

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学 校	解放军信息工程大学
参赛队号	90005003
队员姓名	1.蒋天立
	2.尹洁昕
	3.侯晓丹

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 全国第八届研究生数学建模竞赛



## 题目 两种光子结构猜想的波动现象解释及仿真

### 摘要：

为进一步探索光的内在性质，本文通过描述猜想，验证猜想，建立数学仿真模型的步骤对题目中两种光子结构猜想——龚氏光子结构模型和经典光子结构模型进行数学仿真。首先在龚氏光子结构的基础上建立了光的单缝衍射仿真模型，其次依据本文所做猜想对双缝干涉建立了仿真模型；最后，基于经典光子结构建立了光的偏振仿真模型。本文的具体工作包括以下几个方面：

针对光的衍射现象，综合运用理论推导和实验数据对龚氏光子结构模型进行验证。首先对光子结构参数进行理论推导和机理分析，证明其结构参数存在问题，并提出了改进方法；进而建立光子与缝壁的引力模型和碰撞模型，通过构造光子的运动微分方程组，对光子经过缝隙的偏转问题进行了数学仿真；最后，将光强的计算等效为光子负微子的旋转相位矢量的叠加，基于两种光子数在出射方向上的概率分布，建立了多光子相互作用效果仿真模型，得到与实际相符的光强分布曲线以及衍射图样。衍射仿真结果表明：基于龚氏光子结构的引力模型不能合理解释光子的偏转，碰撞模型在一定条件下能产生符合实际的图样；而基于本文所给光子数关于出射方向是均匀分布的猜想所得衍射光强分布与《光学原理》中的经验公式相吻合。同时，参数分析表明光子波长，细缝宽度会对衍射明暗条纹的宽度有所影响；而条纹的光强则与接收点的位置以及接收光子个数有关。

针对光的干涉现象，以光的衍射数学仿真模型为基础，增加了两条缝之间的相互影响，从而建立了一种基于光子出射速度方向均匀分布的干涉仿真模型。

针对光的偏振现象，基于经典光子结构猜想，将透过偏振镜的光强大小等效为通过其的光子个数，建立了偏振数学仿真模型。通过蒙特卡洛方法，得到将近50%的能量穿出比，仿真结果基本与实际相符。

**关键字：** 光 波粒二象性 干涉 衍射 偏振

## 1 问题重述

自从爱因斯坦 1905 年提出光子概念以来，光的波粒二象性始终困扰着绝大多数人，至今仍然无法令常人像对其他物理现象一样地信服。光与物质相互作用时象粒子一样服从力学定律，但光又有波的内在性质，如：衍射、双缝干涉、偏振以及光子湮灭。光既可以是粒子，又同时是波，但我们至今不能同时看到这两个方面，光究竟以粒子还是以波的形式出现，只决定于实验。

仔细分析可以发现，对光波的内在性质：衍射、双缝干涉、偏振及光子湮灭的解释需要解决三个问题。第一个问题是光通常是按直线前进的，为什么光经过细缝后前进方向会发生改变？为什么必须是光通过很窄的细缝才会使前进方向发生改变？第二个问题是若干个光子同时作用的最终效果如何确定？是否仅取决于光子的个数？第三个问题是光通过偏振片的真实过程是什么？

在爱因斯坦之后继续有许多物理学家致力于探索光子波粒二象性的奥秘，并且也取得一定的进展。如我国已故的龚祖同院士运用初等量子理论提出一种光子结构理论框架猜想<sup>[1]</sup>，并以此解释了折射、反射、干涉、衍射和布儒斯特角下的线偏振。最近，北京大学学者提出光子是一个按光速直线前进的电磁场的猜想<sup>[2]</sup>，在电磁场的基础上建立了一个经典的单光子的几何结构模型，并从光的粒子性角度重新合理分析了杨氏双缝干涉和偏振实验的机制。

上述关于光子波粒二象性的猜想在一定程度上能够自圆其说，但只是定性的，还应该经过定量计算的检验。如果经过数学模型的仿真，肯定无法得到和大量物理实验相吻合的结果，则可以否定该猜想，如果在一定条件下可以得到和大量物理实验相吻合的结果，则上述猜想就前进一步，至少目前不能轻易否定。当然既然是猜想就很可能有错误，尤其对这样难度空前的问题，能够完全解释倒是不正常的。你们的任务是建立仿真这些猜想的数学模型，例如：单缝衍射中衍射缝的尺寸以及光子模型中的尺度、频率等参数对衍射屏上光强的空间分布形式的影响；双缝干涉试验中两条缝之间的距离、缝的宽度与干涉光图样的光强空间分布形式的关系等，并将你们模型得到的结果与诺贝尔物理奖获得者玻恩的光学经典名著《光学原理》<sup>[3]</sup>中的光的衍射、双缝干涉、多缝干涉的强度近似公式进行比较。你们也完全可以提出改进，而且也可以提出自己的猜想，设法做出尽可能多的数学仿真。

## 2 问题分析

光是一种人类眼睛可以见的电磁波（可见光谱），是由一种称为光子的基本粒子组成，其具有粒子性与波动性，或称为波粒二象性<sup>[4]</sup>。

### 2.1 探索光本性的历史过程

人类关于光的本性的认识过程主要可以归结为是光的微粒学说和波动学说相互争论、交替发展的过程。17 世纪中叶，科学家开始了对光的本性问题的分析，法国数学家、物理学家勒内·笛卡尔（1596 - 1650）的理论被视作现代物理光学的起点，他认为光是发光物的一种机械属性，明确坚持光仅是发光体和传播介质的机械波性质，其观点兼具微粒说和波动说。在粒子学说方面，牛顿（1642 - 1727）继承了笛卡尔的微粒观点，系统提出了光的微粒学说，并使得微粒学说

在 18 世纪的欧洲占据着主导地位。在波动学说方面，意大利物理学家格里马尔迪（1618 - 1663）研究光的衍射现象时，首先明确提出了光是波动的观点。之后，胡克（1635 - 1703）和惠更斯（1629 - 1695）等人提出并完善了光的机械波动理论。1801 年托马斯杨（1773 - 1829）进行了著名的杨氏双缝实验，并用衍射实验展现了光的波动性特征。菲涅耳（1788 - 1827）于 1817 年给法国科学院上递了独立完成的波动理论。泊松完善了菲涅耳的数学证明。1850 年，莱昂·傅科（1819 - 1868）实验测得光在水中的速度小于光在空气中的速度，用实验证明了波动学说对光速的预言的正确性，从而否定了粒子理论的预言。

1865 年，麦克斯韦（1831 - 1879）的理论预言光是一种电磁波，1888 年赫兹（1857 - 1894）证实了电磁波存在的实验，这似标志着光的微粒学说的终结。19 世纪，波动理论几乎在所有光学和电磁学的现象中得到了验证，这是物理学的一个重大成果。

但到 19 世纪末期，有一些实验现象仍无法得到很好解释，其中一个即为光电效应。直到 1905 年爱因斯坦（1879 - 1955）提出光量子假说对光电效应进行了合理解释，并得到了物理学界认同，从而使得光的粒子理论重回历史舞台，并开启了光的波粒二象性大门，爱因斯坦因此获得 1921 年的诺贝尔物理学奖。1926 年，康普顿（1892 - 1962）在实验中观测到光子的动量，从而证实了光子的存在。

迄今为止，关于光的本性的理论和实验研究已得到了取得了巨大的成就，特别是 20 世纪后期以来，以量子电动力学为基础的量子光学的发展将麦克斯韦关于光的电磁理论和光量子理论统一起来，成为当代物理学的研究热点<sup>[5]</sup>。然而，自从爱因斯坦提出光子概念以来，人们至今仍不能同时看到光的粒子与波的双重现象，光究竟以粒子还是以波的形式出现，还只决定于实验。因此光子的波粒二象性仍然困扰着绝大多数人，无法令常人像对其他物理现象一样地信服。

## 2.2 光的波粒二象性猜想的数学仿真分析

在爱因斯坦之后有许多物理学家致力于探索光子波粒二象性的奥秘，量子光学是其中的主流方向，并取得了很多成就，例如在量子色动力学中<sup>[6][7]</sup>，对光子结构的测量显示光子既能以无尺寸粒子，即轻子的方式参与相互作用；也能以一组夸克和胶子的集合体，即强子的方式参与。此外，其他方向上的探索也取得了一定的进展，如我国龚祖同院士提出的类似氢原子的光子结构猜想，以及北京大学学者提出的光子是一个按光速直线前进的电磁场的猜想。根据题设，下面我们不涉及量子光学研究，主要对龚院士文献[1]的猜想和 D.Zu 文献[2]的猜想设计数学仿真实验，进行定量计算检验，在仿真过程中，我们需要根据实际情况进行合理的改进，或者探索更多有意义的仿真实验。

为简便处理，下文章中将龚院士文献[1]猜想中提出的光子结构称为“龚氏光子结构”，将 D.Zu 文献[2]猜想中提出的光子结构称为“经典光子结构”。

首先，基于龚院士文献[1]的猜想，以龚氏光子结构为基础，重点对光子与狭缝的相互作用建立仿真模型。在仿真模型中主要讨论光经过细缝后前进方向会发生改变的原因，以及细缝宽度、光子大小等参数对光的衍射“条纹”的影响；

其次，对大量光子的相互作用效果进行分析，寻求有效的方式对其进行刻画，并将其落实应用到仿真实验中。

最后，光的衍射和光的干涉之间具有紧密联系，在光的衍射仿真模型基础上，进一步扩展到对光干涉的分析，并参照文献[3]《光学原理》中的强度近似公式对相关参数进行分析讨论。

### 3 模型假设与符号说明

#### 3.1 模型假设

- 1、假设光都是垂直入射到缝隙；
- 2、为研究方便，仿真实验中均采用一种频率的光子，因而每个光子产生的场强幅值也是一样的。

#### 3.2 符号说明

$\gamma$	表示光子
$\gamma^+$	表示龚院士光子结构猜想中的正微子
$\gamma^-$	表示龚院士光子结构猜想中的负微子
$s$	干涉缝的缝间距
$d$	衍射缝的宽度
$\theta_0$	入射光束与衍射光栅面的法线的夹角(文章中 $\theta_0 = 0$ )
$\theta$	衍射光线与衍射光栅面的法线的夹角
$c$	真空光速
$\omega$	光的圆频率
$K$	库伦常量
$h$	普朗克常量

### 4 模型的建立与求解

#### 4.1 基于龚氏光子结构的光衍射仿真

下面基于龚院士文献[1]的光子结构猜想，建立引力作用模型和碰撞作用模型进行光的衍射数学仿真。

##### 4.1.1 龚氏光子结构猜想的提出

龚院士认为波尔的氢原子发光模型存在问题，他提出了氢原子的湮灭发光模型，进而对光子结构模型有了猜想。氢原子的湮灭发光模型如图 1 所示，电子将能量释放产生光子因而发生能级跃迁。其基本要点如下：

第一，由于光子是中性的，而电子是带有负电的，只能给光子传递负电，因此龚院士认为氢原子湮没发光时，原子核和电子分别提供其的一部分质量  $\Delta m_+ = xm_+$ ,  $\Delta m_- = xm_-$  和电量  $\Delta Q_+ = xe_+$ ,  $\Delta Q_- = xe_-$ （其中  $m_+ = m_- = m_e$ ,  $x$  为提供的质量比， $|e_+| = |e_-| = e$ ），产生一对正负微电子  $\varepsilon^+$ ,  $\varepsilon^-$ ，按照动量守恒定律，正负微电子分裂为两半，分别从 Z 轴的正负方向飞出。因此氢原子的湮没过程可以产生一对光子，而每个光子是由  $\varepsilon^+/2$ ,  $\varepsilon^-/2$  构成，质量均为  $m_e/2$ ，电量为  $\pm(xe/2)$ 。

第二，光子是以正微子  $\varepsilon^+/2$  为核心以负微子  $\varepsilon^-/2$  为卫星的类氢结构。

第三， $\varepsilon^-/2$  绕  $\varepsilon^+/2$  作等螺距的高速螺旋线旋进，其核心则以真空中的光子速度  $c$  匀速向前推进，核心的推进方向即为光子传播方向。 $\varepsilon^-/2$  有旋转就具有了相位，其旋转一周的周期和光子的频率是对应的。

第四， $\varepsilon^-/2$  绕  $\varepsilon^+/2$  旋进的轨迹在垂直光子传播方向的平面内为一个圆，在

平行于光子传播方向且包含该方向的平面内是一条周期性变化的类正弦曲线，它代表光子的偏振性即横波性。

第五，光子的电场与磁场两者方向正交，且皆垂直于光子的传播方向。

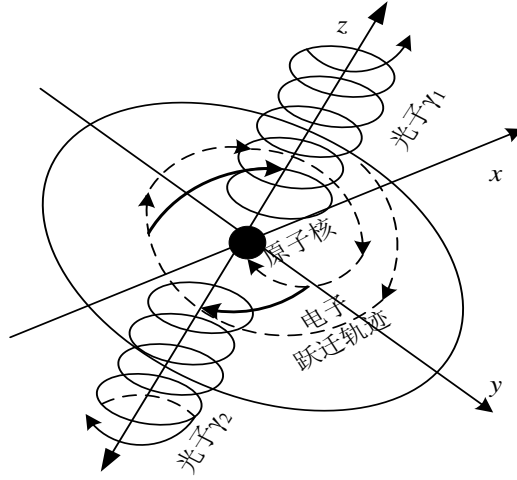


图 1 氢原子的湮灭发光模型

#### 4.1.2 龚氏光子结构的理论验证

以氢原子的湮灭发光模型为基础，下面我们通过求解龚氏光子结构中负微子（记为  $\gamma^-$ ）绕正微子（记为  $\gamma^+$ ）圆周运动的半径  $r$  对其进行理论验证。

首先根据狭义相对论，爱因斯坦的光子假说和波尔的氢原子理论，可以得到光子  $\gamma$  的波长为：

$$\lambda = \frac{h}{mcx}, \quad (1)$$

其中， $c$  为光速； $K$  为库伦常量；比例因子为  $x = \frac{2\pi^2 K^2 e^4}{h^2 c^2} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$ ； $m, n$  分别为氢原子中电子跃迁前后的能级；

从三个不同角度考虑，我们可以获得三种求解负微子的旋转半径  $r$  的方法，并将三种方法求得的半径记为  $r_1, r_2, r_3$ ，具体介绍如下：

(1) 依据经典力学中作旋转运动的向心力的关系式，有方法一：

$$\frac{xm_e v^2}{2r_1} = \frac{Kx^2 e^2}{4r_1^2}. \quad (2)$$

(2) 根据波尔氢原子理论中的角动量量子化条件，有方法二：

$$\frac{xm_e r_2 v}{2} = \frac{nh}{2\pi}, n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

(3) 根据负微子的旋转频率和光子的频率相同，有方法三：

$$v = \frac{2\pi c r_3}{\lambda}. \quad (4)$$

其中， $v$  为负微子的旋转线速度。

将式(1)代入方法一的式(2)中和方法三中的式(4)中，联立求解可得：

$$r_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{Kx e^2 \lambda^2}{\pi^2 m_e c^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5)$$

同理，联立方法二的式(3)和方法三中的式(4)，求解可得：

$$r_2 = \frac{n\lambda}{\sqrt{2\pi}}. \quad (6)$$

同理，联立方法一的式(2)和方法二中的式(3)，求解可得：

$$r_3 = \frac{2n^2hc}{\pi^2 Kx^2 e^2} \lambda. \quad (7)$$

在式(5)、(6)、(7)的基础上，假设三种氢原子电子的跃迁状态，代入相关参数得到以上三种半径值如下表所示：

表 1 旋转半径  $r$  求解结果对比

半径/m 跃迁状态	$r_1$	$r_2$	$r_3$
$E_2 \rightarrow E_1$	1.7628e-034	3.4368e-007	1.0545e+008
$E_3 \rightarrow E_1$	1.4874e-034	2.8998e-007	6.3346e+007
$E_3 \rightarrow E_2$	9.5191e-034	1.8559e-006	1.6606e+010

因为  $r_1$ ， $r_2$ ， $r_3$  是对同一物理量的三种不同求解结果，所以三者取值应满足  $r_1=r_2=r_3$ 。然而从表 1 结果可以得到，在同一跃迁状态下，三种半径之间的取值差异很大，实验结果说明式(5)、(6)、(7)之间相互矛盾，由此说明龚氏光子结构模型存在一定的缺陷。

进一步分析可得实验求解结果与理论取值相悖的原因是：某一频率下的光子在满足公式 (3)、(4) 的量子化条件下， $r$  只能等于某一些取值，而这些取值不一定能够满足公式 (2)，因此这就会使得  $r_1$  的取值与  $r_2$ ， $r_3$  不同，而实验结果也正体现了这一点。

改进方式：在龚氏光子结构中，正微子和负微子的质量分配比  $x$  取值相等，同时负微子又绕正微子做圆周运动，这一结构模型与传统圆周运动的物理模型中原子核的质量大于绕核粒子的质量不同。因此，通过改变正负微子的质量分配比例因子  $x$ ，使正负微子的质量不同，使之更加符合圆周运动模型，这样的改进也能够使得式 (2)、(3)、(4) 同时满足。在龚氏光子结构中质量比例因子的大小是与氢原子产生光子的过程有关，其具体取值这里不做过多讨论，在下面的仿真实验中，只根据合理性设置其取值。

#### 4.1.3 建立光的衍射数学仿真模型

对光的衍射建模主要分析两个问题：

- (1) 为什么光经过细缝后前进方向会发生偏转？
- (2) 怎样确定大量光子同时作用的最终效果？

##### 4.1.3.1 引力模型

龚氏光子结构中光子由正负微粒构成，两者带有相反的电荷量，同时负微子绕正微子旋转。另一方面，阻碍物物质都是由原子组成，因此在狭缝壁上分布有原子核和电子，并且两者都带有相应的电荷，由于自然界大多数物质都是呈现电极性，这里主要考虑原子中核外电子的电荷，电荷的存在使得在狭缝壁附近的一个范围内存在电场，从而会使靠近狭缝壁一定范围内的光子通过狭缝时，受到力的作用而发生偏转。图 2 给出了光通过狭缝的一个简易示意图。

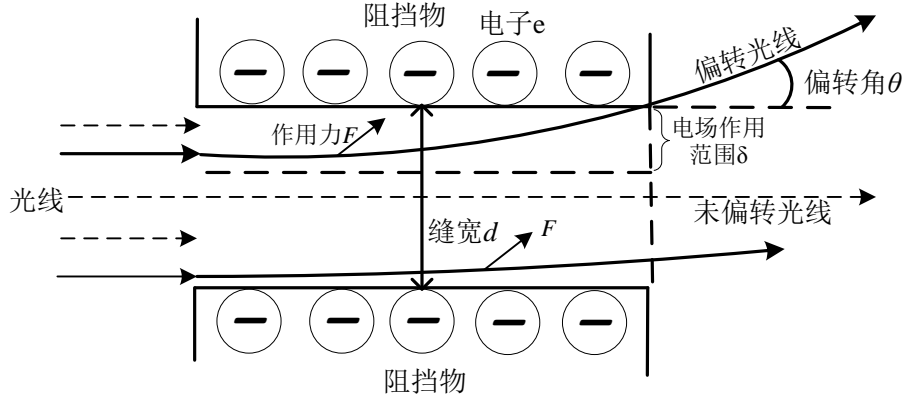
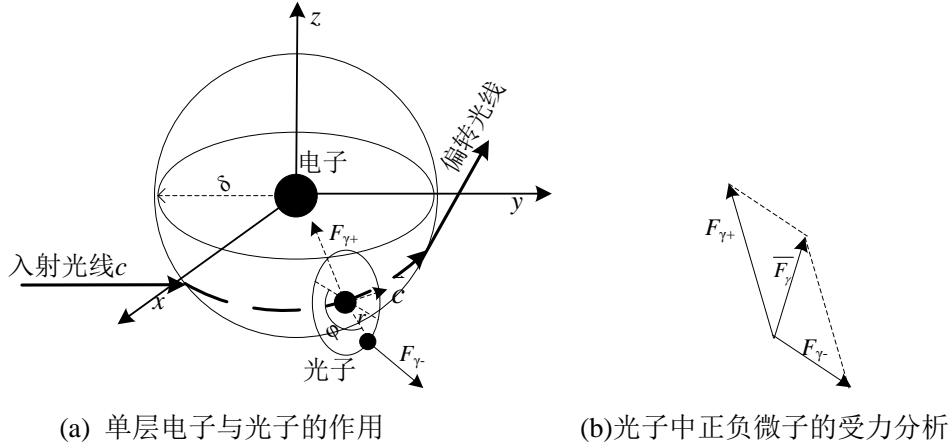


图 2 光子偏转引力模型示意图

下面我们将模型进一步简化并分情况讨论引力对光子前进方向的影响：

**情况 1:** 在障碍物狭缝边缘为一个电子存在情况下，光子的运动。

设光子正负微子的带电量为 $\pm e_\gamma$ ，光子质量为 $m_\gamma$ ，负微子旋转半径 $r$ ，转动周期 $f$ ，初始相位 $\varphi_0$ 。光子受电子引力作用如下图所示：



(a) 单层电子与光子的作用

(b) 光子中正负微子的受力分析

图 3 单电子影响模型图

根据上图所示电子对光子的力作用，建立微分方程组模型。具体操作如下：

**Step1:** 图4(a)空间坐标示意图，将光子的运动轨迹投影到与负微子运动平面垂直的平面内将三维空间转为二维平面，可以得到在以电子为坐标原点以负微子绕核运动的平面构成的坐标系中的负微子的平面坐标为：

$$\{x_{\gamma^-}, y_{\gamma^-}\} = \{x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+}\} + r \cos \varphi \times \{\cos(\varphi_{\gamma^+}), \sin(\varphi_{\gamma^+})\} \quad (8)$$

其中， $\theta$ 为负微子绕正微子旋转的相位， $\theta_{\gamma^-}$ 为负微子旋转平面与X轴的夹角。

**Step2:** 根据正负微子与电子之间的库仑力作用，可以得到一个光子所受合外力为：

$$\begin{aligned} \vec{F}_\gamma &= \frac{ke_{\gamma^-}e}{x_{\gamma^-}^2 + y_{\gamma^-}^2} \left\{ \frac{x_{\gamma^-}}{\sqrt{x_{\gamma^-}^2 + y_{\gamma^-}^2}}, \frac{y_{\gamma^-}}{\sqrt{x_{\gamma^-}^2 + y_{\gamma^-}^2}} \right\} - \frac{ke_{\gamma^+}e}{x_{\gamma^+}^2 + y_{\gamma^+}^2} \left\{ \frac{x_{\gamma^+}}{\sqrt{x_{\gamma^+}^2 + y_{\gamma^+}^2}}, \frac{y_{\gamma^+}}{\sqrt{x_{\gamma^+}^2 + y_{\gamma^+}^2}} \right\} \\ &= \frac{ke_{\gamma^-}e}{\sqrt{(x_{\gamma^-}^2 + y_{\gamma^-}^2)^3}} \{x_{\gamma^-}, y_{\gamma^-}\} - \frac{ke_{\gamma^+}e}{\sqrt{(x_{\gamma^+}^2 + y_{\gamma^+}^2)^3}} \{x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+}\} \end{aligned} \quad (9)$$



其中， $(x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+})$  为光子的正微子在  $xoy$  平面内的坐标。由于我们的模型中光子的全部质量大部分集中到中心点正微子上，故简化模型，将电子对正负微子的作用力点等效到正微子上。

Step3: 设在坐标 $(x,y)$ 处光子的在速度为 $\overline{V}_\gamma = (\overline{V}_x, \overline{V}_y)$ ，因此根据牛顿定律，可得：

$$\begin{cases} \overline{F}_\gamma = \frac{d\overline{V}}{dt} m_\gamma, \\ \overline{V}_\gamma = \left\{ \frac{dx_\gamma}{dt}, \frac{dy_\gamma}{dt} \right\}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f. \end{cases} \quad (10)$$

Step4: 综合式(8)~(10)，得到以下微分方程组：

$$\begin{cases} \{x_{\gamma^-}, y_{\gamma^-}\} = \{x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+}\} + r \cos \varphi \times \{\cos(\varphi_{\gamma^+}), \sin(\varphi_{\gamma^+})\}, \\ \overline{F}_\gamma = \frac{ke_{\gamma^-}e}{\sqrt{(x_{\gamma^-}^2 + y_{\gamma^-}^2)^3}} \{x_{\gamma^-}, y_{\gamma^-}\} - \frac{ke_{\gamma^+}e}{\sqrt{(x_{\gamma^+}^2 + y_{\gamma^+}^2)^3}} \{x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+}\}, \\ \overline{F}_\gamma = \frac{d\overline{V}}{dt} m_\gamma, \\ \overline{V}_\gamma = \left\{ \frac{dx_\gamma}{dt}, \frac{dy_\gamma}{dt} \right\}, \\ \varphi_\gamma = \arctan\left(\frac{dy_\gamma}{dx_\gamma}\right) \pm \frac{\pi}{2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f. \end{cases} \quad (11)$$

将改进得到的龚氏光子结构模型参数代入以上的微分方程组(11)，并对两组参数  $r_1 = 1.3599 \times 10^{-34}$ ， $r_2 = 2.6512 \times 10^{-7}$  求解得到光子的偏转角分别为  $\theta_1 = 0$  度， $\theta_2 = -3.1024 \times 10^{-7}$  度，两条运动轨迹如图4所示：

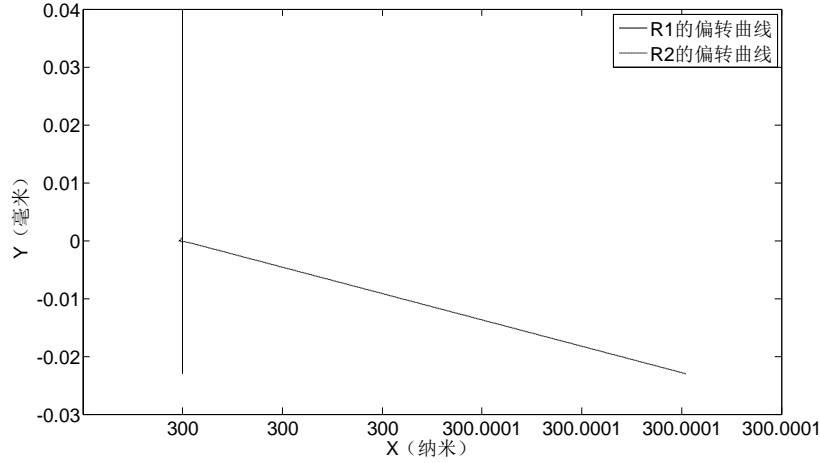


图 4 光子受单电子引力的运动轨迹

图 4 所示仿真结果说明，由于光子的运动速度很高，只考虑边沿处一个电子的作用，其引力是很微弱的，不足以使得光子发生偏转。因此将此情况 1 中障碍物为一个电子外延考虑为一面电子墙，得到以下情况 2。

**情况 2：**在障碍物狭缝边缘为一个电子墙的存在情况下，光子的运动。

鉴于光子的高速传播，它经过电子墙的时间很短，所以我们将电子墙的所有电荷集中在一个质点上考虑，相应示意图如图 5 所示：

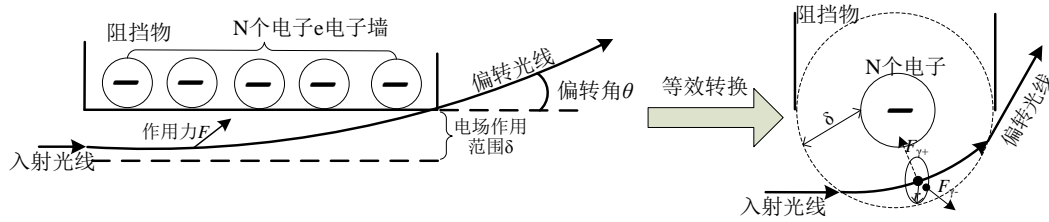


图 5 电子墙作用模型

将电子墙等效转化后，光子关于电子墙作用模型的运动微分方程只需将方程组 (11) 中  $e$  取为  $q=ne(n=1,2,3,...)$ ，由此得到修改后的微分方程组为：

$$\begin{cases} \{x_{\gamma^-}, y_{\gamma^-}\} = \{x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+}\} + r \cos \varphi \times \{\cos(\varphi_{\gamma^+}), \sin(\varphi_{\gamma^+})\}, \\ \vec{F}_{\gamma} = \frac{ke_{\gamma^-}q}{\sqrt{(x_{\gamma^-}^2 + y_{\gamma^-}^2)^3}} \{x_{\gamma^-}, y_{\gamma^-}\} - \frac{ke_{\gamma^+}q}{\sqrt{(x_{\gamma^+}^2 + y_{\gamma^+}^2)^3}} \{x_{\gamma^+}, y_{\gamma^+}\}, \\ \vec{F}_{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} m_{\gamma}, \\ \vec{V}_{\gamma} = \left[ \frac{dx_{\gamma}}{dt}, \frac{dy_{\gamma}}{dt} \right], \\ \varphi_{\gamma} = \arctan\left(\frac{dy_{\gamma}}{dx_{\gamma}}\right) \pm \frac{\pi}{2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f. \end{cases} \quad (12)$$

当  $q=10^7 e$  时，对两组同上的两组参数  $r_1=1.3599\times 10^{-34}$ ， $r_2=2.6512\times 10^{-7}$  数值求解微分方程组得到光子的偏转角分别为  $\theta_1=0$  度， $\theta_2=-4.6342$  度，两条运动轨迹如图 6 所示：

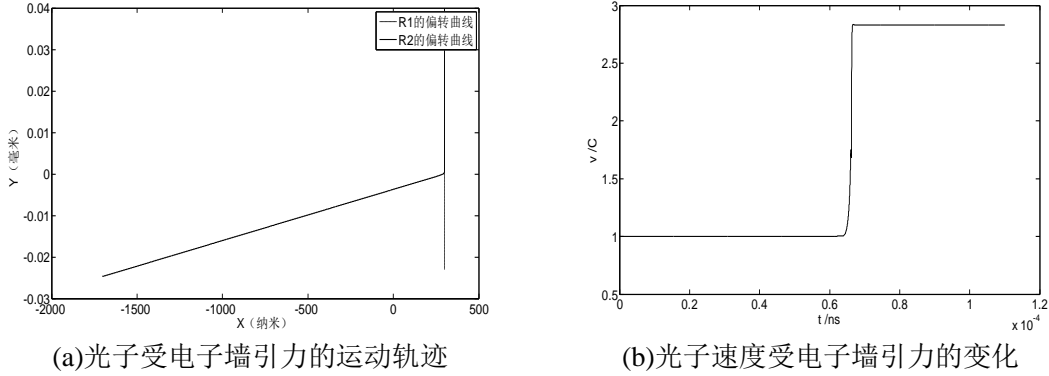


图 6 光子受电子墙引力作用结果

图 6(a)显示当光子半径  $r_2=2.6512\times 10^{-7}$  时，光子才会发生较大角度的偏转。这是因为若  $r$  太小  $r_1=1.3599\times 10^{-34}$ ，正负微子的极性表现不明显，因此基本无法受库伦引力影响。负微子的旋转半径应该与光子的波长相当，才能实现光的衍射。

根据图 4 和图 6(a)的单电子和电子墙的仿真结果可以发现：若吸引力过小，将不会导致光子的偏转，而当吸引力足够使得光子发生偏转时，光子的速度有几十倍提高，显然是不符合实际的。此外，仔细分析可以发现光子经过电子（或者电子墙）后，最终速度提高几倍的现象（如图 6 (b)）是不符合能量守恒定律的，这是因为龚院士的光子模型中正负微电子的相对位置和相对运动是一直保持不变的，因此，引力模型仿真实验的结论是：龚氏光子结构模型可以解释光子经过障碍物能够发生偏转，但缺乏合理性。

综上所述，引力模型不能解释光子通过狭缝时，路径发生弯曲的事实。因此在引力模型下，龚氏光子结构不能够解释光的衍射。

#### 4.1.3.2 碰撞模型

以上引力模型仿真表明，狭缝壁上的电子引力作用并不能明显使光子的前进方向发生偏转。为此从碰撞角度继续建立仿真模型。借鉴康普顿散射分析的思想，在龚氏光子结构的猜想的基础上，将光子视为一种正负微子组成的中性能量粒子，光子进入狭缝将与狭缝壁发生一系列碰撞作用，具体模型建立分析如下：

假设 1：在微观情况下遮挡物也不再视为平面，而是凹凸不平的曲面；

假设 2：遮挡物体的微观结构由原子组成的，光子与原子中的电子发生弹性碰撞，碰撞满足系统的动量和能量守恒；

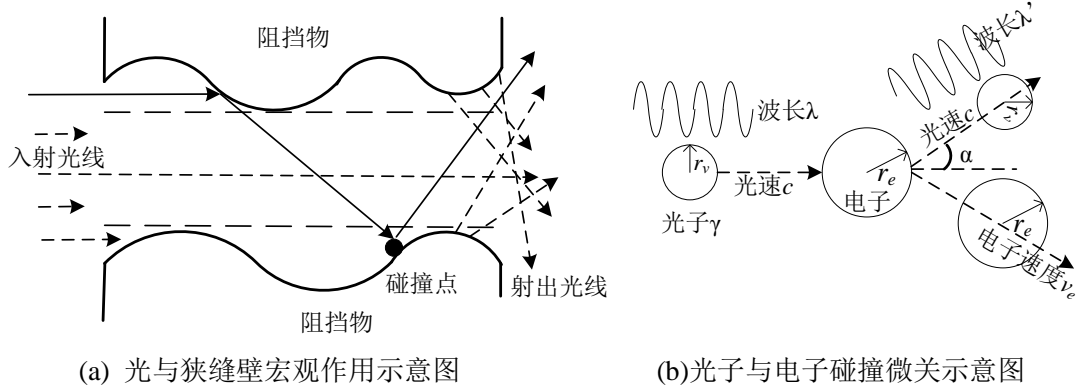


图 7 碰撞模型示意图

设光子频率为  $\gamma$  (或波长为  $\lambda$ )，其能量为  $h\gamma$ ，根据假设 2 碰撞中动量和能量守恒可得：

$$\begin{cases} h\gamma + E_0 = h\gamma' + E \\ p_\lambda^2 + p_e^2 - 2p_\lambda p_{\lambda'} \cos \alpha = p^2 \end{cases} \quad (13)$$

其中式中  $\gamma'$ ， $\lambda'$  为碰撞后光子的频率和波长， $p_\lambda$ ， $p_{\lambda'}$  为光子的碰前与碰后动量， $E$  和  $p$  分别是反冲电子的能量和动量， $E_0 = m_0 c^2$  是电子的初始能量。由康普顿散射公式求解可得，只有在入射波长  $\lambda \leq 0.1 \text{nm}$  时， $\lambda'$ ， $\lambda$  的差异才会非常明显。由此我们可以认为，通常情况下光子与电子的碰撞不会改变光子的频率  $\gamma$  和波长  $\lambda$ ，因此碰撞只会使得光子速度方向的改变。

当光线通过狭缝时，光子与狭缝电子发生碰撞，碰撞势必会使部分入射光线的直线传播发生改变，从而在狭缝的射出端产生大量的速度方向随机分布的光子。速度方向随机分布与碰撞程度相关，而碰撞的剧烈程度又与狭缝的宽度有直接关系。

#### 4.1.3.3 多光子相互作用效果仿真模型

在前两节中建立的单缝衍射的引力和碰撞模型中，在狭缝出射端都会得到大量速度方向各向偏转后的光子，而光子速度方向的偏转与光的衍射和干涉等波动现象有紧密联系。下面建立光子相互作用的仿真模型，对此进行分析讨论。

光子在狭缝中都受到力的作用（例如上面讨论的碰撞）其速度方向发生了偏转，偏转后大量光子在光屏上的相互作用将关系到光的衍射形成。本节我们将基于龚氏光子结构的对多光子的相互作用的效果进行刻画。

现实单缝衍射实验（如图）表明从单缝出来具有相同偏转角的光子通过透镜在探测器屏幕上聚集于一点（如在到达屏幕 P 点的光子数是狭缝上每一个点具有相同偏转角  $\theta_1$  的光子数之和）。经过狭缝作用后，从狭缝射出的各个方向的光子在光屏上形成了衍射条纹。可以假设经过狭缝作用后每一个光子出缝后速度方向在空间各个方向上随机分布，但究竟在空间各个方向上光子速度方向满足怎样的随机分布，可能使得最终衍射条纹形成？下面对此进行分析。

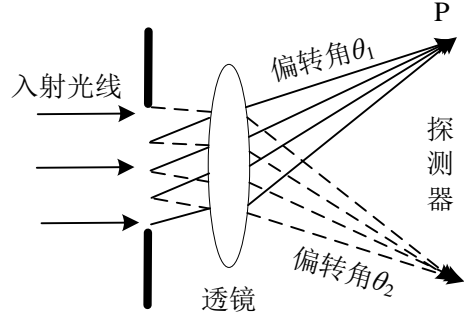


图 8 光的衍射示意图

迄今为止，对光的探测都是间接的，探测器屏幕上同一点的视觉效应是多个光子共同作用的结果。例如，用光探测器来测某一点的光强，当有相位相反的光子同时作用时，两者对探测器的极化作用是相反的，此时探测器不能响应。光的衍射、干涉等内在性质是大量光子相互作用的最终视觉呈现效果，因此在分析光屏上大量光子相互作用之前，首先定义光强来刻画光子将相互作用的效果。

现有研究表明，电磁波中能够引起视觉和使感光材料感光的主要是电场强度  $\vec{E}$ ，因此下面从光子的电场强度定义光强，并将光强计算等效到相位计算，从而对大量光子同时作用的效果进行有效的刻画。

#### (1) 光强定义

设某一时刻到达屏幕某点的光子数是  $N$ ，每一个光子  $\gamma_i$  的相位为  $\theta_i$ ，场强振幅为  $A_i$ ，其电场场强  $\vec{E}_i = \vec{A}_i e^{j\omega t + \theta_i}$  ( $i=1, \dots, N$ )，由此定义屏幕上该点每一时刻光强( $I$ )是所有光子电场场强矢量和的模，如下式所示：

$$I = \left| \sum_i \vec{E}_i \right|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N E_i(t) \right)^2 dt \quad (14)$$

其中， $T$  是光子的周期。

一般地，用严格的矢量电磁场理论求解电场强度在空间的分布问题是很复杂的，而且需要正确合理的边界条件。光子内负微子  $\gamma^-$  绕正微子  $\gamma^+$  作等螺距的高速螺旋线旋进，将负微子的旋转运动的角度定义为它的旋转相位，因此旋转使得光子具有有了相位。利用相位对光强进行刻画，具有更加直观和简洁的特点。为此下面将光强计算进行等效转化。

在某一时刻到达光屏的每一个光子都有相位  $\varphi_i$ ， $i \in [1, N]$ ，将不同初始相位的旋转运动用旋转相位矢量  $\vec{\varphi} = \vec{r} e^{j\omega t + \varphi_0}$  表示 ( $\vec{r}$  的大小为负微子的旋转半径，表征了旋转运动的振幅大小，方向取左旋为正方向)。根据时变电磁场的达朗贝方程，有：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}, \\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{\mu\epsilon} \int \nabla \nabla \cdot \vec{A} dt. \end{cases} \quad (15)$$

式中， $\vec{A}$  为时变电磁场的矢量位函数； $\vec{E}$  为时变电磁场中的场强； $\vec{J}$  为电流密度矢量； $\mu$  为介质的导磁率； $\epsilon$  为介电常数。

根据以上公式可以发现： $\vec{J}$  作为矢量位函数  $\vec{A}$  的激励源， $\vec{A}$  是随着  $\vec{J}$  变化而

变化的，场强则是由矢量位函数决定的。因此，对于时谐场来说，电流密度，矢量位函数，场强的周期是保持相同的，即相位的变化速度相同。这样，光子的负微子作周期的旋转运动，产生周期性的时变 $\vec{J}$ ，场强 $\vec{E}$ 的时变周期与负微子的旋转周期应该相同，这与龚院士的第三点猜想是吻合的。

由以上分析，可认为不同时刻负微子的旋转相位差与相应时刻 $\vec{E}$ 的相位差相同，且两者的强度也是成正比的。现在用 $\gamma_i(t)$ 表示 $[t, t+dt)$ 时段达到P点的第*i*光子，那么瞬时光强可以等效表示为此时段所有入射光子的旋转相位叠加 $I(t=t_0)=\left(\sum_i \varphi_i(t=t_0)\right)^2$ 。则式(14)中光强的定义可以等效表示为：

$$I = \left| \sum_i \vec{\varphi}_i \right|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_i \varphi_i(t) \right)^2 dt \quad (16)$$

在研究衍射和干涉图样时，我们将场强的矢量叠加(实际上仅与相位差有关)等效为光子的负微子的旋转相位矢量 $\vec{\varphi}$ 的叠加。

## (2) 多光子相互作用的仿真模型

如果假设狭缝出口处的所有光子相位相同，那么同一时刻由狭缝不同点上出射的具有相同偏转角 $\theta$ 的光子，在屏幕P上的相位差，与它们到达屏幕经过的光程差相对应。

现在回到讨论光子数关于不同出射速度方向的概率分布：

一种最假单的概率分布假设是：光子射出狭缝后，在空间各个方向上光子的传播概率相等，即每一个光子的出射速度方向在空间中满足均匀分布，即单缝各点处出射的光子数关于偏转角 $\theta$ 的概率密度为：

$$f_{n(\theta)} = \frac{1}{\pi} (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (17)$$

其中， $n(\theta)$ 为在 $\theta$ 速度方向上的光子数比例。

考虑碰撞模型中光子数的概率分布：根据光子的尺寸大小不同(即旋转半径 $r$ )，产生碰撞的区域应该是两条距单缝边沿 $l(l \propto r)$ 的条状区域。这样光子数关于偏转角 $\theta$ 的概率密度为：

$$f_{n(\theta)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (0 \leq \theta \leq \pi) & 0 \leq x \leq l \cup d-l \leq x \leq d; \\ 1 \quad (\theta = \frac{\pi}{2}) & l \leq x \leq d-l. \end{cases} \quad (18)$$

其中， $x$ 为单缝中发光点的位置。

现在建立仿真模型：从单缝出来的光子，经过透镜投射到屏幕上，由于透镜的聚焦作用，以及等光程性，只仿真光强在各个出射方向的分布，就能得到屏幕上的衍射图样。具体操作步骤如下：

**Step1:** 假设每一时刻波前出射M个光子，并根据光子数在出射速度方向的概率分布进行传播；

**Step2:** 由于在单缝出口处，光子的相位是相同的，但是不同光子到达同一点经过的光程不同，同一光子到达不同点的光程也不同。根据每个光子的不同光程得到其达到接收处的相位；

**Step3:** 如Step1的出射方法持续一个周期，并在同一出射方向上不断将接收

到光子的 $\vec{\phi}$ 进行叠加；

最终，得到如式（16）表示的光强关于不同出射角度上的分布曲线 $I(\theta)$ 。

实验仿真得到光子出射速度方向在各方向等概均匀分布情况下与题目中附录 4 的衍射光强分布比较，如图 9 所示，可以发现，两者能够很好吻合，从而说明基于所给光强定义的光子出射方向等概分布的随机模型能够很好地对大量光子的相互作用效果进行刻画，同时也为解释衍射条纹提供了一条可探索的思路。

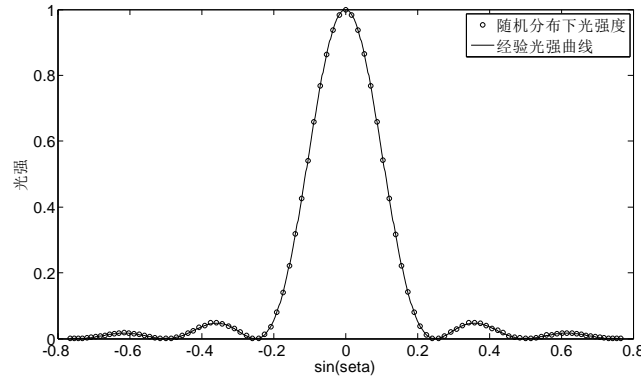


图 9 光子出射速度方向均匀分布情况下的衍射光强分布

## 4.2 基于光子出射速度方向均匀分布的光干涉仿真

1801 年，为了了解光到底是粒子还是波动，由英国科学家托马斯·杨最先设计与研究成功了双缝实验。由于经典粒子学说不能合理解释从这实验观测到的干涉图案，因此大多数的科学家从此接受了光的波动观。

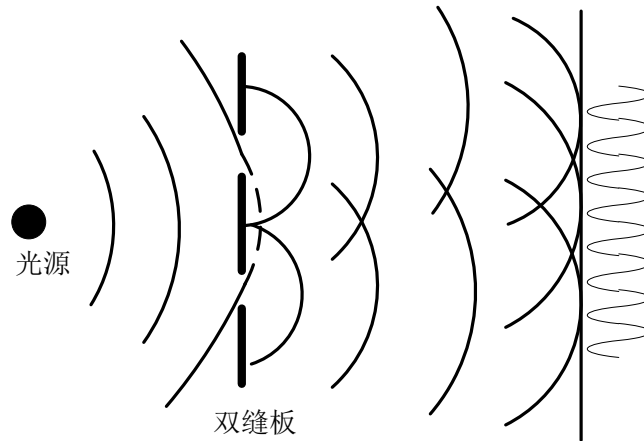


图 10 光的双缝干涉示意图

### 4.2.1 光干涉仿真模型建立

龚院士文献[1]的猜想以及 D.Zu 文献[2]的猜想都定性的从不同角度对光的干涉进行了解释。在 4.1 中，我们基于龚氏光子结构对光的衍射进行了数学仿真，实验结果表明，其对光的衍射解释并不理想，而光的干涉与衍射具有类似之处，因此可以预见基于龚氏光子结构对干涉的解释也会具有较大困难。D.Zu 文献[2]在电磁场的基础上建立了一个经典的单光子的几何结构模型，从光的粒子性角度（而不是其波动性的角度）重新分析了杨氏双缝干涉和偏振实验，它把光子的波动性归因于光子的自旋运动，其模型实质是将粒子光和电磁场视为一种有机的统一。

我们在 4.1.3 对大量光子的相互作用的仿真中发现，不论光子在狭缝中受到怎样的作用，只要其出射光子的速度方向的随机概率分布能满足均匀分布，且出射的初始相位一致，那么就可以形成与现有物理实验结果相吻合的衍射光强分布。基于实验中的这一发现，我们将双缝干涉或者多缝光栅衍射视为单缝衍射的一个延拓，因此建立基于光子出射速度均匀分布的光干涉仿真实验模型。

假设在干涉中各个狭缝对光子的作用与单缝衍射狭缝对光子的作用相一致。为此假设在各个狭缝出射光子的速度方向满足均匀分布的条件下，将各个狭缝出射的光子按照 4.1.3 中的多光子相互作用处理方法，计算其最终的干涉光强分布。

双缝衍射具体仿真设计如下：

**Step1:** 屏幕上每一个点的亮度由到达该点的光子相互作用产生，而到达该点的光子的相位是由该点到两条缝的距离决定的（即光程）。

**Step2:** 在荧光屏上相应点取值计算光子到达的光程，然后按照公式(16)将其矢量相加，进行一周期的累积，得到该点的亮度。

#### 4.2.2 光干涉仿真验证

（1）在不考虑每一个缝自身的宽度，每一个缝出射光子相位相同条件下，仿真得到干涉亮度分布结果如下：

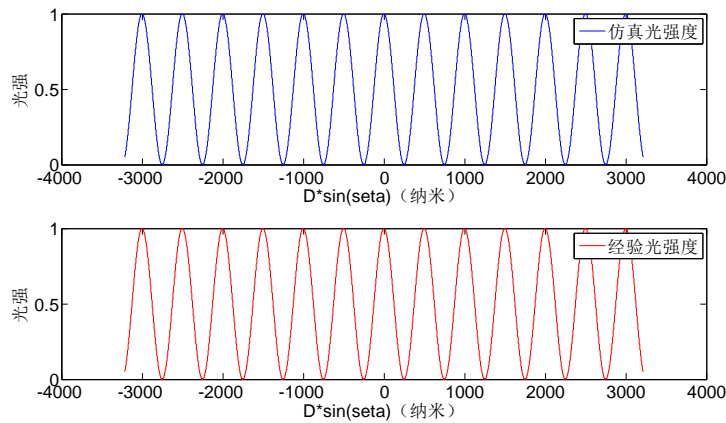


图 11 不考虑狭缝大小的干涉亮度分布仿真结果图

（2）考虑到双缝衍射中，单个缝的光子间也会有光程差，会对干涉效果产生影响，最终效果是干涉和衍射的综合。仿真得到干涉亮度分布结果如下：

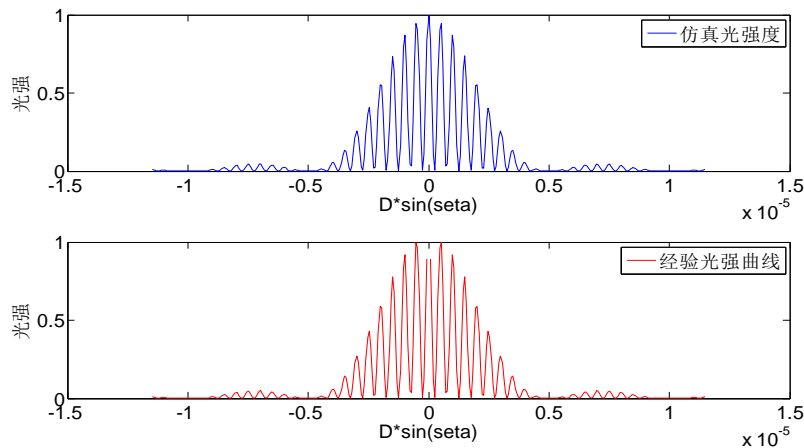


图 12 考虑狭缝大小时干涉亮度分布仿真结果图



根据我们建立的光干涉衍射模型，得到图 11、12 所示的验证结果，将其与文献[3]中经验结果比较可得，两者能够很好的吻合，说明运用我们所建立的光衍射仿真模型能够在一定程度上从光的粒子运动角度对光的干涉现象进行解释。

### 4.3 基于经典光子结构的偏振数学仿真

#### 4.3.1 经典光子结构猜想的提出

基于光子是经典电磁场能量的最小单元，文献[2]里猜想光子是一个按光速直线前进的电磁场，即光子是一个最小的平面电磁波。这个电磁场按照由光的波长所决定的角速度围绕上述前进直线旋转，也就是光子的旋转频率等于光子的振荡频率，相位由电场在  $x$  方向的投影或磁场在  $y$  方向的投影所决定。

事实上单个光子只有左旋光子、右旋光子两种，不存在非偏振光子和线性偏振单个光子，但一个左旋光子与一个右旋光子可以组成一个线性偏振光子对。当一个左旋光子与一个运动方向完全相同的右旋光子相遇时，如果相位完全相反，则发生光子湮灭现象。如果相位完全相同，则增强，由于能量与电磁场的强度是平方关系，相当于有 4 个光子存在。由于从两条细缝到达屏幕上同一点的距离不同，分别通过两条缝来的光子就会有相位差，由此产生双缝干涉现象。

猜想偏振镜片仅让相位均值方向与偏振镜片光轴平行的线性偏振光子对通过。由于正常光线中包含处于各种相位的光子对，在同时与偏振镜片碰撞时，这时各种相位的光子对会重新组合，产生平行于、垂直于偏振镜光轴的光子对，平行于偏振镜光轴的光子对能够通过偏振镜，而垂直于偏振镜光轴的光子对则被偏振镜阻挡，由此大约 50% 的光线可以通过偏振镜片。

#### 4.3.2 经典光子结构猜想的验证

下面验证经典光子结构猜想下，是否可以出现实际中光的偏振现象：

由于左旋、右旋光子通过偏光镜时会发生组合成对的现象，认为平行于偏振镜光轴的光子对在经过偏振镜之后也会重新分开，因此能够穿过偏振镜的光子前后的能量是不变的。我们在仿真实验中，通过统计经过偏振片的光子数比例，来等效穿过偏振片的光能比。仿真流程图如下所示：

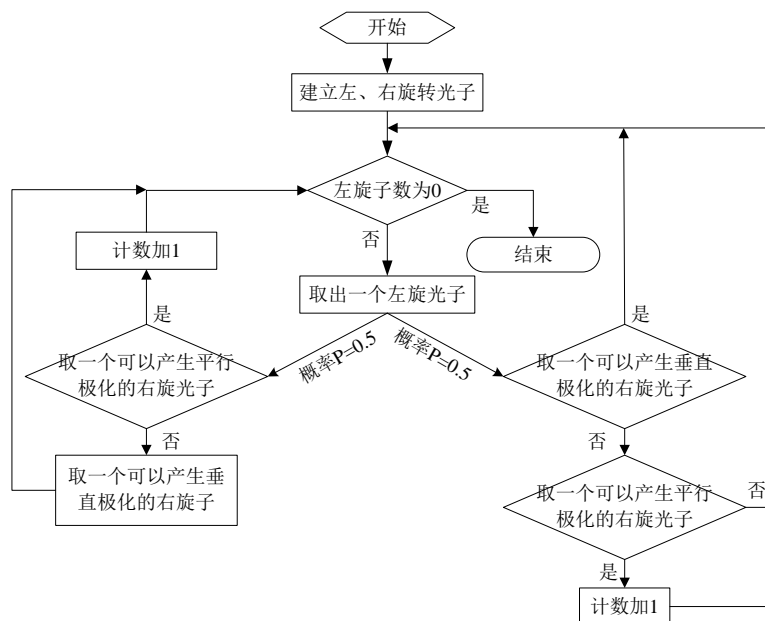


图 13 光的偏振仿真流程图

## 5 结果分析

### 5.1 单缝衍射碰撞模型仿真结果及分析

#### 5.1.1 碰撞区域占空比对于衍射光强分布的影响

实验仿真中，设发生碰撞区域的光子区域宽度  $d_1$  与整个缝宽  $d$  的比值为碰撞区域占空比 ( $d_1/d$ )，累积屏幕的每个点的接收光子个数为 70000 个，得到在不同的碰撞区域占空比下的实际光强分布图（碰撞模型下的光强分布）和经验分布图（即题目中的附件 4）的对比如图 14 所示：

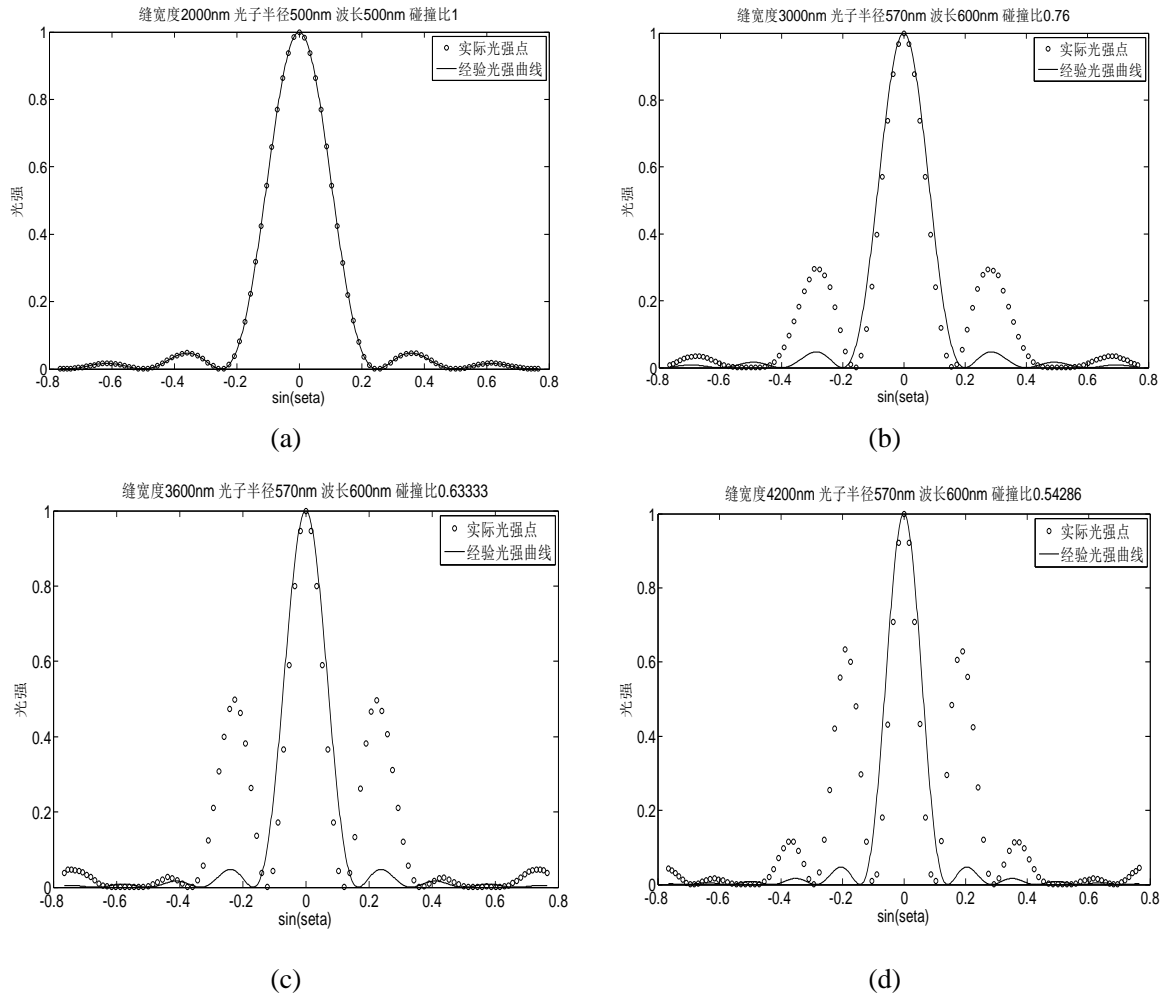


图 14 碰撞区域大小对衍射光强分布的影响

对比以上四张光强曲线图，随着碰撞区域占空比的减小，实际的光强分布与经验值差距不断增大。碰撞区域占空比越小，第二级明纹的光强与第一级明纹的对比度越不明显。当碰撞区域占有整个缝宽时，实际光强分布曲线与经验曲线基本完全重合。即当光从细缝射出时，对于每个方向的分布概率相同时，所形成的衍射图样和经验值是基本吻合的。

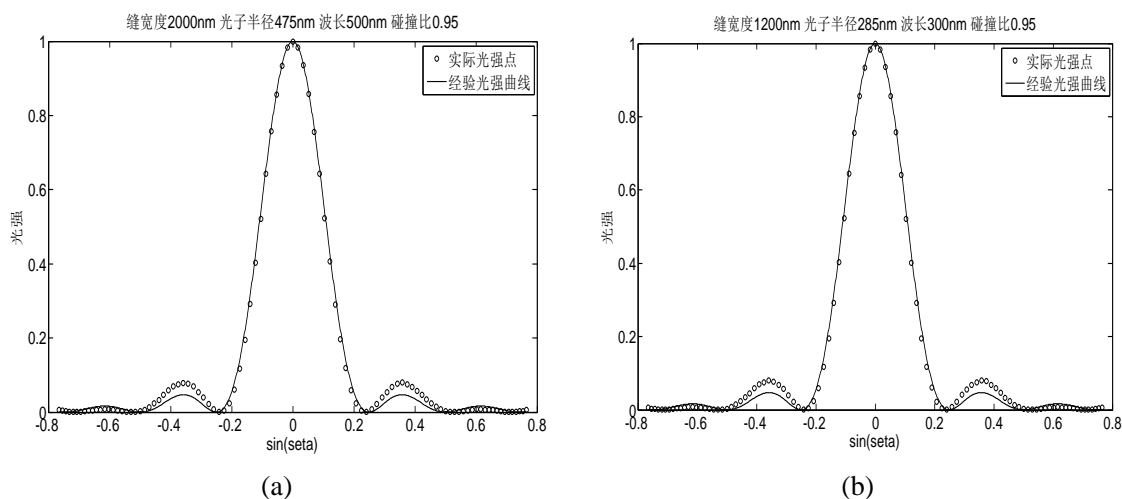


图 15 完全碰撞情况下衍射光强分布

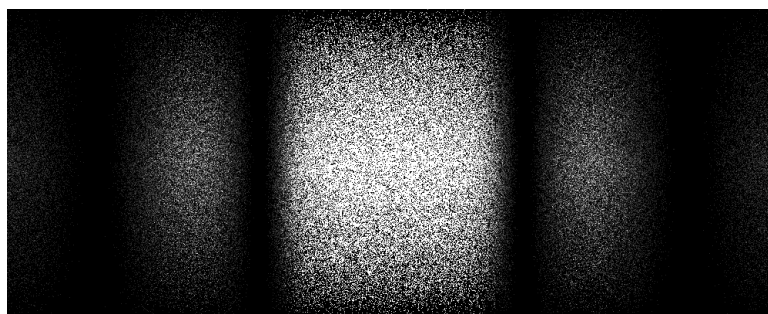
对比图 15(a)和图 15(b)，两个光强分布图中，实际曲线和经验值的偏离度几乎是一样的。这说明缝宽度与光子半径，以及波长的大小并不影响实际光强与经验值的吻合度。

### 5.1.2 波长、缝宽对于衍射图样的影响

根据上面的分析，当碰撞区域占空比为 1 时形成的光强分布最接近经验值。因此以下的实验仿真中，均是在碰撞区域占空比为 1 的情况下进行的。

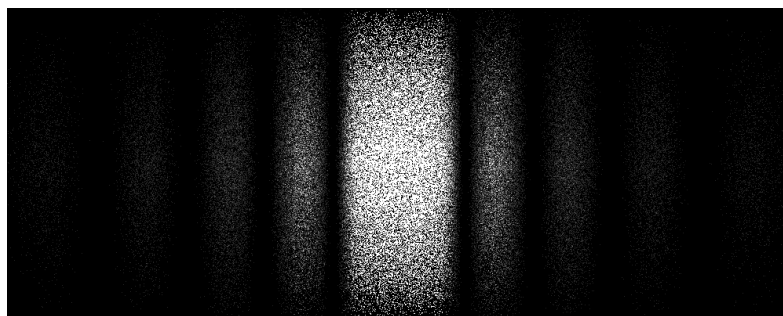
仿真中，累积屏幕的每个点的接收光子个数为 70000 个，凸透镜的焦距为  $f=1$ ，得到不同频率的光子（不同波长）经过不同宽度的细缝时形成的衍射图样如图 16 所示：

$d = 2000\text{nm}$   
 $\lambda = 500\text{nm}$



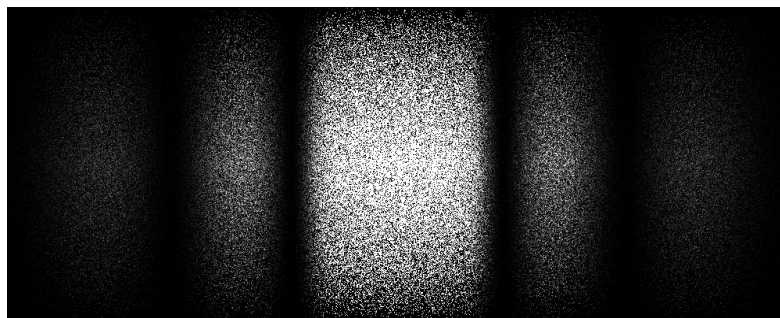
(a)

$d = 4000\text{nm}$   
 $\lambda = 500\text{nm}$



(b)

$d = 4000\text{nm}$   
 $\lambda = 800\text{nm}$



(c)

图 16 波长和缝宽对衍射光强分布的影响

对比图 16(a)和图 16(b)，细缝的宽度越宽，形成的中央第一级明纹，以及两旁的各级明纹都越窄；对比图 16(b)和图 16(c)，光子的波长越长，即频率越低，形成的衍射图样中明纹的宽度越宽。

### 5.1.3 光子个数对于光强分布的影响

为研究光子个数对于衍射中光强分布的影响，分别累计屏幕上的没点接收光子个数为 70000,140000 进行实验仿真，得到的光强分布图如图 17 所示：

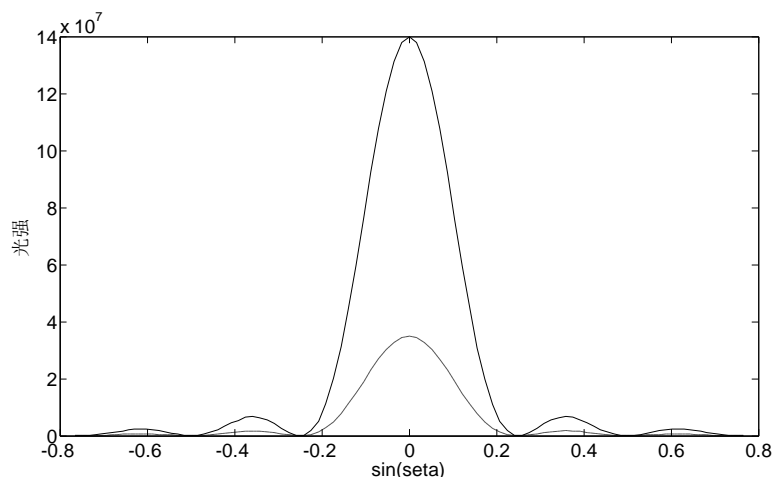


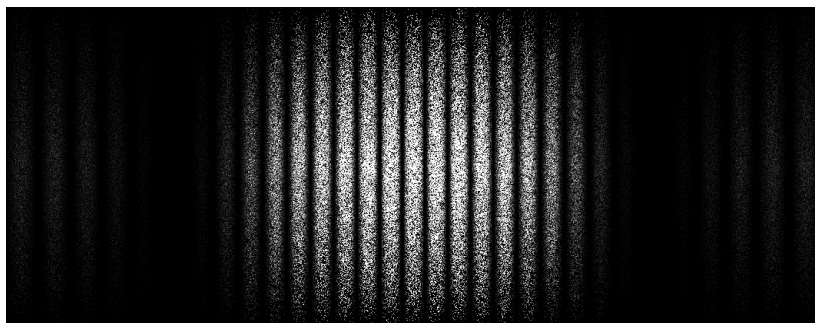
图 17 光子数目对衍射光强分布的影响

从图 17 可以看出：对比不同光子数下的光强分布图，对于同一接受点的光子数越多光强越强。此外，以上任何一条曲线的光强都是有明暗交替的，即使每个点接收的光子个数相同，光强还是与点的位置有关。综上，光强的分布与光子个数以及接收点位置都有关系。

## 5.2 光的干涉仿真结果及分析

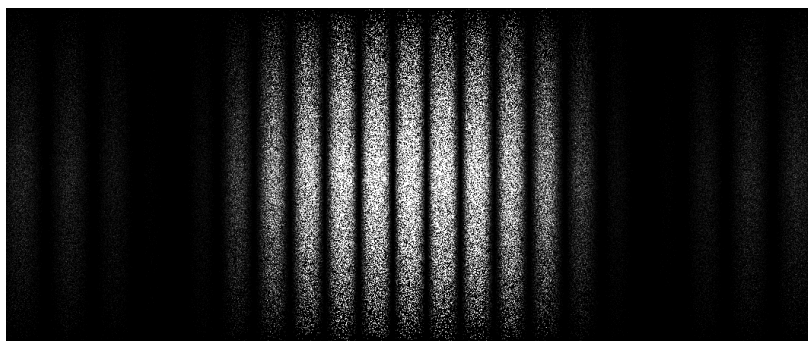
(1) 考虑在焦距 $f$ ，波长 $\lambda$ 固定的情况下( $f = 1\text{m}$ ,  $\lambda = 500\text{nm}$ )，给出不同缝宽 $d$ 和缝间距离 $s$ 取值条件下的四组仿真双缝干涉条纹，结果如下图所示：

$s = 15000\text{nm}$   
 $d = 1500\text{nm}$



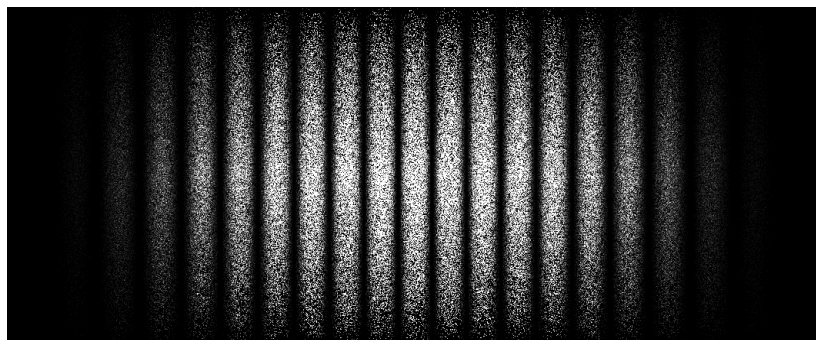
(a)

$s = 10000\text{nm}$   
 $d = 1500\text{nm}$



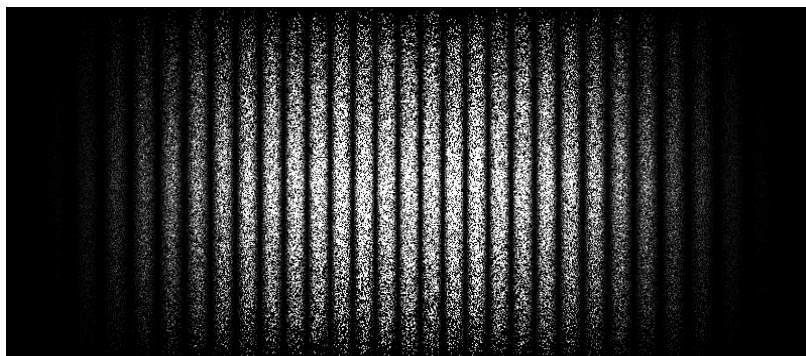
(b)

$s = 10000\text{nm}$   
 $d = 1000\text{nm}$



(c)

$s = 15000\text{nm}$   
 $d = 1000\text{nm}$



(d)

图 18 缝宽  $d$  和缝间距离  $s$  对光干涉条纹的影响

对比图 18(a)和图 18(b)可得，细缝间距越大，条纹宽度越小；对比图 18(b)和图 18(c)得到，细缝宽度越小，形成的衍射图样在屏幕上的宽度越宽。

(2) 发射点累计发射 1000 万个光子，考虑其他条件固定情况下，固定的情况下，波长  $\lambda$  对干涉图样的影响，实验结果如下图所示：

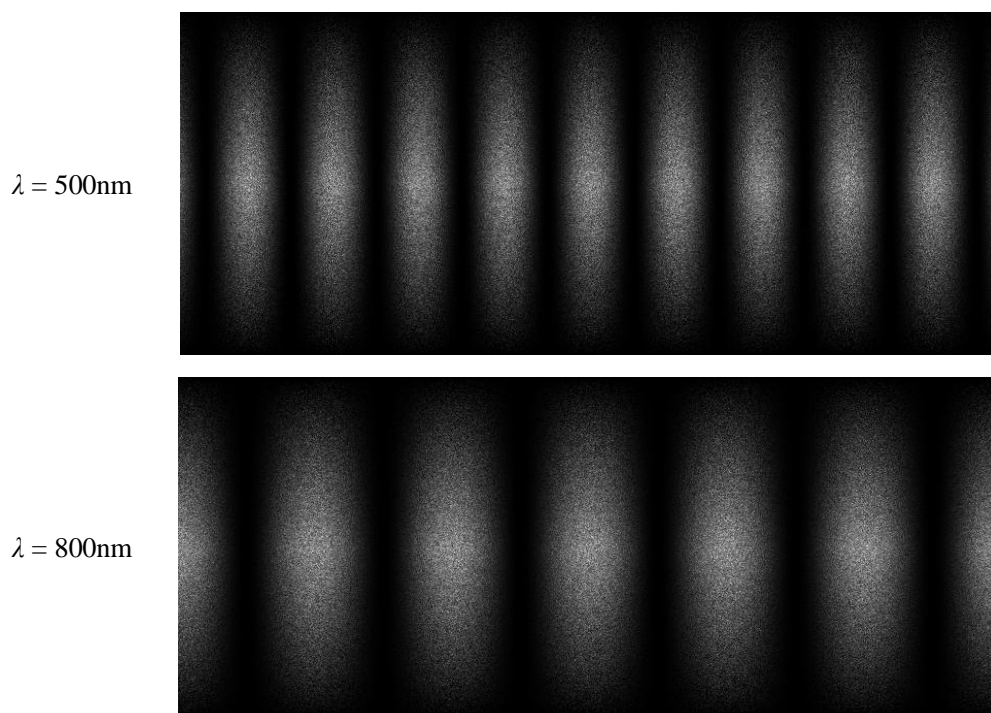


图 19 波长对干涉条纹的影响

对比图 19 可得，光子的波长越长，即频率越低，形成的干涉射图样中明纹的宽度越宽。

### 5.3 光的偏振仿真结果及分析

基于经典光子结构模型，通过图 13 显示的仿真流程，对不同光子总数的情况，采用蒙特卡洛仿真方法，得到的偏振仿真统计结果如表所示：

表 2 光的偏振仿真统计结果

光子总数	10000	20000	80000
通过的光子个数比例	47.53%	44.20%	48.50%

在大量统计不同光子数通过偏振镜的实验结果后，可以发现，通过的光子数比例基本都接近 50%，即通过偏振镜的能量约为之前的一半，与实际相符。

## 6 模型的评价与改进

### 6.1 模型优缺点分析

(1) 本文在仔细分析题意的基础上，在对龚院士的正负光微子旋转猜想验证时，首先从基础理论推导验证，发现不合理性并分析了原因，给出了改进方法；然后又通过建立数学仿真模型对猜想进行验证。整个验证过程考虑全面，综合考虑了理论依据和实际情况。

(2) 针对光子过缝隙的偏转问题，建立了吸引碰撞两个模型，进行数学仿真，

对实验结果进行了合理的分析。提出了两种光子数在不同出射角度上的概率分布，通过控制变量进行相应的衍射仿真，能够很直观地反映出波长、缝宽等对于光强和条纹分布的影响。

(3) 巧妙合理地构建光子的衍射、干涉实验，得到了和经验实际相吻合结果，证实了粒子性解释干涉、衍射的可能性。

不足之处，没有提出方案解决光子以何种机理绕射物体和通过小孔后产生散射的问题，且光子与边缘的碰撞过程没有进行定量分析。

## 6.2 模型改进

讨论龚氏光子结构模型时，可以对多种不同的正负微子结构进行猜想验证，例如可以使用双螺旋结构，这种光子内部结构产生的结果可能更加接近实际。

光子在离开孔缝时的散射概率在各个方向的不均匀性，可以借用惠更斯-菲涅尔原理中的倾斜因子<sup>[11]</sup>来刻画，倾斜光线散射在各个方向上的概率。

## 参考文献

- [1] Gong Zutong, A theory of the photon structure, *acta photonica sinica*, Vol.28 No.1,:1-17, 1999.
- [2] D. Zu, the classical structure model of single photon and classical point of view with regard to wave-particle duality of photon , *Progress In Electromagnetics Research Letters*, Vol. 1: 109 - 118, 2008.
- [3] Max Bron, Emil Wolf 著, 杨葭荪等译, 光学原理第七版 (上册), 北京:电子工业出版社, p374, 2005.
- [4] 维基百科, 光, <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%89>, 2011.9.24.
- [5] 维基百科, 光子, <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%89%E5%AD%90>, 2011.9.24.
- [6] Jonathan M. Butterworth, Structure of the Photon, In: 19th International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Stanford, CA, USA, 9 - 14 Aug 1999, pp.538-557.
- [7] 焦善庆, 许弟余, 周勋秀, 王蜀娟, 光子静质量和光子结构, *云南大学学报(自然科学版)*, 27(6):461—463, 2005.
- [8] 韩中庚, 数学建模方法及其应用, 北京: 高等教育出版社, 2005.6.
- [9] 赵静、但琦, 数学建模与数学试验 (第 2 版), 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [10] 王正林、刘明, 精通 matlab7, 北京, 电子工业出版社, 2007.2.
- [11] 康颖, 大学物理 (下册), 北京: 科学出版社, 2007, p114-180.