

2022 华数杯全国大学生数学建模竞赛题目

(请先阅读“华数杯数学建模竞赛论文格式规范与提交说明”)

B 题 水下机器人的组装计划

自来水管清理机器人 (Water pipe cleaning robot, 简称 WPCR) 是一种可在水下移动、具有视觉和感知系统、通过遥控或自主操作方式、使用机械臂代替或辅助人去完成自来水管垃圾清理任务的装置。运用这种装置能够及时清理管道, 既可提高自来水的品质, 也能够保证水流畅通, 因而越来越受到水务公司和家庭住户的青睐。

某工厂生产的 WPCR 装置需要用 3 个容器艇 (用 A 表示)、4 个机器臂 (用 B 表示)、5 个动力系统 (用 C 表示) 组装而成。每个容器艇 (A) 由 6 个控制器 (A1)、8 个划桨 (A2) 和 2 个感知器 (A3) 组成。每个机器臂 (B) 组成比较复杂, 简单可划分为 2 个力臂组件 (B1) 和 4 个遥感器 (B2) 组成。每个动力系统 (C) 由 8 个蓄电池 (C1)、2 个微型发电机 (C2) 和 12 个发电螺旋 (C3) 组成。也就是说组装一个完整的 WPCR 装置, 需要 3 个容器艇 (A), 包括 18 个控制器 (A1)、24 个划桨 (A2) 以及 6 个感知器 (A3)。组装一台 WPCR 需要的其他部件数以此类推。组装 WPCR 所需要的产品统称为组件, 包括 A 和 A1、A2、A3, B 和 B1、B2, C 和 C1、C2、C3。

该工厂每次生产计划的计划期为一周 (即每次按照每周 7 天的订购数量实行订单生产), 只有最终产品 WPCR 有外部需求, 其他组件不对外销售。容器艇 (A)、机器臂 (B)、动力系统 (C) 生产要占用该工厂最为关键的设备, 因而严格控制总生产工时。A、B、C 的工时消耗分别为 3 时/件、5 时/件和 5 时/件, 即生产 1 件 A 需要占用 3 个工时, 生产 1 件 B 需要占用 5 个工时, 生产 1 件 C 需要占用 5 个工时。每天的 WPCR 外部需求数及关键设备总工时限制见表 5。

为了顺利生产 WPCR, 工厂在某一天生产组件产品时, 需要付出一个与生产数量无关的固定成本, 称为生产准备费用。比如第一天生产了 A, 则要支付 A 的生产准备费用, 若第二天再生产 A, 则需要再支付 A 的生产准备费用。如果某一天结束时某组件有库存存在, 则工厂必须付出一定的库存费用 (与库存数量成正比)。数据见表 6。另外, 按照工厂的信誉要求, 目前接收的所有订单到期必须全部交货, 轻易不能有缺货事件发生。

请回答下列问题。

1. 若该工厂第一天 (周一) 开始时没有任何组件库存, 也不希望第 7 天 (周日) 结束后留下任何组件库存。每天采购的组件马上就可用于组装, 组装出来的组件也可以马上用于当天组装成 WPCR。若要求总成本最小, 请问如何制定每周 7 天的生产计划? 将结果填入表 1。

表 1：问题 1 的结果

日期	WPCR 组装数量	A 组装数量	B 组装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周一						
周二						
周三						
周四						
周五						
周六						
周日						
总和					此处填总成本	

2. 然而，事实上，组件A、B、C需要提前一天生产入库才能组装WPCR，A1、A2、A3、B1、B2、C1、C2、C3 也需要提前一天生产入库才能组装A、B、C。在连续多周生产情况下，需要统筹规划。比如在周一生产WPCR前一天（上周周日）必须事先准备好组件库存，而且在本周日必须留下必要的组件库存用以保障下周一的生产。每周的WPCR需求和关键设备工时限制以及每次生产准备费用和单件库存费用数据见表 5、表 6，请问如何制定每周 7 天的生产计划以求总成本最低？将结果填入表 2。

表 2：问题 2 的结果

日期	WPCR 组装数量	A 组装数量	B 组装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周一						
周二						
周三						
周四						
周五						
周六						
周日						
总和					此处填总成本	

3. 接问题 2。为了保障生产的持续性，工厂需要在 30 周 210 天里必须设置 7 次停工检修，每次检修时间为 1 天。检修之后关键设备生产能力有所提高，检修后的第一天 A、B、C 生产总工时限制将会放宽 10%，随后逐日减少放宽 2% 的比例，直至为 0（如第一天放宽 10%，第二天就放宽 8%，...）。检修日的订单只能提前安排生产，当天不能生产任何组件。假设每周的关键设备工时限制以及每次生产准备费用和单件库存费用数据不变，任意两次检修之间要相隔 6 天以上，请问，检修日放在哪几天最为合适（总成本最小）？将结果填入表 3（填天的序号即可，如 26，就表示是第 26 天）。30 周的 WPCR 外部需求数据见表 7。

表 3：问题 3 的结果（检修日期及总成本）

第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	总成本

4. 在生产实际中，在未知WPCR外部需求订单的前提下，公司需要有一个稳妥的单周生产计划。接问题 2，表 7 数据视为历史周订单数据，在不知未来某周 7 天订单数且继续追求周总成本最小的前提下，如何制定周生产计划，既能够保障每天的WPCR订单均以 95%以上的概率保证正常交付，又能够以 85%以上的概率保证整周的WPCR订单能正常交付？将结果填入表 4。

表 4：问题 4 结果数据

日期	WPCR 外部需求数量	WPCR 组装数量	A 组装数量	B 组装数量	C 组装数量	生产准备费用	库存费用
周一							
周二							
周三							
周四							
周五							
周六							
周日							
总和						此处填总成本	

表 5 每天 WPCR 需求和关键设备工时限制

天	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
WPCR 需求（个）	39	36	38	40	37	33	40
A、B、C 生产总工时限制（工时）	4500	2500	2750	2100	2500	2750	1500

表 6 每次生产准备费用和单件库存费用（单位：元）

产品	WPCR	A	A1	A2	A3	B	B1	B2	C	C1	C2	C3
生产准备费用	240	120	40	60	50	160	80	100	180	60	40	70
单件库存费用	5	2	5	3	6	1.5	4	5	1.7	3	2	3

表 7 连续 30 周的 WPCR 需求数据（单位：个）

天	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
第 1 周	39	36	38	40	37	33	40
第 2 周	39	33	37	43	34	30	39
第 3 周	42	36	35	38	36	35	41
第 4 周	38	36	36	48	34	35	39

第 5 周	38	36	40	40	40	34	39
第 6 周	40	30	36	40	34	36	37
第 7 周	41	36	41	41	38	29	43
第 8 周	33	31	40	42	42	30	40
第 9 周	35	36	38	33	35	37	41
第 10 周	43	35	42	37	36	33	39
第 11 周	38	32	41	36	40	31	34
第 12 周	37	37	41	39	38	35	38
第 13 周	38	38	33	42	42	29	33
第 14 周	39	37	44	38	35	36	38
第 15 周	40	39	38	38	37	34	44
第 16 周	35	36	38	39	39	39	39
第 17 周	43	28	39	41	38	30	38
第 18 周	35	37	40	41	40	35	41
第 19 周	36	35	40	41	37	38	36
第 20 周	37	38	39	41	38	37	44
第 21 周	37	37	37	36	39	33	41
第 22 周	39	37	42	37	36	28	43
第 23 周	40	32	35	45	40	34	43
第 24 周	38	36	37	36	40	28	45
第 25 周	38	40	38	36	35	40	42
第 26 周	31	31	44	36	31	36	40
第 27 周	40	36	34	43	35	32	39
第 28 周	33	33	36	41	34	38	40
第 29 周	35	34	37	37	39	36	40
第 30 周	37	41	39	41	36	32	44