

一、问题重述

自 1959 年美国的英格伯格和德沃尔制造出世界上第一台工业机器人“尤尼梅特”开始，近半个世纪以来，机器人的研制和应用以惊人的速度发展并取得长足的进步。当今世界，机器人的应用领域已十分广泛，包括工业生产、海空探索、医疗康复和军事活动等，此外，机器人已逐渐在医院、家庭和一些服务行业获得应用。从生产车间中的焊接机械手，到水下自治式机器人，从娱乐性的拳击机器人，到伊拉克战场上的无人驾驶机，机器人已经与我们的日常生活息息相关。

机器人通常分为关节式机器人（或称机械臂、机械手、机器人操作臂、工业机器人等）和移动式机器人。一般来说，前者具有更多的自由度，而后者的作业范围则更大一些。

以某型号机器人为例，其示意图见图 1：

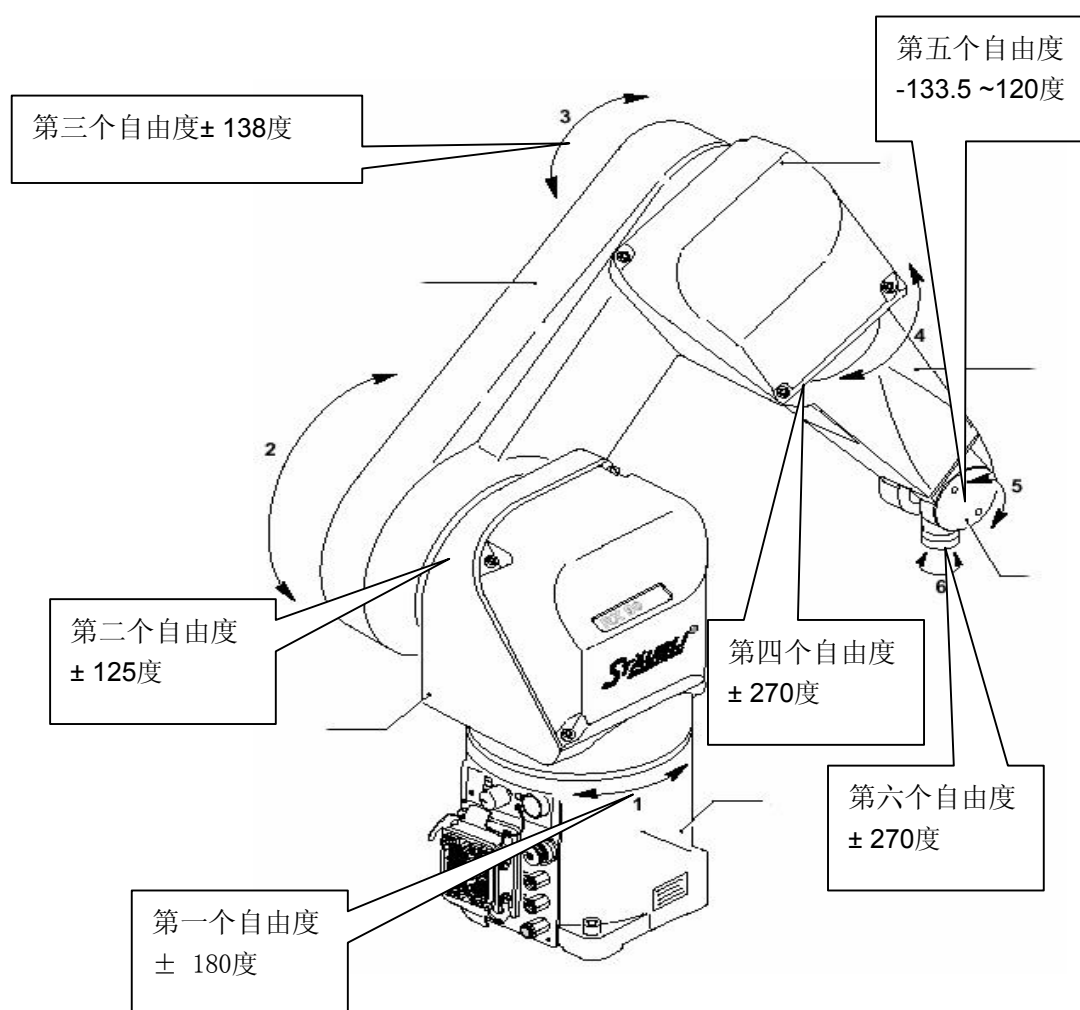


图 1 机器人结构图

这种机器人一共有 6 个自由度，分别由六个旋转轴（关节）实现，使机器人的末端可以灵活地在三维空间中运动。为了便于分析和计算，我们对机器人结构进行

简化，简化后的数据见图 2 和参数表 1。这里用七条直线段表示机器人的七个连杆，连杆之间用所谓的旋转关节连接，已知 $AB=140\text{mm}$, $BC=255\text{mm}$, $CD=255\text{mm}$, $DE=65\text{mm}$ 。根据旋转的方向分成两类关节，旋转轴分平行连杆的（如图 1 的自由度一、四、六，对应于图 2 中的 F, G, H ）和垂直连杆的（如图 1 的自由度二、三、五，对应于图 2 中的 B, C, D ）两种，前者如笔帽的转动方向，后者如摇柄的转动方向。每一个关节对应一个角度 θ_i ，这个角度表示前一个连杆方向到后一个连杆方向转角（对于 B, C, D ），连杆方向为 AB, BC, CD, DE ，或者相对于初始位置的转角（对于 F, G, H ），假设机器人的初始位置是在一个平面上的（ $y-z$ 平面）。为了使机器人运动得更加灵活允许关节的转角超过 360° 的。

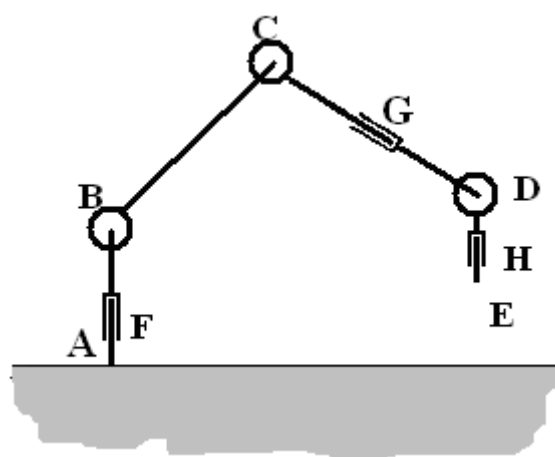


图 2 机器人的尺寸图

机器人关于六个自由度的每一个组合 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ ，表示机械臂的一个位姿，显然每个位姿确定顶端指尖的空间位置 X : $f(\Theta) \rightarrow X$ 。假定机器人控制系统只能接收改变各个关节的位姿的关于连杆角度的增量指令（机器指令） $P = \Delta\Theta = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6)$ ，使得指尖（指尖——图 2 中的 E 点，具有夹工具、焊接、拧螺丝等多种功能，不过在这里不要求考虑这方面的控制细节）移动到空间点 X' ，其中各个增量 $\Delta\theta_i$ 只能取到 -2, -1.9, -1.8, ..., 1.8, 1.9, 2 这 41 个离散值（即精度为 0.1° ，绝对值不超过 2° ）。通过一系列的指令序列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 可以将指尖依次到达位置 X_0, X_1, \dots, X_n ，则称 X_0, X_1, \dots, X_n 为从指尖初始位置 X_0 到达目标位置 X_n 的一条路径（运动轨迹）。根据具体的目标和约束条件计算出合理、便捷、有效的指令序列是机器人控制中的一个重要问题。我们约定直角坐标系的原点设在图 2 的 A 点， z 轴取为 AB 方向， x 轴垂直

纸面而 y 轴则在基座所固定的水平台面上。

1. 根据市场需求, 机械臂制造厂打算为他们的产品研发一个软件系统, 能够直接将用户的运动命令自动转换成机器指令序列。即为这类机器人设计一个通用的算法, 用来计算执行下面指定动作所要求的指令序列, 并要求对你们算法的适用范围、计算效率以及你们的近似算法所造成的误差和增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差大小进行讨论 (不考虑其他原因造成的误差):

①. 已知初始位姿 Φ_0 和一个可达目标点的空间位置 (O_x, O_y, O_z) , 计算指尖到达目标点的指令序列。

②. 要求指尖沿着预先指定的一条空间曲线 $x = x(s), y = y(s), z = z(s), a \leq s \leq b$ 移动, 计算满足要求的指令序列。

③. 在第①个问题中, 假设在初始位置与目标位置之间的区域中有若干个已知大小、形状、方向和位置的障碍物, 要求机械臂在运动中始终不能与障碍物相碰, 否则会损坏机器。这个问题称机械臂避碰问题, 要求机械臂末端在误差范围内到达目标点并且整个机械臂不碰到障碍物 (机械臂连杆的粗细自己设定)。

2. 应用你的算法就下面具体的数据给出计算结果, 并将计算结果以三组六维的指令序列 (每行 6 个数据) 形式存放在 Excel 文件里, 文件名定为 `answer1.xls`, `answer2.xls` 和 `answer3.xls`。

假设在机械臂的旁边有一个待加工的中空圆台形工件, 上部开口。工件高 180mm, 下底外半径 168mm, 上底外半径 96mm, 壁厚 8mm。竖立地固定在 xy 一平面的操作台上, 底部的中心在 $(210, 0, 0)$ 。

①. 要求机械臂 (指尖) 从初始位置移动到工具箱所在位置的 $(20, -200, 120)$ 处, 以夹取要用的工具。

②. 如果圆台形工件外表面与平面 $x = 2z$ 的交线是一条裂纹需要焊接, 请你给出机械臂指尖绕这条曲线一周的指令序列。

③. 有一项任务是在工件内壁点焊四个小零件, 它们在内表面上的位置到 xy 平面的投影为 $(320, -104)$ 、 $(120, 106)$ 、 $(190, -125)$ 和 $(255, 88)$ 。要求机械臂从圆台的上部开口处伸进去到达这些点进行加工, 为简捷起见, 不妨不计焊条等的长度, 只考虑指尖的轨迹。

3. 制造厂家希望通过修改各条连杆的相对长度以及各关节最大旋转角度等设计参数提高机械臂的灵活性和适用范围。请根据你们的计算模型给他们提供合理的建议。

二、模型假设与名词解释

1. 在对连续的曲线进行焊接时，可以认为实际中每一次进行焊接，焊点并非只是几何意义上的点，而是一小段连续焊点。
2. 机械臂到达目的点并非一定指指尖接触了目的点，只需使得指尖和目的点之间的距离小到足够的小即可。
3. 圆台的壁厚是指圆台表面法线截得的壁的长度，为 8mm。所以，不难求得，圆台的下底内半径为 159.3837mm，上底内半径为 87.3837mm。
4. 将机械臂指尖移动到一点以完成某项任务时，假设对最后一个关节的姿态不做特殊要求。在实际中，要完成某项任务（如夹取物品），可能会对最后一个关节的姿态有要求（如垂直某平面），但此处我们无法得到机械臂和所进行的任务的具体信息，因此暂不考虑这一点。

注：上述假设是模型讨论过程中的全局性假设，在后面的分步讨论中我们可能引入新的局部性假设。

名词解释：

位置——机械臂指尖在基座坐标系中的坐标。

位姿——机器臂关于六个自由度的一个组合 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ 。

三、全局符号说明

0T_1 ——从关节 1 坐标系转换到以 A 为原点的坐标系的转换矩阵。

jT_i ——($i > j, i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6$) 从关节 i 坐标系转换到关节 j 坐标系的转换矩阵。

0T_6 ——从关节 6 坐标系转换到以 A 为原点的坐标系的转换矩阵。

注：上述符号是模型讨论过程中的全局性符号，在后面的分步讨论中我们可能引入新的局部性符号。

四、问题分析

1、对机械臂的理解

机械臂，或机械手，是由一串用转动或平移关节连接的刚体（杆件）组成。每一对关节一杆件构成一个自由度。杆件的编号由手臂的固定基座开始，固定基座

可看成杆件 0，第一个运动体是杆件 1，依次类推，最后一个杆件与工具相连；关节 1 处于连接杆件 1 和基座之间，每个杆件至多与另外两个杆件相联，而不构成闭环。

任何杆件 i 都可以用两个尺度表征，杆件 i 的长度 a_i 是杆件上两个关节轴线的最短距离；杆件 i 的扭转角 α_i 是两个关节轴线的夹角。

2、对机械臂位姿和位置的理解

机器人关于六个自由度的每一个组合 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ ，表示机械臂的一个位姿，显然每个位姿确定顶端指尖的空间位置 X : $f(\Theta) \rightarrow X$ 。假定机器人控制系统只能够接收改变各个关节的位姿的关于连杆角度的增量指令（机器指令） $P = \Delta\Theta = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6)$ ，使得指尖移动到空间 X' 。这个从 Θ 到 X 地变换需要用到相应的空间转换矩阵。

为描述相邻杆件件平移和转动的关系。Denavit 和 Hatanberg（1955）提出了一种为关节链中的每一个杆件建立附体坐标系的矩阵方法。D-H 方法是为了每个关节处的杆件坐标系建立 4X4 齐次变换矩阵，表示它与前一个杆件坐标系的关系。这样逐次变换，用“手部坐标”表示的末端执行器可被变换并用基座坐标表示。

3、对机械臂位置变换的理解

对于这样的有 6 个自由度的机械臂来讲，每个关节处都有相应地可以自由转动的范围 $(-\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max})$ ，而且每个关节处每次转动的角度也是有限的 $(-2^\circ, 2^\circ)$ 。那么，在没有障碍物的情况下，要将一个机械臂指尖从初始点移动到目的点，并不一定能在各个关节一次转动内达到。所以，要先得到从起始点到目标点指尖各个关节处转动的角度，然后使各个关节处每步尽可能地转动最大角度 (2°) ，最后，在剩下的 2° 以内完成该关节处转动的最终一步，这就是模型要求解。

在已知初始点和目的点的位置和转换矩阵后，D-H 运动学的逆问题可以求解，即可以得到各个关节处应该转动的角度的总和。但是，在一般的问题中往往只知道机械臂的起始点和目标点，而并不清楚它们之间转换的矩阵。所以，我们必须采用其他的方法求得这些转动角度。

本文采用的是类似于数值分析的搜索算法，每个关节处的转动是增加或减少某一个步长来进行的，每次转动的判据都是：考察转动后机械臂的指尖离目的点的距离是否减少，如果减少就采用这个转动，否则该关节保持不动。如此每个关节处都执行了相应的操作后，在进行迭代。

一个很显然的搜索顺序，就是先转动编号较小的关节，再转动较大的。这就和一个人要取一个物品一样，先是转动身体朝向物品，再依次调整转动肩关节，肘关节尽可能地靠近，最后用手去取到它。如果顺序正好相反的话，就明显要浪费好多手部，肘部，和肩部的转动动作，这个人就相当的不自然了，不明智了。

4、对合理、便捷、有效的指令序列的理解

对于机械臂制造厂而言，一个控制机械臂的软件系统必须能产生合理、便捷、有效的指令序列。我们认为，要达到这样的目标，除了保证所产生的指令序列能使机械臂达到目的点，还需要考虑两点：

- 一是算法要能尽可能快地产生从起始点到达目的点的指令序列，这就要求算法的效率较高。
- 二是要使指尖到达目的点的指令序列尽可能少，由于各个关节处转动的并行性，这点是可以实现的。

5、对指尖沿空间曲线移动的理解

由于增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值，使得指尖在空间中的移动往往不能预想的轨迹移动。这就启发我们可以将空间曲线看成是由一系列离散点组成的。只要这些离散点之间的距离非常小，就可以用这些点来代替曲线。那么，机械臂指尖沿曲线移动可以看作是指尖沿这些离散点的移动，问题也就简化为从起始点到目的点的移动，只是在这里起点和终点在不停的发生变化。

6、对运动过程有障碍物的分析

障碍物对于从起始点搜索到目的点的影响，就是要在搜索的过程中加入一系列的约束条件，使得机械臂可以不和障碍物相碰。障碍物可以是比较简单的几何体，也可能是由少数几个简单的几何体构成的物体，或者是一般的更为复杂的障碍物。对于千奇百怪的障碍物，仅从数学的推导上我们无法得到从起始点到达目标点的精确完美的算法，但可以得到对避免与障碍物相碰的合理的约束条件。

我们可以先讨论对于简单几何体的避障要求，对于表面由若干个简单几何体

构成的障碍物，可以对其表面进行相应的划分，得到简单的几何体，再考虑机械臂的各个连杆在这些细分的障碍物上的避碰。对于更为复杂的障碍物，我们可以认为它可以包含在某个简单的几何体中，如球、圆柱或是立方体。这样就可以将这个扩大的几何体作为避碰的对象，从而简化问题的复杂性。

五、模型的建立

（一）机械臂指尖坐标转换的讨论

空间两个笛卡尔坐标系 $O1$ 、 $O2$ 之间可以通过变换相互转化（包括平移变换和转动变换），同一点在这两个坐标系中的坐标 ${}^{O1}P = (x_{O1}, y_{O1}, z_{O1})^T$ 、

${}^{O2}P = (x_{O2}, y_{O2}, z_{O2})^T$ 由相应的平移向量 ${}^{O1}P_{O2}$ 和旋转矩阵 ${}^{O1}R_{O2}$ 联系：

$${}^{O1}P = {}^{O1}R_{O2} {}^{O2}P + {}^{O1}P_{O2}$$

上述变换式对 (x_{O2}, y_{O2}, z_{O2}) 是非齐次的，通常为了处理方便，可将其表示成等价的齐次变换形式：

$$\begin{bmatrix} {}^{O1}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{O1}R_{O2} & {}^{O1}P_{O2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{O2}P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{O1}T_{O2} \begin{bmatrix} {}^{O2}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{O1}T_{O2}$ 综合地表示了平移变换和旋转变换。

若坐标系 $O2$ 原点相对于坐标系 $O1$ 原点的平移向量为 $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ，则平移齐次变换为：

$$P(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若坐标系 $O2$ 原点相对于坐标系 $O1$ 应于 x, y 或 z 轴作转角为 θ 的旋转变换，分别可得到：

$$R(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在我们研究的机器手中，可依次在每一个连杆上建立坐标，它随连杆一起运动[1]。机械手的末端装置即为连杆 6 的坐标系，它与连杆 i-1 坐标系的关系可由 ${}^{i-1}T_6$ 表示为：

$${}^{i-1}T_6 = A_i A_{i+1} \cdots A_6$$

而对于这个有 6 个自由度的机械臂来讲，机械臂指尖对于基座的关系 T_6 为：

$${}^0T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

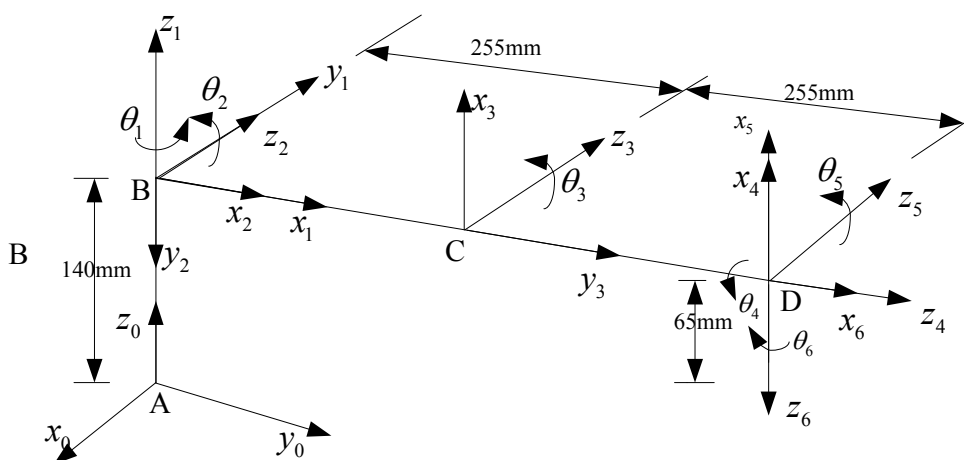


图 3 机械臂各个关节处的笛卡尔坐标系

我们对所给的机械臂在其各个关节建立相应的笛卡尔坐标系。其中以 A 为原点建立的坐标系就是题中给出的坐标系，1 坐标系和 2 坐标系的原点都建立在 B 点，3 坐标系建在 C 点，4，5，6 坐标系的原点都重合地建立在 D 点，每个坐标系的 Z 轴都和相应关节旋转轴所在直线重合，如图 3。

表 1 机械臂的初始位置和各关节处的变化范围

连杆 i	变量 θ_i	初始位置 α_i	变量范围
1	θ_1	0	± 180
2	θ_2	-90	± 125
3	θ_3	0	± 138
4	θ_4	0	± 270
5	θ_5	-90	-133.5~ +120
6	θ_6	0	± 270

各个连杆变换矩阵如下：

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} -s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 & 0 \\ c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} -s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_2 \\ -c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

其中 $c\theta_i$ 表示 $\cos \theta_i$ ， $s\theta_i$ 表示 $\sin \theta_i$ ，各连杆变换矩阵相乘，得到机械臂的变换矩阵为：

$${}^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1){}^1T_2(\theta_2){}^2T_3(\theta_3){}^3T_4(\theta_4){}^4T_5(\theta_5){}^5T_6(\theta_6)$$

所以，第 6 个坐标系中的坐标 $(x_6, y_6, z_6, 1)^T$ 在以基座 A 为原点的坐标系的表

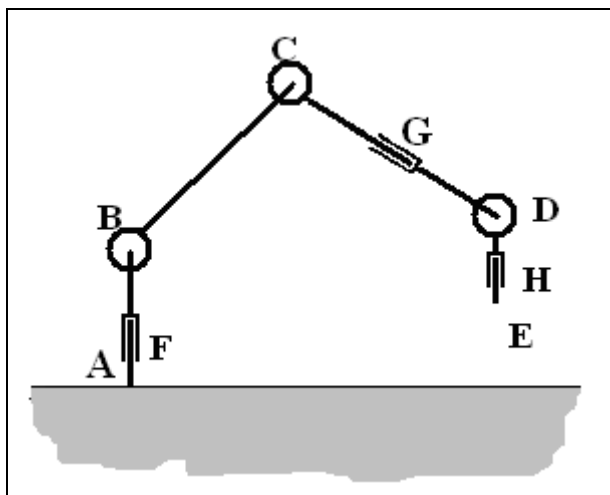
$$\text{示为： } (x_0, y_0, z_0, 1)^T = {}^0T_6 (x_6, y_6, z_6, 1)^T$$

对 E 点，其在第六个坐标系中的坐标为 $(0, 0, 65, 1)^T$ ，容易得到 E 点在基座 A

为原点的坐标系中的坐标，它与 θ_6 无关。

（二）指尖到达目的点位姿变换算法

已知初始位姿 ϕ_0 和一个可达目标点的空间位置 (O_x, O_y, O_z) ，计算指尖到达目标点的指令序列。



对于给定的可达目标点，我们首先需要作的就是**预测**机械臂在到达目标点时的位姿，即各个选转轴的角度。确定目标位姿之后，机械臂才开始做动作。

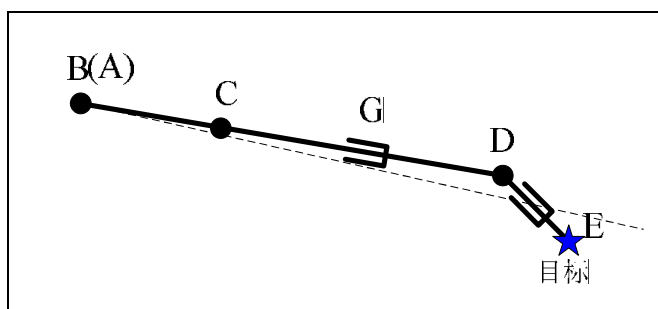
机械臂指尖由起始点到可达目标点过程中，采用**贪心算法**，即机械臂总是朝着当前最能接近目标位置的方向运动。各个旋转轴以最大转角速度向他们各自的目标角度前进。（暂不考虑在运动过程中的碰壁问题）。

1、目标位姿预测

我们知道对于一个目标点，机械臂对应的位姿可以有很多种，我们要选取的是一种合理的人性化的位姿。可以用人的思维来考虑这个问题，当我们去远处拿一个杯子，首先是要选定方向，然后走过去，最后才会伸出胳膊来决定用哪些手指把杯子拿起来；如果有谁在做这件事情时，先做出拿杯子的手势然后伸出胳膊，接下来转一圈看看杯子在什么地方，再举着手往前走，那这个人的大脑肯定是有问题的。其实人拿杯子的过程可以分成先粗略调整大方向，接着移动，最后是细节的调整的过程。类似地，我们在对目标位姿预测时采用的方法是先粗调然后微调的**自适应的搜索法**。

粗调

由图中位置关系及各个旋转轴的连杆方式（平行连杆、垂直连杆）可知，A、B、C、D四点肯定位于同一平面内。由于平行连杆G的作用使得E点有可能不在ABCD所在平面中。假设某时刻整个机械臂在平面xoy中的投影如图：



由图可知，1) 由于 DE 长度相对其他部分来说比较短，所以在机械臂到达目标位置时的“大致方向”与 BD 方向基本重合，而 BD 方向是由平行连杆 F 确定的，所以在进行粗调时首先将 F 旋转到目标方向。由 O_x, O_y 可以确定。2) 可以看出目标点到 z 轴的距离大致与 D 点到 z 轴的距离相当，而 D 点到 z 轴的距离是由旋转轴 C 确定，所以在进行粗调时可以先将旋转轴 C 的角度大致调正。

微调

微调要对机械臂上的每个旋转轴进行数次自适应并行微调遍历，算法流程图如下：

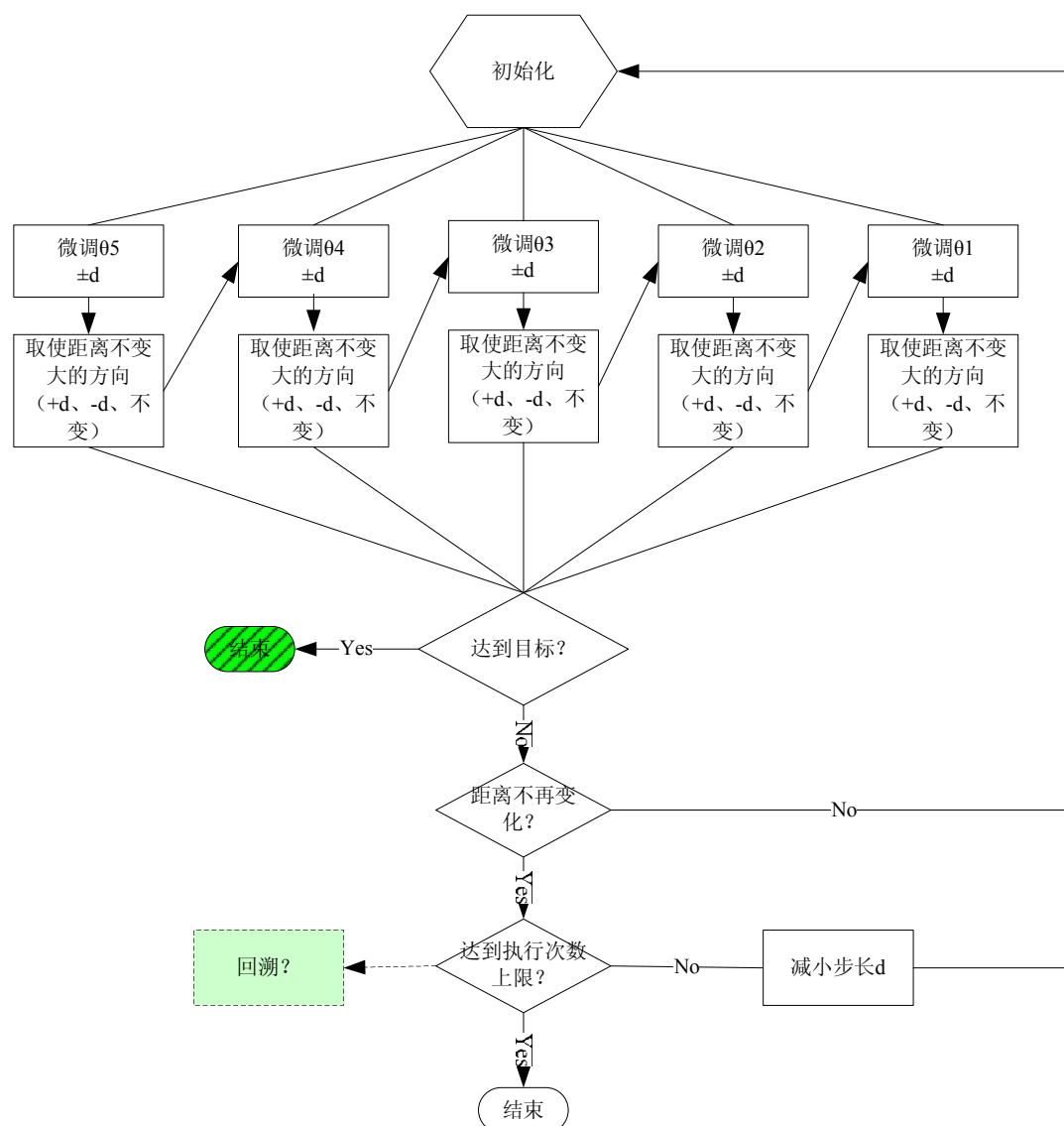


图 4 自适应算法（微调）流程图

注：距离即为当前位姿下指尖到目标点的距离

算法会在指尖到达距离目标点设定精度范围内跳出，或者在执行次数过多以至于可以认为不可达时跳出。

其中回溯模块是指在某些情况下，由于初始设置的搜索方向的不对，导致机械臂陷入了一个极限状态，在这个方向上指尖与目标点的距离已经到达了最小，可还是没能接触到目标点。但是又确实存在在另外的方向上进行搜索时，机械臂

可以碰到目标点的位姿，这与各个关节可以活动的范围受限有关。所以，在这种情况下，为了求得结果，需要进行回溯。这里列出仅供参考。由于回溯算法的时空开销较大在本文中不予考虑。

当执行程序成功跳出时，即在指尖到达目标点同时最终位姿 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5)$ （每个旋转轴都必须在旋转范围内）确定。

2、运动规划

由前面确定的目标位姿以及当前位姿，求解由当前位姿向目标位姿过渡的方式时我们采用贪心算法。即每个旋转轴总是向着离目标角度以尽可能大的步长前进，直至最终所有的旋转轴到达其目标角度。那么，各个旋转轴的变化过程的增减幅度就是最终的指令序列。

以问题 2 中的①为例，

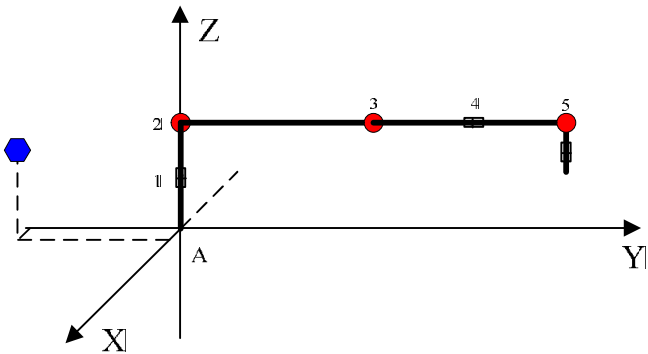


图 5 机械臂与目标点位置关系

机械臂初始状态为 $(0,-90,0,0,-90)$ ，目标点为 $(20,-200,120)$ ，根据上面的目标位姿预测可得机械臂的最终状态为 $(-174.2,-38.2,-116.9,-0.4,-124.6)$ 。那么指令序列就是这样的五元组如表 2 所示。

表 2 生成的指令序列（详见 answer1.xls）

序 列 号	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$		序 列 号	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
1	-2	2	-2	-0.4	-2		12	-2	2	-2	0	-2
2	-2	2	-2	0	-2		13	-2	2	-2	0	-2
3	-2	2	-2	0	-2		14	-2	2	-2	0	-2
4	-2	2	-2	0	-2		15	-2	2	-2	0	-2
5	-2	2	-2	0	-2		16	-2	2	-2	0	-2
6	-2	2	-2	0	-2		17	-2	2	-2	0	-2
7	-2	2	-2	0	-2		18	-2	2	-2	0	-0.6
8	-2	2	-2	0	-2		19	-2	2	-2	0	0
9	-2	2	-2	0	-2		20	-2	2	-2	0	0
10	-2	2	-2	0	-2						
11	-2	2	-2	0	-2			0	0	0	0	0

(三) 指尖沿曲线移动

要求指尖沿着预先指定的一条空间曲线 $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $a \leq s \leq b$ 移动, 计算满足要求的指令序列。

对于空间曲线, 由于机械臂的移动本身是离散的, 所以不可能让机械臂指尖严格按照曲线的轨迹连续运动。可以将空间曲线划分为离散的点, 只要机械臂依次到达这些点 (这里的到达是指尽可能地逼近) 就可以了。

将 s 的取值区间 $[a, b]$ 划分为 N 段, 那么每一段就是 ds 。机械臂依次到达 $(x(s_0), y(s_0), z(s_0))$, $(x(s_0+ds), y(s_0+ds), z(s_0+ds))$, $(x(s_0+2ds), y(s_0+2ds), z(s_0+2ds))$, $\dots\dots$ 即可。依次到达是指机械臂以前一小段的位姿为初态然后以下一小段为目标态, 依次到达。

ds 的选取原则

选取步长应以使得既能很好地逼近曲线, 同时在 ds 变化的程度足够引起指尖的移动。

初始位姿的选择

由于机械臂在沿弧线移动的过程中始终是进行微调, 如果弧线的长度过长或者是一个圈的话, 而起始的大位姿没有选好的话, 那么将很容易导致机械臂在弧线的牵引下进入很尴尬的境地, 本来可达的点变成不可达, 这就是局部的不可达。解决局部不可达的方法只有回溯, 那将是非常耗时的。所以初始大位姿的确定是很重要的。所谓大位姿就是指在机械臂的运动过程中较长杆所处的大致姿态, 类似绘画艺术中的轮廓的意思。

一般说来, 在进行位姿预测时, 对于一个已知的弧线, 选择弧线的中央位置或者中央的上方是比较合理的过渡目标。过渡目标的作用是将机械臂伸展到合理的大位姿。流程如图 6 所示:

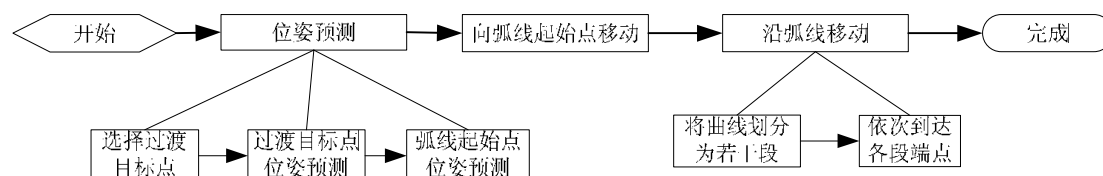


图 6 沿曲线移动情况下的流程

举例说来, 问题 2 中的②, 圆台外壁与平面的相交情况如图 7 所示:

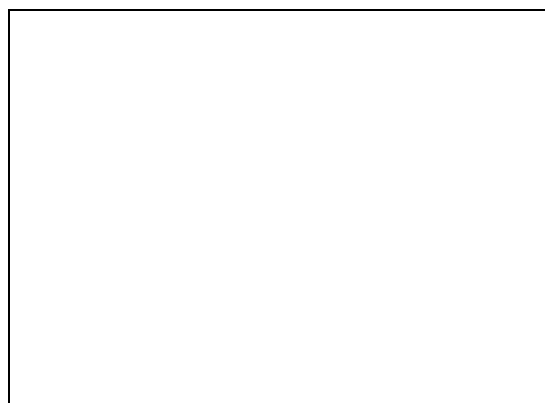


图 7 圆台外壁与平面的相交情况

曲线方程为：

$$\begin{cases} z = 420 - 2.5 \times \sqrt{(x-210)^2 + y^2} \\ x = 2z \end{cases}$$

机械臂与圆台的位置关系如图 8 所示：

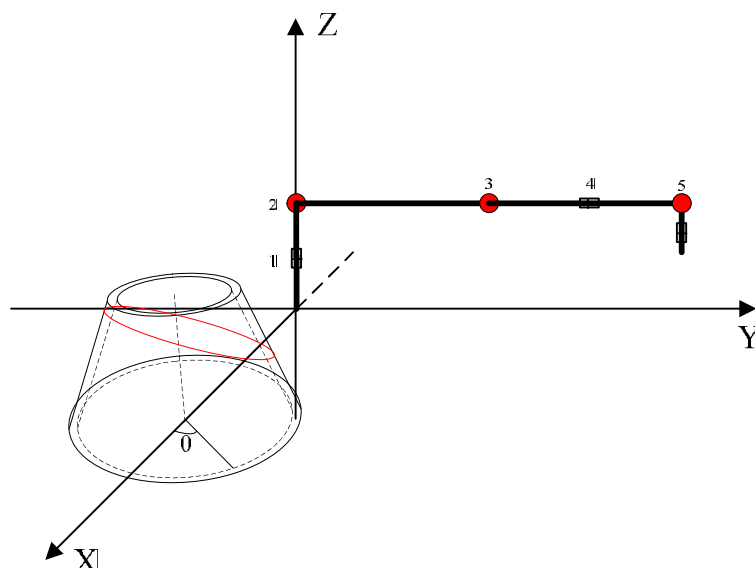


图 8 机械臂与圆台位置关系

平面与圆台外壁的交线是一个封闭的弧线。起始位姿与①的起始位姿相同。我们选取圆台的上平面的中心作为过渡目标点，调整机械臂的位姿至(-90, -23.3, -113.8, 0, -126.3)，指尖到达上平面中心，然后再移动至焊接起始点(52.5, 0, 26.25)，这时机械臂的位姿为(-90, -74.6, -138, 0, -88.2)注意，这里的“移动”都只是设想中的移动，是为了得到一个合理的大位姿，使得机械臂伸展开，方便在弧线上移动。当得到机械臂弧线上一点的位姿时，那么我们就直接由初始状态向着这个位姿转变，指尖会直接向弧线移动，而不会先到圆台上方的正中心再移向弧线。

在分解曲线至小段时，将曲线方程转换为参数方程：

$$\begin{cases} x = 210 + \frac{630 * \cos(\theta)}{5 + \cos(\theta)} \\ y = \frac{630 * \sin(\theta)}{5 + \cos(\theta)} \\ z = 420 - \frac{1575}{5 + \cos(\theta)} \end{cases}$$

然后，经测试取 $d\theta$ 为 0.2 度时比较合理，即 $ds=PI/900$ 。

得到指令序列：

从起始点位姿(0, -90, 0, 0, -90)到焊接点位姿(-90, -74.6, -138, 0, -88.2)的指令序列：

表 3 生成的指令序列（详见 answer2.xls）

序列号	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
1	-2	2	-2	0	1.8
2	-2	2	-2	0	0
3	-2	2	-2	0	0
4	-2	2	-2	0	0
5	-2	2	-2	0	0
6	-2	2	-2	0	0
7	-2	2	-2	0	0
8	-2	1.4	-2	0	0
9	-2	0	-2	0	0
...				
68	0	0	-2	0	0
69	0	0	-2	0	0
70	0	0	0	0	0

焊接点位姿(-90, -74.6, -138, 0, -88.2)开始焊接整个弧线的过程的指令序列为：

表 3—续表 生成的指令序列（详见 answer2.xls）

序列号	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	$\Delta\theta_5$
71	-0.1	0	0	-0.4	0
72	-0.1	0	0	-0.4	0
73	-0.1	0	0	-0.4	0
74	-0.1	0	0	-0.4	0
75	-0.1	0	0	-0.4	0
76	-0.3	-0.1	0	-0.3	-0.2
77	-0.2	0	0	-0.3	0
78	-0.2	0	0	-0.3	-0.1
79	-0.2	0	0	-0.3	0
80	-0.3	0	0	-0.3	-0.1
...				
	-0.2	-0.1	0	-0.3	-0.1
	-0.1	0	0	-0.4	0
1869	-0.2	-0.1	0	-0.3	-0.2
1870	-0.1	0	0	-0.4	0.1
1871	0	0	0	0	0

从指令序列中可以看出机械臂每执行一条移动指令就会到达下一个要达到的位置。

(四) 关于避开障碍物的讨论

1). 障碍物为球

在对机械臂运动过程中如何避免障碍的问题讨论前,我们先给出一些一般性的知识:

设空间直线 AB, 那么从点 O 到直线 AB 的距离 d 为:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_A & z_0 - z_A \\ y_A - y_B & z_A - z_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_A & x_0 - x_A \\ z_A - z_B & x_A - x_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_A & y_0 - y_A \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}}$$

设 P 为从 O 到 AB 的垂足, 那么 $P(x_P, y_P, z_P)$ 的求解满足如下:

$$\begin{cases} \frac{x_P - x_A}{x_A - x_B} = \frac{y_P - y_A}{y_A - y_B} = \frac{z_P - z_A}{z_A - z_B} \\ (x_P - x_O)(x_A - x_B) + (y_P - y_O)(y_A - y_B) + (z_P - z_O)(z_A - z_B) = 0 \end{cases}$$

其中 $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), O(x_O, y_O, z_O)$ 为已知。

有两种情形下, 线段 AB 和球是不相交的:

第一、线段所在直线与球心之间的距离大于球的半径。

第二、线段所在直线与球心之间的距离小于球的半径, 同时有垂足在 A、B 点的同一侧, 而且 A、B 两点都在球外。

用式子表达如下:

$$st.S: \begin{cases} d > R \\ d \leq R \text{ 且 } (x_P - x_A)(x_P - x_B) > 0 \text{ 且 } d_{OA} > R \text{ 且 } d_{OB} > R \end{cases}$$

否则, 线段和球相交。

2). 障碍物为圆柱

对于线段 AB, 与圆柱发生相交的情形有两种:

a) 线段与侧面相交

设圆柱的轴线与线段所在的直线之间的距离 d 和它们的公垂线在 AB 上的交点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 。

如果 $(l_1, m_1, n_1) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, 则有

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C & z_A - z_C \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2}}$$

其中 (x_C, y_C, z_C) 是圆柱轴线上的任意一点。

那么，线段 AB 和圆柱不相交的条件有二：

第一、线段所在的直线与轴线的距离大于圆柱的半径。

第二、线段所在的直线与轴线的距离小于圆柱的半径，同时垂足在 A, B 点的同一侧，而且 A, B 点都在圆柱的外面。

用公式表达 AB 和圆柱不相交如下：

$$st.C_1: \begin{cases} d > R \\ d < R \text{ 且 } (x_p - x_A)(x_p - x_B) > 0 \text{ 且 } (x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 > R^2 \\ \text{且 } (x_B - x_0)^2 + (y_B - y_0)^2 > R^2 \end{cases}$$

否则，线段 AB 和圆柱相交。

b) 线段与上底面相交

设 $D(x_D, y_D, z_D)$ 为线段 AB 所在直线与 $z=h$ 的交点。则有：

$$\begin{cases} x_D = \frac{h - z_A}{z_A - z_B}(x_A - x_B) + x_A \\ y_D = \frac{h - z_A}{z_A - z_B}(y_A - y_B) + y_A \\ z_D = h \end{cases}$$

那么，线段与上底面不相交的条件是，交点在底面上的投影落在了底面圆之外，如下：

$$st.C_2: (x_D - x_0)^2 + (y_D - y_0)^2 > R^2, \text{ 其中 } (x_0, y_0) \text{ 是圆心在 } xoy \text{ 平面上的投影。}$$

否则也相交。

3). 障碍物为正方体

正方体有 5 个面可与线段 AB 相交。其相交条件的求得类似于线段与圆柱上底面相交的条件，5 个面相交的条件类似，以正方体中的一个面为例，设该面所在的平面为：

$y = a$ ，用下面的式子就能把直线 AB 和该平面的交点求出：

$$\begin{cases} \frac{x-x_A}{x_A-x_B} = \frac{y-y_A}{y_A-y_B} = \frac{z-z_A}{z_A-z_B} \\ y = a \end{cases}$$

交点设为 (x_C, y_C, z_C) ，则线段与该面不相交的条件是：

$$st.C_u : x_C > a \text{ 或 } z_C > a$$

与其他各面相交的情形类似。

4). 障碍物为中空有开口的物体

对于中空且有口可以深入的障碍物，例如上端开口的圆台，我们的总体思路是：可以先将机械臂的指尖合理地移置开口处，再通过开口处进行不碰内壁地搜索目的点。对于目的点在圆台的内部的详细讨论见本文对问题 2 的第三问的解答。

5). 对于复杂的障碍物

对于一般性的障碍物，它的外形总是形形色色，我们肯定无法找到一个基于数学的算法，它能够非常精确地避开所有的障碍物，最小代价地找到它要达到的任意点。目前为止，还只有通过类似于仿生学的方法，利用模仿动物或人类的传感器才能基本上达到这个要求，但这不是我们研究的范围。我们只关注利用数学的方法来尽量使得机械臂可以一方面避开障碍物，另一方面又不走太多的弯路。

思路：

①对于一些简单的障碍物，如上面举到的球，正方体，圆柱可以直接在机械臂搜索的过程中加入上面讨论过的相碰条件的限制，使得它可以非常精妙的绕过障碍。约束条件可表为：

$$st.S \text{ 或 } st.C_1 + st.C_2 \text{ 或 } st.C_u$$

②对于表面由少数简单障碍物组成的障碍，可以将其表面进行合理地划分，划分成简单的障碍后，在利用各个障碍物相应的相碰条件的进行约束，得到机械臂的绕碍序列。约束条件可记为：

$$st.\sum = st.(\sum S_i + \sum (C_{i1} + C_{i2}) + \sum C_{ui})$$

③对于表面较为复杂或很复杂的障碍物，我们可以视具体的情况，将这个障碍物包含在一个“紧身”的球，圆柱或是一个正方体中，然后用这个简单的几何体代替原来的障碍物进行运算。约束条件：

$$st.\sum = st.S \text{ 或 } st.(C_1 + C_2) \text{ 或 } st.C_u$$

6). 对机械臂连杆粗细的讨论

在上面我们讨论和研究问题时，都是假设机械臂的连杆为一条线段，其粗细为 0。而实际中连杆的粗细不可能为 0，有的时候还不能忽略不计，这就产生了

新的问题。

首先，我们以障碍物是球为例来说明问题。

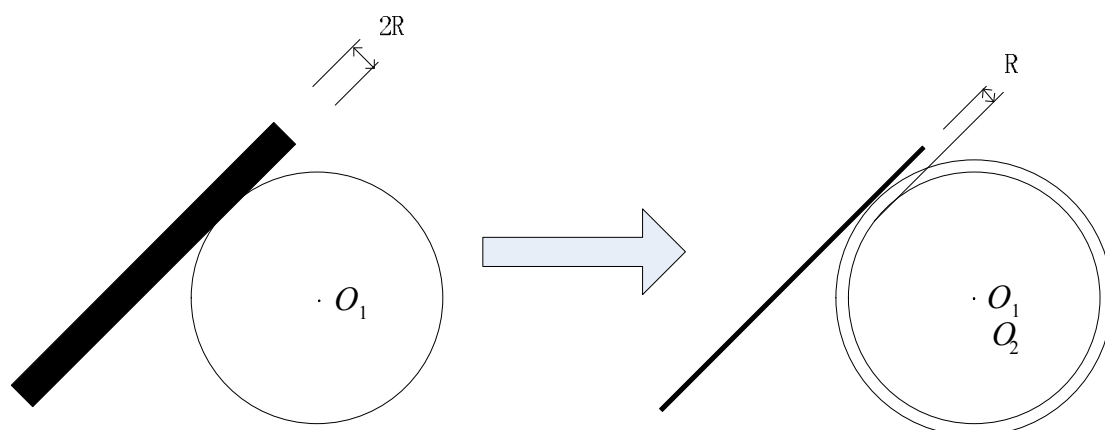


图 9 有半径连杆转换为无半径连杆

在图 9 中表示了，对于以有半径为 R 的连杆而言，要绕开以 O_1 为球心的球，它的约束条件等价于先将球 O_1 半径扩大 R 后得到的球 O_2 ，然后用没有半径的连杆对球 O_2 进行避碰操作。

通过上面连杆对球的避碰过程可以看出，连杆有粗细并不影响我们对问题给出其求解的一般性方法，我们可以采用的思路是：**还是将连杆的粗细看作 0，相应地将障碍物的外表面增加连杆半径的长度**，这样就可以将问题转化为上面已经讨论的情形了。

（五） 避开圆台障碍的讨论

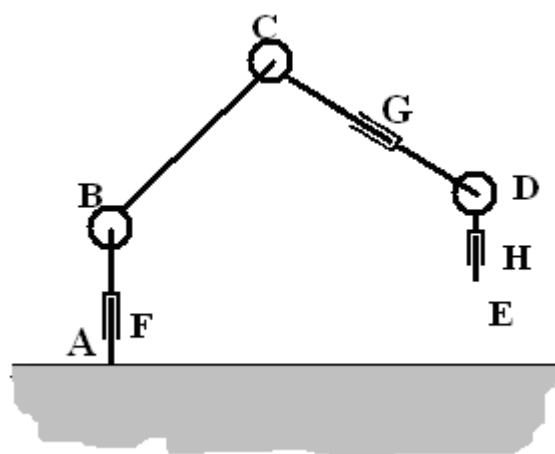


图 10 机器人的尺寸图

举例说来，问题 2 中的③所说要将指尖伸向圆台内部焊四个小零件，那么比较直观的方法就是先将 DE 段通过转动 B、C 使得 D 点高于圆台上平面，然后通过转动 D 点将 E 抬高至与 D 持平，然后转动 F 使 D 点到达圆台中央的正上方，将 E 放下，插入圆台中，完成焊接的准备工作，这个过程显然是不会产生碰壁问题的。即

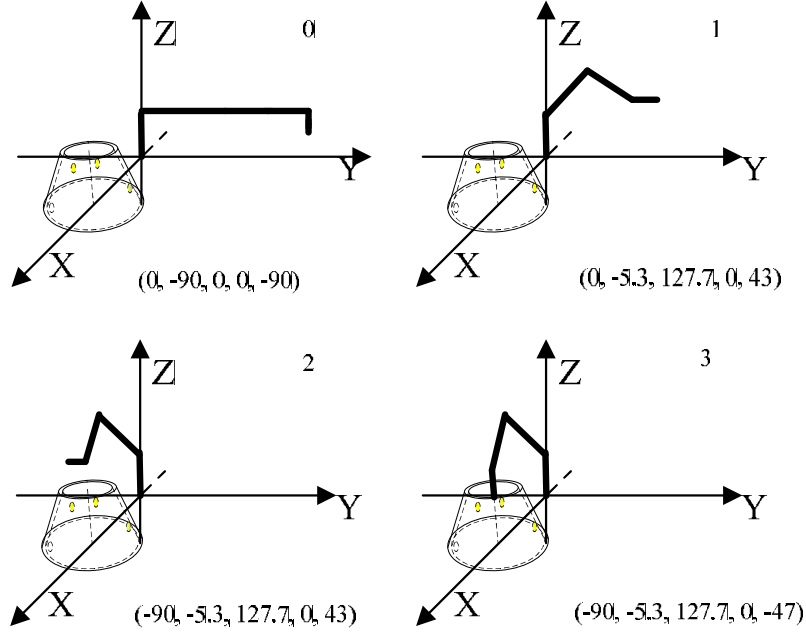


图 11 焊接准备阶段

下面是 E 点在圆台内部进行焊接的情况，主要工作是在原有第一问的基础上进行机械臂避免碰壁的讨论。

若要整个机械臂都不碰壁，那么：

1) 对于 E 点，它要在工件内壁点焊四个小零件，故它必须在圆台内，对于 E 而言，应有：

$$st. \begin{cases} 0 < z_E < 180 \\ \sqrt{(x_E - 210)^2 + y_E^2} < 159.3837 \\ 2.5 * \sqrt{(x_E - 210)^2 + y_E^2} + z_E < 2.5 * 159.3837 \end{cases}$$

2) 对于 D 点，存在两种情况：

① D 在圆台内

$$st. \begin{cases} 0 < z_D < 180 \\ \sqrt{(x_D - 210)^2 + y_D^2} < 159.3837 \\ 2.5 * \sqrt{(x_D - 210)^2 + y_D^2} + z_D < 2.5 * 159.3837 \end{cases}$$

此时，对于线段 CD，所在直线方程为： $\frac{x_1 - x_C}{x_C - x_D} = \frac{y_1 - y_C}{y_C - y_D} = \frac{180 - z_C}{z_C - z_D}$

它与圆台上底面交点 xy 坐标为：

$$x_1 = \frac{180 - z_C}{z_C - z_D}(x_C - x_D) + x_C$$

$$y_1 = \frac{180 - z_C}{z_C - z_D}(y_C - y_D) + y_C$$

要使得 CD 连杆不会碰壁，必须要有该交点在圆台上地面的圆内：

$$st. (x_1 - 210)^2 + y_1^2 < 87.3837^2$$

故 D 在圆台内，且 CD 连杆不会碰壁的条件是：

$$st. \begin{cases} 0 < z_D < 180 \\ \sqrt{(x_D - 210)^2 + y_D^2} < 159.3837 \\ 2.5 * \sqrt{(x_D - 210)^2 + y_D^2} + z_D < 2.5 * 159.3837 \\ (x_1 - 210)^2 + y_1^2 < 87.3837^2 \end{cases}$$

②D 在圆台外

$$z_D \geq 180$$

则对于线段 DE，所在直线方程为：

$$x_2 = \frac{180 - z_D}{z_C - z_E}(x_D - x_E) + x_D$$

$$y_2 = \frac{180 - z_D}{z_D - z_E}(y_D - y_E) + y_D$$

要使得 DE 和圆台不相碰，同理也必须满足：

$$st. (x_2 - 210)^2 + y_2^2 < 87.3837^2$$

故 D 在圆台外，而且 DE 不会和圆台发生碰撞的条件是：

$$st. \begin{cases} z_D \geq 180 \\ (x_2 - 210)^2 + y_2^2 < 87.3837^2 \end{cases}$$

综上所述，机械臂不碰壁的条件是：

$$st. \begin{cases} 0 < z_E < 180 \\ \sqrt{(x_E - 210)^2 + y_E^2} < 159.3837 \\ 2.5 * \sqrt{(x_E - 210)^2 + y_E^2} + z_E < 2.5 * 159.3837 \\ 0 < z_D < 180 \\ \sqrt{(x_D - 210)^2 + y_D^2} < 159.3837 \\ 2.5 * \sqrt{(x_D - 210)^2 + y_D^2} + z_D < 2.5 * 159.3837 \\ (x_1 - 210)^2 + y_1^2 < 87.3837^2 \end{cases}$$

或者

$$st. \begin{cases} 0 < z_E < 180 \\ \sqrt{(x_E - 210)^2 + y_E^2} < 159.3837 \\ 2.5 * \sqrt{(x_E - 210)^2 + y_E^2} + z_E < 2.5 * 159.3837 \\ z_D \geq 180 \\ (x_2 - 210)^2 + y_2^2 < 87.3837^2 \end{cases}$$

机械臂在圆台内移动时，每改变一个旋转轴的角度都有可能会导致机械臂的某个部位碰壁，所以每次移动都要判断是否碰壁然后决定是否移动。所以与前面的移动不同，我们并不做位姿预测，而选择直接进行向目标点移动。具体采用的是贪心算法，每一条指令只改变其中一个旋转轴的角度，该角度的改变满足：1) 不会产生碰壁；2) 以尽可能大的幅度向目标点逼近。

圆台内壁的四个点坐标为：

- 1、(320, -104, 20.7802)
- 2、(120, 106, 51.5961)
- 3、(190, -125, 82.7563)
- 4、(255, 88, 152.135)

按照 1->3->2->4 顺时针顺序依次焊接各个点。

最终产生的指令序列包括准备部分的指令序列和在圆台内部的指令序列，详见 answer3.xls.

(六) 关于自适应算法的讨论及误差分析

1. 自适应搜索算法的适用范围

在对于某个目标点而言，算法采用先预测后行动，预测时又是先粗调后微调的自适应的搜索法，所以算法具有很好的通用性。

对于自适应搜索法，一个很重要的缺点就是对初始值以及步长变化的依赖性较强，如果初始值或者步长选择不合适的话有可能会造成意外的不可达。所以在对于具体问题时初始值以及步长的选择很重要，要人为地进行合理确定。

有一种解决这个问题的办法，就是采用回溯法。

2. 自适应搜索算法计算效率

对于一个可达点，自适应搜索法是可以快速收敛的。对于问题 2 中的①，算法总共执行了 87 次循环就收敛到距离目标点小于 0.2 毫米的范围。对于问题 2 中的②，算法沿弧线一周执行了 1800 次到达搜索循环次数为 7543 次，就可以使得在每一小段上都是局部最优的。对于问题 2 中的③，尽管增加了对于碰壁的限制，每从一个目标点向下一个目标的搜索都是在 180 次循环以内的。

表 4 针对各个问题的执行情况

问题	目标点个数	性质	方法	执行循环次数
2. ①	1	距离较远	粗调+微调 (步长自适应)	87
2. ②	1800	相邻目标点之间距离很小	微调 (步长为 0.1)	7543
2. ③	4	距离中等 考虑碰壁	微调 (步长自适应)	93+60+80+51 =284

3. 误差分析

① 算法误差

由于 $\Delta\theta_i$ 的取值是离散的，精度为 0.1° ，那么指尖所能到达的范围也是离散的。那么对任意个实际中的目标点而言，指尖只能尽可能地靠近，这之间肯定会有误差，这个误差是 $\Delta\theta_i$ 取值的离散性引起，在算法的执行过程中造成的。

故将其称为**算法误差**。针对 2 中的三种情况，误差统计结果如下：

表 5 算法误差

问题	目标点	机械臂位姿 ⁽⁰⁾ 与 指尖位置(mm)	误差距离 (mm)
2. ①	(20, -200, 120)	-174.2, -38.2, -116.9, -0.4, -124.6	0.055
		(19.9789, -200.013, 120.161)	
2. ②	圆弧	(平均) 0.17 (0~0.8)
2. ③	(320, -104, 20.7802)	-108, -49.2, -105.7, 0.2, 7.3	0.44
		(319.578, -103.867, 20.8209)	
	(190, -125, 82.7563)	-114, -27.2, -127.7, -58.2, -41.6	0.68
		(190.407, -124.923, 82.2176)	
	(120, 106, 51.5961)	-66, -41.9, -133.7, 51, -71	0.34
		(120.274, 105.832, 51.4842)	
	(255, 88, 152.135)	-84, -24.6, -115.7, 71.9, -77.6	0.55
		(255.031, 87.4795, 152.321)	

其中，误差范围在 1 毫米以内。

② 精度误差

$\Delta\theta_i$ 的精度为 0.1° ，根据精度的定义， $\Delta\theta_i$ 的误差是小于 0.05° 。考虑在一个确定的位姿下，只改变其中一个旋转轴的角度，让它增大或者减小一个不小于 0.05 的角度，观察最终目标的变化情况。由于在不同位姿下， $\Delta\theta_i$ 的变化引起的指尖位置的变化幅度是不同的，问题 2 中涉及的几个位姿为例：

分别改变 θ_i 的大小，增减 0.05 ，引起指尖的偏移。

表 6 分别改变 θ_i 的大小，增减 0.05 ，引起指尖的偏移情况

θ_i					改变 θ_i 的大小，增减 0.05 ，引起指尖的偏移 (mm)				
位姿					θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
0	-90	0	0	-90	0.445059	0.448659	0.229645	0.056723	0.056723
-174.2	-38.2	-116.9	-0.4	-124.6	0.175396	0.176258	0.195963	0.046691	0.056723
-90	-74.6	-138	0	-88.2	0.045924	0.109434	0.231365	0.056695	0.056723
0	-5.3	-127.7	0	43	0.240026	0.249973	0.266833	0.038685	0.056723
-90	-5.3	-127.7	0	43	0.240026	0.249973	0.266833	0.038685	0.056723
-90	-5.3	-127.7	0	-47	0.183303	0.18377	0.264488	0.041485	0.056723
-108	-49.2	-105.7	0.2	7.3	0.293244	0.311141	0.278886	0.007208	0.056723
-114	-27.2	-127.7	-58.2	-41.6	0.198731	0.202515	0.265689	0.03766	0.056723
-66	-41.9	-133.7	51	-71	0.139806	0.154192	0.243349	0.053633	0.056723
-84	-24.6	-115.7	71.9	-77.6	0.235286	0.229569	0.23534	0.0554	0.056723

由上表可以看出，算法的误差与机械臂的精度误差基本处于同一数量级。

小 结：

我们的算法思想：

一、对于单个目标点（不考虑碰壁）：

- 1、由用户输入目标点所在坐标。
- 2、根据目标点坐标进行位姿预测，包括粗调和微调。
- 3、根据当前位姿与算法预测出的目标位姿，产生指令序列。
- 4、结束。

二、对于曲线（不考虑碰壁）

- 1、由用户输入曲线方程，设定曲线划分段步长。（曲线以参数方程形式表示）。
- 2、根据曲线方程，概率地找出曲线中央作为过渡目标点，同时进行曲线起始点的位姿预测。（预测过程中要通过过渡目标点实现大位姿的确定）。
- 3、根据当前位姿与算法预测出的目标位姿，产生指令序列。
- 4、判断是否完成沿曲线移动，若否，设置当前指令达到的位姿为当前位姿，选定下一小段为下一目标点；若是，转 7。
- 5、进行目标位姿预测（微调）。

6、根据当前位姿与算法预测出的目标位姿，产生指令序列。转 4。

7、结束。

三、关于障碍物，本文对简单的障碍物（球、圆柱和立方体）、由少数几个简单几何体构成的物体、中空有开口的物体和较复杂的障碍物进行了分别的讨论，得到了指导机械臂避碰要满足的约束条件。

（七）第三问求解

机械臂的适用范围，指它能够达到的地方，它可能有‘盲区’。提高它的适用范围就是要使得机械臂能够到达更多的地方，从而尽可能的减少“盲区”。机械臂的适用范围受各条连杆的相对长度以及各关节最大旋转角度的约束。考虑到机械臂可以绕 AB 轴旋转，其可到达区域是关于 AB 轴对称的空间立体区间。因此 θ_5 的旋转对于机械臂整个可到达区域的大小几乎没有影响，我们假定 θ_5 为零，此时机械臂在一个平面里。同时可以固定 θ_1 ，考虑机械臂在一个平面里的可到达区域。

如图 12，固定 B 点，当仅变化 θ_2 时，E 点可以到达的区域为一个以 $R_1 = BC + CD + DE$ 为半径的圆弧，其圆弧大小受 θ_2 变化范围约束。固定 C 点，当仅变化 θ_3 时，E 点可以到达的区域为一个以 $R_2 = CD + DE$ 为半径的圆弧，其圆弧大小受 θ_3 变化范围约束。固定 D 点，当仅变化 θ_5 时，E 点可以到达的区域为一个以 $R_3 = DE$ 为半径的圆弧，其圆弧大小受 θ_5 变化范围约束。同时变化 θ_2 、 θ_3 、 θ_5 ，图中阴影部分既为 E 点在该平面的可到达区域。把这部分阴影区域绕 AB 轴旋转一圈便可得到 E 点在整个三维空间的可到达区域。

为了提高机械臂的灵活性和适用范围，根据图 12，我们提出了其参数设计的四点建议：

1、若 $L = AB + BC + CD + DE$ 为常数，只要 E 点不碰地，减小 AB， R_1 增大，E 所能到达的最高点不变，但外圆包围的面积增大，阴影部分就增大，既自由空间增大。若 $R_1 = BC + CD + DE$ 为常数，减小 BC， R_2 增大，外圆包围的面积增大，阴影部分就增大，既自由空间增大。故在设计机器臂时，若不考虑避障等因素，可适当增加后面几节连杆的长度。

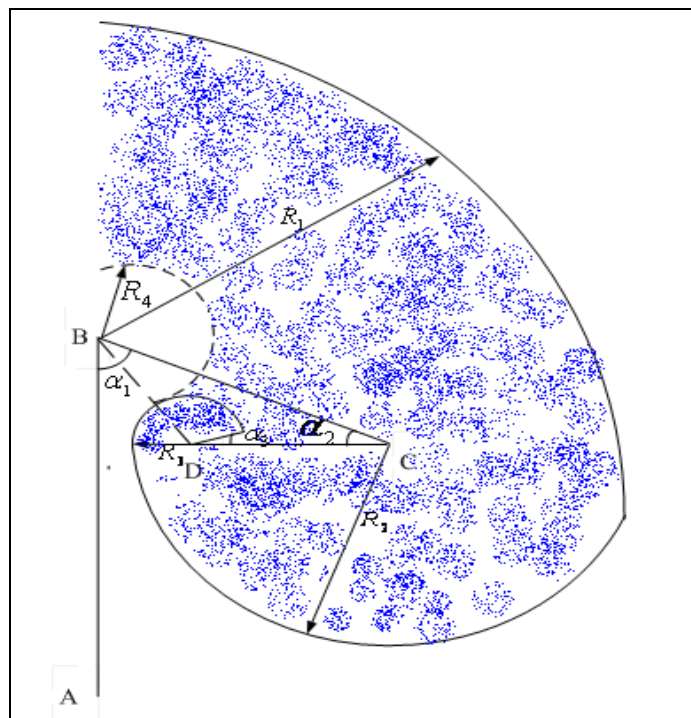


图 12 机器臂在过 AB 轴平面内的自由区域（可达区域）

2、当 θ_2 、 θ_3 达到最大值时，D 点离 B 最小，此时 $R_4 = BD - DE$ 既为 E 点到 B 点的最小距离。对于离 B 点距离小于 R_4 的点，E 无法到达。其中

$$BD = \sqrt{(CD \cdot \sin \alpha_2)^2 + (BC - CD \cdot \cos \alpha_2)^2} \quad \alpha_2 = 180^\circ - \max \theta_3$$

R_4 越小，B 点附近 E 无法到达的点就越少。当 $\max \theta_3 = 180^\circ$ ，且 $BC = CD + DE$ 时， $BD = 0$ 。故在一般情况下，连杆 BC 长度应与连杆 CD 和 DE 长度之和接近。

3、当各个连杆的长度保持不变时，增大各个转角的转动范围无疑可以增加机器臂的灵活性，但 θ_1 、 θ_4 、 θ_6 的转动范围已大于 360° ，故进一步增加它们的转动范围并不能增大机器臂的自由空间。

4、即使是自由空间，各点的 z 坐标也必须大于零。有时增加方位角的变化范围是没有意义的。如：当 $BC \cdot \cos(\max \theta_2) > AB$ 时， θ_2 取最大值 C 触地，没有必要在增大关节 2 的最大旋转值。

六、进一步讨论

第二问考虑碰壁

前面第二问②的讨论中没有涉及到焊接时碰壁问题，在这里我们做一下补充。

针对问题二的②我们可以很直观地选择一个焊接方法，如图 13 所示：

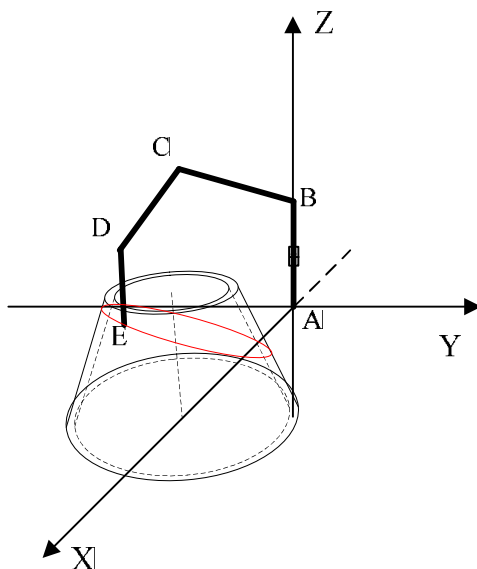


图 13 问题二的②考虑不碰壁情况下的直观方法

机械臂在转动过程中始终保持 A、B、C、D、E 在同一平面，而且让 DE 所在直线与 Z 轴平行，那么就不会产生碰壁现象。这种移动的方式是唯一的。可以很简单地同过空间几何的知识求出任意时刻各个角度情况。然而我们求出的角度却不能满足各个旋转轴旋转范围限制条件的。所以，如果机械臂足够灵活的话，以至于每个角度都可以旋转超过 360 度的话，就可以用这种方法了。

可以证明在角度限制条件下，问题 2 的②不可能不碰壁。比如弧线的最点点处，机械臂的手指在角度限制的条件就不能不碰壁地到达，时间关系我们不能给出证明了。

七、模型优缺点

优点：

- 1、建立了机器臂的坐标系变化矩阵，设计了一种简单而有效的自由空间机器臂轨迹运动搜索算法，该算法在误差允许范围内的到了很好结果并具有良好的通用性。
- 2、通过对空间障碍物进行分类和抽象，获得了连杆与常见障碍物碰撞的判定准则。由此在自由空间机器臂轨迹运动搜索算法基础上设计了避障问题的搜索算法，获得了完成题中任务的机器指令。
- 3、对算法及转角增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差进行了分析。

缺点：

- 4、当存在多个可行路径时，设计的算法在求解过程中具有一定的随机性，得到的可能不是机器臂完成任务的最佳路径。
- 5、对于空间障碍物存在时的避障问题，当障碍物的形状较复杂或个数较多时，给出的算法有效性可能会降低。
- 6、对于提高机器臂灵活性和适用性的参数设计讨论不够充分。

参考文献

- [1] 蔡自兴，机器人学，清华大学出版社，2000 年 9 月
- [2] 丁学恭，机器人控制研究，浙江大学出版社，2006 年 9 月
- [3] 杨文茂、李全英，空间解析几何，武汉大学出版社，1997 年 1 月
- [4] 王沫然，MATLAB 与科学计算（第 2 版），电子工业出版社，2005 年 7 月
- [5] 宋兆基、徐流美，MATLAB 6.5 在科学计算中的应用，清华大学出版社，2005 年 1 月
- [6] 高会生、李新叶等译，MATLAB 原理与工程应用，电子工业出版社，2002 年 6 月
- [7] 孙汉昌，朱华勇，基于概率地图方法的无人机路径规划研究，系统仿真学报，2006 年11月
- [8] 阙嘉岚、丁贵涛、黄亚楼，基于启发式节点增强策略的 PRM 路径规划方法，机器人 ROBOT，2003 年 11 月
- [9] 张建忠、颜景平，基于视觉的未标定机械臂路径规划，机械制造与自动化，2006年07月
- [10] 蔡健荣、赵杰文，水果收获机器人避障路径规划，农业机械学报，2007 年3 月

