

全国第四届研究生数学建模竞赛



题号 B

题 目 六自由度机械臂路径优化设计

摘 要：

本文探讨了六自由度机械臂从一点到另一点沿任意轨迹移动路径（称为 *PTP* 问题）、一点到另一点沿着给定轨迹移动路径（称为 *CP* 问题）以及无碰撞路径规划问题（称为 *HP* 问题），并讨论了设计参数对机械臂灵活性和使用范围的影响，同时给出了建议。

问题一：（1）*PTP* 问题。首先确定初始姿态 Φ_0 （文中图 1），其次采用 D-H 最优组合法和倒序寻优法两种算法求指令序列（算法框图见文中）。D-H 最优组合法是根据初始姿态 Φ_0 确定机械臂各连杆坐标系，由 D-H 参数法计算各连杆参数和连杆变换矩阵，利用反变换法（代数法）求运动学反解即得到目标位置姿态。最后以指令序列最少和柔顺性最优为目标建立优化模型，从而求得最佳指令序列。倒序寻优法是先确定 *D* 点末端位置，求得各关节增量，最后以指令序列最少和柔顺性最优为目标建立优化模型，从而求得最佳指令序列。

（2）*CP* 问题。假定机械臂初始姿态为 Φ_0 ，曲线离散化，每个离散点作为末端位置，采用 D-H 最优组合法得到每个离散点的末端姿态，计算所有相邻两点间的增量指令，若满足增量要求，则记录该指令序列，否则在相邻两点间进行插值，重复以上步骤，直至满足增量精度要求为止（算法框图见文中）。

（3）*HP* 问题。采用最小包容长方体法和障碍物膨胀来简化障碍物的形状，考虑先让指尖沿着起点和终点的连线轨迹运动，当它遇到障碍物的阻挡时，就设法让其避让，然后从新的起点再径直向目标点前进，不断重复上述过程，直至达到目标点（算法框图见文中）。

问题二：将问题二中的实例应用到问题一中的相对应的算法中，部分结果见附录。

问题三：讨论了设计参数对机械臂的灵活性和适用性的影响，结果表明：机械臂的 $|BC| \approx |CD|$ ， $|DE| \approx 0.39|BC|$ ，且第三关节转角范围大于 210° 时，机构有好的灵活性。

文中还对问题一所设计的算法进行了分析和检验，讨论了算法的适用范围、计算效率以及误差，误差降低至 0.0013%，说明了算法的有效性。

参赛密码
(由组委会填写)

参赛队号 1107502

参赛学校 三峡大学

参赛队员姓名 晏嘉陵、张利平、陈路

一、 问题重述

某型号机器人（图示和简化图略）一共有 6 个自由度，分别由六个旋转轴（关节）实现，使机器人的末端可以灵活地在三维空间中运动。机器人关于六个自由度的每一个组合 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ ，表示机械臂的一个姿态，显然每个姿态确定顶端指尖的空间位置 $X: f(\Theta) \rightarrow X$ 。假定机器人控制系统只能够接收改变各个关节的姿态的关于连杆角度的增量指令（机器指令） $P = \Delta\Theta = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6)$ ，使得指尖（指尖具有夹工具、焊接、拧螺丝等多种功能，不过在这里不要求考虑这方面的控制细节）移动到空间点 X' ，其中各个增量 $\Delta\theta_i$ 只能取到 -2, -1.9, -1.8, ..., 1.8, 1.9, 2 这 41 个离散值（即精度为 0.1° ，绝对值不超过 2° ）。通过一系列的指令序列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 可以将指尖依次到达位置 X_0, X_1, \dots, X_n ，则称 X_0, X_1, \dots, X_n 为从指尖初始位置 X_0 到达目标位置 X_n 的一条路径（运动轨迹）。根据具体的目标和约束条件计算出合理、便捷、有效的指令序列是机器人控制中的一个重要问题。假设机器人的初始位置在 y - z 平面上，约定直角坐标系的原点设在图示的 A 点， z 轴取为 AB 方向， x 轴垂直纸面而 y 轴则在基座所固定的水平台面上。

1. 根据市场需求，机械臂制造厂打算为他们的产品研发一个软件系统，能够直接将用户的运动命令自动转换成机器指令序列。即为这类机器人设计一个通用的算法，用来计算执行下面指定动作所要求的指令序列，并要求对你们算法的适用范围、计算效率以及你们的近似算法所造成的误差和增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差大小进行讨论（不考虑其他原因造成的误差）：

①. 已知初始姿态 Φ_0 和一个可达目标点的空间位置 (O_x, O_y, O_z) ，计算指尖到达目标点的指令序列。

②. 要求指尖沿着预先指定的一条空间曲线 $x = x(s), y = y(s), z = z(s), a \leq s \leq b$ 移动，计算满足要求的指令序列。

③. 在第①个问题中，假设在初始位置与目标位置之间的区域中有若干个已知大小、形状、方向和位置的障碍物，要求机械臂在运动中始终不能与障碍物相碰，否则会损坏机器。这个问题称机械臂避碰问题，要求机械臂末端在误差范围内到达目标点并且整个机械臂不碰到障碍物（机械臂连杆的粗细自己设定）。

2. 应用你的算法就下面具体的数据给出计算结果，并将计算结果以三组六维的指令序列（每行 6 个数据）形式存放在 Excel 文件里，文件名定为 answer1.xls, answer2.xls 和 answer3.xls。

假设在机械臂的旁边有一个待加工的中空圆台形工件，上部开口。工件高 180mm，下底外半径 168mm，上底外半径 96mm，壁厚 8mm。竖立地固定在 x - y 平面的操作台上，底部的中心在 (210, 0, 0)。

①. 要求机械臂（指尖）从初始位置移动到工具箱所在位置的 (20, -200, 120) 处，以夹取要用的工具。

②. 如果圆台形工件外表面与平面 $x = 2z$ 的交线是一条裂纹需要焊接，请你给出机械臂指尖绕这条曲线一周的指令序列。

③. 有一项任务是在工件内壁点焊四个小零件，它们在内表面上的位置到 x - y 平面的投影为 (320, -104)、(120, 106)、(190, -125) 和 (255, 88)。要求机械臂从圆台的上部开口处

伸进去到达这些点进行加工，为简捷起见，不妨不计焊条等的长度，只考虑指尖的轨迹。

3. 制造厂家希望通过修改各条连杆的相对长度以及各关节最大旋转角度等设计参数提高机械臂的灵活性和适用范围。请根据你们的计算模型给他们提供合理的建议。

二、 模型假设

- (1) 关节转角按照顺时针旋转为负，按照逆时针旋转为正；
- (2) 针对问题 1. ①和 1. ②，假设机械臂连杆是一条直线，不考虑机械臂连杆的粗细；
- (3) 不考虑每个关节的大小，即认为每个关节是一个点；
- (4) 机械臂的运动轨迹是指机械臂指尖到达的位置，其它杆件只要满足转角范围即可，不考虑由于机械臂指尖安装工具而引起的距离变化；
- (5) 在焊接等实际加工过程中，机械臂指尖应该与加工曲线有一定的缝隙，本文不考虑该缝隙，即认定加工曲线即为机械臂指尖的运动轨迹；
- (6) 机械臂的六个关节在转角范围内是可以自由转动的，但是基坐标点 A 是固定的，即不可沿 x - y 平面移动；
- (7) 第二、三、五自由度的旋转轴是有一定长度的，本文不考虑三个旋转轴的长度；
- (8) 速度对指尖轨迹的影响忽略不计。

三、 问题分析

机械臂可以看作一个开式刚性运动杆链，它是由一系列连杆通过转动或移动关节联结而成的。开链的一端固定在地面基座上（假设 6），另一端是自由的，用于安装工具。由假设（4），可认定机械臂末端不安装工具，仅靠指尖来完成各种轨迹运动。关节可在各自转角范围内变化，各连杆之间发生相对运动，从而使机械臂指尖到达所需的位置。由题意可知，机械臂指尖的运动轨迹可分为三类：一是从一点到另一点的移动，至于途中所运动的轨迹是不重要的，称这类问题为 *PTP* 问题；二是机械臂指尖严格按照某一条曲线运动，称这类问题为 *CP* 问题；三是从一点到另一点的轨迹要避开障碍物的运动，称这类为 *HP* 问题。

根据题意，第六个转角控制手指的转动，用于操纵工具，它的转角对指尖的位置没有影响，故在指尖轨迹设计中不予考虑该转角。利用参数表，初始位置 α_i 是指 θ 的初始值，其中关节 1,4,6 的初始值就是使机器人的各个连杆在 y - z 平面, 关节 1 的初始值就是使连杆 BC 、 CD 在 y - z 平面内, 关节 4 初始值就是使机器人的连杆 DE 在连杆 AB 、 BC 、 CD 所形成的平面内，从而可确定机械臂的初始姿态。

PTP 问题，即机械臂指尖从初始姿态 Φ_0 到达空间位置 (O_x, O_y, O_z) 的指令序列生成问题。先从末端位置入手，采用某种方法确定机械臂到达末端位置的姿态，然后以最优柔顺性^[1]（即相邻两连杆的关节角变化柔顺、规划轨迹平滑且稳定，用各关节角的改变量来反映和衡量）为准则确定最优指令序列。考虑两种思路：（1）*D-H* 最优组合法：首先，根据机械人的初始姿态，确定初始姿态各关节的坐标系；其次，采用 *D-H* 方法^[2]计算连杆坐标系规定的连杆参数以及相邻连杆变换矩阵，并根据初始姿态验证齐次变换矩阵的正确性；第三，根据已知的末端连杆相对于参考坐标系的位姿，推导出各关节变量，末端各关节变量与初始各关节变量之差即为连杆角度的增量；最后，以柔顺性最优为准则，确定指令序列。（2）倒序寻优法：通过观察，无论关节如何运动，关节点 A 、 B 、 C 、 D 始终在一个平面内且 A 、 B 两点始终不变，要使指尖从初始姿态移动到末端位置，由于连杆 DE 的长度固定不变，则 D 点一定在以末端位置为圆心， $|DE|$ 为半径的球表面上。因此，假设 D

是圆球表面上任意一点，在各连杆长度已知的情况下，可唯一确定 C 点坐标，到此，各关节坐标都为已知量，从而可求得各关节的转动角度，即连杆角度的增量，为了确保从初始位置到末端位置的中间位置的变换数目最少（即指令序列数目最少），即取可行记录集合中末端姿态的最大角度增量的最小对应的末端姿态，因此可建立以最少指令序列数为目标的模型，最后以柔顺性最优建立模型，求得最优指令序列组合。

CP 问题，要求指尖沿着预先指定的一条空间曲线 $x = x(s), y = y(s), z = z(s), a \leq s \leq b$ 移动的指令序列问题。直接让指尖沿着曲线移动比较困难，受 PTP 问题启发，将曲线离散化，将 CP 问题转化为 PTP 问题，仍旧把初始姿态定义为 Φ_0 ，各离散点为末端位置，采用 PTP 问题方法求得各离散点的姿态。为了避免组合带来的误差，保证机械臂指尖轨迹的精度，如果任意相邻离散点的指令序列大于 2，则在此离散点间进行插值，重复以上动作，直至所有的都满足指令系列小于等于 2。

HP 问题，是机械臂在运动中始终不能与障碍物相碰问题。即在 PTP 问题中增加障碍物，使得指尖必须避开障碍物运动的路径规划问题。考虑先让指尖沿着起点和终点的连线轨迹运动，当它遇到障碍物的阻挡时，就设法让其避让，然后从新的起点再径直向目标点前进，不断重复上述过程，直至达到目标点，可以看出，从每个新的起点径直向目标点前进，这样走距离最短，当然这是指从每个新起点到终点间的距离最短。实际过程中，障碍物的形状可能会各种各样，过于复杂会提高算法的复杂性，采用最小包容长方体对障碍物进行简化^[3]。

机械臂设计参数变化对机械灵活性和适用范围的影响，对于机械臂而言，如果杆件的长度变化对机械灵活性有很大影响，如果 DE 长度设计得较短，对于相同的 $|BC|$ 和 $|CD|$ ，则其灵活的工作空间就会变大，当 $|BC|$ 和 $|CD|$ 相等时，适用范围也较大。

四、 符号说明

x_i, y_i, z_i ：第 i 关节处的连杆坐标系；

θ_i ：表示第 i 关节的转角值；

$\Delta\theta_{j1}$ ：第 j 个与第 $j-1$ 指令序列的第一个关节转角增量值；

$\bar{P}_j = (\Delta\theta_{j1}, \Delta\theta_{j2}, \Delta\theta_{j3}, \Delta\theta_{j4}, \Delta\theta_{j5}, \Delta\theta_{j6})$ ：第 j 个指令序列；

X_1, X_2, \dots, X_n ：离散点序列；

约定： $i=1, 2, \dots, 6$

五、 模型的建立与算法设计

根据题意，机器人的六个自由度的每一个组合 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ 表示机械臂的一个姿态，显然每个姿态确定顶端指尖的空间位置 X ： $f(\Theta) \rightarrow X$ 。从空间点 X 到 X' 通过连杆角度的增量指令（机器指令） $P = \Delta\Theta = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6)$ 移动，其中各个增

量 $\Delta\theta_i$ 只能取到 -2, -1.9, -1.8, ..., 1.8, 1.9, 2 这 41 个离散值 (即精度为 0.1° , 绝对值不超过 2°)。通过一系列的指令序列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 可以将指尖依次到达位置 X_0, X_1, \dots, X_n , 则称 X_0, X_1, \dots, X_n 为从指尖初始位置 X_0 到达目标位置 X_n 的一条路径 (运动轨迹)。从空间点 X_0 到 X_n 一定存在一组连杆角度的增量指令, 若该增量指令超出允许范围, 则必须将该增量指令划分为多个符合条件的指令序列, 划分方式由无数种, 如何确定最优指令序列是本问题的关键, 本文考虑采用柔顺性衡量指令序列的优劣性。

5.1 初始姿态 Φ_0 的确定

由假设 (1) 可知, 关节转角按照逆时针旋转选择为正, 按顺时针旋转为负。约定机器人的初始位置是在一个平面上的 (y - z 平面), 直角坐标系的原点设在 A 点, z 轴取为 AB 方向, x 轴垂直纸面而 y 轴则在基座所固定的水平面上。初始位置 α_i 是指 θ 的初始值, 其中关节 1, 4, 6 的初始值就是使机器人的各个连杆在 y - z 平面, 关节 1 的初始值就是使连杆 BC 等在 y - z 平面的角度, 关节 4 初始值就是使机器人的连杆 DE 在连杆 AB 、 BC 、 CD 所生成的平面内, 从而可确定机械臂的初始姿态, 如图 1 所示。

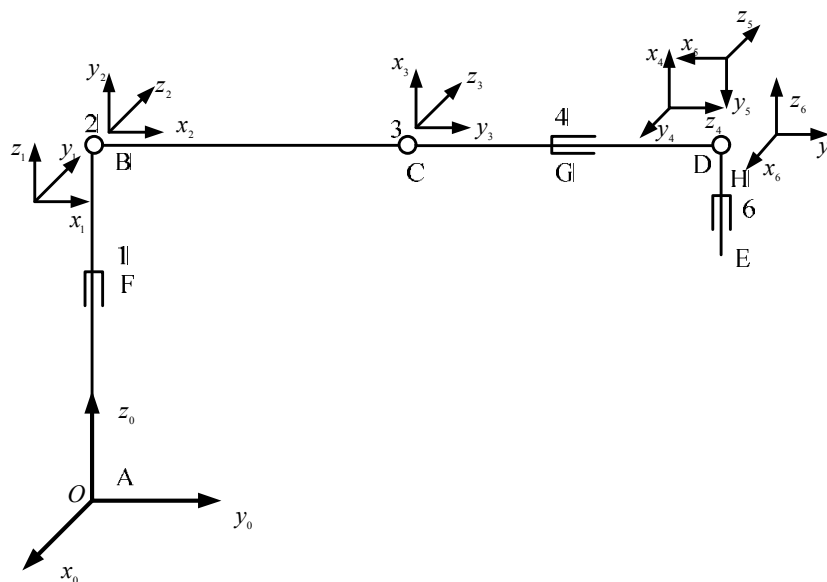


图 1 机械臂的初始姿态图

5.2 PTP 问题

PTP 问题即机械臂指尖从初始姿态 Φ_0 到达空间位置 (O_x, O_y, O_z) 的指令序列生成问题。此问题可以分为两步, 首先根据初始姿态和末端位置确定各关节变量的转角值, 然后根据各关节变量的变化值确定最优指令序列。

5.2.1 D-H 最优组合法

(1) 根据机械臂的初始姿态, 确定初始姿态各关节的坐标系

连杆的特征是由连杆两端的关节轴线规定的。以连杆 $i-1$ 为例, 其两端的两个关节的轴线分别为 $i-1$ 和 i , 两个轴线的公法线长度和夹角分别为 a_{i-1} 和 α_{i-1} , 这样, a_{i-1} 和 α_{i-1} 完全定义了连杆 $i-1$ 的特征, a_{i-1} 和 α_{i-1} 分别称为连杆 $i-1$ 的长度和扭角。相邻两个连杆 i 和 $i-1$ 之间由关节 i 连接, 所以关节轴线 i 有两条公法线与它垂直, 每条公法线代表一个连杆, 两条公法线 a_{i-1} 和 a_i 之间的距离 d_i 称为两条连杆之间的偏置, a_{i-1} 和 a_i 之间的夹角 θ_i 称为两

个连杆之间的关节角。每个连杆由四个参数 a_{i-1} 、 α_{i-1} 、 d_i 、 θ_i 来描述， a_{i-1} 和 α_{i-1} 描述连杆本身的特征； d_i 和 θ_i 描述连杆 $i-1$ 和连杆 i 之间的关系。对于移动关节 i ， d_i 是关节变量；对于转动关节 i ， θ_i 是关节变量。这种描述机构运动的方法称为 D-H 方法。

连杆坐标系按照下面的原则规定：固接在连杆 $i-1$ 上的坐标系 $\{i-1\}$ 的 z 轴 z_{i-1} 与关节轴线 $i-1$ 共线，方向任意；坐标系 $\{i-1\}$ 的 x 轴 x_{i-1} 与连杆 $i-1$ 的公垂线重合，指向从关节 $i-1$ 到关节 i ；坐标系 $\{i-1\}$ 的 y 轴 y_{i-1} 按右手法则规定。坐标系的原点取 x_{i-1} 与 z_{i-1} 的交点。

(2) 采用 D-H 方法^[2] 计算连杆坐标系规定的连杆参数以及相邻连杆变换矩阵，并根据初始姿态验证齐次变换矩阵的正确性

根据所设定的连杆坐标系，相应的连杆参数的含义定义如下：

a_{i-1} ：从 z_{i-1} 到 z_i 沿着 x_{i-1} 测量的距离；

α_{i-1} ：从 z_{i-1} 到 z_i 绕 x_{i-1} 旋转的角度；

d_i ：从 x_{i-1} 到 x_i 沿着 z_i 测量的距离；

θ_i ：从 x_{i-1} 到 x_i 绕 z_i 旋转的角度。

(a_{i-1} 非负， α_{i-1} 、 d_i 、 θ_i 的值可正、可负)

连杆坐标系 $\{i\}$ 相对于 $\{i+1\}$ 的齐次变换 ${}^{i-1}T_i$ 称为连杆变换，它与 a_{i-1} 、 α_{i-1} 、 d_i 、 θ_i 这四个连杆参数有关。可以把它分解为坐标系 $\{i\}$ 的四个基本子变换问题，每个子变换只依赖于一个连杆参数，这四个子变换是：

① $Rot(x, \alpha_{i-1})$ ：绕 x_{i-1} 转动 α_{i-1} 角；② $Trans(x, a_{i-1})$ ：沿 x_{i-1} 移动 a_{i-1} ；

③ $Rot(z, \theta_i)$ ：绕 z_i 转动 θ_i 角；④ $Trans(z, d_i)$ ：沿 z_i 移动 d_i ；

$$\text{则： } {}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_{i-1}) Trans(x, a_{i-1}) Rot(z, \theta_i) Trans(z, d_i) \quad (5-1)$$

由式 (5-1) 右边的四个子变换，得到连杆变换的通式：

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \sin(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i\sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & d_i\cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

根据齐次变换矩阵的乘法，得

$${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \quad (n=\text{关节的个数}) \quad (5-3)$$

0T_n 称为机械臂变换矩阵，它是 n 个关节变量 q_1, q_2, \dots, q_n 的函数，表示末端连杆坐标系 $\{n\}$ 相对于基坐标系 $\{0\}$ 的描述

$${}^0T_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \cdots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (5-4)$$

式 (5-4) 就是运动学方程的一般表达式。

根据各个连杆的坐标系，如图 1 所示，可得连杆参数如表 1。

表 1 机械臂的连杆参数

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i	关节变量范围	关节转角范围	连杆参数
1	0	0	d_1	90°	$-180^\circ \sim +180^\circ$	$-270^\circ \sim +90^\circ$	$a_3=255\text{mm}$
2	0	90°	0	0	$-125^\circ \sim +125^\circ$	$-125^\circ \sim +125^\circ$	$d_1=140\text{mm}$
3	a_3	0	0	90°	$-138^\circ \sim +138^\circ$	$-228^\circ \sim +48^\circ$	$d_2=255\text{mm}$
4	0	90°	d_2	0	$-270^\circ \sim +270^\circ$	$-270^\circ \sim +270^\circ$	
5	0	-90°	0	-90°	$-133.5^\circ \sim +120^\circ$	$-43.5^\circ \sim +210^\circ$	
6	0	90°	0	90°	$-270^\circ \sim +270^\circ$	$-360^\circ \sim +180^\circ$	

根据连杆变换通式，得到相邻连杆变换矩阵：

$$\begin{aligned}
 {}^0_1T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2_3T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 255 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3_4T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 255 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4_5T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_5) & -\cos(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^5_6T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

将上面得到的连杆变换矩阵相乘，得到机械臂变换矩阵 0_6T

$${}^0_6T = {}^0_1T(\theta_1){}^1_2T(\theta_2){}^2_3T(\theta_3){}^3_4T(\theta_4){}^4_5T(\theta_5){}^5_6T(\theta_6) \quad (5-5)$$

$$\text{其中： } {}^0_6T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 表示机械臂指尖末端位姿的矩阵，其中，9 各元素满足}$$

下列正交条件： $n \cdot n = o \cdot o = a \cdot a = 1$, $n \cdot o = o \cdot a = a \cdot n = 0$, $p = (p_x, p_y, p_z)^T$ 是机械臂指尖的位置矢量。

为了检验所得结果 0_6T 的正确性，把图 1 所示的位置的关节变量代入 0_6T 的表达式种，计算结果得：

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 510 \\ 0 & 0 & -1 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这与图 1 所示的情况完全一致，齐次变换矩阵 0_6T 是正确地。

(3) 根据已知的末端连杆相对于参考坐标系的位姿，推导出各关节变量的过程，末端各关节变量与初始各关节变量之差即为连杆角度的增量

以下采用反变换法求机械臂的运动反解

1) 关节角 θ_1

用逆变换 ${}^0_1T^{-1}(\theta_1)$ 左乘式 (5-5) 的两端则有：

$${}^0_1T^{-1}(\theta_1){}^0_6T = {}^1_2T(\theta_2){}^2_3T(\theta_3){}^3_4T(\theta_4){}^4_5T(\theta_5){}^5_6T(\theta_6)$$

令得到的矩阵方程两端的元素(2,4)对应相等得，

$$-p_x \sin \theta_1 + p_y \cos \theta_1 = 0$$

$$\text{所以, } \theta_1 = \arctan \frac{p_y}{p_x} \quad (5-6)$$

2) 关节角 θ_2

用逆变换 ${}^0_2T^{-1}(\theta_1, \theta_2)$ 左乘式(5-5)两边，得：

$${}^0_2T^{-1}(\theta_1, \theta_2){}^0_6T = {}^2_3T(\theta_3){}^3_4T(\theta_4){}^4_5T(\theta_5){}^5_6T(\theta_6)$$

令矩阵方程两端的元素(1,4)和(2,4)分别对应相等，得：

$$\cos \theta_2 \times (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) + p_z \sin \theta_2 - d_1 \sin \theta_2 = d_4 \sin \theta_3 + a_3 \quad (5-7)$$

$$\sin \theta_2 \times (p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1) - p_z \cos \theta_2 + d_1 \cos \theta_2 = d_4 \cos \theta_3 \quad (5-8)$$

将式(5-6)中的 a_3 项移动到等式左边并令 $p_x \cos \theta_1 + p_y \sin \theta_1 = k_1$ ，式(5-7)、(5-8)的平方

$$\text{和, 得: } (p_z - d_1) \sin \theta_2 + k_1 \cos \theta_2 = \frac{a_3^2 + d_1^2 + p_z^2 + k_1^2 - d_4^2 - 2d_1 p_z}{2a_3}$$

$$\text{再令: } k_2 = \frac{a_3^2 + d_1^2 + p_z^2 + k_1^2 - d_4^2 - 2d_1 p_z}{2a_3};$$

利用三角代换，令： $k_1 = \rho_2 \sin \varphi_2$ ， $p_z - d_1 = \rho_2 \cos \varphi_2$ ，其中

$$\rho_2 = \sqrt{k_1^2 + (p_z - d_1)^2}, \quad \varphi_2 = \arctan \frac{k_1}{p_z - d_1}。$$

$$\text{则, } \sin(\theta_2 + \varphi_2) = \frac{k_2}{\rho_2}, \quad \cos(\theta_2 + \varphi_2) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}; \quad \theta_2 + \varphi_2 = \arctan \frac{\frac{k_2}{\rho_2}}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}}。$$

$$\text{所以, } \theta_2 = \arctan \frac{\frac{k_2}{\rho_2}}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{\rho_2}\right)^2}} - \arctan \frac{k_1}{p_z - d_1} \quad (5-9)$$

其中正负号表示分别对应 θ_2 的两种可能解。

3) 关节角 θ_3

将(5-7)式中的 a_3 移动到等式左边, 由于已知 $d_4 \neq 0$ 。则将得到的等式和(5-8)式相除得:

$$\theta_3 = \arctan \frac{k_1 \cos \theta_2 + (p_z - d_1) \sin \theta_2 - a_3}{k_1 \sin \theta_2 - (p_z - d_1) \cos \theta_2} - \arctan \frac{k_1}{p_z - d_1} \quad (5-10)$$

4) 关节角 θ_4

用逆变换 ${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 左乘式(5-5)两边, 得:

$${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) {}^0T = {}^3T({}^4T({}^5T(\theta_5) {}^6T(\theta_6))$$

令矩阵方程两端的(1,3)、(2,3)和(3,3)元素分别对应相等, 得:

$$a_x \cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_z \sin(\theta_2 + \theta_3) = \cos \theta_4 \sin \theta_5 \quad (5-11)$$

$$a_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - a_z \cos(\theta_2 + \theta_3) = \cos \theta_5 \quad (5-12)$$

$$a_x \sin \theta_1 - a_y \cos \theta_1 = \sin \theta_4 \sin \theta_5 \quad (5-13)$$

只要 $\sin \theta_5 \neq 0$, 亦即 $\theta_5 \neq 0$ 或 180° (而题中要求 $\theta_5 \in [-133.5, 120]$, 故排除 180°), 便可求出 θ_4 。将式(5-11)与(5-13)两边分别对应相除得,

$$\theta_4 = \arctan \frac{a_x \sin \theta_1 - a_y \cos \theta_1}{a_x \cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_z \sin(\theta_2 + \theta_3)} \quad (5-14)$$

当 $\theta_5 = 0$ 时, 即 θ_4 与 θ_6 的转动效果相同, 故可任取 θ_4 , 再算出相应的 θ_6 。

5) 关节角 θ_5

用逆变换 ${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ 左乘式(5-5)两边, 得:

$${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4){}_6^0T = {}_5^4T(\theta_5){}_6^5T(\theta_6)$$

因式 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 均已解出，令矩阵方程两端的(1,3)和(3,3)元素分别对应相等，得：

$$a_x(\cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) + a_y(\sin \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 + \cos \theta_1 \sin \theta_4) + a_z \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 = \sin \theta_5 \quad (5-15)$$

$$a_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - a_z \cos(\theta_2 + \theta_3) = \cos \theta_5 \quad (5-16)$$

将以上两式相除即可解得 θ_5 的封闭解，

$$\theta_5 = \arctan \frac{(a_x \cos \theta_1 + a_y \sin \theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4 + (a_x \sin \theta_1 + a_y \cos \theta_1) \sin \theta_4 + a_z \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_4}{a_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - a_z \cos(\theta_2 + \theta_3)} \quad (5-17)$$

6) 关节角 θ_6

令求关节角 θ_4 时的矩阵方程 ${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3){}_6^0T = {}_4^3T(\theta_4){}_5^4T(\theta_5){}_6^5T(\theta_6)$ 两端的(2,1)和(2,2)元素分别对应相等，得：

$$-n_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - n_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + n_z \cos(\theta_2 + \theta_3) = \sin \theta_5 \cos \theta_6 \quad (5-18)$$

$$-o_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - o_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + o_z \cos(\theta_2 + \theta_3) = -\cos \theta_5 \sin \theta_6 \quad (5-19)$$

同 θ_4 ，只要 $\sin \theta_5 \neq 0$ ，两式相除，得

$$\theta_6 = \arctan \frac{-o_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - o_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + o_z \cos(\theta_2 + \theta_3)}{n_x \cos \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + n_y \sin \theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - n_z \cos(\theta_2 + \theta_3)}$$

又由于连杆末端指尖处的位姿矢量已经给定，即 $\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为已知，则可根据

上述公式反向求出各关节变量 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 的值。

纵上所述，求得的末端姿态值有多组解，为了确保从初始位置到末端位置的中间位置的变换数目最少（即指令序列数目最少），故取所有末端姿态最大角度增量的最小对应的

末端姿态解，假设最佳末端姿态中最大角度增量为 θ_{\max} ，则最少指令序列为 $\left\lceil \frac{\theta_{\max}}{2} \right\rceil$ 。

(4) 以柔顺性^[1]最优为准则，确定指令序列。

柔顺性是指相邻两连杆的关节角变化柔顺、规划轨迹平滑且稳定，用各关节角的改变量来放映和衡量，假设从初始位置到末端位置的指令序列为 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ ，其中

$\bar{p}_j = [\Delta\theta_{j1}, \Delta\theta_{j2}, \Delta\theta_{j3}, \Delta\theta_{j4}, \Delta\theta_{j5}]$ ，初始姿态 $\Phi_0 = [90^\circ \quad 0 \quad 90^\circ \quad 0 \quad -90^\circ \quad 90^\circ]$ 。

则最优柔顺性准则为： $\min \sum_{j=1}^n \|P_j\|^2$

约束条件为： $|\Delta\theta_{j1}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j2}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j3}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j4}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j5}| \leq 2$ ，且精度为 0.1°

$$\left(90^\circ + \sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j1} \right) \in [-180^\circ, +180^\circ] \quad jj=1,2,\dots,n$$

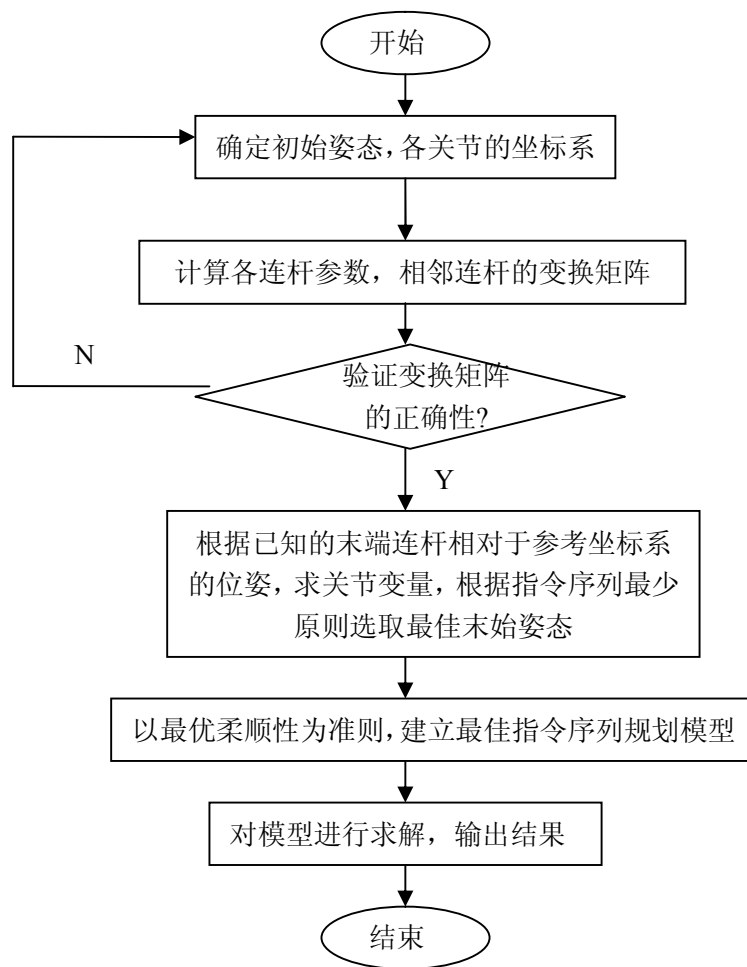
$$\sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j2} \in [-125^\circ, +125^\circ] \quad jj=1,2,\dots,n$$

$$\left(90^\circ + \sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j3} \right) \in [-138^\circ, +138^\circ] \quad jj=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j4} \in [-270^\circ, +270^\circ] \quad jj=1,2,\dots,n$$

$$\left(-90^\circ + \sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j5} \right) \in [-133.5^\circ, +120^\circ] \quad jj=1,2,\dots,n$$

5.2.2 D-H 最优组合法算法框图



5.2.3 倒序寻优法

通过观察可发现, 无论关节如何运动, 关节点 A 、 B 、 C 、 D 四点始终在一个平面内且 A 、 B 两点始终不变, 要使指尖从初始姿态移动到末端位置, 由于连杆 DE 的长度固定不变, 则当 E 点到达末端位置时, D 点一定在以末端位置为圆心, $|DE|$ 为半径的圆球表面上, 如图 2 所示。因此, 假设 D 点是圆球表面上任意一点, 在各连杆长度已知的情况下, 可唯一确定 C 点坐标, 则可求得该状态时刻的姿态, 从而求得指令序列。

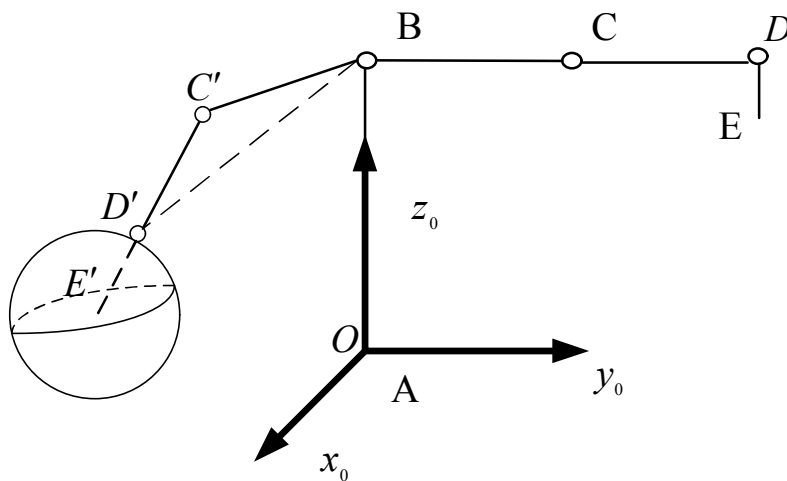


图 2 初始状态与末端状态图

(1) 确定 D 点

假设 D 点坐标为 (x_D, y_D, z_D) ，由于当机械臂指尖 E 点到达末端位置（坐标为 (O_x, O_y, O_z) ）时， D 点一定在以末端位置为圆心， $|DE|$ 为半径的圆球表面上。

以末端位置为圆心， $|DE|$ 为半径的圆球的方程为：

$$(x - O_x)^2 + (y - O_y)^2 + (z - O_z)^2 = |DE|^2$$

则 D 点坐标一定满足方程： $(x_D - O_x)^2 + (y_D - O_y)^2 + (z_D - O_z)^2 = |DE|^2$

(2) 确定各关节角度

由图 1 可知， B 点坐标为 $(0, 0, |AB|)$ ，在 A, B, D 三点组成的平面内， B 点和 D 点坐标已知可求得 $|BD|$ 长度： $|BD| = \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + (|AB| - z_D)^2}$

A, B, C, D, E, F, G, H 为原始坐标系中初态各关节的对应点，考虑到在旋转的过程中 A, B, C, D 始终在同一个平面内，而且 A, B 点位置不变化，定义 C', D', E' 为原始坐标系中的末态对应点， C'', E'' 分别为 C', E' 在 $z = |AB|$ ， $y = |BD|$ 平面的投影。任意三点均能确定一个平面，则有：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arccos \frac{|BC''|^2 + |BC|^2 - |CC''|^2}{2|BC''||BC|}; & \theta_2 &= 180 - \arccos \frac{|AB|^2 + |BC'|^2 - |AC'|^2}{2|AB||BC'|} \\ \theta_3 &= 180 - \arccos \frac{|BC'|^2 + |C'D'|^2 - |BD|^2}{2|BC'||C'D'|}; & \theta_4 &= \arccos \frac{|DE|^2 + |DE''|^2 - |EE''|^2}{2|DE||DE''|} \\ \theta_5 &= 180 - \arccos \frac{|D'E'|^2 + |C'D'|^2 - |C'E'|^2}{2|D'E'||C'D'|} \end{aligned}$$

由于在变换的过程中连杆长度保持不变，故有 $|BC'| = |BC|, |C'D'| = |CD|$ 。

(3) 建立以指令序列最小为目标的模型

假设 $\bar{Q}_k = (\psi_{k1} \ \psi_{k2} \ \psi_{k3} \ \psi_{k4} \ \psi_{k5})$ ，表示当 D 点是圆球上一点对应的各关节角度值，

则该向量需要的指令序列为 $\left\lceil \frac{\max \bar{Q}_k}{2} \right\rceil$ 。初始位置 $\phi_0 = (0 \ -90^\circ \ 0 \ 0 \ -90^\circ)$ 。

$$\text{目标函数: } \min_k \left\lceil \frac{\max \bar{Q}_k}{2} \right\rceil$$

约束条件： $(x_D - O_x)^2 + (y_D - O_y)^2 + (z_D - O_z)^2 = |DE|^2$

$$\psi_{k1} \in [-180^\circ, +180^\circ] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$(-90 + \psi_{k2}) \in [-125^\circ, +125^\circ] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\psi_{k3} \in [-138^\circ, +138^\circ] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\psi_{k4} \in [-270^\circ, +270^\circ] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$(-90 + \psi_{k5}) \in [-133.5^\circ, +120^\circ] \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{记 } n = \min_k \left\lceil \frac{\max_k \bar{Q}_k}{2} \right\rceil$$

(4) 以柔顺性^[1]最优为准则，确定指令序列

柔顺性是指相邻两连杆的关节角变化柔顺、规划轨迹平滑且稳定，用各关节角的变化量来放映和衡量，假设从初始位置到末端位置的指令序列为 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ ，其中

$$\bar{p}_j = [\Delta\theta_{j1}, \Delta\theta_{j2}, \Delta\theta_{j3}, \Delta\theta_{j4}, \Delta\theta_{j5}], \text{ 初始姿态 } \Phi_0 = [90^\circ \quad 0 \quad 90^\circ \quad 0 \quad -90^\circ \quad 90^\circ]。$$

$$\text{则最优柔顺性准则为: } \min \sum_{j=1}^n \|P_j\|^2$$

约束条件为: $|\Delta\theta_{j1}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j2}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j3}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j4}| \leq 2 \quad |\Delta\theta_{j5}| \leq 2$ ，且精度为 0.1°

$$\left(90^\circ + \sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j1} \right) \in [-180^\circ, +180^\circ] \quad jj = 1, 2, \dots, n$$

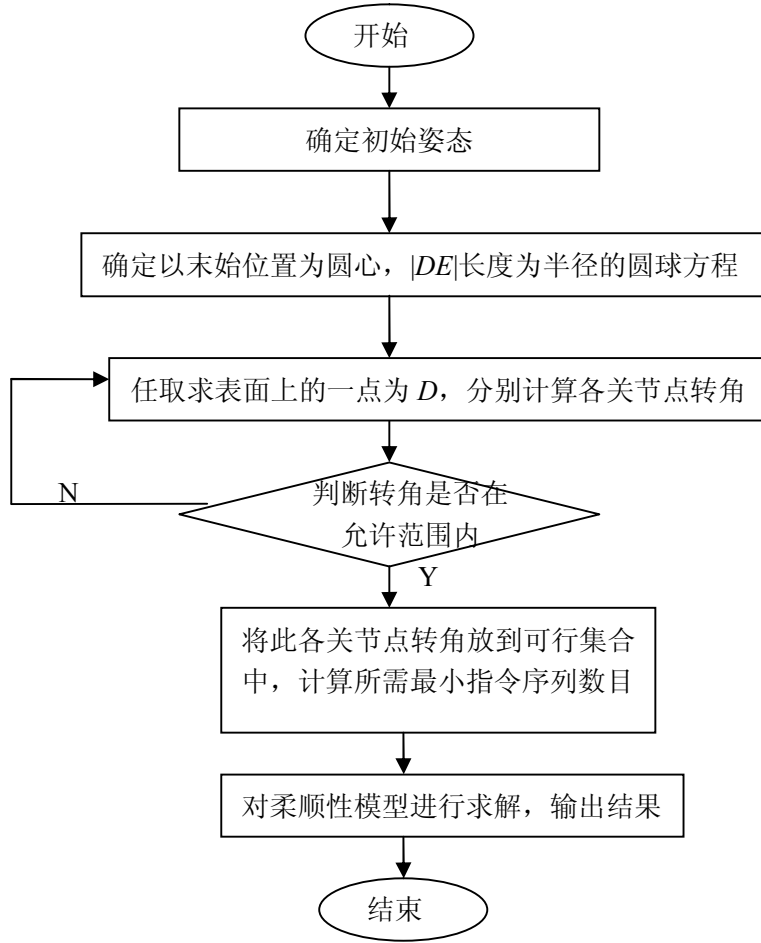
$$\sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j2} \in [-125^\circ, +125^\circ] \quad jj = 1, 2, \dots, n$$

$$\left(90^\circ + \sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j3} \right) \in [-138^\circ, +138^\circ] \quad jj = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j4} \in [-270^\circ, +270^\circ] \quad jj = 1, 2, \dots, n$$

$$\left(-90^\circ + \sum_{j=1}^{jj} \Delta\theta_{j5} \right) \in [-133.5^\circ, +120^\circ] \quad jj = 1, 2, \dots, n$$

5.2.4 倒序寻优法算法框图



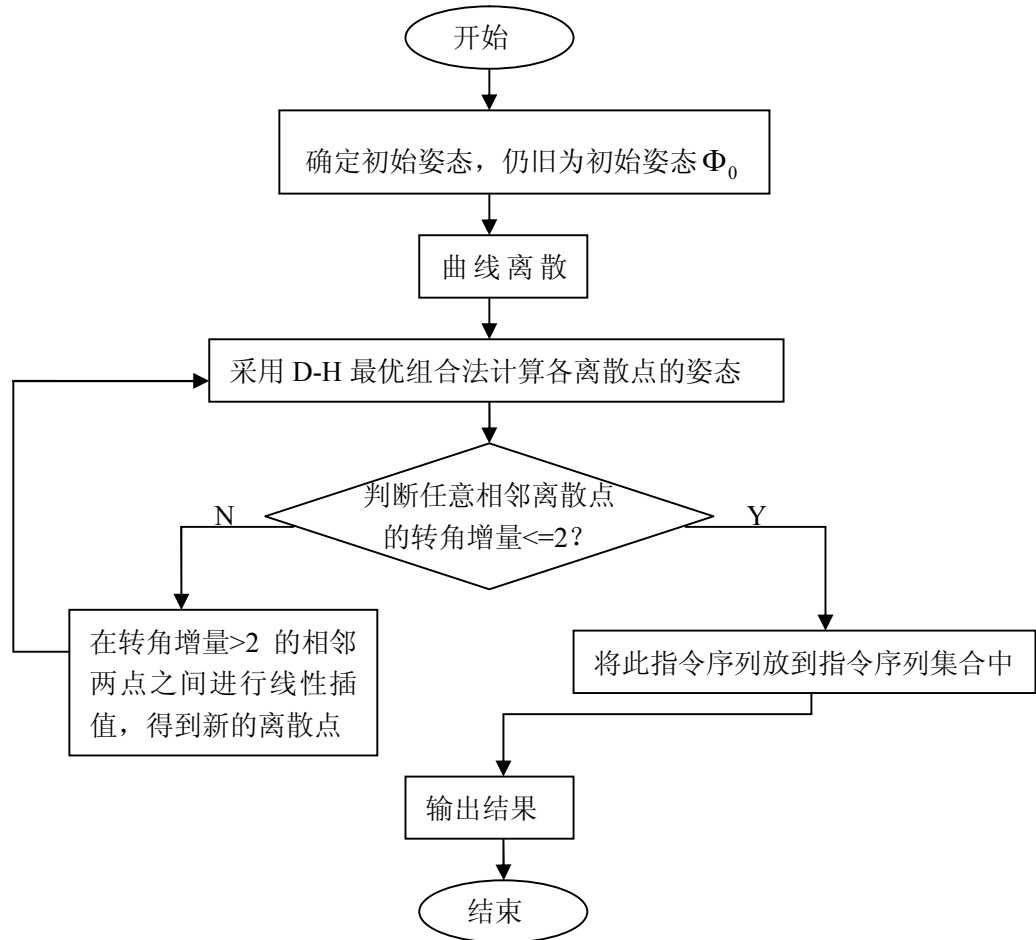
5.3 CP 问题

CP 问题，要求指尖沿着预先指定的一条空间曲线 $x = x(s), y = y(s), z = z(s), a \leq s \leq b$ 移动的指令序列问题。直接让指尖沿着曲线移动比较困难，受 PTP 问题启发，将曲线离散化，将 CP 问题转化为 PTP 问题，仍旧把初始姿态定义为 Φ_0 ，各离散点为末端位置，采用 PTP 问题方法求得各离散点的姿态。定义离散点序列为 X_1, X_2, \dots, X_n ，离散点 X_i 的姿态为 $(\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}, \theta_{j4}, \theta_{j5})$ ，该姿态必须满足各关节的变量范围，则从离散点 X_i 到 X_{i+1} 的指令序列应该为：

$$\bar{P}_j = ((\theta_{j+1,1} - \theta_{j1}), (\theta_{j+1,2} - \theta_{j2}), (\theta_{j+1,3} - \theta_{j3}), (\theta_{j+1,4} - \theta_{j4}), (\theta_{j+1,5} - \theta_{j5}))$$

如果 \bar{P}_j 中某一个值大于 2，则说明要重新对该指令系列进行组合，为了避免组合带来的误差，保证机械臂指尖轨迹的精度，本文采用在离散点 X_i 与 X_{i+1} 之间进行线性插值，得到更多的离散点，从而重复以上操作，直至得到满意的结果。

算法框图如下：



5.4 HP 问题

HP 问题，也是机械臂在运动中始终不能与障碍物相碰问题。即在 PTP 问题中增加障碍物，使得指尖必须避开障碍物的运动路径规划问题。考虑先让指尖沿着起点和终点的连线轨迹运动，当它遇到障碍物的阻挡时，就设法让其避让，然后从新的起点再径直向目标点前进，不断重复上述过程，直至达到目标点，可以看出，从每个新的起点径直向目标点前进，这样走距离最短，当然这是指从每个新起点到终点间的距离最短。

5.4.1 对障碍物的简化处理^[3]

实际作业环境中，障碍物的形状可能多种多样，本文拟采用最小包容长方体法。最小包容长方体法就是将整个障碍物包含于其内部的最小长方体，通常取长方体的每一边或面与某一坐标轴和坐标面平行。

由于机械臂连杆都是有一定直径的，不能把机械臂连杆仅仅看成直线，因此，本文将此直径添加到障碍的尺寸上，即障碍物膨胀。

经过具体分析发现，如果将有一定粗细的机械臂连杆直接与最小包容长方体作运动干涉检查，由于其间必然涉及机械臂连杆与长方体某一侧面所在平面的求交运算，将会在运算中带来一些麻烦。如图 3 所示，一般情况下，机械臂连杆与最小包容长方体的某一侧面不一定垂直，因而连杆与该侧面所在平面求交得到的截面就会是一个椭圆。为了判别连杆与长方体是否碰撞，首先要求出截交曲线，由于运动学反解得到的位置姿态可能会有很多，连杆与平面的夹角又千变万化，这样就会造成运算量相当庞大，为了能够减少运算时间，将机械臂连杆的直径因素转移到障碍物上，即将最小包容长方体“膨胀”，形成当量最小包容长方体，具体做法如图 4 所示。设机械臂连杆直径为 $2r$ ，则将最小包容长方体在

长、宽、高三个方向均增加 $2r$ ，这样长方体的六个侧面在正、负 x 、 y 、 z 共六个方向均向外“膨胀” r ，形成当量最小包容长方体，当量最小包容长方体的面、棱边、顶点与最小包容长方体相应面、棱、边、顶点间的距离分别为 r 、 $\sqrt{2}r$ 、 $3r$ 。所以当简化的刚性杆（无直径）恰好与长方体的某一侧面平行时，在刚性杆上增加半径 r ，使之成为又粗细的连杆与将长方体膨胀是等效的。因而，此时如果直径为 $2r$ 的机械臂连杆轴线与当量最小包容长方体的侧面不碰撞，则具有 $2r$ 直径的真实连杆就不会与最小包容长方体发生碰撞；当直径为 $2r$ 的机械臂连杆轴线不与当量最小包容长方体的棱边或顶点发生碰撞时，就更不会与最小包容长方体的棱边或顶点发生碰撞。

将最小包容长方体转化为当量最小包容长方体后，再对机械臂连杆进行碰撞检查时，只需考虑各连杆轴线的位姿就可以了，而不必考虑其直径，大大简化了运算过程。

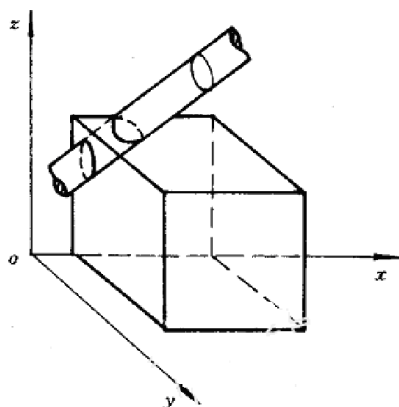


图3 机械臂连杆与最小包容长方体相交
(椭圆部分为截面)

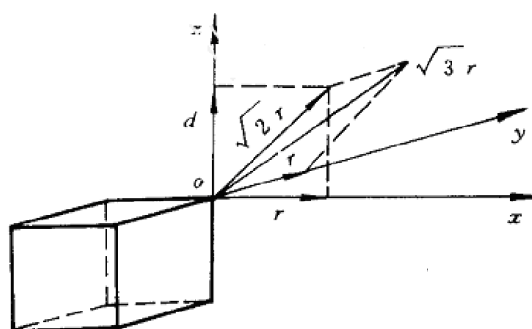


图4 最小包容体膨胀

5.4.2 碰撞判别

在机械臂连杆简化为一条刚性杆链，且直径因素转移到当量最小包容长方体中之后，机械臂与障碍物的碰撞问题就转化为各直线段（简化的机械臂连杆）与当量最小包容长方体之间是否相交的问题。本文采用将机械臂连杆与当量最小包容长方体的每一个侧面（有界平面）分别求交的方法来检查他们是否相交。直线段与平面求交是采用空间定比分弦法、如图5所示。

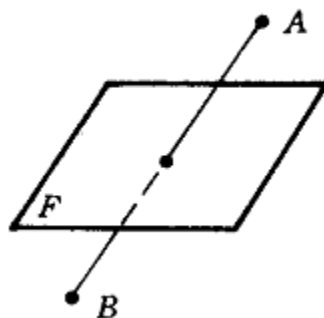


图5 直线段与有界平面求交点

平面 F ，有： $ax + by + cz + d = 0$

分别求出线段两端点到平面 F 的有向距离，即：

$$dis(x_i, y_i, z_i) = ax_i + by_i + cz_i + d \quad i = 1, 2$$

若线段的两端点到平面 F 的有向距离同号，则线段的两端点在平面 F 的同侧，线段与平面 F 无交点；否则，线段的两端点分别在平面 F 的两侧，设它对平面 F 的分弦比为 λ ，则：

$$\lambda = -\frac{dis1}{dis2} = -\frac{dis(x_1, y_1, z_1)}{dis(x_2, y_2, z_2)}$$

其中 (x_1, y_1, z_1) ， (x_2, y_2, z_2) 是直线段的两个端点坐标。根据定比分弦原理，直线段和平面 F 的交点坐标为：

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

这种算法要比求解直线方程与平面方程的联立方程组要快得多，且几何意义也十分明确。

由于当量最小包容长方体的侧面为有界平面，因此求出交点 (x, y, z) 之后，将 (x, y, z) 及侧面在平面 F 上的“边界”向某一坐标投影（究竟向哪个坐标面投影视平面 F 的法矢量而定），假定向 x - y 坐标面投影。以 $P(x, y)$ 为起点，在 x - y 坐标面内，沿与某一坐标轴平行的方向作一条射线 PP' ，若该射线与平面 F 上的边界投影有奇数个交点，则交点 (x, y, z) 在平面 F 上的有界区域内，即连杆与侧面相交；否则，连杆与侧面不相交。对于图 6 所示特殊情况，作如下处理：认为图 6 (a) 与侧面有一个交点，而图 6 (b) 没有交点。

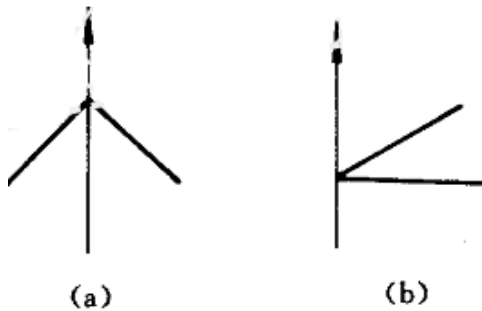


图 6 两种特殊情况

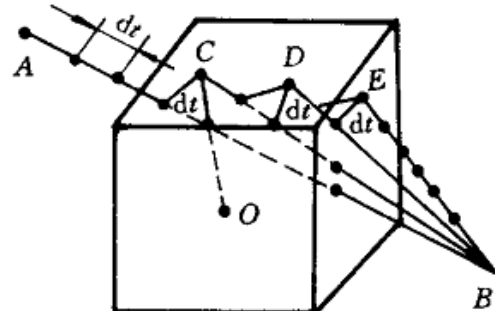


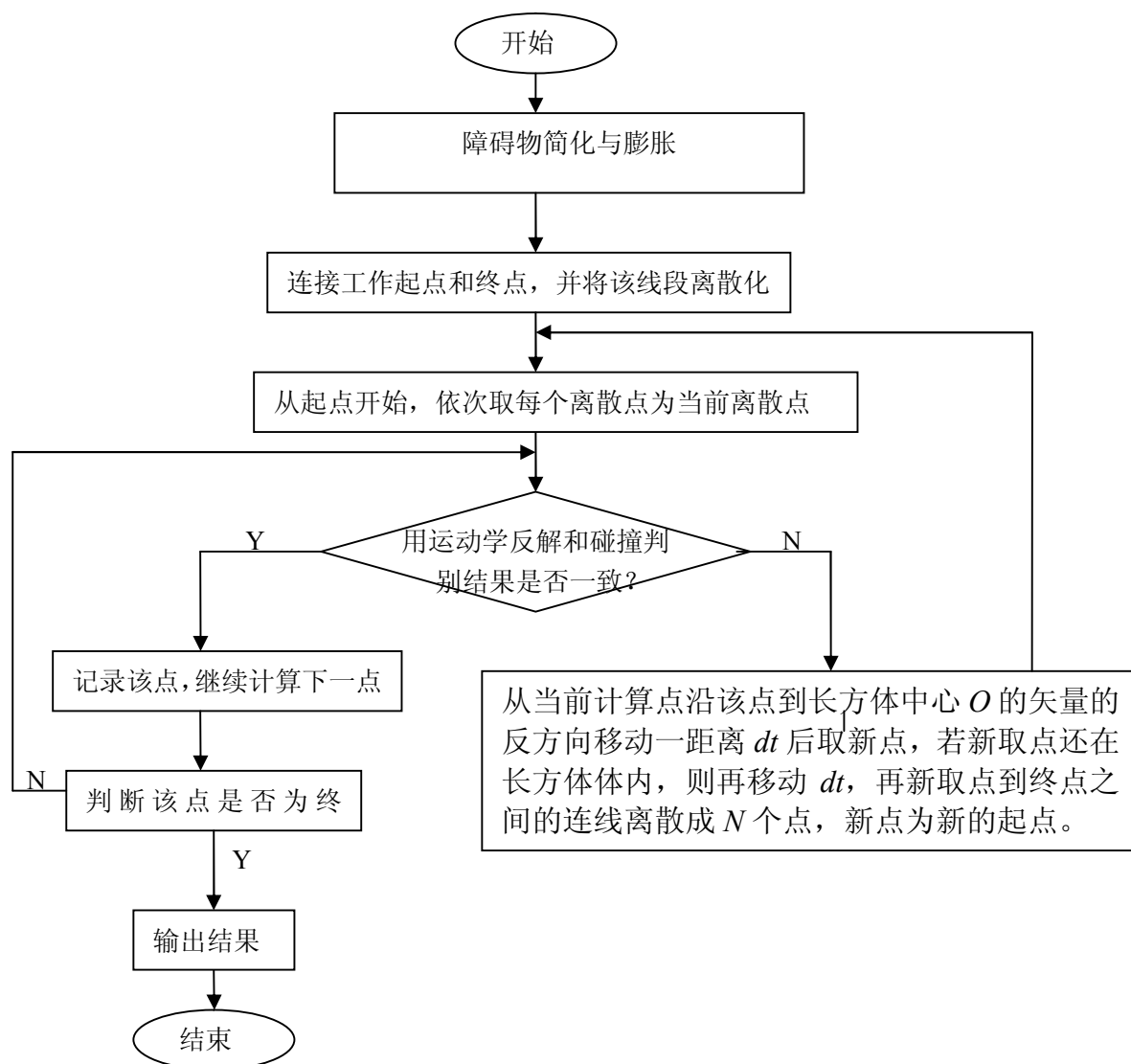
图 7 无碰轨迹的搜索

由运动学反解解出的位姿可能会有很多，将每一种位姿的各段连杆都分别用上面的方法与当量最小包容长方体的各侧面求交，若均无交点的，则该位姿为无碰位姿；否则该位姿将与障碍物发生碰撞。

5.4.3 无碰撞轨迹的搜索

如图 7 所示，首先将工作起点 A 到工作终点 B 之间的连线离散成 N 个点，设离散点的间距为 dt ，然后从起点 A 开始，依次取每个离散点作为当前工作点，进行运动学反解和碰撞判别的运算，如果运动学反解和碰撞判别的结果表面该点存在无碰位姿，则记录下该点，继续计算下一点。如果发现当前计算点处于当量最小包容长方体体内，则需修改搜索方向，具体做法：从当前计算点沿该点到长方体中心 O 的矢量的反方向移动一距离 dt 后取点 C ，若新取点还在长方体体内，则再移动 dt ，目的是将搜索点尽快移出障碍物，再将新取点 C 到终点 B 之间的连线离散成 N 个点，从 C 点开始依次取离散点作运动学反解和碰撞判别的运算，以此类推。离散点数 N 越大，则 dt 越小，曲线再转折处越光滑。

5.4.4 算法框图



六、 实例应用

6.1 PTP 问题的应用

本文采用机械臂（指尖）从初始位置（如图 1 所示）移动到工具箱的（20，-200，120）处，不考虑指尖轨迹与工具箱的碰撞问题。

采用 D-H 最优组合算法，直接将 $p_x = 20, p_y = -200, p_z = 120$ 代入式（5-6，5-9，5-10，5-14，5-17），可求得最佳转角向量为 $(-84.3^0, 61.0^0, -43.3^0, 0, -17.6^0)$ 。

然后利用柔顺性模型，解得最佳指令序列数为 88 个，具体指令序列值参见 answer1.xls，部分结果可参见附录 1。

6.2 CP 问题的应用

指尖轨迹沿着圆台形工件表面与平面 $x=2z$ 的交线，仍旧把初始姿态定义为 Φ_0 。

（1）确定该条曲线方程

圆台形工件的底部中心坐标、上底和下底外半径已知，则该圆台外表面看作是绕着轴线 $x=210$ 旋转的一个锥体表面的一部分，如图 8 所示。

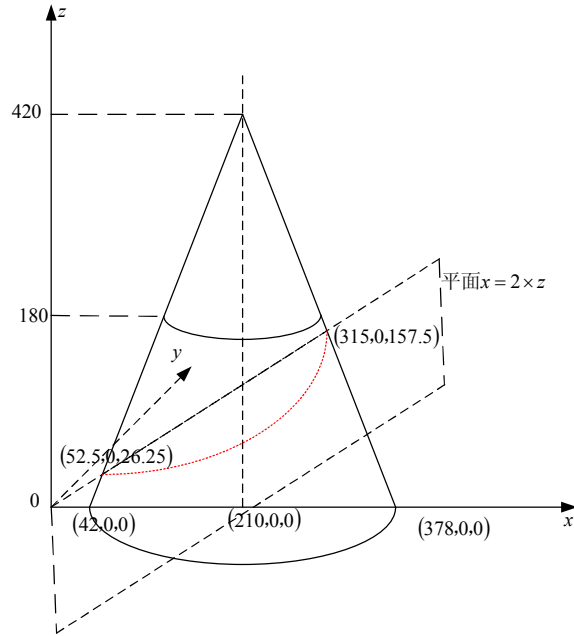


图 8 圆台形工件的三维图

由此，我们可求得该锥体方程： $(z-420)^2 = \frac{25}{4}[(x-210)^2 + y^2]$

故圆台形方程为： $(z-420)^2 = \frac{25}{4}[(x-210)^2 + y^2]$ ，其中： $x \in [42, 378]$
 $y \in [-168, 168]$
 $z \in [0, 180]$

联立圆台形方程和 $x=2z$ 即得交线方程：

$$\begin{cases} (z-420)^2 = \frac{25}{4}[(x-210)^2 + y^2] \\ x = 2z \end{cases}$$

由此可知，交线是一条闭合的曲线，如图 8 中红色曲线（仅显示正面，反面与此类似）所示。

（2）交线离散化

交线参数方程也可表示为：

$$\begin{cases} y = \pm \frac{1}{5} \sqrt{-96z^2 + 17640z - 396900} \\ x = 2z \end{cases}, \quad z \in [26.25, 157.5]$$

首先取交线的起始点为 (52.5, 0, 26.25)，然后以步长 $\Delta z = 0.1$ 按照顺时针将交线离散化。

（3）计算各离散点姿态及相邻两点增量，判断是否满足条件，如满足则不再离散，否则在这相邻两点间进行线性插值，重复以上步骤，直到满足条件为止。

（4）计算结果：指令序列是从初始姿态 Φ_0 到交线起始点 (52.5, 0, 26.25) 的类似 PTP 问题的指令系列，然后是从起始点 (52.5, 0, 26.25) 按顺时针方向沿着交线的指令序列，具体结果见 answer2.xls，部分结果可参见附录 2。

6.3 HP 问题

首先根据四个小零件在 x-y 平面上的投影坐标，计算他们的空间坐标。结果是 (320, -104, 21.549)、(120, 106, 52.361)、(190, -125, 83.535)、(255, 88, 152.90)。

其次，按照 HP 问题的模型及其算法进行求解。具体指令序列见 answer3.xls，部分结

果可参见附录 3，其无碰撞路径轨迹见图 9。

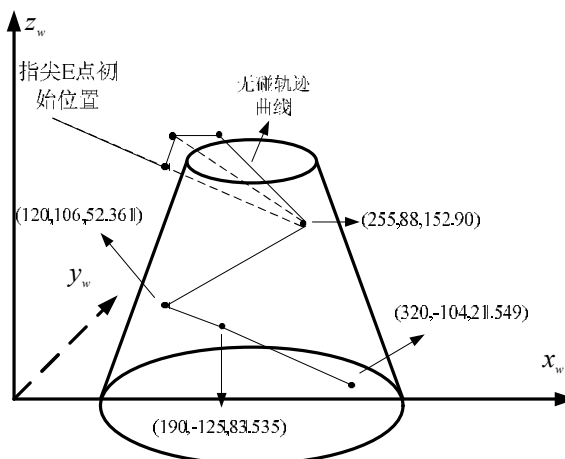


图 9 无碰撞路径轨迹示意图

本文计算均采用 Matlab 数学软件编程进行计算。

七、 算法分析与检验

算法的分析与检验包括算法的适用范围、计算效率以及近似算法所造成的误差和增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差大小。

7.1 D-H 最优组合法

本文采用 PTP 问题的实例应用对其进行分析，该算法的适用范围是在机械臂指尖仅在关节转角允许范围内可到达的任意位置。

该算法的计算效率较高，采用 matlab 数学软件进行编程，从初始姿态 Φ_0 到空间点 (20, -200, 120) 的计算时间 $t=0.125588s$ ，说明了计算的高效性。

误差分析，根据产生的指令序列，计算机机械臂通过该指令序列到达的空间坐标点，并与实际末端位置坐标进行对比（即位置精度）。我们计算出误差如下表 2

表 2 $\Delta\theta_i$ 取不同精度值的相对误差值

坐标	工具箱 所在位置	$\Delta\theta_i$ 取值精度为 0.1°		$\Delta\theta_i$ 取值精度为 0.01°		$\Delta\theta_i$ 取值精度为 0.001°	
		最终 坐标值	相对误 差	最终 坐标值	相对误 差	最终 坐标值	相对误差
x	20	19.9365	0.32%	19.9964	0.02%	19.9979	0.01%
y	-200	-199.738	0.13%	-199.985	0.01%	-200.0001	0.000023%
z	120	119.9644	0.03%	120.0102	0.01%	120.0016	0.0013%

从上表可以看出增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差随着其取值精度变高而逐渐变小。因此可以适当提高 $\Delta\theta_i$ 离散取值的精度，减少误差，从而尽量接近目标位置。

倒序寻优法相对 D-H 最优组合法其指令序列的柔顺性较好，位置精度高，这是因为倒序寻优法遍历到了所有可能存在的末端状态对应的机械臂姿态。但其复杂度较高，计算时间也较长。

7.2 CP 问题算法

本文采用 CP 问题的实例应用对其进行分析, 该算法的适用范围是曲线上的任意一点必须在机械臂指尖仅在关节转角允许范围内可到达的范围内。

该算法的计算效率较高, 采用 matlab 数学软件进行编程, 从初始姿态 Φ_0 到所有曲线点的计算时间 $t=0.845216s$, 说明了计算的高效性。

误差分析, 根据产生的指令序列, 计算机机械臂通过该指令序列到达的空间坐标点, 并与实际末端位置坐标进行对比 (即位置精度), 因为离散点很多, 定义该指令序列的精度为所有离散点中最低的位置精度。我们计算出误差如下表 3

表 3 $\Delta\theta_i$ 取不同精度值的相对误差值

坐标	工具箱所在位置	$\Delta\theta_i$ 取值精度为 0.1°		$\Delta\theta_i$ 取值精度为 0.01°		$\Delta\theta_i$ 取值精度为 0.001°	
		最终坐标值	相对误差	最终坐标值	相对误差	最终坐标值	相对误差
x	52.5	52.4763	0.045%	52.5090	0.017%	52.5002	0.0003%
y	0	-2.3×10^{-14}	——	-2.3×10^{-14}	——	-2.3×10^{-14}	——
z	26.25	26.4309	0.689%	26.2559	0.022%	26.2499	0.0003%

从上表可以看出, 增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差随着其取值精度变高而逐渐变小。

增量 $\Delta\theta_i$ 离散取值所造成的误差随着其取值精度变高而逐渐变小。因此可以适当提高 $\Delta\theta_i$ 离散取值的精度, 减少误差, 从而尽量接近目标位置。

7.3HP 问题算法

本算法的适用范围适合障碍物比较规则的障碍物, 但可有效解决障碍物数目比较多的情形, 即其复杂度较高。

本算法所得的规划路径只是一条局部最优路径, 而不是一条全局最优路径。

因为该算法的思想还是点到点的移动, 因此位置精度和 PTP 问题类似, 都比较高, 即误差较小。

八、 设计参数讨论与建议

本文所建模型能够很好的解决机械臂从初始位置到空间某一位置的指令序列问题, 已经机械臂指尖沿着一条已知曲线进行移动问题。但在解决无碰撞路径规划中有些问题, 可能寻找的不是一条最优路径。

根据以上模型, 我们通过修改设计参数等对机械臂的灵活性和适用范围进行讨论:

(1) 各关节的旋转角度的影响

首先介绍空间任意点的灵活度, 引入服务球和服务区的概念。将机器人末端的线性工具看作空间矢量, 如图9所示, 若以指尖为圆心, 以 HE 为半径作一球即为服务球^[4]。服务球上的每一点对应一种机器人末端姿态。所有可达点集合组成的区域称之为服务区, 服务区的面积和整个球冠面积的比值称之为圆心点 E 的灵活度。

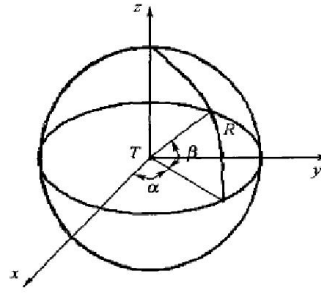


图 9 以末端位置为圆心, HE 为半径的圆球

首先根据机器人结构变量,将各关节变量在其运动范围内离散化,运用机器人的运动学正解遍历离散化后的所有组合得到机器人末端位置坐标,将这些数据存储;最后,通过 *MATLAB* 软件将存储的数据可视化,获得的三维模型即表示机器人的工作空间。变量组合的数目越多,三维模型就越能反映机器人的实际工作空间。

$$D = \frac{\sum_{m=1}^a \sum_{n=1}^b f[x, y, z, (m-1) \times d, (n-1) \times d]}{\sum_{m=1}^a \sum_{n=1}^b 1}$$

$$f[x, y, z, \alpha, \beta] = \begin{cases} 0 & \text{矢量姿态不可达} \\ 1 & \text{矢量姿态可达} \end{cases}$$

式(1)中, x, y, z 定义了指尖位置, α 和 β 定义了指尖姿态,当机器人能实现穿刺针位姿, $f=1$; 机器人不能实现穿刺针位姿, $f=0$ 。 a 为 α 在区间 $[0, 180]$ 内以步长 d 采样所取的点数, b 为 β 在区间 $[0, 90)$ 内以步长 d 采样所取的点数。

用等灵活度曲线来寻找该工作空间中灵活性最好的截面,即对机器人工作空间一截面 P 分割成 $m \times n$ 个网格点(m, n 分别为截面 P 两轴向的网格数),计算每个网格点的任务灵活度,并按等值线原理将该截面内任务灵活度相同的点连接成封闭曲线,得到等灵活度曲线。

通过在 $Z=0$ 水平截面和 $Y=0$ 竖直截面内作等灵活度曲线来判断工作空间灵活度的变化趋势。灵活度为0.9的等灵活度曲线所包含的空间点灵活度大于0.9,灵活度为0.8的等灵活度曲线与灵活度为0.9的等灵活度曲线之间区域内点灵活度在0.8至0.9之间,以此类推其他区域内点的灵活度。

在机构设计中应注意保证第三关节转角范围大于 210° 范围,机构有好的灵活性。

(2) 各连杆相对长度的影响:

以平面三连杆关节型机械臂为例(如图 10 所示)有下图可知:当 $l_3 \leq |l_1 - l_2|$, 则其灵活的工作空间为一外半径为 $(l_1 + l_2 - l_3)$ 、内半径为 $(|l_1 - l_2| + l_3)$ 的圆环,如图 11 (a) 所示。

由图显然可知:如果腕部连杆 l_3 设计得较短,那么对于同样的 l_1 和 l_2 ,工作空间将变大。若 $l_3 > |l_1 - l_2|$, 则其灵活的工作空间还包括一个半径为 $(l_3 - |l_1 - l_2|)$ 的圆面积,如图 11 (b) 所示。当 $l_1 = l_2$ 时,圆面积和圆环面积将合而为一,如图 11 (c) 所示。

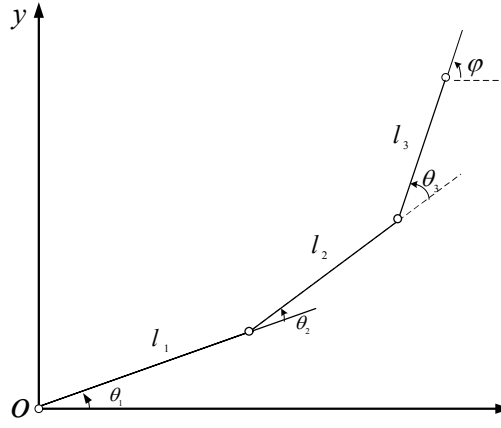


图 10 平面三连杆关节型机械臂示意图

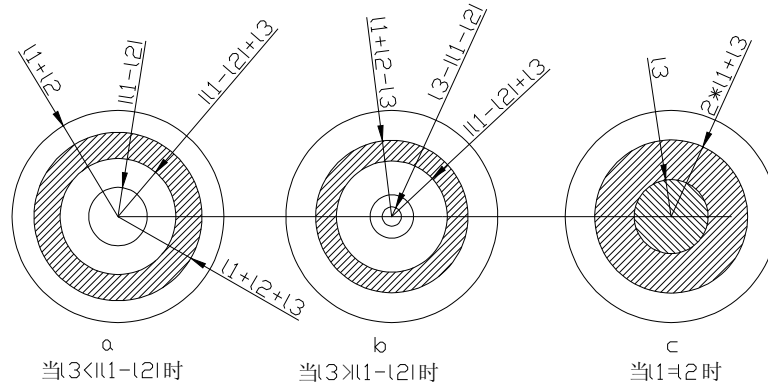


图 11 工作空间示意图

由以上分析可知：对于关节型机械手臂而言，如果各连杆长度相等，而腕部连杆的长度设计的尽可能短的话，其工作空间的形状和尺寸则可以大大改善^[5]。基于以上结论，下面讨论 $l_1 = l_2$ 时， l_1 、 l_2 和 l_3 三者的关系使其灵活度最大：

引入了“特征长度”的概念，也就是对 *Jacobian* 中的“位置向量行”除以一个特征长度。特征长度 L 定义为：能够使 *Jacobian* 条件数达到最小化的规范化长度

重新定义 *Jacobian* 矩阵为：

$$\begin{vmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123})/L & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123})/L & -l_3 s_{123}/L \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123})/L & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123})/L & l_3 c_{123}/L \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

其中： $s_1 = \sin \theta_1$ ， $c_1 = \cos \theta_1$ ， $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ ， 其他依此类推。

则 JJ^T 必须正比于单位矩阵，且 JJ^T 为对称矩阵：

$$JJ^T = \begin{vmatrix} J_{11}^2 + J_{12}^2 + J_{13}^2 & J_{11}J_{21} + J_{12}J_{22} + J_{13}J_{23} & J_{11} + J_{12} + J_{13} \\ J_{21}J_{11} + J_{22}J_{12} + J_{23}J_{13} & J_{21}^2 + J_{22}^2 + J_{23}^2 & J_{21} + J_{22} + J_{23} \\ J_{11} + J_{12} + J_{13} & J_{21} + J_{22} + J_{23} & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{vmatrix}$$

由上式可知： $\sigma^2 = 3$ 且非主对角线上的元素均为 0，主对角元素需满足：

$$J_{11}^2 + J_{12}^2 + J_{13}^2 = J_{21}^2 + J_{22}^2 + J_{23}^2 = \sigma^2$$

可以采用优化方法对各个变量进行求解。设三连杆的总长度为 1，即 $l_1 + l_2 + l_3 = 1$ 。所有优化变量为 $l_1, l_2, L, \theta_1, \theta_2$ 。建立如下数学模型：

$$\text{目标函数: } \begin{cases} \min \left| (J_{11}^2 + J_{12}^2 + J_{13}^2) - (J_{21}^2 + J_{22}^2 + J_{23}^2) \right| \\ J_{11}^2 + J_{12}^2 + J_{13}^2 = \sigma^2 \end{cases}$$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} J_{11}J_{21} + J_{12}J_{22} + J_{13}J_{23} = 0 \\ J_{11} + J_{12} + J_{13} = 0 \\ J_{21} + J_{22} + J_{23} = 0 \end{cases}$$

计算可得： $l_1 = l_2 = 0.462$ ， $l_3 = 0.176$ ， $\theta_1 = 3.645$ ， $\theta_2 = 4.921$ ， $L = 0.224$ ；

通过计算得到的比例即可得到相应连杆的长度。

另外还可以考虑：任意三连杆在关节运动角度受限制条件下通过获得最大工作空间来优化各连杆的长度。

最后，我们给制造厂家提出建议：

机械臂的 $|BC|$ 和 $|CD|$ 的长度大约相等，并且 $|DE|$ 的长度大约是 $|BC|$ 和 $|CD|$ 长度的 0.39 倍；还应注意保证第三关节转角范围大于 210° ，机构有好的灵活性。

九、参考文献

- [1]叶军.一种基于微粒群优化算法的冗余机械手轨迹规划法[J].机械设计.21(7):20-21 2004.7
- [2]殷际英等 编著. 关节型机器人[M]. 北京:化学工业出版社,2005.3
- [3]吴剑，孙杏初.机器人无碰撞轨迹规划研究[J].北京航空航天大学学报.21(3):119-123 1995.7
- [4]刘巍，张玉茹.脑外科机器人灵活度分析与设计[J]. 机械设计与研究. 22(4):39-41 2006.8
- [5]申永胜主编.机械原理教程[M]. 北京:清华大学出版社,2003

附录

附录 1 answer1 的部分结果

指令序列	关节 1	关节 2	关节 3	关节 4	关节 5	关节 6
1	-2.0	2.0	-2.0	0.0	2.0	0.0
2	-2.0	2.0	-2.0	0.0	2.0	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	-2.0	2.0	-2.0	0.0	2.0	0.0
31	-2.0	1.0	-2.0	0.0	2.0	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
36	-2.0	0.0	-2.0	0.0	2.0	0.0
37	-2.0	0.0	-2.0	0.0	0.4	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
66	-2.0	0.0	-2.0	0.0	0.0	0.0
67	-2.0	0.0	-1.4	0.0	0.0	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
87	-2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
88	-0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

备注：由于关节 6 的转角对机械臂指尖的位置没有影响，本文不予考虑，其转角值认定为 0，省略号表示中间指令序列与上一个指令相同，具体指令序列参见 answer1.xls。

附录 2 answer2 的部分结果

指尖从最初的 E 点移动到闭合曲线上点(52.5,0,26.25)						
指令序列	关节 1	关节 2	关节 3	关节 4	关节 5	关节 6
1	-2	2	-2	0	2	0
2	-2	2	-2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	-2	2	-2	0	2	0
20	-2	1	-2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
78	0	0	-2	0	0	0
79	0	0	-1	0	0	0
80	2.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0
81	1.4	0.1	0.1	0.0	0.0	0
82	1.6	0.1	0.1	0.0	0.0	0
83	1.6	0.1	0.1	0.0	-0.1	0
84	1.3	0.1	0.1	0.0	-0.1	0
85	1.7	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
86	1.4	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
87	1.3	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
88	1.1	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
89	1.0	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
90	0.9	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
91	0.9	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
92	0.8	0.2	0.1	0.0	-0.1	0

93	0.8	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
94	0.7	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
95	0.7	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
96	0.7	0.2	0.1	0.0	-0.1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
260	-0.6	-0.3	0.4	0.0	0.1	0
261	-0.6	-0.3	0.4	0.0	0.1	0
262	-0.6	-0.3	0.4	0.0	0.1	0.7
263	-0.6	-0.3	0.4	0.0	0.1	0.7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
417	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.0

备注：由于关节 6 的转角对机械臂指尖的位置没有影响，本文不予考虑，其转角值认定为 0，省略号仅表示中间指令序列省略，不表示这些中间指令序列与上一个指令序列相同。具体指令序列参见 answer2.xls。

附录 3 answer3 的部分结果

指令序列	关节 1	关节 2	关节 3	关节 4	关节 5	关节 6
1	-2	2	-2	0	2	0
2	-2	2	-2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	-2	0.3	-2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33	-2	0	-2	0	1.1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	-2	0	-1.3	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
55	-0.1	0	0	0	0	0
56	2	2	-2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
124	2	-2	2	0	2	0
125	2	-2	2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
157	0	-2	2	0	2	0
158	0	-2	2	0	2	0
159	0	-2	2	0	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
204	0	-2	0	0	0	0
205	0	-2	0	0	0	0
206	0	-2	0	0	0	0
207	0	-2	0	0	0	0

备注：由于关节 6 的转角对机械臂指尖的位置没有影响，本文不予考虑，其转角值认定为 0，省略号仅表示中间指令序列省略，不表示这些中间指令序列与上一个指令序列相同。具体指令序列参见 answer3.xls。