



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校

上海大学

参赛队号

10280234

队员姓名

1.张明坤

2.姜英

3.施伟

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 面向下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型

摘 要：

垂直腔面发射激光器（VCSEL）在我们的生活中扮演着十分重要的作用，本文的主要任务，就是得到能准确反映 VCSEL 激光器特性的数学模型。

针对问题一，考虑到激光器输出的功率强度与温度的关系，建立了激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型即 L-I 模型。我们通过求解微分方程，并且运用非线性拟合的方法，得出了 U-I 曲线的关系，利用给定的初值，建立优化模

型，以实验数据和模型模拟数据之差作为目标函数，构建
$$\begin{cases} f = |P - P_0| \\ s.t. f \leq \text{Accuracy} \end{cases}$$
，使

其误差达到设定的标准，再依托变分法和最优控制理论，求解出了参数： $\eta=0.3$ ，

$I_{th0}=0.43\text{E-}3$ ， $R_{th}=3.1\text{E}3$ ， $a_0=0.3231$ ， $a_1=-3.025\text{E-}3$ ， $a_2=-4.4658\text{E-}6$ ，

$a_3=6.4918\text{E-}9$ ， $a_4=-9.211\text{E-}13$ ，并利用求得的参数，根据模型画出了 10°C ， 20°C ，

30℃，……，90℃等温度下的 L-I 曲线。对于（b）我们将光功率 P 值最大值设定为 2mW，利用上述模型，求解出满足光功率 P 值最大值<2mW 的最大温度，求解出的结果为 86.7℃，并经过验证，结果较为合理。

针对问题二，经过分析，误差来源于模型本身和参数的提取过程，如优化所得的温度相关的电阻 R_{th} 和实际电阻值的偏差。并且我们优化了求解过程，首先对 U-I 曲线的非线性拟合进行优化，接着改进了模型的求解过程，利用 Newton 法提高了计算的精度，改进后模型的计算精度（与实验 P-I 曲线的组内方差）为 SSE: 0.06348 远远小于改正前的 SSE: 2.398，极大地提高了计算的精度。

针对问题三，我们首先通过推导简化了附录二中的小信号响应模型的复杂程度，先分析 S21 曲线的特性，再利用非线性寻优算法，成功提取了小信号响应模型的参数，根据模型得到的参数，画出了不同温度 and 不同偏置电流的 S21 曲线，得出以下主要结论：在相同的偏置电流条件下，随着温度的升高，带宽的峰值向左移动；在相同的温度下，随着电流的增大，带宽的峰值越小且曲线由波峰形状逐渐变得平缓且呈下降趋势。针对第 3 小问，我们建立了小信号等效电阻模型，针对问题给出解决方案：当温度和偏置电流固定不变时，增大等效电阻模型中的电容 C3 的值，可以获得更宽带宽的激光器。针对第 4 小问，我们通过分析第 1 小问的 S21 曲线，得出：温度、偏置电流和频率的适度变化，可以让激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置，同时我们建立了一套设计方案，通过设计方案能让带宽曲线变得更平缓。

针对问题四，我们重新建立了一个关于频率和阻抗因子的带宽模型，模型的最终结果如下：

$$H(f) = const \times \frac{f_R^2}{f_R^2 - f + j \times f \times \frac{\gamma}{2\pi}} \times \frac{1}{1 + j \times \frac{f}{f_p}}$$

通过 matlab 模拟仿真曲线和原始模型对比，发现在不同温度 and 不同偏置电流下，新模型的带宽都有所提高，且模型更加精简、效率更高。

关键词:速率方程 变分法与最优控制理论 等效电路模型 非线性最优化算法

目录

一、问题重述.....	4
1.1 问题背景.....	4
1.2 问题提出.....	4
二、问题假设.....	5
三、符号及变量说明	6
四、问题分析.....	6
4.1 问题一的分析.....	6
4.2 问题二的分析.....	7
4.3 问题三的分析.....	7
4.4 问题四的分析.....	7
五、模型的建立与求解	8
5.1 问题一：模型建立与求解.....	8
5.1.1 L-I 模型参数的提取.....	8
5.1.2 最高温度的推测.....	17
5.2 问题二：L-I 模型的修正与改进	17
5.2.1 L-I 模型的误差分析.....	17
5.2.2 L-I 模型的改进.....	17
5.3 问题三：小响应模型的建立	21
5.3.1 小响应模型的简化推导.....	21
5.3.2 S21 曲线的仿真及分析	27
5.3.2. 激光器温度及偏置电流对带宽的影响	29
5.3.3 小信号等效电路模型.....	29
5.3.4 激光器参数及带宽.....	32
5.4 问题四： VCSEL 带宽模型的改进	34
5.4.1 VCSEL 带宽模型的重新建模.....	34
5.4.2 VCSEL 带宽模型修正前后对比	38
六、总结与展望.....	40
七、参考文献.....	41
附录.....	43

一、问题重述

1.1 问题背景

伴随着光纤系统不断向着大容量、高速率的方向演化，光源的高性价比在系统中的地位也随之显现出来。边发射型激光器在光纤通信系统中的应用范围较广。但它存在着成本高、体积大和不容易制成半导体列阵等缺陷，不过这些缺陷随着垂直腔面发射半导体激光器(VCSEL)的产生而得到了更好的解决。垂直腔面发射半导体激光器是垂直于谐振腔的表面而出光的激光器，正是因为这个功能，使其具备了许多边发射型激光器它们所不存在的优势，例如：VCSEL 在生产的过程中的质量测试就可以直接的在芯片上进行，同时能够通过对测试的结果进行分析并排除故障，这样就使得批量生产的成本得到了很大的降低。VCSEL 的激光出射孔径较大，并且输出的光束的发散角较小，对于这两点，VCSEL 和各类光纤更容易进行耦合；另外，VCSEL 还可以通过制造成一维或者二维的激光器阵列组，使高速高效的光纤并联传输得以实现。

激光器作为光纤通信系统的核心器件是系统仿真中需要考虑的一个重要因素。因此在这个背景下，希望得到能准确反映 VCSEL 激光器特性的数学模型。

1.2 问题提出

问题一：VCSEL 的 L-I 模型

(1)根据附件提供的 L-I 实测数据,确定模型参数 $(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, 并画出 10°C , 20°C , 30°C , $\dots\dots$, 90°C 等温度下的 L-I 曲线。

(2)假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时,用户的光猫无法检测到信号。根据建立的 L-I 模型推测:电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度,才能保证用户可以正常使用网络?

问题二：L-I 模型的改进

分析问题一中模型的精度和误差产生的原因,提出改进方案,根据改进模型画出 10°C , 20°C , 30°C , $\dots\dots$, 90°C 等温度下的 L-I 曲线,并与问题一中 L-I 曲

线进行比较。

问题三：VCSEL 的带宽模型（小信号响应模型）

（1）建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型，给出参数构成及其确定方法，画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线，其中一条必须是 20℃ 下 7.5mA 偏置电流的仿真输出曲线。

（2）利用带宽模型，分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响。

（3）假定激光器工作环境温度可以采用某些措施让它固定在 20℃，偏置电流固定在 7.5mA。那么，如果要获得更宽带宽的激光器设计方案，还可以通过什么手段实现？

（4）改变激光器的某些参数可以发现激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置。请问，改变哪些参数会有这种现象？在实际应用中，如何设计这些参数可以实现带宽曲线越平坦？

问题四：VCSEL 带宽模型的改进

是否有更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快？或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB（或 10dB）带宽？如果有，请给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题 3 的模型进行比较。

二、问题假设

1. 转换效率 $\eta(T)$ 受温度影响较小，即 $\eta(T)$ 近似于常数 η ；
2. $I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$ ，其中 I_{th0} 为常数， $I_{off}(T)$ 是与温度相关的经验热偏置电流（即激光器内部的偏置电流，随激光器温度的变化而变化，有别于外部人为加载的激光器偏置电流 I_b ）。
3. 假设附录的数据是可靠、值得参考的。

三、符号及变量说明

P_0	激光器输出的光功率	$I_{off}(T)$	与温度相关的偏置电流
I_{th0}	一个常数	I_T	$I_{off}(T)$ 与 I_{th0} 的和
N	载流子数	τ_p	光子寿命 (p: Photon, 光子)
η_i	注入效率或转换效率	S	光子数
I	注入的外部驱动电流	g_0	增益斜率
t	时间	β	受激辐射耦合系数
τ_n	载流子复合寿命	ε	增益压缩因子
La	电感	Ca	电容
Ra	电阻	Γ	光场限制因子
$\text{Re}\{x\}$	x 的实部	Va	源区体积
I_1	调制电路的振幅	N_{p1}	光子浓度
γ	阻尼因子	ω_R	松弛振荡角频率
q	物理常量, 电子电量, 1.6×10^{-19} 库伦	G	增益系数, 激光产生的阈值条件, 增益大于总损耗
$I_{th}(N, T)$	阈值电流, 激光器电流超过该值则激光发光, 与载流子数和温度相关	N_0	透明载流子数, 当载流子数 N 大于透明载流子数的时候, 激光器有源区发生粒子束反转, 满足产生激光的其中一个条件

四、问题分析

4.1 问题一的分析

考虑到激光器输出的功率强度与温度的关系, 建立激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型即 L-I 模型。通过求解微分方程, 并且利用非线性拟合的方

法，得出 U-I 曲线的关系，利用给定的初值，建立优化模型，以实验数据和模型模拟数据之差作为目标函数，最终求得参数，根据模型画出 10℃，20℃，30℃，……，90℃等温度下的 L-I 曲线。对于（b）将光功率 P 值最大值设定为 2mW，并且利用模型求解出满足光功率 P 值最大值<2mW 的最大温度，并验证。

4.2 问题二的分析

通过对模型的误差的分析，分析误差的来源，是来自模型本身还是参数提取过程，并且通过优化求解过程，利用其他方法提高计算的精度，并比较改进后模型的计算精度（与实验 P-I 曲线的组内方差）与改正前的 SSE 之间的差距，提高计算的精度。

4.3 问题三的分析

问题先是要求通过一种算法算出模型中的参数，再根据这个参数和模型来仿真 S21 曲线，后三问是在第一问的基础之上对小响应模型的分析 and 优化。

首先我们推导简化了附录二中的小信号响应模型以便于计算，再利用非线性寻优算法，经过分析静态 L-I-V 曲线和 S21 曲线的特性，成功提取了小信号响应模型的参数。

然后我们根据计算得到的参数，画出了不同温度 and 不同偏置电流的 S21 曲线，得出以下主要结论：在相同的偏置电流条件下，随着温度的升高，带宽的峰值向左移动，当在偏置电流 2mA 以下时，带宽的图像呈峰状，先上升后下降；在相同的温度下，随着电流的增大，带宽的峰值越小且曲线由波峰形状逐渐变得平缓呈下降趋势。

针对第 3 小问，我们建立了小信号等效电阻模型，然后通过 matlab 仿真模拟图像，得出结论：当温度和偏置电流固定不变时，增大等效电阻模型中的电容 C3 的值，可以获得更宽带宽的激光器。

针对第 4 小问，我们先分析第 1 小问的 S21 曲线，分析得到：温度、偏置电流和频率适度变化，可以让激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置，且我们建立了一套设计方案能实现让带宽曲线变得更平缓。

4.4 问题四的分析

问题四是在之前模型的基础上优化模型或者重新构建一个模型。于是我们重新建立一个关于频率和阻抗因子的带宽模型，模型的最终结果如下：

$$H(f) = \text{const} \times \frac{f_R^2}{f_R^2 - f + j \times f \times \frac{\gamma}{2\pi}} \times \frac{1}{1 + j \times \frac{f}{f_p}}$$

最后通过 matlab 模拟仿真曲线和原始模型对比，发现在不同温度 and 不同偏置电流下，带宽都有所提高，且模型更加精简、效率更高。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：模型建立与求解

5.1.1 L-I 模型参数的提取

根据附录一，VCSEL 的各参数间满足如下规律：

$$P_0 = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (1)$$

$$I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T) \quad (2)$$

其中 I_{th0} 为常数， $I_{off}(T)$ 是与温度相关的经验热偏置电流（即激光器内部的偏置电流，随激光器温度的变化而变化，有别于外部人为加载的激光器偏置电流 I_b ）。

这样（1）式可以简化为

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (3)$$

将 $I_{off}(T)$ 表示为：

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (4)$$

式（3）中的温度 T 受外界环境温度 T_0 和自身的温度影响，自身的温度与器件产生的瞬时功率 VI 相关，即受 V-I 特性（电压-电流特性）影响：

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (5)$$

方程（5）是一维简单的常微分方程，经过求解，即可求得解析解为：

$$T(t) = T_0 - P_0 * R_{th} + V * I * R_{th} + C * e^{\frac{-t}{\tau_{th}}} \quad (6)$$

由理论实际可得，当 $t=0$ 时， $T(0) = 20^\circ\text{C}$ ，则

$$C = P_0 * R_{th} - V * I * R_{th} \quad (7)$$

因此，我们求得解析解为：

$$T(t) = T_0 - P_0 * R_{th} + V * I * R_{th} + (P_0 * R_{th} - V * I * R_{th}) * e^{\frac{-t}{\tau_{th}}} \quad (8)$$

联合（3）（4）（8）式，我们就有：

$$\begin{cases} T(t) = T_0 - P_0 * R_{th} + V * I * R_{th} + (P_0 * R_{th} - V * I * R_{th}) * e^{\frac{-t}{\tau_{th}}} \\ P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \end{cases} \quad (9)$$

根据附录中的经验模型，我们取 $n=4$ ，则模型变为：

$$\begin{cases} T(t) = T_0 - P_0 * R_{th} + V * I * R_{th} + (P_0 * R_{th} - V * I * R_{th}) * e^{\frac{-t}{\tau_{th}}} \\ P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ I_{off}(T) = \sum_{n=0}^4 a_n T^n \end{cases} \quad (10)$$

根据附录中的 U-I 曲线，我们利用非线性拟合的方法，对 U-I 曲线进行拟合，得到了如下多项式：

$$u(I) = p_5 + p_4 * I + p_3 * I^2 + p_2 * I^3 + p_1 * I^4 \quad (11)$$

其中：

$$p1 = -0.0001333$$

$$p2 = 0.004522$$

$$p3 = -0.05395$$

$$p4 = 0.3404$$

$$p5 = 1.447$$

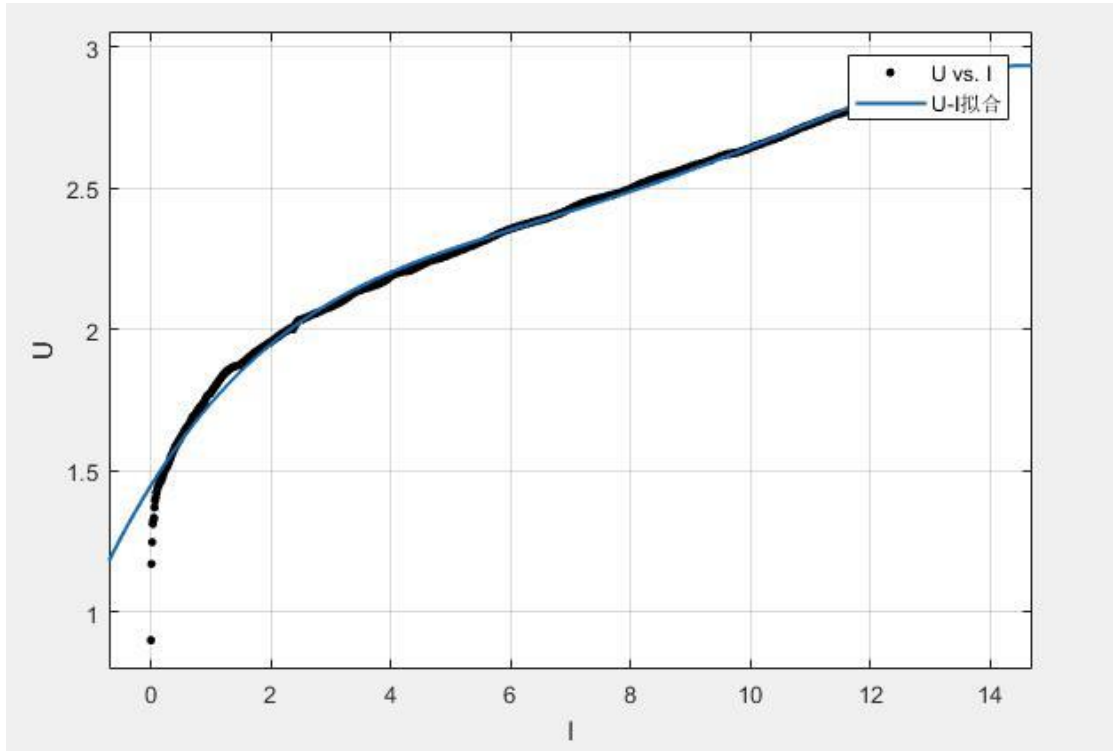


图 1 U-I 曲线拟合

组内方差 SSE 为 0.8382， R^2 为 0.9957，由上图可见，拟合结果相当好，可用上式来表达 U-I 之间的关系。则最终模型为：

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t) = T_0 - P_0 * R_{th} + V * I * R_{th} + (P_0 * R_{th} - V * I * R_{th}) * e^{\frac{-t}{\tau_{th}}} \\ P_0 = \eta (I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ I_{off}(T) = \sum_{n=0}^4 a_n T^n \\ u(I) = 1.447 + 0.3404 * I - 0.05395 * I^2 + 0.004522 * I^3 - 0.0001333 * I^4 \end{array} \right. \quad (12)$$

采用和实验真实数据一样的电流值，即 $I \in [0, 14]$ ，步长为 0.01，初值为：

表 1 参考初值

参数	参考初值	单位
η	0.5	-
I_{th0}	0.3E-3	A
R_{th}	2.6E3	°C/W

a_0	1.246E-3	A
a_1	-2.545E-5	A/K
a_2	2.908E-7	A/K ²
a_3	-2.531E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	A/K ⁴

通过求解上述方程组，并画出图像曲线，如下图：

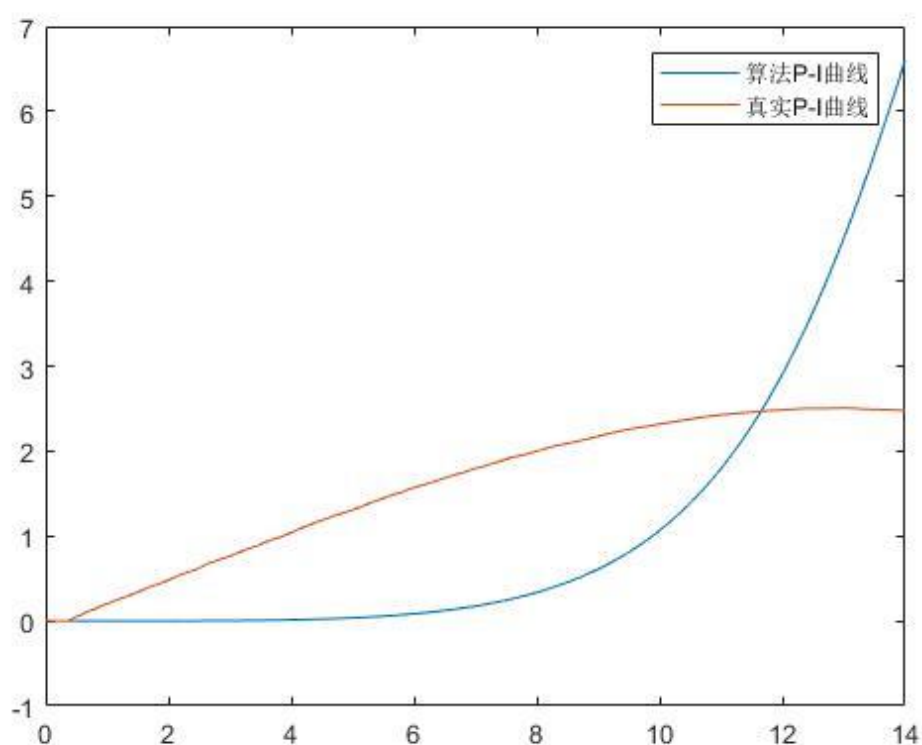


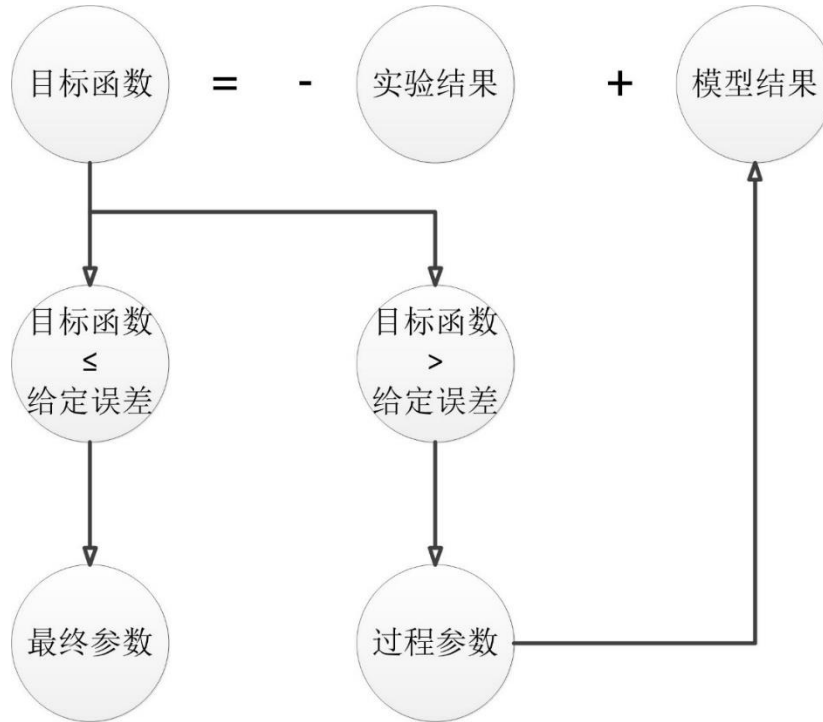
图 2 P-I 初步求解曲线

由上图可见，模型的 P-I 曲线与实际的 P-I 曲线差距太大，下面来构建优化修正算法。

首先，根据 L-I 模型初值设置，将第一组参数带入到数值模型中进行计算，得出上面提到的不同的工作特性曲线，即上图；现在就有了两组曲线，实验中测得的激光器特性曲线和模型中仿真得到的特性曲线，之后，可以将两组曲线的差作为数值优化方法中需要的目标函数。这是因为，数值优化的目的是让目标函数

最小化（在给定的约束条件下），目标函数最小，同时代表着模型仿真结果与实验测出的数据几乎一致，这是最为理想的情况。接下来进入判定的过程，如果目标函数小于最初设定的误差，则参数提取过程结束，退回的参数值为最优的一组模型参数；反之，如果目标函数没有达到精度要求，则数值优化算法继续执行反复的迭代过程，寻找更加优化的一组参数值，直到目标函数满足要求。另外需要说明的是，由于数值优化算法的成功与否很大程度上依赖于初始参数的猜测，参数值估计的与实际值相差很远，即便是经过很多次迭代也很难找到最优化的列参数。所以，要从参数的实际物理意义出发，给出组比较合理的参数值，这样会很大程度上提到数值优化算法的效率。

具体的流程如下图：



下面推导出具体的表达式：

构建目标函数：

$$f = |P - P_0|$$

$$s.t. \ f \leq \text{Accuracy} \quad (13)$$

优化参数为： $\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ ，优化参数过多，极大地影响了修正速率，下面采用“变分法”对目标函数进行优化求解，我们将函数两端和真实值一样，即固定两端端点，来求解方程。 P 对 P_0 的偏离所导致的偏差是

$$f = \Delta P = P[y] - P_0[y^*] = \int_0^T P(t, y, y') dt - \int_0^T P(t, y^*, y'^*) dt$$

其中 y 泛指上述参数，出于公式的篇幅，不再进行表达，

我们将等式右边第一项被积部分在 (t, y^*, y'^*) 处泰勒展开如下：

$$\begin{aligned} P(t, y, y') = & P_0(t, y^*, y'^*) + [P_t(t-t) + P_y(y-y^*) + P_{y'}(y'-y'^*)] \\ & + \frac{1}{2!} [P_{tt}(-t-t)^2 + P_{yy}(-y-y^*)^2 + P_{y'y'}(y'-y'^*)^2 + P_{ty}2(-t-t)(y-y^*) \\ & + 2P_{ty'}(-t-t)(y'-y'^*) + P_{yy'}2(-y-y^*)(y'-y'^*) + P_{t^2}(-t-t)^2 + P_{ty^2}2(-t-t)(y-y^*)^2 \\ & + 2P_{ty'y'}2(-t-t)(y'-y'^*)(y-y^*) + P_{y^2y}(-y-y^*)^2(y'-y'^*) + P_{y^2y'}(-y-y^*)^2(y'-y'^*) \\ & + P_{y'y'^2}(-y-y^*)(y'-y'^*)^2 + P_{y^2y'^2}(-y-y^*)^2(y'-y'^*)^2 + \dots] \end{aligned}$$

其中 $(t-t)$ 项为零，我们再代入 $y-y^*=\varepsilon p(t)$, $y'-y'^*=\varepsilon p'(t)$, 得

$$\begin{aligned} P(t, y, y') = & P_0(t, y^*, y'^*) + P_y \varepsilon p(t) + P_{y'} \varepsilon p'(t) \\ & + \frac{1}{2!} [P_{yy}(\varepsilon p)^2 + P_{y'y'}(\varepsilon p')^2 + 2P_{yy'}(\varepsilon p)(\varepsilon p')] + \dots R_n \end{aligned}$$

将展式代入积分，然后合并积分，可消掉第一项，忽略高阶项，得

$$\Delta V = \varepsilon \int_0^T (P_y p + P_{y'} p') dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T (P_{yy} p^2 + P_{y'y'} p'^2 + 2P_{yy'} p p') dt$$

上式的第一项积分为一阶变分：

$$\delta V = \frac{dV}{d\varepsilon} = \int_0^T (P_y p + P_{y'} p') dt$$

第二项积分为二阶变分：

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{d\varepsilon^2} = \int_0^T (P_{yy} p^2 + P_{y'y'} p'^2 + 2P_{yy'} p p') dt$$

在求最小值的问题中，需要 $\Delta V \geq 0$ ，则必然需要 $\delta V = 0$ ，因为 ε 可以任意取正负值。这等价于 $\frac{dV}{d\varepsilon} = 0$ ，也就推导出欧拉方程。在满足欧拉方程之后，我

们要求 $\delta^2 V \geq 0$ ，因为 $\varepsilon^2/2$ 始终大于零，这等价于 $\frac{d^2 V}{d\varepsilon^2} \geq 0$ ，也就是二阶条件。

定义哈密尔顿函数为 $H(t, y, u, \lambda) = P(t, y, u) + \lambda(t)P(t, y, u)$ 。

我们将各参数之间存在一个细小的扰动 ε ，为简化问题，我们假设 u^* 是内部解，因此 $\min f$ 这一条件就简化为 $\partial H / \partial u = 0$ 。在推导最大值一阶条件的同时，我们还可以得到相应的横截条件。

$$\min V = \int_0^T P(t, y, u) dt$$

$$\text{s.t. } \dot{y} = P(t, y, u)$$

因为 y 的运动始终服从方程 $\dot{y} = P(t, y, u)$ ，所以在 $[0, T]$ 上，始终满足 $P(t, y, u) - \dot{y} = 0$ 。于是，有 $\int_0^T \lambda(t)[P(t, y, u) - \dot{y}]dt = 0$ 。

令 $\tilde{V} = V + \int_0^T \lambda(t)[P(t, y, u) - \dot{y}]dt = \int_0^T \{P(t, y, u) + \lambda(t)[P(t, y, u) - \dot{y}]\}dt$ 哈密尔顿函数为 $H(t, y, u, \lambda) = P(t, y, u) + \lambda(t)P(t, y, u)$ ，所以有

$$\tilde{V} = \int_0^T [H(t, y, u, \lambda) - \lambda(t)\dot{y}]dt = \int_0^T H(t, y, u, \lambda)dt - \int_0^T \lambda(t)\dot{y}dt$$

将等式右边第二项分部积分： $-\int_0^T \lambda(t)\dot{y}dt = -\lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 + \int_0^T y(t)\dot{\lambda}dt$ 。

将其重新加回目标泛函中： $\tilde{V} = \int_0^T [H(t, y, u, \lambda) - y(t)\dot{\lambda}]dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0$ 。

可见， \tilde{V} 的值取决于 y ， u ， T 和 λ 。但是，只要运动方程一直满足，则 λ 的取值不应该对目标泛函有任何影响，参见最初的目标泛函。因此，我们后面考虑对最优路径的“扰动”时，不考虑对 λ 的“扰动”。这意味着，我们的所有推导都是基于运动方程的成立，也即 $\dot{y} = \partial H / \partial \lambda$ 。

假设已知 u^* 和 y^* ，对 u 施加扰动，则根据运动方程， y 也会产生对 y^* 的偏离： $u(t) = u^*(t) + \varepsilon p(t)$ 则 $y(t) = y^*(t) + \varepsilon q(t)$

接下来考虑对终结时刻和终结状态的“扰动”： $T = T^* + \varepsilon \Delta T$ 以及 $y_T = y_T^* + \varepsilon \Delta y_T$ ，这意味着 $dT/d\varepsilon = \Delta T$ 和 $dy_T/d\varepsilon = \Delta y_T$ ，代入目标泛函，于是目标泛函可以变为 ε 的一个函数：

$$\tilde{V} = \int_0^{T(\varepsilon)} \{H[t, y^* + \varepsilon q(t), u^* + \varepsilon p(t), \lambda] + \dot{\lambda}[y^* + \varepsilon q(t)]\}dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0$$

最优路径意味着 $d\tilde{V}/d\varepsilon = 0$ ，于是目标泛函对求 ε 导，等式右边积分部分的导数为： $\int_0^{T(\varepsilon)} \{[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)] + \dot{\lambda}q(t)\}dt + [H + \dot{\lambda}y]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon}$ 。

其中第二项可以写开，其中 $[\dot{\lambda}y]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon} = \dot{\lambda}(T)y_T \Delta T$ 。该项和下面推导部分相加而抵消。

目标泛函等式右边最后一项是常数求导为零，第二项求导为：

$$-\lambda(T)\frac{dy_T}{d\varepsilon}-y_T\frac{d\lambda(T)}{dT}\frac{dT}{d\varepsilon}=-\lambda(T)\Delta y_T-y_T\dot{\lambda}(T)\Delta T$$

将以上部分加总整理，得一阶条件为：

$$\frac{d\tilde{V}}{d\varepsilon}=\int_0^T[(\frac{\partial H}{\partial y}+\dot{\lambda})q(t)+\frac{\partial H}{\partial u}p(t)]dt+[H]_{t=T}\Delta T-\lambda(T)\Delta y_T=0$$

因为 p ， q ， ΔT 和 Δy_T 是任意的，只能要求三项分别为零。由此，我们可以

导出最大值原理中的 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 和 $\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial y}$ 。再加上运动方程是整个推导的基础，

所以一阶条件还应包含 $\dot{y}=\partial H/\partial \lambda$ 。垂直终结线问题中， $\Delta T=0$ ，所以横截条件为 $\lambda(T)=0$ 。

经过上述推导，利用 matlab 软件，得到了如下结果：

表 2 参数提取结果

参数	参数取值	单位
η	0.3	-
I_{th0}	0.43E-3	A
R_{th}	3.1E3	°C/W
a_0	0.3231	A
a_1	-3.025E-3	A/K
a_2	-4.4658E-06	A/K ²
a_3	6.4918E-09	A/K ³
a_4	-9.211E-13	A/K ⁴

得到的拟合结果如下：

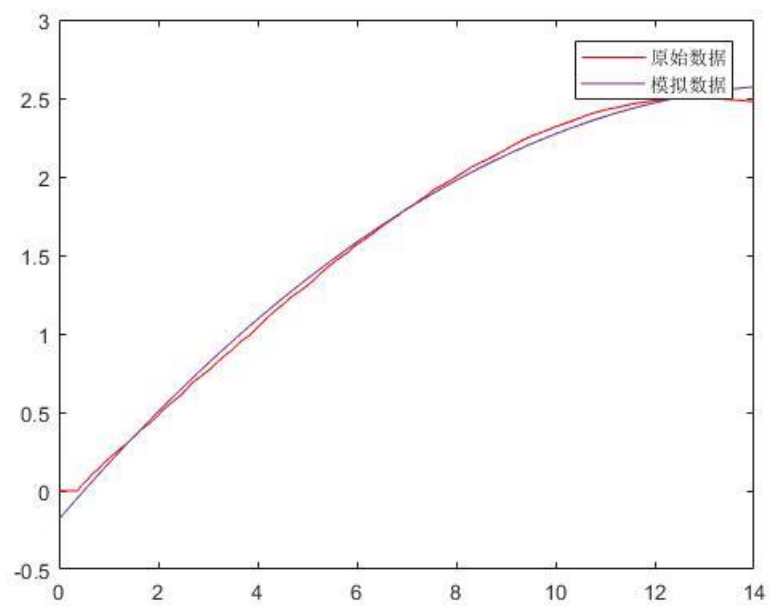


图3 修正后的 P-I 曲线

模型确定的参数，分别令温度为 10°C ， 20°C ， 30°C ，……， 90°C ，画出了上述温度下的 L-I 曲线：

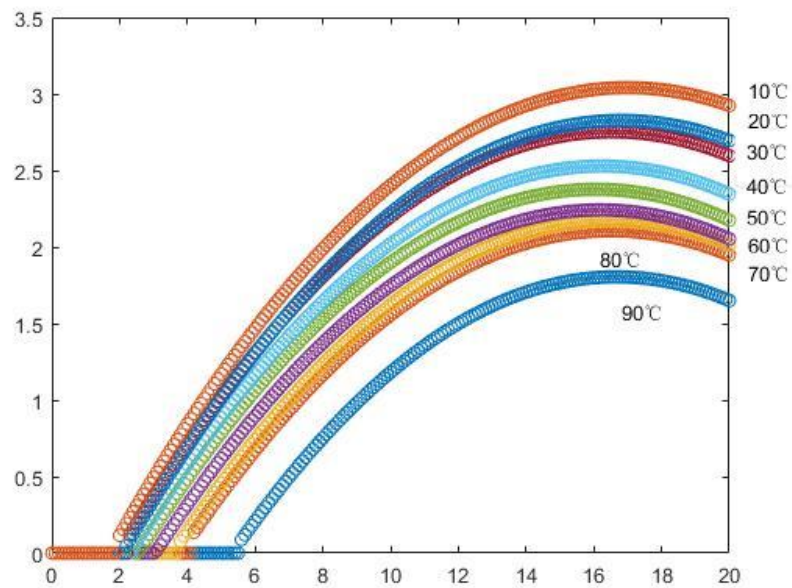


图4 不同温度下的 P-I 曲线

根据不同温度下的 L-I 曲线，我们可以的得出，温度越高，L-I 曲线越低，同

时，L-I 曲线呈现出先上升再下降的趋势。

5.1.2 最高温度的推测

对于问题（b），假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时，用户的光猫无法检测到信号。

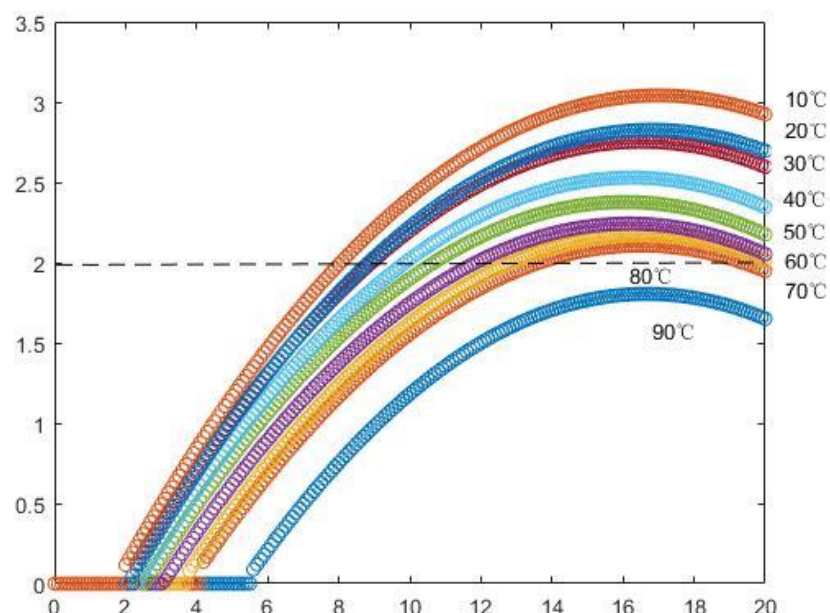


图 5 光功率 P 值最大值设定

我们将光功率 P 值最大值设定为 2mW，利用上述模型，求解出满足光功率 P 值最大值<2mW 的最大温度，求解出的结果为 86.7℃，并且通过上图可以直观的验证，结果较为合理。

5.2 问题二：L-I 模型的修正与改进

5.2.1 L-I 模型的误差分析

对于问题 1 所用的模型，模型中我们利用非线性拟合的方法，对 U-I 曲线采用的是四阶多项式进行拟合的方法，在理论上，多项式的阶数越高，拟合的效果越好，但是增大的同时，大大的降低的计算机的运行速率，并且对计算机的精度要求比较高。因此，选取合适的阶数对试验曲线进行多项式拟合是很有必要的。

5.2.2 L-I 模型的改进

另外，在对原方程进行计算求解的过程中，采用的是 matlab 的方程求解红包，不仅运行速率慢，并且，精度有所局限性，所以我们进行了以下改进：

下式问题一的模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t) = T_0 - P_0 * R_{th} + V * I * R_{th} + (P_0 * R_{th} - V * I * R_{th}) * e^{\frac{-t}{\tau_{th}}} \\ P_0 = \eta (I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ I_{off}(T) = \sum_{n=0}^4 a_n T^n \\ u(I) = \sum_{n=0}^q p_n I^n \end{array} \right. \quad (14)$$

将上述模型的 $u(I)$ 的阶数做出相应的调整，定义阶数为 q ，并将其设为优化参数，并对上述模型的求解方法更正为利用 Newton 法求解方程组，具体思想如下：

假设已知方程 $f(x) = 0$ 的近似根 x_0 ， $f(x)$ 在其零点 x^* 邻近一阶连续可微， $f'(x) \neq 0$ 当 x_0 充分接近 x^* 时， $f(x)$ 可用 Taylor 公式近似表示为：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

则方程 $f(x) = 0$ 可用线性方程近似代替，即：

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

解此线性方程得：

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

取此 x 作为原方程的新近似值 x_1 ，重复以上步骤，

于是得迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (15)$$

按上式求方程 $f(x) = 0$ 近似解称为 Newton 法。

我们经过求解，计算出 $u(I)$ 阶数为 5 时，结果和计算速度达到最优，其计算精度（与实验 P-I 曲线的组内方差）为 SSE: 0.06348 远远小于改正前的 SSE: 2.398，并画出了在 20℃ 时，模拟数据和实验原始数据的曲线图,如下：

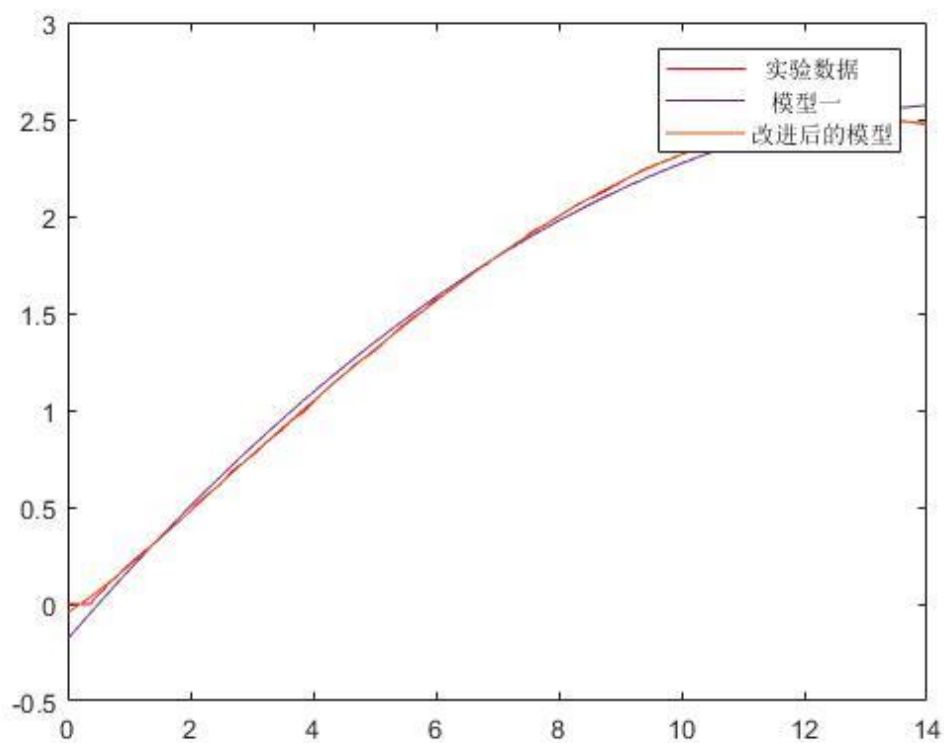


图 6 改进后模型的 P-I 曲线与实验原始曲线和改进前模型曲线

通过上图与改进前的模型曲线进行对比，曲线拟合更加接近，效果更好。
下面我们画出：

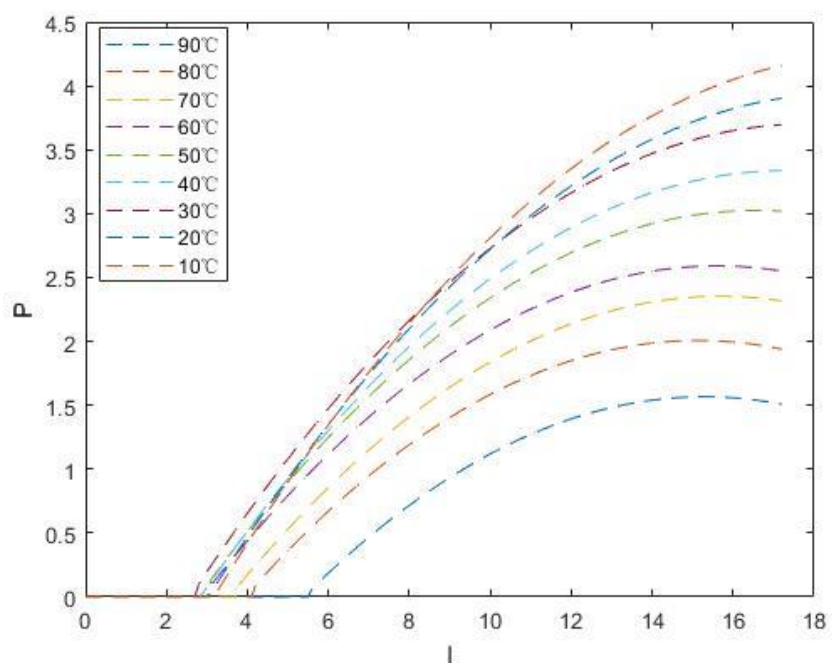


图 7 改进后模型不同温度下的 P-I 曲线

根据曲线我们可以得出：阈值电流随温度变化呈现先缓慢下降后迅速上升的特性，下面通过对比 90℃ 下的 L-I 曲线，来展示修正模型的精确性。

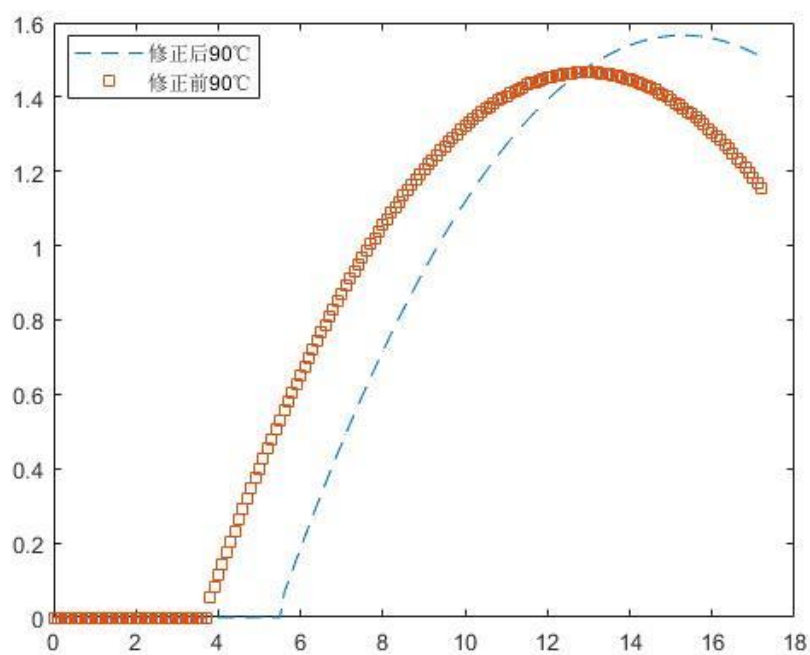


图 8 90℃改进前后模型 P-I 曲线对比

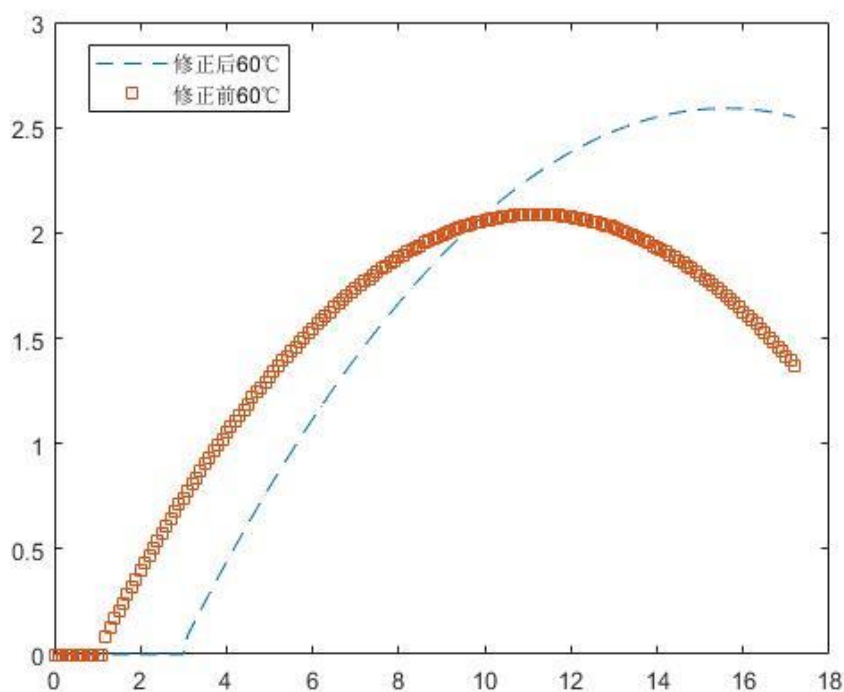


图 9 60℃改进前后模型 P-I 曲线对比

通过 90℃ 和 60℃ 的 P-I 曲线，改进后模型的阈值电流增大，发光功率增加。

5.3 问题三：小响应模型的建立

5.3.1 小响应模型的简化推导

首先我们对附录二中的小信号模型进行更合理的推导,简化后续参数的提取和模型的运算速度.模型中 G 为增益系数,是载流子密度和光子密度的函数:

$G(N, S) = g_0(N - N_0)(1 - \varepsilon S)$ 。将偏置电流和注入激光器的外部驱动电流代入激光器速率方程,得到:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i(I - I_T)}{q} - \frac{N}{\tau_n} - GS \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + GS \end{cases} \quad (16)$$

VCSEL 输出的光功率与光子数成正比,假定比例因子为 k ,有:

$$P_0 = kS$$

代入:

$$\begin{cases} I(t) = I_s + i(f)e^{j2\pi ft}, & i(f) \ll I(t) \\ N(t) = N_s + n(f)e^{j2\pi ft}, & n(f) \ll N(t) \\ S(t) = S_s + s(f)e^{j2\pi ft}, & s(f) \ll S(t) \end{cases} \quad (17)$$

当外部驱动电流保持恒定,载流子数 N 与光子数 S 将在一段时间的瞬态后达到稳定状态,此时 N 和 S 对时间求导为 0,那么等式 (16) 可以写为:

$$\begin{cases} \frac{\eta_i(I - I_T)}{q} - \frac{N}{\tau_n} - GS = 0 \\ -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + GS = 0 \end{cases} \quad (18)$$

现在研究在已知输出光功率 P_0 情况下激光器中载流子的浓度问题。将 $P_0 = kS$ 关系式带入方程 (18) 第二个式子中(此时求出的 N 为稳态下载流子浓度,记为 N_s)得到:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + GS = 0 \\ & P_0 = kS \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{P_0}{k\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{GP_0}{k} = 0 \Rightarrow N_s = \frac{(P_0 - \tau_p GP_0)}{k\tau_p} \quad (19)$$

其中， P_0 为通过仪器测量到的激光器的实测出光功率。根据计算出来的载流子浓度 N_s 可以进一步计算激光器中用于转换成光能的激光器驱动电流 I_{cur} 和激光器中稳态下理论上可计算出的光子数 S_s 。

将 $P_0 = kS$ 和等式 (19) 计算出的载流子浓度 N_s 带入等式 (18) 第一个式子中，求出的电流 I 即为根据速率方程从理论上所计算出的激光器发光的驱动电流 I_{cur} ：

$$\frac{\eta_i(I_{cur} - I_T)}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{GP_0}{k} = 0 \Rightarrow I_{cur} = \frac{\tau_n k N_s + q \tau_n G P_0}{\eta_i} + I_T \quad (20)$$

根据计算出的稳态下载流子浓度 N_s ，从等式 (18) 第一个式子中可以计算稳态下理论上的光子数 S_s ：

$$\frac{\eta_i(I - I_T)}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - GS_s = 0 \Rightarrow S_s = \frac{\eta_i(I - I_T)}{qG} - \frac{N_s}{\tau_n G} \quad (21)$$

激光器输出光功率与光子数成正比，比例因子为 k ，那么根据 S_s 可以计算出理论上的出光功率：

$$P_{od} = kS_s$$

现在进一步考虑加载小信号的情况以获得小信号响应的理论表达式。将等式 (17) 带入速率方程等式 (16)，有：

$$\begin{cases} \frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} = \frac{\eta_i(I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_T)}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - G(S_s + s(f)e^{j2\pi ft}) \\ \frac{d(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{dt} = -\frac{S_s + s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{\tau_n} + G(S_s + s(f)e^{j2\pi ft}) \end{cases} \quad (22)$$

稳态方程 (18) 中载流子浓度和光子数均为稳态理论值 N_s 和 S_s 时，等式重写为下面的形式

$$\begin{cases} \frac{\eta_i(I-I_T)}{q} - \frac{N}{\tau_n} - GS = 0 \\ -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + GS = 0 \end{cases} \quad (23)$$

联立 (22) (23) 可得：

$$\begin{cases} (j2\pi f)n(f) = \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - g_0(1-\varepsilon S_s)S_s n(f) - Gs(f) \\ (j2\pi f)s(f) = -\frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} - Gs(f) + g_0(1-\varepsilon S_s)S_s n(f) \end{cases} \quad (24)$$

由等式 (24) 第二式得到

$$n(f) = \frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G}{\beta/\tau_n + g_0(1-\varepsilon S_s)S_s} s(f) \quad (25)$$

假定小信号响应为线性频率响应 $h(f)$ ，按照定义表示为小信号带来的输出信号 $p(f)$ 与输入信号 $i(f)$ 的比值

$$h(f) = \frac{p(f)}{i(f)} = k \frac{s(f)}{i(f)} \quad (26)$$

将等式 (25) 带入等式 (24)，并化简为等式 (26) 的形式

$$h(f) = k \frac{s(f)}{i(f)} = \frac{k\eta_i}{\frac{q[j2\pi f + 1/\tau_p - G] \cdot [j2\pi f + 1/\tau_n + g_0(1-\varepsilon S_s)S_s]}{\beta/\tau_n + g_0(1-\varepsilon S_s)S_s} + qG} \quad (27)$$

联立通信系统里面的信号响应形式：

$$h(f) = \frac{X}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (28)$$

那么有：

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + g_0(1-\varepsilon S_s)S_s - G \\ Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{g_0(1-\varepsilon S_s)S_s}{\tau_p} - \frac{(1-\beta)}{\tau_n} G \end{cases} \quad (29)$$

进一步将 $P_s = kS_s$ 带入等式 (29) 得

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{g_0(k - \varepsilon P_s)P_s}{k^2} - G \\ Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{g_0(k - \varepsilon P_s)P_s}{\tau_p k^2} - \frac{(1 - \beta)}{\tau_n} G \end{cases} \quad (30)$$

由于等式 (30) 是忽略了 $\varepsilon s(f)$ 项得到的, 为了进一步提高精度, 假定只忽略高阶项, 而不忽略 $\varepsilon s(f)$ 项, 再继续对响应函数进行归一化处理, 得到的小信号响应为:

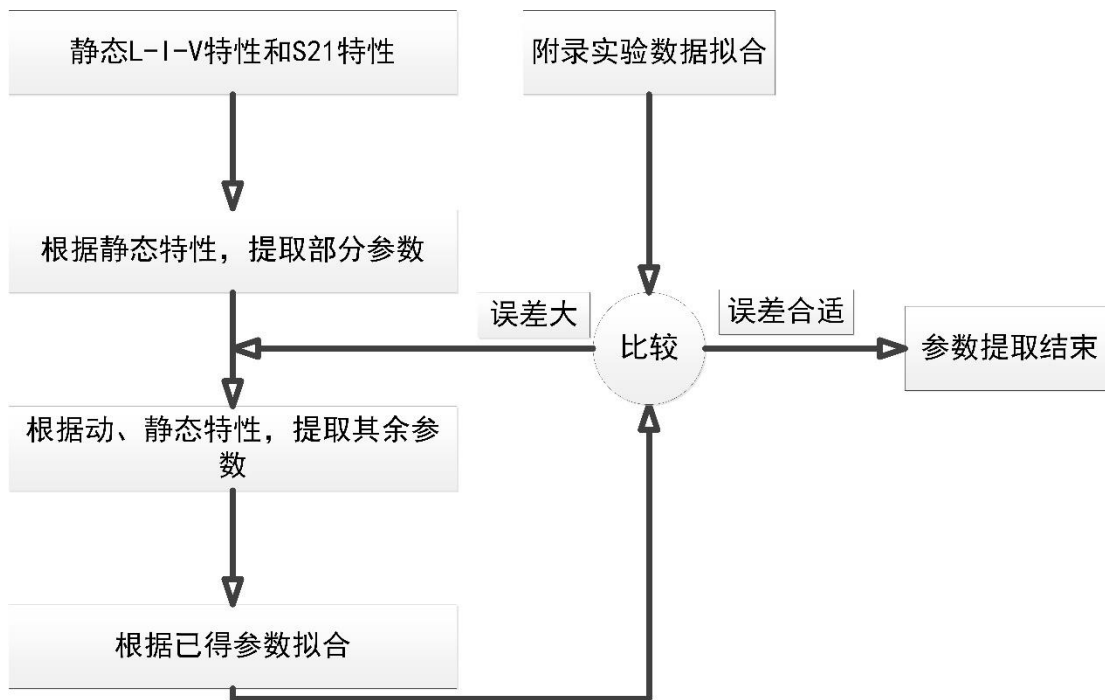
$$\begin{cases} H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \\ Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{g_0(k - \varepsilon P_s)P_s}{k^2} - G(1 + \varepsilon P_s / k) \\ Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{g_0(k - \varepsilon P_s)P_s}{\tau_p k^2} - \frac{(1 - \beta)G(1 + \varepsilon P_s / k)}{\tau_n} \end{cases} \quad (31)$$

5.3.1.1 模型参数提取

在画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线之前, 另一项重要的工作是模型参数的提取。

对于非线性最优化问题, 初值的选取直接影响优化结果, 题中已给参考初值, 极大的简便了模型参数的提取。

在第一问中我们用变分法与曲线拟合等提取了 $L-I$ 模型的参数。而通过搜索, 发现 Minoglou 等人通过非线性寻优算法, 在拟合 VCSEL 静态 $L-I-V$ 曲线和带宽模型对应的 S21 曲线, 成功提取了 VCSEL 小信号响应模型的参数。为了更进一步说明 L-I 模型参数提取方法的准确性, 本文参考 Minoglou 的参数提取方法提取模型参数, 我们在带宽模型的参数的提取之前, 先利用 matlab 提供的非线性最小二乘曲线拟合工具, 拟合静态 L-I-V 特性曲线, 提取泄漏电流参数、热阻和伏安特性参数。然后, 在 ADS 环境下, 利用非线性寻优算法和人工辅助的方法, 根据静态 L-I 特性和 S21 特性提取剩余的所有参数, 具体的参数提取流程如下:



参数提取主要步骤为：

- (1) 根据附录提供的实验测试数据，画出静态 L-I 曲线、I-V 曲线和 S21 特性曲线。
- (2) 在阈值电流以上，根据不同环境温度下的 VCSEL 静态 L-I 特性和 V-I 特性提取泄漏电流系数 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和 VCSEL 热阻抗 R_{th} (同问题一中的参数提取)。
- (3) 在阈值电流以上，根据附录数据的 VCSEL 静态 L-I 特性和 I-V 特性提取伏安特性多项式的系数。
- (4) 在步骤(2)和(3)所提取参数的基础上，提取包含寄生参数的其余所有参数。在 ADS 环境下，建立 VCSEL 仿真模型。设置 VCSEL 的偏置工作电流，可以方便得到出射光功率的小信号频率响应。将 S21 特性曲线作为优化目标，两条曲线接近或重合，即选取拟合的参数。

ADS 的优化控制器可以用于最优化寻优，但在这里的使用效果不佳。因为寄生参数和速率方程参数有十几个，都对 VCSEL 的工作特性有影响，很难通过自动寻优获得最优化参数。

因此，首先利用调谐工具手动调整参数，获取较优的参数(接近最优)。然后利用优化控件自动寻优，使优化结果达到最优。ADS 的调谐工具可以让用户只

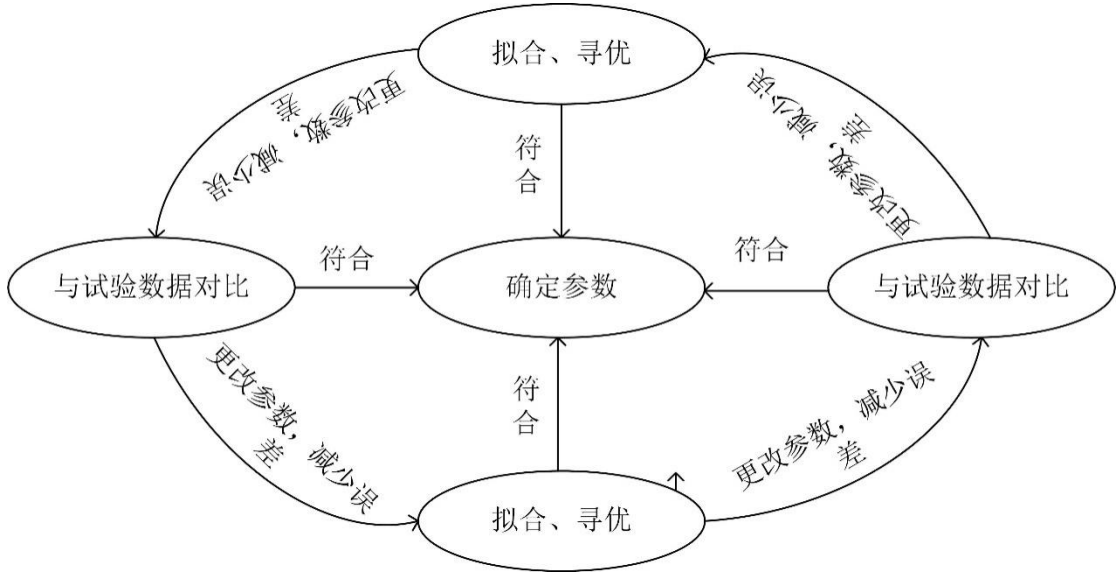
改变电路或系统中的一个或多个设计参数的值，而不用重新进行仿真就可以立即观察到它对电路或系统的输出的影响，可以帮助用户得到最好的电路或系统的性能，同时，用户还可以观察并确定系统中最敏感的元件。

具体过程为：

首先，不考虑寄生参数，调整其他物理参数，使仿真 L-I 曲线和实验数据画出的 L-I 曲线吻合。

其次，利用调谐工具手工调整模型参数，使仿真频率响应与 S21 曲线接近。在这个过程中，L-I 曲线可以有微小变化，可以通过对其他参数的修改来纠正 L-I 曲线。因为，某些参数主要影响 L-I 特性，对频率特性影响较小，如比例系数和载流子寿命；而另一部分参数主要影响频率特性，对 L-I 特性影响较小，如增益系数、光子寿命和增益限制因子；另外寄生参数主要影响频率特性，对静态 L-I 特性几乎没有影响。

最后，利用优化控件自动寻优，使参数提取结果达到最优，具体思路如下：



(5) 基于 VCSEL 的系统级仿真模型，调制输出得到眼图，并与实验测试结果对比，主要对比上升时间、下降时间、外眼开度和内眼开度等指标。如果仿真结果与实验测试结果相差较大，则需要查找原因，微调部分参数，甚至需要重新提取参数。

(6) 重复步骤(2)~(5)，直至仿真结果与实验结果的误差在合理范围内。

最后基于非线性优化算法，我们提取的参数为：

表 3 带宽模型参数提取结果

参数	参考初值	单位
η_i	0.55	-
β	0.8942E-5	-
τ_n	7.676E-9	s
k	1.135E-8	W
g_0	1.672E6	s ⁻¹
N_0	6.861E5	-
τ_p	5.82E-12	s
ε	7.2E-8	-

5.3.2 S21 曲线的仿真及分析

基于 5.3.1 标定参数的基础之上我们通过 matlab 画出了下列不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线如下(部分源程序参考附录):

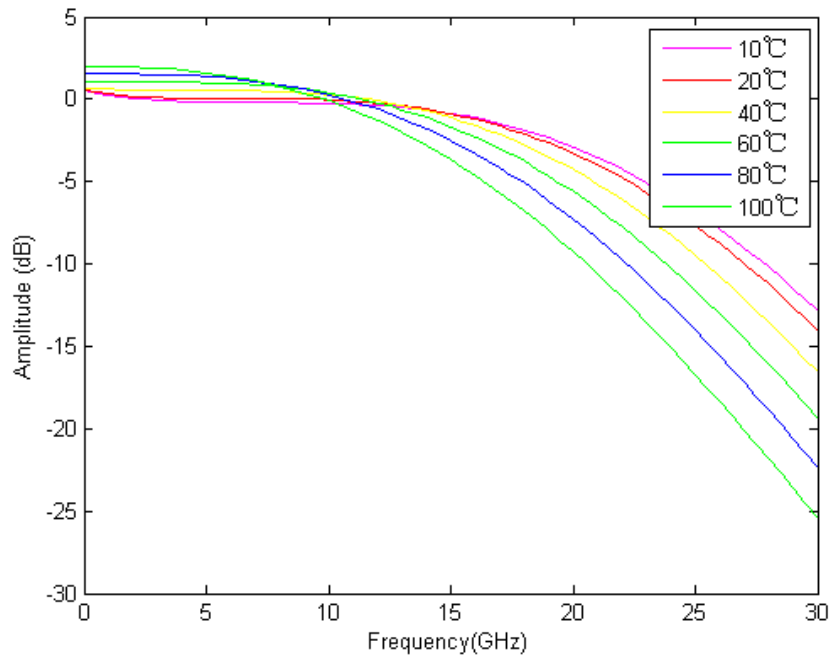


图 10: 电流 7.5mA 下的 6 组温度 S21 曲线

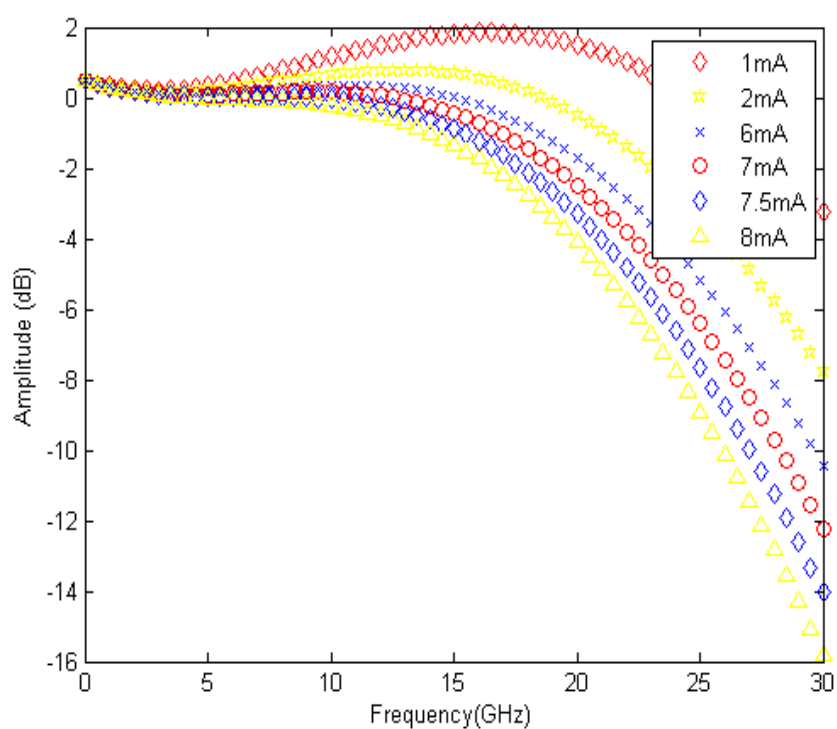


图 11: 温度 20°C 下的 6 组 S21 曲线

单独将图中 7.5mA 曲线与附录试验数据对比有:

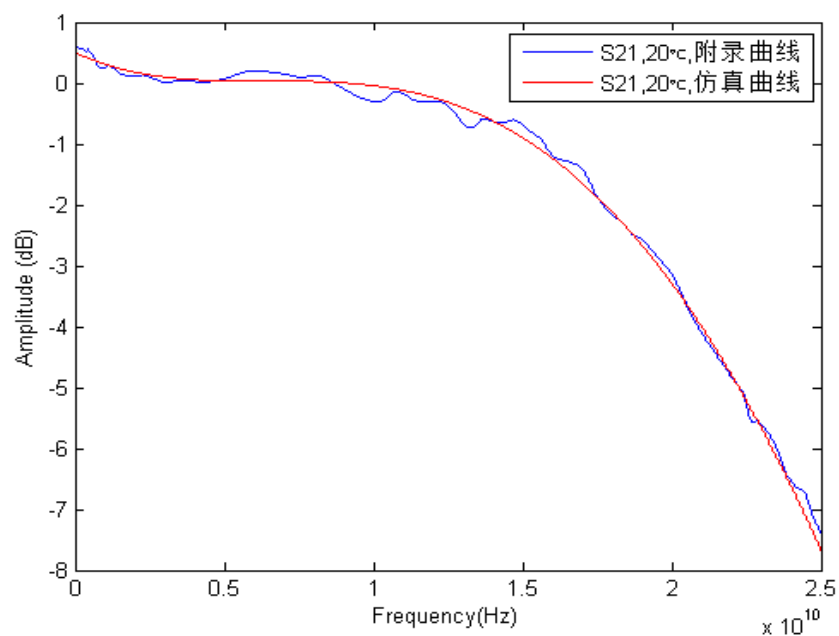


图 12: 仿真曲线与试验数据对比

由图 12 可知, 仿真的曲线与实验数据拟合度比较高, 因此我们优化的激光器小信号幅频响应参数模型的参数的提取方法是有效的、参数提取结果较为准

确。

5.3.2. 激光器温度及偏置电流对带宽的影响

通过图 10：我们可以发现在相同的电流 7.5mA 下，随着温度的升高，带宽的峰值向左移动，峰值对应的频率呈降低趋势，且随着频率的升高，带宽下降的速度变快；

通过图 11：我们可以发现在相同的温度 20℃ 下，随着电流的增大，带宽峰值减小，且频率越高，带宽降低趋势越大。当电流在 2mA 以下时，带宽呈先增加再下降的趋势，当带宽约在 2mA 之上，特别在 7mA 之上时，直接呈下降趋势。

5.3.3 小信号等效电路模型

题目给出的问题是固定在 7.5mA 和 20℃ 的条件下来拓展带宽，我们发现号等效电路模型，在此模型中通过减少电容 C_3 可以获得更大的带宽。

速率方程^[21]可表示为:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{I}{qV_a} - \frac{N}{\tau_n} - GS \\ \frac{dS}{dt} = \Gamma GS - \frac{S}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{N}{\tau_n} \end{cases} \quad (32)$$

令

$$\begin{cases} I = I_0 + \Delta I, & \Delta I \ll I \\ N = N_0 + \Delta N, & \Delta N \ll N \\ S = S_0 + \Delta S, & S_0 \ll S \end{cases} \quad (33)$$

其中 I_0, N_0, S_0 是偏置分量，即调制信号 $\Delta I = 0$ 时的稳态。联立 (32) (33) 可得:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{I_0}{qV_a} - \frac{N_0}{\tau_n} - G_0 S_0 \\ \frac{dS}{dt} = \Gamma G_0 S_0 - \frac{S_0}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{N_0}{\tau_n} \end{cases} \quad (34)$$

代入下列方程组^{[10][21][22]}:

$$\left\{ \begin{array}{l}
N = N_e (e^{qV_j/2kT} - 1) \\
V_j = V_{j0} + \text{Re}\{i_s(j\omega L_a + R_a)e^{j\omega t}\} \\
\Delta I = \text{Re}\{ie^{j\omega t}\}, |i| \ll I_0 \\
\Delta S = \text{Re}\{ie^{j\omega t}\}, |s| \ll S_0 \\
R_a = [\Gamma g_0(N_0 - N_t)\varepsilon S_0 + \Gamma\beta \frac{N_0}{S_0}\tau_n]L_a \\
L_a = \frac{R_x}{\Gamma g_0(N_o - N_t)(1 - 2\varepsilon S_0)[\beta + g_0\tau_n(1 - \varepsilon S_0)S_0]} \\
R_d = \frac{R_x}{1 + g_0\tau_n(1 - \varepsilon S_0)S_0} \\
C_a = \frac{\tau_n}{R_x} \\
R_x = \frac{2kT\tau_n}{q^2 V_a N_0}
\end{array} \right. \quad (35)$$

可以得到小信号速率方程:

$$i = i_s(j\omega L_a + R_a)(j\omega C_a + \frac{1}{R_d}) + qV_a g_0(N_o - N_t)(1 - 2\varepsilon S_0)s \quad (36)$$

根据 Hofmann^[23]等人提供的具有共面电极结构的 VCSEL 芯片,小信号速率方程 (36) 构造等效电路^[10]:

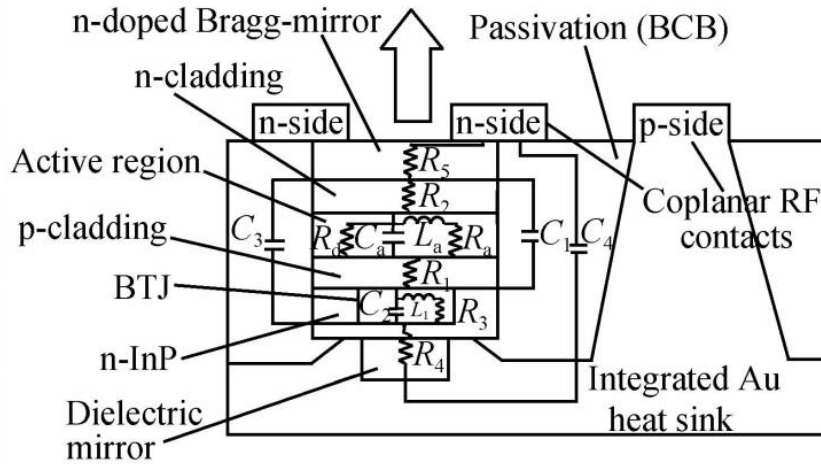


图 13: VCSEL 芯片剖面

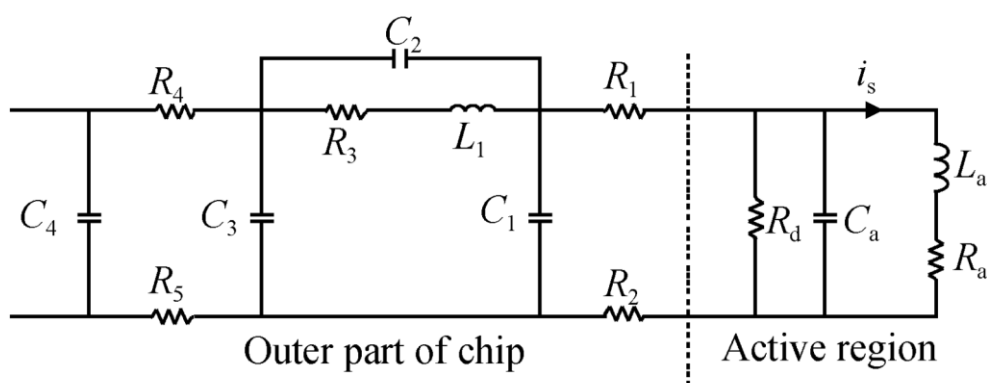


图 14: VCSEL 芯片等效电路图

图 14 中 R_1 和 R_2 是为 p 包层和 n 包层之间的电阻, C_1 为 p 包层和 n 包层之间的电容, 电感 L_1 与电阻 R_3 串联, 再与 C_2 并联来表示 BTJ 层。

由于等效电路模型需要测 VCSEL 芯片的相关数据, 我们参考了文献[10]中的 VCSEL 芯片测试数据, 我们的目的是验证减少电容 C_3 能来的更大带宽, 遗憾的是表 4 的数据是 4.1mA 的测量数据, 但是只要数据能支持找个方法, 在 7.5mA 下也是可行的。

表 4: 电路参数

电路元件	数值	电路元件	数值	电路元件	数值
R_a	38.18m Ω	R_1	14.32 Ω	C_1	0.4375pF
L_a	1.032pH	R_2	15.62 Ω	C_2	0.0251pF
C_a	175.1pF	R_3	18.11 Ω	C_3	1.3187pF
R_d	0.1543 Ω	R_4	2.188 Ω	C_4	0.0148pF
		R_5	9.031 Ω	L_1	637.72pH

通过表 4 中提供的参数, 我们通过 matlab 对电容 C_3 的变化进行仿真, 得到:

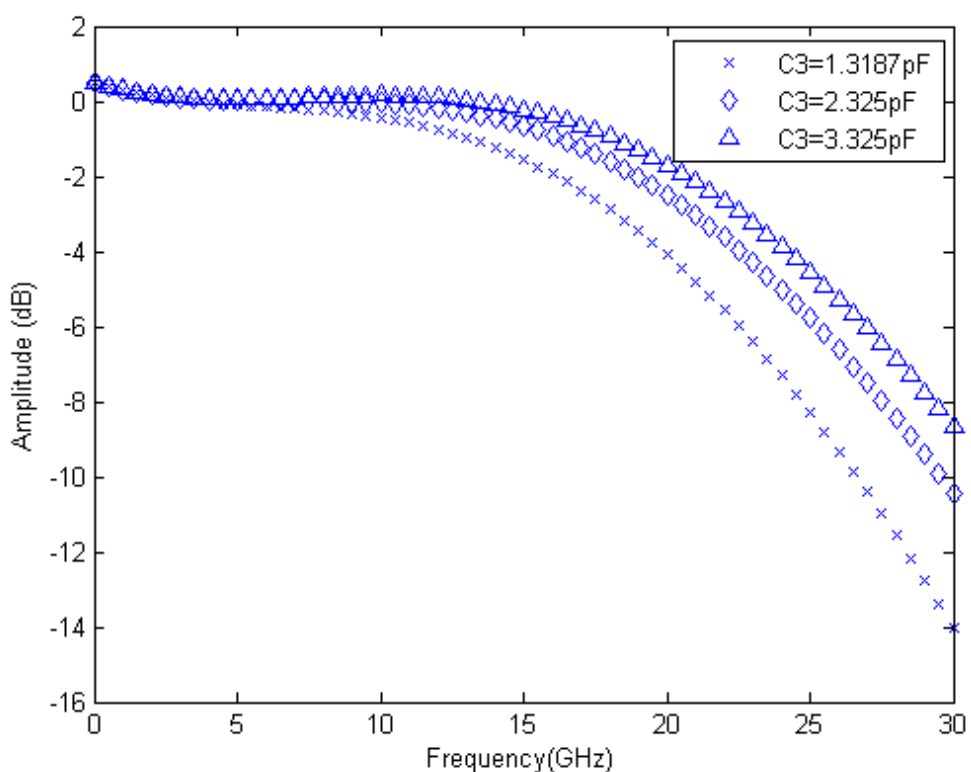


图 15: 不同 C_3 得到的 S_{21} 对比

由图 15 可知，合理增加等效电路中电容 C_3 的参数，可以增加带宽，除此之外，由图 10（7.5mA 和 20℃）可知：适当降低频率也可以增加带宽。

5.3.4 激光器参数及带宽

改变温度 T ，改变频率，改变偏置电流 I 会出现这种现象。由图 10 中可以观察到，适当改变偏置电流 I ，在图 9 中可知，适当改变温度 T 可以得到这种现象。

其实，在本题中，我们发现，当 $I = 2.1\text{mA}$ ， $T = 20^\circ\text{C}$ 左右时带宽曲线比较平坦，

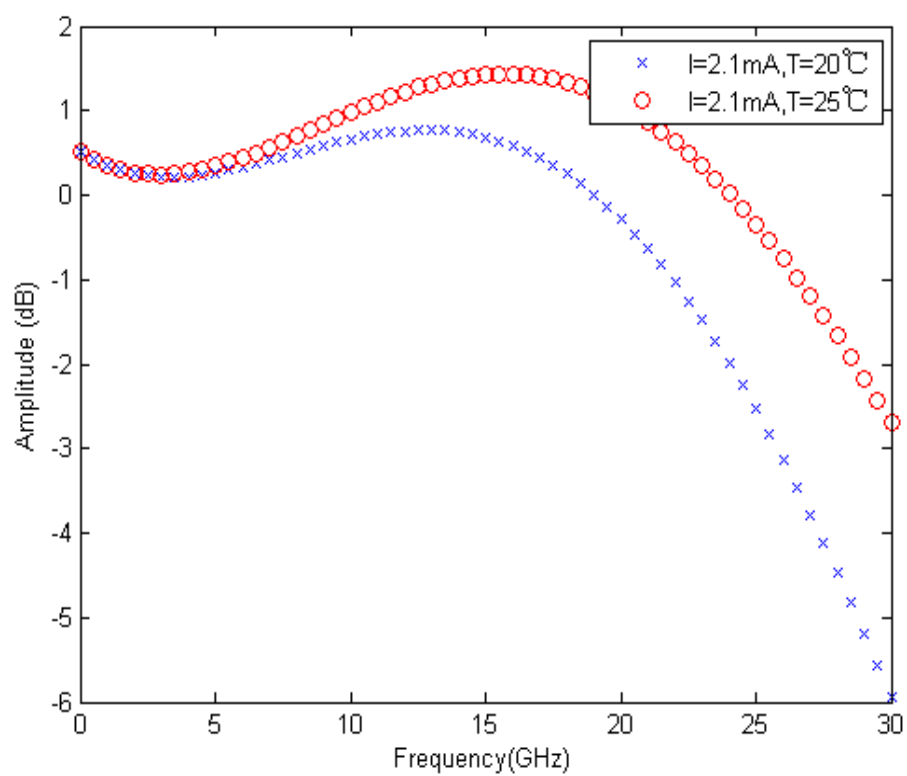


图 16

由参考文献^[24]:

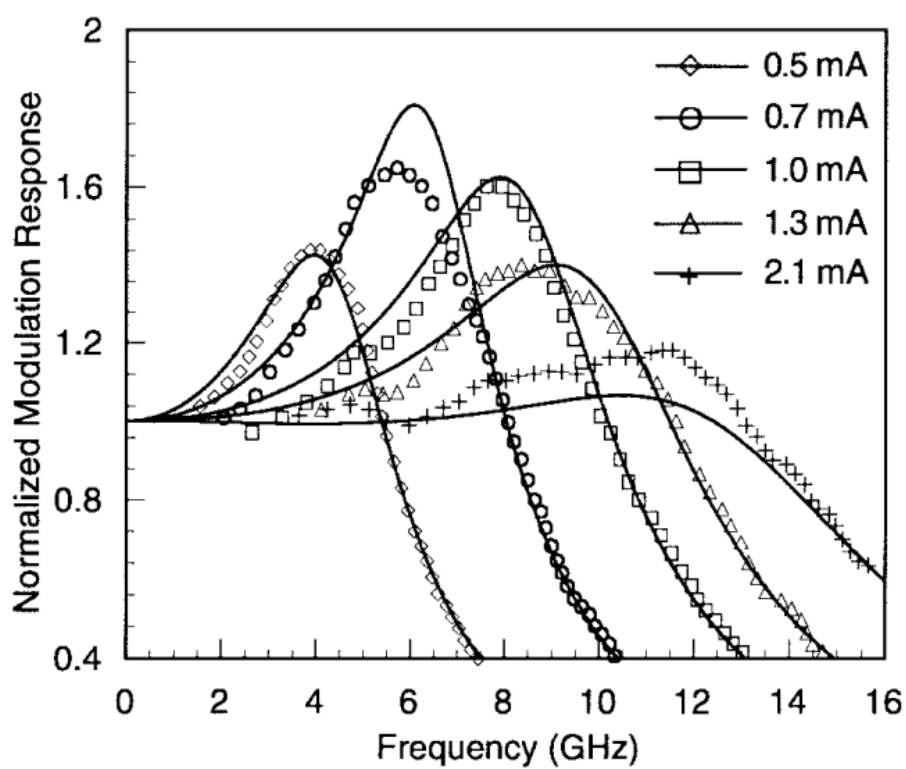


图 17

也可以看出，在 2.1mA 左右 S21 曲线平坦，且随着偏置电流减小、增加而变得不平坦。结合图 9，图 10，我们给出以下解决方案：

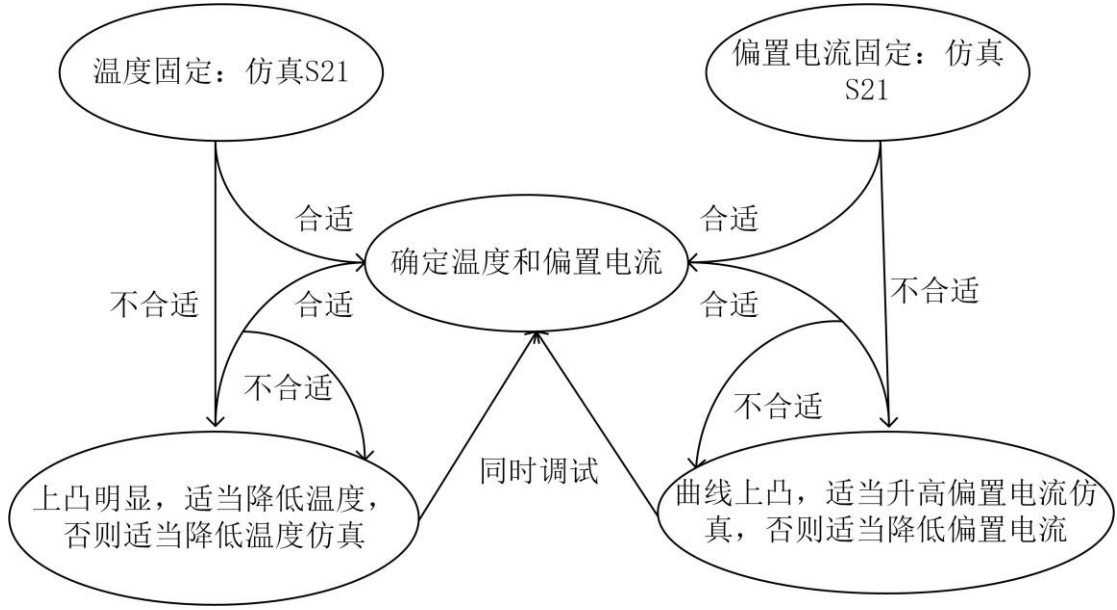


图 18: 设计参数流程

5.4 问题四： VCSEL 带宽模型的改进

5.4.1 VCSEL 带宽模型的重新建模

在第三小问题的第一问中我们优化了附录中的传统小信号模型推导，通过 matlab 仿真拟合度很高，在第三小问中我们建立了等效电路的小信号模型，但是等效电路的模型需要具体的一些参数，在本次建模的过程中，此模型局限性较大。

这一小节，我们将重新研究 VCSEL 的小信号速率方程组模型，为了方便求解小信号速率方程组的解析解，假设载流子浓度和光子浓度变化量比较小。注入电流 I 、载流子浓度 N 、光子浓度 N_p 以及增益 g 作为变量分别对时间 t 求微分，可得式 (37)

$$\begin{cases} d\left[\frac{dN}{dt}\right] = \frac{\eta_i}{qV} dI - \frac{1}{\tau_{\Delta N}} dN - \nu_g g dN_p - N_p \nu_g dg \\ d\left[\frac{dN_p}{dt}\right] = (\Gamma \nu_g g - \frac{1}{\tau_p}) dN_p + N_p \Gamma \nu_g dg + \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} dN \end{cases} \quad (37)$$

其中，辐射进入激光基模的载流子寿命 $\tau_{\Delta N}$ 和 $\tau'_{\Delta N}$ 分别表示为

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_{\Delta N}} = \frac{dR_{sp}'}{dN} = 2\beta_{sp} BN + \frac{d\beta_{sp}}{dN} BN^2 \\ \frac{1}{\tau'_{\Delta N}} = \frac{dR_{sp}'}{dN} = 2\beta BN + \frac{d\beta_{sp}}{dN} BN^2 \end{cases} \quad (38)$$

其中， $\tau_{\Delta N}'$ 在几十微秒范围内取值，大部分情况下可以忽略。增益 g 是关于载流子浓度 N 和光子浓度 N_p 的函数，对其求导可得：

$$dg = \alpha dN - \alpha_p dN_p \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial g}{\partial N} = \frac{g_0}{(N + N_s)(1 + \varepsilon N_p)} \\ \alpha_p &= -\frac{\partial g}{\partial N_p} = \frac{\varepsilon g}{(1 + \varepsilon N_p)} \end{aligned} \quad (40)$$

其中， g_0 、 N_s 均为常量， ε 为经验增益压缩因子，也为常量。将式 (39) 带入式 (37) 并整理，可得：

$$\begin{cases} d\left[\frac{dN}{dt}\right] = \frac{\eta_i}{qV} dI - \left(\frac{1}{\tau_{\Delta N}} + N_p \nu_g \alpha\right) dN - \left(\nu_g - N_p \nu_g \alpha_g\right) dN_p \\ d\left[\frac{dN_p}{dt}\right] = \left(\frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + N_p \nu_g \alpha \Gamma\right) dN - \left(\frac{1}{\tau_p} - \Gamma \nu_g \alpha\right) dN_p \end{cases} \quad (41)$$

变形可得：

$$\frac{1}{\tau_p} - \Gamma \nu_g g = \frac{\Gamma R_{sp}'}{N_p} \quad (42)$$

将式 (42) 带入式 (41) 中并将其写成矩阵的形式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} dN \\ dN_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{NN} & -\gamma_{NP} \\ \gamma_{PN} & -\gamma_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dN \\ dN_p \end{bmatrix} + \frac{\eta_i}{qV} \begin{bmatrix} dI \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\gamma_{NN} = \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \nu_g \alpha N_p \quad (44)$$

$$\gamma_{NP} = \nu_g g - \nu_g \alpha_p N_p = \frac{1}{\Gamma \tau_p} - \frac{R_{sp}'}{N_p} - \nu_g \alpha_p N_p \quad (45)$$

$$\gamma_{PN} = \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + \Gamma \nu_g \alpha N_p \quad (46)$$

$$\gamma_{PP} = \frac{1}{\tau_p} - \Gamma \nu_g g + \Gamma \nu_g \alpha_p N_p = \frac{\Gamma R_{sp}'}{N_p} + \Gamma \nu_g \alpha_p N_p$$

当注入电流 I 远大于阈值电流 I_{th} 且光子浓度 N_p 足够大时，对 (43) 中的各项进行优化，可得，

$$\gamma_{NN} = \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \nu_g \alpha N_p$$

$$\gamma_{NP} = \frac{1}{\Gamma \tau_P} - \frac{R_{sp}}{N_p} - \nu_g \alpha_P N_p$$

$$\gamma_{PN} = \Gamma \nu_g \alpha N_p$$

$$\gamma_{PP} = \Gamma \nu_g \alpha_P N_p$$

通过求解小信号速率方程组，可以帮助我们深入了解 VCSEL 小信号调制特性的动态物理机理。虽然，上式的各个系数依赖于载流子浓度 N 和光子浓度 N_p ，但在特定的注入电流条件下， N 和 N_p 均为常量并可通过求解上一节中的稳态速率方程组求得。因而，所表示的各个系数在具体的注入电流下均可看作常数。假设调制电流为正余弦形式， dI 、 dN 以及 dN_p 可分别表示为：

$$dI(t) = I_1 e^{j\omega t}$$

$$dN(t) = N e^{j\omega t}$$

$$dN_p(t) = N_{p1} e^{j\omega t}$$

对上式进行整理可得关于 N_1 和 N_{p1} 的矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} \gamma_{NN} + j\omega & \gamma_{NP} \\ -\gamma_{PN} & \gamma_{PP} + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_{p1} \end{bmatrix} = \frac{\eta_i I_1}{qV} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{NN} + j\omega & \gamma_{NP} \\ -\gamma_{PN} & \gamma_{PP} + j\omega \end{vmatrix} = \gamma_{NP} \gamma_{PN} + \gamma_{NN} \gamma_{PP} - \omega^2 + j\omega(\gamma_{NN} + \gamma_{PP})$$

求解上式，可得，

$$N_1 = \frac{\eta_i I_1}{qV} \cdot \frac{\gamma_{PP} + j\omega}{\omega_R^2} \cdot H(\omega)$$

$$N_{p1} = \frac{\eta_i I_1}{qV} \cdot \frac{\gamma_{PN}}{\omega_R^2} \cdot H(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{\omega_R^2}{\Delta} \equiv \frac{\omega_R^2}{\omega_R^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \quad (47)$$

$$\omega_R^2 \equiv \gamma_{NP} \gamma_{PN} + \gamma_{NN} \gamma_{PP}$$

$$\gamma \equiv \gamma_{NN} + \gamma_{PP}$$

其中， $H(\omega)$ 为关于参变量 ω_r 和 γ 的传递函数， ω_r 为松弛振荡角频率， γ 为阻尼因子。

将上面的是式子带入并整理 ω_r 和 γ 的表达式可得，

$$\omega_r^2 = \frac{N_p \nu_g \alpha}{\tau_p} + \left(\frac{\Gamma N_p \nu_g \alpha_p}{\tau_{\Delta N}} - \frac{\Gamma \nu_g g}{\tau_{\Delta N}} \right) \left(1 - \frac{\tau_{\Delta N}}{\tau_p} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N} \tau_p}$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{\tau_{\Delta N}} + N_p \nu_g \alpha \right) + \left(\frac{1}{\tau_p} + \Gamma N_p \nu_g \alpha_p \right) - \frac{\Gamma \nu_g g}{\tau_{\Delta N}} \quad (48)$$

从上面的式子可以看出：左端第一个括号项表示由于载流子浓度的变化而引起的损耗，第二个括号项表示由于光子浓度的变化引起的损耗，最后一项为光子浓度的增加项。不过在形式上除以了 $\tau_{\Delta N}$ 、 $\tau'_{\Delta N}$ 或 τ_p 。消去式中的增益 g ，可变为，

$$\omega_r^2 = \frac{N_p \nu_g \alpha}{\tau_p} + \left(\frac{\Gamma N_p \nu_g \alpha_p}{\tau_{\Delta N}} - \frac{\Gamma R'_{sp}}{N_p \tau_{\Delta N}} \right) \left(1 - \frac{\tau_{\Delta N}}{\tau'_p} \right) + \frac{1}{\tau'_{\Delta N} \tau_p}$$

$$\gamma = \nu_g \alpha N_p \left(1 + \frac{\Gamma \alpha_p}{\alpha} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \frac{\Gamma R'_{sp}}{N_p}$$

若注入电流远大于阈值电流，松弛振荡频率 ω_r 可以进一步的简化，此时式（48）右端第一项远远大于其它项，对 ω_r 起着主要作用。可简化相应的 γ ，可写为式（49）的形式。

$$\omega_r^2 \approx \frac{\nu_g \alpha N_p}{\tau_p}$$

$$\gamma \approx K f_R^2 + \gamma_0 \quad (49)$$

$$f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}$$

其中， K 因子和阻尼补偿因子 γ_0 分别表示为

$$K = 4\pi^2 \tau_p \left(1 + \Gamma \frac{\alpha_p}{\alpha} \right)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \frac{\Gamma R'_{sp}}{N_p}$$

为了方便研究 VCSEL 的调制带宽，对传递函数取 20 倍的对数，将传递函

数 H 表示为 dB 的形式，如式 (50)。

$$H[dB] = 10 * \log |H|^2 = 20 * \log |H| \quad (50)$$

可得：

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{v_g \alpha N_p}{\tau_p}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{v_g \alpha \eta_i}{qV_p}} \cdot \sqrt{I - I_{th}} = D \sqrt{I - I_{th}} \quad (51)$$

其中， D 因子表征着松弛振荡频率介随注入电流 I 的变化快慢，即曲线的斜率。 D 因子不是一个常量，它依赖于微分增益 a 。可知，随着载流子浓度 N 和光子浓度 n 的增大，微分增益 a 减小，即 D 因子减小了，进而使得介随注入电流 I 变化程度变缓。使用 M 因子，我们将 VCSEL 的调制带宽或-3dB 带宽表示为类似的形式：

$$\begin{aligned} f_{-3dB} &= M \sqrt{I - I_{th}} \\ \gamma &\approx K D^2 (I - I_{th}) + \gamma_0 \\ \frac{N_{p1}}{I_1} &= \frac{\eta_i}{qV} \Gamma \tau_p H(\omega) \\ \frac{P_1}{I_1} &= \eta_i \eta_0 \frac{h\nu}{q} H(\omega) \end{aligned} \quad (52)$$

其中， $h\nu$ 为光子能量。从 (52) 可以看出，传递函数 $H(\omega)$ 可以通过实验测量的方式求得。若再考虑到电学寄生效应的影响，为了方便研究，通常将电学寄生效应等效为一阶低通滤波器，则传递函数表达式可进一步的完善为式 (53)。

$$H(f) = \text{const} \times \frac{f_R^2}{f_R^2 - f^2 + j \times f \times \frac{\gamma}{2\pi}} \times \frac{1}{1 + j \times \frac{f}{f_p}} \quad (53)$$

根据完善之后的(53)，代入参数仿真可得：

5.4.2 VCSEL 带宽模型修正前后对比

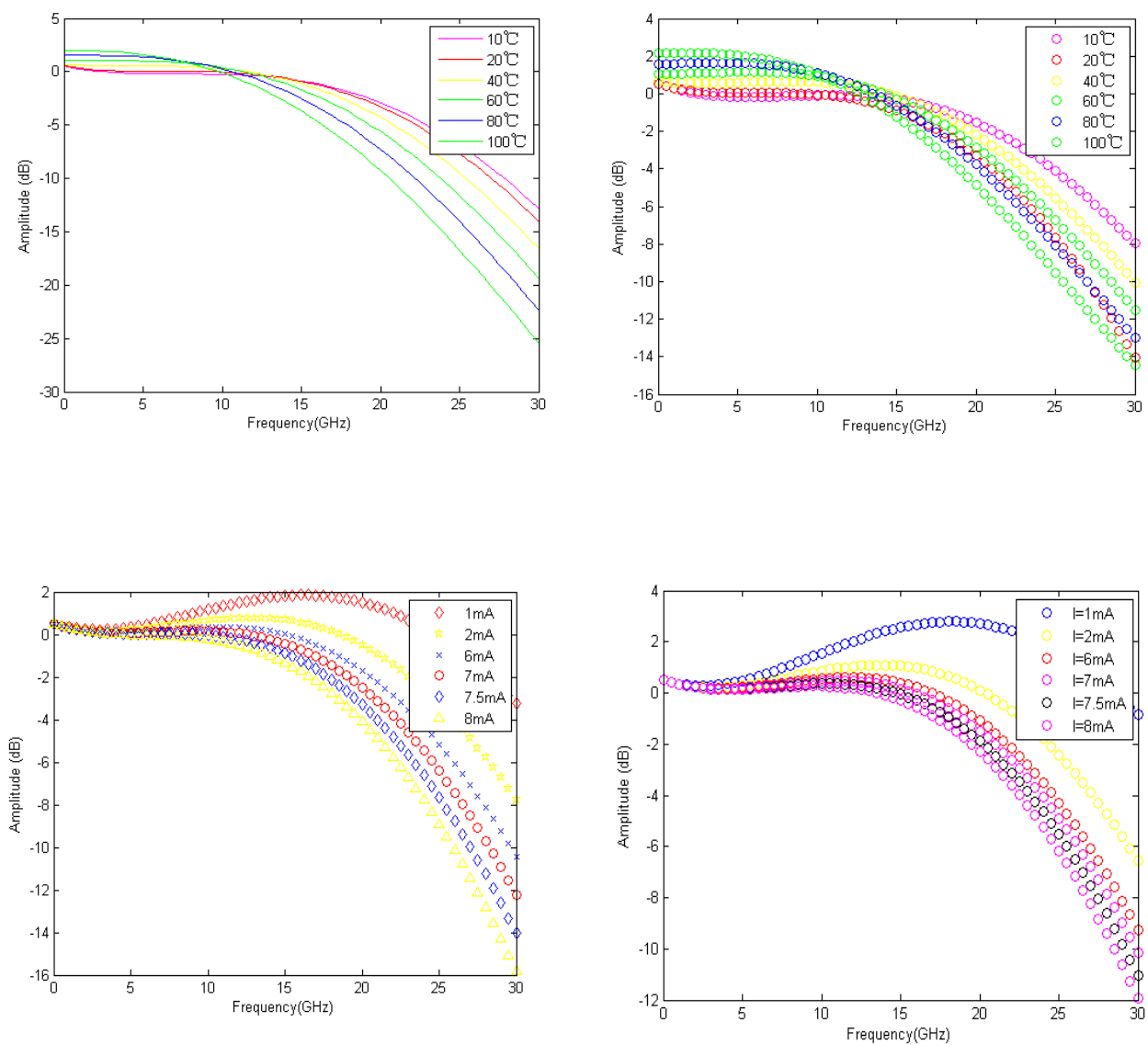


图 19: 新旧模型 S21 对比(左旧右新)

由图 19 可知，新模型在相同情况下带宽比原始模型有提高，当 $T = 20^{\circ}\text{C}$, $I = 1\text{A}$ 时，原始模型的带宽为 2dB,新模型中接近 3dB。

六、总结与展望

VCSEL 器件具有阈值低、体积小、光束方向性好、动态调制频率高、易成阵列、易耦合、易检测等优点，本文根据实际问题，建立了垂直腔面发射激光器的 L-I 模型，并且通过非线性拟合和变分法与最优控制理论的方法，提取了模型的参数，并且画出了不同温度下的 L-I 曲线，并给出了使得电信机房里 VCSEL 激光器正常发射信号的最高温度。

针对建立的 L-I 的模型，我们给出了优化求解过程，首先对 U-I 曲线的非线性拟合进行优化，接着改进了模型的求解过程，利用 Newton 法提高了计算的精度，极大地提高了计算的精度。

为了拓展 VCSEL 器件的带宽，本论文主要做了以下几方面的工作：

我们首先通过推导简化了附录二中的小信号响应模型，再利用非线性寻优算法，并分析静态 L-I-V 曲线和 S21 曲线的特性，成功提取了小信号响应模型的参数，根据模型得到的参数，画出了不同温度和不同偏置电流的 S21 曲线，得出以下主要结论：在相同的偏置电流条件下，随着温度的升高，带宽的峰值向左移动，在相同的温度下，随着电流的增大，带宽的峰值越小且曲线由波峰形状逐渐变得平缓呈下降趋势。此外我们建立了小信号等效电阻模型，针对问题得出以下方案：当温度和偏置电流固定不变时，增大等效电阻模型中的电容 C3 的值，可以获得更宽带宽的激光器。最后，我们通过分析第三题 1 小问的 S21 曲线，得到了温度和偏置电流的适度变化，可以让激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置，且我们建立了一套设计方案，实现了让带宽曲线变得更平缓。

最后我们重新建立了一个关于频率和阻抗因子的带宽模型，模型的最终结果如下：通过 matlab 模拟仿真曲线和原始模型对比，发现在不同温度和不同偏置电流下，带宽都有所提高，且模型更加精简、效率更高。

虽然我们的模型基本上可以解决问题，但还是有一定的局限性，曲线拟合和非线性最优化的算法调试花费的时间很多，并不能完全适应非常多的参数标定，且小信号等效电路具有一定的局限性，拓展空间很大，有待于进一步的研究。

七、参考文献

- [1] 崇毓华. 10Gbps 多模光纤链路仿真中 VCSEL 模型的研究[D]. 东南大学, 2010.
- [2] 黄尉桐. 垂直腔面发射半导体激光器的数值模拟实验研究[D]. 长春理工大学, 2012.
- [3] 梁锋, 高建军, 田学农. 垂直腔面发射激光器的温度模型[J]. 半导体学报, 2007, 28(7):1125-1129.
- [4] 晏长岭. 垂直腔面发射激光器的研制及其特性分析[D]. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2000.
- [5] 滕野. 基于 VCSEL 短距离多模光纤通信的建模与仿真[D]. 北京邮电大学, 2013.
- [6] 马强, 田振华, 王贞福,等. 一种基于热补偿电流的大功率 VCSEL 模型[J]. 发光学报, 2009, 30(4):463-466.
- [7] Gao J, Li X, Flucke J, et al. Direct parameter-extraction method for laser diode rate-equation model[J]. Lightwave Technology Journal of, 2004, 22(6):1604-1609.
- [8] Zhu N H, Chen C, Pun E Y B, et al. Extraction of intrinsic response from S-parameters of laser diodes[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2005, 17(4):744-746.
- [9] Lee J, Nam S, Lee J, et al. A complete small-signal equivalent circuit model of cooled butterfly-type 2.5 Gbps DFB laser modules and its application to improve high frequency characteristics[J]. Advanced Packaging IEEE Transactions on, 2002, 25(4):543-548.
- [10] Xu Guizhi, Hofmann W, Huang Hengpei,等. Small Signal Equivalent Circuit Model of Buried Tunnel Junction VCSEL Chips 掩埋隧道结 VCSEL 芯片小信号等效电路模型[J]. Journal of Semiconductors, 2006, 27(11):2015-2018.
- [11] 鄢雷. VCSEL 原理及驱动电路的设计与仿真[D]. 西安电子科技大学, 2014.
- [12] 郑华. 适应高速数据带宽的半导体激光器:VCSEL[J]. 电子产品世界,

2000(9):70-71.

[13] 欧阳丽. 垂直腔体表面发射激光器等效电路模型的研究[D]. 华东师范大学, 2011.

[14] Rissons A, Perchoux J, Mollier J C. Small signal and noise circuit model of vertical-cavity surface-emitting laser (VCSEL) arrays for short range optomicrowave links[C]// Microwave Photonics, 2003. MWP 2003 Proceedings. International Topical Meeting on. IEEE, 2003:211-214.

[15] Minoglou K, Kyriakisbitzaros E D, Syvridis D, et al. A Compact Nonlinear Equivalent Circuit Model and Parameter Extraction Method for Packaged High-Speed VCSELs[J]. Journal of Lightwave Technology, 2004, 22(12):2823-2827.

[16] Mao L H, Chen H D, Tang J, et al. Small signal equivalent circuit model of vertical cavity surface emitting lasers[C]// International Conference on Solid-State and Integrated-Circuit Technology, 2001. Proceedings. IEEE, 2001:1296-1298 vol.2.

[17] Al-Omari A N. High-Speed Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers[M]. VDM Verlag Dr. Müller, 2009.

[18] Lim D H, Hwang S M, Nam S H. High-speed modulation of 850-nm vertical-cavity surface-emitting lasers[J]. 2001, 2(8):724-725 vol.2.

[19] Chen Z Y, Wang Y L, Liu Y, et al. Two-port calibration of test fixtures with different test ports[J]. Microwave & Optical Technology Letters, 2002, 35(4):299-302.

[20] Zhu N H, Wen J M, San H S, et al. Improved Optical Heterodyne Methods for Measuring Frequency Responses of Photodetectors[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 2006, 42(3-4):241-248.

[21] Gao J, Li X, Flucke J, et al. Direct parameter-extraction method for laser diode rate-equation model[J]. Journal of lightwave technology, 2004, 22(6): 1604.

[22] Tucker R. High-speed modulation of semiconductor lasers[J]. Journal of Lightwave Technology, 1985, 3(6): 1180-1192.

[23] Hofmann W, Zhu N H, Ortsiefer M, et al. 10-Gb/s data transmission using BCB passivated 1.55- μm InGaAlAs-InP VCSELs[J]. IEEE photonics technology letters, 2006, 18(2): 424-426.

[24]Mena P V, Morikuni J J, Kang S M, et al. A simple rate-equation-based thermal VCSEL model[J]. Journal of lightwave Technology, 1999, 17(5): 865-872.

附录

部分主要程序

程序1:

```
clear;
clc;
PP=[];
yita=1;
ith0=0.3*10^(-3);
rth=30;
a0=0.69;
a1=-5.05*10^(-2);
a2=8.56*10^(-5);
a3=-1.24*10^(-8);
a4=9.4*10^(-12);
T0=20;
syms p0 I

for f=0:0.01:14
u=-0.00013*f^4+0.0045*f^3-0.054*f^2+0.34*f+1.4;
R=subs(p0-0.5*(I-0.3*10^(-3))-(1.26*10^(-3)-2.545*10^(-5)*(20+(I*u-p0)*2.6*10^(3)+(p0*2.6*10^(3)-u*I*2.6*10^(3))*exp(-2*10^(-6)))+2.908*10^(-7)*(20+(I*u-p0)*2.6*10^(3)+(p0*2.6*10^(3)-u*I*2.6*10^(3))*exp(-2*10^(-6)))^2+-2.531*10^(-10)*(20+(I*u-p0)*2.6*10^(3)+(p0*2.6*10^(3)-u*I*2.6*10^(3))*exp(-2*10^(-6)))^3+1.022*10^(-12)*(20+(I*u-p0)*2.6*10^(3)+(p0*2.6*10^(3)-u*I*2.6*10^(3))*exp(-2*10^(-6)))^4),I,f);
R=vpa(R,2);
r=solve(R,'p0');

PP=[PP r];
end
a=double(PP);
shibu=real(a);
load('C:\Users\SHU\Desktop\2017×íÖÛËùÏä\B\L-I-20C.mat')
plot(I,shibu(2,:))
hold on
plot(I,P)
legend('Ëä··P-IÇúÏß','ÖæÊµP-IÇúÏß');
hold off;
```

程序2:

```
load('S21_5.mat')
```

```

load('L-I-20C.mat')

k=1.135E-8;

taon=7.676E-9;

taop=5.82E-12;

ib=7.2E-8;

N0=6.861E5;

G0=1.672E6;

beita=0.8942E-5;

yita=0.55;

Itho=0.3E-3;

rth=2.6*10^(3);

a0=0.3231;

a1=-0.3.025E-3;

a2=-4.4658E-06;

a3=6.4918E-09;

a4=-9.211E-13;

q=1.60E-19;

T0=20;

Ns=[];

Ss=[];

Ioff=[];

Ps=[];

Hf=[];

Y=[];

Z=[];

for i=1:1:1401

r1=(P(i)/(k*taop)+G0*N0*P(i)/(k+ib*P(i)))/(beita/taon+G0*P(i)/(k+ib*P(i)));

Ns=[Ns r1];

end

for i=1:1:1401

```

```

T=T0+(I(i)*U(i)-P(i))*rth;

r2=a0+a1*T+a2*T^2+a3*T^3+a4*T^4;

Ioff=[Ioff r2];

    end

    for j=1:1:1401

r3=(yita*(I(j)-Itho-Ioff(j))/q-Ns(j)/taon)/(G0*(Ns(j)-N0));

Ss=[Ss r3];

    end

    for i=1:1:1401

r4=k*Ss(i);

Ps=[Ps r4];

    end

    for i=1:1:1401

r5=1/taop+1/taon+G0*Ps(i)/(k+ib*Ps(i))-k*G0*(Ns(i)-N0)/(((1+ib*Ps(i))/k)^2);

Y=[Y r5];

    end

    for i=1:1:1401

r6=1/(taop*taon)+G0*Ps(i)/taop*(k+ib*Ps(i))-(1-beita)*G0*(Ns(i)-N0)/taon*(((1+ib*Ps(i))/k)^2);

Z=[Z r6];

    end

    for i=1:1:1401

r7=Z(i)/((j*2*pi*f(i))^2+(j*2*pi*f(i))*Y(i)+Z(i));

Hf=[Hf r7];

End

```