题 1，我们建立了两种模型，分别是光杆悬点做简谐运动规律和光杆悬点简化为曲柄滑块机构时的运动规律。此外，还需将有载荷的附件 1 的悬点位移函数画到图 1 中进行比较。按简谐运动计算的位移函数为  $S_{_jx}(t) = 1.6430(1 - \cos(0.7959t))$ ，速度函数为  $V_{_jx}(t) = 1.3076 \sin(0.7959t)$ ，加速度函数为  $W_{_jx}(t) = 1.0407 \cos(0.7959t)$ ；按曲柄滑块机构计算的位移函数为  $S_{_qbx}(t) = 1.6430(1 - \cos(0.7959t)) + 3.8685(1 - \sqrt{1 - 0.0668 \sin^2(0.7959t)})$ ，速度函数为  $V_{_qbx} = 1.3076(\sin(0.7959t) + 0.1293 \sin(1.5918t))$ ，加速度函数为  $W_{_qbx} = 1.0407(\cos(0.7959t) + 0.2585 \cos(1.5918t))$ 。考虑在一个冲程过程中，按照附录 4 给出的四连杆各段尺寸和附件 1 的参数，分别画出悬点 E 在两种模型下的位移函数（如图 1-1 所示），速度函数（如图 1-2 所示），加速度函数（如图 1-3 所示）。两种模型得到的位移数据与附件一的悬点位移数据比较发现：两种模型求得的一个冲程长为 3.2 米，与附件一给出的冲程数据一致，但由附件一的位移数据得冲程长大约为 2.5 米，这有可能是仪器测量造成的。

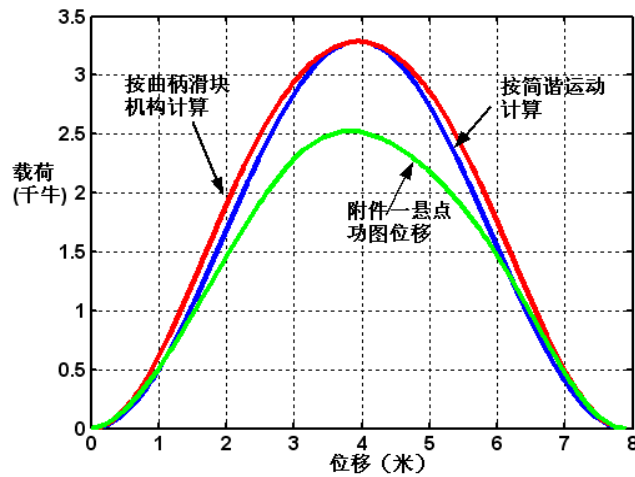


图 1-1 位移函数

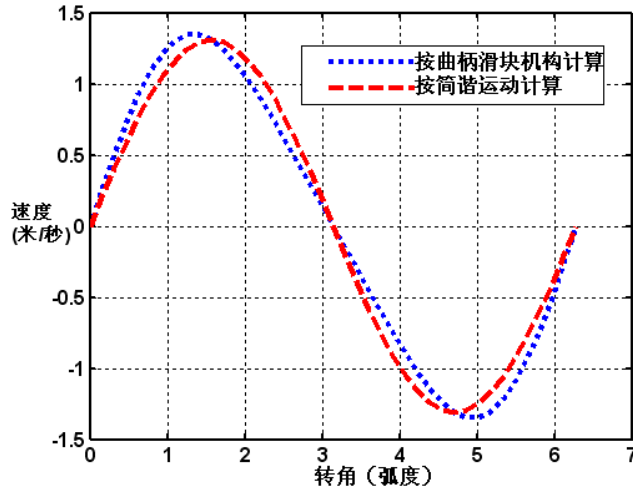


图 1-2 速度函数

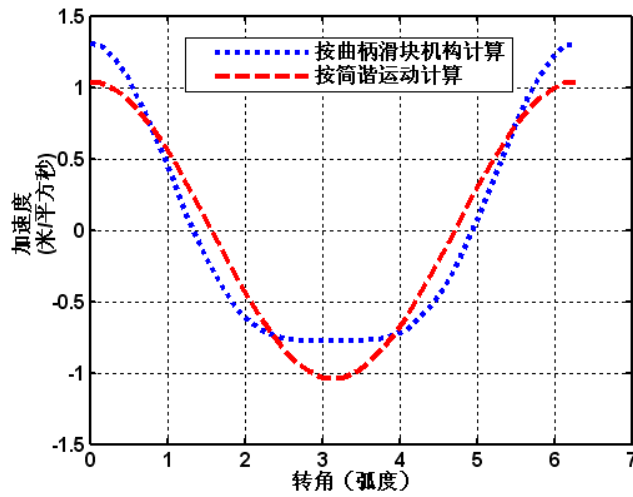


图 1-3 加速度函数

### 3.2 问题 2 的数学模型与求解

#### 3.2.1 问题 2 的数学模型

悬点示功图到井下示功图的转换的基本思想为：将整个系统视为一个复杂的振动系统，该系统有一定的初始条件和边界条件，将悬点示功图视为外部激励，井下示功图视为系统产生的响应。井下信息以应力波的方式通过抽油杆传递到地面上，抽油杆是井下信号与地面信号之间的传输线，对抽油杆建立的波动方程相当于该系统的传递函数。

##### (1) Gibbs 模型

Gibbs<sup>[2]</sup>通过对有杆泵抽油井的抽油杆柱进行受力分析，建立波动方程，即为 Gibbs 模型，该波动方程是由悬点示功图转化为泵功图的纽带。Gibbs 提出的带粘滞阻尼的波动方程如下：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (3.12)$$

式中  $u(x, t)$  为在  $x$  断面不同时刻  $t$  的位移函数；

$a$  为应力波在抽油杆柱中的传播速度；

$c$  为粘滞阻尼系数。



(2) 波动方程边界条件和初始条件获取

一般来说, 因为波动方程中包含时间和空间的二阶函数, 所以求解波动方程需要两个边界条件和两个初始条件。但是, 由于抽油过程是一个周期过程, 仅要求出周期解, 不需要初始条件。在周期解中, 初始条件的影响逐渐消失, 因而只需要两个边界条件即可。这两个边界条件就是光杆载荷-时间和位移-时间关系。采用截断的傅立叶级数作为边界条件的表达式:

$$D(\omega t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t) \quad (3.13)$$

$$U(\omega t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \cos n\omega t + \delta_n \sin n\omega t) \quad (3.14)$$

实际工作中,  $D(\omega t)$  和  $U(\omega t)$  是以曲线的形式给出的, 所以须先将曲线离散化进行数值

计算。取采样点数为 144, 等时采样, 令  $\theta = \omega t$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $dt = \frac{d\theta}{d\omega}$ , 可得到:

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\theta) \cos n\theta dt \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty \quad (3.15)$$

考虑到  $\theta$  是离散变量:  $\theta = \frac{2\pi p}{k} \quad p=1, 2, \dots, k$

用下面符号表示:  $D(\frac{2\pi p}{k}) = D_p$

采用梯形法则进行数值积分:

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \left[ \left\{ \frac{D_0 \cos[\frac{2n\pi * 0}{k}] + D_1 \cos[\frac{2n\pi * 1}{k}]}{2} + \frac{D_1 \cos[\frac{2n\pi * 1}{k}] + D_2 \cos[\frac{2n\pi * 2}{k}]}{2} + \dots + \frac{D_{k-1} \cos[\frac{2n\pi(k-1)}{k}] + D_k \cos(2n\pi)}{2} \right\} \frac{2\pi}{k} \right] \quad \text{合}$$

并同类项后可以得到:

$$\sigma_n = \frac{2}{k} \left[ \frac{D_0 \cos 0}{2} + D_1 \cos[\frac{2n\pi * 1}{k}] + D_2 \cos[\frac{2n\pi * 2}{k}] + \dots + \frac{D_k \cos(2n\pi)}{2} \right]$$

由函数周期性可得:  $D_0 = D_k$ ,  $\cos 0 = \cos 2n\pi$ , 因此:

$$\sigma_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D_p \cos[\frac{2n\pi p}{k}] \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$\tau_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D_p \sin[\frac{2n\pi p}{k}] \quad n=1, 2, \dots, \infty$$

$$v_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k U_p \cos[\frac{2n\pi p}{k}] \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$\delta_n = \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k U_p \sin\left[\frac{2n\pi p}{k}\right] \quad n=1, 2, \dots, \bar{n}$$

以上式子中：T——抽油周期；

$\bar{n}$ ——傅氏级数所取项数，此处取 10；

k—— $2\pi$  周期内等分的份数，即离散的采样点数，此处我们取 144；

p——从 0 到 k 各点序号；

代入  $D(\omega t)$  和  $U(\omega t)$  后便确定给出悬点示功图转化为泵功图的边界条件。

### (3) 求解算法

基于上述得到的边界条件数据，可以采用两种方法求解波动方程，即傅立叶级数法和有限差分法，分别得到解析解和数值解。本文中我们在 Gibbs 波动方程的基础上，采用傅里叶级数法进行求解。

令  $U(x, t) = X(x)T(t)$ ,  $X(t)$  和  $T(t)$  分别仅为  $x$  和  $t$  的函数，将其代入波动方程并整理可得：

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{CT'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.16)$$

上式每一侧仅含有一个独立变量，因而它等于一个常数，令其为  $\lambda_n^2$ ，代入上式并将其分离成两个常微分方程：

$$\begin{cases} T''(t) + CT'(t) + \lambda_n^2 a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda_n^2 X(x) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

该方程组中的(1)式的周期解为： $T(t) = e^{in\omega t}$ ，代入方程组第一个等式可得方程(3.17)的特解为：

$$\lambda_n = -\alpha_n + i\beta_n$$

式中  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  为实数，其值为：

$$\alpha_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{C}{n\omega}\right)^2}}$$

$$\beta_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{C}{n\omega}\right)^2}}$$

当  $n=0$  时， $\lambda_0 = 0$ ，方程组 (3.17) 变为：

$$\begin{cases} T''(t) + CT'(t) = 0 \\ X''(x) = 0 \end{cases}$$

其解为：

$$\begin{cases} T(t) = \xi \\ X(x) = \zeta + \eta x \end{cases}$$

方程 (3.17) 中第二个等式解为谐波方程:

$$X(x) = \phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x \quad (3.18)$$

综上各式: 可求出 (3.16) 的解为:

$$U(x, t) = \xi(\zeta + \eta x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x) e^{in\omega t} \quad (3.19)$$

再经过变换可得 Gibbs 方程的解析解为:

$$U(x, t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t) \quad (3.20)$$

式子中:

$$Q_n(x) = (k_n \cosh \beta_n x + \delta_n \sinh \beta_n x) \sin \alpha_n x + (\mu_n \sinh \beta_n x + v_n \cosh \beta_n x) \cos \alpha_n x$$

$$P_n(x) = (k_n \sinh \beta_n x + \delta_n \cosh \beta_n x) \cos \alpha_n x - (\mu_n \cosh \beta_n x + v_n \sinh \beta_n x) \sin \alpha_n x$$

$$k_n = \frac{\sigma_n \alpha_n + \tau_n \beta_n}{EA_r (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$

$$\mu_n = \frac{\sigma_n \beta_n + \tau_n \alpha_n}{EA_r (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$

由胡克定律, 抽油杆柱任意深度  $x$  断面上的动载荷随时间的变化为:

$$F(x, t) = EA_r \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$$

$$\text{即 } F(x, t) = EA \left[ \frac{\sigma^0}{2EA} + \sum_{n=1}^{\infty} (Q'_n(x) \cos n\omega t + P'_n(x) \sin n\omega t) \right] \quad (3.21)$$

式子中:

$$Q'_n(x) = \left[ \frac{\tau_n}{EA} \sinh \beta_n x + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) \cosh \beta_n x \right] \sin \alpha_n x$$

$$+ \left[ \frac{\sigma_n}{EA} \cosh \beta_n x + (v_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \sinh \beta_n x \right] \cos \alpha_n x$$

$$P'_n(x) = \left[ \frac{\tau_n}{EA} \cosh \beta_n x + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) \sinh \beta_n x \right] \cos \alpha_n x$$

$$- \left[ \frac{\sigma_n}{EA} \sinh \beta_n x + (v_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \cosh \beta_n x \right] \sin \alpha_n x$$

上述中:  $E$ ——钢杆弹性模量;

$A_r$ ——抽油杆柱的截面积；

$Q_n$ ,  $P_n$ ——位移函数和载荷函数中的系数。

根据地面示功图计算井下示功图时，必须首先确定阻尼系数。可以用抽油杆柱在一个循环中由粘滞阻尼引起的摩擦功来确定阻尼系数：

$$C = \frac{2\pi\mu}{\rho_r A_r} \left\{ \frac{1}{\ln m} + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \left[ B_1 + \frac{2}{\frac{\omega L}{a} \frac{1}{\sin \frac{\omega L}{a} + \cos \frac{\omega}{a} L}} \right] \right\}$$

$$m = \frac{D_t}{D_r};$$

$$B_1 = \frac{m^2 - 1}{2 \ln m} - 1; \quad B_2 = m^4 - 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{\ln m}$$

式中： $\mu$ ——液体粘度，

$L$ ——抽油杆长度，m。

对于单级杆，根据上述模型，可以得到泵的载荷和位移。但在油田的实际生产过程中，一般采用多级杆，需要进行分级计算，把上一级杆柱的位移和载荷作为求解下一级抽油杆柱的位移和载荷的边界条件，重新计算傅立叶系数和相应的系数，才能进行下一级杆柱位移和载荷的求解，即可得到使用多级抽油杆的泵功图<sup>[3]</sup>。

### 3.2.2 对问题 2 的模型结果分析

使用 Gibbs 模型，得出由悬点示功图到泵功图的转化关系，由附件 1 中的数据画出一级杆的某油井的悬点示功图，根据转化关系，计算出油井 1 的泵功图数据，绘制出相应泵功图。

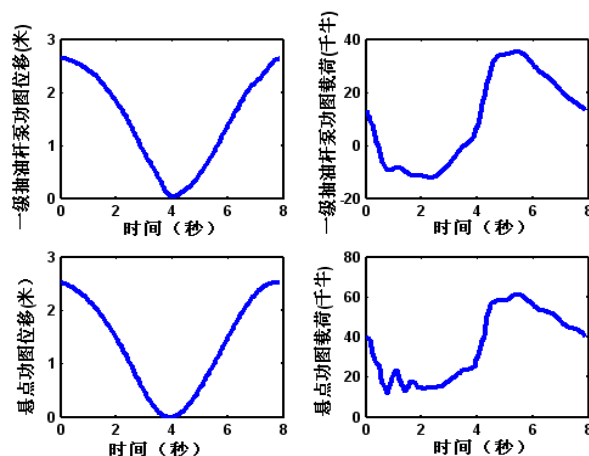


图 2-1 悬点功图及泵功图位移（载荷）-时间图

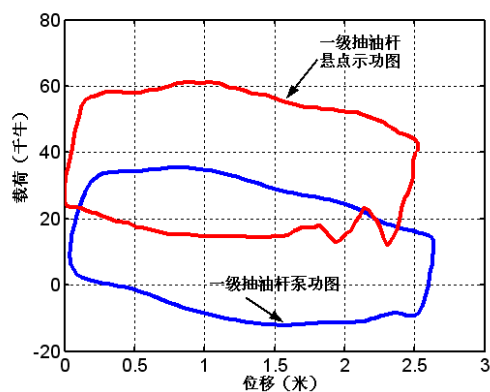


图 2-2 一级抽油杆悬点示功图和泵功图

由附件 2 中的数据画出三级杆的油井 2 的悬点示功图，根据转化关系，计算出油井的泵功图数据，绘制出对应于该油井的泵功图（见图 2-5）。

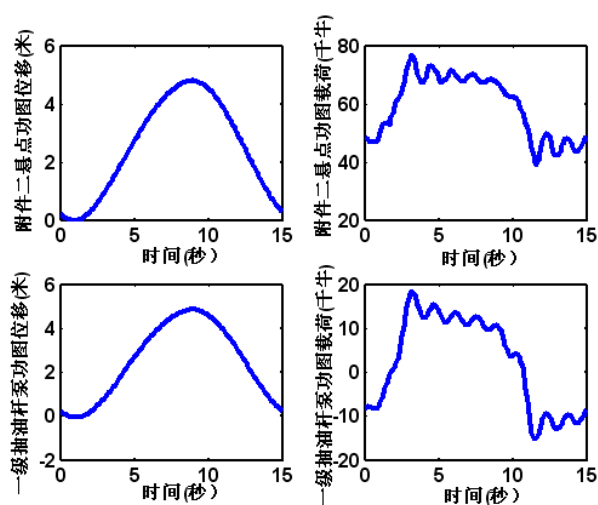


图 2-3 悬点功图及一级杆泵功图位移（载荷）-时间图

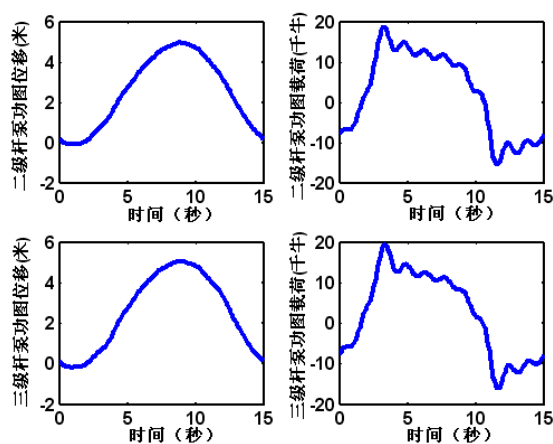


图 2-4 二级杆及三级杆泵功图位移（载荷）-时间图

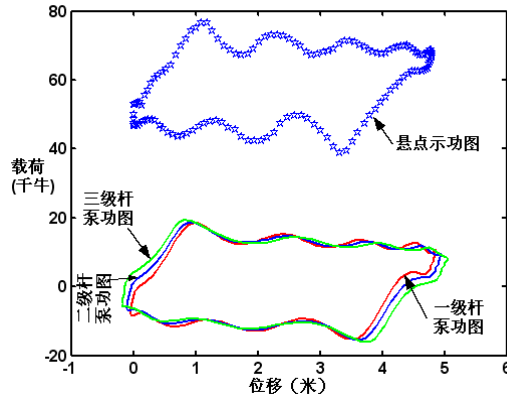


图 2-5 三级杆的悬点示功图和泵功图

### 3.3 问题 3 的数学模型及求解

#### 3.3.1 问题 3 的数学模型

1. 由泵功图估计油井产量，建立了如下两种模型。

**模型 1:** 利用“有效冲程”建模

步骤如下：

(1) 求泵功图各点的曲率

以一级杆为例，我们采用相邻三点圆弧曲率估算方法，得到泵功图中 144 个离散采集点  $P_i(x_i, F_i)$  的曲率  $K_i$ ，即利用泵功图上任意一离散采集点  $P_i(x_i, F_i)$  及其前一采集点  $P_{i-1}(x_{i-1}, F_{i-1})$  和后一采集点  $P_{i+1}(x_{i+1}, F_{i+1})$  3 点之间的几何关系计算出  $P_i(x_i, F_i)$  点的曲率  $K_i$ ，数学模型如下：

$$K_i = \frac{2S_{\delta P_{i-1}P_iP_{i+1}}}{L_i L_{i+1} Q_i} \quad (3.22)$$

其中， $S_{\delta P_{i-1}P_iP_{i+1}}$  为三点构成的三角形的有向面积。

(2) 求泵功图各点的曲率变化

根据泵功图上任意一离散采集点  $P_i(x_i, F_i)$  的曲率  $K_i$  及其后一点  $P_{i+1}(x_{i+1}, F_{i+1})$  的曲率  $K_{i+1}$  即可求出点  $P_i(x_i, F_i)$  的曲率变化率  $\delta K_i$ ，即： $\delta K_i = K_{i+1} - K_i$ 。

(3) 消除或降低点的曲率变化量  $\delta K_i$  的波动误差

在实际算法中，我们采用五点平均法求得中间点的曲率变化量  $\delta K_i$ ，以提高算法精确度。

(4) 找出泵功图中四个最大曲率的变化点

曲率  $K_i$  与曲率变化量  $\delta K_i$  的数据如图 1 所示，通过穷举比较法得到泵功图上 4 个曲率变化最大点  $P_{m1}(x_i, F_i)$ ， $P_{m2}(x_i, F_i)$ ， $P_{m3}(x_i, F_i)$ ， $P_{m4}(x_i, F_i)$  从而得泵柱塞有效冲程

$S_{pen}$ 。

根据液量计算公式：

$$Q = 1440 \frac{\pi D^2}{4} S_{pen} \times 7.6 \times \rho_{液} = 1440 \frac{\pi D^2}{4} S_{pen} \times 7.6 \times [f_w \rho_w + (1 - f_w) \rho_0] \quad (3.23)$$

式中：  $\rho_0$ ——原油密度，  $kg/m^3$ ；  $\rho_w$ ——水的密度；  $f_w$ ——原油含水率。

**模型 2：** 利用泵功图面积法建模

产量计算公式如下：

$$q = \frac{S}{S_p} q_p \quad (3-24)$$

式中，  $q$  为泵的示功图法计算的产量，  $l/d$ ；  $S$  为泵的示功图面积，  $cm^2$ ；

$S_p$  为理论示功图面积，  $cm^2$ ；  $q_p$  为理论产量，  $l/d$ 。

其中，  $A_p$  是在理论示功图上实测的；  $q_p$  按式 (3-25) 计算。

$$q_p = 1440 \times \frac{\pi}{4} D^2 s n \gamma \quad (3-25)$$

式中，  $s$  为冲程，  $m$ ；  $n$  为冲次，  $次/min$ ；  $\gamma$  为井内液体重度，可取 0.9。

这种方法最大的优点就是计算简便、准确，但是其不足之处是计算高产井时误差较大。

2. 如图 5 (C) 形式的泵功图表示泵内有气体，导致泵没充满。我们可以通过以下两种算法来进行判断。

(1) 在问题 3 的有效冲程模型中，我们找出了泵功图中四个曲率变化最大的点，从而得到泵柱塞上冲程和下冲程的位移，如图 5 (C) 中 AB 表示上冲程位移，CD 段表示下冲程位移，当  $AB > CD$  时，说明泵内有气体，此过程由计算机自动判别。

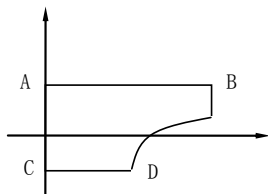


图 5 (C) 泵内冲起泵功图形状

(2) 在上冲程中，泵内压力因气体的膨胀而不能很快降低，造成固定阀打开滞后，增载变慢，余隙越大，残余气体越多，泵口压力就越低，则固定阀滞后打开的时间越长。下冲程时，泵内气体压缩，使得泵内压力不能迅速提高，造成游动阀打开滞后，使卸载过程缓慢，泵的余隙越大，进入泵内的越多，示功图卸载线的上凸抛物线越明显。体现在图 5 (C) 中示，图像右下部缺失，增载线的斜率变小，卸载线为一条弧线，这种情况是泵内有气体的情况。

### 3.3.2 对问题 3 的模型结果分析

(1) 建立了两个由泵功图估计油井产量的模型，一是通过找出曲率变化最大的四个点确定有效冲程，可建立如图 1 所示模型，二是利用泵功图面积法，建立如图 2 所示模型。通过两种模型，利用附件 1 和附件 2 的数据分别估算出了两口井一天的产液量。

图 3-1 是求得的一级抽油杆（附件 1）曲率变化图，并找到了曲率变化较大的点，

选取其中四个变化最大的点（见图 3-2），即可求得有效冲程。

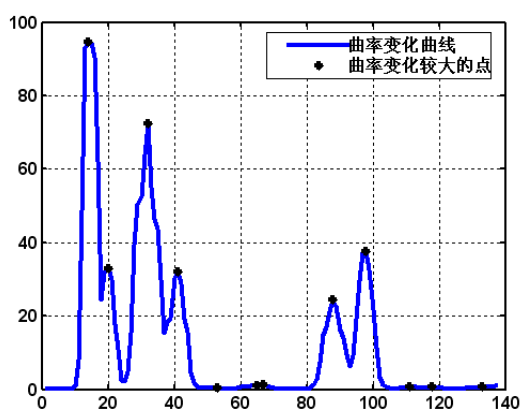


图 3-1 一级杆曲率变化曲线图

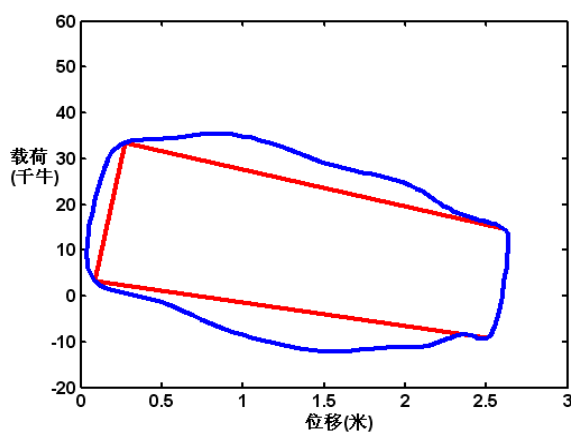


图 3-2 一级抽油杆曲率法求曲率变化最大的四个点的结果

利用附件 1（一级杆）的数据估算油井的产液量：

方法一：有效冲程 2.4191 米，

由式子

$$Q = 1440 \frac{\pi D^2}{4} S_{pen} \times 7.6 \times \rho_{液} = 1440 \frac{\pi D^2}{4} S_{pen} \times 7.6 \times [f_w \rho_w + (1 - f_w) \rho_0]$$

求得的油量为 101.6109 吨。

方法二：有效面积法求的  $q_p = 131.7164$ ,

$$q_p = 1440 \times \frac{\pi}{4} D^2 s n \gamma$$

$$q = \frac{S}{S_p} q_p$$

$$\frac{S}{S_p} = \text{泵功图面积} / \text{理论示功图} = 0.7664$$



求得的油量为 100.9494 吨。

图 3-3 是求得的三级抽油杆（附件 2）曲率变化图，并找到了曲率变化较大的点，选取其中四个变化最大的点（见图 3-4），即可求得有效冲程。

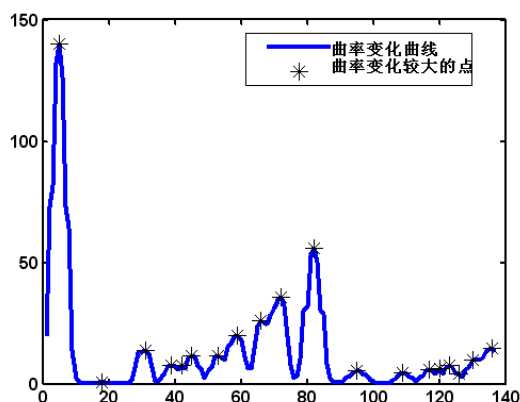


图 3-3 三级杆曲率变化曲线图

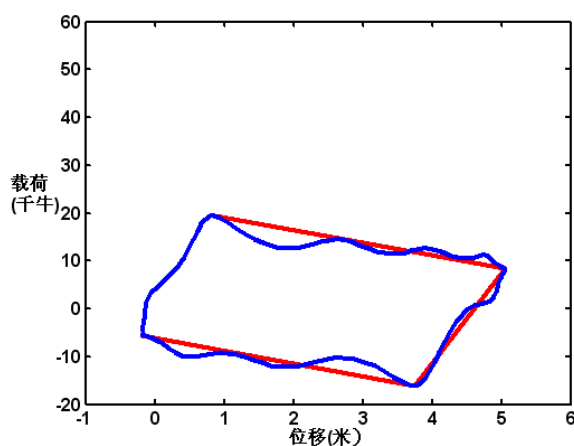


图 3-4 三级抽油杆曲率法求曲率变化最大的四个点的结果

利用附件 2（三级杆）的数据估算油井的产液量：

方法一：有效冲程 3.4624 米，

由式子

$$Q = 1440 \frac{\pi D^2}{4} S_{pen} \times 7.6 \times \rho_{液} = 1440 \frac{\pi D^2}{4} S_{pen} \times 7.6 \times [f_w \rho_w + (1 - f_w) \rho_0]$$

求得油量为 29.9879 吨。

方法二：有效面积法求的  $q_p = 35.6444$

$$q_p = 1440 \times \frac{\pi}{4} D^2 s n \gamma$$

$$q = \frac{S}{S_p} q_p$$

$$\frac{S}{S_p} = \text{泵功图面积/理论示功图} = 0.7769$$

求得油量为 27.6926 吨。

(2) 由附件 1 和附件 2，我们可以得出如下泵功图：

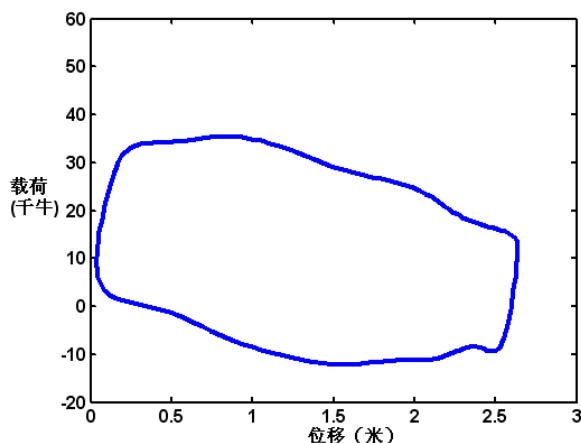


图 1 附件 1 泵功图

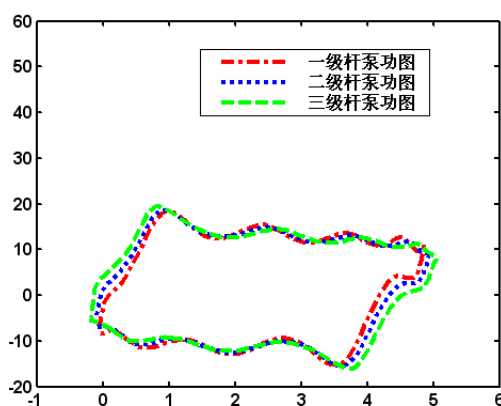


图 2 附件 2 泵功图

根据我们前面提到的第一种判别方法，对于附件 1 泵功图，得到上冲程位移  $AB=2.3303$  米，下冲程位移  $CD=2.4191$  米，则  $AB < CD$ ，经诊断得泵内几乎无充气。对于附件 2 泵功图，得到上冲程位移  $AB=3.7289$  米，下冲程位移  $CD=3.4624$  米，则  $AB > CD$ ，经诊断得泵内是充气的。

### 3.4 问题 4 的模型建立

#### 1. 修正的吉布斯方程

由于抽油杆在整个有杆抽油系统中具有重要作用，在一维情况下，有杆抽油系统模型就是指抽油杆的受迫振动模型。有杆抽油系统完整的数学模型包括：波动方程、上下边界条件、初始条件、连接条件

##### (1) 波动方程<sup>[4]</sup>

新模型中抽油杆的截取示意图如图 5 所示，根据牛顿第二定律（ $\sum F = ma$ ）有：

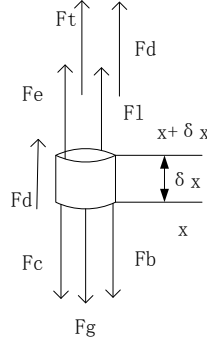


图 5 修正后的受力分析

$$F_b - F_t - F_d + F_c - F_d + F_l + F_g - F_e = \rho A \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$F_c$  一为微元所受油压产生的力，其方向与位移方向相同，大小为  $\frac{P_c S}{L} \delta x$ ， $P_c$  是油压，大小为 0.3Mpa，

$F_d$  一为微元所受的由套压产生的力，其方向与位移方向相反，大小为  $\frac{P_d S}{L} \delta x$ ， $P_c$  是套压，大小为 0.2Mpa，

$F_e$  一为油管内液体产生的浮力，其方向与位移方向相同，大小为  $\rho_{oil} A g$ ，

$F_l$  一为泵内油柱产生的压力，其方向与位移方向相同，大小为  $\frac{P_{oil} S}{L} \delta x$ ，

$F_g$  一为抽油杆自身的重力，其方向与位移方向相同。大小为  $\rho A g$ ，

$S$  一柱塞的面积

$\rho_{oil}$  一泵内混合液体的密度，大小为  $0.988 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，

应用胡克定律跟泰勒公式经过变换得到修正的 Gibbs 波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} + 10.5983 + g \quad (3.26)$$

(2) 上下边界条件：

模型的上边界条件由抽油机选点运动规律所决定。设悬点的位移函数为： $U(t)$ ，则模型的上边界条件为：

$$u(x, t) \big|_{x=0} = u(t) \quad (3.27)$$

模型的下边界条件由井下泵的工作状况决定。设柱塞的载荷函数为： $F_p(t)$ ，则模型的下边界条件为：

$$F(x, t) \big|_{x=l} = F_p(t) \quad (3.28)$$

### (3) 初始条件

假设系统在启动前，抽油杆柱从驴头上自由悬挂于充满液体的油管中，并且驴头从下死点开始向上运动，则模型的初始条件为：

$$u(x, t)|_{(0 \leq x \leq l, t=0)} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{(0 \leq x \leq l, t=0)} = 0$$

修正的吉布斯方程是一个二阶非齐次偏微分方程，必须结合边界条件和初始条件才能解。

### (4) 连接条件

对于多级杆柱结构，两杆连接处的载荷与位移连续条件多年来一直沿用由 J. F. Lea 提出过渡处理条件：上级抽油杆底端与下级抽油杆的载荷、位移都是始终相等的，其数学关系表示如下：

$$F_r^d(t) = F_{r+1}^{\pi}(t)$$

$$u_r^d(t) = u_{r+1}^{\pi}(t)$$

式中  $F_r^d(t)$ 、 $s_r^d(t)$ ：分别表示 t 时刻，第 r 级抽油杆底端的载荷与位移；

$F_r^{\pi}(t)$ 、 $s_r^{\pi}(t)$ ：分别表示 t 时刻，第 r+1 级抽油杆顶端的载荷与位移。

最后构成的完整的抽油杆的模型<sup>[5]</sup>为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} + 10.5983 + g \quad (3.29)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = u(t) \quad F(x, t)|_{x=l} = F_p(t)$$

$$u(x, t)|_{(0 \leq x \leq l, t=0)} = 0 \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{(0 \leq x \leq l, t=0)} = 0$$

$$F_r^d(t) = F_{r+1}^{\pi}(t) \quad u_r^d(t) = u_{r+1}^{\pi}(t)$$

### (5) 修正吉布斯波动方程的求解

因为得到的修正的 Gibbs 波动方程是二阶非齐次线性偏微分方程，用分离变量法求解。

设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ ， $X(x)$  和  $T(t)$  分别为仅含 x 和 t 的函数，方程可以转化简化为：

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{CT'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + q \quad (3.30)$$

q 为合并之后的常数。在求解非齐次方程时，用到的方法是先求解齐次的方程，所以先求解原 Gibbs 方程，

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{CT'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.31)$$

波动方程上边界条件的傅里叶级数形式如下：

$$D(\omega t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t) \quad (3.32)$$

$$U(\omega t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t) \quad (3.33)$$

傅里叶系数  $\sigma_n$ 、 $\tau_n$ 、 $v_n$ 、 $\delta_n$  由实测的  $D(t)$  和  $U(t)$  曲线数值经过积分得到。

用分离变量法得到  $X(x)$  和  $T(t)$  分别求为：

$$X(x) = \phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x$$

$$T(t) = e^{jn\omega t}$$

经过变换可得到 Gibbs 方程的解析解为：

$$U(x, t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t) \quad (3.34)$$

$$F(x, t) = EA \left[ \frac{\sigma^0}{2EA} + \sum_{n=1}^{\infty} (Q'_n(x) \cos n\omega t + P'_n(x) \sin n\omega t) \right] \quad (3.35)$$

$Q_n(n)$ 、 $Q'_n(n)$ 、 $P_n(n)$ 、 $P'_n(n)$  为特殊系数。

将求得的  $X(x)$ 、 $T(t)$  带到修正的吉布斯方程，得到：

$$(\phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x)' e^{jn\omega t} a^2 - c(\phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x)(e^{jn\omega t})' + (\phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x)(e^{jn\omega t})'' = 0$$

整理以后得到的  $U(x, t)$  的形式如下，在原  $U(x, t)$  的形式下，系数因为  $q$  的存在而得到修正。

$$U(x, t) = \frac{qx(2L-x)}{2a^2} - \frac{16qL^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2L} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \quad (3.36)$$

$$F(x, t) = -\frac{qxL}{a^2} - \frac{16qL^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2L} \frac{(2n+1)\pi}{2L} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \quad (3.37)$$

2. 根据示功图计算 估计阻尼系数的计算公式过程<sup>[6]</sup>如下：

对 Gibbs 方程  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  沿着  $x$  方向从 0 到  $L$  进行数值积分

$$\begin{aligned} \int_0^L EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx &= \sum_{i=1}^n \{ E_i A_i \left[ \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_{i-1}, t)}{\partial x} \right] \} \\ &= F(x_n, t) - F(x_0, t) \\ &= F_p(t) - F_0(t) \end{aligned}$$

假设上冲程时间从 0 到  $T_1$ ，下冲程时间从  $T_1$  到  $T$ ，则上冲程对时间进行积分并变换积分次序得到

$$\int_0^{T_1} [F_p(t) - F_0(t)] dt = \int_0^L \rho A c \int_0^{T_1} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_0^L \rho A \int_0^{T_1} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dt dx$$

整理得到阻尼系数计算公式如下：

$$c = \frac{T[(1-\alpha)(\bar{F}_{pd} - \bar{F}_{rd}) - \alpha(\bar{F}_{pu} - \bar{F}_{ru})]}{S_r(1+S_p) \sum_{n=1}^{N_r} \rho_r A_r L_r}$$

$T_1$  为一个周期内上冲程时间， $S_0$  是光杆的冲程， $S_p$  是泵的冲程， $\alpha = T_1/T$ ， $(0.5 \leq \alpha < 1)$ ，

$\alpha$  可根据不同型号抽油机确定。 $F_{rd}(t)$  分别是地面功图上、下冲程的载荷-时间曲线；

$F_{pu}(t)$ ， $F_{pd}(t)$  分别是泵示功图上下、下的载荷-时间曲线。其中：

$$\bar{F}_{ru} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} F_{ru}(t) dt, \quad \bar{F}_{rd} = \frac{1}{T-T_1} \int_{T_1}^T F_{rd}(t) dt,$$

$$\bar{F}_{pu} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} F_{pu}(t) dt, \quad \bar{F}_{pd} = \frac{1}{T-T_1} \int_{T_1}^{T_1} F_{pd}(t) dt,$$

这里  $\sum_{r=1}^{N_r} \rho_r A_r L_r$  是抽油杆的总重量。

#### 4.4 对问题 4 的模型结果分析

1. 利用修正的 Gibbs 方程得到的泵功图如下图，可以看出泵功图的波动性得到了很好的改善。但是对荷载的影响不是很大，荷载的精确计算还要进一步从理论上完善 Gibbs 模型，建立起更合理的模型。

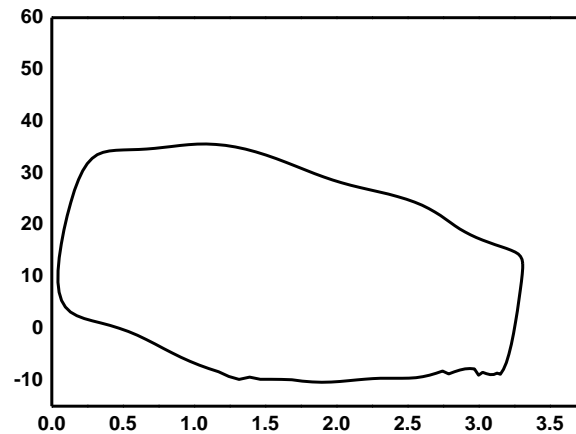


图 6 修正后 Gibbs 得到的泵功图

## 2. 模型解决与分析

图 7 分别为地面示功图和泵功图的载荷-时间曲线, 利用求解出积分平均值代入阻尼系数的公式, 得到的阻尼系数是 0.256, 更接近于实际的阻尼系数。

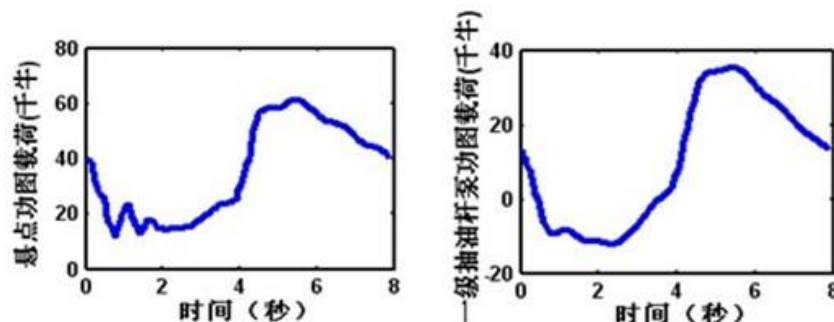


图 7 悬点功图、泵功图载荷-时间曲线

## 5 模型的评价及分析探讨

分析光杆悬点的运动规律, 采用了两种模型, 一种是光杆悬点做简谐运动, 一种是光杆悬点简化为曲柄滑块机构时的运动规律, 通过这两种模型, 分别求出了悬点 E 的一个冲程的运动规律: 位移函数、速度函数、加速度函数。采用 Gibbs 模型, 用傅里叶级数法求得波动方程的数值解, 并根据附件 1 和附件 2 中给出的数据, 分别计算出这两口井的泵功图数据并作图。接下来用泵功图估计油井产量, 建立了“有效冲程”法模型和泵功图面积法模型, 求得附件 1 和附件 2 给出的两口井的每日的产油量。由泵功图判断泵内是否有气体, 可以通过计算曲率变化最大的四个点, 上面两个之间上冲程位移和下面两个点下冲程位移差来判别是否有气体, 也可以通过增载线和卸载线的变化来判别。对 Gibbs 模型进行原理分析, 发现其不足, 通过对抽油杆的单元体进行受力分析来对现有的模型进行了改进, 并给出了悬点示功图转换为泵功图的详细计算过程, 通过与问题二的结果进行比较, 发现改进后的模型能更有效地消除波动, 从而更准确地计算有效冲程及产液量, 应用价值可观。

### 参考文献:

- [1] 王鸿勋, 张琪, 《采油工业原理》, 石油工业出版社, 1985 年 4 月, 第二章。
- [2] Gibbs.S.G , Neely,A.B , Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells, J.Pet.Tech.,Jan. 1966。
- [3] 万仁溥 , 《采油工程手册》, 石油工业出版社, 2000 年 8 月, 第五章 第二节。
- [4] Gibbs.S.G ,Method of Determining Sucker Rod Pump Performance,United States Patent Office,Sep. 1967。
- [5] 崔金榜, 修正的吉布斯方程在玻璃钢抽油杆油井中的应用, 第 18 卷: 79-83, 石油钻采工艺, 1996。
- [6] 余国安, 高国华, 利用示功图计算抽油井阻尼系数, 第 5 期: 57-64, 石油钻采工艺, 1991。