

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学 校 东北大学

参赛队号 10145011

1.张瀚铎

队员姓名 2.王彩成

3.梁志达

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 尖劈形吸波体性能求解及基于菲涅耳区微波 暗室性能的研究

摘 要

本文针对尖劈形吸波体的性能，即入射波线在其中进行多次反射后的反射波的各个参数与反射率和各几何参数之间的定量关系进行了探讨；以及对导弹引导仿真实验用微波暗室进行了性能指标分析建模。分别建立了基于尖劈旋转组的反射次数模型、基于线性空间中线性变换的反射角模型、基于能量向量和 Fresnel 区理论的主反射功率模型，在较合理的假设下，对各个模型进行了求解，取得了较理想的效果。

针对问题一，本文提出了一种新的算法，通过做辅助尖劈形图形，得到尖劈旋转组，可以得到入射波线在一个尖劈形几何空缺间的反射次数的准确模型，从而可以得到反射次数。同时，采用了线性空间中的过渡矩阵和线性变换的思想，在尖劈两个内面的坐标系之间进行变换，得到每次反射时的反射角，避免了采用世界坐标系进行计算的复杂性，使得计算量大大降低，并且得到了任何情况下反射角的表达式。同时，矩阵的思想也可用在振幅强度的计算上。

针对问题二，本文基于菲涅尔-惠更斯理论，对 Fresnel 椭球进行建模，同时得到 Fresnel 主反射区，从而简化能量在有限区域的无限次反射，并针对 Fresnel 主反射区的分析和计算，得到静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 γ 的表达式，并验证了两种不同形状的

材料在微波暗室的仿真中的性能指标，得到了较理想的结果。

关键词：尖劈旋转组；线性变换；微波暗室； Fresnel 区(菲涅耳区)

1 问题重述

1.1 微波暗室的背景

1.1.1 微波暗室的用途

微波暗室的用途非常广泛，归纳起来主要有以下几点：

1. 天线系统实验

无回波暗室通常用来测量天线系统的有关性能。如用于测量天线的方向图(振幅与相位)、极化性能、增益系数、辐射阻抗以及天线相互间的耦合与匹配，并确定其有关性质。除常规的测试外，还可运用紧缩场与近场的方法来测量天线与天线罩的参数。

2. 天线罩的实验

在大多数无回波暗室内，均可较为方便地进行天线罩的实验。如测试天线罩的驻波系数、透波率及其给天线方向图带来的影响(畸变、指向角误差等)。

3. 电磁兼容性与整机系统的实验

微波暗室除用作天线系统、天线罩实验外，还可以进行电磁兼容性研究与整机系统的实验。如传导干扰、辐射干扰、干扰灵敏度、有效辐射功率、有关定向系统的校准、传输随动系统的误差等方面的实验。

4. 电子战系统设备的开发研究与实验

随着电子设备的发展，微波暗室被用来进行电子对抗设备的实验与多种目标散射特性的测量日趋增多。如美国格鲁门公司曾利用无回波暗室研制出一种电子对抗设备。经实践，电子对抗设备装在飞机上与微波暗室中进行实验，可以节省经费与时间。

5. 目标模拟与模型缩比方面的实验

随着科学技术的发展，现在已将几何光学和电磁波绕射技术用于研究装在飞机上的天线辐射模型，并先后在 1/35 比例的航天飞机模型和 1/11 比例的波音 737 飞机模型上进行实验。例如，频率在 35GHz 时进行实验，所得的结果与理论计算值(如方向图)是一致的。同时这样的实验在隐身技术的深入研究中也越来越受到重视与应用。^[1]

1.1.2 微波暗室的分类

微波暗室在其发展过程中，曾出现过以下几种主要结构形式：如喇叭形、矩形、锥形、纵向隔板形、横向隔板形、孔径形、半圆形、扇形与复合形等形状。

每一种形状的微波暗室都有其优点与不足。早期，由于人们的认识水平与技术水平有限，吸波材料的品种单一且吸波性差。在设计微波暗室时往往采取改变其几何形状来实现较好的电性能要求。随着科学技术的发展，吸波材料性能的提高，目前设计的微波暗室主要为矩形、锥形、与喇叭形三种。尤其是使用频率向高、低两端扩展，促进了矩形、锥形暗室的发展，并得到了广泛应用。

具体分析这三种微波暗室可以看到，喇叭形微波暗室的长处是，墙壁的表面积比同类矩形微波暗室小，使用吸波材料也少等。但缺点是，使用时需准确调整发射天线的位置；使用空间小，被测物只能在一个固定地方进行测量；在某种程度上喇叭形微波暗室固有的有效散射面比矩形微波暗室大等，因此其应用范围与发展受到限制。

矩形与锥形微波暗室在主要的电波传播方向(特性)、静区的性能等方面是相同的。

如图 1.1 和图 1.2 所示，矩形微波暗室能避免其他微波暗室的一些缺点，它的通用性较好，微波暗室的两端均好使用。另外，有些实验必须在矩形微波暗室中进行。例如，电磁兼容性实验，电子战中的一些电子设备的环境模拟实验，隐身技术中雷达截面积测试的有关研究与发射机位置需要多元实验等。^[2]

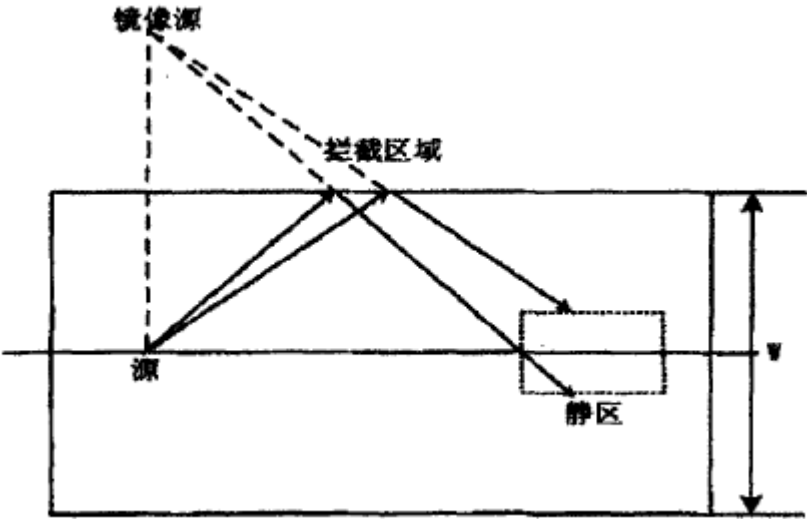


图 1.1 微波暗室的工作情况

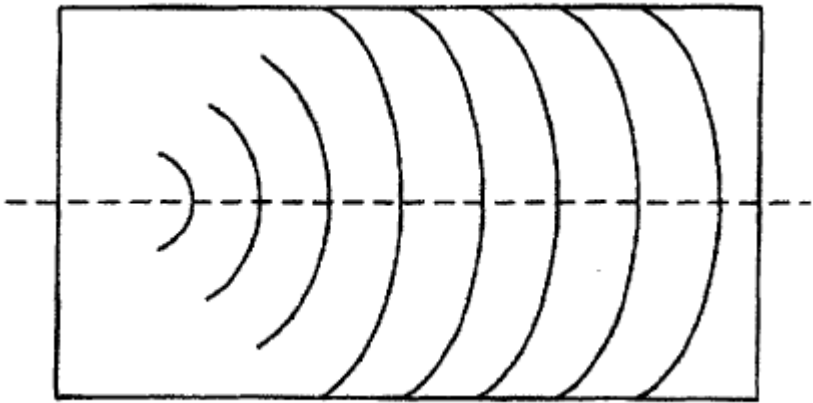


图 1.2 在微波暗室中，电波的传输，在接收点，波前基本上是平面波

1.1.3 发展情况

随着科学的发展，在有限的时间、空间及频率资源条件下，工业、军事和民用的电子设备数量与品种与日俱增，设备的使用密集度越来越大，电磁干扰问题的严重性已经引起工程界的极大关注。为了测试向自由空间辐射电磁波的无线电设备的性能，国际上是以开阔测试场作为电磁辐射的试验场地，但是由于现代生活环境中很难找到理想的开阔场，此微波暗室就被广泛地采用，所谓微波暗室，是指由无线电吸收材料铺设内壁，以减少墙壁反射，其内部某一区域形成一个接近“空间”的无回波区，即“静区”的房间，在微波暗室里几乎可以进行所有类型的无线电测试，尤其是无线参数的测试和雷达目标散射特性的测量，在微波暗室内试验可以缩短实验时间，无论白天黑夜或者任何环境下都不受限制，测量设备容易实现自动化，测量精度大大提高。

无回波暗室就是采用具有吸收电磁波性能的吸波材料复盖房间的六面内壁、

以一有限的空间来模拟一个无电磁波反射的“自由空间”。在这里进行卫星、导弹、飞行体散射面积的测量, 雷达天线视位置的调整, 整机的灵敏度, 系统的一致性, 天线方向图、增益、极化、阻抗等各种模拟参数的研究, 而不受环境的影响与限制。

五十年代美国建立了第一批无回波暗室, 在 s 波段(10cm) 反射信号低于入射信号 20dB。随着吸波材料性能的不断提高, 从六十年代至今, 美国和其它一些国家先后建起了 400 多个无回波暗室。其净空尺寸, 大的长达 53m, 横截面积为 15.8*15.8m; 工作频率低到 30MHz, 高达 100GHz。今天, 用具有现代化工艺水平的吸波材料设计的无回波暗室, 对于振幅和相位均匀性的“自由空间”可以模拟到很高的程度。在较高的微波频率上测试静区电平(从各区来的反射信号电平汇集到某一区域, 其合成场的相位和振幅的电平。)达到入射信号以 60dB 并不困难。1965 年美国建造了一座长 27.4m、横截面积为 7.6*7.6m 的无回波暗室, 采用锥体高 1.8m 的吸波材料, 工作频率在 100MHz 时, 测试静区电平可以达到入射信号以下 30dB; 在 100GHz 时, 可以达到入射信号以下 50dB。

近年来, 国内的无回波暗室也发展很快, 不少厂家相继建立起了一批吸收性能较好的无回波暗室。用于军工产品与民用产品的测试与研究。西安 212 研究所建造了一座长 20m、横截面积为 8*8m 的无回波暗室, 最低工作频率为 200MHz, 采用 1.5m 高的锥体吸波材料, 是国内第一家米波段的无回波暗室。上海新华无线电厂已建成三座无回波暗室, 其中一座长 8m, 横截面积为 4*4m, 工作频段波长为 3cm, 采用 300mm 高的锥体吸波材料, 静区 电平可达入射信号以下 50dB。

从国内外无回波暗室的发展情况来看, 根据其测试频率可分为米波无回波暗室和微波无回波暗室。^[3]

1.2 吸波材料形状

1.2.1 吸波材料形状的选择

暗室用吸波材料的种类主要有平板和锥体两大结构类型。

1. 平板结构吸波材料

平板结构吸波材料主要有涂层型吸波材料和结构型吸波材料两大类。

(1) 吸波涂层

吸波涂料层一般由吸波剂和粘结剂组成, 其中具有特定电磁参数的吸波剂是涂层的关键所在, 直接决定了吸波涂层的吸波性能, 而粘结剂是涂层的成膜物质, 可以使涂层牢固附着于被涂物体表向上形成连续膜, 这种粘结剂必须是良好的透波材料, 才能使涂层的吸收效率最大化。

(2) 结构型吸波材料

尽管吸波涂层近年来已经取得相当进展, 新的涂层材料也不断开发, 但吸波涂层仍然存在不少问题, 如频段窄、粘结性差, 易脱落、比重大, 以致影响飞机导弹等的飞行性能等等, 因此结构型吸波材料与之相比占有较大的优势。结构吸波材料具有承载和减小雷达散射截面的双重功能, 具备复合材料质轻高强的优点, 因此从二战时期就受到广泛关注和研究, 并开始得到应用, 现已成为当代隐身材料重要的发展方向, 受到国内外研究者的高度重视。了提高结构型吸波材料的吸波效能, 常常采用多层或经特殊设计的结构。主要有阻抗递变层板结构、夹层结构、频率选择表面结构、电路模拟结构、栅格结构等结构。

2. 角锥结构吸波材料

角锥结构吸波材料是微波暗室中应用最广的吸波材料, 角锥结构吸波体的设

计理论与隐形材料的设计理论是完全一致的。关于微波吸收材料和吸波暗室的进展最早可追溯到 1953 年, Neher 为了提高微波暗室的测试能力, 在暗室墙壁上首次安装锥形吸波材料, 获得成功。也正是在这一年吸波材料的研究开始走出实验室, 进入商业领域, 同时第一个微波暗室建成并开始应用于电子元器件兼容性能以及吸波性能的测试。随后美国密歇根州立大学电磁辐射实验室的 Hiatt 等。Goodrich 公司微波工程组的 Emerson 等以及日本东京工业学会的 suetake 等对微波暗室以及暗室用角锥结构材料进行了改进, 其中 Suetake 等首次在锥体底部附加了铁氧体吸波瓦, 大大降低了吸波体的厚度, 提高了吸波体的吸波效能, 特别是低频段的吸波性能。后来, Park 等对其结构进行了进一步研究。锥体结构吸波材料主要用来在微波暗室中改善测试环境, 尽管有着较好的吸波效能, 但由于庞大的体积很难在军事隐形方面得到应用。所以平板结构吸波材的研究意义重大。^[4]

1.2.2 尖劈形状吸波体介绍

1. 尖劈的高度:

尖劈需要一定的高度, 是为了使波在尖劈之间能充分地来回反射, 并使所有反射波矢量由于相位相反或差别而抵消、以减小反射波分量。尖劈的高度最小值应设计为最低频率处的一个波长。

2. 尖顶角 2α 的大小:

尖顶角 2α 的大小决定了波在尖劈之间的反射次数, 反射次数多, 反射系数就小, 所以, 要求高性能时, 2α 就要小。反之, 则可大一些。

3. 底座高度:

如果底座高度太小, 则一部分波得不到充分的衰减, 影响吸收性能, 且重心在底座之外, 对横向安装时的粘接强度带来影响, 但也不宜太大, 否则一则增加重量, 二则失去角锥的意义。一般取总高度的 $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{4}$ 为宜。

1.3 吸波材料工作机理和分类

自从雷达出现以后, 人们就开始研制能够吸收电磁波的材料, 这种材料常称为吸波材料。方法是在飞机或导弹上涂上吸波材料, 雷达发出的电磁波被吸收而不被反射, 这样就避免雷达的监视和跟踪, 以提高飞行器的生存能力和战斗能力。

为了测试向自由空间辐射电磁波的无线电设备的性能, 广泛地采用微波暗室。所谓微波暗室, 是指无线电吸波材料铺设内壁, 以减少壁反射, 在其中某一部分形成一个接近“自由空间”的无回波区的房间, 用以模拟自由空间在微波暗室里, 几乎可以进行所有类型的无线电测试。尤其是天线参数测量和雷达目标散射特性的测量。

(1) 吸波材料的工作原理

从物理学中波动光学的角度来考虑反射问题。如图 1.1, 磁波照在两种媒质的分界面处, 若入射电磁波使第二种媒质在分界面处质点振动幅度大, 则说明电磁波传给媒质的能量就多, 它本身能量损失也大, 则反射波的能量就小, 反之, 媒质中各质点振动幅度不大, 则损耗能量也小, 在界面反射的能量就大, 因此, 我们选择吸波材料的目的是使反射波的能量大大衰减。^[5]

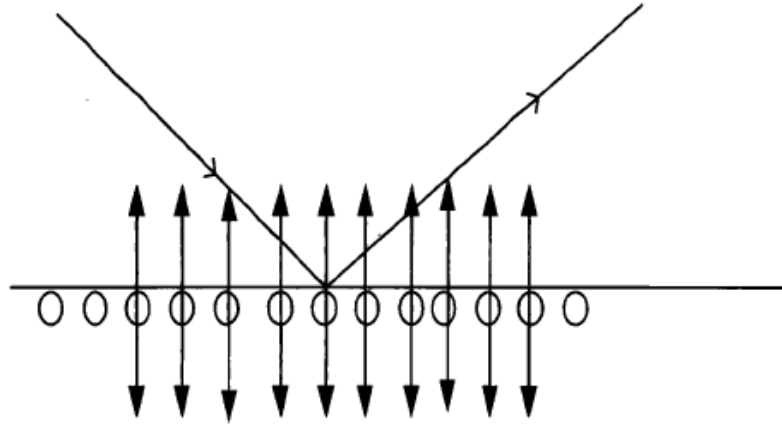


图 1.3 吸波材料的工作原理

(2) 吸波材料的分类

微波暗室使用吸波材料作为衬里，它能吸收电磁波，达到减小或消除电磁波的反射与散射等。微波暗室的性能好坏与吸波材料本身的吸波性、频带特性、形状、厚度及种类密切相关。若材料对电磁波吸收得越多，则反射越小，周围环境越接近自由空间，其微波暗室性能也就越好。

现在，随着吸波材料越来越广泛的应用，它的种类也变得多了起来，但归纳起来主要有三种：

(1) 按材料成形工艺和承载能力，可分为涂覆型和结构型。涂覆型是将粘结剂与金属、合金粉末、铁氧体、导电纤维等吸波剂混合后形成吸波涂层。此外，国外还在研制含放射性同位素的涂料和半导体涂料，其特点是吸收频带宽，反射衰减率高，使用寿命长。结构型具有承载和吸波的双重功能。通常将吸波剂分散在层状材料中，或用透波性好，强度高的高聚物复合材料作面板，采用夹芯蜂窝状、波纹状或角锥体结构。

(2) 按材料损耗机理可分为电阻型和磁介质型。碳化硅，石墨等属于电阻型，电磁能主要衰减在电阻上；钨酸钡之类属于电介质型，其机理主要是介质极化弛豫损耗；铁氧体，梭基铁等都属于磁介质型，它主要是铁磁共振吸收。

(3) 按吸波原理又可分为吸波型和干涉型。前者是材料本身对电磁波的吸收，后者是利用表层和底层两列反射波相互干涉抵消。^[6]

近期来国外对吸波材料的研究十分活跃，国内也正在密切注视国外在此领域的动态，并积极开展我国隐身材料的研究。最理想的吸波涂层是其化学成分能使电磁波在其内的波长不因入射波的频率变化而变化，但目前国内外尚未做到这一点。在先进复合材料基础上发展起来的既能隐身又能承载的结构型吸波材料，具有涂覆材料无法比拟的优点，是当代隐身材料主要发展方向。其研制的关键是复合材料层板的研制及其介电性能的设计匹配，有“吸、透、散”功能的夹芯材料的研制与设计以及各个因素的优化组合匹配等。应用计算机辅助优化设计在有限的条件约束下为结构层吸波材料的研究提供了方便，可望近期内对结构型吸波材料及其结构型式的研究会有更大发展。

2 问题 1：尖劈形状吸波体的性能分析

2.1 二维情况分析

2.1.1 反射角之间的关系

设第一次反射角为 θ_1 ，第二次反射角为 θ_2 ，……，以此类推，易得 $\theta_2 = |\theta_1 - 2\alpha|$ ，

但是如果在普通的直角坐标系中往下直接运算，由于入射波线出射的条件未知，所以每次反射的反射角的情况比较复杂，分情况讨论没有意义。

我们暂时不在乎每次的反射角的角度值以及其他几何关系，仅仅从整体上考虑出射的条件，即在什么情况下入射波线出射，知道了这个条件，就有可能求得反射次数。

2.1.2 反射次数求解的准备工作

如图 2.1，对尖劈 BOC 做辅助线，得到若干个全等的尖劈旋转组（有公共顶点 O 点）。可以得到以下两个重要结论：

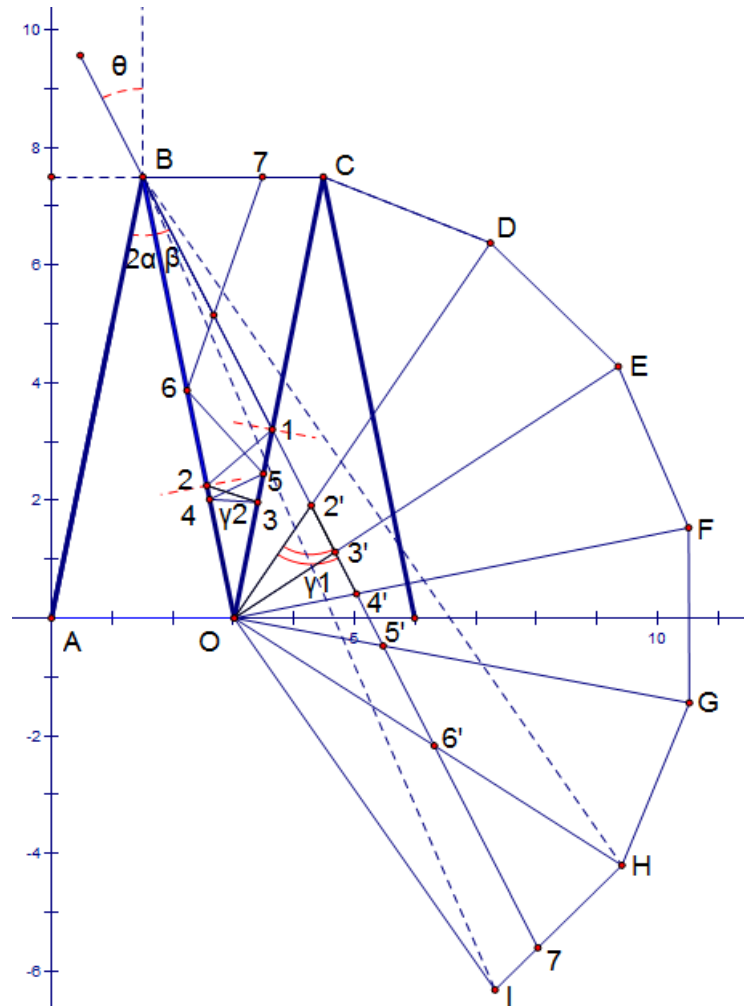


图 2.1 求解反射次数过程示意图

结论 1：发射波线在图中组成的多个尖劈旋转组中穿过，与每个尖劈的内面相交的点的个数就是反射点的个数。

结论 2：发射波线在图中组成的多个尖劈组中穿过，与每个尖劈的内面相交

的点“1”、“2’ ”、“3’ ”、…、“n’ ”与O点的距离等于各个反射点“1”、“2”、“3”、…、“n”与O点的距离。

证明：

首先，易证 $\triangle 1O2 \cong \triangle 1O2'$ ， $\triangle 2O3 \cong \triangle 2'O3$ 。则“2’ ”与“2”和O点距离相等。

θ_1 为第一个反射点的入射角，因为在 $\triangle BO1$ 中， $\angle \beta + \theta_1 + \frac{\pi}{2} + 2\alpha = \pi$ ，而 $\angle \gamma_1 = \angle \beta + 2 \times 2\alpha$ ，所以可以得出 $\angle \gamma_1 = \frac{\pi}{2} + 2\alpha - \theta_1$ 。

从图中可以看出 $\angle \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$ ，又根据 $\theta_2 = |\theta_1 - 2\alpha|$ ，所以 $\angle \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2\alpha - \theta_1 = \angle \gamma_1$ 。通过 $\angle \gamma_1 = \angle \gamma_2$ 可以证明 $\triangle 2'O3 \cong \triangle 2'O3'$ 。

则“3’ ”与“3”和O点距离相等。同理，证明后面的点，直到这条波线无法与尖劈内面相交，即认为已经射出。可以得出，“2”和“2’ ”点关于CO轴对称；“3”和“3’ ”点关于DO轴对称；“4”和“4’ ”点关于DO轴对称；“5”和“5’ ”点关于EO轴对称……

因此，可以得出以上两个结论。

2.1.3 求解反射次数 n

假设真实的出射情况的等效图如图2.1所示，则点H和点I分别是波线射最终射出尖劈的临界点。所以要保证“7”点在线段HI上，就需要 $\angle OBI \leq \angle \beta \leq \angle OBH$ ，即：

$$\frac{\pi}{2} - (n+1)\alpha \leq \angle \beta \leq \frac{\pi}{2} - n\alpha \quad (2.1)$$

其中，n是反射次数。

经推导得到：

$$\begin{aligned} (\frac{\pi}{2} - \beta) / \alpha - 1 &\leq n \leq (\frac{\pi}{2} - \beta) / \alpha, \text{ 即} \\ (\frac{\pi}{2} - \theta) / \alpha &\leq n \leq (\frac{\pi}{2} - \theta) / \alpha + 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

可以看出，n的值与尖劈的高和底的长度无关，只与尖劈的顶角 2α 和 θ 有关。最后得到了二维空间下，入射波线在尖劈中的反射次数n。

2.1.4 二维模型概述

得到反射次数n这个条件后，对波线的角度和振幅值进行计算，采用线性空间中向量线性变换的思想，可以得到最终出射波线的出射角 θ_n 和出射振幅强度

A_n 。

入射波线在尖劈中的状态只有振幅强度，即能量值以及入射到尖劈两边发生反射时的入射角度值两个相互独立的信息，因此可以简化为向量模型：

能量向量 $\mathbf{M}_i = (A_i \sin \theta_i, A_i \cos \theta_i)$

角度向量 $\mathbf{D}_i = (\sin \theta_i, \cos \theta_i)$

其中 $i=1,2,\dots,n$, A_i 为波线在第 i 次反射前的振幅强度, θ_i 为波线在第 i 次反射时的入射和反射角。该模型所选取的坐标系是第 i 次反射发生时所在的尖劈内面, 由图 2.2 可知, 尖劈共有两个内面 k_0 和 k_1 , 因此有两个坐标系。如果入射波的向量如上, 则可以得到反射波的向量, 如图 2.2, 在水平方向的角度向量不变, 只是竖直方向的向量取反:

$$\mathbf{D}'_i = (\sin \theta_i, -\cos \theta_i)$$

其中 $i=1,2,\dots,n$, A'_i 为波线在第 i 次反射后的振幅强度, θ_i 为波线在第 i 次反射时的入射和反射角。

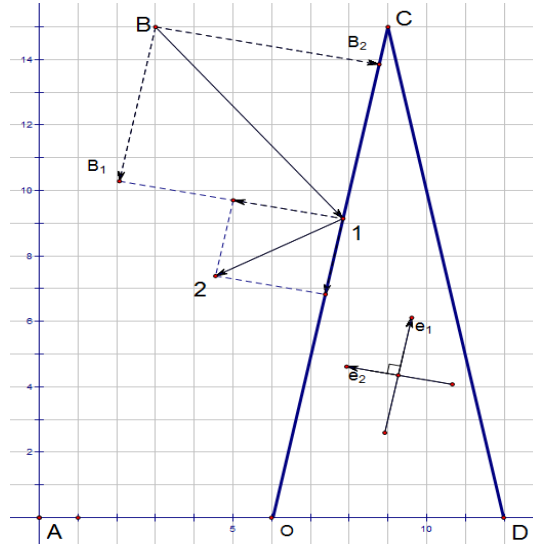


图 2.2 波线在 k_0 坐标系角度向量分解示意图

设 k_0 所在坐标系的基底为 (e_1, e_2) ; k_1 所在坐标系的基底为 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, 易知 k_0 和 k_1 之间存在线性变换, 即

$$K_0 \rightarrow K_1 : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (e_1, e_2) \cdot C$$

$$K_1 \rightarrow K_0 : (e_1, e_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot C^{-1}$$

其中, C 和 C^{-1} 分别是两个线性变换的过渡矩阵, 且 C^{-1} 是 C 的逆矩阵。

由于波线是在 k_0 和 k_1 之间不断反射, 因此通过这两个线性变换的公式就可以得到每次反射前后, 波线的能量和角度信息。

2.1.5 过渡矩阵的求取

k_0 和 k_1 之间是通过旋转得到线性变换的, 因为 C^{-1} 是 C 的逆矩阵, 所以只需要求出 $K_0 \rightarrow K_1$ 的变换的过渡矩阵就可以得到 $K_1 \rightarrow K_0$ 的变换的过渡矩阵。

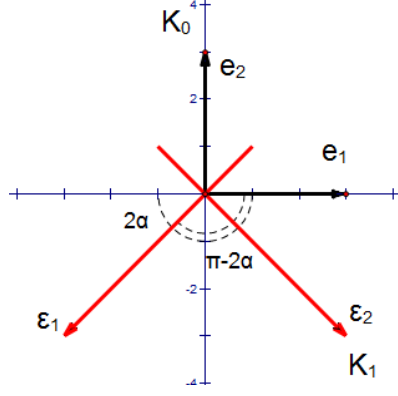


图 2.3 $K_1 \rightarrow K_0$ 坐标变换示意图

如图 2.3, k_0 坐标系旋转 $\pi - 2\alpha$ 得到 k_1 坐标系, 所以可以得到:

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = (e_1, e_2) \cdot C$$

所以得到过渡矩阵 $C = \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$ 。

则 $K_1 \rightarrow K_0$ 的过渡矩阵为:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

2.1.6 二维模型建立

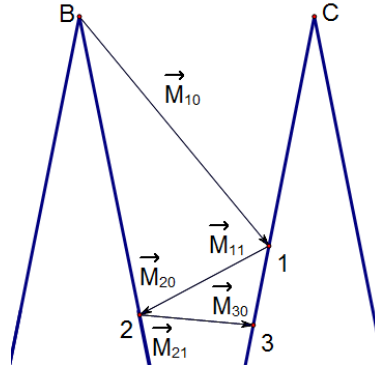


图 2.4 二维模型的变量设定示意图

如图 2.4, 设第 k 次反射点的入射向量为 $\mathbf{M}_{(k)0}$ 和 $\mathbf{D}_{(k)0}$, 反射向量为 $\mathbf{M}_{(k)1}$ 和 $\mathbf{D}_{(k)1}$, 易知 $\mathbf{M}_{(k)1} = \mathbf{M}_{(k+1)0}$ 且 $\mathbf{D}_{(k)1} = \mathbf{D}_{(k+1)0}$, 但从实际意义上, $\mathbf{M}_{(k)1}$ 的坐标所在坐标系是第 k 次反射点所在的内面, $\mathbf{M}_{(k+1)0}$ 的坐标所在坐标系第 $k+1$ 次反射点所在的内面。下面从第一次入射开始进行迭代:

$k=1$ 时, 入射面为 k_0 , 在 k_0 的坐标系下,

$$\mathbf{M}_{10}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(A_{10} \sin \theta_1, A_{10} \cos \theta_1)^T$$

认为：反射率随着入射角增大而减小只是指其中垂直于平面的部分；平行于平面的部分不变。所以可以得到反射回来部分的能量：

$$\mathbf{M}_{11}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(A_{10} \sin \theta_1, -A_{10} \rho \cos \theta_1)^T$$

$$\mathbf{D}_{10}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(\sin \theta_1, \cos \theta_1)^T$$

$$\mathbf{D}_{11}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(\sin \theta_1, -\cos \theta_1)^T$$

$k=2$ 时，入射面为 k_1 ，在 k_1 的坐标系下，

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{20} &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(A_{10} \sin \theta_1, -A_{10} \rho \cos \theta_1)^T \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) C^{-1} \cdot (A_{10} \sin \theta_1, -A_{10} \rho \cos \theta_1)^T \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -A_{10} \sin \theta_1 \cos(2\alpha) + A_{10} \rho \sin(2\alpha) \cos \theta_1 \\ A_{10} \cos \theta_1 \sin(2\alpha) + A_{10} \rho \cos(2\alpha) \sin \theta_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{21} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -A_{10} \sin \theta_1 \cos(2\alpha) + A_{10} \rho \sin(2\alpha) \cos \theta_1 \\ -\rho(A_{10} \cos \theta_1 \sin(2\alpha) + A_{10} \rho \cos(2\alpha) \sin \theta_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{20} &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(\sin \theta_1, -\cos \theta_1)^T \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) C^{-1} \cdot (\sin \theta_1, -\cos \theta_1)^T \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 \sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) \sin \theta_1 \end{bmatrix} \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 - 2\alpha) \\ \cos(\theta_1 - 2\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{21} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 - 2\alpha) \\ -\cos(\theta_1 - 2\alpha) \end{bmatrix}$$

$k=3$ 时，入射面为 k_0 ，在 k_0 的坐标系下，

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{30} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -A_{10} \sin \theta_1 \cos(2\alpha) + A_{10} \rho \sin(2\alpha) \cos \theta_1 \\ -\rho(A_{10} \cos \theta_1 \sin(2\alpha) + A_{10} \rho \cos(2\alpha) \sin \theta_1) \end{bmatrix} \\ &= (e_1, e_2) C \cdot \begin{bmatrix} -A_{10} \sin \theta_1 \cos(2\alpha) + A_{10} \rho \sin(2\alpha) \cos \theta_1 \\ -\rho(A_{10} \cos \theta_1 \sin(2\alpha) + A_{10} \rho \cos(2\alpha) \sin \theta_1) \end{bmatrix} \\ &= (e_1, e_2) \begin{bmatrix} A_{10} \sin \theta_1 \cos^2(2\alpha) - A_{10} \rho \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) \cos \theta_1 \\ -A_{10} \rho \cos \theta_1 \sin^2(2\alpha) - A_{10} \rho^2 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) \sin \theta_1 \\ A_{10} \sin \theta_1 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) - A_{10} \rho \sin^2(2\alpha) \cos \theta_1 \\ + A_{10} \rho \cos \theta_1 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) + A_{10} \rho^2 \cos^2(2\alpha) \sin \theta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{31}=(e_1, e_2) \begin{bmatrix} A_{10} \sin \theta_1 \cos^2(2\alpha) - A_{10} \rho \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) \cos \theta_1 \\ -A_{10} \rho \cos \theta_1 \sin^2(2\alpha) - A_{10} \rho^2 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) \sin \theta_1 \\ -\rho(A_{10} \sin \theta_1 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) - A_{10} \rho \sin^2(2\alpha) \cos \theta_1 \\ + A_{10} \rho \cos \theta_1 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) + A_{10} \rho^2 \cos^2(2\alpha) \sin \theta_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{30} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) (-\sin(\theta_1 - 2\alpha), -\cos(\theta_1 - 2\alpha))^T \\ &= (e_1, e_2) \mathbf{C} \cdot (-\sin(\theta_1 - 2\alpha), -A_{21} \cos(\theta_1 - 2\alpha))^T \\ &= (e_1, e_2) \begin{bmatrix} \sin(\theta_1 - 2\alpha) \cos(2\alpha) - \cos(\theta_1 - 2\alpha) \sin(2\alpha) \\ \sin(\theta_1 - 2\alpha) \sin(2\alpha) + \cos(\theta_1 - 2\alpha) \cos(2\alpha) \end{bmatrix} \\ &= (e_1, e_2) \begin{bmatrix} \sin(\theta_1 - 4\alpha) \\ \cos(\theta_1 - 4\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{31}=(e_1, e_2) \begin{bmatrix} \sin(\theta_1 - 4\alpha) \\ -\cos(\theta_1 - 4\alpha) \end{bmatrix}$$

... ..

最后经过归纳，得到第 k 次出射波线的辐射强度向量的迭代式：

$$\mathbf{M}_{k1} = \begin{cases} (e_1, e_2) \begin{bmatrix} -\cos(2\alpha)A_{(k-1)x} - \rho \sin(2\alpha)A_{(k-1)y} \\ -\sin(2\alpha)A_{(k-1)x} + \rho \cos(2\alpha)A_{(k-1)y} \end{bmatrix} & k \text{ 为奇数} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\cos(2\alpha)A_{(k-1)x} + \rho \sin(2\alpha)A_{(k-1)y} \\ \sin(2\alpha)A_{(k-1)x} + \rho \cos(2\alpha)A_{(k-1)y} \end{bmatrix} & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.3)$$

以及角度向量：

$$\mathbf{D}_{k1} = \begin{cases} (e_1, e_2) \begin{bmatrix} \sin(\theta_1 - 2(k-1)\alpha) \\ -\cos(\theta_1 - 2(k-1)\alpha) \end{bmatrix} & k \text{ 为奇数} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1 - 2(k-1)\alpha) \\ -\cos(\theta_1 - 2(k-1)\alpha) \end{bmatrix} & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.4)$$

其中， θ_1 为第一次入射角。

若已知射向角 θ ，则由公式 (2.2) 得到最终反射次数：

$$n = \left\lceil \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) / \alpha \right\rceil \quad (2.5)$$

得到 n 后，就可以得到刻画最终反射波线的方向和辐射强度的向量：

$$\mathbf{D}_{n1} = \begin{cases} (e_1, e_2) \begin{bmatrix} \sin(\pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha) \\ -\cos(\pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha) \end{bmatrix} & n \text{ 为奇数} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\sin(\pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha) \\ -\cos(\pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha) \end{bmatrix} & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \text{即}$$

$$\theta_i = \pi/2 - \theta - (2i-1)\alpha, i=1,2,\dots,n \quad (2.6)$$

辐射强度的值可以分为垂直于反射面上的分量 A_{i1} 和平行于反射面的分量

A_{i2} 。

$$A_{i1} = A_{i-1}\rho \cdot \cos \theta_i, \quad A_{i2} = A_{i-1} \sin \theta_i, i=1,2,\dots,n$$

$$A_i = A_{i-1} \sqrt{\rho^2 \cdot \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.7)$$

用矩阵表示就是：

$$\mathbf{M}_{k1} = \begin{cases} (e_1, e_2) \begin{bmatrix} -\cos(2\alpha)A_{(k-1)x} - \rho \sin(2\alpha)A_{(k-1)y} \\ -\sin(2\alpha)A_{(k-1)x} + \rho \cos(2\alpha)A_{(k-1)y} \end{bmatrix} & k \text{ 为奇数} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{bmatrix} -\cos(2\alpha)A_{(k-1)x} + \rho \sin(2\alpha)A_{(k-1)y} \\ \sin(2\alpha)A_{(k-1)x} + \rho \cos(2\alpha)A_{(k-1)y} \end{bmatrix} & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.8)$$

所以二维空间下，得到最终结果：

(1) 最终反射次数 n ：

$$(\frac{\pi}{2} - \theta) / \alpha \leq n \leq (\frac{\pi}{2} - \theta) / \alpha + 1, \quad n \text{ 取正整数}$$

$$\text{即 } n = \left\lceil (\frac{\pi}{2} - \theta) / \alpha \right\rceil \text{ (向上取整)}$$

(2) 得到 n 后，设最初的辐射强度 A_0 为 1，则可以得到刻画最终反射波线的方向和辐射强度的向量：

出射角

$$\theta_\gamma = \pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha \quad (2.9)$$

振幅强度

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i-1} \sqrt{\rho^2 \cdot \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i} \\ &= A_0 (\rho^2 \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i)^{0.5} \\ &= \prod_{i=1}^k [\rho^2 + (1-\rho)^2 \sin^2 \theta_i]^{0.5}, \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 三维情况扩展

2.2.1 反射次数

$$\text{反射次数不变，仍然是 } n = \left\lceil (\frac{\pi}{2} - \theta) / \alpha \right\rceil。$$

2.2.2 出射角度

在节 2.1.6 已经得到了二维平面的入射角和出射角的关系，所以只需要得到

波线的空间向量在 zOy 平面的投影与 z 轴的夹角 ω ， ω 相当于二维平面中的入射角 θ_i 。设入射波线的角度向量为 \mathbf{I} ， \mathbf{I} 在 x 轴方向的分量为 $\mathbf{I} \sin \theta \cos \varphi$ ，则 \mathbf{I} 在 zOy 平面上的投影可以得到：

$$\mathbf{I}_{zoy} = \mathbf{I} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \quad (2.11)$$

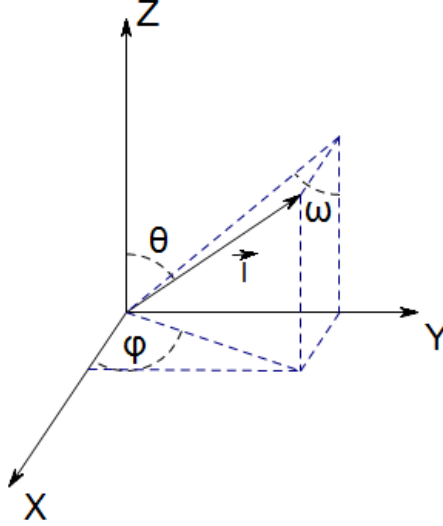


图 2.5 三维平面下入射线角度向量的分解

如图 2.5，可以得到这样的关系式：

$$\mathbf{I}_{zoy} \cdot \sin \omega = \mathbf{I} \sin \theta \sin \varphi \quad (2.12)$$

因此，得到

$$\sin \omega = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}} \quad (2.13)$$

所以在 zOy 平面的入射角 ω 为：

$$\omega = \arcsin \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}} \quad (2.14)$$

再根据公式 (2.9)，得到

$$\begin{aligned} \omega_\gamma &= \pi / 2 - \omega - (2n-1)\alpha \\ &= \pi / 2 - \arcsin \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}} - (2n-1)\alpha \end{aligned} \quad (2.15)$$

再根据公式 (2.13)，可以推导出 $\sin \theta$ 值与 $\sin w$ 的关系：

$$\sin \theta_\gamma = 1 / \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 w_\gamma} + \cos^2 \varphi} \quad (2.16)$$

所以最终得到在三维空间中出射波线的出射角度：

$$\theta_\gamma = \arcsin \frac{\sin \omega_\gamma}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \omega_\gamma}} \quad (2.17)$$

其中, $\omega_\gamma = \pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha$

2.2.3 辐射强度

在三维空间中, 由于 x 轴方向平行于尖劈的两个内面, 所以 x 轴方向的分量与入射波线在反射时造成的能量损耗无关, 而 y 轴和 z 轴方向的分量均与反射时的能量损耗有关。

因题中所述, 设入射波线的辐射强度为 1 单位, 所以 $A_0=1$ 。则可以得到:

$$A_{x0} = \sin \theta \cos \varphi \quad (2.18)$$

$$A_{(zoy)0} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} \quad (2.19)$$

因为在节 2.2.2 中得到了在 zOy 平面的入射角 ω 为:

$$\omega = \arcsin \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}}$$

再根据公式 (2.19), 得到

$$A_{(zoy)i} = A_{(zoy)0} \prod_{i=1}^k [\rho^2 + (1-\rho)^2 \sin^2 \omega_i]^{0.5}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.20)$$

其中, $\sin \omega_i$ 的值可以由公式 (2.13) 得出。

所以最终出射波线的振幅强度为:

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{A_{(zoy)n}^2 + A_{xn}^2} \\ &= \sqrt{A_{(zoy)0}^2 \prod_{i=1}^k [\rho^2 + (1-\rho)^2 \sin^2 \omega_i] + A_{x0}^2} \\ &= \sqrt{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \prod_{i=1}^k [\rho^2 + (1-\rho)^2 \sin^2 \omega_i] + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \end{aligned} \quad (2.21)$$

其中, $\omega_i = \pi/2 - \theta - (2i-1)\alpha$, $i=1,2,\dots,n$

3 问题 2：导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能研究

3.1 解决思路和基本概念

目标模拟器对导引头的视在目标运动从左端开始，以匀角速运动到右端，前后共 4 秒，视在天线中心轴线对准静区中心，中心轴线处的发射功率强度随时间线性增大，结束时比初始时增大了一倍。

因为目标模拟器是圆弧形线阵列，且共有 16 个点，四秒内从左运动到右，每到达一个天线位置时，天线的发射功率增加 $1/15$ 的功率，由于静区吸收的接收的功率与辐射点到静区的轴线距离的平方成反比，同时根据等效重心原理，相当于天线功率保持不变，天线与静区的距离缩短，因为视在目标一匀角速度运动，所以视在目标始终保持在当前天线与静区的连线上。

以静区为坐标原点，静区所在墙面为 X 轴，建立坐标轴如下：

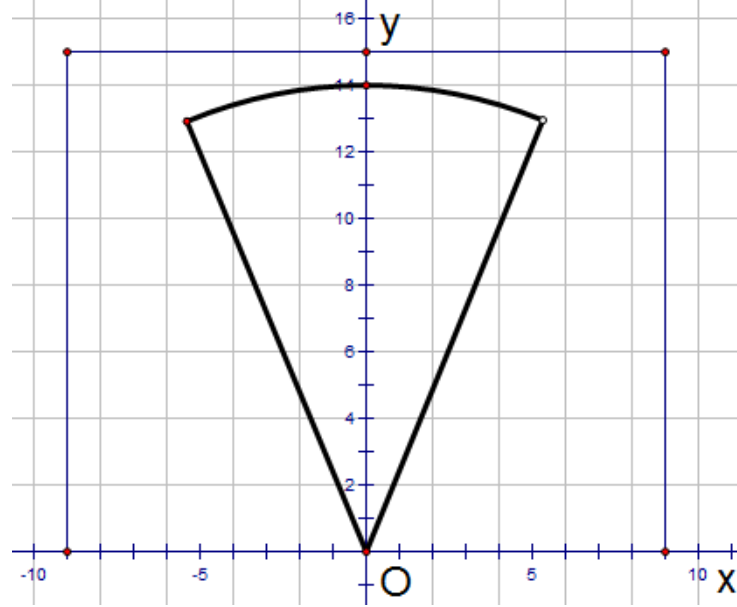


图 3.1 视在天线

根据方程

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}$$

(3.1)

其中 k 的初始值为 $\tan(\frac{5\pi}{8})$

由于相邻天线法线的夹角为 $\frac{\pi}{60}$ ，所以第 i 个天线与原点所成直线的斜率为：

$$k = \tan(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{60}i)$$

(3.2)

由于静区接受的功率和视在天线到静区的距离成反比，故可得到：

$$r = 14 \times \sqrt{\frac{15}{15+i}} \quad (3.3)$$

将 r 和 k 的值带入公式(3.1)中,通过求解可得到视在天线的坐标值^[6],如图 3.2 所示:

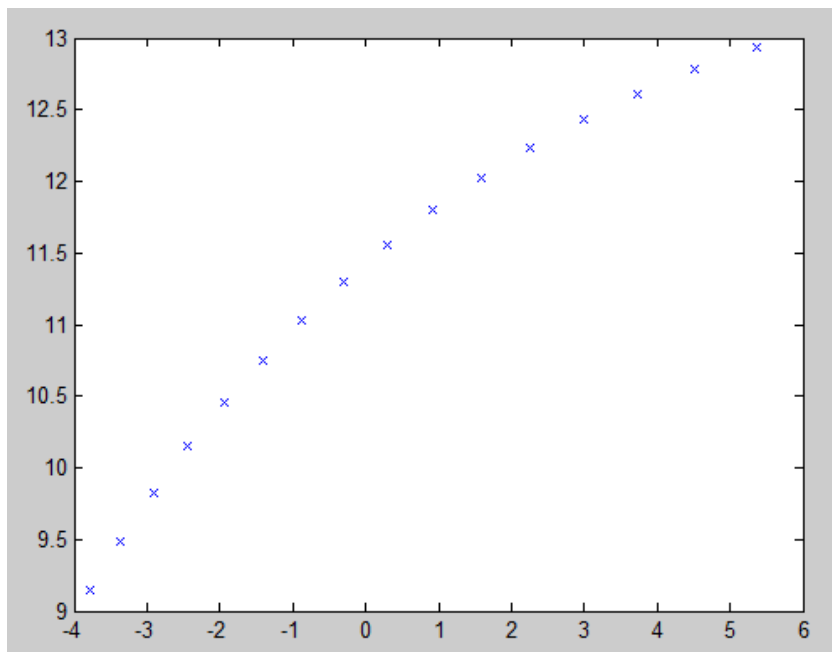


图 3.2 视在天线坐标

3.2 Fresnel 区（菲涅尔区）

反射率电平是指该处所有反射场合成与直射场之比的对数值,一般情况下表示成对数形式。电磁波投射到壁面上,除了反射外,还有散射、绕射和多次反射等形式波束,尖劈之类吸波材料构成的壁面,绕射尤为严重。由推广费马原理知,绕射波束沿最短路程传播,其能量衰减很快,实践证明,如果吸波材料性能良好,分布均匀、连续,并且壁面足够大时,则在空间中,除了一次反射外,其它形式波束很微弱,似乎仅能在壁面附近形成复杂的杂波层,而传播到离壁面较远处的波束,可认为主要是从菲涅尔区(尤其是反射部位周围第一 Fresnel 区)来的反射^[7]。

因为暗室内存在主反射区和次反射区,主反射区是由菲涅尔区决定的。空间菲涅尔区定义为:在自由空间中,接收点和发射点之间的距离为 d ,则以发射点和接收点为焦点,常数为 $d + n\lambda/2$ ($n=1,2,\dots$) 的椭球面所包围的区域分别称为第一、第二...Fresnel 区。工程上常把第一菲涅尔区看作是对电波传播起主要作用的空间区域,称为传播主区。反射面上的菲涅尔区定义为以发射点相对于反射面的镜像点和接收点为焦点的空间菲涅尔区与反射面相交形成的一系列椭圆。实际上,从物理意义分析,菲涅尔区就是一系列连续相位区,也就是说,在某一菲涅尔区内,反射场的相位最大相差 π 弧度。

由于第一 Fresnel 区的存在,忽略次反射区和多次反射的功率,只计算静区接收主反射区的一次反射功率。

计算主反射区:

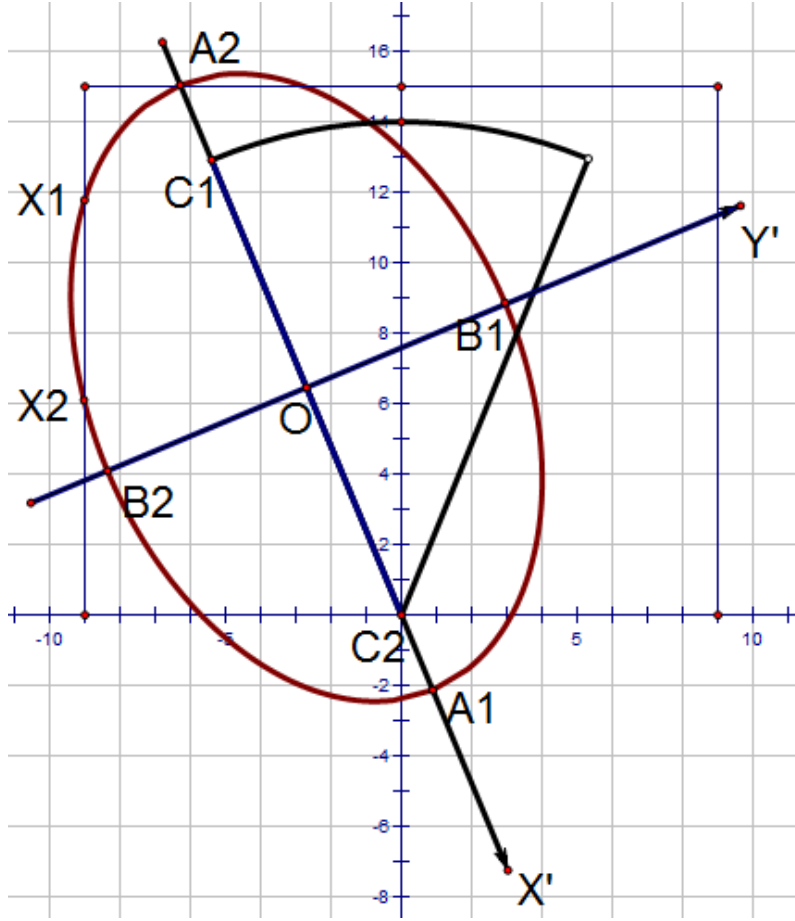


图 3.3 主反射区示意图

根据 Fresnel 第一反射区的特点，以“视在天线”和静区的连线作为新的 X' 轴，以视在天线和静区的连线重点作为原点，垂直于 X' 轴的方向作为新的 Y' 轴。并以视在天线和静区作为椭球的焦点做椭球体，椭球体的短轴长度为：

$$b = 8.657 \sqrt{\frac{d}{f}} \quad (3.4)$$

其中 d 为椭球焦距，即为视在目标到静区的距离 R ， f 为频率，为了便于本题计算同时满足微波段的频率要求，设 $b=c=8$ ；则椭球体的方程表示为

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.5)$$

原点处的椭圆方程为 $\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 同时交与左面墙体于 $X1$ 、 $X2$ 点，即

为第一菲涅尔区的长轴端点，根据椭圆的对称性， $X1$ 点与 $X2$ 点连线的中点为第一 Fresnel 区椭圆的中心点，将其回带到椭球的方程式中，即可求得 Fresnel 区短轴的定点。由于只考虑一次反射，所以在视在天线后方的 Fresnel 区和，静区所在墙面上的 Fresnel 区均忽略不计。

通过此种方法，同时可求得 Fresnel 椭球与上下两面墙体所形成的第一反射区。由于视在天线即椭球的一个焦点随着时间不断变化，坐标轴也随之不断变化，通过 Matlab 的联合求解，可解得 16 个视在天线分别所形成 Fresnel 区的范围。其中与左右墙体相交的分别只有 1-5，11-16 这 10 个视在天线点。其范围取值如下表：

表 3.1 与左右墙体相交的 Fresnel 区范围

No.	R	x_l	y_l	x_2	y_2	θ_l	θ_2
1	14	10.0081	-2.6966	-2.3271	-7.8060	$\pi/2$	0.2218π
2	13.5554	9.1492	-3.9076	-1.9947	-7.8539	$\pi/2$	0.2324π
3	13.1507	8.0164	-5.0643	-1.5788	-7.9065	$\pi/2$	0.2450π
4	12.7802	6.5494	-6.1492	-1.0002	-7.9617	$\pi/2$	0.2618π
5	12.4393	4.5068	-7.1652	0.0028	-8	$\pi/2$	0.2896π
11	10.6338	2.8519	7.6398	1.3071	7.9256	0.4007π	0.3509π
12	10.4350	5.0484	6.7911	0.0131	8	0.4921π	0.3164π
13	10.2470	6.2666	6.0127	-0.4166	7.9923	$\pi/2$	0.3071π
14	10.0687	7.1494	5.2331	-0.6160	7.9830	$\pi/2$	0.3040π
15	9.8995	7.8141	4.4546	-0.6929	7.9783	$\pi/2$	0.3041π

第一菲 Fresnel 区内面积为 ds 的小块区域接受的辐射照度为

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I_0}{r^2} \cos \theta \quad (3.6)$$

其中 $I_0 = I_N \cos i$ ，即：

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I_N \cos i}{r^2} \cos \theta \quad (3.7)$$

其中 i 为余弦辐射体到 ds 的高低角， θ 为 ds 的法线方向与辐射原点立体角的夹角。

$$d\Phi = \frac{I_N \cos i}{r^2} \cos \theta ds \quad (3.8)$$

因为第一反射区为椭圆，则 $s = \pi ab$ ， $d\Phi = \frac{I_N \cos i}{r^2} \cos \theta \pi ab$ ，即

$$\Phi = \int_{i_2}^{i_1} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\pi ab I_N \cos i}{r^2} \cos \theta d\theta di \quad (3.9)$$

为 Fresnel 区所得到的辐射通量。

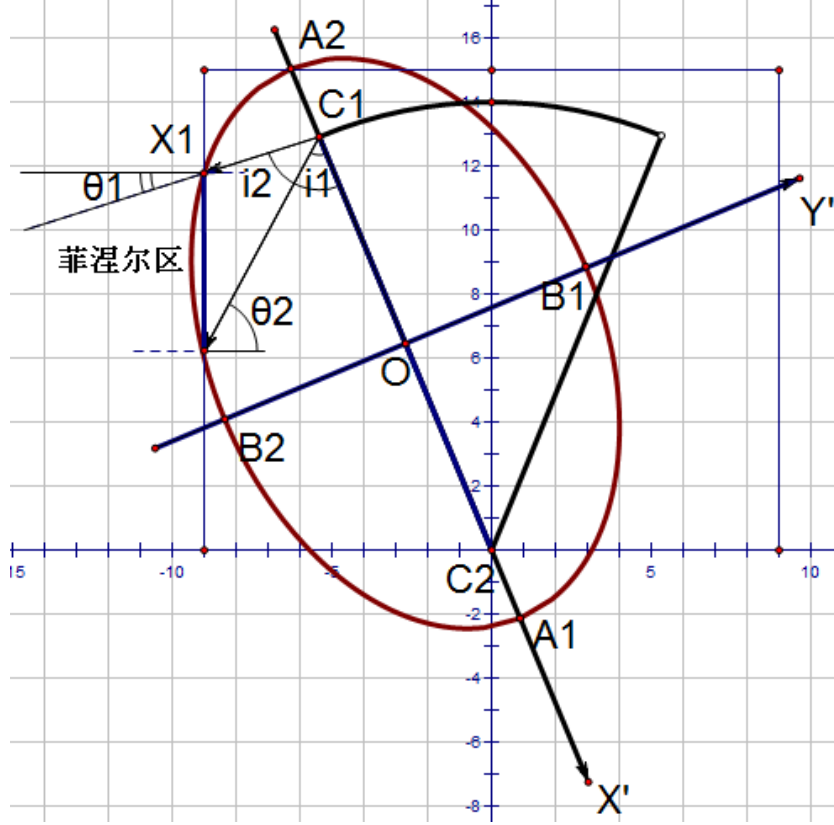


图 3.4 Fresnel 区积分示意图

将表 3.1 带入上式即可得到各个 Fresnel 区的辐射通量，根据辐射出度的定义可得各个 Fresnel 区的辐射出度为 $M = \rho \Phi$ 其中 ρ 为 Fresnel 区所在平面的反射率。

静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比

$$\gamma = \frac{\sum \rho \int_{i_2}^{i_1} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\pi ab I_N \cos i}{r^2} \cos \theta d\theta di}{I_N} = \sum \rho \int_{i_2}^{i_1} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\pi ab \cos i}{r^2} \cos \theta d\theta di \quad (3.10)$$

3.3 结果验证

将表 3.1 和表 3.2 的数据代入公式 (3.10) 中，利用 Matlab 软件进行计算得到最终结果。

表 3.2 与上下墙体相交的菲涅尔区范围

No.	R	x	y	z
1	14	± 5.1463	$\pm \sqrt{15}$	± 7
2	13.5554	± 5.0761	$\pm \sqrt{15}$	± 7
3	13.1507	± 5.0133	$\pm \sqrt{15}$	± 7
4	12.7802	± 4.9568	$\pm \sqrt{15}$	± 7
5	12.4393	± 4.9058	$\pm \sqrt{15}$	± 7
6	12.1244	± 4.8593	$\pm \sqrt{15}$	± 7
7	11.8322	± 4.8170	$\pm \sqrt{15}$	± 7
8	11.5601	± 4.7781	$\pm \sqrt{15}$	± 7
9	11.3060	± 4.7423	$\pm \sqrt{15}$	± 7
10	11.06880	± 4.7093	$\pm \sqrt{15}$	± 7
11	10.8444	± 4.6787	$\pm \sqrt{15}$	± 7
12	10.6338	± 4.6503	$\pm \sqrt{15}$	± 7
13	10.4350	± 4.6239	$\pm \sqrt{15}$	± 7
14	10.2470	± 4.5992	$\pm \sqrt{15}$	± 7
15	10.0687	± 4.5760	$\pm \sqrt{15}$	± 7
16	9.8995	± 4.5544	$\pm \sqrt{15}$	± 7

当 $\rho = 0.50$ 时, $\gamma_{(\rho=0.50)\min} = 0.0673$

当 $\rho = 0.05$ 时, $\gamma_{(\rho=0.05)\min} = 0.0014$

γ 最小值的取值方位是 AB 弧线中点, 因此, 根据 $\gamma = 0.03$

得出实验结论。

3.4 实验结论

3.4.1 问题一结论

反射次数:

$$n = \left\lceil \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) / \alpha \right\rceil$$

反射波线方向:

$$\theta_\gamma = \arcsin \frac{\sin \omega_\gamma}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \omega_\gamma}}$$

其中, $\omega_\gamma = \pi/2 - \theta - (2n-1)\alpha$

反射波的辐射强度:

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{A_{(zoy)n}^2 + A_{xn}^2} \\ &= \sqrt{A_{(zoy)0}^2 \prod_{i=1}^k [\rho^2 + (1-\rho)^2 \sin^2 \omega_i] + A_{x0}^2} \\ &= \sqrt{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \prod_{i=1}^k [\rho^2 + (1-\rho)^2 \sin^2 \omega_i] + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

其中, $\omega_i = \pi/2 - \theta - (2i-1)\alpha$, $i = 1, 2, \dots, n$

3.4.2 问题二结论

根据提供的数据, 通过对模型的分析与数值计算, 判断平板材料 $\rho = 0.50$ 时的微波暗室不能满足仿真技术要求, 在此弹目相对运动过程中, 当“视在天线”的位置位于圆弧形的中心时 γ 值最小。

若暗室改为铺设尖劈形吸波材料, 则根据提供的数据, 通过对模型的分析与数值计算, 判断这样的微波暗室能够满足仿真技术的要求, 同样当“视在天线”的位置位于圆弧形的中心时 γ 值最小。

4. 模型评价与推广

本文所建立的模型的优点是: 在分析了题意的基础上, 运用我们所学的数学及相关知识建立了合理的数学模型, 文中的模型都是自行推导建立的, 很好的解决了文中所提的问题; 在建模过程中, 运用了 Matlab 进行编程计算, 所使用的数据具有一定的可靠性。

同时, 问题二采用了化无限为有限的思想, 大大减小了运算的复杂度。

本文所建立的模型也有许多的缺点: 在建模的过程中, 对许多的限制条件及过程进行了简化, 使得模型的精确性降低。

5 参考文献

- [1] 李华民 暗室的仿真设计和测试 北京邮电大学硕士研究生学位论文, 2006.
- [2] 刘顺华, 郭辉进 电磁屏蔽与吸波材料. 功能科学与器件学报 8(3), 2002.
- [3] 苏海龙 无回波暗室的设计 国家机械委北方设计研究院 43-48, 1990.
- [4] 暗室用吸波材料阻燃与吸波性能的研究 杨玮玮 大连理工大学, 2007.
- [5] 刘嘉慧 长方体微波暗室内静区大小的设计 沈阳工业大学, 2003.
- [6] 薛定宇等 高等应用数学的 Matlab 求解 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 王泗宏等 基于墙面反射模型进行暗室性能分析的新方法 飞行器测控学报, 25(5): 51-54, 2006.