

# “华为杯”第十五届中国研究生

## 数学建模竞赛

### 题 目 光传送网建模与价值评估

---

#### 摘 要：

光传送网构建起了当今全球通信的骨架。本文从最优化理论出发，研究了数字信号调制方式、性能以及光传送网的规划、网络价值等问题。首先，对光传送链路进行建模，用概率分布模型研究了各调制模式的星座图和它们的误比特性能。随后，对光传输网的规划问题进行研讨，用图模型研究了网络拓扑结构和通信流量分配对传输网价值的影响，并根据实际情况提出更合理的目标函数和网络价值定义。最后，通过探索非等概率的调制方式，设计出在 SNR 容限上更有优势的星座图。

#### 针对问题一：

在子问题 1 中，针对星座图上加噪后的点服从二维正态分布的特性，使用概率分布模型进行建模，结合空间区域划分，利用统计学原理推导出 QPSK、8QAM、16QAM 三种调制方式下的 BER-SNR 关系。在本文所建模型中，三种调制方式在 BER=0.02 时，SNR 容限点分别为 6.90dB、10.34dB 和 12.71dB。在子问题 2 中，针对问题构造收敛的迭代算法，得到不同单跨传输距离条件下使用 QPSK、8QAM、16QAM 三种调制方式进行调制的信号可以传输的最远距离。通过比较获得相应结果并从中提炼出通用性质。

#### 针对问题二：

本题中共涉及 12 个城市群的光传输网规划问题。子问题 1 中，不考虑中间节点，城市间只存在一条连接，对该问题采用最大生成树算法生成连接图，并选取剩余连接中价值最高的连接。经过优化，最优的 16 条连接的光传输网总价值为 5147.3，最优的 33 条连接的光传输网总价值为 8418.6。子问题 2 中，考虑中间节点，城市间可以有多条连接，对该问题采用最大生成树算法生成连接图，并用线性规划模型对连接图的容量分配做出最优决策。经过优化，最优的 16 条连接的光传输网总价值为 7069.8，最优的 33 条连接的光传输网总价值为 19151.5。扩大到省区后，16 条连接的总价值的最大值为 23510.5，扩展到 33 条连接的总价值的最大值为 64254.4。第三问中，扩展函数普适性，使用主观权重系数法确

定函数指标权重，建立合理评价指标，在新目标函数中量化分析人口、国内生产总值、距离、实际通信容量、辐射范围人口、国内生产总值等因素的影响。对于新的目标函数，采用模拟退火算法进行优化，显著提升光传输网架构的社会价值。

**针对问题三：**

在探索星座点布局的过程中，使用大概率点调制至原点附近、相邻点等距、对称性等定性约束作方向指引，依靠概率和为 1、信息熵为 3bit 和信号平均功率为 1mW 等重要定量约束探索提出了 9QAM 和 12QAM 两种不等概率的调制方法。相比原题 8QAM 调制方法，新方法显著降低 SNR 容限点。在 BER=0.02 时，新星座图的 SNR 容限点分别降至 8.73dB 和 9.03dB。

**关键词：**星座图 调制 正态分布 模拟退火算法 网络价值 路径规划

## 一、 问题重述

### 1.1 研究背景

2009 年诺贝尔物理学奖授予了英籍华人高锟（Charles K. Kao）博士，以表彰他对光纤通信发展所做出的贡献，诺贝尔奖委员会在给公众的公开信中写到：

“当诺贝尔物理学奖宣布的时候，世界大部分地方几乎瞬间收到了这条信息…文字、语音和视频信号沿着光纤在世界各地来回传输，几乎瞬时地被微小而便捷的设备接收，人们已经把这种情况当做习惯。光纤通信正是整个通信领域急速发展的前提。”

从诞生至今，50 多年里基于数字光纤通信技术的光传送网构建起了全球通信的骨架。从城市内的传输，直到跨越大洋的传输，光传送网为人类提供了大容量、高可靠性和低能耗的信息传输管道，人类对通信容量的追求也成为光传送技术发展的源源不断的动力。

### 1.2 研究问题

光传送网的规划与建设是运营商、设备商以及政府必须考虑的课题。光传送的基本规律是——在相同技术条件下传输的容量会随着传输距离增加而减小。网络规划者需要在有限资源的条件下，综合考虑传输距离，传输容量、网络拓扑等各种因素，以最大化网络的价值。本课题中，需要站在上述角度，从底层物理出发为光传送链路建模，制定光传送网规划，探索光传送网有关规律。

本课题的内容包括：

- 1) 对光传送链路进行简单建模
- 2) 制定光传送网的规划，并探讨网络的价值
- 3) 改进调制格式

本文需要解决如下三个问题。

#### 问题-1：光传送链路建模

现代数字传输系统可认为是对 0101 二进制序列进行编码传输的系统，1 个二进制的 0 或 1 称为 1 个比特（bit）。无论是语音、视频还是任何类型的消息，都可以数字化为一串串“0101…”的二进制比特序列，经编码并调制为某个“载体信号”后，再经过特定的“信道”（信息的通道）传输到目的地。图 1-1 中给出了简化的模型。在光纤通信中，光纤就是信道，光纤传输的光波就是信息的载体。信道中无法避免的噪声可能导致最终接收的二进制序列中比特出错，即产生误码。

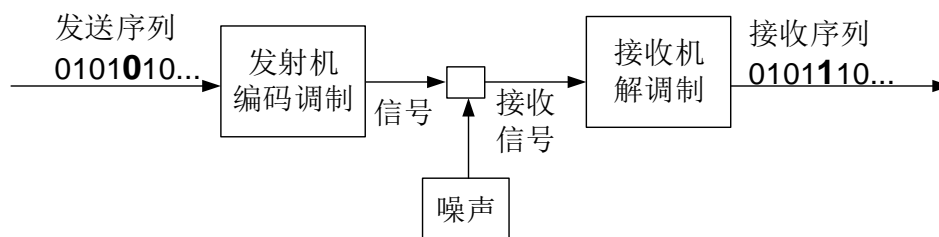


图 1-1 简化后的数字传输模型

二进制序列通常需要将  $K$  个比特作为一个“符号”进行传输，每个符号有  $2^K$  个不同状态。光传输利用光波的复振幅承载信号，因此可用复平面上不同的点来对应不同的符号状态，这种将符号状态画在复平面上的图称为“星座图”，图上的点称为“星座点”。如图 1-2 (a) 所示的 QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) 调制，经过信道叠加噪声和接收机处理后，接收端的星座图不再是理想的四个点，而是会出现扩散。当接收机收到 1 个符号时，就将发送的符号判定为离该符号最近的星座点。显然，如果噪声过大，接收到的符号可能被判错从而产生误码，如图 1-2 (b) 中的蓝点。误码率 (Bit Error Ratio, BER) 定义为错误的比特数占总传输比特数的比例，例如传输了 50 个符号共 100 个比特，其中有 1 个符号被误判为相邻的符号，错误了 1 个 bit，则误码率为 0.01。BER 是衡量通信系统性能的最根本指标，采用纠错编码，只要纠错前 BER 小于某个门限值 (BER 容限值)，纠错编码后就能实现纠错后误码率为零的传输，本题中 BER 都是指纠错编码前的误码率 (纠错前 BER)。

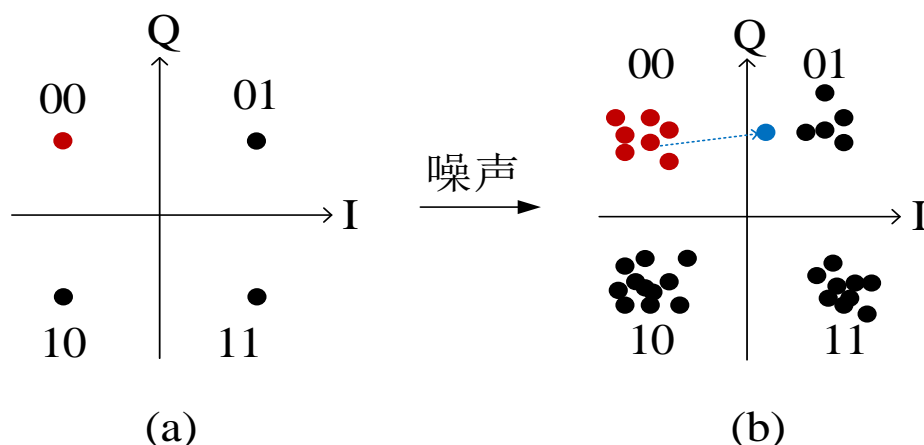


图 1-2 星座图与噪声导致误码的示意图

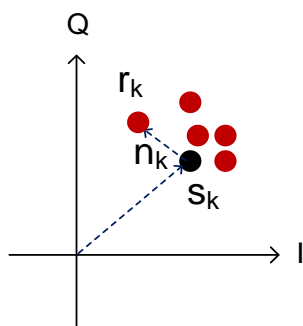


图 1-3 信号和噪声的相关定义示意图

图 1-3 中理想星座点用  $s_k$  表示，接收到的符号用  $r_k$  表示，则噪声的表达式为：

$$n_k = r_k - s_k$$

噪声通常服从均值为 0 的正态分布。噪声的方差等于噪声的平均功率，定义为：

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |n_k|^2$$

其中 N 为总共传输的符号数。信号平均功率定义为发送符号绝对值平方的均值：

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |s_k|^2$$

定义信号和噪声功率的比值为信噪比（Signal-to-Noise Ratio, SNR）：

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n}$$

工程上通常用 dB 作为 SNR 的单位，定义为：

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_s}{P_n} \right)$$

增大十倍为加 10dB，减小 0.5 倍为减去 3dB。本题中功率单位统一为毫瓦（mW），星座图实部和虚部单位为  $\sqrt{\text{mW}}$ 。光传输链路由多个相同跨段的级联而成。

如图 1-4 所示，几十 km 的光纤和一个放大器构成了 1 个跨段。信号每传输 15km，光功率衰减一半，经过一段光纤传输后，需要用放大器对光功率进行补偿。在信号、噪声同步放大的同时，放大器还引入自发辐射噪声，公式为  $P_n = 2\pi h f B (NF + \frac{1}{\text{Gain}})$  其中是 h 是普朗克常数（ $6.62606896 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ），f 是光波频率（可定为 193.1THz），B 为带宽（设为 50GHz），NF 为噪声指数（可设为 4），Gain 为补偿光纤衰减所对应的功率增益。另一方面，光纤作为一种传输介质，其本身的非线性效应也会等效地引入噪声。其等效噪声功率与入纤功率近似呈平方关系，光纤功率为 1mW 时的非线性噪声约等于单个放大器噪声的 2/3。放大器的自发辐射噪声和光纤的非线性噪声都是加性噪声。非线性噪声在每跨开头叠加，放大器噪声在每跨末尾叠加；每跨中间信噪比保持不变。每跨叠加的噪声间相互独立。

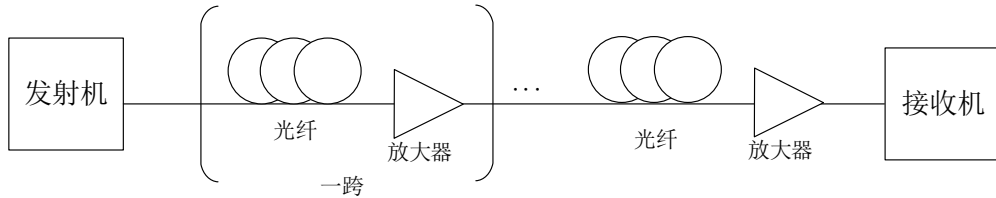


图 1-4 基本的光传输链路模型

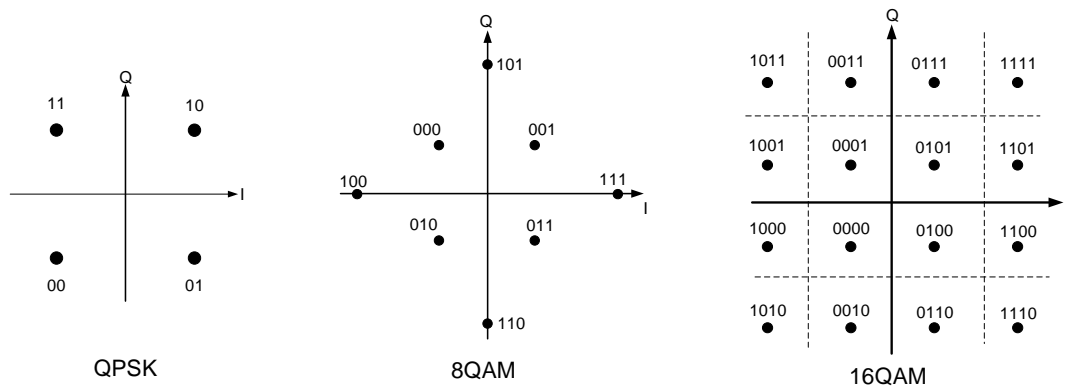


图 1-5 三种调制格式的编码方案

子问题-1) 纠前误码率与信噪比计算

星座图的编码分布模式也称为调制格式，对于给定的调制格式，BER 和 SNR 呈一一对应的关系，纠前 BER 门限对应的 SNR 记做“SNR 容限点”。给出图 1-5 中所示的三种调制格式及编码方式(相邻星座点距离相等)，每个符号等概率出现，分别称为 QPSK, 8QAM (Quadrature Amplitude Modulation, QAM), 16QAM。请给出 BER 与 SNR 的关系曲线，BER=0.02 时 SNR 容限点分别为多少？

子问题-2) 光链路性能计算

当单跨传输距离为 80km 和 100km 两种情况，以纠前误码率 0.02 为门限，图 1-5 给出的传输格式最远的传输距离（每跨距离×跨段数量）是多少？

问题-2：光传送网规划

表 1-1 给出进一步优化升级后的三种典型光传输设备参数。考虑到通信网络的目的是把更多的人更充分地连接到一起，我们按照如下方式定义网络的价值：

- 1) 每条直接连接两个城市/区域的链路当做 1 个连接，每个连接的价值定义为传输容量与连接区域人口数的乘积(取两区域人口数乘积的 0.5 次方)
- 2) 网络的价值则是所有连接价值的加权和

$$\text{网络价值} = \sum \text{权重} * \text{人口} * \text{容量}$$

以图 1-6 给出的北京、南京、上海三座城市为例，若相互之间均互有连接，根据城市的距离可得出能传输的容量。若每条链路的权重为 1，进而再由人口算出网络价值(Network Value, NV)为：

$$NV = \sqrt{21 \times 24} \text{m} \times 16 \text{Tb/s} + \sqrt{21 \times 8} \text{m} \times 16 \text{Tb/s} + \sqrt{24 \times 8} \times 32 \text{Tb/s} \approx 1010 \text{mTb/s}$$

其中 m 代表百万人(million)，Tb/s=10<sup>12</sup>bit/s，该网络的连接数为 3。

然而由于资源等因素制约，网络往往并不能让每对节点都直接连接，但可通过中间节点连接起来。以图 1-6(b)为例，网络连接数为 2，北京和南京之间需通过上海中转。若北京上海之间的传输仅保留一半容量(100Gb/s)，而另一半容量用于南京到北京的信号传输(100Gb/s)，相应地南京与上海之间的直接传输容量也会降低至 300Gb/s，此时网络的价值为：

$$NV = \sqrt{21 \times 24} \text{m} \times 8 \text{Tb/s} + \sqrt{21 \times 8} \text{m} \times 8 \text{Tb/s} + \sqrt{24 \times 8} \times 24 \text{Tb/s} \approx 616 \text{mTb/s}$$

根据需要两个节点之间也可以有多个连接。

请你们队考虑价值与需求为图 1-7 中的我国城市群制定光传送网规划，图中共有 12 个区域(其中北京/天津，深圳/广州均按 1 个区域对待)

子问题-1)

如果连接数从 16 增加到 33 条时，不考虑中间节点，给出你们的两个网络规划及其价值。网络价值最多是多少？

子问题-2)

存在中间节点且两个节点间可以有多个连接的情况下，重新解决子问题-1 并给出所有中间节点传输容量的分配，假定每条链路容量可任意分配，只要总容量不超过表 1-1 的规定。如果由市扩大为省（区）影响如何？（人口请从网上查找）子问题-3）

光传送网络价值有多个侧面，例如从运营商的角度，连接经济发达的地区会带来更多的收入，从政府角度保障发展相对滞后地区的通信是均衡发展要求等。你认为制定光传送网络规划的目标函数应是什么？前面制定的规划有无变化？

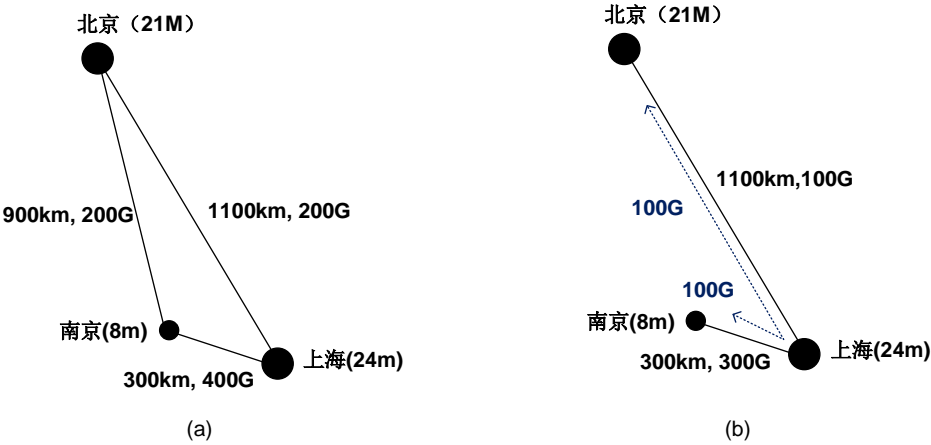


图 1-6 三个节点网络示意图



图 1-7 需要考虑的城市群

单波传输容量	最大传输距离	总容量
100 Gb/s	3000 km	8 Tb/s
200 Gb/s	1200 km	16 Tb/s
400 Gb/s	600 km	32 Tb/s

表 1-1 不同传输格式的传输距离

问题-3：改善星座图

由第一问可知，纠前 BER 不变时，降低 SNR 容限点可以提高系统容忍噪声的能力，从而延长链路的总长度。请尝试任意改变 16QAM 方案中星座点的位置、数量或每个点的概率，探索产生比图 1-5 中 8QAM（相邻各星座点之间距离相等）具有更低 SNR 容限点的调制方案？调制格式的信息熵需保持为 3bit。

信息熵定义为： $\Omega = -\sum_1^N p_k \log_2(p_k)$

其中  $p_k$  为每个符号状态出现的概率，N 为状态数。图 1-5 所示的等概率情况下，QPSK、8QAM 和 16QAM 的信息熵分别为 2bit，3bit 和 4bit。

二、 模型假设与说明

编号	假设
1	光纤入纤信号功率为 1mW。
2	放大器的功率增益恰好补偿信号在光纤中的传输衰减。
3	光纤、放大器都有自带噪声且保持相对稳定。
4	各省市人口保持相对稳定。无较大规模人口迁入迁出。
5	信道噪声服从均值为 0 的正态分布。
6	两个城市之间的光传输距离按直线距离计算，不考虑地理因素限制。
7	两城市间的通信容量可以任意划分，最小为 100Gb/s（0.1TB）。
8	星座图相邻点等距。
9	噪声在星座图上服从二维高斯分布，且是双边带。
10	星座图上符号的平均功率为 1mw。

三、 符号说明

符号	含义
<b>h</b>	普朗克常数
<b>f</b>	光波频率
<b>B</b>	带宽



<b>NF</b>	噪声指数
<b>Gain</b>	放大器功率增益
<b>BER</b>	误码率
<b>SNR</b>	信噪比
$P_{sig-i}$	输入原始待传输信号功率
$P_{fiber-i}$	某段光纤输入信号总功率
$P_{fiber-o}$	某段光纤输出信号总功率
$P_{fiber-noise-i}$	光纤自带非线性噪声输入总功率
$P_{amp-noise-o}$	光纤自带非线性噪声输出总功率
$P_{amp-i}$	放大器输入信号总功率
$P_{amp-o}$	放大器输出信号总功率
$P_{s-step-o}$	每一跨的输出信号功率
$P_{n-step-o}$	每一跨的输出噪声功率
$SNR_{step}$	每一跨的输出信噪比
$Value_f$	城市连接 f 的价值，通过网络价值定义计算
$Capacity_f$	表示城市连接 f 的容量，通过距离和容量关系计算
$W_f$	0-1 变量，用来表示城市连接 f 是否建设
$Population_{f1}$	表示连接 f 所连接的两个城市群中城市群 1 的人口。
$Population_{f2}$	表示连接 f 所连接的两个城市群中城市群 2 的人口。
<b>F</b>	所有城市连接组成的集合。
$C_{ij}$	表示从城市 i 到城市 j 的通信容量，

$P_i$	表示城市 $i$ 的人口
$C_{ij}^{Tot}$	表示从城市 $i$ 到城市 $j$ 间连接的总容量
$m(i,j)$	在无环连接图上将城市 $i$ 与城市 $j$ 的连接去掉, $i$ 所在的连接图上节点的集合
$n(i,j)$	在无环连接图上将城市 $i$ 与城市 $j$ 的连接去掉, $j$ 所在的连接图上节点的集合
$CR_{i,j}$	城市 $i$ 和城市 $j$ 之间的实际通信需求
$GDP_i$	城市 $i$ 及其辐射区域的 GDP
$D_{i,j}$	表示城市 $i$ 和城市 $j$ 之间的距离
$\alpha, \beta, \gamma$	调整影响因素的强度
$f(x,y)$	二维平面上的点的概率密度函数
$P_s$	信号平均功率
$E_b$	每个比特的平均功率
$P_n$	噪声平均功率
$\sigma$	高斯噪声的标准差
$d$	星座图相邻点距离
$p_n$	星座图 $n$ 点出现的概率
$P_{n_i}$	星座图在 $n$ 点错 $i$ 个 bit 的概率

## 四、 问题一模型建立与求解

### 4.1 子问题 1 的模型建立与求解

#### 4.1.1 问题分析

从问题的描述中可知,星座图上每一个点代表着每一个符号的状态,加入噪声后,星座图上的点会出现偏移,从而产生错误。我们称未加噪声星座图上的点为“标准点”,且假设加入的噪声是高斯噪声。加噪后星座图上的每个点都符合

以原先点为均值的正态分布：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)}{2\sigma^2}}$$

在 QPSK 左上角 11 标准点加高斯噪声后符号概率密度分布如图 4-1-1 所示：

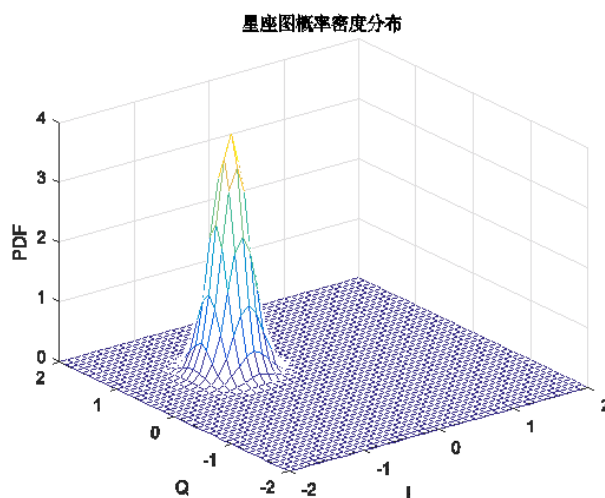


图 4-1-1 QPSK 点 11 加高斯噪声后的概率密度分布图

题目要求获得 BER 与 SNR 的关系曲线。错误比特率可由概率密度函数在相应区域积分所得，而 SNR 与高斯噪声的标准差  $\sigma$  的关系如下公式所示，其中噪声功率是双边带功率，信号功率是归一化后的功率。

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{1}{2\sigma^2}$$

#### 4.1.2 模型建立

通过分析，此题模型可以分为两步来建立以便于解答：

第一步：确定星座图上各标准点所占区域。在确定区域之前，我们需要确定每个标准点的坐标。确定坐标的方法是用信号功率归一化的思路，即所有点的功率概率加权之和等于 1。得到每个标准点的坐标后，我们再确定它所占区域。所谓标准点的区域是指，在对应区间内的点解调都会判决为该标准点。我们所采取的判决策略是就近原则，一个点会被判决成与其最近的标准点。图 4-1-2 示意了 QPSK 标准点的区域范围和一个点判决示例。

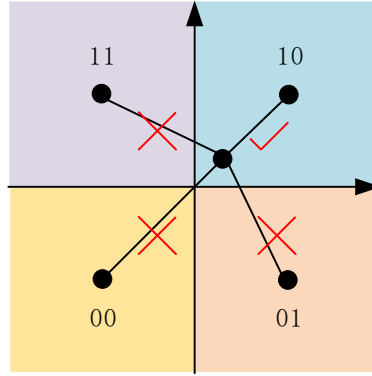


图 4-1-2 QPSK 标准点区域

第二步：对各个点的概率密度函数在不同区域进行积分，计算错误比特率 BER。比如原本在 11 标准点处的点加上高斯噪声后，会服从均值在 11 标准点处的二维正态分布。对此概率密度函数在 11 区间积分可得无比特错误的概率，在 10 和 01 区间积分可得 1bit 错误的概率，在 00 区间积分可得 2bit 错误的概率。由此可得出标准点 11 在加噪声之后的错误比特率，综合全部标准点可以得到该调制方式在特定 SNR 下的 BER。

#### 4.1.3 模型求解

##### 4.1.3.1 QPSK 调制模型

题目给出的星座图如图 4-1-2 所示。按照问题分析，我们先求每个标准点的坐标。设两个相邻点之间的距离是  $d$ ，4 个点的坐标为  $(\pm \frac{d}{2}, \pm \frac{d}{2})$ ，通过功率归一化建立方程可解出坐标：

$$\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) * 4/4 = 1$$

易知  $d = \sqrt{2}$ ，四个点的坐标为  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ 。由于 QPSK 星座图各点是按方形等距分布，所以各标准点的区域很容易确定，区域边界为两点连线的中垂线，在本题中就是两坐标轴。具体区域范围见图 4-1-2。

得到标准点区域之后，下一步是通过积分求点落在各区域的概率。以标准点 11 为例，原符号为 11，加上高斯噪声后的点的概率分布符合均值在  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，标准差为  $\sigma$  的正态分布。

$$f_{11}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

符号不出错，还能被判决为 11 的概率为在第二象限内的积分值：

$$P_{11,0} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f_{11}(x, y) dx dy$$

错 1 个 bit 和错 2bit 的概率分别为：

$$P_{11\_1} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{11}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f_{11}(x, y) dx dy$$

$$P_{11\_2} = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f_{11}(x, y) dx dy$$

11 标准点的 BER 为:

$$BER_{11} = \frac{(1 * P_{11\_1} + 2 * P_{11\_2})}{2}$$

综合 4 个标准点的结果就可以得到相应 SNR 下的最终 BER。

$$BER = \frac{(BER_{11} + BER_{10} + BER_{01} + BER_{00})}{4}$$

在 matlab 上以 0.005 为步长, 在 0.005 到 0.6 之间选取 120 个点作为  $\sigma$  的可能取值进行仿真, 并画出了对应的 SNR 和 BER 的曲线, 如图 4-1-3 所示。此外本文还画出了  $E_b/P_n$  (dB) 和 BER 的曲线图 4-1-4, 其中  $E_b = P_s/M$ , 表示每个 bit 数据的功率。 $M$  为符号所拥有的比特数, 对应于 QPSK 中  $M = 2$ 。

由曲线图可知, 当 BER=0.02 时, SNR 容限点为 6.90dB。

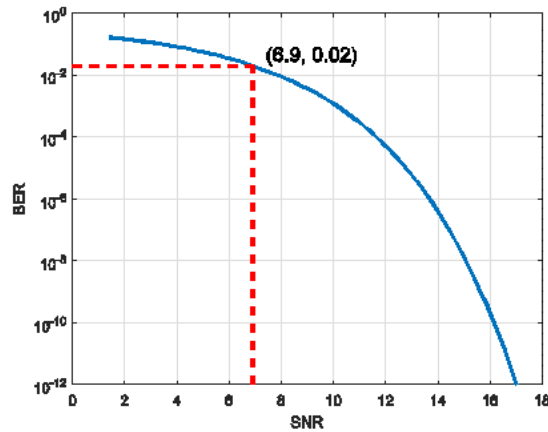


图4-1-3 QPSK BER和SNR关系图

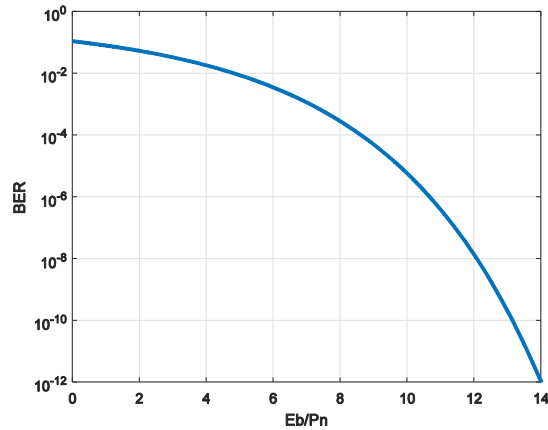


图 4-1-4 QPSK BER 和  $E_b/P_n$  关系图

#### 4.1.3.2 8QAM 调制模型

星座图如题所示, 8QAM 是三种情况中最复杂的一种。相邻点距离相等设为

d, 8 个点坐标分别为 $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}d, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}d), (\pm \frac{(\sqrt{3}+1)d}{2}, 0), (0, \pm \frac{(\sqrt{3}+1)d}{2})$ 。进行功率归一化：

$$\left( \left( \left( \frac{d}{2} \right)^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 + \left( \frac{(\sqrt{3}+1)d}{2} \right)^2 \right) * 4 \right) / 8 = 1$$

解得 $d = \sqrt{\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}}$ 。接下来确定每个标准点所对应的范围，我们主要看 101 和 001 这两个具有代表性的点。图 4-1-5 展示了各标准点所占区域。

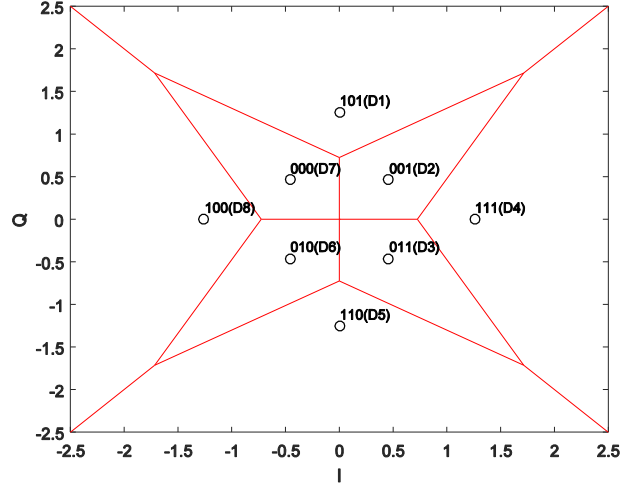


图 4-1-5 8QAM 星座图各点所占区域

原符号为 101，加上高斯噪声后的点的概率分布符合均值在 $(0, \frac{\sqrt{3}+1}{2}d)$ ，标准差为 $\sigma$ 的正态分布。

$$f_{101}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}+1}{2}d)^2)}{2\sigma^2}}$$

101 的区域是由 4 条线段的中垂线围成，分别是 101 与 000，101 与 001，101 与 100，101 与 111 这四条线段的中垂线。区域 D1 的表达形式如下：

$$\begin{cases} y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \\ y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \\ y \geq x \\ y \geq -x \end{cases}$$

错 0, 1, 2, 3 个比特的概率分别如下：

$$P_{101_0} = \iint_{D1} f_{101}(x, y) ds$$

$$P_{101_1} = \iint_{D2+D4+D8} f_{101}(x, y) ds$$

$$P_{101\_2} = \iint_{D3+D5+D7} f_{101}(x,y) ds$$

$$P_{101\_3} = \iint_{D6} f_{101}(x,y) ds$$

101 标准点的 BER 为:

$$BER_{101} = (1 * P_{101\_1} + 2 * P_{101\_2} + 3 * P_{101\_3}) / 3$$

原符号为 001, 加高斯噪声后, 点的概率分布符合均值在 $(\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ , 标准差为  $\sigma$  的正态分布。

$$f_{001}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{d}{2}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

001 的区域是由 4 条线段的中垂线围成, 分别是 001 与 101, 001 与 111, 001 与 011, 001 与 000 这四条线段的中垂线。区域 D2 的表达形式如下:

$$\begin{cases} y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \\ y \geq \sqrt{3}x - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sqrt{6-2\sqrt{3}} \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

类似的, 我们也可以求出 001 标准点的 $BER_{001}$ 。最后我们平均 8 个点的误比特率可以得到整个星座图的 BER。

在 matlab 上以 0.005 为步长在 0.005 到 0.6 间选取 120 个点作为 $\sigma$ 取值进行仿真, 并画出对应的 SNR, BER,  $E_b/P_n$ (dB) 曲线, 如图 4-1-6 和图 4-1-7 所示。

由曲线图可知, 当 BER=0.02 时, SNR 容限点为 10.34dB。

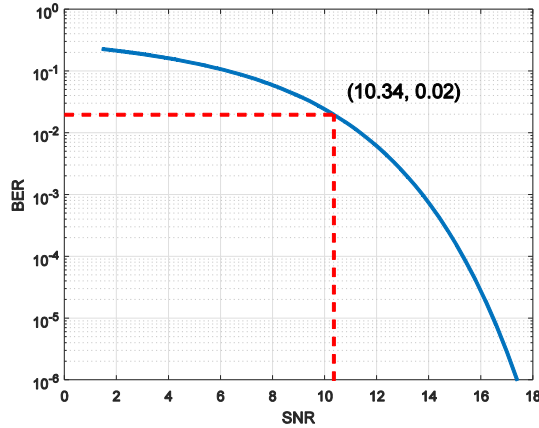


图 4-1-6 8QAM BER 和 SNR 关系图

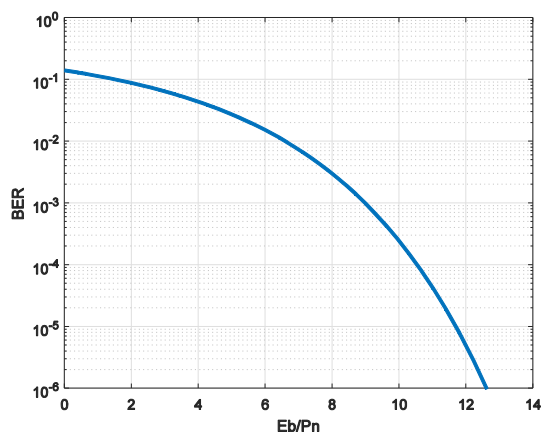


图4-1-7 8QAM BER和 $E_b/P_n$ 关系图

#### 4.1.3.3 16QAM 调制模型

16QAM 星座图是 QPSK 星座图扩大版，所以解题思路相似。能量归一化公式：

$$\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2}{4} = 1$$

解得 $d = \sqrt{\frac{2}{5}}$ 。各点所占区域在题图中以虚线分割。用积分的方法可以求得各标准点的 BER，再取他们的均值即可计算出整个星座图的 BER。表 4-1-1 展示了当 $\sigma = 0.3$ 时星座图右上角四个点算出来的比特错误率， $P_0$ - $P_4$ 分别表示错 0 个比特到错 4 个比特的概率。

表4-1-1 16QAM部分标准点在 $\sigma = 0.3$ 的误码情况表

点	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	BER
0101	0.5015	0.4122	0.0858	4.55e-4	6.12e-7	0.1463
1101	0.6048	0.3514	0.0435	3.41e-4	6.12e-7	0.1098
0111	0.6048	0.3514	0.0435	3.41e-4	6.12e-7	0.1098
1111	0.7295	0.2479	0.0224	2.27e-4	6.12e-7	0.0734

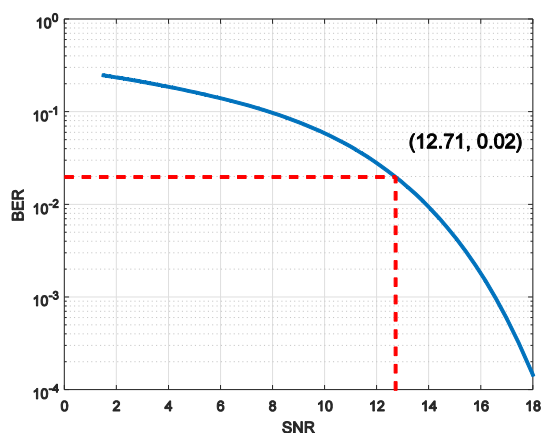


图4-1-8 16QAM BER和SNR关系图

从表中我们可以看出一些规律，1111这个点的误比特率最低，因为它所占的



区域可以延伸到无穷；0101误比特率最高，因为它的区域是一个封闭的小方阵；1101和0111性能中等，他们的区域是一个半封闭区间。由此我们可以推断：区域的面积对误比特率有着至关重要的作用，以及高斯分布的长尾区域对性能有一定的影响。这对我们问题三改善星座图有一定的指导作用。

本文以0.005为步长，在0.005到0.6间选取120个点仿真，并画出了对应的SNR， $E_b/P_n$  (dB) 和BER的曲线。如图4-1-8和4-1-9所示。

由曲线图可知，当BER=0.02时，SNR容限点为12.71dB。

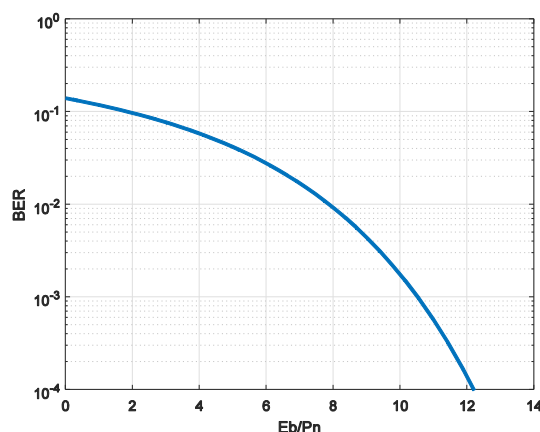


图4-1-9 16QAM BER和 $E_b/P_n$ 关系图

#### 4.1.3.4 三种调制方式的比较

我们把3种调制方式的误比特率性能画在一张图上，如图4-1-10。从图中可以发现，高阶的调制方式是以牺牲误比特率的前提下达到更高的频谱效率，也就是高阶调制解调时需要更高的SNR容限点。

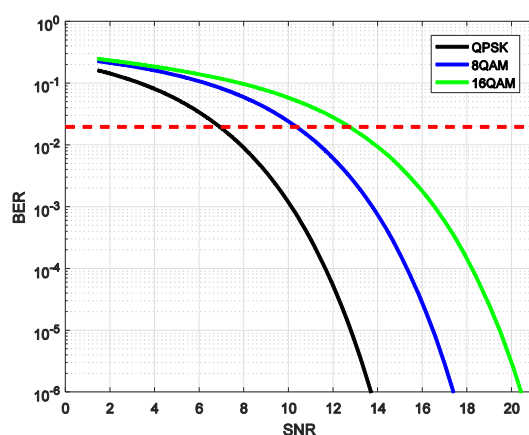


图4-1-10 三种调制方式的误比特率比较

## 4.2 子问题2的模型建立与求解

### 4.2.1 问题分析

原始发射机发射的信号，在传输的过程中受到传输介质等要素的影响，其信号强度会不可避免地随着传输距离的增长而衰减。为了使每一跨的入跨原始信号功率和出跨原始信号功率保持一致，还需要引入放大器对每一跨中的传输信号进行放大。而放大器本身的噪声和光纤的传输噪声将会随着原始数据信号一同传输，并随着传播跨数的增加而逐渐累加，由于总传输信号中的原始信号功率在入跨和

出跨时始终保持不变，故信号的信噪比将随着传输跨数的增多而逐渐降低。在本题中，我们以 BER=0.02 时对应的 SNR 容限点作为门限阈值，对每一跨的输出信号进行判断。对于 SNR 大于阈值的信号，认为其可以继续传播。对每一跨的输入信号、噪声信号和输出信号逐一进行计算，直到某一跨的输出信号不符合条件。以该跨的前一跨作为信号可以传输到的最远跨，获得最终结果。

#### 4.2.2 模型建立

##### a 目标函数

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_s}{P_n} \right)$$

##### b 光纤参数分析

原始光纤功率传输函数为

$$P_{\text{fiber-o}} = P_{\text{fiber-i}} e^{-\alpha L}$$

根据题目描述，信号每传输 15km，光功率衰减一半。这一性质将帮助我们获得相关参数。通过这一性质代入计算，获得最终的光纤功率传输函数如下。

$$P_{\text{fiber-o}} = P_{\text{fiber-i}} e^{-\frac{\ln 2}{15} L}$$

对于光纤的非线性噪声，其等效噪声功率与入纤功率近似为平方关系，光纤功率为 1mW 时的非线性噪声约等于单个放大器噪声的 2/3。根据本题题意，可以获得光纤非线性噪声的表达式如下：

$$P_{\text{fiber-noise-o}} = P_{\text{fiber-noise-i}} e^{-\frac{\ln 2}{15} L}$$

$$P_{\text{fiber-noise-o}} = \frac{2}{3} * P_{\text{fiber-i}}^2 * P_{\text{amp-noise}}$$

##### c 放大器增益分析

根据题目描述，Gain 为补偿光纤衰减所对应的功率增益。由题意可知，每一跨的尾部假设放大器会刚好补偿该衰减。这一性质将帮助我们获得放大器的功率增益相关参数。依该性质获得方程如下：

$$P_{\text{sig-i}} = P_{\text{sig-i}} * e^{-\frac{\ln 2}{15} L} * \text{Gain}$$

通过这一性质代入计算，获得最终的放大器增益如下：

$$\text{Gain} = e^{\frac{\ln 2}{15} L}$$

##### d 放大器噪声信号分析

放大器会引入自发辐射噪声，公式如下：

$$P_{\text{amp-noise}} = 2\pi h f B \left( NF - \frac{1}{\text{Gain}} \right)$$

##### e 放大器总输入信号分析

放大器的总输入信号包括经过光纤传输衰减后的单跨输入信号和光纤非线性噪声，以及放大器的自发辐射噪声。

$$P_{\text{amp-i}} = (P_{\text{sig-i}} + P_{\text{fiber-noise-i}}) e^{-\frac{\ln 2}{15} L} + P_{\text{amp-noise}}$$

##### f 放大器总输出信号分析

放大器的总输入信号经过放大器的补偿后获得对应的输出信号。

$$P_{amp-o} = Gain P_{amp-i}$$

g 每跨输出信噪比分析

根据题目描述，每一跨的输出信号功率为：

$$P_{s-step-o} = P_{sig-i} * e^{-\frac{\ln 2}{15}L} * Gain = P_{sig-i}$$

根据题目描述，每一跨的输出噪声功率为：

$$P_{n-step-o} = (P_{fiber-noise-i} * e^{-\frac{\ln 2}{15}L} + P_{amp-noise}) * Gain$$

化简为：

$$P_{n-step-o} = (P_{fiber-noise-o} + P_{amp-noise}) * Gain$$

根据题目描述，每一跨的输出信噪比为：

$$SNR_{step} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{s-step-o}}{P_{n-step-o}} \right)$$

根据题目描述，代入化简每一跨的输出信噪比为：

$$SNR_{step} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{sig-i}}{(P_{fiber-noise-o} + P_{amp-noise}) * Gain} \right)$$

#### 4.2.3 模型求解

该题通过迭代进行求解，具体算法流程如下：

- 根据不同调制格式，从前一问的解答中选取对应的 SNR 容限点作为阈值。
- 对于每一跨，获得所有入跨信号的总功率。对于第一跨，所有入跨信号的总功率即为发射机的总发射功率。对于后面的每一跨，所有入跨信号的总功率即为上一跨的输出信号总功率。
- 计算得到放大器的自发辐射噪声功率和放大器增益。对于任意一跨，这两个参数均保持不变。
- 计算得到光纤的非线性噪声经过光纤传输衰减后进入放大器时的信号功率。
- 根据假设得到原始信号输入功率。
- 计算每一跨的输出信噪比和输出总功率。
- 将输出信噪比和阈值进行比较。如果信噪比大于阈值，说明信号可以继续向下一跨传输，继续迭代上述步骤。否则说明信号在该跨的传输结果无法满足实际需要，以该跨的上一跨作为信号可以传输到达的最远跨。
- 输出计算得到的最远传输距离结果。

#### 4.2.4 结论与分析

三种调制格式的编码方案对应的最远传输距离如表 4-2-1 所示：

表 4-2-1 最远传输距离一览表

调制格式	单跨传输距离	跨段数量	最远传输距离
QPSK	80km	17	1360km
QPSK	100km	7	700km
8QAM	80km	7	560km
8QAM	100km	3	300km
16QAM	80km	4	320km

16QAM	100km	1	100km
-------	-------	---	-------

对上述表格数据进行可视化分析可以得出如下结论：

- a 单跨传输距离为 80km 时，QPSK 传输格式最远传输距离为 1360km，8QAM 传输格式最远传输距离为 560km，16QAM 传输格式最远传输距离为 320km。综上，在单跨传输距离为 80km 时，以上调制方式的链路信号最远可以传输 1360km。
- b 单跨传输距离为 100km 时，QPSK 传输格式最远传输距离为 700km，8QAM 传输格式最远传输距离为 300km，16QAM 传输格式最远传输距离为 100km。综上，在单跨传输距离为 100km 时，以上调制方式中链路信号最远可以传输 700km。

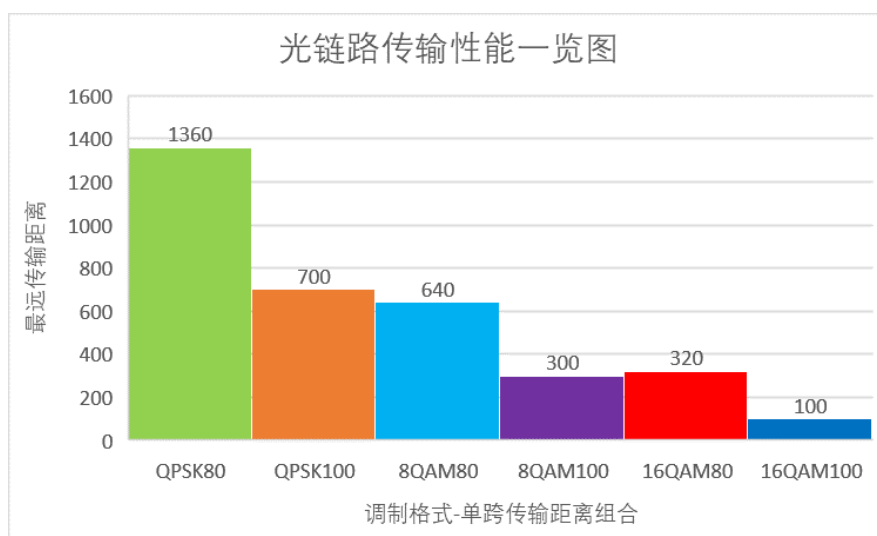


图 4-2-1 光链路传输性能一览表

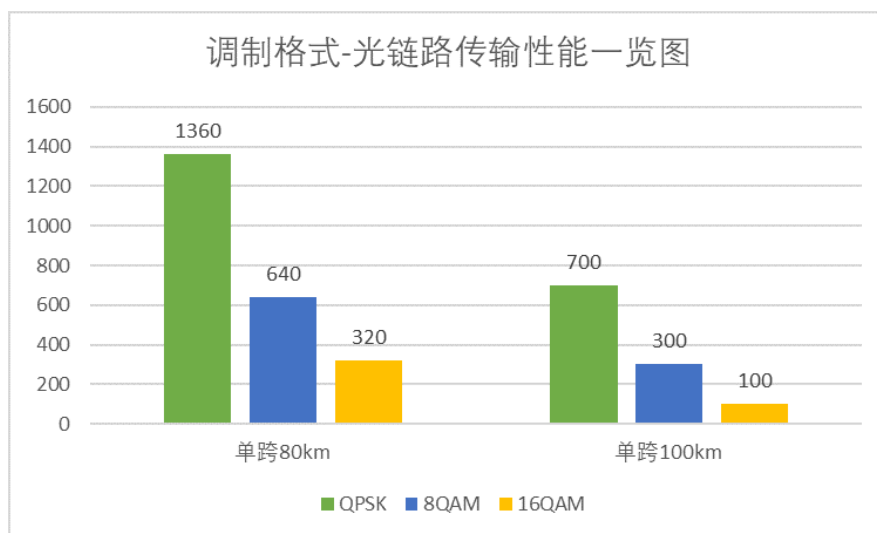


图 4-2-2 调制格式-光链路传输性能一览表

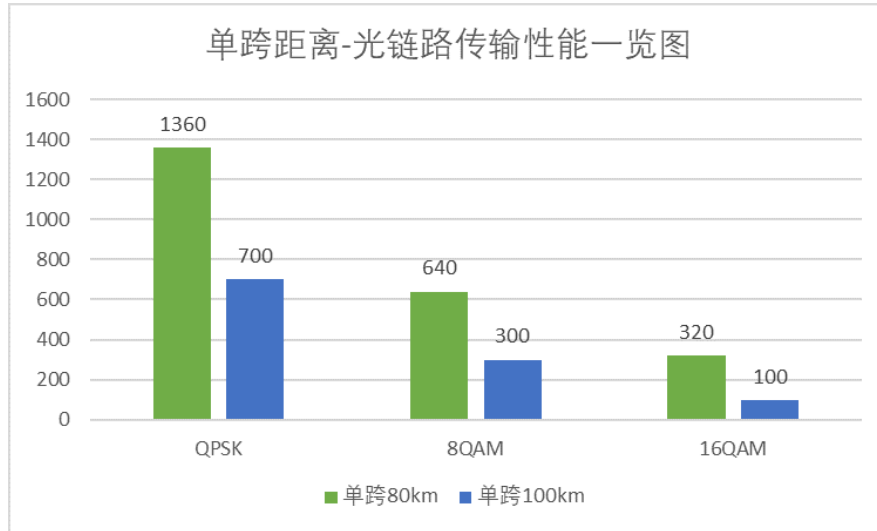


图 4-2-3 单跨距离-光链路传输性能一览图

- c 在以上所有考虑到的调制格式-单跨传输距离组合中，采用 QPSK 调制格式并选择 80km 单跨传输距离时，可以实现相对最远的传输距离 1360km。传输距离性能相对较差的是采用 16QAM 调制格式，单跨传输距离为 100km 的模式，最远传输距离为 100km。
- d 在限定单跨传输距离的条件下，不论单跨传输距离为 80km 抑或是 100km，采用 QPSK 调制的链路性能均为最优，其次为 8QAM 调制，采用 16QAM 调制方式的链路最远传输距离均最短。
- e 在限定调制格式的条件下，不论是采用 QPSK 调制，还是采用 8QAM 调制，抑或是采用 16QAM 调制，最远传输距离都会随着单跨传输距离的增加而减少。

## 五、 问题二模型建立与求解

### 5.1 子问题 1 的模型建立与求解

#### 5.1.1 问题分析

光传送网的规划要遵循以下原则，首先所有的城市群都要连接到传送网中，其次，任意两个城市之间只能存在一条连接，且不含中间节点。在遵循以上原则的条件下，使得光传送网的价值总和最大。因此，可以考虑分两个步骤解决该问题，首先 11 条连接可以实现 12 个城市群的无环连接图，找到价值最大的无环连接图，再从剩下可选的连接里选择价值较大的连接。16 条和 33 条连接均可以采用该方法进行构建。

#### 5.1.2 模型建立

由问题分析可知，该问题的目标函数为：

$$\max \left( \sum_{f \in F} Value_f W_f \right)$$

根据子问题 1 提出的实际问题，这里设定约束条件为：

$$\sum_{f \in F} W_f = 16 \text{ or } 33$$

所有建设的连接能够将所有 12 个城市群相连。

$$Value_f = Capacity_f * \sqrt{Population_{f1} * Population_{f2}}$$

计算连接价值所需人口、容量数据如下表所示。

表 5-1-1 城市群人口（数据来源[7]）

城市群	人口（万）
哈尔滨	955
北京&天津	3727
上海	2418
郑州	988
武汉	1089
西安	845
重庆	3075
成都	1604
昆明	480
广州&深圳	2703
拉萨	90
乌鲁木齐	267

表 5-1-2 城市群之间连接的容量（数据来源[9]及表 1-1）

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	16	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
北京&天津	16	0	16	16	16	16	8	8	8	8	8	8
上海	8	16	0	16	16	8	8	8	8	8	8	8
郑州	8	16	16	0	32	32	16	8	8	8	8	8
武汉	8	16	16	32	0	16	16	16	8	16	8	8
西安	8	16	8	32	16	0	32	16	8	8	8	8
重庆	8	8	8	16	16	32	0	32	16	16	8	8
成都	8	8	8	8	16	16	32	0	16	8	8	8
昆明	8	8	8	8	8	8	16	16	0	16	8	8
广州&深圳	8	8	8	8	16	8	16	8	16	0	8	8
拉萨	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	0	8
乌鲁木齐	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	0

由问题分析可知，所有连接中必然存在着 11 条连接组成的无环连接图，因此该目标函数可以分解为两部分，首先最大化无环连接图的价值，其次最大化其余连接的价值。最大化无环连接图的价值，即在连通赋权图上求权最大的生成树。基于 12 个节点和连接的价值矩阵，构造连通赋权图  $G = (V, E, Value)$ ，其中  $V$  表示节点， $E$  表示连接。

### 5.1.3 模型求解

对于分解后的目标函数，第一部分需要在 12 个节点的连通赋权图上求权最大的生成树，采用 prim 最大生成树算法进行求解。

对于分解后的目标函数，第一部分需要在 12 个节点的连通赋权图上求权最大的生成树，采用 prim 最大生成树算法进行求解。

对于连通赋权图  $G = (V, E, \text{Value})$ ，设置两个集合 P 和 Q，其中 P 用于存放 G 的最大生成树中的顶点，集合 Q 存放 G 的最大生成树的边。令集合 P 的初值为  $P = \{v_1\}$ （假设构造最大生成树时，从节点  $v_1$  出发），集合 Q 的初值为  $Q = \emptyset$ 。Prim 算法的思想时，从所有  $p \in P, v \in V - P$  的边中，选取具有最小权重的边  $pv$ ，将定点  $v$  加入集合 P 中，将边  $pv$  加入集合 q 中，如此不断重复，直至  $P=V$  时，最大生成树构造完成，这时集合 Q 包含了最大生成树的所有边。

Prim 算法的步骤如下所示。

```
a   $P = \{v_1\}, \quad Q = \emptyset$ 
b  while  $P \neq V$ 
    找最小边  $pv$ ，其中  $p \in P, v \in V - P$ 
         $P = P + \{v\};$ 
         $Q = Q + \{pv\};$ 
End
```

### 5.1.4 结论与分析

根据 prim 算法生成的最大价值的无环连通图如下所示。生成的无环连接图的总价值的最大值为 373750。

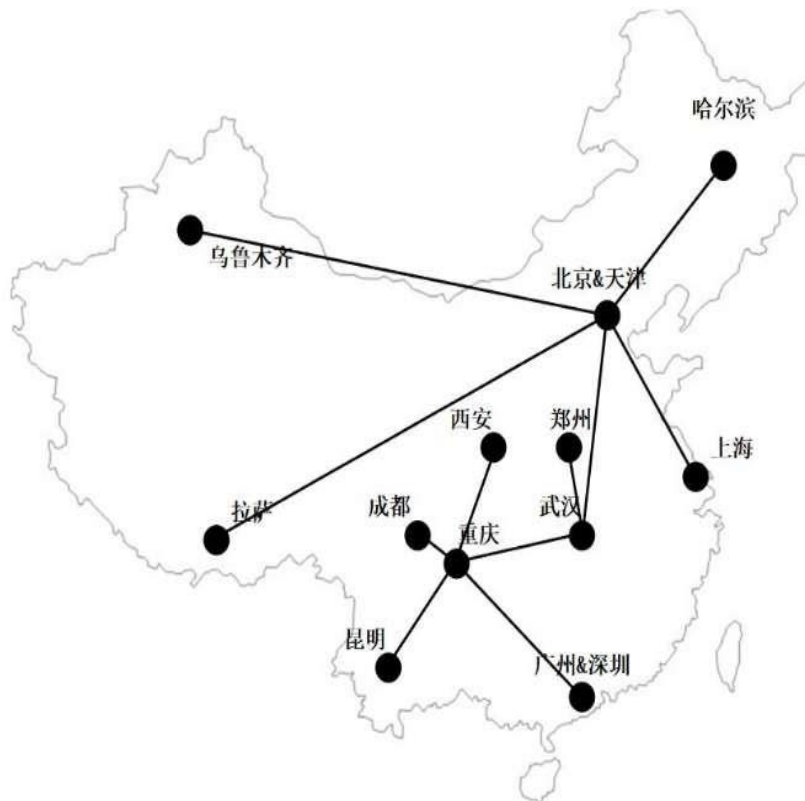


图 5-1-1 价值最大的无环连通图

对于分解后的目标函数的第二部分，只需选择剩余可选连接中价值最大的几条即可。对于 16 条连接的情况，结果如图 5-1-2 所示，其中黑色的连接为最大生成树得到的连接，红色为剩余连接中价值最大的 5 条。16 条连接的总价值的最大值为 5147.3。

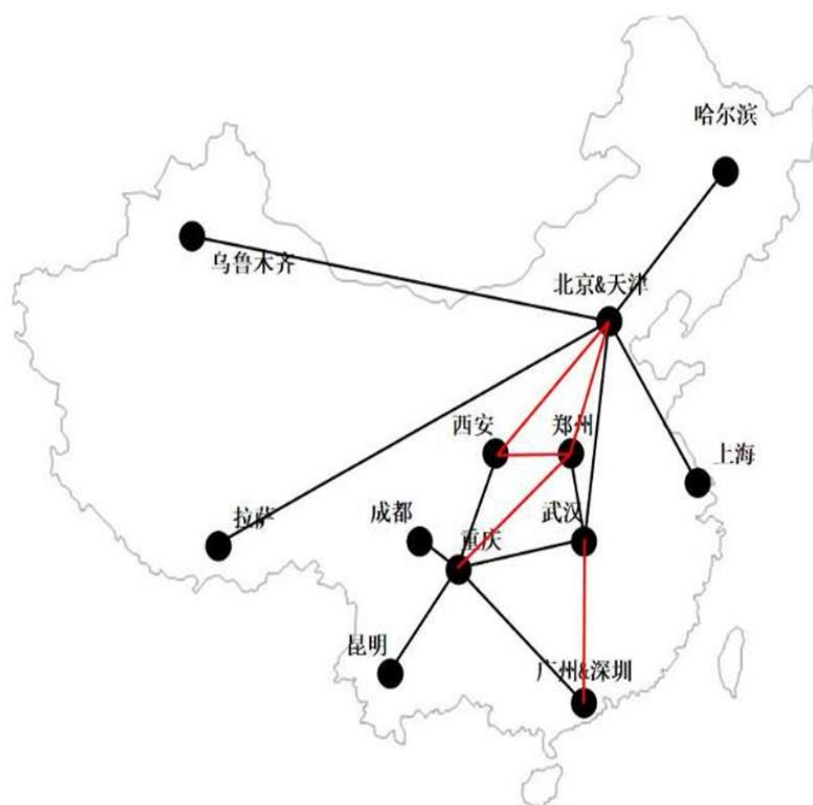


图 5-1-2 16 条连接的最大价值光传输网

同理，对于 33 条连接的情况，结果如图 5-1-3 所示，其中黑色和红色连接意义和 16 条连接的情况相同，蓝色为在 16 条连接基础上增加的连接。扩展到 33 条连接的总价值的最大值为 8418.6。

由连接的价值定义可知，任意两个城市的人口越多和距离越近，则这两个城市之间的连接价值越高，图 5-1-1 的 11 条连接的分布大致符合该规律。更进一步，通过对所有连接的价值进行排序，可以发现，成都-重庆、重庆-西安、北京-上海、重庆-广州、武汉-郑州、武汉-北京、北京-郑州、北京-哈尔滨这 8 条连接是价值最高的，并且已经存在于图 5-1-1 中。对于乌鲁木齐、拉萨和昆明这三个城市，需要用三条连接将他们接入已有连接的城市，而乌鲁木齐-北京是所有和乌鲁木齐直接相连的连接中价值最大的，同样，拉萨-北京，昆明-重庆是备选连接中价值最大的连接。因此，图 5-1-1 所得的无环连接图是价值最大的无环连通图，进而可知，图 5-1-2 和图 5-1-3 得到的光传输网是各自连接数约束下价值最大的光传输网。



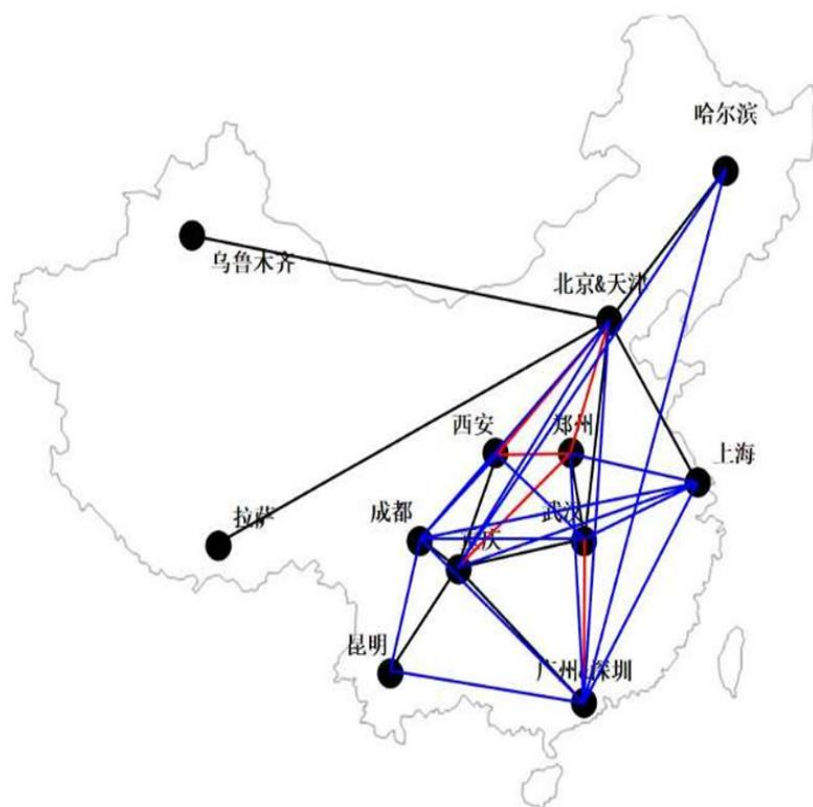


图 5-1-3 33 条连接的最大价值光传输网

## 5.2 子问题 2 的模型建立与求解

### 5.2.1 问题分析

该问题的要求下，光传送网的规划要遵循以下原则，首先所有的城市群都要连接到传送网中；其次，任意两个城市之间必须存在通信容量，可以通过直连的方式实现，也可以通过中间节点实现；最后，任意两个城市之间可以存在多条连接。在遵循以上原则的条件下，使得光传送网的价值总和最大。

因此，该问题仍可以分为两个部分进行求解。首先 11 条连接可以实现 12 个城市群的无环连接图，找到价值最大的无环连接图，结果如图 5-1-1 所示。根据图 5-1-1 所示的连接图，通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量，实现任意城市之间都有通信容量，并且使得传输网的价值最大。再依次添加剩余的连接，每次添加连接后通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量，最大化总价值。16 条和 33 条连接均可以采用该方法进行构建。

对于分解后的第一个问题，连接图采用子问题 1 中的方法生成，结果如图 5-1-1 所示。调整中间节点传输方式，最大化传输网价值的问题可以通过线性规划的方法求解。对于分解后的第二个问题，每次添加连接的方式有两类，一类时添加到已有连接的两个城市中间，另外一类是添加到没有连接的两个城市中间。对于添加到已有连接的两个城市中间的情况，只改变了对应连接的容量，仍可按原有模型进行优化；对于添加到没有连接的两个城市中间的情况，需要进一步讨论，具体过程详见下文求解过程。

当由市扩大到省（区）的影响时，可以只考虑人口的变化，通过省（区）的

人口按照原先的方法重新求解即可。

### 5.2.2 模型建立

由前文问题分析可知，所有连接中必然存在着 11 条连接组成的无环连接图，因此该问题可以分解为两部分，首先求解最大价值的无环连接图，其次调整中间节点传输方式，最大化传输网价值。求解最大价值的无环连接图的模型见上文。调整中间节点传输方式，最大化传输网价值的数学模型如下所示。

由问题分析可知，该问题的目标函数为：

$$\max \left( \sum_{i,j} C_{i,j} \sqrt{P_i P_j} \right)$$

根据子问题 2 提出的实际问题，这里设定约束条件为：

$$\sum_{m(i,j),n(i,j)} C_{m(i,j),n(i,j)} = C_{i,j}^{Tot}$$

$$\forall i,j, \quad C_{i,j} \geq 0.1$$

### 5.2.3 模型求解与分析

求解最大价值的无环连接图的方法与子问题 1 中相同，结果见图 5-1-1。

对于通过调整中间节点传输方式，求解无环连接图的最大传输网价值的问题，由于该问题是线性有约束优化问题，可以列出目标函数，以及等式和不等式约束，采用常见的线性规划方法进行求解。目标函数的最优解如下所示，此时光传输网的最大总价值为 351650。

表 5-2-1 无环连接图的通信容量分配策略

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
北京&天津	15	0	15	0.1	12.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	7
上海	0.1	15	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
郑州	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
武汉	0.1	12.6	0.1	31	0	0.1	12.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
西安	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
重庆	0.1	0.1	0.1	0.1	12.6	31	0	31	15	15	0.1	0.1
成都	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	31	0	0.1	0.1	0.1	0.1
昆明	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0	0.1	0.1	0.1
广州&深圳	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0.1	0	0.1	0.1
拉萨	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.1
乌鲁木齐	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0

接下来我们需要依次添加剩余的连接，每次添加连接后通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量，最大化其总价值。对于该问题，首先需要考虑调整容量会对光传输网的总价值带来怎样的影响。由于任意的城市之间通过中间节点进行传输的方式进行通信，对传输网总价值的影响相互独立，因此，我们抽象出

三点模型来进行分析。

考虑三个城市 A、B、C，按照下图方式相连，其人口数分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，连接 AB 和连接 BC 的容量分别为  $m$  和  $n$ 。从 A 到 C 的容量为  $k$ ， $0 < k \leq m$ ，且  $0 < k \leq n$ 。

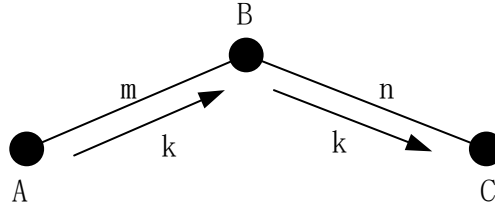


图 5-2-1 三节点传输模型

对于图 5-2-1 的三点模型，在采用中间节点 B 实现 AC 间的通信前，该模型的总价值为  $Value_1 = m\sqrt{ab} + n\sqrt{bc}$ ，采用中间节点传输后，该模型的总价值为  $Value_2 = (m - k)\sqrt{ab} + (n - k)\sqrt{bc} + k\sqrt{ac}$ 。前后价值之差为  $Value_2 - Value_1 = k(\sqrt{ac} - \sqrt{ab} - \sqrt{bc})$ 。当  $\sqrt{ac} - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} > 0$  时，采用中间节点传输能够带来提升总价值。因此，我们在总共 12 个城市群中随机选取 3 个城市，验证其人口关系是否满足上述条件，共需验证  $C_3^{12}$  组。实验结果表明，只有当乌鲁木齐、拉萨和昆明作为中间节点时，可以通过采用中间节点传输的方式提升网络价值，且提升的价值远小于最大的直连接，重庆-成都。同样，我们对 4 点及以上节点的模型进行了验证，实验结果表明 4 点及以上节点的模型中能够通过中间节点方式提升总价值的组合里，中间节点至少有一个时乌鲁木齐、拉萨和昆明。并且，同等情况下，4 点及以上节点的模型对总价值的提升要小于三点模型。

通过上面的分析和实验可知，当将剩下的连接添加到已有的无环连接图中已有连接的两个城市中间时，由于乌鲁木齐、拉萨和昆明不是中间节点，因此通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量不能增大传输网的总价值，因此添加了连接之后的传输网的通信容量分配策略和添加前基本相同，只改变新加入连接的两城市之间通信容量。此时，光传输网的总价值为分配容量后的最大价值的无环连通图的价值和新加入的连接的价值之和。要使得总价值最大，需选取价值最大的连接，即重庆-成都。为验证该结论，我们修正了约束，重新进行了优化，优化结果与分析结果相同。

对于将剩下的连接添加到已有的无环连接图中没有直接连接的两个城市中间的情况，分析如下。当新加入的连接不与乌鲁木齐、拉萨和昆明直接相连时，通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量不能增大传输网的总价值，因此选择重庆-成都能够使得总价值最大。使得乌鲁木齐、拉萨和昆明成为中间节点时，通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量的方法，给传输网带来的价值提升为新加入的连接的价值和调整容量后的价值提升之和。经过统计，北京-拉萨-重庆的三点结构可以带来最大的价值提升，最多可以为总价值带来 296.68 的提升，该提升小于重庆到成都（710.68）的连接。因此，这种情况下传输网的总价值小于添加到重庆到成都之间的情况。

综上，该问题的最优解为按第一步的方法求解得到无环连接图的最大传输网价值，然后将剩下的连接均加入到重庆-成都之间。结果如下图和下表所示。图

5-2-2 中所示黑色表示只有一条连接，红色表示有 6 条连接。图 5-2-3 中所示黑色表示只有一条连接，蓝色表示有 23 条连接。

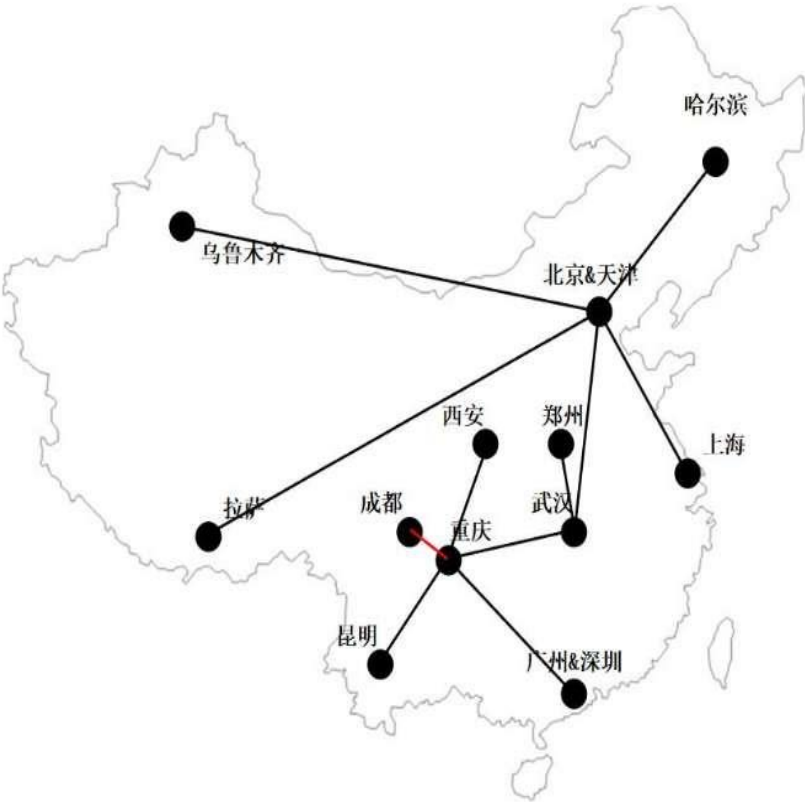


图 5-2-2 16 条连接的最大价值光传输网

表 5-2-2 16 条连接的最大价值光传输网通信容量分配策略

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
北京&天津	15	0	15	0.1	12.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	7
上海	0.1	15	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
郑州	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
武汉	0.1	12.6	0.1	31	0	0.1	12.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
西安	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
重庆	0.1	0.1	0.1	0.1	12.6	31	0	191	15	15	0.1	0.1
成都	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	191	0	0.1	0.1	0.1	0.1
昆明	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0	0.1	0.1	0.1
广州&深圳	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0.1	0	0.1	0.1
拉萨	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.1
乌鲁木齐	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0

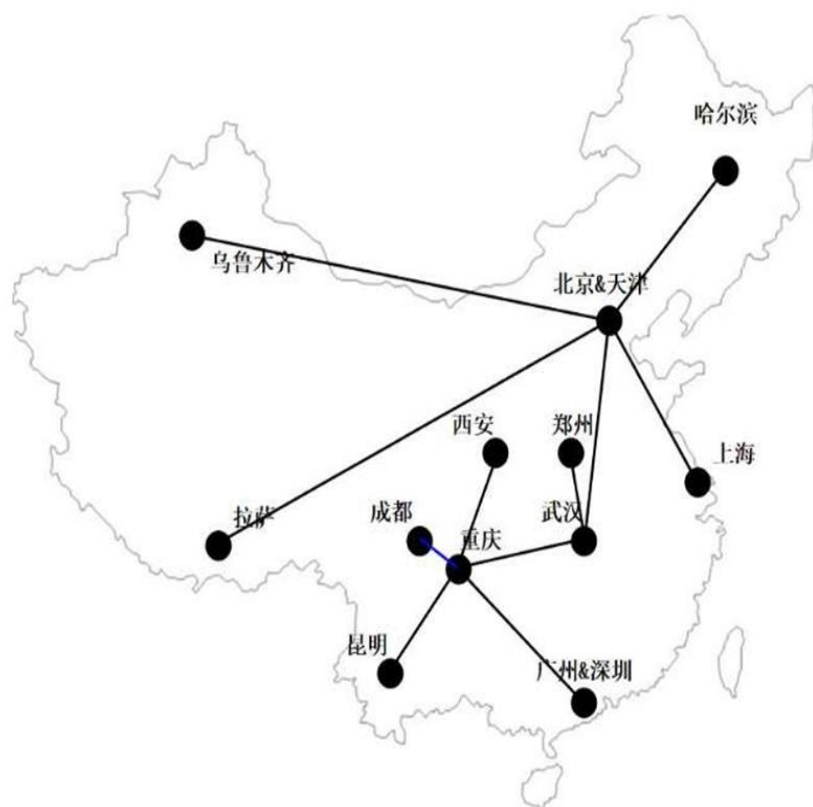


图 5-2-3 33 条连接的最大价值光传输网

表 5-2-3 16 条连接的最大价值光传输网通信容量分配策略

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
北京&天津	15	0	15	0.1	12.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	7
上海	0.1	15	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
郑州	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
武汉	0.1	12.6	0.1	31	0	0.1	12.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
西安	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
重庆	0.1	0.1	0.1	0.1	12.6	31	0	735	15	15	0.1	0.1
成都	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	735	0	0.1	0.1	0.1	0.1
昆明	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0	0.1	0.1	0.1
广州&深圳	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0.1	0	0.1	0.1
拉萨	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.1
乌鲁木齐	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0

当由市扩大到省（区）时，只考虑人口的影响。新的人口数据如表 5-2-4 所示，新的人口数据采用城市群所在省（区）人口。采用相似方法求解。结果如图 5-2-4 和图 5-2-5 所示。图 5-2-4 中所示黑色表示只有一条连接，红色表示有 6 条连接，总价值为 23510.5。图 5-2-5 中所示黑色表示只有一条连接，蓝色表示有

23 条连接，总价值 64254.4。

表 5-2-4 城市群所在省区人口（数据来源[7]）

城市群	人口
哈尔滨	3799
北京&天津	3735
上海	2420
郑州	9532
武汉	5885
西安	3813
重庆	3048
成都	8262
昆明	4771
广州&深圳	10999
拉萨	331
乌鲁木齐	2398

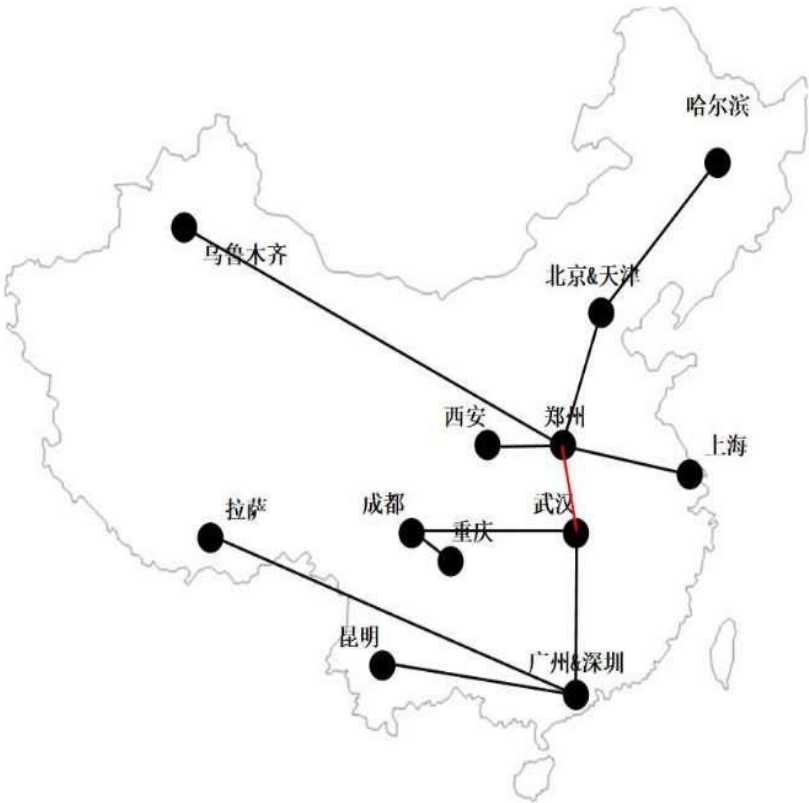


图 5-2-4 按省区人口计算 16 条连接的最大价值光传输网

表 5-2-5 按省区人口计算 16 条连接的最大价值光传输网的分配策略

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
北京&天津	15	0	0.1	14.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
上海	0.1	0.1	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
郑州	0.1	14.1	15	0	188.5	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7
武汉	0.1	0.1	0.1	188.5	0	0.1	0.1	14.1	0.1	13.4	0.1	0.1
西安	0.1	0.1	0.1	31	0.1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
重庆	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1
成都	0.1	0.1	0.1	0.1	14.1	0.1	31	0	0.1	0.1	0.1	0.1
昆明	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	15	0.1	0.1
广州&深圳	0.1	0.1	0.1	0.1	13.4	0.1	0.1	0.1	15	0	7	0.1
拉萨	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	0	0.1
乌鲁木齐	0.1	0.1	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0

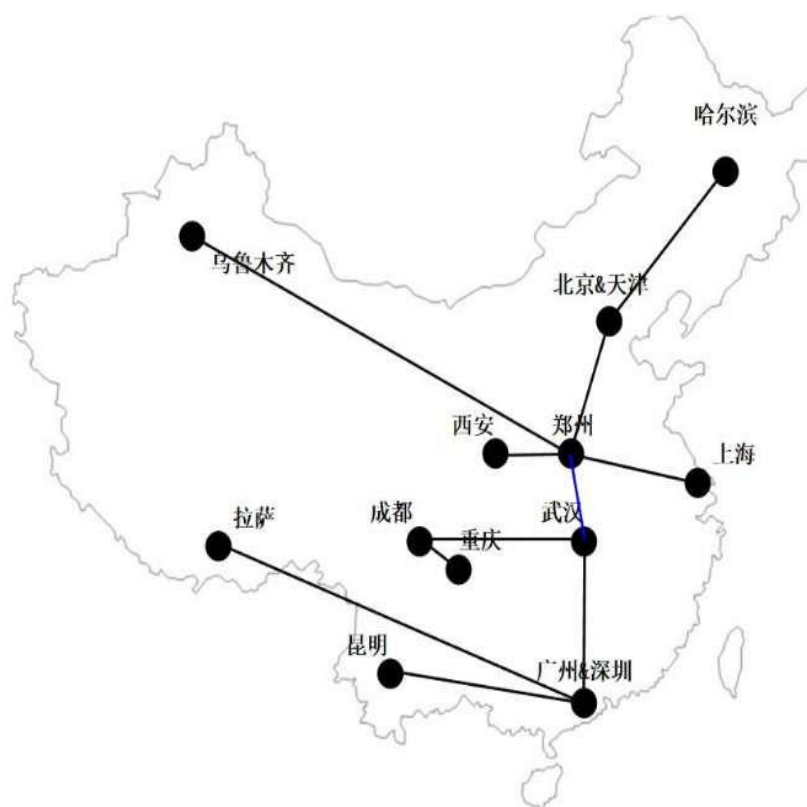


图 5-2-5 按省区人口计算 33 条连接的最大价值光传输网

表 5-2-6 按省区人口计算 33 条连接的最大价值光传输网的分配策略

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
北京&天津	15	0	0.1	14.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
上海	0.1	0.1	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
郑州	0.1	14.1	15	0	732.5	31	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7
武汉	0.1	0.1	0.1	732.5	0	0.1	0.1	14.1	0.1	13.4	0.1	0.1
西安	0.1	0.1	0.1	31	0.1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
重庆	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	31	0.1	0.1	0.1	0.1
成都	0.1	0.1	0.1	0.1	14.1	0.1	31	0	0.1	0.1	0.1	0.1
昆明	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0	15	0.1	0.1
广州&深圳	0.1	0.1	0.1	0.1	13.4	0.1	0.1	0.1	15	0	7	0.1
拉萨	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	0	0.1
乌鲁木齐	0.1	0.1	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0

### 5.3 子问题 3 的模型建立与求解

#### 5.3.1 问题分析

光传输网实现了传输网内任意两个城市之间的通信，前两个子问题中提出的目标函数仅考虑人口和距离，然而现实中传输网的规划应从多个层面考虑。首先，应考虑两个城市之间的实际通信需求。两个城市之间的实际通信需求和人口、经济发展水平、两个城市之间的距离等因素相关。其次，应考虑通信网络的均衡性，即在两个城市之间重复建设过多的连接，边际收益应递减，同时所有的城市都应连接到传输网中。最后，应考虑城市群的辐射作用，即不应仅考虑城市所在省（区）的人口，应根据地形、交通、经济联系等因素，将辐射范围内的人口和经济发展水平纳入考虑。因此，新的目标函数应包含实际通信需求、均衡性、城市群辐射等影响因素。

要考虑城市群的辐射作用，即应把城市群辐射区域的人口和 GDP 纳入考虑。首先应根据地形、交通、经济联系等因素，对城市群辐射区域进行划分，划分后城市群即其辐射区域的人口和 GDP 如表 5-3-1 所示。

两个城市之间的实际通信需求和人口、经济发展水平、两个城市之间的距离等因素相关，实际通信需求定义如下。

$$CR_{i,j} = w \frac{(P_i P_j)^\alpha (GDP_i GDP_j)^\beta}{D_{i,j}^\gamma}$$

此处  $w$  表示参数，用于调节  $CR_{i,j}$  相对大小； $P_i$  表示城市  $i$  及其辐射区域人口。

通信网络的均衡性约束，包括两部分，首先是所有的城市之间都有通信容量，其次，尽量避免两个城市之间重复建设过多的连接，均衡性约束如下所示。

$$Value_{i,j} = CR_{i,j} \left( 1 - e^{-\frac{C_{i,j}}{3CR_{i,j}}} \right)$$

综合考虑以上影响因素，新的目标函数如下所示。



$$\max\left(\sum_{i,j} C_{i,j} Value_{i,j}\right)$$

表 5-3-1 考虑城市群的辐射作用后城市群人口和 GDP

城市群	辐射区域	GDP	人口
哈尔滨	辽宁省	22246.9	4378
	吉林省	14776.8	2733
	黑龙江省	15386.09	3799
	总计	52409.79	10910
北京&天津	北京	25669.13	2173
	天津市	17885.39	1562
	河北省	32070.45	7470
	山西省	13050.41	3682
	山东省	68024.49	9947
	总计	156699.9	24834
上海	上海市	28178.65	2420
	江苏省	77388.28	7999
	浙江省	47251.36	5590
	安徽省	24407.62	6196
	总计	177225.9	22205
郑州	河南省	40471.79	9532
	总计	40471.79	9532
武汉	江西省	18499	4592
	湖北省	32665.38	5885
	湖南省	31551.37	6822
	总计	82715.75	17299
西安	内蒙古	18128.1	2520
	陕西省	19399.59	3813
	甘肃省	7200.37	2610
	青海省	2572.49	593
	宁夏	3168.59	675
	总计	50469.14	10211
重庆	重庆市	17740.59	3048
	贵州省	11776.73	3555
	总计	29517.32	6603
成都	四川省	32934.54	8262
	总计	32934.54	8262
昆明	云南省	14788.42	4771
	总计	14788.42	4771
广州&深圳	海南省	4053.2	917
	福建省	28810.58	3874
	广东省	80854.91	10999
	广西省	18317.64	4838
	总计	132036.3	20628
拉萨	西藏	1151.41	331
	总计	1151.41	331
乌鲁木齐	新疆	9649.7	2398
	总计	9649.7	2398

按照新建立的目标函数建设光传送网，要遵循以下原则，首先所有的城市群都要连接到传送网中；其次，任意两个城市之间必须存在通信容量，可以通过直连的方式实现，也可以通过中间节点实现；最后，任意两个城市之间可以存在多条连接。在遵循以上原则的条件下，使得光传送网的价值总和最大。

该问题与子问题 2 有着相似的形式，因此这里仍可以分为两个部分进行求解。首先 11 条连接可以实现 12 个城市群的无环连接图，找到价值最大的无环连接图。根据所得的连接图，通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量，实现任意城市之间都有通信容量，并且使得传输网的价值最大。再依次添加剩余的连接，每次添加连接后通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量，最大化总价值。16 条和 33 条连接均可以采用该方法进行构建。

### 5.3.2 模型建立

由上文的问题分析可知，所有连接中必然存在着 11 条连接组成的无环连接图，因此该问题可以分解为两部分，首先求解最大价值的无环连接图，其次调整中间节点传输方式，最大化传输网价值。求解最大价值的无环连接图的模型见上文，连接价值采用新的目标函数计算。调整中间节点传输方式，最大化传输网价值的数学模型如下所示。

由问题分析可知，该问题的目标函数为：

$$\max \left( \sum_{i,j} C_{i,j} Value_{i,j} \right)$$

其中，

$$CR_{i,j} = w \frac{(P_i P_j)^\alpha (GDP_i GDP_j)^\beta}{D_{i,j}^\gamma}$$

$$Value_{i,j} = CR_{i,j} \left( 1 - e^{-\frac{C_{i,j}}{3CR_{i,j}}} \right)$$

### 5.2.4 模型求解与分析

求解最大价值的无环连接图的方法与子问题 1 相同，结果见下图，其中参数取值为  $w=1$ ， $\alpha=0.25$ ， $\beta=0.5$ ， $\gamma=2$ 。

由于该问题是线性有约束优化问题，可以列出目标函数，以及等式和不等式约束，采用常见的线性规划方法进行求解。解得的最大价值的无环连接图的分配策略如表 5-3-2 所示。连接图为图 5-3-1。

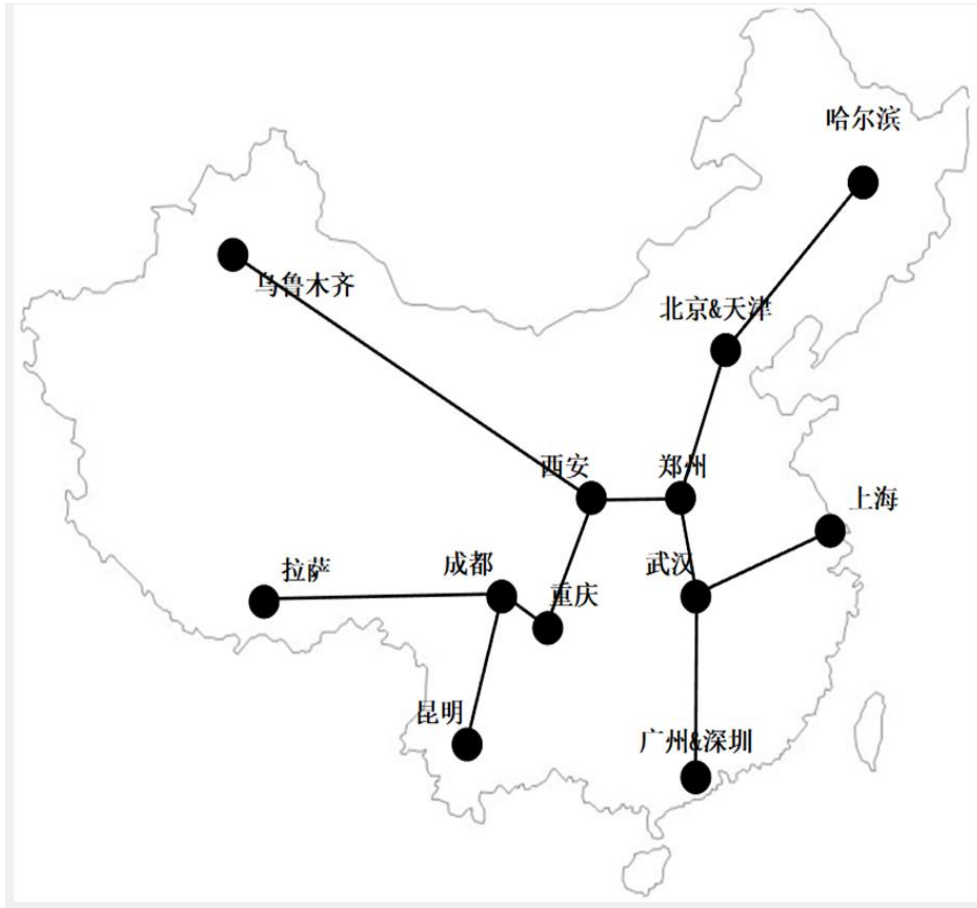


图 5-3-1 改进目标函数后，最大价值的无环连接图

表 5-3-2 改进目标函数后，无环连接图的通信容量分配策略

容量	哈尔滨	北京&天津	上海	郑州	武汉	西安	重庆	成都	昆明	广州&深圳	拉萨	乌鲁木齐
哈尔滨	0	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
北京&天津	15	0	0.1	14.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
上海	0.1	0.1	0	0.1	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
郑州	0.1	14.1	0.1	0	29.4	28.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
武汉	0.1	0.1	15	29.4	0	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0.1
西安	0.1	0.1	0.1	28.5	0.1	0	28.9	0.1	0.1	0.1	0.1	7
重庆	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	28.9	0	29.4	0.1	0.1	0.1	0.1
成都	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	29.4	0	15	0.1	7	0.1
昆明	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0	0.1	0.1	0.1
广州&深圳	0.1	0.1	0.1	0.1	15	0.1	0.1	0.1	0.1	0	0.1	0.1
拉萨	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	0.1	0.1	0	0.1
乌鲁木齐	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0

接下来我们需要添加剩余的连接，通过模拟退火算法求解添加连接后通过中间节点传输的方式调整城市间通信的容量，最大化总价值。对于 16 条连接的情况，将剩余 5 条连接随机添加到连接图中，约定任意两城市间的通信只能通过一条路径进行，按照最短路径算法选择任意两城市间的传输路径。在此基础上，采用上文所述的方法进行优化，得到优化的分配策略，计算得到此时的网络价值。在下一状态时，随机改变后添加的一条连接的位置，重新选择路径，并计算新的网络价值。如果新的网络价值大于原有网络价值，则采纳该修改；否则以一定概

率接受该修改。接受修改的概率如下所示。

$$P = \begin{cases} 1, & \Delta f < 0, \\ \exp\left(\frac{-\Delta f}{T}\right), & \Delta f \geq 0. \end{cases}$$

其中， $P$  为接受修改的概率， $f$  为前后状态网络价值之差， $T$  为温度。

选定降温系数进行降温，这里选定降温系数为 0.999。当温度小于设置的终止温度时，停止迭代。16 条连接的结果如图 5-3-2 所示，图中红色线条为后加入的 5 条连接。

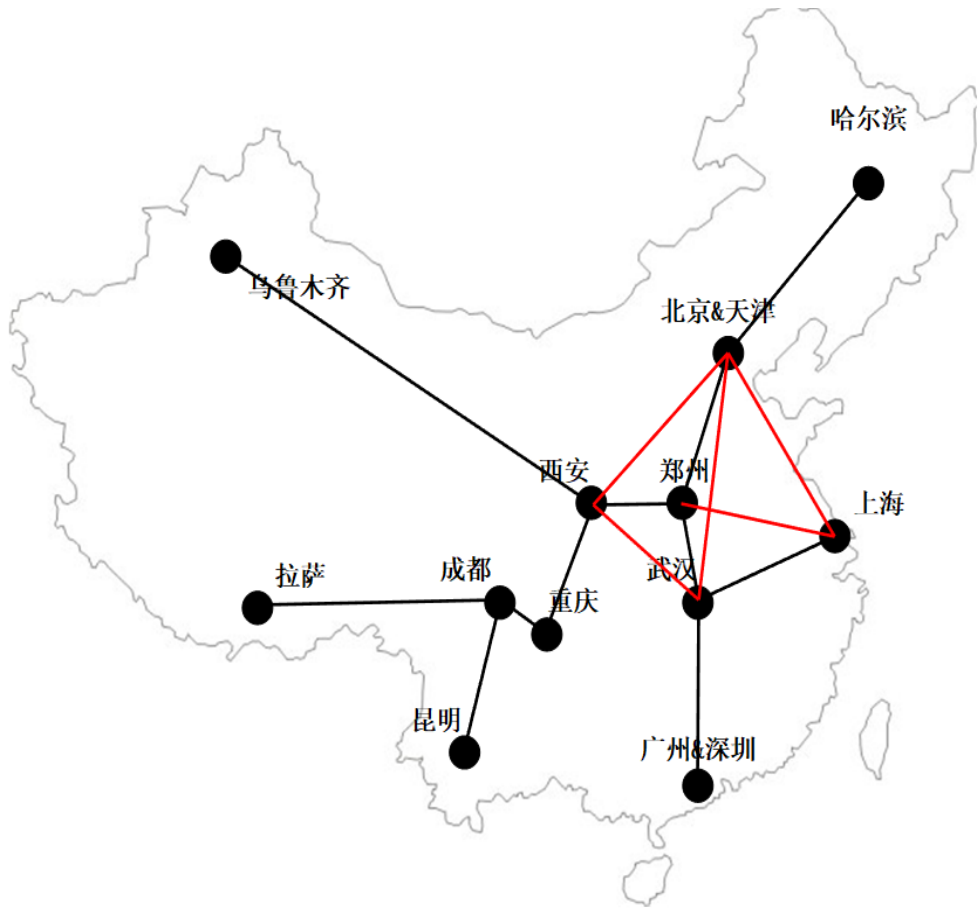


图 5-3-2 改进目标函数后，16 条连接组成的光传输网

同理，对 33 条连接的情况可以采用相似的方法进行优化，结果如图 5-3-3 所示，其中蓝色线条为后加入的 22 条连接。

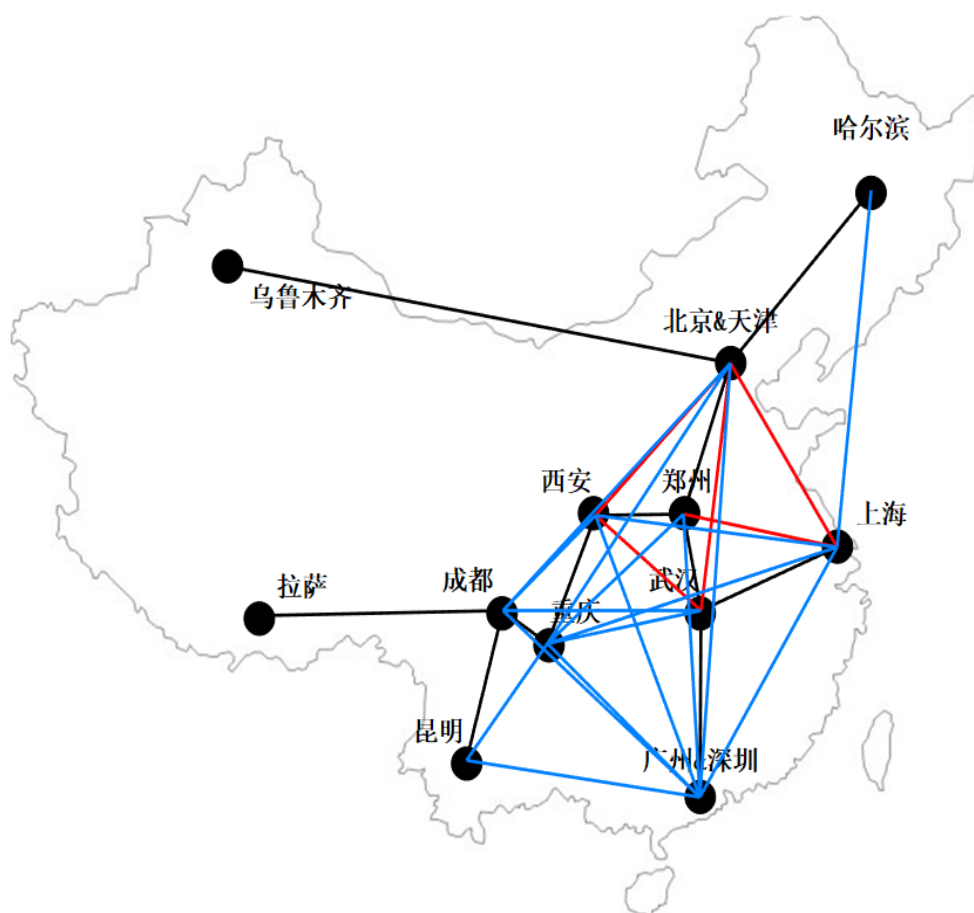


图 5-3-3 改进目标函数后，33 条连接组成的光传输网

## 六、 问题三模型建立与求解

### 6.1 问题分析

本问的主要思想是改变 16QAM 星座图点的位置、数量、点的概率，在保持信息熵为 3bit 的同时，具有更低的 SNR 容限点。问题的约束条件中最定量有两点：一是所有点的概率和为 1，二是所有点的熵和是 3bit。由这两点可以定下点的数量和出现的概率。需要进一步考虑的问题包括如何在星座图上分布这些点，有关相邻点的距离是等距还是不等距，概率大小不同的点如何分配区域等。

设计星座图的思路主要有以下几点：

- 星座图上的点尽可能少。要使星座图的误比特性能尽可能好，其实就是尽量让每两个点之间的距离尽可能大，这样点才不容易误判。很直观的想法，就是让空间里的状态尽可能少，这样才能让每两个状态距离得比较远。
- 概率大的点调制到原点附近。信号的平均功率的表达式如下，是各点功率的概率加权和。应使概率大的点功率尽可能小，这样概率小的点分得的功率才会多，在星座图上点才会更加分散。

$$Pow = \sum_i P_i * Pow_i$$

- c 相邻点距离相等。距离不等会导致星座图的区域划分非常复杂，积分区域很不规则，会极大增加设计的难度。
- d 尽量保证同概率点的对称性。既减小了调制难度，又能保证低误比特率。举个例子，3 个点在一条线上，相邻点等距，保持对称性才是最优误码率选择。

## 6.2 模型建立

本问的模型建立过程如下：

- a 假设星座图上有  $N$  个点，每个点出现的概率为  $P_i (1 \leq i \leq N)$ 。由题可知， $N$  的取值范围应在 9 至 16（等于 8 就是 8QAM 本身）。 $P_i$  需要满足概率和为 1 以及熵为 3bit 的约束：

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1$$

$$-\sum_{i=1}^N P_i \log_{10} P_i = 3$$

- b 信号的平均功率为 1，相邻点距离为  $d$ 。该题可转换为在约束条件下对  $d$  最大值的求解：

$$\sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) = 1$$

$$x_i, y_i = f(d)$$

- c 根据如上的问题分析，要满足对称性和等距性最通用的就是方形阵列，所以问题的解决方案范围缩小到：方形阵列中满足如上 a. b 约束，且误比特性能比 8QAM 好的星座图。

## 6.3 模型求解

有关模型建立中的 a 约束，我们用 matlab 软件在一定区间上进行了穷举求解。令  $N = 9, 10, 11, 12$ ，且规定了  $P_i$  的取值区间： $P_i \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}\}$ 。可以证明，只有  $P$  的取值为  $\frac{1}{2^n}$  才能保证熵正好是 3bit。表 6-1 展示了本文找到的部分满足约束 a 的概率情况，其中  $N$  表示星座图上总点数， $P_i$  和  $n$  表示点出现的概率和该概率的点的数量。

表 6-1 部分满足约束 a 的概率情况

N	$P_i$	n
9	1/4	1
	1/8	4
	1/16	4
10	1/4	2
	1/16	8
12	1/4	2
	1/8	2
	1/32	8

根据所建模型中假设，要寻找的目标是对称方形阵，且高概率的点放在原点附近。本文设计了符合上述约束的两个星座图，分别是 9QAM 调制和 12QAM 调制。图 6-1 和 6-2 展示了上述两种星座图，并用虚线划分出了各个点对应的区域。

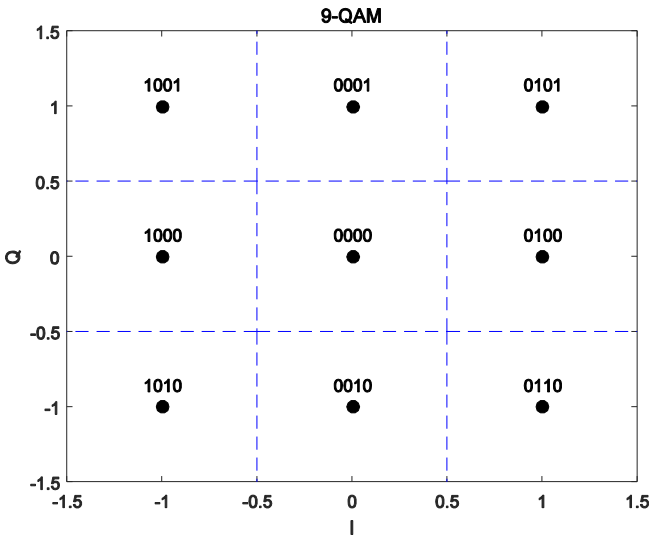


图 6-1 9QAM 星座图

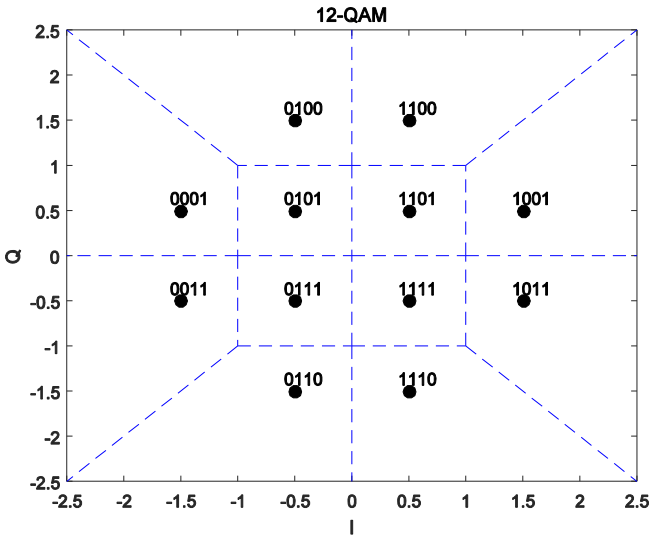


图 6-2 12QAM 星座图

### 6.3.1 9QAM 星座图

9 个点的概率如表 6-2 所示。相邻点距离相等，设为  $d$ ，由归一化功率可以算得  $d=1$ 。由第一大题的方法在各区域进行积分，可以算出各点处的误比特率。9 个点共 3 种概率，也有 3 种不同误比特率，把各个点的误比特率按概率加权相加，即可得到最终的 BER。9QAM 的 BER 和 SNR 的关系曲线如图 6-3 所示。

表 6-2 9QAM 点的概率

1/4	0000
1/8	0001, 1000, 0100, 0010
1/16	1001, 0101, 0110, 1010

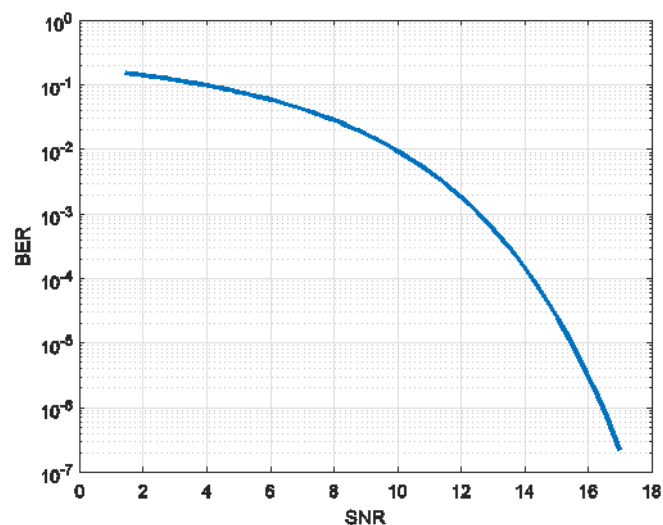


图 6-3 9QAM BER 和 SNR 的关系图

### 6.3.2 12QAM 星座图

12 个点的概率如表 6-3 所示。相邻点距离相等为  $d$ ，由归一化功率可以算得  $d=1$ 。由第一大题的方法在各区域进行积分，可以算出各点处的误比特率。12 个点共 2 种不同误比特率，把各个点的误比特率按概率加权相加，即可得到最终的 BER。12QAM 的 BER 和 SNR 的关系曲线如图 6-4 所示。

表 6-3 12QAM 点的概率

1/4	1101, 1111
1/8	0101, 0111
1/32	0100, 1100, 1001, 1011, 1110, 0110, 0011, 0001

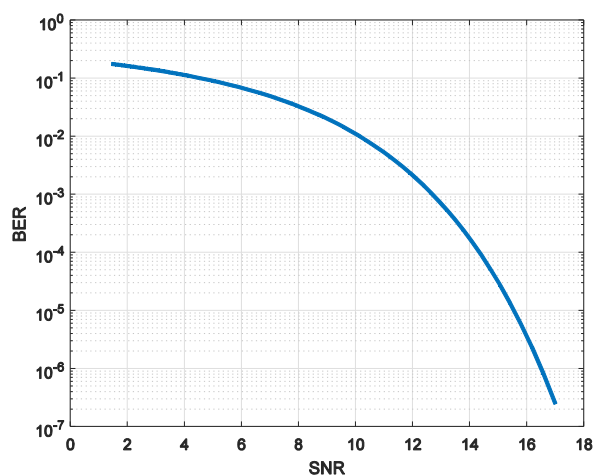


图 6-4 12QAM BER 和 SNR 的关系图

### 6.3.3 三种调制方式的比较与总结

将 8QAM, 9QAM, 12QAM 三种调制方式的误比特曲线进行比较，如图 6-5 所示。可以看出 9QAM 误比特性能最好，其次是 12QAM，题目所给的 8QAM 误比特性能最差。在  $BER=0.02$  时，9QAM, 12QAM, 8QAM 的 SNR 容限点分别为 8.73dB, 9.03dB,



10.34dB。仿真出来的结果符合之前的假设：符号状态越少，误比特性能越好。

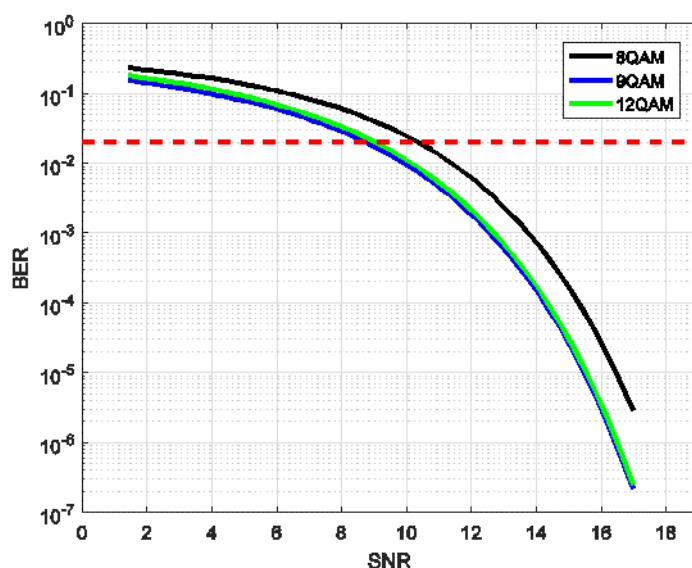


图 6-5 8QAM, 9QAM, 12QAM BER 和 SNR 关系曲线

#### 6.3.4 结论与分析

本文所给的 9QAM 和 12QAM，通过符号为 4bit，各点不等概率出现的调制方式，在同等熵以及高斯噪声下，达到了比 3bit 各点等概率的 8QAM 误比特性能更好的效果。

主要的原因在于：

- a 我们把大概率点调制到了原点附近，在同等信号功率下，星座图上的点更加分散。
- b 4bit 的符号只有 9 种或者 12 种状态，变相的降低了误比特率。

如果是要提高误码（符号）率性能，不等概率编码我们很容易联想到哈夫曼编码(Huffman Coding)，它能在平均码长最短的情况下，取得很好的性能。已有相关文献<sup>[2][3][4]</sup>在这一方面做了一定的探索工作。

## 七、 结论

### 7.1 问题一子问题 1 结论

- a 采用 QPSK 调制时，当 BER=0.02 时，SNR 容限点为 6.90dB。
- b 采用 8QAM 调制时，当 BER=0.02 时，SNR 容限点为 10.34dB。
- c 采用 16QAM 调制时，当 BER=0.02 时，SNR 容限点为 12.71dB。

### 7.2 问题一子问题 2 结论

- a 当单跨传输距离为 80km 时，最远的传输距离是采用 QPSK 调制方案的 1360km。
- b 当单跨传输距离为 100km 时，最远的传输距离是采用 QPSK 调制方案的 700km。

### 7.3 问题二子问题 1 结论

16 条连接的总价值的最大值为 5147.3, 扩展到 33 条连接的总价值的最大值为 8418.6。模型给出的规划方案都是最优的方案。

### 7.4 问题二子问题 2 结论

16 条连接的总价值的最大值为 7069.8, 扩展到 33 条连接的总价值的最大值为 19151.5。扩大到省区后, 16 条连接的总价值的最大值为 23510.5, 扩展到 33 条连接的总价值的最大值为 64254.4。模型给出的规划方案都是最优的方案。

### 7.5 问题二子问题 3 结论

前两个子问题中提出的目标函数仅考虑人口和距离, 新的目标函数应包含实际通信需求、均衡性、城市群辐射等影响因素。新的目标函数为

$$\max(\sum_{i,j} C_{i,j} Value_{i,j}),$$

其中,

$$CR_{i,j} = w \frac{(P_i P_j)^\alpha (GDP_i GDP_j)^\beta}{D_{i,j}^\gamma},$$

$$Value_{i,j} = CR_{i,j} \left(1 - e^{-\frac{C_{i,j}}{3CR_{i,j}}}\right)$$

在新的目标函数下, 仍然首先求解最大价值的无环连接图, 调整中间节点传输方式, 最大化传输网价值。再依次添加连接, 并进行优化。

### 7.6 问题三结论

我们找到了 9QAM 和 12QAM 非等概率调制的星座图, 它们都比原题中的 8QAM 具有更低的 SNR 容限点。

## 八、模型评价与讨论

### 8.1 模型评价与优点

- 为解决问題一, 使用理论计算而非采用蒙特卡洛方法模拟进行建模, 避免了蒙特卡洛方法无法覆盖所有变量空间的缺点, 相对而言更为准确。
- 问题二子问题 1 的所选模型将该问题分解为两个独立的子问题, 用最大生成树问题求解价值最大的无环连通图, 便于求解并找到该要求下最优规划方案。
- 问题二子问题 2 所选模型将问题分解为两个独立的子问题, 利用三点模型和实验验证的方法, 极大地缩小了变量空间, 为快速求解容量分配问题奠定了基础。所选模型成功找到了该要求下最优的规划方案。
- 为解决问題二子问题 3, 本文参考现实模型<sup>[8]</sup>, 对目标函数进行了针对性修改。所建立模型能够较为理想的描述容量分配问题并反映社会经济、人口、环境条件等因素。
- 在寻找问题三中符合条件的星座图时, 本网抓住了高性能星座图的一些特点。

比如说把大概率点调制到原点附近，状态数尽可能少等；还在一些定量的约束下，缩小了搜索范围，是一个可行的数学模型。

## 8.2 模型不足及改进方向

- a 在计算问题一的子问题 1 时，出于简化计算的目的，题目认为噪声服从均值为 0 的正态分布。而在实际建模过程中，噪声的情况往往更加复杂，这意味着使用当前方法所需的计算量将大大增加。为了使本论文提出的方法更具普适性，需要进一步简化当前方法。在必要时，可以在计算中适当舍弃部分次要因素带来的影响。
- b 在计算问题一的子问题 2 时，出于简化计算的目的，计算光纤非线性噪声时采用的是一个近似公式，当光纤功率发生变化时，这一模型将不再适用。为了使本文提出的方法具有更好的普适性，需要寻找更通用的光纤噪声表达式重新进行相关计算，综合考虑光纤在传输过程中存在的固有损耗和附加损耗。其中固有损耗包括散射损耗和吸收损耗，附加损耗则需要考虑弯曲损耗、连接损耗和耦合损耗等。
- c 针对问题二子问题 3 所建立的模型，目前暂时只能基于已有的连通图进行数据处理，无法对连接的位置进行动态描述和优化。
- d 在建立问题三的模型时，出于设计的便利性，我们把相邻点设为了等距，且都是用的方阵星座图。剩余的星座图中有可能还有性能更加出色的方案，所以该问题的模型还有进一步改善的空间。

## 九、 参考文献

- [1] Cho K, Yoon D. On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations[J]. IEEE Trans Commun, 2002, 50(7):1074-1080.
- [2] Liu T, Lin C, Djordjevic I B. Advanced GF(32) nonbinary LDPC coded modulation with non-uniform 9-QAM outperforming star 8-QAM[J]. Optics Express, 2016, 24(13):13866.
- [3] Qu Z, Lin C, Liu T, et al. Experimental Investigation of GF(3(exp 2)) Nonbinary LDPC-coded Non-uniform 9-QAM Modulation Format[C]// Ecoc 2016;, European Conference on Optical Communication; Proceedings of. VDE, 2016.
- [4] Bernardini A, De Fina S. Optimal decision boundaries for M-QAM signal formats using neural classifiers[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998, 9(2):241.
- [5] Jahromi A E, Rad Z B. Optimal topological design of power communication networks using genetic algorithm[J]. Scientia Iranica, 2013, 20(3):945-957.
- [6] 林小昭, 33 个一二线城市人口变化: 深广杭领衔增量, 长沙郑州也很猛 <https://www.yicai.com/news/5428783.html>, 20180917

- [7] 中华人民共和国国家统计局, 全国各项分省年度/月度/季度统计数据  
<http://data.stats.gov.cn/easyquery.htm?cn=E0103>, 20180917
- [8] 聂荣辉. 省干 100Gbit/s 光传送网目标架构设计[J]. 电信工程技术与标准化, 2014(12).
- [9] 百度公司, 百度地图, <https://map.baidu.com/>, 20180917
- [10] 陈启美 李博等 通信原理教程[M]. 南京: 南京大学出版社. 2008