全国第四届研究生数学建模竞赛

题号 D

题 目 邮路规划与邮车调度

摘 要：

本文研究的问题是典型的车辆调度问题(VRP)，可归结为图论中的多旅行商问题，通过采用“人造顶点”分区方法同时结合最小生成树分解法，将其转化为多个单旅行商问题，并借助 LINGO 软件求解单旅行商问题。

针对问题一，本文首先根据邮件寄送总量和邮车承载量，求出所需的最少邮车数为 3。接着，建立了一个以最小化总邮路空车率为目标的优化模型。通过将总邮车空车率简化为邮路总路程最短，将此问题转化为带容量限制车辆调度问题(CVRP)问题来求解。最后在满足邮车容量约束的条件下，结合求解多旅行商问题(MTSP)问题的方法来求解 CVRP，求得总的因空车率减少的收入为 72 元，同时 3 辆邮车能满足运输要求。

针对问题二，对于每个地市局和县局的邮路规划和调度方案，采用类似问题一的方法求解，计算结果为：地市局 D、县局 X1－X5 所需的最少邮车数分别为 4、2、2、2、2、3 辆，全区总的运行成本为 7354 元。

针对问题三，本文对问题二求出的邮路按一定的启发式算法进行调整，使总的运行成本减少 8%，同时县局 X3 和 X5 分别可以减少一辆邮车的投入。

针对问题四，本文通过对各县区各支局关联的路数的计算，将县局 X3 调整为 Z31，X5 调整为 Z51，通过计算发现这两个县区的总路程分别减少近 30%和 10%。

关键词：CVRP、MTSP、TSP、邮路规划

参赛密码 ____________

（由组委会填写）

参赛队号 1048701 参赛学校 华中科技大学

参赛队员姓名 何铁芳（10487011）王南杰（10487012）史玉平（10487013）

1.问题的重述

某地区的邮政局、所分为地市中心局（简称地市局）、县级中心局（简称县局）和支局三级机构，该地区的邮政运输网络由区级邮政运输网和县级邮政运输网构成。区级邮政运输网由从地市局出发并最终返回地市局的区级邮车所行驶的全部邮路构成，县级邮政运输网由从县局出发并最终返回县局的县级邮车所行驶的全部邮路构成。为使邮政企业实现低成本运营和较高的服务质量，我们需要对该地区的邮政运输网络进行重构，确定合适的邮路规划方案并进行邮车的合理调度。

问题 1：

以县局 X1 及其所辖的 16 个支局 Z1，Z2，……，Z16 为研究对象，假设区级第一班次邮车 08:00 到达县局 X1，区级第二班次邮车 16:00 从县局 X1 再出发返回地市局 D，若每辆县级邮车最多容纳 65 袋邮件，试问最少需要多少辆邮车才能满足该县的邮件运输需求？同时，为提高邮政运输效益，应如何规划邮路和如何安排邮车的运行？

问题 2：

采用尽可能少、尽可能短的邮路可以减少邮政部门车辆和人员等的投入，从而显著降低全区邮政运输网的总运行成本。考虑投入车况较好的邮车，通常每条邮路只需要一辆邮车即能满足运载能力要求，试问应如何构建该地区的邮政运输网络（县的划分不能变更），请你给出邮路规划和邮车调度方案。请注意邮车的调度必须满足上文中有关该地区的邮政运输流程及时限规定。

问题 3：

考虑到部分县与县交界地带的支局，其邮件由邻县县局负责运送可能会降低全区的运行成本，带来可观的经济效益。若允许在一定程度上打破行政区域的限制，你能否给出更好的邮路规划和邮车调度方案？

问题 4：

县局选址的合理与否对构建经济、快速的邮政运输网络起到决定性的作用。假设图 2 中县局 X1，……，X5 均允许迁址到本县内任一支局处，同时原来的县局弱化为普通支局。设想你是该地区网运部门负责人，请你重新为各个县局选址，陈述你的迁址理由并以书面材料形式提交省局网运处。

2.模型的假设与符号说明

2.1 针对本问题，本文做出如下假设

1、公路不考虑等级差别，也不受灾情或交通情况的影响；

2、各条公路段骑车行驶速度认为是均匀；

3、此地区的行政划分比较合理；

4、假设区级邮车第一班邮车邮路和第二班邮车邮路一样。

5、假设支局的邮件只由一辆邮车运输。

2.2 符号说明

P：表示调度中心，$D, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$

q_i：表示支局Z_i的货运量，$1 \le i \le n$，n为支局个数

$d_{i,j}$：表示支局i与支局j之间的最短距离

m：表示邮车数，q^k为邮车k的运量

Q：表示邮车的最大容量

q_i^k：表示邮车在支局Z_i的卸载邮件量（袋）

p_i^k：表示邮车在支局Z_i的收寄邮件量（袋）

3.问题的数学模型

本题给出了某地市的邮政交通网络图，要求的是在不同的要求及条件下，邮路的规划及邮车的调度方案。这是一类图上点的行遍性问题，也就是要用若干条闭链覆盖图上所有的顶点，并使某些指标达到最优。

点的性变性问题在图论和组合最优化中分别称为哈密尔顿问题和旅行商问题，就是研究图中是否存在经过所有顶点恰好一次的圈或路，这种圈或路(如果存在)分别称为哈密尔顿圈或哈密尔顿路，简称为H-圈或H-路。而旅行商问题通常是指在赋权图上经过所有顶点至少一次，且使总长度(即边权之和)达到最小的闭链。而本题所求的多条邮路问题，则与多旅行商问题(MTSP)类似，也就是m条经过同一点并覆盖所有其它顶点又使边权之和达到最小的闭链[1]。

求解非完全图的多旅行商问题，通常所用的方法可分两步。

第一步是利用任意两点间的**最短路长度**作为该两点间边的权构造一个完全图。这一点对于原图中没有边相连的点尤为重要。已经证明，该完全图中最优哈密尔顿圈与原图上的最优旅行商路线等价。

第二步，以一点v_0为起终点(本题中的调度中心即地市局或县局)的多旅行商问题，可以采用将该点视作若干点$v_{01}, v_{02}, ..., v_{0m}$ (m为旅行商人数)，并将最短路径矩阵$W = \left(w_{ij}\right)_{n\times n}$转化为$W' = \left(w_{ij}'\right)_{n'\times n'}$将前述的完全图扩展为增广完全图。

其中$W = \left(w_{ij}\right)_{n\times n}$转化为$W' = \left(w_{ij}'\right)_{n'\times n'}$的方法如下：

原问题费用矩阵为：

$$W=\begin{pmatrix} & V_0 & V_1 & \cdots & V_{n-1} \\ V_0 & \infty & W_{0,1} & \cdots & W_{0,n-1} \\ V_1 & W_{1,0} & \infty & \cdots & W_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_n & W_{n,0} & W_{n,1} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

扩大顶点以后的费用矩阵为：

$$W'=\left(\begin{array}{ccccc|cccc} & V_{0,1} & V_{0,2} & \cdots & V_{0,m} & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} \\ V_{0,1} & & & & & W_{0,1} & & & W_{0,n-1} \\ V_{0,2} & & & \infty & & W_{0,1} & & & W_{0,n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ V_{0,m} & & & & & W_{0,1} & & & W_{0,n-1} \\ \hline V_1 & W_{1,0} & W_{1,0} & \cdots & W_{1,0} & \infty & W_{1,2} & \cdots & W_{1,n-1} \\ V_2 & W_{2,0} & W_{2,0} & \cdots & W_{2,0} & W_{2,1} & \infty & \cdots & W_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_{n-1} & W_{n-1,0} & W_{n-1,0} & \cdots & W_{n-1,0} & W_{n-1,1} & W_{n-1,2} & \cdots & \infty \end{array}\right)$$

紧接着，在该增广完全图上求最优哈密尔顿圈。通常情况下，这个最优哈密尔顿圈将经过$v_1,v_2,\cdots,v_k$各一次，而这些点在圈上又不相邻。因此，它们将把这个圈分解成恰好k段。这k段形成以v作为起始点的闭链，分别对应k个旅行商的旅游路线，并且这些旅游路线对于总长度最短的目标来说一定是最优的。

在拓展完全图上求解最优哈密尔顿圈，可以表达成下述线性规划(更确切地讲是 0-1 规划)的形式：

$$\min\sum_i\sum_j w_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\sum_j x_{ij}=1,\quad \forall i$$

$$\sum_j x_{ij}=1,\quad \forall j$$

$$\sum_{i\in S,\, j\in\bar{S}} x_{ij}\ge 1\qquad \forall S\subset V,\text{且}S\ne\varnothing$$

$$x_{ij}=0\text{或}1$$

其中，w_{ij}就是点i与点j间边的权，V是图的点集，而条件$\sum_{i\in S,\, j\in\bar{S}} x_{ij}\ge 1$是为了保证取$x_{ij}=1$的边不形成小圈，这里$S$是点集$V$任意的非空真子集。此模型最优解中$x_{ij}=1$的边将构成最优哈密尔顿圈。

值得注意的是，该模型求得的最优解(也就是多旅行商问题的最优解)，能使k条旅行商路线的总路程达到最小，但是这k条路线的均衡性可能相当差。因

此，但要求均衡性时还需要做大量的调整问题。

因为最小生成树能包含图G中的所有顶点E，而且最小树的边权是相邻两顶点之间的距离，它描述了顶点之间的相近程度，因此可以考虑利用最小生成树初步分块。

哈密尔顿问题和旅行商问题都属于NP-完全难问题，也就是说上述模型的求解目前没有多项式时间算法。对于本题的规模(由于各县局及地市局分开考虑，包括构造增广完全图时添加的$k-1$个点不会超过 30)，因此利用现有的软件(如LINGO、ILOG)可以求到最优解，当然当问题的规模增大时，此法将变的不可行。容易证明，单旅行商的最优路线长度，必定是多旅行商最优路线总长度的下界。

4.问题的求解

4.1 问题一的求解

此题的求解分为两步，第一步，求得最少需要的邮车数m。第二步，邮路规划及路径选择。

4.1.1 最少邮车数的求法

最少邮车数m可以采用下式求得：

$$m = \left\lceil \frac{\max\left(\sum_i p_i, \sum_i q_i\right)}{Q} \right\rceil$$

当然，按此法求得邮车数，可能在有限的时间内不能遍历所有支局，由于邮车在各支局需要卸装邮件，也有可能出现邮车的容量不足的冲突。如果出现这种情况，可以按步长 1 加大邮车数，直到满足所有约束条件为止。

4.1.2 邮路规划及路径选择

定义 1 邮路是指邮车在完成邮件运输任务的过程中，从邮件分检中心到邮政局所所运行的线路，即邮路。邮路是邮车运行过程中所经过的分检中心、各邮件集散地、各邮政局所组成的交顶点序列，邮路包括辐射型邮路、环形邮路、混合型邮路。

如果用ϕ_j表示某邮区内的第j条邮路，则邮区内所有的邮路可以表示为集合Φ[2]：

$\Phi = \left\{\phi_j, j = 1, 2, \cdots, m\right\}$

$\phi_k=\left\{\left(v_0,v_{j1},v_{j2},\cdots,v_{jt},\cdots,v_{js},v_0\right):v_{jk}\in V,t=1,2,\cdots S\right\}$

式中：m：邮区内邮路的总数及邮车数；

S：第 j 条邮路上交顶点的总数；

v_{jk}：第 j 条邮路上交顶点序列中的第 k 个交顶点。

a) 问题的数学描述

给定 n 个定点的集合 V 及 m 各动点的集合 A，所有动点以 v_0 为起点，希望求得 m 条邮路的集合，每一顶点除 v_0 外，在邮路中至少出现一次。令 q_i,p_i 分别为顶点 v_i 的卸，装货量，其中 v_0 的卸装货量都为零，以 $d_{i,j}$ 表示 v_i 与 v_j 间的最短距离，邮车 k 的运行时间 T_k 及最大载货量 Q_k。令 ER_i 表示邮车在 v_i 与 v_{i+1} 之间运行时空车率，令 ϕ_k 表示一个邮路，$\phi_k=\left(v_0,v_{i1},v_{i2},...,v_{in},v_0\right)$，$RE\left(\phi_k\right)$ 为邮路空车率，。

目标是要在**满足约束的条件下**选择 m 条邮路使得**总空车率** $\sum_{i=1}^{m}RE\left(\phi_i\right)$ 最小。

其中，空车率=(邮车最大承运的邮件量(袋)-邮车运载的邮件量(袋))/邮车最大承运的邮件量(袋)，即：

$$RE\left(v_{it}\right)=\begin{cases}\dfrac{Q\left(v_0\right)-q\left(v_{i1}\right)}{Q\left(v_0\right)}\cdot d\left(v_0,v_{i1}\right) & t=0\\ \dfrac{Q\left(v_{it}\right)-q\left(v_{it}\right)+p\left(v_{it}\right)}{Q\left(v_{it}\right)}\cdot d\left(v_{it},v_{it+1}\right) & t\neq 0,\left(n+1=0\right)\end{cases}$$

其中，邮车从各顶点出发时，邮车的载货量 $Q\left(v_{it}\right)$：

$$Q\left(v_0\right)=\sum_{v_{it}\in\phi_k}q\left(v_{it}\right)$$

$$Q\left(v_{it}\right)=Q\left(v_{it-1}\right)-q\left(v_{it-1}\right)+p\left(v_{it-1}\right)\quad t=1\cdots n$$

那么，邮路空车率 $RE\left(\phi_k\right)=\sum_{v_{it}\in\phi_k}RE\left(v_{it}\right)$，显而易见，邮路空车率 $RE\left(\phi_k\right)$ 和邮路相关，而且关系比较复杂。因此，此模型的求解将变的非常复杂。

需注意的是，**邮路的逆序和顺序的邮路空车率将不同。因此，在运行时需要考虑邮路的顺序。**

b) 问题的简化

此问题是典型的 **CVRP（Capacitated Vehicle Routing Problem）**问题的扩展，不同的地方有：

- ◆ 目标函数是一个关于邮路的分段函数 $w(\phi_k)$：

$$RE(\phi_k)=RE\left(d(v_{it},v_{it+1}),p(v_{it}),q(v_{it})\right)$$

- ◆ 客户有两类需求，从邮车上卸下其所需邮件，同时装上需发送的邮件。此将使得容量约束变得复杂。

从邮车空车率的表示式中可以看出，邮路的路程越短，邮车的空车率一般也会越小，因此，我们用邮路的路程大小来代替空车率即：$\sum_{t=0}^{n} d(v_{it},v_{it+1})$。

此问题是多旅行商问题(MTSP)，即在加权图 G 中求顶点集 V 的划分 $V_1,V_2,\cdots,V_n$，将 G 分成 n 个生成子圈 $G[V_1],G[V_2],\cdots,G[V_n]$ 使得[3]

(1) 顶点 $O\in V_i, i=1,2,3,\cdots,n$。

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} V_i = V(G)$。

(3) 邮车从各顶点出发时，邮车的载货量小于邮车的最大载货量 $Q(v_{it})\le Q$。

(4) 邮车的满足时间限制，即 $T_k(\phi_k)=d(\phi_k)/\overline{v}+\sum_{v_{it}\in\phi_k} t(v_{it})\le T$，其中 $d(\phi_k)=\sum_{t=0}^{n} d(v_{it},v_{it+1})$ 为邮路的路程长度，$\overline{v}$ 为邮车的平均速度，$t(v_{it})$ 为邮车在各顶点卸装邮件所发的时间。

(5) $\sum_{k=1}^{m} d(\phi_k)=\min$

此问题的求解类似非完全图的多旅行商问题的求解：首先，对顶点分组，分别求出各组的单旅行商路线，然后在组间进行适当的调整求得近似解。

我们首先分析顶点分组的复杂度，现有图 $G(V,E)$，$G(V,E)$ 图中任一邮路可表示为：

$$v_0\to v_i\to \underbrace{v_{k1}\to v_{k2}\to\cdots}_{\text{个数}\le n-2}\to v_j\to v_0$$

其中，n 为除中心节点 v_0 的节点数，令 v_0 相邻节点集合为 $B(v_0)$，那么 $v_i,v_j\in B(v_0)$，$B(v_0)$ 的大小为 l。

那么 $G(V,E)$ 可能包含的邮路有 $\left(C_l^2+l\right)\cdot(n-2)!\cdot 2^{n-2}$ 个，对顶点分组的计算复杂度为：

$$O(n)=\left(C_l^2+l\right)\cdot(n-2)!\cdot 2^{n-2}=O\left(n^2 n!2^n\right)$$

对于顶点的分组，因此需采取启发式算法：

首先，求解增广完全图的权值最小哈密尔顿回路。

然后，再在此哈密尔顿回路的基础上分组，并使分解结果满足约束条件，以及尽量让各子图包含的顶点尽量接近，具体有如下原则：

1）分解点为中心点 v_0 或尽可能接近中心点。

2）分解所得 m 个子图 G_i 所包含的顶点数包含所有顶点。

3）尽量使分解所得的子图 G_i 为连通图；

4）尽量使子图 G_i 与顶点 v_0 的最短路上的点在子图内，尽量使各子图的点在子图内部形成环路。

分组以后，每组中求最佳旅行商回路，即为当个旅行商问题（TSP），再进行进一步调整，使得各部分满足均衡条件(3)(4)。由于规模较小，路径选择将变得较为简单，可以用 LINGO 算出。

4.1.3 问题的求解结果

县局 X1 的邮政线路图如下：

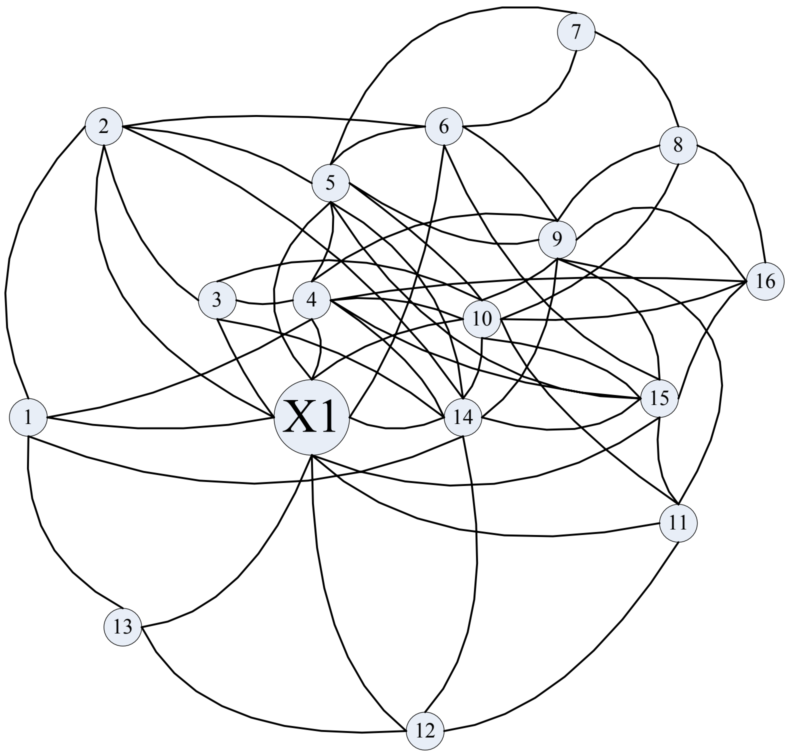

图 1-县局 X1 的邮政线路图

a）最小邮车数

通过 Floyd 算法求出任意两点间的最短距离和路径来构造一个完全图，借助 LINGO 软件求出此图的最小哈密尔顿圈，其长度为 279 公里，县级邮车平均时速为 30km/h ，因此一辆邮车只需要 9.3 小时就可以遍历所有支局(如果不考虑邮车容量限制)。

考虑到第一班次邮车 08:00 到达县局 X1，区级第二班次邮车 16:00 从县局 X1 再出发返回地市局 D，且县局对邮件的集中处理时间为 1 小时（包括邮件的卸装、分拣封发等处理时间），所以一辆邮车只有 6 小时工作时间。

寄达支局总的邮件数量有 176 袋，支局收寄的总的邮件数量有 170 袋，考虑到每辆邮车总容量 65 袋，因此**最少的邮车数可能是 3**。

通过求解于是总邮寄时间可达 18 小时，远大于 9.3 小时，应该可以满足时间限制。

b）邮路规划与路径选择

假设最少邮车数为 3，按前面论述的方法构造增广完全图，需要加入 2 个人工顶点。

借助 LINGO 软件求出此增广完全图的哈密顿圈，如下图所示：

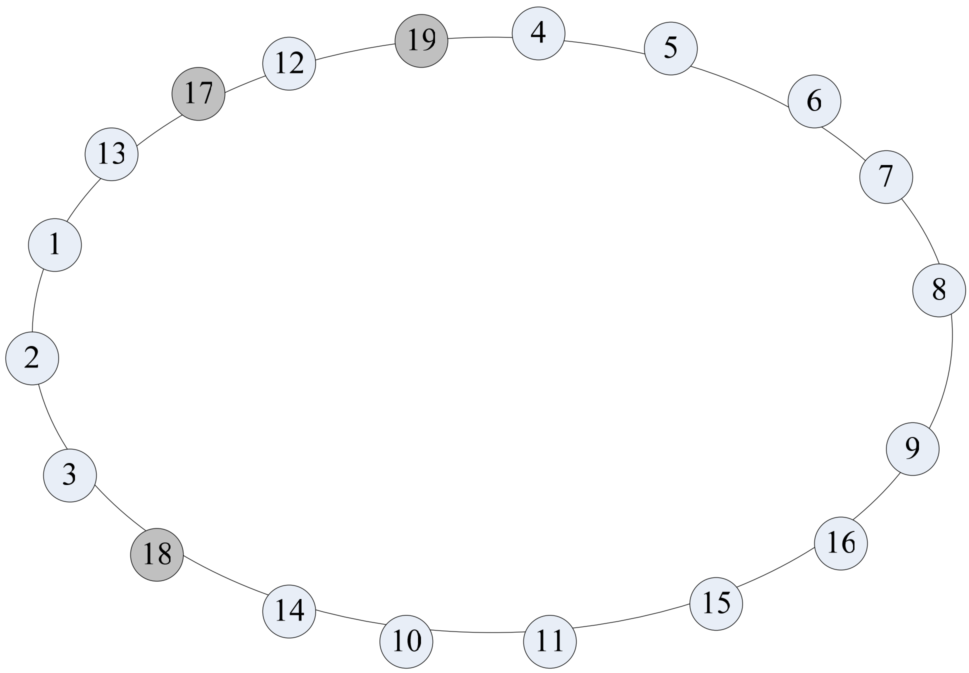

图 2-增广完全图的哈密尔顿圈

上图中的 17、18、19 号顶点为县局 X1，从图中可以看出，此圈包含 3 个交叉的哈密顿圈。但同时考虑到邮车的容量及运行时间限制，按上述的启发式方法应进行调整，结果如下表。

表 1- 县区 X1 运行邮路

邮路	路径
邮路 1	14－13－12－3－2－1
邮路 2	4－5－6－7－8－10
邮路 3	11－15－16－9

各邮路的方向及因空车率减少的收入如下表：

表 2-邮路方向及减少的收入

邮路	路径方向	减少的收入（元）
1	[17 14 3 2 1 13 12 17]	30
2	[17 10 9 8 7 6 5 17]	5.9077
3	[17 9 16 15 11 17]	36.154

减少的总收入：72.0615 元

4.2 问题二的求解

4.2.1 问题的分析

问题二中考虑投入车况较好的邮车即每辆邮车能满足每条邮路的运载能力要求，邮路规划及路径选择，使全区总的邮政运输网的总运行成本最低。

由于行政区域的限制，使得地市局和县局邮运相互独立，因此全区总的邮政运输网的总运行成本最低等价于分别使地市局和 5 个县局的邮政运输网的总运行成本最低。

这里的目标函数是总的运行成本最低，由于每条邮路的运行成本为 3 元/公里，因此，此问题目标就是所有邮路总的路程最短，即 $\min\sum_{k=1}^{m} d\left(\phi_k\right)$。

此问题在数学上类似与多旅行商问题(MTSP)。因此，针对于每个县局(地市局)的邮路规划及路径选择可以采用类似问题一的求法，区别在于此问题中的邮车没有邮车容量的约束。

4.2.2 问题的求解结果

a）地市区的邮路问题

Step1 最少邮车数的确定

通过 Floyd 算法求出任意两点间的最短距离和路径并加入县局 X1－X5 点构造一个完全图，此完全图有顶点 Z58－Z73（16 点）、X1－X5（5 点）、D 共 22 个顶点。

借助 LINGO 软件求出此图的最小哈密尔顿圈，哈密尔顿圈如下图：

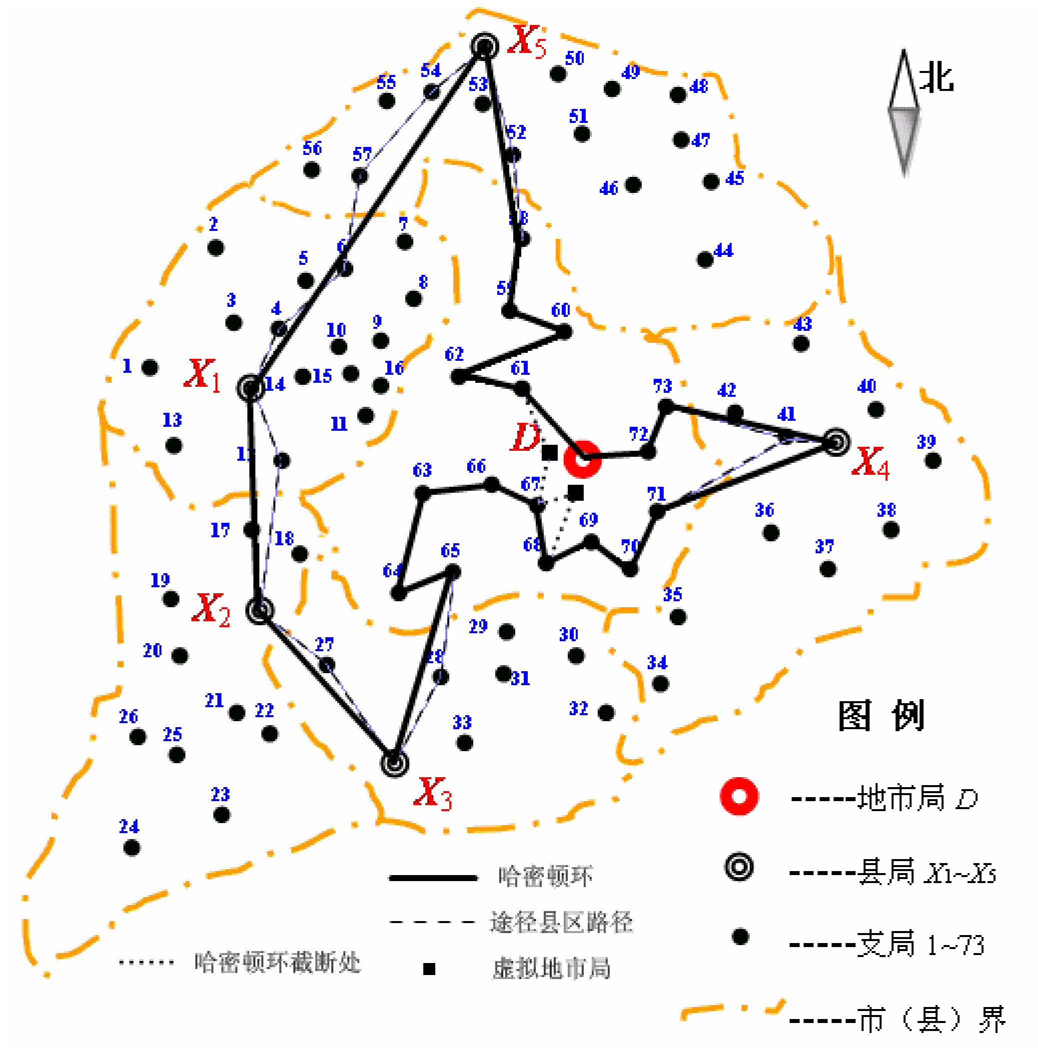

图 3 区级邮车的哈密顿环

上图中，虚线所经路径如下表：

表 3 途径县区路径

邮局	路径
65－X3	65－28－76
X3－X2	76－27－75
X2－X1	75－12－74
X1－X5	74－4－6－57－54－78
X5－58	78－52－58
73－X4	73－41－77
71－X4	71－41－77

其中：74－78 代表 X1－X5，79 代表 D

最小哈密尔顿圈路径长度为：721 公里，区级邮车的平均时速为 65km/h，所以一辆邮车至少需要 11.1 小时才能走完。

考虑到区级第一班次邮车出发时间必须在 06:00 之后，返回地市局 D 时间必须在 11:00 之前，因此每辆邮车最多有 5 小时可工作时，因此最少需要 3 辆邮车。

Step2 规划与路径选择

同第一问的计算一样，加入 2 个虚拟点，求解结果如下表：

表 4 区级邮车邮路

邮路	路径	时间（路径时间＋停留）
1	79－61－62－60－59－58－78－79	4.57＋40/60＝5.24 小时
2	79－67－66－63－64－65－76－75－74－79	5.48＋55/60＝6.39 小时
3	79－72－73－77－71－70－69－68－79	3.18＋40/60＝3.85 小时

由于邮车工作时间为 5 小时，各邮路时间不能超过 5 小时，所以必须添加一辆车，及**最少需 4 辆邮车**，求解结果如下表：

表 5 调整后区级邮车邮路

邮路	路径	时间（路径时间＋停留）
1	79－61－60－59－58－52－78～79	4.38+35/60＝4.97 小时
2	79－67－65－64－28－76～79	3.42+30/60＝3.92 小时
3	79－62－9－10－74－12－75－18－63－66～79	3.74+55/60＝4.66 小时
4	79－72－73－41－77－41－71－70－69－68～79	3.18+40/60＝3.85 小时

其中“～”代表通过 Floyd 算法算得的路径，“—”代表直达路径。

市局 D 总运行成本为 2870.4 元，最终 4 条邮路如下图所示：

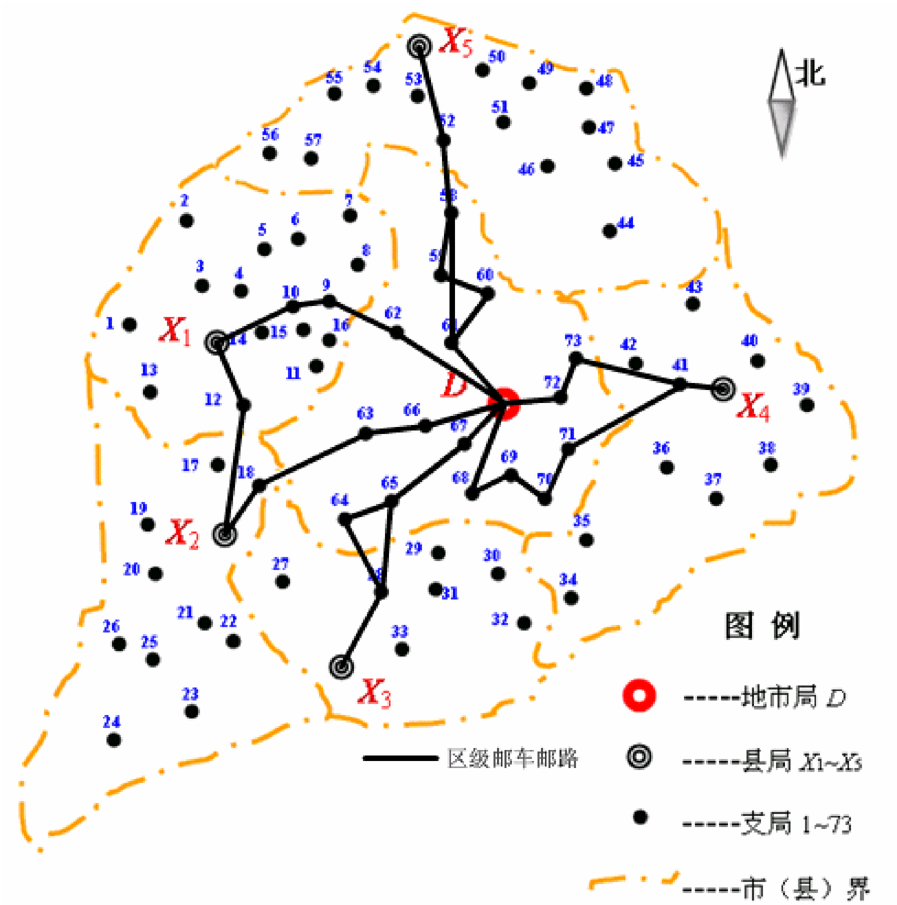

图 4 地市局 D 的邮路示意图

b）县区的邮路规划与路径选择

考虑到地市级邮车的工作时间及从地市局到县局的路程，计算出县局邮车工作时间范围如下表：

表 6 各县区邮车工作时间范围

县区	工作时间范围	总时间
X1	8：40——14：21	5.68 小时
X2	9：42——15：23	5.68 小时
X3	9：26——15：30	6.1 小时
X4	8：26——15：39	7.2 小时
X5	9：54——15：06	5.2 小时

对于每个县区，将地市局邮车经过的支局点剔除，再按同样的方法计算，计算结果如下：

表 7 县区 X1：运行成本：819 元

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	74—13－1－2－3－4－14－74	4.63 小时+30/60＝5.13 小时
邮路 2	74—11－15－16－8－7－6－5－74	4.47 小时+35/60＝5.05 小时

表 8 县区 X2：运行成本：803.7 元

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	75—17－19－20－26－75	4.7 小时+20/60＝5.03 小时
邮路 2	75—25－24－23－22－21－75	4.23 小时+25/60＝4.64 小时

表 9 县区 X3：运行成本：726.3 元

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	76—27－28－31－29－76	4.3 小时+15/60＝4.55 小时
邮路 2	76—33－32－30－76	4.17 小时+15/60＝4.42 小时

表 10 县区 X4：运行成本：884.7 元

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	77—36－35－34－35－37－38－77	5.43 小时+30/60＝5.93 小时
邮路 2	77—39－40－43－42－41－77	4.4 小时+25/60＝4.81 小时

表 11 县区 X5：运行成本：1250 元

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	78—53—57－56－55－54－78	4.66 小时＋25/60＝5.08 小时
邮路 2	78－51－46－44－46－51－78	4.8 小时+15/60＝5.05 小时
邮路 3	78－50－49－48－47－45－78	4.43 小时+25/60＝4.85 小时

全地区的总运行成本为 7354.1 元，地区的邮路如下图所示：

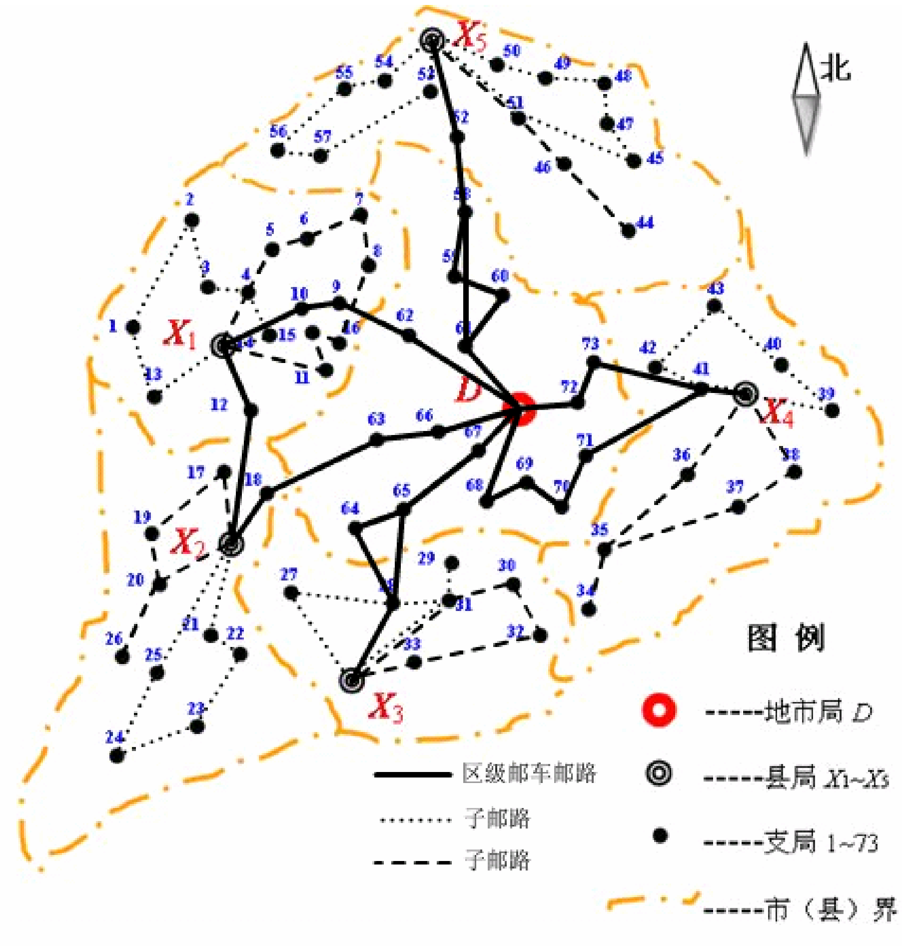

图 5 全市各邮路分布

4.3 问题三的求解

4.3.1 问题分析

问题三在问题三的基础上考虑打破行政区域的限制，使全区总的邮政运输网的总运行成本最低。

考虑两县局 X_i, X_j 及县局 X_i 隶属支局 Z_k^i，支局 Z_k^i 和县局 X_i, X_j 的最短距离分别为 $d\left(Z_k^i, X_i\right), d\left(Z_k^i, X_j\right)$。实际中支局可能离其他相邻县局更近即：

$$d\left(Z_k^i, X_i\right) > d\left(Z_k^i, X_j\right)$$

因此，让更近的县局来处理支局的邮件服务很有可能降低全区的邮政服务成本，此将问题的求解变的非常复杂。

为了简化问题的求解，我们可以分析问题二的求解结果。

针对问题二的求解结果，在邮车运行过程中，某些邮路邮车的工作时间较短，此条邮路可能还能处理邻县支局的邮政服务。在处理过程中，应尽量**减少邮路，同时使邮路减短。**

4.3.2 求解结果

综合分析各县区邮车工作时间范围，及全区各地市、县局的邮路中。我们发现：

1.县区 X2 和 X3 的邮路时间均有空闲，经过调整后结果如下：

表 12 县区 X2：运行成本：792 元（原价：803.7 元）

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	75—17－19－75－27－75	3.87 小时+15/60＝4.12 小时
邮路 2	75—20－26－25－24－23－22－21－75	4.93 小时+35/60＝5.51 小时

表 13 县区 X3：运行成本：399 元（原价：726.3 元）

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	76—33－32－30－29－31－76	4.43 小时+25/60＝4.85 小时

2.县区 X4 的两条邮路均有大量空闲时间，而县区 X5 则邮路时间十分紧张，经过调整后结果如下：

表 14 县区 X4：运行成本：1068.3 元（原价：884.7 元）

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	77—36－35－34－35－37－38－39－77	6 小时+35/60＝6.58 小时
邮路 2	77—40—43—44—46—42—41—77	5.87 小时+25/60＝6.29 小时

表 15 县区 X5：运行成本：818.1 元（原价：1250 元）

邮路	路径	时间（路径时间＋站点停留时间）
邮路 1	78—53—57－56－55－54－78	4.66 小时＋25/60＝5.08 小时
邮路 2	78－50－49－48－47－45－78	4.43 小时+25/60＝4.85 小时

经全面调整后，总运行成本为 6766.8 元，共减少 587.3 元即 8%，调整后邮路如下图所示，同时，县区 X3、X5 各减少一条邮路，即可少投入 2 辆邮车。

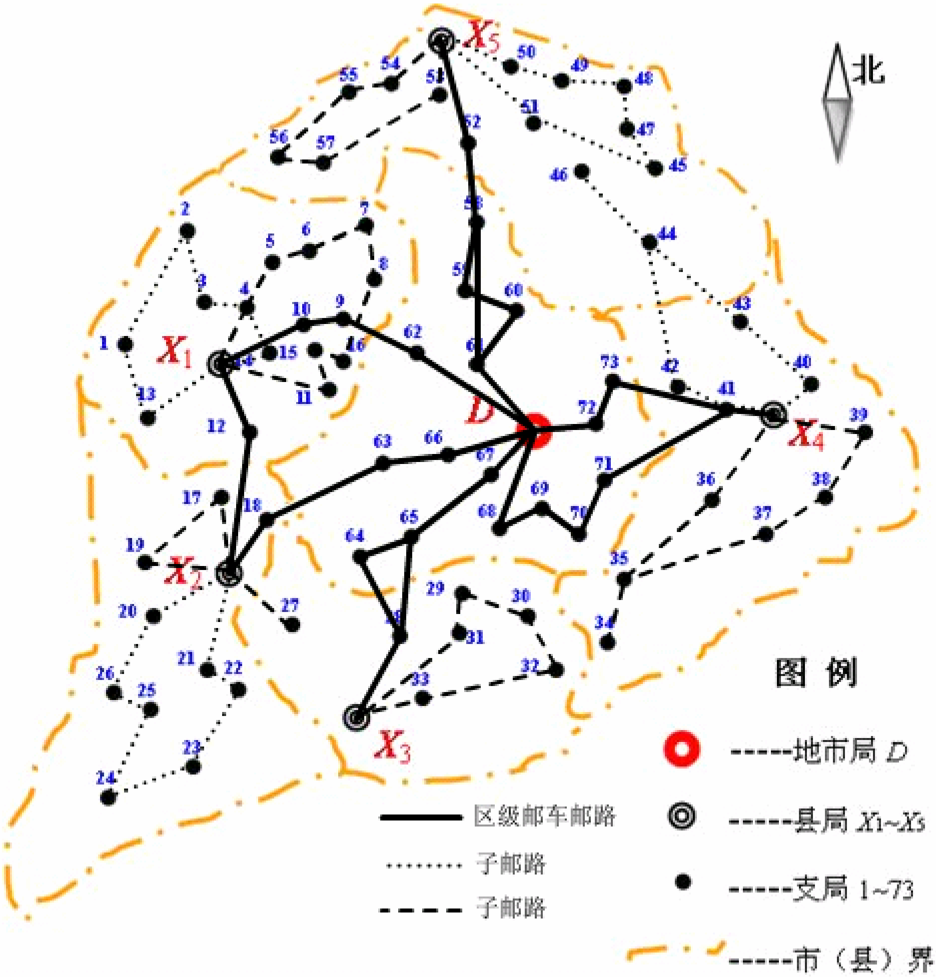

图 6 调整后全市区邮路分布

4.4 问题四的求解

4.4.1 问题分析

邮政服务的高效性在很大程度上取决于交通系统的有效性，一般而言县局处于交通枢纽位置。

定义 2 中心顶点是图 $G(V,E)$ 的完全图中度(顶点关联的边数)最大的顶点。

此问题可简化为求解扩充完全图的中心顶点来解决，求解步骤如下：

Step1 求解图 $G(V,E)$ 的中心顶点 V_0，如果 V_0 为当前县局 X，结束。否则，转 Step2。

Step2 令中心顶点 V_0 为县局 X，县局变为支局，判断县局变更前后的多旅行商路程长度的大小，如果路程变小，则把当前县局变为 V_0，否则不变。

如果求得的中心顶点有$m\,(m>1)$个，则逐个比较用这m个中心顶点替换县局后多旅行商路程的大小，选择其中最小的那个作为县局。

4.4.2 求解结果

Step1 求各县局或地市局的中心顶点

针对每个县局或地市局，通过 Floyd 算法求出任意两点间的最短距离和路径来构造一个完全图，然后再计算出给顶点的度如下：

表 16 县区 1 顶点影响系数表

顶点	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	z10	z11	z12	z13	z14	z15	z16	x1
度	35	33	45	85	37	51	37	43	45	63	37	33	35	43	57	33	89

表 17 县区 2 顶点影响系数表

顶点	z17	z18	z19	z20	z21	z22	z23	z24	z25	z26	x2
度	21	21	21	35	49	21	23	21	39	21	51

表 18 县区 3 顶点影响系数表

顶点	z27	z28	z29	z30	z31	z32	z33	x3
度	15	25	15	23	35	15	17	15

表 19 县区 4 顶点影响系数表

顶点	z34	z35	z36	z37	z38	z39	z40	z41	z42	z43	x4
度	21	39	41	31	27	23	25	27	21	21	51

表 20 县区 5 顶点影响系数表

顶点	z44	z45	z46	z47	z48	z49	z50	z51	z52	z53	z54	z55	z56	z57	x5
度	29	33	49	37	29	35	41	85	49	57	35	57	31	29	33

由上面各表的数据可知，各县局的中心顶点是 X1、X2、Z31、X4、Z51，即县区 3 和县区 5 的县局点可能需要分别迁到 Z31 和 Z51 顶点，其他县区的县局点保持不变。

Step2 验证中心顶点是否调整为县局

1.Z31 替换 X3 作为县局

采用前面求解其多旅行商路线及路程长度的方法，求出其邮路及邮路的路程如下表所示：

表 21 替换后的邮路表

邮路	路径	总路程
1	31－28－27－76－33－31	118 公里
2	31－29－30－32－31	66 公里

其中，顶点 76 代表 X3 点，两邮路总路程为 184 公里。替换前总路程为：254 公里，缩短了 70 公里，近 30%。替换后的邮路图如下图所示：

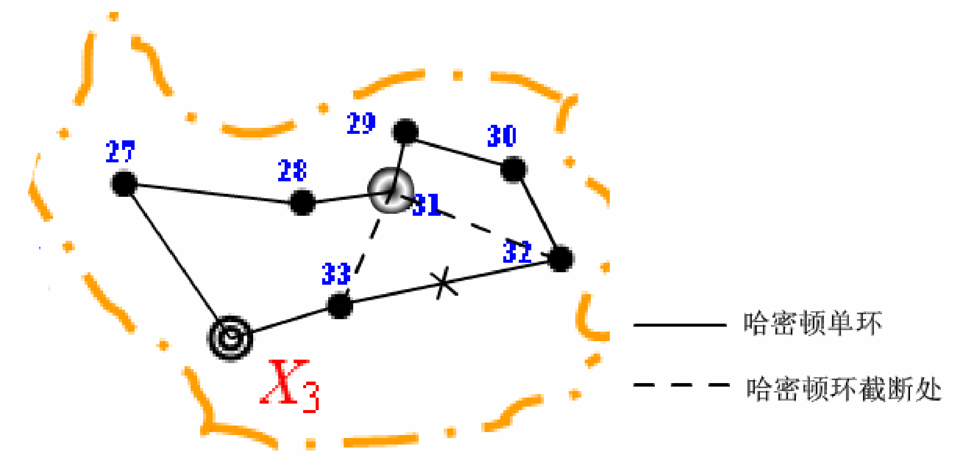

图 7 县局 3 替换后的邮路变化

2. Z51 替换 X5 作为县局

采用前面求解其多旅行商路线及路程长度的方法，求出其邮路及邮路的路程如下表所示：

表 22 县区 5 邮路表

邮路	路径	总路程
1	51－52－57－56－55－54－53－51	193 公里
2	51－78－50－49－48－51	103 公里
3	51－47－45－44－46－51	91 公里

其中，顶点 78 代表 X5，邮路总路程为 387 公里，替换前为 416.7 公里，缩短了 29.7 公里，近 10%。

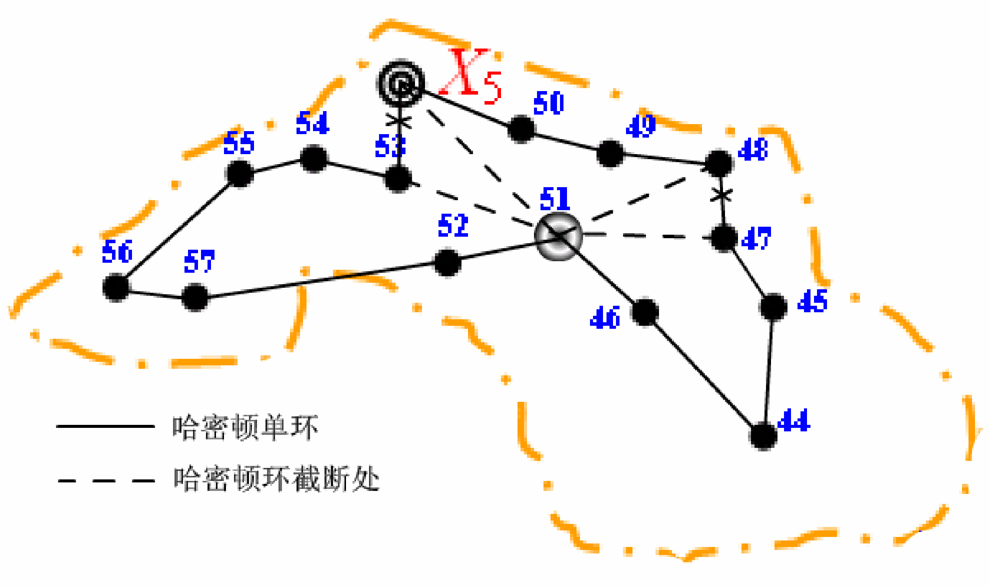

图 8 县局 5 调动后的邮路变化

县局迁址申请书

尊敬的市领导：

为了在全市区构建经济、快速的邮政运输网络，特申请将县区 X3 县局地址迁至 Z31，将县区 X5 县局地址迁至 Z51。理由如下：

县区 X3、X5 的县局位置处在县区的边缘位置，不利于邮政运输，若将县局地址分别迁至 Z31、Z51，这 2 个位置均处于县区交通中心位置，区级邮车送来的邮件可方便、快速地分发到县内各支局，县内邮车行驶路程可分别减少 28% 和 7.2%，可节省大量运输成本。

基于以上理由，特向市领导提出申请。

申请人：XXX

2007-10-22

5.模型的进一步讨论

该问题是一个 CVRP 问题，是已被论证的 NPC 问题，至今仍无有效的算法。求最优 Hamilton 回路是该问题的常见的计算机近似算法，它不能保证得到最优解，运算量很大，这种算法能很容易在图论文献中查到。

我们的策略改进方法不能保证求得最优解，但接近最优解。并且所提出的策略能大幅度减少计算量。

我们提出一组规则对图分块，但未能给出一个准确的原则定量地给出总路程最短通均衡性最好的制约关系。

参考文献

[1] 丁颂康，灾情巡视的最佳路线，数学的实践与认识，第 29 卷 第 1 期 1999 年 1 月。

[2] 肖峰，邮政车辆调度问题研究，硕士论文，2007 年 3 月。

[3] 罗卢杨，龙继东，唐小军，灾情巡视路线寻优模型，数学的实践与认识，第 29 卷 第 1 期 1999 年 1 月。

[4] Chen Ailing, Yang Genke, Wu Zhiming, An Effective Hybr id Optim ization Algor ithm for Capac itated Vehicle Routing Problem, Journal of Shanghai J iao tong U niversity (Science) ,Vo l. E211,No. 1, 2006, pp.50～ 55.

[5] R Fukasawa, H Longo, J Lysgaard, Robust Branch and Cut and Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem, Mathematical Programming,2005.