

全国第四届研究生数学建模竞赛



题号 B

题 目 机械臂运动路径设计问题

摘 要：

本文分析了机械臂运动的逆问题，对给出的问题建模求解。1) 利用几何法、D-H 方程直接法、D-H 方程最优法和微分运动法对该问题进行建模求解；2) 对于给定的可达目标点讨论了设计指令序列的方法，从最少指令数、最短运动轨迹和最小能量三个方面分析指令序列的优化问题，并以最少指令数为优化目标给出问题的最优解；3) 对于给定的轨迹曲线，为了设计有效指令使得机械臂指尖沿该曲线移动，本文给出抽样拟合法、单指令自适应法和微分法三种轨迹指令序列设计方法，分析比较了它们的优缺点和适用范围，并利用抽样拟合法给出有效指令完成题中的焊接任务；4) 对于碰撞规避问题，本文首先将碰撞问题抽象为空间线段相交的问题，研究了不同位置关系的空间线段距离的计算方法，在此基础上提出了安全轨迹法、碰撞规避自适应法和两阶段避障处理三种指令序列设计方法；5) 分析了可达范围的外围和中心盲区问题，给出对机械臂连杆长度和各关节的最大转动角度的参考设计方法的建议。

参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛队号 1001302

参赛学校 北京邮电大学

参赛队员姓名 王方刚 王玮 卢前溪

机械臂运动路径设计问题

摘要

本文分析了机械臂运动的逆问题，对给出的问题建模求解。1) 利用几何法、D-H 方程直接法、D-H 方程最优法和微分运动法对该问题进行建模求解；2) 对于给定的可达目标点讨论了设计指令序列的方法，从最少指令数、最短运动轨迹和最小能量三个方面分析指令序列的优化问题，并以最少指令数为优化目标给出问题的最优解；3) 对于给定的轨迹曲线，为了设计有效指令使得机械臂指尖沿该曲线移动，本文给出抽样拟合法、单指令自适应法和微分法三种轨迹指令序列设计方法，分析比较了它们的优缺点和适用范围，并利用抽样拟合法给出有效指令完成题中的焊接任务；4) 对于碰撞规避问题，本文首先将碰撞问题抽象为空间线段相交的问题，研究了不同位置关系的空间线段距离的计算方法，在此基础上提出了安全轨迹法、碰撞规避自适应法和两阶段避障处理三种指令序列设计方法；5) 分析了可达范围的外围和中心盲区问题，给出对机械臂连杆长度和各关节的最大转动角度的参考设计方法的建议。

关键词

逆问题，D-H 方程，方向余弦阵，抽样拟合，碰撞规避

1 问题重述

“机器人”一词最早出现在 1920 年捷克作家卡雷尔-查培克的剧本《罗萨姆的万能机器人》中，本意是苦力，即作家笔下的一个具有人的外表、特征和功能的机器，是一种人造的劳力。制造机器人代表了人类重塑自身，了解自身的一种强烈愿望。1954 年，美国人戴沃尔设想并制作了世界上第一台机器人试验装置，发表了《适用于重复作业的通用型工业机器人》一文，获得了美国专利。1959 年，第一台工业机器人在美国诞生，开创了机器人发展的新纪元。经过数十年的发展，机器人技术已经发展成为一门新的综合性交叉科学。当今机器人技术正逐渐向着具有行走能力、多种感觉能力以及对作业环境的较强自适应能力的方面发展。机器人按结构形式可大致分为关节型机器人和非关节型机器人两大类。其中关节型机器人的机械本体部分一般为由若干关节与连杆串联组成的开链式结构。

本题目针对一个具有六自由度的关节式机器人展开。介绍了该六自由度机械臂的外形结构特点以及工作空间等指标，期望通过完成关节在有限范围内的旋转，实现机械臂的指尖移动至期望坐标点的运动。因此，如何使机械臂的指

尖运动到期望位置是问题之一。在机械臂移动的过程中，每个关节的旋转控制是通过发送一系列的离散的指令序列构成的，进而如何选取有效的指令序列是本论文研究的另一问题。当机械臂要完成一些指定的操作时，如焊接，则需要机械臂指尖在空间中的一条曲线上连续运动，因此需要对指尖的运动轨迹进行分析。另外，考虑到对机械臂的保护，要严格避免工作期间机械臂出现碰撞的情况，这包括机械臂与障碍之间的碰撞、机械臂自身发生的碰撞、以及机械臂与操作工件的碰撞，如何有效的避障同样是机械臂运动研究中的一个要点。本论文的目的在于如何解决机械臂运动中的以上问题，从而使机械臂更安全有效的完成指定任务。

2 问题分析

机械臂的运动学问题是机器人技术中的一个研究重点。在已知机械臂指尖空间坐标的前提下求解机械臂的空间状态（即各个关节旋转的角度信息）通常被称为逆问题，本题目属于求解逆问题的范畴。为了使指尖到达空间内规定的位置，机械臂各关节需要进行适当的旋转，各个关节对应的旋转角度就构成了一组可行解。通常，同一个问题存在着多组可行解。为了得到这些解，一般的方法是利用 D-H 方程描述机械臂的状态。通过对 D-H 方程的求解，得到多组可行解，每一组解都可以使机械臂的指尖触及空间内的期望坐标。

空间内的曲线是点的集合，在很多学科中通常利用一些典型的样值点拟合得到一条曲线，或者对已知的曲线抽样得到一系列的样值点，从而更有效的分析问题。对于本论文研究的问题，例如当机械臂需要完成空间内某一曲线的焊接任务时，即属于上述第二种情况。这时，需要焊接的曲线是已知的，根据焊接密度的要求，对曲线进行不同密度的抽样，在操作机械臂的过程中，可以指定指令使得机械臂指尖到达曲线上的每一个抽样点。这样，在一定焊接误差允许范围内，通过这种方法，可以使任务得以完成。因此，对于给定的某些任务（如焊接），可以通过这种方法确定完成任务需要的指令序列。

为了避免机械臂在操作过程中发生诸如与障碍碰撞，与机械臂自身多个连杆发生碰撞，以及与机械臂操作环境的内壁碰撞等问题，机械臂的各个连杆在整个运动过程中经过的空间区域，都不能与障碍物等区域发生交叠。因此，首先需要建立模型对实际操作中的碰撞进行数学抽象，模型求解过程中需要给出不发生碰撞所需要的约束条件，从而在避免发生碰撞的前提下完成给定任务。

综上所述，可以将本文中问题分为以下三个子问题：

问题一：逆问题求解——已知空间内的期望坐标，求解机械臂触及此位置时的状态，即各个关节的旋转角度；

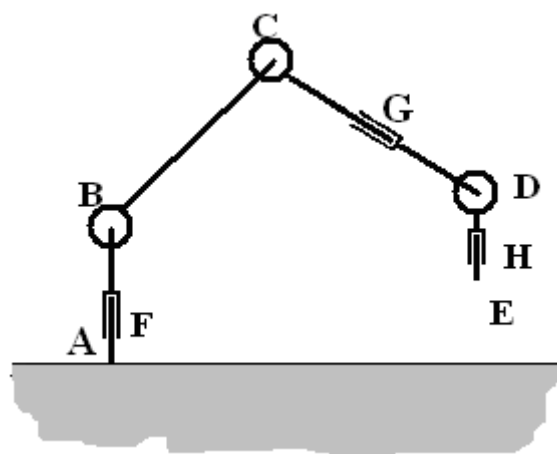
问题二：轨迹指令序列设计——根据给定空间曲线，设计有效的指令序列，使得通过机械臂关节旋转，可使末端指尖沿该曲线移动；

问题三：碰撞规避——为了保护机械臂不受损坏，通过设计指令序列，避免机械臂发生任何类型的碰撞。

3 模型假设

为了使模型更严谨，简单清晰，避免一些次要因素使得模型冗繁，需要对模型进行适度的简化，除题目中对机器人给出的一些必要假设，论文中还做出如下假设：

- 1) 文中将机械臂的各连杆简化为圆柱状的杆件，并且忽略各个连杆粗细的不同，假设圆柱半径为 R ，两端为半径为 R 的半球。
- 2) 如上述假设所述，机械臂的各个连杆为圆柱状杆件，在求解问题二和问题三时，在模型中对机械臂连杆上某点的坐标通常利用对应位置的圆柱轴心上的点的空间坐标表示；而关节空间坐标利用圆柱状杆件两端半球的圆心坐标表示。但是，在考虑碰撞规避问题时，需要考虑机械臂粗细对解决问题的影响。
- 3) 在问题求解过程中，忽略机械臂指尖的动作细节，将其简化为空间中的点，即下图中的 E 点，忽略指尖的形状和粗细。



4 符号说明

a^T 向量 a 的转置；

A^T 矩阵 A 的转置；

$A_i(w, \theta)$ 第 i 个关节处的绕 w 轴旋转角度 θ 的变换矩阵算子；

$L(a, b, c)$ 沿 x, y, z 轴平移 a, b, c 变换矩阵算子；

θ_i 第 i 个关节处的旋转角度；

C_i $\cos \theta_i$ 的简写;

S_i $\sin \theta_i$ 的简写;

l_{MN} 机械臂上连杆 MN 的长度;

5 模型建立及求解

5.1 模型准备

通常表示空间中点的方法是利用笛卡尔参考系。坐标系中基矢是沿着互相垂直的 x 、 y 和 z 轴的一组单位矢量, 因此, 空间内任意一点可以利用 $(x, y, z)^T$ 表示。这种表示方法可以利用矩阵相乘表示坐标系的旋转变换, 而利用矩阵的加减表示坐标系的平移变换。

而在机械臂运动学的研究中, 存在大量的坐标系的平移和旋转变换, 这是希望采用矩阵相乘的形式同时表示坐标系的平移和旋转变换。因此, 表示三维矢量的另一种方法是采用齐次坐标。在这种表示法中, 加入了作为定标因数的第四个分量。如式(1)所示, 空间中的点可以利用齐次坐标表示成列向量的形式

$$\mathbf{v} = (x', y', z', s)^T \quad (1)$$

式中

$$x' = sx, y' = sy, z' = sz$$

其中 s 是定标因数。若把定标因数 s 的值定为 1, 则齐次坐标[9]和标准笛卡尔坐标表示法的分量相等。在引入矩阵算子时, 第四个分量的重要性显而易见。论文中令 s 为 1。通过齐次坐标系的引入, 坐标系的平移和旋转变换可以用矩阵乘法表示, 即将新旧坐标系中点的坐标利用矩阵算子建立联系。

◇ 矩阵算子的定义

矩阵算子可以为矢量完成指定的平移或旋转变换。令矩阵 \mathbf{H} 表示矩阵算子, 将空间内一个点 \mathbf{v} 变换为另一个点 \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{v}$$

通常矩阵的阶用行数 r 乘以列数 c 来定义。因此, 具有 r 行和 c 列的矩阵的阶为 $r \times c$ 。给一个 4×1 的列向量 \mathbf{v} 左乘一个 4×4 的 \mathbf{H} 矩阵可以得到一个 4×1 的列向量 \mathbf{u} 。因此要求 \mathbf{H} 的列数等于 \mathbf{v} 的行数。

◇ 平移变换

将平移变换 $L(a, b, c)$ 定义为将由初始矢量 \mathbf{v} 确定的点移动到另一个点 \mathbf{u} 的算子, 点 \mathbf{u} 的位置由一个称为平移矢量 (其中 x , y 和 z 轴分量分别为 a , b 和 c)

与 \mathbf{v} 矢量和确定，这种矢量加法可以利用平移算子表示，其中平移算子定义如下

$$L(a,b,c)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中平移算子中的分量 a , b 和 c 和齐次坐标中的定标因数值无关，因此对任何一种齐次坐标表示法都适用。

◇ 旋转变换

除了沿矢量平移点以为，还可以利用矩阵算子表示点的旋转变换。论文中令逆时针旋转的角度为正角度，顺时针旋转得到的角度为负角度。

采用齐次坐标的情况下，绕参考坐标系给定轴的旋转变换看表示如下[7]

➤ 绕 x 轴旋转 θ

$$A(x,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

➤ 绕 y 轴旋转 θ

$$A(y,\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

➤ 绕 z 轴旋转 θ

$$A(x,\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

对式(3), (4), (5), 旋转所绕的轴再表示特定轴方向的相应列中对应单位元素 1。

◇ 参考坐标系

坐标系的平移和旋转同样可以利用上述矩阵算子得以实现。将齐次变换矩阵定义为一个 4×4 矩阵，该矩阵把矢量从一个坐标系通过同时旋转和平移变换到另一个坐标系。这种矩阵的一种特殊形式称为 Denavit-Hartenberg(D-H)矩阵的变换矩阵，本文将利用这种方法对机械臂运动问题进行建模求解。

◇ 用于齐次变换矩阵的矢量和位置的标记

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & \alpha_x & p_x \\ n_y & o_y & \alpha_y & p_y \\ n_z & o_z & \alpha_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

上述矩阵可以用来表示两个参考系 1 和 2 之间的关系，即参考系 1 由 \mathbf{H} 矩阵变换得到参考系 2。 \mathbf{H} 矩阵中含有相对于参考系 1 的 x 、 y 和 z 轴的方向写出的参考系 2 的 x 、 y 和 z 轴的方向矢量，例如 n_x 、 n_y 和 n_z 分别表示参考系 2 中 x 轴上单位矢量在参考系 1 中 x 、 y 和 z 轴上的投影分量。而 \mathbf{H} 矩阵的第四列为参考系 2 原点相对于参考系 1 的位置，即从参考系 1 的原点出发到参考系 2 原点的矢量。这种矩阵通常称之为方向余弦阵。

5.2 逆问题模型

为使机械臂的指尖达到某一期望的空间位置或沿指定轨迹移动，需要计算指尖到达期望点或轨迹上的各个抽样点时机械臂的状态，为了解决该问题，本文按照由简单到复杂，模型所受约束逐渐降低的顺序介绍了以下四种模型。

5.2.1 几何法

为了得到最简单有效的模型和模型解，首先对模型进行简化。假设模型建立过程中忽略动力学因素，仅仅分析机械臂的运动学。假设关节 G 始终保持初始角度，即在机械臂操作过程中，关节 G 保持不旋转。在这种假设下，机械臂的各个连杆在操作过程中始终处于一个平面，这样可以通过平面几何的分析方法，在确定优化目标的前提下迅速求解模型得到有效的指令，并且计算复杂度极低。为了便于几何法模型的求解，假设机械臂的 A 点和 E 点的连线与机械臂的各个连杆构成的五边形在操作过程中始终为凸多边形（除初始状态为四边形外）。其中，在几何法中，文中使用笛卡尔参考系，即空间点用三维坐标表示。

文中认为，对于能够完成相同任务的不同的指令序列，序列中指令数最少的为最优指令，即完成相同的任务需要指令最少，需要时间最短。

指尖到达一个可达目标点 (O_x, O_y, O_z) ，由模型假设，机械臂的所有连杆均处于过 z 轴并垂直于 x - y 平面的平面内，于是关节 F 的此时的角度 θ_1 满足

$$\tan \theta_1 = \frac{O_y}{O_x}$$

由于 θ_1 的变换范围为 $\pm 180^\circ$ ，根据此时目标点在 x - y 平面所处象限，确定此时的 θ_1 ，而关节 F 初始状态角度为 0° ，因此关节 F 需要旋转角度 θ_1 。而 θ_6 的角度不影响问题的求解，这样，对于几何法，定义模型优化目标。

● 模型建立

✧ 几何法优化目标

$$\min \max_{i=2,3,5} \Delta \theta_i$$

✧ 约束条件

对于平面凸五边形 $ABCDE$ ，其内角和为 540° 。利用平面几何的分析方法，定义平面凸五边形各个内角均处于开区间 $(0^\circ, 180^\circ)$ ，这样， $\theta_2, \theta_3, \theta_5 \in (-180^\circ, 0^\circ)$ 。此时， $\angle BAE$ 可以利用 A 和 E 的坐标表示为

$$\angle BAE = \arccos \frac{\sqrt{O_x^2 + O_y^2}}{\sqrt{O_x^2 + O_y^2 + O_z^2}}$$

其他内角可以如下表示

$$\angle ABC = 180^\circ + \theta_2, \quad \angle BCD = 180^\circ + \theta_3, \quad \angle CDE = 180^\circ + \theta_5。$$

由内角和公式计算可以得到

$$\angle DEA = -\theta_2 - \theta_3 - \theta_5 - \arccos \frac{\sqrt{O_x^2 + O_y^2}}{\sqrt{O_x^2 + O_y^2 + O_z^2}}$$

另外，利用齐次坐标系的 D-H 方程可以计算得到 D 点坐标，即利用旋转角度和连杆长度表示的三维空间矢量，通过 D 点坐标计算 A 点和 D 点的直线距离。在三角形 ADE 中利用余弦定理，可以建立关于三个角度的方程

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2 - 2|AE||DE|\cos \angle AED \quad (7)$$

式(7)即为几何法优化目标的约束条件。

● 模型优缺点

✧ 优点

- 几何法模型简单直观，仅需要平面解析几何相关分析和非线性优化的具体算法即可得到问题的解。

✧ 缺点

- 该模型假设关节 G 在操作过程中不旋转，此时机械臂指尖的最大可达区域和不固定关节 G 的最大可达区域相同。但是由于分析时假设平面五边形为凸五边形，因此也限制了几何模型机械臂指尖的可达区域。
- 由于对关节 G 的固定，使得完成任务的指令的有效性降低，即对于某些位置的目标点，在几何模型下最优化得到的指令序列未必最优。
- 如果完成某项具体任务时，需要指尖保持某一姿态，即任务对指尖

的矢量方向有明确要求，这时，只能得到一组可行解，无法得到完成该项任务的其他可行解，即机械臂的其他状态。

● 模型扩展

该方法为解决问题提供了最直观的方法，利用这种方法，可以将上述凸五边形的假设去掉，这样增大了该模型指尖的可达区域。

5.2.2 D-H 方程直接法

根据模型准备中对齐次坐标系的介绍和对参考系变换的介绍，文中将参考系由以 E 点为原点的位置变换到以 A 点为原点的位置，建立 D-H 变换方程。为了更直观的建立 D-H 方程，首先将机械臂各个关节角度状态均设置为 0° 。

由 E 为原点的参考系经过一系列坐标旋转与平移变换，得到以 A 点为原点的参考系，即 E 点坐标由 $(0, 0, 0)$ 变换为 (O_x, O_y, O_z) ，变换方程利用齐次坐标系表示，如(8)所示

$$\begin{bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中，令所有变换用 T 矩阵表示，即

$$T = A_1(z, \theta_1) L(0, 0, l_{AB}) A_2(x, \theta_2) L(0, 0, l_{BC}) A_3(x, \theta_3) \cdot L(0, 0, l_{CD}) A_4(z, \theta_4) A_5(x, \theta_5) A_6(z, \theta_6) L(0, 0, l_{DE})$$

其中，各个变换矩阵的详细表达式参见模型准备中的矩阵算子的定义。其各个关节的坐标系相对位置见图 1 所示。

通常，机械臂为了完成某项指定操作，需要将机械臂的指尖以某个姿势到达目标点，即指尖触及目标点时的矢量方向是已知的，即已知方向余弦阵，这是 D-H 方程直接法求解模型的关键。当已知机械臂的指尖的矢量方向时，利用方向余弦阵给出方程如式(9)所示

$$T = \begin{bmatrix} n_1 & o_1 & \alpha_1 & p_1 \\ n_2 & o_2 & \alpha_2 & p_2 \\ n_3 & o_3 & \alpha_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

利用上述参考系变换方程作为约束，可以建立最优化模型。由于在已知机械臂指尖的方向余弦阵时，该约束方程可以得到有限组解，因此，可以采用不同的优化目标，从有限组解中选择满足优化目标的最优解。

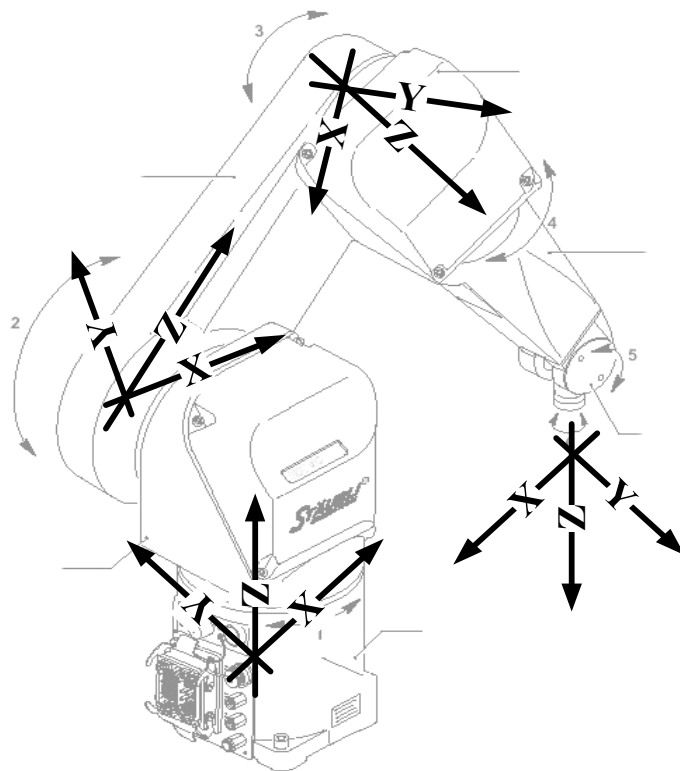


图 1 D-H 方程坐标系相对位置示意图

● 模型建立

◇ 优化目标

由上述分析，可以有多种优化目标，例如，为了使完成任务需要的指令数最少，可以最小化最大角度增量，如式(10)所示

$$\min \max_{i=1,2,\dots,6} \Delta \theta_i \quad (10)$$

◇ 约束条件

这里将由 D-H 方程中的变换矩阵和机械臂指尖的方向余弦阵联立得到的方程作为约束方程。

其中 T 矩阵中存在 6 个角度自由度，而方向余弦阵中，已知 E 点的三维坐标，而指尖的矢量方向的已知，同样可以确定方程中的三个自由度。这样使得约束方程存在有限组解。下面将讨论该约束方程的解法。

● 约束方程的求解

◇ 方程组建立

由于初始状态时， $\theta_2 = \theta_5 = -90^\circ$ ，其余各个角度均为 0° ，而上述 D-H 方程建立时，为了简化分析，令 $\theta_2 = \theta_5 = 0^\circ$ ，这样，考虑 θ_2 和 θ_5 的初始相位，需要对变换矩阵 T 做如下变换，得到对应初始相位 -90° ，用 θ'_2 和 θ'_5 表示变换后的角

度

$$\theta'_2 - 90 = \theta_2 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_2 = \cos(\theta'_2 - 90) = \sin \theta'_2 \Leftrightarrow C_2 \rightarrow S_2 \\ \sin \theta_2 = \sin(\theta'_2 - 90) = -\cos \theta'_2 \Leftrightarrow S_2 \rightarrow -C_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\theta'_5 - 90 = \theta_5 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_5 = \cos(\theta'_5 - 90) = \sin \theta'_5 \Leftrightarrow C_5 \rightarrow S_5 \\ \sin \theta_5 = \sin(\theta'_5 - 90) = -\cos \theta'_5 \Leftrightarrow S_5 \rightarrow -C_5 \end{cases} \quad (12)$$

注意，尽管这里两个角度 θ_2 和 θ_5 通过变换得到 θ'_2 和 θ'_5 ，后文在不影响本文可读性的前提下，省略角度的上标。

为了将约束方程进一步表示为多个独立的方程，首先将变换矩阵 T 通过矩阵乘法运算，得到如下矩阵

$$A_1(z, \theta_1)L(0, 0, l_{AB})A_2(x, \theta_2)L(0, 0, l_{BC})A_3(x, \theta_3)L(0, 0, l_{CD}) =$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & -S_1S_2C_3 - S_1C_2S_3 & S_1S_2S_3 - S_1C_2C_3 & -2.55S_1C_2 + 2.55S_1S_2S_3 - 2.55S_1C_2C_3 \\ S_1 & C_1S_2C_3 + C_1C_2S_3 & -C_1S_2S_3 + C_1C_2C_3 & 2.55C_1C_2 - 2.55C_1S_2S_3 + 2.55C_1C_2C_3 \\ 0 & -C_2C_3 + S_2S_3 & C_2S_3 + S_2C_3 & 2.55S_2 + 0.14 + 2.55C_2S_3 + 2.55S_2C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$A_4(z, \theta_4)A_5(x, \theta_5)A_6(z, \theta_6)L(0, 0, l_{DE}) =$$

$$\begin{bmatrix} C_4C_6 - S_4S_5S_6 & -C_4S_6 - S_4S_5C_6 & -S_4C_5 & -0.65S_4C_5 \\ S_4C_6 + C_4S_5S_6 & -S_4S_6 + C_4S_5C_6 & C_4C_5 & 0.65C_4C_5 \\ -C_5S_6 & -C_5C_6 & S_5 & 0.65S_5 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

这样，可以将变换矩阵 T 重写，并与方向余弦阵联立得到方程组如下所示

$$\begin{aligned} n_1 &= C_1(C_4C_6 - S_4S_5S_6) + (-S_1S_2C_3 - S_1C_2S_3)(S_4C_6 + C_4S_5S_6) - C_5S_6(S_1S_2S_3 - S_1C_2C_3) \\ n_2 &= S_1(C_4C_6 - S_4S_5S_6) + (C_1S_2C_3 + C_1C_2S_3)(S_4C_6 + C_4S_5S_6) - C_5S_6(-C_1S_2S_3 + C_1C_2C_3) \\ n_3 &= (-C_2C_3 + S_2S_3)(S_4C_6 + C_4S_5S_6) - C_5S_6(C_2S_3 + S_2C_3) \\ o_1 &= C_1(-C_4S_6 - S_4S_5C_6) + (-S_1S_2C_3 - S_1C_2S_3)(-S_4S_6 + C_4S_5C_6) - C_5C_6(S_1S_2S_3 - S_1C_2C_3) \\ o_2 &= S_1(-C_4S_6 - S_4S_5C_6) + (C_1S_2C_3 + C_1C_2S_3)(-S_4S_6 + C_4S_5C_6) - C_5C_6(-C_1S_2S_3 + C_1C_2C_3) \\ o_3 &= (-C_2C_3 + S_2S_3)(-S_4S_6 + C_4S_5C_6) - C_5C_6(C_2S_3 + S_2C_3) \\ \alpha_1 &= -C_1S_4C_5 + (-S_1S_2C_3 - S_1C_2S_3)C_4C_5 + S_5(S_1S_2S_3 - S_1C_2C_3) \\ \alpha_2 &= -S_1S_4C_5 + (C_1S_2C_3 + C_1C_2S_3)C_4C_5 + S_5(-C_1S_2S_3 + C_1C_2C_3) \\ \alpha_3 &= (-C_2C_3 + S_2S_3)C_4C_5 + S_5(C_2S_3 + S_2C_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -l_{DE}C_1S_4C_5 + l_{DE}(-S_1S_2C_3 - S_1C_2S_3)C_4C_5 + l_{DE}S_5(S_1S_2S_3 - S_1C_2C_3) - l_{BC}S_1C_2 \\
&\quad + l_{CD}S_1S_2S_3 - l_{CD}S_1C_2C_3 \\
p_2 &= -l_{DE}S_1S_4C_5 + l_{DE}(C_1S_2C_3 + C_1C_2S_3)C_4C_5 + l_{DE}S_5(-C_1S_2S_3 + C_1C_2C_3) + l_{BC}C_1C_2 \\
&\quad - l_{CD}C_1S_2S_3 + l_{CD}C_1C_2C_3 \\
p_3 &= l_{DE}(-C_2C_3 + S_2S_3)C_4C_5 + l_{DE}S_5(C_2S_3 + S_2C_3) + l_{BC}S_2 + l_{AB} + l_{CD}C_2S_3 + l_{CD}S_2C_3
\end{aligned}$$

注意：文中长度均以分米 (dm) 作为单位。

✧ 方程组求解

- 1) 首先根据方程组中矢量 $p_i (i=1,2,3)$ 对位包含 $\alpha_i (i=1,2,3)$ 的特点，考虑将 p_i 中的有关关节 G, D 和 H 的未知量消去，从而建立一个只含有关节 F, B 和 C 的未知量的方程组。通过解这个三个方程联立的方程组，将节 F, B 和 C 的角度首先求出来。观察 $p_i (i=1,2)$ 和 $\alpha_i (i=1,2)$ 可以发现如下特点：

$$-\frac{p_1 - 0.65\alpha_1}{p_2 - 0.65\alpha_2} = \tan \theta_1 \quad (15)$$

根据 θ_1 在系统中的取值范围，可以确定 θ_1 的可行解。

- 2) 通过求解关节 F，将上述的方程组化简为只含有两个未知量的方程，通过求解这两个包含关节 B 和 C 的未知量的方程，可以顺利求解关节 B 和 C 的角度。具体步骤首先定义两个修改后的 $\Delta p_i (i=1,2)$ ，利于整合两个未知量：

$$\Delta p_1 = \frac{p_1 - 0.65\alpha_1}{2.55S_1}, \quad \Delta p_3 = \frac{p_3 - 0.65\alpha_3 - 1.4}{2.55} \quad (16)$$

上式可以重写为如下方程组

$$\begin{cases} S_2\Delta p_1 + C_2\Delta p_3 = S_3 \\ -C_2\Delta p_1 + S_2\Delta p_3 = 1 + C_3 \end{cases} \quad (17)$$

对上述方程进行变形，利用三角函数的性质消去其中的关节 C 未知量，并进行变量代换将其转化为二次项方程，即（其中 $x = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$ ）：

$$\begin{aligned}
(S_2\Delta p_1 + C_2\Delta p_3)^2 + (-C_2\Delta p_1 + S_2\Delta p_3 - 1)^2 &= 1 \text{ and } C_2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}, S_2 = \frac{2x}{1+x^2} \quad (18) \\
\Rightarrow (\Delta p_1^2 + \Delta p_3^2 - 2\Delta p_1) &x^2 - 4\Delta p_3x + \Delta p_1^2 + \Delta p_3^2 + 2\Delta p_1 = 0
\end{aligned}$$

从而求得关节 B 的角度，继而得到关节 C 的角度。

- 3) 利用上面已经得到的几个关节变量，对剩下的几个未知量方程进行化简。首先观察三组矢量表达式 $n_i, o_i, \alpha_i, (i=1,2,3)$ ，发现 n_1 和 n_2 的后两个子项只相差一个关于关节 A 的三角函数值，由此可以将它们第一项的表达式整个表达出来，对于 o_i 和 α_i 也可以做相同的处理，并分别将结果定义为 $L_i (i=1,2,3)$ ，如下所示：

$$\begin{cases} C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6 = C_1 n_1 + S_1 n_2 = L_1 \\ -C_4 S_6 - S_4 S_5 C_6 = C_1 o_1 + S_1 o_2 = L_2 \\ S_4 C_5 = C_1 \alpha_1 + S_1 \alpha_2 = L_3 \end{cases} \quad (19)$$

再观察三组矢量表达式 $n_i, o_i, \alpha_i, (i=1,2,3)$ ，对于 n_1 和 n_3 ，利用已经求出来的子项 L_1 求解剩下的两个子项表达式。与第 2 步类似，首先对式子做一定的整理以方便求解，修改后的变量和联立的方程组如下所示：

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= n_1 - C_1 (C_4 C_6 - S_4 S_5 S_6) / -S_1 = (S_2 C_3 + C_2 S_3)(S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) + C_5 S_6 (S_2 S_3 - C_2 C_3) \\ \begin{cases} \Delta n_1 = (S_2 C_3 + C_2 S_3)(S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) + C_5 S_6 (S_2 S_3 - C_2 C_3) \\ n_3 = (-C_2 C_3 + S_2 S_3)(S_4 C_6 + C_4 S_5 S_6) - C_5 S_6 (C_2 S_3 + S_2 C_3) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

可以由此得到子项 $C_5 S_6$ 。对矢量 o 做类似的处理，可以得到子项 $C_5 C_6$ ，从而求解关节 H、关节 D 和关节 G 的角度。至此，求解完毕。

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{X}{Z}\right), \theta_5 = \arccos\left(\frac{X}{\sin \theta_6}\right), \theta_4 = \arcsin\left(\frac{S_4 C_5}{\cos \theta_5}\right)$$

● 模型优缺点

✧ 优点

- 利用齐次坐标系建立 D-H 方程，利用矩阵算子表示坐标系变换，模型物理意义直观。
- 由于矩阵的特性，使得方程组具有特殊的结构，简化了三角方程的求解，降低模型求解的复杂度。
- 当已知机械臂指尖的矢量方向时，方程可解，可以得到有限组可行解，这样根据不同的优化目标，在有限组可行解中选取符合优化目标的最优解。

✧ 缺点

- 由于该模型约束条件建立的前提是已知机械臂指尖矢量的方向，因此，优化目标时只能从有限组解中选取，尽管此时的优化问题较为简单，但是这也使得优化性能受到限制。

● 模型扩展

针对模型上述缺点，可以不要求已知机械臂指尖的矢量方向，其矢量方向同时作为优化过程中的自由度，这样使得优化问题存在更大的优化空间，于是得到下面介绍的 D-H 方程最优法。

5.2.3 D-H 方程最优法

在 D-H 方程直接法中，通常需要根据指定的任务设定指尖的矢量方向，而该矢量方向将为 D-H 方程提供 3 个自由度，同时根据指尖的目标点的三维坐标可以求解得到有限组解，在这些解中，通过优化目标，选取最优的状态。

如果弱化 D-H 方程直接法中给定指尖的矢量方向的约束，这时 D-H 方程具有 3 个自由度可以对目标进行优化。但是这时应该假设指尖所要完成的任务与指尖姿态无关。同时，该方法仍然需要假设模型建立过程中忽略动力学因素，仅仅分析机械臂的运动学

● 模型建立

✧ D-H 方程最优法优化目标

$$\min \max_{i=1,2,\dots,6} \Delta \theta_i \quad (21)$$

✧ 约束条件

这时 D-H 方程仍然为优化问题的约束条件。由于约束的弱化，优化问题复杂度大大提升，但是根据优化目标，可以得到比 D-H 方程直接法优化得到的最优解更有效的指令，如果假设此时最优化算法性能足够好，用 D-H 方程最优法可以得到完成某项任务的最优指令序列。

● 模型优缺点

✧ 优点

模型的优点是可以根据最优化算法的有效性，得到当前优化算法下的最优指令序列。

✧ 缺点

这种优化问题的复杂度较高，在研发软件系统时，在考虑运算成本问题时，未必实用。

● 模型扩展

如果考虑优化问题复杂度，可以对指尖的部分自由度进行限制。这种算法相当于对 D-H 方程直接法和 D-H 方程最优法性能和复杂度的折中，可以根据系统性能和复杂度的要求灵活选用。

5.2.4 微分运动法

上述三个模型都属于机械臂的运动学模型，忽略其中的动力学因素。但是，在实际问题中，无论从力矩还是能量角度看，动力学模型都更具实用意义，因此我们将利用微分运动法建立下述模型。

● 模型建立

在这个方案中，把最小化消耗能量和最小化执行时间作为优化目标。先考虑最小化消耗能量，考虑到各个关节运动需要的能量不同，可以用各个关节的加权转动角度和来衡量[2]。

✧ 微分运动法优化目标

$$\min C = \|\mathbf{W}\boldsymbol{\theta}\| \quad (22)$$

其中， \mathbf{W} 是 6×6 对角矩阵

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & & & & & \\ & W_2 & & & & \\ & & W_3 & & & \\ & & & W_4 & & \\ & & & & W_5 & \\ & & & & & W_6 \end{bmatrix} \quad (23)$$

W_i 是对应第 i 个关节转动角度 θ_i 的权值， W_i 大说明 θ_i 转动所用的代价比较大。

另外，在[3]中提出了系统加权动能的概念，

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\theta} \quad (24)$$

这和目标函数是统一的，在目标函数最小时，这个动能也是最小的。

从前面的 D-H 方程直接法的推导中可以得到，

$$\begin{aligned} p_1 &= -l_{DE} C_1 S_4 C_5 + l_{DE} (-S_1 S_2 C_3 - S_1 C_2 S_3) C_4 C_5 + l_{DE} S_5 (S_1 S_2 S_3 \\ &\quad - S_1 C_2 C_3) - l_{BC} S_1 C_2 + l_{CD} S_1 S_2 S_3 - l_{CD} S_1 C_2 C_3 \\ p_2 &= -l_{DE} S_1 S_4 C_5 + l_{DE} (C_1 S_2 C_3 + C_1 C_2 S_3) C_4 C_5 + l_{DE} S_5 (-C_1 S_2 S_3 \\ &\quad + C_1 C_2 C_3) + l_{BC} C_1 C_2 - l_{CD} C_1 S_2 S_3 + l_{CD} C_1 C_2 C_3 \\ p_3 &= l_{DE} (-C_2 C_3 + S_2 S_3) C_4 C_5 + l_{DE} S_5 (C_2 S_3 + S_2 C_3) + l_{BC} S_2 + l_{AB} \\ &\quad + l_{CD} C_2 S_3 + l_{CD} S_2 C_3 \end{aligned} \quad (25)$$

为了方便表达，把上式写成

$$\mathbf{r} = f(\boldsymbol{\theta}) \quad (26)$$

其中， $\mathbf{r} = \{p_1, p_2, p_3\}$ ， $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$ 。对等式两边同时进行微分可以

得到

$$\mathbf{r}' = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}' \quad (27)$$

其中， $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 是雅可比行列式，

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial p_1}{\partial \theta_4} & \frac{\partial p_1}{\partial \theta_5} & \frac{\partial p_1}{\partial \theta_6} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial p_2}{\partial \theta_4} & \frac{\partial p_2}{\partial \theta_5} & \frac{\partial p_2}{\partial \theta_6} \\ \frac{\partial p_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial p_3}{\partial \theta_4} & \frac{\partial p_3}{\partial \theta_5} & \frac{\partial p_3}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \quad (28)$$

这样，通过 \mathbf{J} 把末端的运动和关节角度的运动用线性关系联系起来。由于空间限制，这里不把 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 的每个元素的具体表达式列出来。

对于已经知道末端位置，要得到各个关节角度的情况，可以根据逆运动学的原理通过下式来得到

$$\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r}' \quad (27)$$

但是，由于此机械臂存在冗余的自由度， $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 不是方阵，没有对应的逆矩阵。也就是说对于这类冗余自由度的机械臂， $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 是不存在的。为了达到相同的效果，需要通过求 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 的伪逆来由 \mathbf{r}' 得到 $\boldsymbol{\theta}'$ 的值。由于冗余自由度，逆运动学的解会有无数个。换句话说，为了使末端往某个方向运动，各个关节有多种方案来实现。

$$\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}]^+ \mathbf{r}' + \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{I} - [\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}]^+ \mathbf{J}\mathbf{W}^{-1})\mathbf{V} \quad (28)$$

其中， \mathbf{I} 是 6×6 单位矩阵， \mathbf{V} 是任意的6维矢量， $[\]^+$ 表示伪逆运算。 \mathbf{W} 是 6×6 的权值对角矩阵，也是对称正定矩阵，所以可以用来帮助 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 进行伪逆运算。在这无穷多个解中，可以通过下式得到使目标函数最小的解 $\boldsymbol{\theta}'$

$$\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{W}^{-1}[\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}]^+ \mathbf{r}' \quad (29)$$

综合考虑最小化执行时间和最小化能量两个方面的目标，对于到达指定目标点的任务，可以采取以下步骤：

- 1) 通过搜索得到 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 在允许的取值范围内的最优取值，使得到达的点离目标点最近。
- 2) 确定从目前位置到达预计到达点的坐标方向 \mathbf{r}' 。
- 3) 在这个方向上找最小能量消耗的关节角度调节方法。

● 模型优缺点

◇ 优点

- 不仅考虑任务的执行时间，并且从动力学的角度考虑最小的能量消耗对策略进行了优化。
- 对机械臂的所有自由度进行利用，更好地完成既定的任务。
- 按指定的末端运动方向进行关节角度调整，方便与最小执行时间，最小运动轨迹等其他优化目标结合。

◇ 缺点

- 模型中包含的伪逆运算计算复杂度相对较大，并且有可能会出现的奇异值的情况。

● 模型扩展

- ◇ 如果只考虑最小化时间，在完成第一个步骤后就可以停止，这样得到的是通过贪婪算法获得的最小时间方案。
- ◇ 第一步中的搜索方法可以采用各种优化的搜索方法，建议使用高效的模拟退火算法提高速度。在模拟退火算法中，建议的算法主要参数设置为：
 - 把预计到达点与目标点的距离作为要最小化的优化目标
 - 找相邻点时 $\Delta\theta$ 中每个元素的变化在 $\{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$ 中按等概率随机取值。
 - 初始温度是 20，加热因子和冷却因子分别设为 2 和 0.98。
 - 迭代收敛条件为预计到达点和目标点的距离低于要求误差，或者通过迭代使得温度降低到 10 以下。

5.2.5 指令序列设计

利用上述建模方法，得到最优解或可行解为机械臂目前的状态，即各个关节旋转后所处的角度，本部分讨论如何根据上述模型得到的角度状态解，设计有效的指令序列。

● 最少指令数

上述模型求解中几何法是典型的以最少指令数为目标的模型，而 D-H 方程直接法和 D-H 方程最优法同样也可以根据最少指令数为目标选取最优的机械臂状态。在这种前提下，首先解出了使机械臂指尖触及目标点各个关节需要旋转的角度，为了尽快通过指令完成指定的旋转，每一个指令中对应的各个关节的旋转角度均为正向或负向的最大旋转角度，即 $\pm 2^\circ$ 。由于角度旋转的最小增量为 $\pm 0.1^\circ$ ，在角度求解时，通常我们精确到 0.01° 。这样如果关节需要旋转的角度不是偶数，在每个关节的最后一次旋转时，如何取最后一次旋转的增量将会对机械臂的指尖到达目标点的误差有较大影响。

- ◇ 简单地分析，可以将最后一次的旋转增量根据四舍五入的方法，将精度为 0.01° 近似为精度 0.1° ，同样能较好的逼近目标点。这样考虑简单直接，

比较适合于实际系统的实现。

- ✧ 更精确地分析，将精度为 0.01° 近似为精度 0.1° 有两种近似方法，向上近似（近似为比实际值大的值）和向下近似（近似为比实际值小的值）。对于本文分析的问题，6 个关节旋转，最多出现 2^6 近似的可能性，由于遍历需要次数不大，不妨计算比较这些可能性，选择通过近似调整后，机械臂指尖位置距离目标点最近的一组近似值。下图所示就是在问题 1 的求解时依据上述准则得到的最优解运动路径。

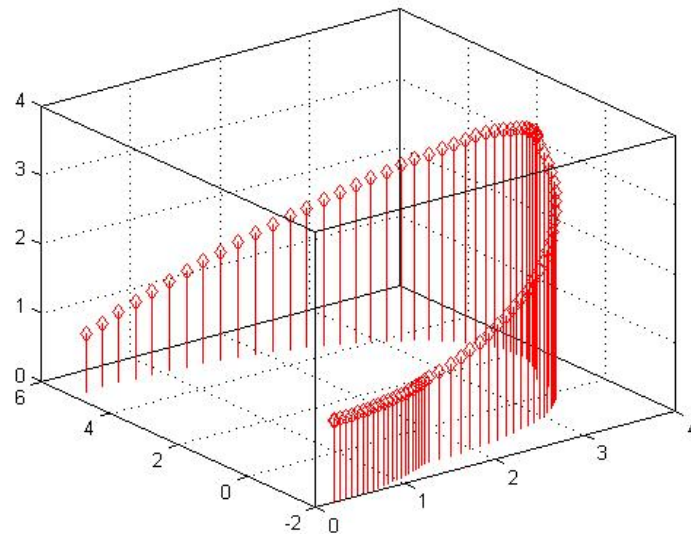


图 1 指令数最少约束下的最优解运动轨迹

● 最短运动轨迹

如果将其他因素作为优化目标，可以得到不同的指令序列。例如，在某些场景下，需要在旋转的过程中，机械臂的指尖尽量保持不动，或者运动轨迹最小，以避免机械臂指尖抓取的物品或工具脱落，或者与其他障碍物发生碰撞。根据这些目标可以给出不同的指令序列。例如，对于 D-H 方程直接法求解得到的有限组可行解中的一组，我们可以以最短运动轨迹为目标，计算控制机械臂指尖的指令序列。

● 最小能量

在上述分析中，主要从运动学角度分析最优化目标。而实际系统中，由于每个连杆存在一定的重量，在调整连杆时，需要考虑因此带来的动力学问题，如力矩、能量等。因此，更实际的优化目标是最小化消耗的能量。根据微分运动法建立了机械臂的动力学模型，根据优化目标同样可以求解有效的指令序列。

最后，值得注意的是，如果得到的解，即各个关节的角度状态，如果超出各个关节角度变换的范围，则不是可行解，也不存在相应的指令序列。

5.3 轨迹模型

通过一系列的指令序列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 可以将指尖依次到达位置 X_0, X_1, \dots, X_n , 则称 X_0, X_1, \dots, X_n 为从指尖初始位置 X_0 到达目标位置 X_n 的一条路径 (运动轨迹)。根据具体的目标和约束条件计算出合理、便捷、有效的指令序列是机器人控制中的一个重要问题。

文中按照由简单到复杂的顺序给出轨迹指令序列设计的两种方法——抽样拟合法和单指令自适应法。前者对机械臂的指尖到达曲线上相邻两点的指令序列没有要求, 这样在操作过程中, 抽样的密度不受机械臂状态和运动的影响, 但是从整条曲线的拟合上误差较大。而后者要求机械臂从相邻两抽样点的一个移动到另一个只需要一个指令, 这样必然对轨迹曲线的抽样点密度有一定的要求, 因此在第二种方法中如何确定抽样密度是关键问题。

下面对两种方法进行详细介绍。

5.3.1 抽样拟合法

通常对一条曲线拟合, 首先要根据一定的抽样密度在曲线上进行抽样, 之后通过一定的拟合算法拟合该曲线。

对于机械臂的控制问题, 文中同样采用了这种抽样的方法。首先根据一定的密度在给定的空间曲线上抽样得到点集 M , 利用问题一的解决方法, 只要使得机械臂的指尖按照顺序触及点集中点。但机械臂完成触及点集 M 中的每一个点后, 机械臂在这个过程中完成的所有指令组成的序列即完成这条空间轨迹需要的指令。

针对具体的工作任务, 例如焊接, 每次在一个指定位置进行焊接后, 焊点具有一定半径, 或者称为有效范围, 因此, 这时并不需要机械臂的指尖继续沿指定轨迹距离该焊点较近的位置进行重复焊接。考虑到这时的具体问题, 抽样拟合法即可满足该任务的需求。每次完成要求焊接曲线上某一点的一次焊接之后, 通过一个指令序列对机械臂的指尖进行控制, 使其移动到相邻的下一个需要焊接曲线上的抽样点, 到达该抽样点后继续进行焊接操作。

● 算法优缺点

◇ 优点

- 操作简单, 相当于一系列单独点操作的串接, 因此只需要将对点的操作的指令序列进行串接, 即可得到完成轨迹指令序列的设计;
- 对抽样点的密度没有要求, 尤其适用于在指定曲线上进行不连续操作的任务;
- 当定义的抽样点密度较高时, 同样可以对指定的轨迹进行精确的拟合。

◇ 缺点

- 当抽样点密度较小时，由于机械臂指尖到达相邻两个抽样点需要经过多条指令，所以指尖在两相邻抽样点间移动是轨迹波动较大，对曲线拟合不好；
- 当抽样点密度较大时，尽管机械臂指尖可以通过一条指令完成从轨迹上一个目标点到相邻目标点的移动，但是这时往往会由于抽样点过于密集导致工作效率较低，例如焊接的相邻两点之间可能出现重复焊接。

尽管抽样拟合法存在一些问题，但是无论从工作效率，算法复杂度，或对特定任务的完成等角度分析，该方法是一种较为实用的方法。

为了进一步改进抽样拟合法存在的缺点，文中提出另一种单指令自适应法，具体操作如下说明。

5.3.2 单指令自适应法

单指令自适应法是一种自适应调整机械臂移动步长的轨迹指令序列设计方法。

对于一条有限长度的轨迹曲线，目标是使机械臂的指尖沿轨迹曲线移动完成指定操作。在机械臂工作过程中，通常需要首先设定步长因子 ξ ，调整因子 δ 已经最大调整次数 N 。该算法步骤如下所示：

- ✓ Step 1: 通过指令序列控制机械臂，使其指尖触及指定轨迹曲线的较近的一个端点进行作业，初始化计数器 $n=0$ ；
 - ✓ Step 2: 计算距离机械臂指尖当前位置为 ξ 的曲线上点的坐标，注意该点要求在机械臂指尖移动的前进方向。若存在满足要求的轨迹曲线上的点，定义为下一目标点，进行 Step 3；若不存在或该下一目标点为轨迹曲线终点，跳转到 Step 5。
 - ✓ Step 3: 利用问题一的解决方法，计算机械臂指尖从当前点移动到下一目标点需要的指令序列。如果该指令序列中存在多条指令，则另 $\xi = \xi - \delta$ （通常初始化参数时，保证调整过程中，始终有 $\xi > 0$ ，即 $\xi > N\delta$ ）， $n=n+1$ 。如果 $n < N$ ，跳转到 Step 2，否则进行 Step 4；如果该指令序列中仅存在一条指令，进行 Step 4；
 - ✓ Step 4: 利用上述步骤得到的单指令或指令序列控制机械臂的指尖到达下一目标点进行作业，将步长因子 ξ 和计数器 n 重新初始化，跳转到 Step 2；
 - ✓ Step 5: 利用单指令或指令序列控制机械臂的指尖到达轨迹曲线的终点，完成整项任务，并利用指令序列使机械臂还原为初始状态。
- ◇ 参数影响
- 步长因子 ξ 的设定与机械臂的各个连杆的长度，以及各个关节的最大旋转角度存在紧密的关系，因此需要根据机械臂的基本结构和性

能参数对步长因子进行合理的设置；注意，在采用此算法时，由于步长只会减小，在设置步长时，可以使 ξ 稍稍偏大。

- 调整因子 δ 需要根据步长进行合理分析设定，如果步长较大，机械臂指尖移动时，每次计算一条指令需要的时间较小，但是每次移动的步长可能会较小；而当步长较小时，每次移动的步长较大，但是每次确定步长需要较多的叠代计算。但是比较两种情况，较大调整因子 δ 适用于精密操作，而后者可以更高速的完成指定任务（通常，叠代计算的时延小于在每个目标点操作的时间）。
- 最大调整次数 N 需要根据步长因子 ξ 和调整因子 δ 的关系，已经系统对叠代时延的容忍分析设定。当 N 较大时，叠代次数可能较多，但是使得机械臂指尖在相邻两目标点之间移动需要一条指令的可能性更大；而当 N 较小时，尽管最大叠代次数降低，确定指令需要的时延较小，但是完成一次移动需要多条指令的可能性变大，这样对目标轨迹曲线的拟合会变差。综上，较大的叠代处理时间可以换来更精细的操作效果。

◇ 算法扩展

如果从更为贪婪的角度设计算法，使得每次移动步长尽量最大，可以在目前的算法中增加增量更新。在 Step 3 中，如果完成一次移动需要单指令，这时可以更新 $\xi = \xi + \delta$ 。而且，增量更新同样受到最大调整次数的限制。这样，尽管每次移动需要确定指令的时间增加，但是保证每次步长尽可能最大。当机械臂指尖在每个操作目标点进行的时间远远大于机械臂控制算法的叠代处理时间，而且对该项任务没有过于精密的加工要求的情况下，这种扩展算法更为适用。

● 算法优缺点

◇ 优点

- 不需要事先对目标轨迹曲线进行抽样，只需要从有限曲线的一个端点出发自适应调整确定下一个目标点；
- 可以根据任务的具体要求，通过参数的调整，能够快速或者精细地完成该项任务；
- 由于机械臂指尖的每次移动几乎都需要单条指令，因此该算法对目标轨迹曲线的拟合效果很好。

◇ 缺点

- 由于未经事先抽样，每个抽样点未知，这样每次确定指令或指令序列均需要叠代获取下一步步长，这样必然造成处理时延，因此该算法更适用于处理能力较强的机械臂系统。

5.3.3 微分法

对于末端沿轨迹运动的情况，与点到点情况不同的是，由于机器臂只能通过一个个离散的指令来完成任务，时间的最小化和运动轨迹与目标轨迹的误差称为相互矛盾的两个方面。在这里，考虑在要求的误差范围内最小化需要的时间和能量。

1) 为了使运动轨迹较好地符合目标轨迹，先要找到在一次指令中允许移动的最大距离，考虑斜率变化速度。

$$\Delta s \left| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right| < \xi, \quad \Delta s \left| \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right| < \xi, \quad \Delta s \left| \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right| < \xi \quad (30)$$

其中， ξ 是在一个指令中允许的最大斜率偏差。最终调整的最大允许距离满足

$$\Delta s < \frac{\xi}{\max \left\{ \left| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right| \right\}} \quad (31)$$

2) 把目标轨迹的方向 \mathbf{r}' 定为

$$\mathbf{r}' = \left\{ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\Delta s}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\Delta s}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\Delta s}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right\} \quad (32)$$

按照微分运动模型找最小能量消耗的关节角度调节方法，调节到允许的最大值（包括每个指令允许的 2° 和误差允许的 Δs 关节角度调节最大值）。

● 算法优缺点

◇ 优点

- 能够根据轨迹的弯曲程度自适应调整最大允许的步长，在弯曲程度大的地方一个步长移动的距离比较短，来更好地符合目标轨迹。
- 可以通过设置不同的允许误差，来取得时间和误差之间的平衡，使机械臂能更快或者更细致地完成任务。

◇ 缺点

- 由于关节角度调整的离散取值，难以避免偏离轨迹，但在这个算法中没有对偏离目标轨迹的情况进行调整的机制。

5.4 碰撞规避模型

考虑到在工作中对机械臂的保护，在机械臂工作过程中，要严格避免机械臂发生碰撞，例如障碍之间的碰撞，机械臂自身发生的碰撞，以及与机械臂操作环境的内壁的碰撞，如果有效的规避碰撞是机械臂运动研究中的一个要点。为了避免机械臂在操作过程中发生碰撞，机械臂的各个连杆在整个运动过程中

经过的空间区域，都不能与障碍物等区域发生交叠。因此，首先需要建立模型对实际操作中的碰撞进行数学抽象，模型求解过程中需要给出不发生碰撞所需要的约束条件，从而在避免发生碰撞的前提下完成给定任务。

由模型假设中对连杆的假设，可以将连杆之间的碰撞抽象为空间两条线段的相交。而与障碍物的碰撞分析时，如果障碍物可以抽象为一系列的空间线段的集合，只要避免机械臂的各个连杆抽象得到的空间线段在运动过程中始终不与障碍物抽象得到的空间线段集合相交，这样即可将碰撞抽象为空间线段的距离计算问题。

因此，首先分析空间处于不同相对位置关系的两条线段的距离的计算。

5.4.1 空间两线段距离

[1]中介绍的计算空间两条线段的距离的方法，考虑到本论文的完整性，这里将空间两条线段距离的计算方法总结如下。

● 变量定义

首先给出各个变量的定义。根据解析几何的方法，判断两条直线是否异面，可以利用一个行列式结果是否为 0 判断，令改行列式用 Δ 表示，其中 Δ 的计算方法参见[1]。设 l_1 为 A 点至线段 CD 的距离， l_2 为 B 点至线段 CD 的距离， l_1' 为 C 点至线段 AB 的距离， l_2' 为 D 点至线段 AB 的距离； l_{AC} 为 A 点至 C 点距离， l_{AD} 为 A 点至 D 点距离， l_{BC} 为 B 点至 C 点距离， l_{BD} 为 B 点至 D 点距离， l_{AB} 为线段 AB 的长度， l_{CD} 为线段 CD 的长度。

根据两线段的端点坐标易求出 $l_1, l_2, l_1', l_2', l_{AC}, l_{AD}, l_{BC}, l_{BD}, l_{AB}, l_{CD}$ ，它们均大于或等于零，将其记为

$$\min(l_1, l_2, l_1', l_2', l_{AC}, l_{AD}, l_{BC}, l_{BD}, l_{AB}, l_{CD}) \geq 0 \quad (33)$$

若 $\min(l_1, l_2) > 0$ ，可以在线段 AB 上找到一点 E ，使 $l_{AE} / l_{BE} = l_1 / l_2$ 成立，令点 E 至线段 CD 的距离为 l_3 ；同理，若 $\min(l_1', l_2') > 0$ ，亦可在线段 CD 上找到一点 E' ，令 $l_{CE'} / l_{DE'} = l_1' / l_2'$ 成立，令点 E' 至线段 AB 的距离为 l_3' ；若 $\min(l_1, l_2) = 0$ ，则令 $l_3 = 0$ ；同理，若 $\min(l_1', l_2') = 0$ ，则令 $l_3' = 0$ 。同样， l_3 和 l_3' 也容易得到。

根据以上变量定义，为求解空间中两条线段的距离，可以将其分解为以下四个子问题：

- 1) 求解 $l_1, l_2, l_1', l_2', l_{AC}, l_{AD}, l_{BC}, l_{BD}, l_{AB}, l_{CD}, l_3, l_3', \Delta$ ；令 $k = \min(l_1, l_2, l_1', l_2', l_{AC}, l_{AD}, l_{BC}, l_{BD}, l_{AB}, l_{CD}, l_3, l_3')$ ；
- 2) 若 $k=0$ ，则按照[1]中推论 4、5 和 6 求解空间两线段间的最短距离 l ；
- 3) 若 $k \neq 0, \Delta \neq 0$ ，则根据[1]中推论 7 求解空间两线段间的最短距离 l ；
- 4) 若 $\Delta = 0$ ，则根据[1]中推论 8 求解空间两线段间的最短距离 l 。

根据这四种情况，可以求解空间中任意两条直线的距离。

5.4.2 空间碰撞建模

● 数学抽象

为考虑空间碰撞的建模，首先忽略连杆的粗细，这样可以将连杆之间的碰撞抽象为空间两条线段的相交。而与障碍物的碰撞分析时，如果障碍物可以抽象为一系列的空间线段的集合，只要避免机械臂的各个连杆抽象得到的空间线段在运动过程中始终不与障碍物抽象得到的空间线段集合相交，这样即可将碰撞抽象为空间线段的距离计算问题。

在以上前提下，将空间碰撞问题抽象为判断空间两条直线是否相交，于是可以利用最短距离求解碰撞检测算法。

● 最短距离求解碰撞检测算法

首先将计算空间两条线段的距离时划分的四种情况作为四个子程序，这样该算法的程序框图及算法描述参见[1]。

● 实际问题分析

当考虑实际问题时，连杆的粗细不再被忽略，这时需要将连杆的粗细考虑在碰撞问题内，即至少需要空间两条线段保持一定的距离。例如，当考虑连杆之间的碰撞问题时，由于模型抽象时，选择连杆的轴心作为空间线段，因此为了避免连杆之间发生碰撞，至少需要保证空间直线距离大于圆柱直径长度。

更实际的分析，如果考虑操作误差或者障碍物位置的确定误差，给定容差因子 ε ，要求空间两条线段的距离除大于必要的距离（如上述圆柱直径），还需要大于系统规定的容差因子 ε 。这样在系统操作过程中，可以避免因为上述误差造成的意外碰撞。

5.4.3 碰撞规避模型分析

将上述空间碰撞的判决方法作为一个模块，称为碰撞检测模块。为了实现机械臂操作过程中不发生碰撞，只要对每一次按指令移动的机械臂的状态利用碰撞检测模块进行碰撞检测，从而确保机械臂操作过程中的安全。

文中介绍两种避免碰撞的操作方法。

5.4.3.1 安全轨迹法

当机械臂为了完成某项具体任务时，可能会与障碍物或者自身发生碰撞，为了避免这些碰撞，简单地讲，可以通过观察障碍物和机械臂的几何位置及结构长度特点，首先确定一条安全轨迹，使得机械臂的指尖沿安全轨迹移动时，系统内不会发生任何形式的碰撞。

◇ 优点

- 方法简单明确，如果能够确定一条安全轨迹，只需要使得指尖沿安

全轨迹移动即可，不必对系统操作过程中进行实时检测。

✧ 缺点

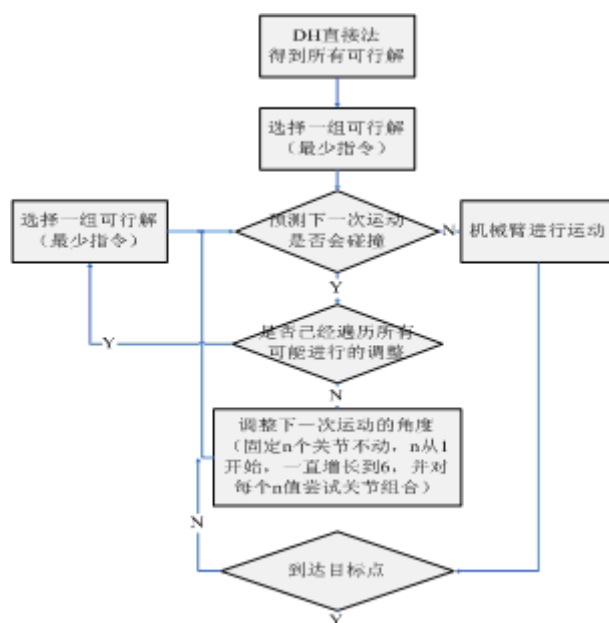
- 确定安全轨迹是通过系统内机械臂和障碍物的几何特点观察得到，因此对于某些时候可能不存在显而易见的安全轨迹，这是可能无法判断得到需要的安全轨迹，或者制定的安全轨迹并不“安全”。
- 由于制定安全轨迹时，仅仅考虑尽量避免碰撞，因此降低了指令的有效性，可能需要大量的冗余指令使得机械臂移动到更加安全的空间位置，因此降低了指令的效率。

5.4.3.2 碰撞规避自适应法

针对安全轨迹法的缺点，对模型进行改进，得到碰撞规避自适应法。

考虑机械臂需要到达空间内某一目标点完成指定的任务。这时，根据指定的任务确定机械臂指尖的矢量方向，利用 D-H 方程直接法求解得到有限组可行解。如果机械臂指尖能够以指定姿态到达目标点，而且中间不发生任何形式的碰撞，则由 D-H 方程求解得到的可行解中，至少有一组解，可以通过有效的指令序列，使得机械臂能够绕开障碍，控制指尖到达目标点。而如果不存在这种可行解，那么机械臂则不能通过指令序列控制到达目标点而不发生碰撞。对于机械臂绕开障碍物到达目标点进行作业，和机械臂完成任务后避免碰撞重新回到初始状态的两个过程互为逆过程，因此考虑后者和考虑前者等效。下面分析将就后者的过程进行分析。

首先设定该算法中的参数，最大增量调整因子 ω （对于本问题 $\omega = \pm 2^\circ$ ），最小增量调整因子 σ （对于本问题， $|\sigma|$ 最小为 0.1° ），固定因子 n （表示某一次移动时保持不旋转的关节数）。下面介绍碰撞规避自适应的具体步骤：



通过合理设置算法中的相关参数，可以求出一组指令序列，在这条指令序列控制下，机械臂可以绕开障碍物从目标点回到初始位置。而按照逆过程分析，机械臂可以通过该指令对应的逆指令绕开障碍物到达目标点。

◇ 优点

- 通过合理设置算法中的相关参数，在系统存在可实现任务的前提下，总能找到一组合理的解。
- 利用该算法计算得到的指令序列具有较高的效率，因为该指令序列尽量逼近最少的指令序列，除在碰撞时需要额外的指令开销。

◇ 缺点

- 系统得到可行解的复杂度较高。
- 需要合理设置算法中的相关参数，否则可能无法得到可行解，或者计算得到可行解的时延较大。

5.4.3.3 两阶段避障处理

在机械臂避障的领域中，现在已经有一些研究，比较常见的有人工势场法[4]，反向梯度法[5]，神经网络法[6]等等。由于神经网络法需要大量的训练数据，而且各种环境中都需要考虑到，在没有足够的训练数据时不适合使用。在这里，主要考虑使用前两种方法。

为了降低复杂度，整个避障过程分成两个步骤。首先采用反向梯度法给机械手末端找一条到达目标点的最短轨迹，然后在运动的过程中用改进的人工势场法来避免碰撞的发生。

1) 轨迹规划

在这个步骤中，目标是给末端找一条能到达目标点的最短轨迹。可以采用反向梯度法的思想，把整个空间划分为一些小格，把目标点所在位置设成 0 值，从目标点开始往其他方向遍历，如果是障碍则该栅格的值为 ∞ ，否则为上一栅格的值加 1，所有其他小格的值都随着跟目标点距离的变远而增大。把这个值称为栅格的高度值，而到达目标点的最优轨迹就是向高度下降最快的方向运动得到。下图所示的是在二维情况下的值。

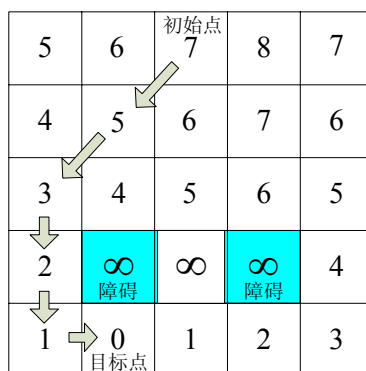


图 2 二维平面上的最优运动轨迹示意图

因为是对机械臂的控制，而不是移动机器人的避障，所以在考虑末端轨迹的时候还需要考虑其他关节的情况。空间一定要足够大，可以通过后面的其他支杆，并留出一定的余量来承受由于关节角度离散取值造成的扰动。如果障碍之间的缝隙不够大，即使在那个位置上没有障碍物，但是由于机械臂无法通过，也当作是障碍物处理，把栅格高度设为 ∞ ，如图中两个障碍中间的栅格。

这样保证了在这个运动过程中末端不会发生碰撞，但是不能确保机械臂的各个连杆都与障碍物不发生碰撞，所以在运动过程中还需要进行下面的避障处理。

2) 运动过程中避障处理

在运动中的避障处理可以使用人工势场法。人工势场法的基本思想是在移动机器人的工作环境中构造这样的一个人工势场，势场中包括斥力极和吸引极，不希望进入的区域和障碍物定义为斥力极，目标及建议进入的区域定义为引力极，使得在该势场中的移动机器人受到其目标位姿引力场和障碍物周围斥力场的共同作用，朝目标前进。

在这个机械臂的避障处理问题中，由于末端的运动轨迹已经确定，所以不再设定吸引极，只考虑在保证末端运动方向的同时考虑各个支杆受到的障碍物的排斥力。支杆与障碍物之间的距离可以通过前面的方法得到，排斥力与距离的关系应该是在距离大时几乎没有，在距离小的时候急剧上升。可以用

$$F_i(d_i) = \max \{0, -\log(d_i / d_0)\} \quad (34)$$

其中， d_i 是目前支杆 i 与障碍物之间的距离， d_0 是用操作者设定的支杆与障碍物之间比较近的距离，这个参数取决于支杆长度，对碰撞避免的保护程度等一系列因素决定。但是，不管 d_0 设置的值，在距离很近的时候，这个力都会趋近于 ∞ 。如图所示，

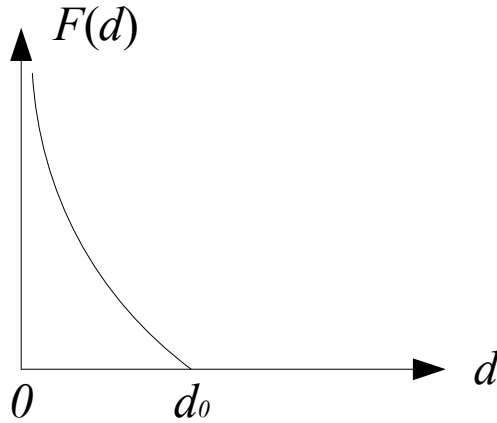


图 3 力与距离的关系示意图

为了保证不发生碰撞而且末端按照既定的轨迹运动，基于前面的微分运动模型分析，可以得到各个关节调整角度的方案。

$$\theta' = W^{-1} [JW^{-1}]^+ r' - W^{-1} (I - [JW^{-1}]^+ JW^{-1}) \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F_i(d)}{\partial \theta} \quad (35)$$

由于机器人是受引力和斥力的合力的作用，合力为零时，机器人将停止前进，即陷入局部极小点，机器人不能到达目标位置。这种情况在障碍物恰好在目标前方的时候极可能发生。在提出的两阶段解决方案中，因为通过第一阶段确定的末端轨迹已经使运动方向不会直接指向障碍物，避免了合力为零而进入死循环的情况。

● 算法优缺点

◇ 优点

- 把末端轨迹优化与运动过程中避障分开进行处理，在保持不进行碰撞的同时优化最小轨迹。具备实时自适应调整的机制，对于障碍位置变化的环境同样适用。

◇ 缺点

- 计算复杂度较大。

6 问题回答

6.1 问题 1 和 2

◇ 适用范围

通过 D-H 方程直接法进行计算，可以在给定指尖姿势和位置坐标的前提下得到所有的 16 组解[8]，是一种普遍适用的算法。但是由于在求解过程中大量使用位于分母上的三角函数，因此应该避免分母值为零。例如对于关节 A 和 E 应该尽量避免正弦值为零，对于关节 D 应尽量避免余弦值为零。更为直观的是，在求解关节 B 时，必须保证其二次多项式的 $\Delta p_1^2 + \Delta p_3^2 < 4$ （其中具体的符号定义参见之前的章节）才可求出实数解，这就从一定程度上定义出了算法的适用范围，亦是机械臂可达区域的一个限制条件。

◇ 计算效率

D-H 方程直接法存在有限组可行解，而且方程求解过程中通过灵活代换，不会出现复杂运算，仅仅含有一些基本的三角、反三角和一元二次方程，因此计算效率较高。其他三种方法在优化过程中都需要较高的运算量，尽管某些算法优化效果更好，或者更符合实际需要，但是计算效率较低。

◇ 近似算法误差

对于算法近似引入误差的分析参见 5.2 中各个模型的优缺点分析。

◇ 角度增量离散误差

角度增量离散引入的误差分析参加 5.2.5 指令序列设计中的分析。

①. 根据初始姿态 Φ_0 和一个可达目标点的空间位置 (O_x, O_y, O_z), 对于给定的任务, 已知指尖姿势的前提下, 可以根据 D-H 方程直接法求解得到有限组可行解, 根据具体要求和各个关节角度的角度变量范围, 对得到的可行解进行取舍。对于问题 2 中给出的参数, 假设指尖姿势为垂直 x - y 平面沿 z 轴负方向的矢量, 这样通过 D-H 方程直接法求解得到 16 组解, 由各个关节的角度变量范围约束, 最后剩下四组解, 如 answer.xls 文件中 sheet1 所示。根据 5.2.5 中的指令序列设计方法, 得到了每一组可行解的指令序列, 四组解的指令序列均保存在 answer.xls 文件的不同 sheets 中。

如果增加限制条件, 轨迹的 z 轴坐标始终为正值, 这样只有图 2 中红色和蓝色两组解为可行解。如果同时考虑指令序列中指令数最少, 这样红色轨迹对应的可行解为最优解。**这时, 同时需要考虑圆台障碍物是否对该操作过程中的机械臂发生碰撞, 只需要利用上文定义的碰撞检测模块判断, 判断的结果是机械臂在执行此操作的运动中不会与圆台发生碰撞, 进一步证明此解的可行性。**

其中红色轨迹对应的可行解的指令序列参见附录。

②. 对于该问题, 利用抽样拟合法求解。由于机械臂的各个关节角度变量范围有限, 利用程序计算得到目标轨迹, 即**裂纹上的一段区域为指尖不可达区域, 因此无法进行焊接任务。**

因此需要首先确定可达区域在目标裂纹上的边界点, 通过设计有效指令序列使机械臂的指尖首先到达其中一个边界点 (由于对称性, 先到达哪一个边界点对指令的有效性并无影响), 再通过指令序列使指尖沿裂纹移动。由于这一问题中的主要考虑因素为指尖沿裂纹的移动, 因此**暂时忽略机械臂由初始状态运动到指尖触摸其中一个边界点的指令操作。**

为了计算边界点的坐标, 同时采用几何法和仿真方法确定:

◇ 几何法

◇ 仿真法

通过在 0.1° 的精度范围内遍历指尖姿态, 最终得到上述两个边界点的三维坐标如为 (1.374292, 1.203234, 0.687146), (1.374292, -1.203234, 0.687146)。这样对于切面上的椭圆的优弧上的点均为指尖的可达区域, 因此容易通过对轨迹利用抽样拟合法, 计算得到有效的指令序列。详细指令详见附录, 此时相邻由于抽样密度较大, 相邻两抽样点只需要一条指令即可完成, 因此可以更好的拟合该裂缝。

因此我们仅设计了相应指令, 控制机械臂先去取工具, 之后移动到裂纹最远端, 如图 4 中蓝色轨迹所示, 之后沿裂纹轨迹进行焊接, 其中红色轨迹为指尖可达区域, 能够完成指定任务。而黑色轨迹为指尖不可达区域, 因此, 此处焊接任务无法完成。其中由于裂纹关于 x - z 平面对称, 因此裂纹性质关于 x - z 平面对称, 在图 4 中我们未标识出对称的另半个部分。

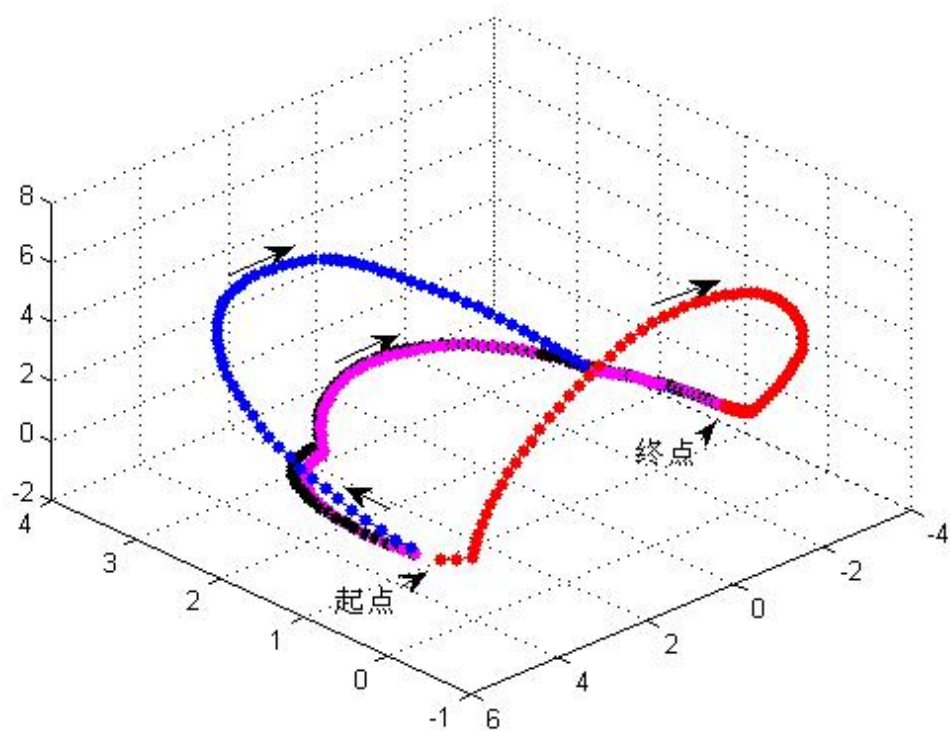


图 4 问题 2 中①的 4 组可行解达到目标点的运动轨迹

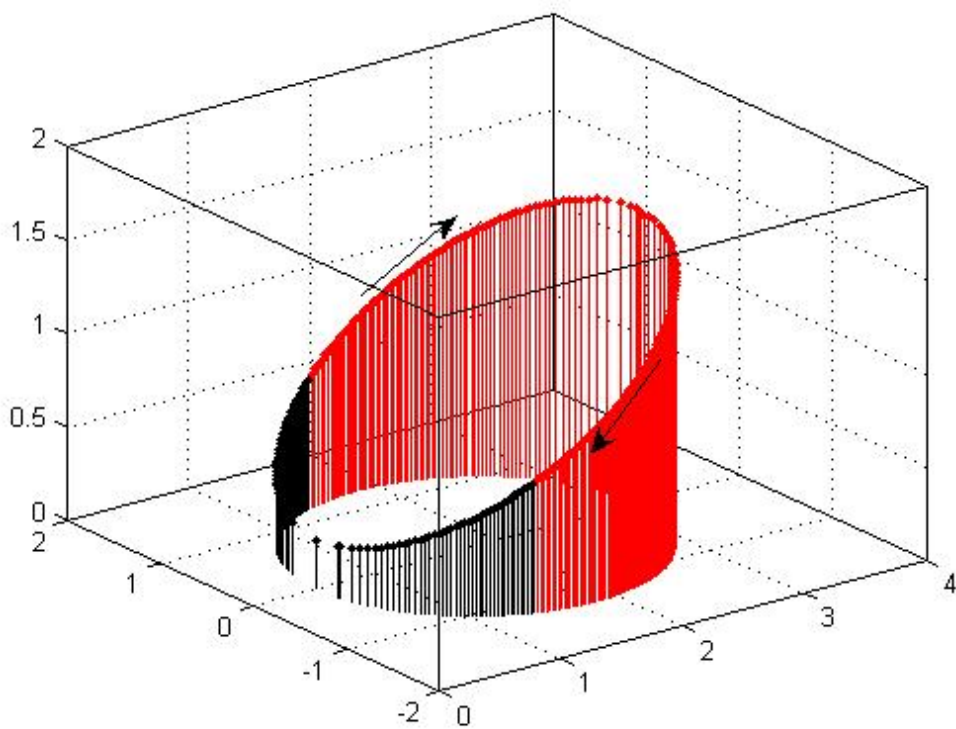


图 5 按指定轨迹进行焊接的指尖轨迹曲线

③. 利用本文提到的安全轨迹法，假设一条沿圆台轴心垂直向下的轨迹，

通过这条轨迹将机械臂移动至空心圆台内部不会发生碰撞。由于时间有限，未给出本问题的结果。

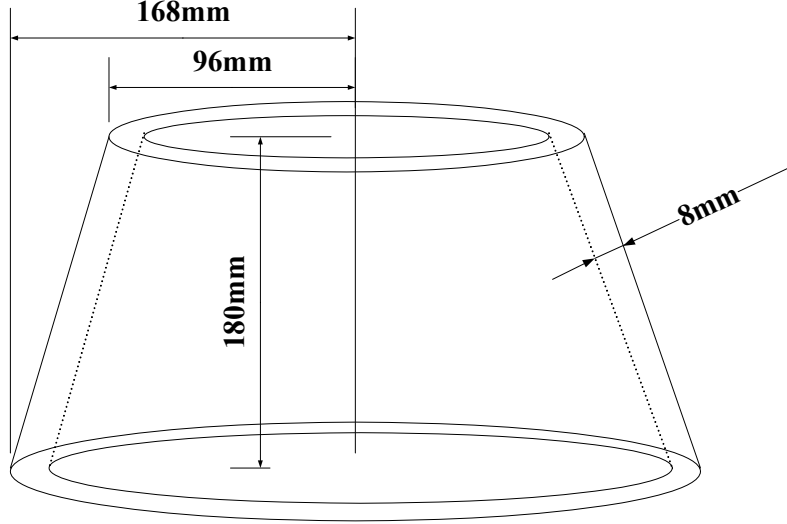


图 6 圆台结构示意图

6.2 问题 3

为了提高机械臂的性能，首先提出两个方面的评价标准：

- 可达范围：包括可达区域体积，最远可达距离和最近可达距离等几个方面
- 灵活性：即到达可达区域内某个位置的平均代价。可以根据优化目标的不同有不同的含义，包括到达任意点所需要的期望的能量，时间等。

对于可达范围，从几何角度进行一些初步分析。在最远可达范围方面，当 BC , CD , DE 在一条直线上的时候能达到最远，设 $R = l_{BC} + l_{CD} + l_{DE}$ ，则可达范围外表面内的体积为

$$V = \int_0^{l_{AB}} \pi(R-r)dr + 2\pi R^3 \quad (36)$$

优化目标是要可以达到尽量大的区域，问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & V \\ \text{s.t.} \quad & l_{AB} + R = L \end{aligned} \quad (37)$$

对目标函数微分得到

$$\frac{\partial V}{\partial l_{AB}} = -4l_{AB}^2 + 8Ll_{AB} - 5L^2 \quad (38)$$

由于 $\Delta = (8L)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-5L^2) = -16L^2 < 0$ ， $\partial V / \partial l_{AB}$ 一直小于 0，也就是说

从可达范围外表面内的体积角度看, l_{AB} 越小, 性能越好。但是, 这只是考虑了外表面, 事实上, l_{AB} 越小, 最近可达范围的性能越差。

在最近可达范围的分析中, 平行连杆的关节的动态范围没有出现, 因为它们不会对最近可达范围产生影响。但是, 这并不是说明它们不需要优化, 如果考虑到如何才能以最小的代价到达可达区域中的点, 这些参数也是需要优化的。

对于特殊情况, 在不考虑关节 F 和 G 的影响下, 我们用仿真的方法得到了通过变化关节 B, C 和 D 各自的角度, 机械手在一个二维平面上可以到达的区域, 如下图所示。发现该区域为一个非凸空心区域, 这是由各个关节的角度范围的限制造成的。我们通过尝试改变各个角度的范围限制来增大可达区域。

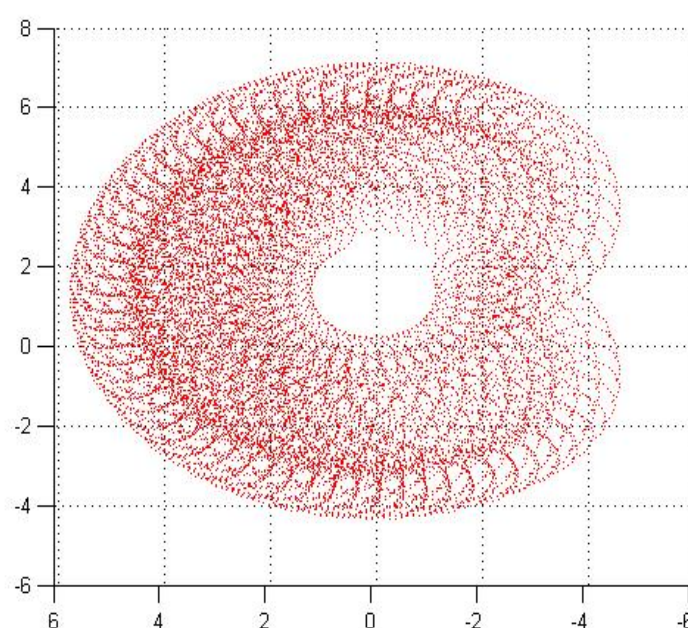
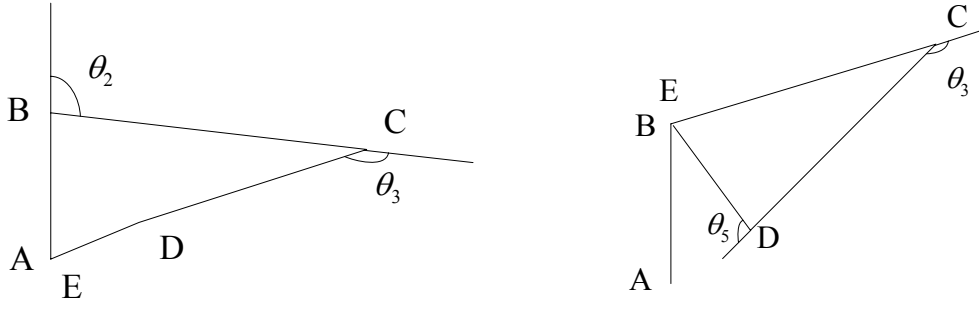


图 7 二维平面可达域

从仿真结果中可以看到在中心位置附近存在一个机械臂末端无法达到的空心区域。下面分析如何改进各段连杆的长度和各个关节的角度来满足使机械臂末端达到 A 点和 B 点, 以解决中心区域的空心问题。如果能够到达 A 点和 B 点, 那么就不会有中心区域的盲区存在。图中给出的是满足机械臂末端达到 A 点和 B 点的临界情况。



根据正弦定理和余弦定理，在机械臂末端达到 A 点的临界情况下，

$$\frac{l_{CD} + l_{DE}}{\sin \theta_2} = \frac{l_{AB}}{\sin \theta_3}$$

$$(l_{CD} + l_{DE})^2 = l_{AB}^2 + l_{BC}^2 + 2l_{AB}l_{BC} \cos \theta_2 \quad (38)$$

$$l_{AB}^2 = (l_{CD} + l_{DE})^2 + l_{BC}^2 + 2l_{BC}(l_{CD} + l_{DE}) \cos \theta_3$$

同理，在机械臂末端达到 B 点的临界情况下，有

$$\frac{l_{DE}}{\sin \theta_3} = \frac{l_{BC}}{\sin \theta_5}$$

$$l_{DE}^2 = l_{BC}^2 + l_{CD}^2 + 2l_{BC}l_{CD} \cos \theta_3 \quad (39)$$

$$l_{BC}^2 = l_{CD}^2 + l_{DE}^2 + 2l_{CD}l_{DE} \cos \theta_5$$

根据上面的三角公式，在给定的长度 $l_{AB} = 140$ ， $l_{BC} = 255$ ， $l_{CD} = 255$ ， $l_{DE} = 65$ 下，对应的无盲区的各个关节角度动态范围应该优化为 $\theta_2 (\pm 75.6^\circ)$ ， $\theta_3 (\pm 165.4^\circ)$ ， $\theta_5 (\pm 97.4^\circ)$ 。从结果可以看出，如果增大 θ_3 的动态范围，会有利于缩小盲区。但是，由于实际中的生产工艺存在难度，可能无法达到要求的角度动态范围。

在给定角度动态范围 $\theta_2 (\pm 125^\circ)$ ， $\theta_3 (\pm 138^\circ)$ ， $\theta_5 (\pm 133.5^\circ)$ 下，得到的无盲区的连杆长度为 $l_{AB} = 250$ ， $l_{BC} = 159$ ， $l_{CD} = 159$ ， $l_{DE} = 147$ 。这个结果中的 l_{AB} 很大，而从前面对最远可达范围的分析中知道 l_{AB} 越大，可达范围的外表面包围的面积就越小。

从上面的一系列分析中可以发现，需要综合考虑对连杆长度和关节角度范围，它们是相互影响的。在一定的条件下，不可能得到外表面范围大而且又没有中心盲点的机械臂配置。对于这种问题，可以使用启发式的方法，例如神经网络法，按照某个或某几个优化准则，对可达范围和灵活性进行仿真对连杆长度和关节角度范围进行联合配置，找到最优的配置方法，取得可达范围外表面、中心盲区和所需代价之间均衡。由于时间关系，在这里没能通过仿真给出具体的建议改进值。但是，通过上面的分析，我们可以给出一些定性的建议：

- θ_3 出现在两个式子中，它需要满足两个式子的要求才能达到无盲区，这对这个关节的动态范围有较高的要求。尽量提高 C 关节的可变范围，它对最近可达距离有较大改善。
- 较短的 AB 段会使可达区域的外围较大

7 参考文献

- [1] 熊勇刚, 周友行, 林峰. 多臂机器人关节间的碰撞检测研究[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(7).
- [2] Xudong Zhang, Don B. Chaffin, "An optimal-based differential inverse kinematics approach for modeling three-dimensional dynamic postures during seated reaching movements", Technical report, University of Michigan, 1996
- [3] D.E. Whitney, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses", IEEE Transactions on Man-Machine System, 1969
- [4] O. Khatib, Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots, International Journal of Robotics Research, 5(1) 90-98, 1986
- [5] J. Lengyel, M. Reichert, B. Donald, D. Greenberg, Real-time robot motion planning using rasterizing computer graphics hardware, Proceedings of SIGGRAPH, pp. 327-335, Aug. 1990
- [6] E. Plumer, Neural network structure for navigation using potential field, Proceedings of International Joint Conference of Neural Networks (IJCNN 92), pp. 327-332, 1992
- [7] 范印越, 机器人技术, 电子工业出版社, 1988, 7。
- [8] Dinesh Manocha, John F. Canny, "Efficient Inverse Kinematics for General 6R Manipulators", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 10, no. 5, 1994
- [9] 理查德.保罗, 机器人操作手, 机械工业出版社, 1982

附录

answer1.xls

(以下为该文件中指令数最少、同时 z 轴坐标始终为正的一组指令序列)：

指令序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	-2	2	-2	0	2	-2
2	-2	2	-2	0	2	-2
3	-2	2	-2	0	2	-2
4	-2	2	-2	0	2	-2

5	-2	2	-2	0	2	-2
6	-2	2	-2	0	2	-2
7	-2	2	-2	0	2	-2
8	-2	2	-2	0	2	-2
9	-2	2	-2	0	2	-2
10	-2	2	-2	0	2	-2
11	-2	2	-2	0	2	-2
12	-2	2	-2	0	2	-2
13	-2	2	-2	0	2	-2
14	-2	2	-2	0	2	-2
15	-2	2	-2	0	2	-2
16	-2	2	-2	0	2	-2
17	-2	2	-2	0	2	-2
18	-2	2	-2	0	2	-2
19	-2	2	-2	0	2	-2
20	-2	2	-2	0	2	-2
21	-2	2	-2	0	2	-2
22	-2	2	-2	0	2	-2
23	-2	2	-2	0	2	-2
24	-2	2	-2	0	2	-2
25	-2	2	-2	0	2	-2
26	-2	2	-2	0	2	-2
27	-2	2	-2	0	1.6	-2
28	-2	2	-2	0	0	-2
29	-2	2	-2	0	0	-2
30	-2	2	-2	0	0	-2
31	-2	2	-2	0	0	-2
32	-2	2	-2	0	0	-2
33	-2	2	-2	0	0	-2
34	-2	2	-2	0	0	-2
35	-2	2	-2	0	0	-2
36	-2	2	-2	0	0	-2
37	-2	2	-2	0	0	-2
38	-2	2	-2	0	0	-2
39	-2	2	-2	0	0	-2
40	-2	0.8	-2	0	0	-2
41	-2	0	-2	0	0	-2
42	-2	0	-2	0	0	-2
43	-2	0	-2	0	0	-2
44	-2	0	-2	0	0	-2
45	-2	0	-2	0	0	-2

46	-2	0	-2	0	0	-2
47	-2	0	-2	0	0	-2
48	-2	0	-2	0	0	-2
49	-2	0	-2	0	0	-2
50	-2	0	-2	0	0	-2
51	-2	0	-2	0	0	-2
52	-2	0	-2	0	0	-2
53	-2	0	-2	0	0	-2
54	-2	0	-2	0	0	-2
55	-2	0	-2	0	0	-2
56	-2	0	-2	0	0	-2
57	-2	0	-2	0	0	-2
58	-2	0	-2	0	0	-2
59	-2	0	-2	0	0	-2
60	-2	0	-2	0	0	-2
61	-2	0	-2	0	0	-2
62	-2	0	-2	0	0	-2
63	-2	0	-2	0	0	-2
64	-2	0	-2	0	0	-2
65	-2	0	-2	0	0	-2
66	-2	0	-2	0	0	-2
67	-2	0	-0.4	0	0	-2
68	-2	0	0	0	0	-2
69	-2	0	0	0	0	-2
70	-2	0	0	0	0	-2
71	-2	0	0	0	0	-2
72	-2	0	0	0	0	-2
73	-2	0	0	0	0	-2
74	-2	0	0	0	0	-2
75	-2	0	0	0	0	-2
76	-2	0	0	0	0	-2
77	-2	0	0	0	0	-2
78	-2	0	0	0	0	-2
79	-2	0	0	0	0	-2
80	-2	0	0	0	0	-2
81	-2	0	0	0	0	-2
82	-2	0	0	0	0	-2
83	-2	0	0	0	0	-2
84	-2	0	0	0	0	-2
85	-2	0	0	0	0	-2
86	-2	0	0	0	0	-2

87	-2	0	0	0	0	-2
88	-0.3	0	0	0	0	-0.3

answer2.xls

指令序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	-0.1	0.1	0.5	0	-0.4	-0.1
2	-0.3	0.1	0.4	0	-0.6	-0.3
3	-0.2	0.1	0.5	0	-0.5	-0.2
4	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
5	-0.2	0.1	0.5	0	-0.5	-0.2
6	-0.3	0.1	0.5	0	-0.6	-0.3
7	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
8	-0.2	0.1	0.5	0	-0.5	-0.2
9	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
10	-0.2	0.1	0.4	0	-0.5	-0.2
11	-0.3	0	0.5	0	-0.5	-0.3
12	-0.3	0.1	0.4	0	-0.4	-0.3
13	-0.3	0	0.5	0	-0.5	-0.3
14	-0.2	0	0.4	0	-0.5	-0.2
15	-0.3	0.1	0.5	0	-0.5	-0.3
16	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
17	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
18	-0.3	0	0.5	0	-0.4	-0.3
19	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
20	-0.2	0.1	0.4	0	-0.4	-0.2
21	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
22	-0.3	0	0.5	0	-0.4	-0.3
23	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
24	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
25	-0.3	0	0.5	0	-0.4	-0.3
26	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
27	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
28	-0.3	0	0.4	0	-0.5	-0.3
29	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
30	-0.3	0	0.5	0	-0.4	-0.3
31	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
32	-0.4	0	0.4	0	-0.4	-0.4
33	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
34	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
35	-0.3	0	0.5	0	-0.4	-0.3
36	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3

37	-0.4	0	0.4	0	-0.4	-0.4
38	-0.3	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.3
39	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
40	-0.4	0	0.4	0	-0.3	-0.4
41	-0.3	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.3
42	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
43	-0.4	0	0.5	0	-0.4	-0.4
44	-0.3	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.3
45	-0.4	0	0.4	0	-0.3	-0.4
46	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
47	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.4
48	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
49	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.4
50	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
51	-0.4	0	0.4	0	-0.3	-0.4
52	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.4
53	-0.4	0	0.5	0	-0.4	-0.4
54	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.4
55	-0.3	0	0.4	0	-0.4	-0.3
56	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.4
57	-0.4	0	0.4	0	-0.4	-0.4
58	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.4
59	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.4
60	-0.5	0	0.4	0	-0.3	-0.5
61	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.4
62	-0.4	0	0.4	0	-0.3	-0.4
63	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.4
64	-0.5	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.5
65	-0.4	0	0.4	0	-0.4	-0.4
66	-0.5	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.5
67	-0.5	0	0.5	0	-0.4	-0.5
68	-0.5	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.5
69	-0.4	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.4
70	-0.6	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.6
71	-0.5	0	0.4	0	-0.3	-0.5
72	-0.5	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.5
73	-0.6	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.6
74	-0.5	0	0.4	0	-0.3	-0.5
75	-0.6	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.6
76	-0.6	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.6
77	-0.7	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.7

78	-0.6	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.6
79	-0.7	0	0.4	0	-0.4	-0.7
80	-0.8	-0.1	0.5	0	-0.3	-0.8
81	-0.8	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.8
82	-0.8	-0.1	0.4	0	-0.3	-0.8
83	-0.9	-0.1	0.4	0	-0.4	-0.9
84	-1.1	-0.1	0.4	0	-0.3	-1.1
85	-1.2	0	0.4	0	-0.3	-1.2
86	-1.5	-0.1	0.4	0	-0.3	-1.5
87	-2	-0.1	0.4	0	-0.4	-2
88	-2	0	0	0	0	-2
89	-2	0	0	0	0	-2
90	-1.5	0	0	0	0	-1.5
91	2	-0.1	0.2	0	-0.1	2
92	0.5	0	0	0	0	0.5
93	-2	0	-0.3	0	0.2	-2
94	-1.9	0	0	0	0	-1.9
95	-1.7	0.1	-0.4	0	0.3	-1.7
96	-1.3	0.1	-0.4	0	0.4	-1.3
97	-1.1	0.1	-0.4	0	0.3	-1.1
98	-1	0.1	-0.5	0	0.3	-1
99	-0.9	0.1	-0.4	0	0.3	-0.9
100	-0.8	0	-0.4	0	0.4	-0.8
101	-0.8	0.1	-0.4	0	0.3	-0.8
102	-0.7	0.1	-0.4	0	0.3	-0.7
103	-0.7	0.1	-0.4	0	0.4	-0.7
104	-0.6	0.1	-0.4	0	0.3	-0.6
105	-0.6	0	-0.4	0	0.3	-0.6
106	-0.6	0.1	-0.4	0	0.4	-0.6
107	-0.6	0.1	-0.4	0	0.3	-0.6
108	-0.6	0.1	-0.4	0	0.3	-0.6
109	-0.5	0	-0.5	0	0.4	-0.5
110	-0.5	0.1	-0.4	0	0.3	-0.5
111	-0.5	0.1	-0.4	0	0.3	-0.5
112	-0.5	0.1	-0.4	0	0.4	-0.5
113	-0.5	0	-0.4	0	0.3	-0.5
114	-0.5	0.1	-0.4	0	0.3	-0.5
115	-0.5	0.1	-0.4	0	0.4	-0.5
116	-0.4	0	-0.4	0	0.3	-0.4
117	-0.5	0.1	-0.4	0	0.4	-0.5
118	-0.4	0	-0.4	0	0.3	-0.4

119	-0.4	0.1	-0.4	0	0.4	-0.4
120	-0.5	0.1	-0.4	0	0.3	-0.5
121	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
122	-0.4	0.1	-0.4	0	0.3	-0.4
123	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
124	-0.4	0.1	-0.5	0	0.3	-0.4
125	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
126	-0.4	0.1	-0.4	0	0.3	-0.4
127	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
128	-0.4	0.1	-0.4	0	0.3	-0.4
129	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
130	-0.4	0.1	-0.4	0	0.4	-0.4
131	-0.4	0	-0.4	0	0.3	-0.4
132	-0.3	0.1	-0.4	0	0.4	-0.3
133	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
134	-0.3	0.1	-0.4	0	0.3	-0.3
135	-0.4	0	-0.5	0	0.4	-0.4
136	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
137	-0.4	0.1	-0.4	0	0.4	-0.4
138	-0.3	0	-0.4	0	0.3	-0.3
139	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
140	-0.3	0.1	-0.4	0	0.4	-0.3
141	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
142	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
143	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
144	-0.3	0.1	-0.5	0	0.3	-0.3
145	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
146	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
147	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
148	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
149	-0.3	0.1	-0.4	0	0.4	-0.3
150	-0.3	0	-0.5	0	0.4	-0.3
151	-0.3	0	-0.4	0	0.5	-0.3
152	-0.4	0	-0.4	0	0.4	-0.4
153	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
154	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
155	-0.3	0	-0.5	0	0.4	-0.3
156	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
157	-0.3	0	-0.4	0	0.5	-0.3
158	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
159	-0.2	0	-0.5	0	0.4	-0.2

160	-0.3	0	-0.4	0	0.5	-0.3
161	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
162	-0.3	0	-0.5	0	0.5	-0.3
163	-0.3	0	-0.4	0	0.4	-0.3
164	-0.3	0	-0.4	0	0.5	-0.3
165	-0.3	0	-0.5	0	0.4	-0.3
166	-0.2	-0.1	-0.4	0	0.5	-0.2
167	-0.3	0	-0.4	0	0.5	-0.3
168	-0.3	0	-0.5	0	0.5	-0.3
169	-0.3	-0.1	-0.4	0	0.4	-0.3
170	-0.2	0	-0.5	0	0.5	-0.2
171	-0.3	0	-0.4	0	0.5	-0.3
172	-0.3	-0.1	-0.5	0	0.5	-0.3
173	-0.2	-0.1	-0.4	0	0.5	-0.2
174	-0.3	0	-0.5	0	0.5	-0.3
175	-0.3	-0.1	-0.4	0	0.5	-0.3
176	-0.2	0	-0.5	0	0.6	-0.2
177	-0.3	-0.1	-0.4	0	0.5	-0.3
178	-0.2	-0.1	-0.5	0	0.5	-0.2
179	-0.3	-0.1	-0.4	0	0.6	-0.3
180	-0.2	-0.1	-0.5	0	0.5	-0.2