

全国第三届研究生数学建模竞赛



题 目 维修线性流量阀时的内筒设计问题

摘 要：

流量阀的线性流量特性是阀孔结构设计的重要控制标准，本文在分析内外筒之间的平动规律的基础上，建立了过流面积的求解模型，并采用数值方法进行模拟求解，搜索解出了满足近似严格线性误差要求的内筒孔性状及其尺寸；给出了满足要求的充分条件及有关“渐进达到完全线性”定理并加以证明；在流量阀的主要工作区范围内，进一步对比分析了不同线性区间长度、最大过流面积以及线性误差大小时的内筒孔性状及其尺寸。并讨论了外筒孔发生磨损时的相应处理方法，为线性流量阀的维修提供了参考方法。

关键词：流量阀 线性流量特性 过流面积 数值模拟 搜索算法

渐进完全线性

参赛队号 10286020

参赛密码 _____ (由组委会填写)

符号说明：

设外筒圆孔半径为 1；

S: “最大范围”， $S = \pi$ ；

$g(c)$: “过流面积”，内孔与外孔相交部分的面积；

ρ : S 的利用率；

Δd : 某范数（如 2-范数）意义下，当 $\rho = 100\%$ 线性总误差；

Δd^* : 某范数（如 2-范数）意义下，随着 ρ 的变化而变化的线性总误差。

问题 1 讨论在上述阀体结构下，在“过流面积”从零直到外筒孔面积的范围（简称“最大范围”）内，能否通过选择内筒孔形状实现“过流面积”与内筒旋转角度成严格的线性关系。如果不能，请设计内筒孔的形状，在“最大范围”内，使“过流面积”与内筒旋转角近似成线性关系，同时在“最大范围”内，实际情况与严格线性关系的误差在某种意义上最小。

解答：

一、模型的建立

$$\text{设外孔圆方程为 } x=h(y)=\begin{cases} \sqrt{1-y^2}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{1-y^2}, & x < 0 \end{cases}, \quad (1.1)$$

$$\text{设内孔形状方程为 } x=f(y), \quad (1.2)$$

且 (1.1) 与 (1.2) 相切于点 $(-1, 0)$, (2) 式沿 x 轴向右运动。

方程 (1.2) 的旋转角度对应的区间长度为 c ,

$$\text{则 (1.2) 沿 } x \text{ 轴平移后方程为 } x=f(y)+c, \quad (1.3)$$

$$\text{设 } g(c)=\int_{y_1}^{y_2} x dy = \int_{y_1}^{y_2} [f(y)+c-h(y)] dy \quad (1.4)$$

表示相交部分（即过流面积），其中 y_1, y_2 为 (1.3) 与 (1.1) 相交两点的纵坐标。如图 1.1:

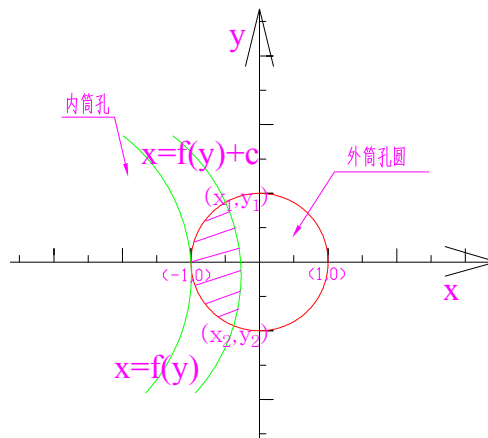


图 1.1 过流面积示意图

目标函数为：

$$\begin{aligned} & \min_f \|g(c) - kc - b\| \\ & = \min_f \left\| \int_{y_1}^{y_2} [f(y) + c - h(y)] dy - kc - b \right\|, \quad c \geq 0, \quad 0 \leq g(c) \leq \pi, \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中， k, b 为常数， $\|\cdot\|$ 表示某范数（任意范数都可以）。

二、模型的解答

(1.5) 式是关于 f 的泛函，其解析解很难找到。所以，下面给出关于问题 1 较优解的充分条件的一些命题讨论，并给出较优方案及对应的数值解。

定理 1.1 无论内孔形状如何， $g(c)$ 与 c 成严格的线性关系这个命题不成立。

以下给出方案一。

命题 1.1 若内孔形状方程 $x = f(y)$ 的上下边界（或边界的一部分）平行于 x 轴（如图 1.2），且进入圆时的边界与圆弧重合（称为凹部分），那么 $g(c)$ 与 c 成严格的线性关系。

证明：显然，此方程随着 c 每增加一个单位， $g(c)$ 都增加相同的值。

命题 1.2 由于圆的对称性，可以设内孔形状方程也是关于 x 轴对称。

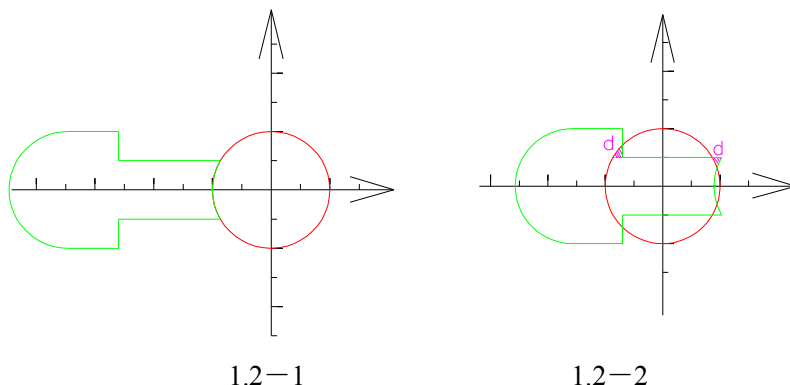


图 1.2 过流面积变化图

命题 1.3 要使得“最大范围”（记为 $S = \pi$ ）能够达到（即 S 的利用率 ρ 达到 100%），则内孔形状方程的尾部要宽于主体部分（如图 1.2-1）。

证明：当内孔形状方程到达圆右侧边界时，此时，如果再向右平移相同距离，则 $g(c)$ 的增加值 ΔS_1 将小于前段的增加值 ΔS_0 ，两者之差 $d = \Delta S_0 - \Delta S_1$ 可以通过加宽内孔形状方程的尾部来弥补，让尾部与圆相交部分等于 d 即可（如图 1.2-2）。

命题 1.4 在命题 1.1、1.2、1.3 的基础上，此内孔形状方程继续沿 x 轴向右平移，则此时开始， $g(c)$ 与 c 已经不成严格的线性关系了。如果要保证 S 能够达到，即利用率 $\rho = 100\%$ ，则此时 $\Delta d = \|g(c) - kc - b\|$ 将增加到某个值；如果要保证 $g(c)$ 与 c 仍然成严格的线性关系，

则只需内孔形状方程平移到临界点处停止即可，但此时 S 的利用率 ρ 未达到 100%。

由命题 1.3 知，内孔形状方程的尾部要宽于主体部分，但是要确定尾部是什么形状，且满足线性程度最大同时 S 能够达到最大，很困难。本文仅考虑尾部如图 1.2 所示的简单情况，通过改变参数 m (斜率 $k=2m$, $b=0$) 计算出各阶段的线性总误差 Δd ， S 的利用率 ρ ，参数设定如图 1.3:

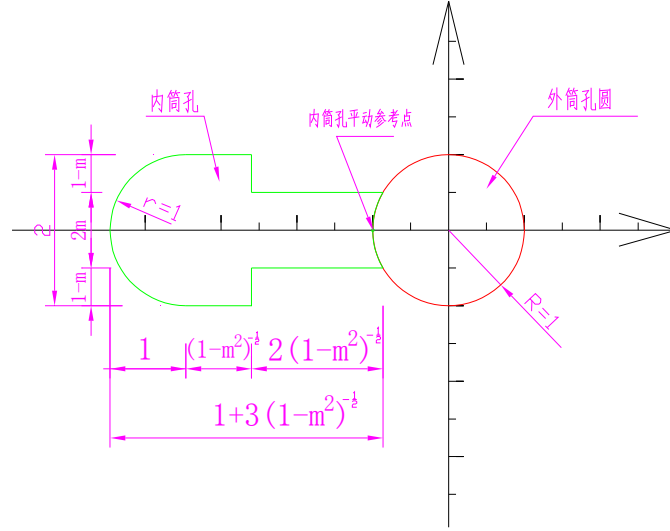


图 1.3 内孔形状及尺寸设定(m 为模型参数)

注:

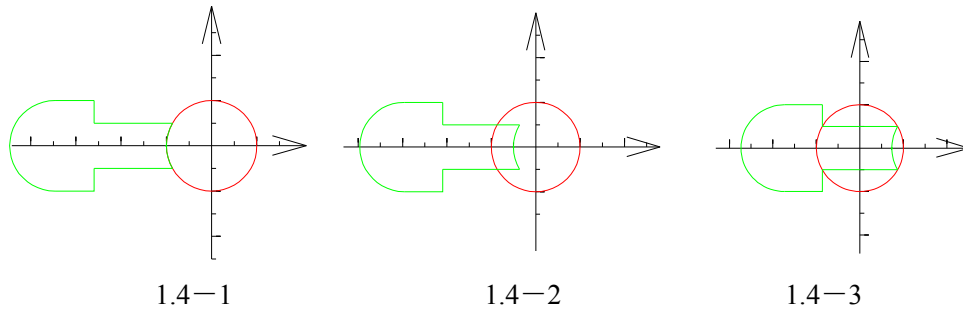
(i) 为了计算方便，不妨设 $b=0$ ，取 $\|\cdot\|$ 为 2-范数。

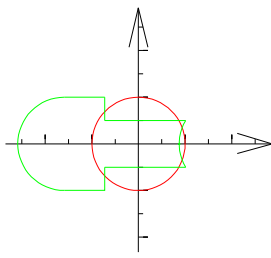
(ii) 这里有个坐标变换问题，曲线 $g(c)$ 及 $kc+b$ 的坐标原点位于我们建立 (1.1) 式时的坐标系的 $(-1, 0)$ 点。通过变换，可以得到我们需要的线性方程:

$$y = 2m(x+1) \quad (1.6)$$

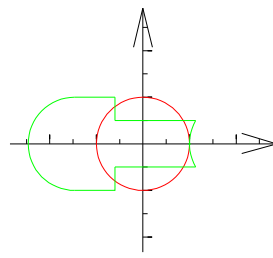
以下我们给出了当内孔形状方程的主体部分为内接矩形的情景，其中矩形的长宽是变化的，我们用 m 表示宽度， $2m$ 表示线性方程 (1.6) 式的斜率。

图 1.4 给出了内孔形状方程的平移变化过程。1.4—1 到 1.4—3 过程是完全线性的，即线性性达到 100%，图 1.5 的完全线性 I 所示；1.4—3 到 1.4—5 过程是也完全线性的，图 1.5 完全线性区间 II 所示；1.4—5 到 1.4—6 过程是近似线性的，图 1.5 近似线性区间所示。

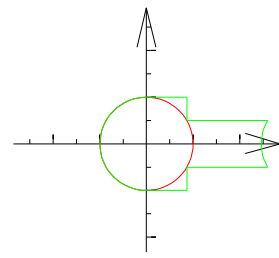




1.4—4



1.4—5



1.4—6

图 1.4 内孔的平移变化过程

本问题要求 $\rho = 100\%$ 。

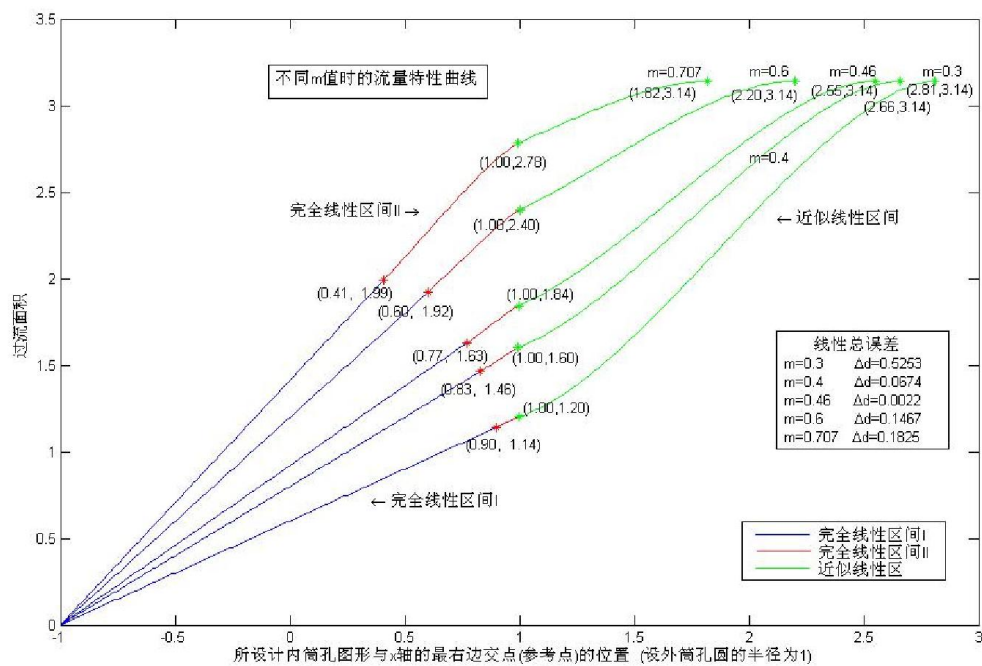


图 1.5 不同 m 值时的流量特性曲线

图 1.5 对应表格如下：

表 1.1 不同 m 值时的流量特性对比汇总

序号	S 的利用率 ρ	m	完全线性区间 I (x 坐标范围)	完全线性区间 II (x 坐标范围)	近似线性区间 (x 坐标范围)	线性总 误差 Δd
1	100%	0.707	[-1, 0.41]	[0.41, 1]	[1, 1.82]	0.1825
2	100%	0.6	[-1, 0.60]	[0.60, 1]	[1, 2.20]	0.1467
3	100%	0.46	[-1, 0.77]	[0.77, 1]	[1, 2.55]	0.0022
4	100%	0.4	[-1, 0.83]	[0.83, 1]	[1, 2.66]	0.0674
5	100%	0.3	[-1, 0.90]	[0.90, 1]	[1, 2.81]	0.5853

从表 1.1 可以看出，当 $m=0.46$ 时，线性总误差 $\Delta d = 0.0022$ 最小。此时的内孔形状如下：

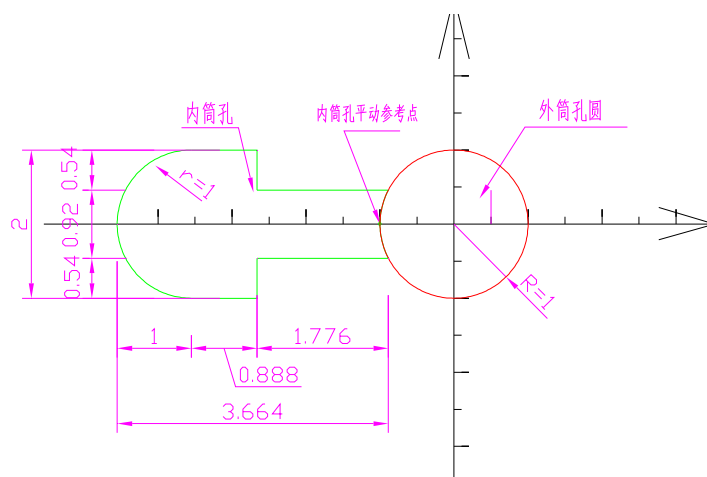


图 1.6 内孔形状及尺寸($m=0.46$)

线性关系如下图所示:

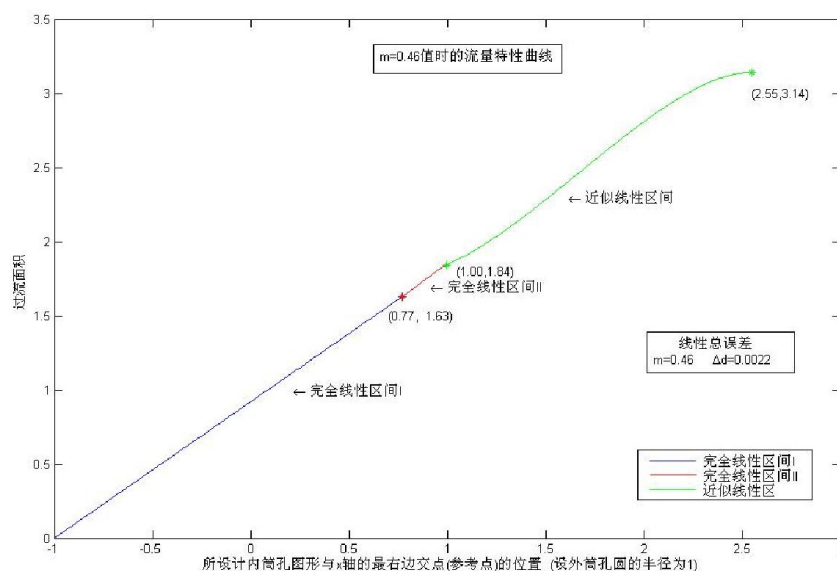


图 1.7 $m=0.46$ 时的流量特性曲线

有关“完全线性区间 II”的讨论:

(1) 图 1.5 所示, 当 $m \leq \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ 时, 横坐标在 $[-1, 1]$ 区间内线性关系 100% 满足; 当 $1 \geq m > 0.707$ 或 $0 \leq m < 0.3$ 时, “完全线性区间 II” 不再满足 100% 的线性关系。

(2) 无论 m 为何值, $x > 1$ 区间都不满足 100% 的线性关系。

(3) 图 1.4—3 到 1.4—4 再到 1.4—5 的过程, 理论上可以通过增大尾部来弥补以保证严格的线性关系, 但在作数值模拟时, 已经破坏了原有的严格线性关系; 而且尾部的形状很难确定 (至少有向左偏、向右偏、垂直于 x 轴三种情况, 或这三种中有的情况不存在), 所以本文为了编程方便, 仅考虑了垂直于 x 轴情况, 结果相当好, 线性总误差 $\Delta d = 0.0022$ 。

有关“渐近达到完全线性”的讨论:

我们将给出同时适用于问题 1 和问题 2 的方案二。

首先, 我们沿着水平方向对圆进行均匀的 $2n$ 等分, 可以得到如下的图形, 这里我们用 $n=4$ 进行演示 (分割 4 等分后, 上下顶球冠被截掉):

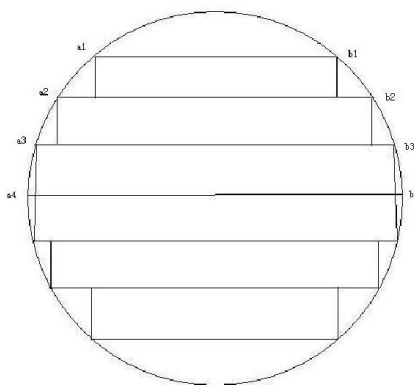


图 1.8 沿垂直方向对圆进行均匀的 $2n$ 等分

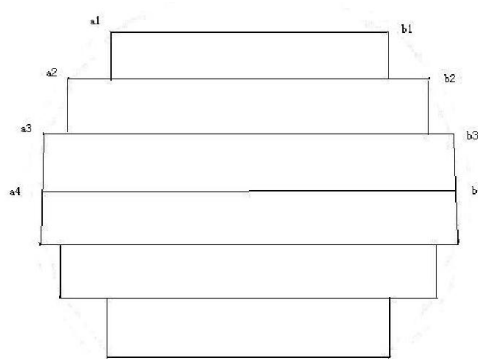


图 1.9 简化的外筒形状

引理 1 如果外筒的形状为图 1.9 所示的图形，可以设计出内孔形状，使过流面积 $g(c)$ 完全线性增长。在图 1.9 中用 l_1 表示线段 a_1b_1 的长度， l_2 表示线段 a_2b_2 的长度， l_3 表示线段 a_3b_3 的长度， l_4 表示线段 a_4b_4 的长度，则所设计的内孔形状的总长度

$$\text{length} = \frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 + \frac{l_4}{2}。$$

注：因为这里图 1.9 是沿着水平方向对单位圆进行 $2n$ 等分得到的(图 1.9 中 $n=4$)，所以

$$\text{易求 } l_k = 2\sqrt{1 - (1 - \frac{k}{n})^2}, \quad k=1,2,\dots,n。$$

证明：我们直接给出所设计的内孔形状。因为图 1.9 关于线段 a_4b_4 对称，所以为了方便，我们只对线段 a_4b_4 上面的部分给出相应的内孔形状。内孔形状的下半部分和上半部分是对称的。

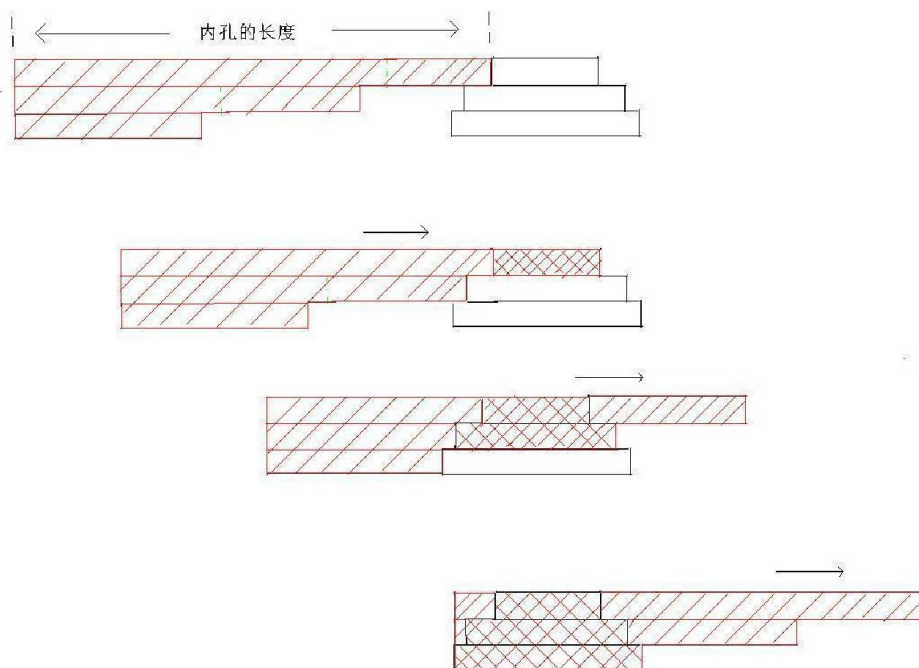


图 1.10 斜线表示我们所设计的内孔形状，叉线表示内孔与外孔的相交区域，

由图 1.10 可以很清楚地看出，这种情况下的相交区域的面积是线性增长的。并且容易求出我们所设计的内孔形状的总长度为 $\text{length} = \frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 + \frac{l_4}{2}$ 。

注：对于 $n=4$ 的情形，可以推广到 n 为任意一个整数，此时，所设计的内孔形状的长度为 $\text{length} = \frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 + \dots + l_{n-2} + l_{n-1} + \frac{l_n}{2}$ ，引理 1 证毕。

引理 2 图 1.9 与单位圆的面积差 $s \leq \frac{4}{n}$ 。

证明：考虑 $n=4$ ，图 1.9 与单位圆的面积差 s 就是下图中阴影部分的面积，

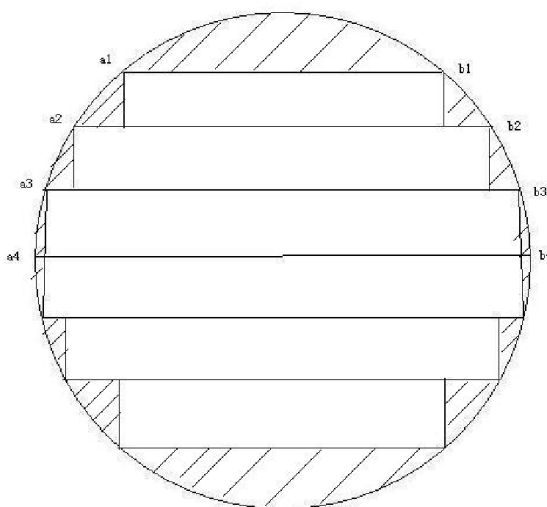


图 1.11 等分圆的面积

将图 1.11 中的阴影部分移到一起，有

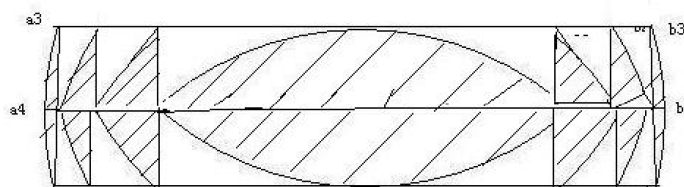


图 1.12 等分后圆中阴影部分面积和

所以有阴影部分面积 $s \leq \frac{4}{n}$ 。

注：对于 $n=4$ 的情形，可以推广到 n 为任意一个整数，此时，当 n 无限增大时，面积差 s 将变得任意小。引理 2 证毕。

由引理 1、引理 2 很容易给出如下定理：存在某内孔形状使得该形状与单位圆的相交面积渐近达到完全线性。

定理 1.2 任给一个非常小的正数 ε ，都存在图形 M 和一个线性函数 q ，使得图形 M 和单位圆的相交面积与 q 的误差小于 ε 。

证明：沿着水平方向对圆进行均匀的 $2n$ 等分，可以得到类似图 1.9 的图形，称为矩形

块。对于该矩形块，利用引理 1，可以设计出类似图 1.10 中用斜线表示出来的内孔形状，记为图形 M，易知，图形 M 与该矩形块的相交面积是旋转角度 x 的线性函数，记为函数 $q(x)$ 。实际上，图形 M 是与单位圆相交的，图形 M 和单位圆的相交面积可以看成是旋转角度 x 的函数，记为 $p(x)$ 。则误差的上界为 $\max \{ \|p(x)-q(x)\| \}$ (可以取 2-范数)，它小于单位圆与矩形块的面积之差，由引理 2 得，单位圆与矩形块的面积之差 $s \leq \frac{4}{n}$ ，所以只需取 $n = \lceil \frac{4}{\varepsilon} \rceil + 1$ ，就可以满足误差小于 ε 。

最后，我们给出此方案（方案二）的大致形状：

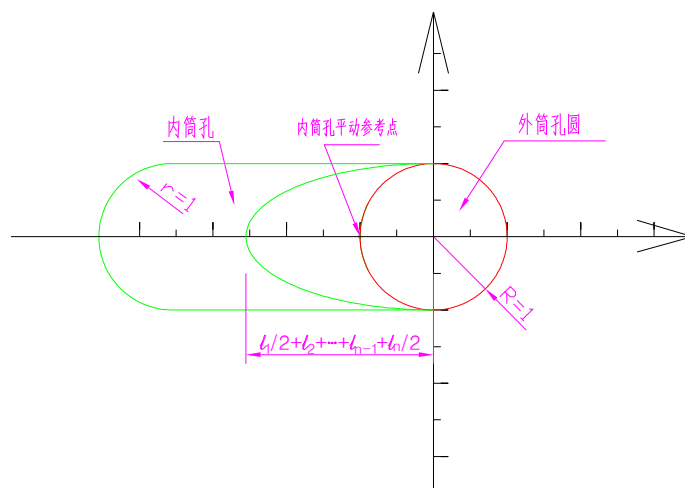


图 1.13 方案二的大致内孔形状

此形状有个缺陷： $\text{length} = \frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 + \dots + l_{n-2} + l_{n-1} + \frac{l_n}{2}$ 随着 $n \rightarrow \infty$ ， $\text{length} \rightarrow \infty$ ，

所以，尽管完全线性 100% 达到 (Δd^* 最小，接近 0)， ρ 100% 达到， $2/c$ (见下面问题 2) 也 100% 达到，且三者同时达到 100%，但是圆筒的展开图，即矩形的长不会无穷大。所以，在实际操作中，可以控制此方案内孔的长度来满足不同的要求，当然完全线性 (Δd^* 有所增加)、 ρ 、 $2/c$ 、都会有不同程度的变化。但这并不影响本方案的优越性。

问题 2 实际上，固井机向孔壁喷射水泥砂浆时经常采用的“过流面积”是在一个稍小的范围内，被称为主要工作区，它是“最大范围”中的一段。因此，在维修固井机内筒时，比较令人满意的内筒孔形状应该使主要工作区中所对应的旋转角度的线性区间尽量长（至少达“最大范围”区间长度的 75% 以上），而且主要工作区的最大“过流面积”尽量大（至少要达到外筒孔面积的 85% 以上），并且使“过流面积”和内筒的旋转角度之间的“线性关系”尽量地好。请按此要求设计内筒孔的形状。

解答：

一、模型的建立

目标函数为：

$$\begin{cases} \min_f \|g(c) - kc - b\| = \min_f \left\| \int_{y_1}^{y_2} [f(y) + c - h(y)] dy - kc - b \right\|, \\ \max_c g(c), \\ \min_c c, \end{cases} \quad c \geq 0, \quad 0 \leq g(c) \leq \pi, \quad (2.1)$$

(2.1) 式为多目标规划，根据题意，我们可以减少目标函数的个数：

$$\begin{aligned} \min_f \|g(c) - kc - b\| &= \min_f \left\| \int_{y_1}^{y_2} [f(y) + c - h(y)] dy - kc - b \right\|, \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2/c \geq 75\% & c \geq 0 \\ \pi \geq g(c) \geq \pi * 1^2 * 85\% = 0.85\pi \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

注意：(2.2) 式与 (2.1) 式并不等价，为了问题的简化，可用 (2.2) 式近似代替 (2.1) 式。

二、模型的解答

仍然采用方案一，形状大体相同，尺寸有所不同。有如下几个结果：

(1) 图 1.5 所示，几条曲线中，在 $x=1$ 处，线性关系都达到 100%，但当 $m=0.707$ 时，S 的利用率 $\rho = 2.78/\pi * 100\% \approx 88.5\%$ 达到最大(见表 2.1)。所以，我们只要考虑 $m=0.707$ 和 $m=0.46$ 这两条曲线即可（因为 $m=0.46$ 曲线的线性总误差 Δd 最小）。

表 2.1 不同 m 值时的流量特性对比

序号	m	ρ (等于在 $x=1$ 处的纵坐标/ π)	$2/c$ (对应的旋转角度的线性区间百分比)
1	0.707	88.5%	70.9%
2	0.6	76.4%	62.5%
3	0.46	58.6%	56.3%
4	0.4	51.0%	54.6%
5	0.3	38.2%	52.5%

(2) 因为题目要求 $\rho \geq 0.85$ ，我们只要保证在 $[0.85, 1]$ 区间内，固定 ρ 值，使得 Δd^* 最小即可。计算结果如下：

表 2.2 不同 S 利用率时的线性总误差对比

序号	S 的利用率 ρ	$m=0.46$ 线性总误差 Δd^*	$m=0.707$ 线性总误差 Δd^*
1	85%	$5 * 10^{-4}$	$0.67 * 10^{-4}$
2	88.5%	$7.3 * 10^{-4}$	$1.1 * 10^{-4}$
3	90%	$8.3 * 10^{-4}$	$6.7 * 10^{-4}$
4	90.2%	$8.01 * 10^{-4}$	$8.04 * 10^{-4}$
5	95%	0.0012	0.017
6	100%	0.0022	0.1825

注：这里的线性总误差 Δd^* 随着 ρ 的变化而变化，不是单指 $\rho = 100\%$ 时的总误差 Δd 。

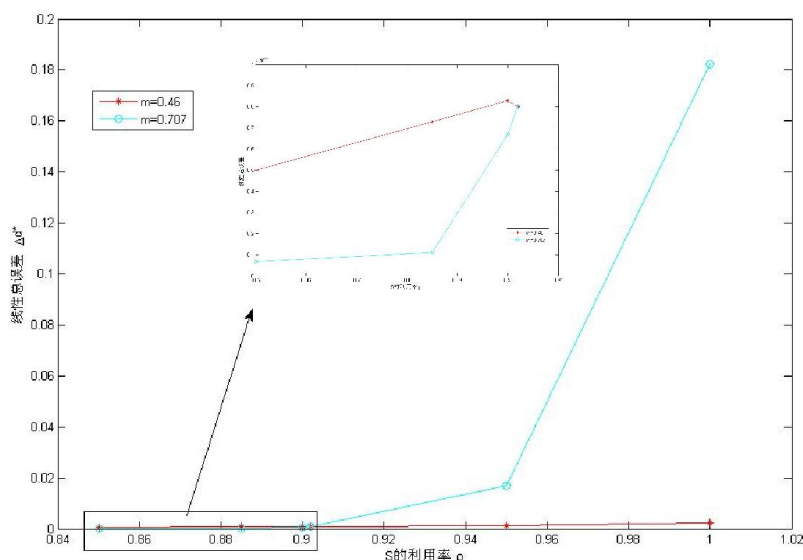


图 2.1 不同 S 利用率时的线性总误差

图 2.1 是表 2.2 的直观表示。

从图 2.1 或表 2.2 中可以看出，如果要求线性总误差 Δd^* 达到最小，S 的利用率 ρ 达到不同的要求（如 90%），可以采用不同的曲线方程（对应 $m=0.707$ ）来确定内孔形状：当 $85\% \leq \rho \leq 90.2\%$ 时，取 $m=0.46$ ；当 $90.2\% \leq \rho \leq 100\%$ 时，取 $m=0.707$ 。

（3）考虑对应的旋转角度的线性区间百分比（ $2/c$ ）（见表 2.1 第四列）。题目要求 $2/c > 75\%$ ，我们的方案（见图 1.3）求得的 $2/c$ 最大达到 70.9%（当 $m=0.707$ 时），所以图 1.3 的方案需要进一步改进。但 $m=0.46$ 这条曲线无论曲线的整体还是它的一部分线性拟合的程度相当好（ $\rho = 100\%$ 时线性总误差只有 0.0022），所以我们完全可以用此曲线来代替问题二需要的

方案（可以求得满足任意条件，如给定 ρ 、 $c/2$ 或 Δd 任意值的方案）。

（4）上述（3）中提到图 1.3 的方案需要进一步改进，在有关“完全线性区间 II”的讨论中，提到尾部的形状至少有向左偏、向右偏、垂直于 x 轴三种情况（或这三种中有的情况不存在），可以通过计算机对另外两种情况进行模拟，注意，一旦模拟，就已经破坏了严格的线性关系。所以理论上讲，另外两种能够满足 $2/c > 75\%$ 的情况可能存在，但线性总误差 Δd^* 可能不会比原来的方案好。

问题 3: 如果固井机的外筒孔也发生了程度较轻的磨损，怎么办？

解答:

1. 如果固井机的外筒孔发生磨损的情况是关于外筒孔圆心是各向同性的，那就等价于外筒孔的半径变大，对于这种情况分析方法与问题 1、2 相同。

2. 如果固井机的外筒孔发生磨损的情况是不规则的，我们总可以用很多个形状不同的矩

形去填充它，让外筒孔剩余部分的面积充分小；接下来，针对由这些不同形状的矩形组成的图形，我们只要设计一个内筒孔的形状，让内筒孔和它的过流面积的增长成线性就可以了。

模型的评价:

(1) 方案一的评价。

对于问题 1，方案一（见图 1.6， $m=0.46$ ）在 $\rho = 100\%$ 时线性总误差 Δd 很小，只有 0.0022；对于问题 2，总的来说，方案一（见图 1.3， $m=0.46$ 或 0.707）可以较好地满足要求，但如果要严格地考虑对应的旋转角度的线性区间尽量长（至少达“最大范围”区间长度的 75% 以上这个条件，我们的模型需要进一步改进：尾部应向后偏（或锯齿形状），如图 4.1，此模型我们没有给出具体的数值模拟。

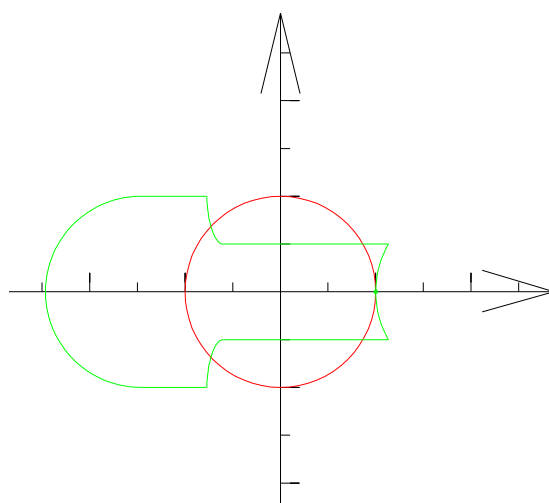


图 4.1 方案一的改进

(2) 方案二的评价。

无论对于问题 1 还是问题 2，方案二（见图 1.13）是从渐进（极限）的角度来考虑的，并且适用于任何给定条件（如完全线性 100% 达到， ρ 100% 达到， $2/c$ 也 100% 达到，且三者同时达到 100%），此方案应该是理想方案。在这里我们仅给出了理论上的证明，并没有作数值模拟。

(3) 从方案一和方案二可以看出，可能还存在其他较优的可行方案。

参考文献:

- [1] 王根平. 调节阀的流量特性校正(J). 计量与测试技术. 2004. No. 4
- [2] 瓦·马留诺尤, 英·波斯希纳·调节阀 (M). 北京: 机械工业出版社, 1985.
- [3] Process control equipment fisher power seminar in china , August , 1985.
- [4] Fisher control CO , L TD. 控制阀手册 (Z) . 1993.
- [5] 金家东, 王建辉. 调节阀通流面积设计(J). 阀门. 2000 年第 5 期.
- [6] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解(M). 北京: 清华大学出版社, 2004.

附录：

程序一：

画出拟合度最好的图形的面积增长图 此时取 $m=0.46$

程序名：bestarea.m

```
clc
clear
%%%%%%%%%%%%% 当 m=0.46 时误差最小， 为 0.0022
m=0.46;
k=1;
for step=-1:0.01:(1-2*(1-sqrt(1-m^2)))
    ss(k)=(step+1)*2*m;
    k=k+1;
end
index=-1:0.01:(1-2*(1-sqrt(1-m^2)));
plot(index,ss(1:k-1));
hold on;
disp('图中的第一个点的坐标为');
disp([index(end),ss(k-1)]);

plot(index(end),ss(k-1),'r*');
text(0.7,1.5,'(0.77, 1.63)');
text(0.7,1.35,'达到总面积的 52% (=1.63/3.14)');
text(0.3,1,'\leftarrow 完全线性区间 I')
%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%

f1=@(x) 4*(m-sqrt(1-x.^2));
f2=@(x) 2*(sqrt(1-x.^2));
kstart=k;

for step = (1-2*(1-sqrt(1-m^2))):0.01:1
    t=step-(1-2*(1-sqrt(1-m^2)));
    s1=quad(f1,sqrt(1-m^2),sqrt(1-m^2)+t/2);
    s2=quad(f2,-sqrt(1-m^2),-sqrt(1-m^2)+t)-2*t*m;
    ss(k)=(step+1)*2*m -s1+s2;
    k=k+1;
end

index=(1-2*(1-sqrt(1-m^2))):0.01:1;
plot(index,ss(kstart:end),'r');
disp('图中的第二个点的坐标为');
```

```

disp([index(end),ss(k-1) ])
plot(index(end),ss(k-1),'r*')
text(1.05,1.8,'(1,1.84)')
text(1.8,2.3,'\leftarrow 完全线性区间 II')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
kstart=k;
for step=1:0.01:( 1+4*sqrt(1-m^2)-2 )
    t= 2*(1-sqrt(1-m^2) )+step-1;
    s2=quad(f2,-sqrt(1-m^2),-sqrt(1-m^2)+t)-2*t*m;
    ss(k)=4*m*sqrt(1-m*m)+2*( asin(m)-m*sqrt(1-m*m) ) +s2;
    k=k+1;
end

index=1:0.01:( 1+4*sqrt(1-m^2)-2 );
plot(index,ss(kstart:end),'r');
disp('图中的第三个点的坐标为');
disp([index(end),ss(end) ])

plot(index(end),ss(end),'r*');
text(2.55,3,'(2.55,3.14) ');
text(2.3,2.85,' 达到总面积 100%');

xlabel(' 所设计图形与 x 轴的最右边交点的位置，(设圆的半径为 1),m=0.46,线性总误差
为=0.0022');
ylabel(' 覆盖面积 ');

```

程序二：

画出完全线性面积最大的图形的面积增长图 此时取 $m=0.707$
程序名：lineararea.m

```

clc
clear

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m=sqrt(2)/2;
k=1;
for step=-1:0.01:(1- 2*(1-sqrt(1-m^2) ) )
    ss(k)=(step+1)*2*m ;
    k=k+1 ;

```

```

end
index=-1:0.01:(1-2*(1-sqrt(1-m^2)));
plot(index,ss(1:k-1));
hold on;
disp('图中的第一个点的坐标为');
disp([ index(end),ss(k-1) ])
plot(index(end),ss(k-1),'r*');
text(0.5,2,'(0.41, 1.994)');
text(0.4,1.85,' 达到总面积的 63% (=1.994/3.14)');
text(-0.2,1,'\leftarrow 完全线性区间 I')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
f1=@(x) 4*(m-sqrt(1-x.^2));
f2=@(x) 2*(sqrt(1-x.^2));
kstart=k;
for step = (1-2*(1-sqrt(1-m^2))):0.01:1
    t=step-(1-2*(1-sqrt(1-m^2)));
    s1=quad(f1,sqrt(1-m^2),sqrt(1-m^2)+t/2);
    s2=quad(f2,-sqrt(1-m^2),-sqrt(1-m^2)+t)-2*t*m;
    ss(k)=(step+1)*2*m -s1+s2;
    k=k+1;
end

index=(1-2*(1-sqrt(1-m^2))):0.01:1;
plot(index,ss(kstart:end),'r');
disp('图中的第二个点的坐标为');
disp([ index(end),ss(k-1) ]);
plot(index(end),ss(k-1),'r*')
text(1.05,2.7,'(0.994,2.78)')
text(1.,2.55,' 达到总面积的 88.5%(=2.78/3.14)')
text(0.8,2.3,'\leftarrow 完全线性区间 II')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
kstart=k;
for step=1:0.01:(1+4*sqrt(1-m^2)-2)
    t=2*(1-sqrt(1-m^2))+step-1;
    s2=quad(f2,-sqrt(1-m^2),-sqrt(1-m^2)+t)-2*t*m;
    ss(k)=4*m*sqrt(1-m*m)+2*(asin(m)-m*sqrt(1-m*m))+s2;
    k=k+1;
end

index=1:0.01:(1+4*sqrt(1-m^2)-2);
plot(index,ss(kstart:end),'g');
disp('图中的第三个点的坐标为');
disp([ index(end),ss(end) ]);

```

```

plot(index(end),ss(end),'r*');
text(1.6,3,'(1.82,3.14) ');
text(1.4,2.85,' 达到总面积 100%');

```

```

xlabel(' 所设计图形与 x 轴的最右边交点的位置，(设圆的半径为 1),m=0.7071,线性总误差为=0.1825');
ylabel(' 覆盖面积 ');

```

程序三：

寻找使误差最小的 m 值。

程序名：Search.m

```
clc
```

```
clear
```

```
maxtotale=1;
```

```
bestm=-1;
```

```
for m=0.01:0.01:0.8
```

```
    totale=0.0;
```

```
    k=1;
```

```
    for step=-1:0.01:(1- 2*(1-sqrt(1-m^2)  ))
```

```
        ss(k)=(step+1)*2*m ;
```

```
        k=k+1 ;
```

```
    end
```

```
    index=-1:0.01:(1- 2*(1-sqrt(1-m^2)  ));
```

```
    for i=1:1:k-1
```

```
        totale=totale+(ss(i)- (index(i)+1 )*2*m )^2*0.01;
```

```
    end
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
f1=@(x) 4*(m-sqrt(1-x.^2));
```

```
f2=@(x) 2*( sqrt(1-x.^2) );
```

```
kstart=k;
```

```
for step = (1- 2*(1-sqrt(1-m^2)  )):0.01:1
```

```
    t=step- (1- 2*(1-sqrt(1-m^2)  ));
```

```
    s1=quad(f1,sqrt(1-m^2),sqrt(1-m^2)+t/2);
```

```
    s2=quad(f2,-sqrt(1-m^2),-sqrt(1-m^2)+t)-2*t*m;
```

```
    ss(k)=(step+1)*2*m -s1+s2;
```

```
    k=k+1;
```

```
end
```

```
index=(1- 2*(1-sqrt(1-m^2)  )):0.01:1;
```



```

num=1;
for i=kstart:1: k-1
    totale=totale+(ss(i)- (index(num)+1 )^2*m )^2*0.01;
    num=num+1;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

kstart=k;
for step=1:0.01:( 1+4*sqrt(1-m^2)-2 )
    t= 2*(1-sqrt(1-m^2) )+step-1;
    s2=quad(f2,-sqrt(1-m^2),-sqrt(1-m^2)+t)-2*t*m;
    ss(k)= 4*m*sqrt(1-m*m) +2*( asin(m)-m*sqrt(1-m*m) ) +s2;
    k=k+1;
end
index=1:0.01:( 1+4*sqrt(1-m^2)-2 );
num=1;
for i=kstart:1: k-1
    totale=totale+(ss(i)- (index(num)+1 )^2*m )^2*0.01;
    num=num+1;
end
if totale<maxtotale
    maxtotale=totale;
    bestm=m;
end

end

disp('best value of m');
disp(bestm)
disp('the error is:');
disp( maxtotale );

```