

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯”
全国研究生数学建模竞赛

学 校	东南大学
参赛队号	10286020
队员姓名	1.陈源源
	2.游检卫
	3.王旭阳

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 有杆抽油系统的数学建模及诊断

摘 要:

本文以有杆抽油系统为对象, 分别对光杆悬点运动规律, 泵功图 Gibbs 模型计算, 泵功图实际应用和 Gibbs 模型修正进行了详细地推导, 研究和实现, 并相应地得出了一些明确的重要结论和结果。

问题一: 根据有杆抽油机四连杆机构的结构关系和运动方程特点, 用图解法分析建立后臂摆动方程, 由该方程得出了前、后臂摆角的变化规律及悬点运动的位移、速度、加速度的计算模型, 从而给出了求悬点运动参数精确解的一种计算方法。分析得出, 悬点的上、下死点位置不是常规认为的 180° 和 360° 曲柄转角, 通过计算模型的初始旋转角, 确定系统结构的系数范围优化所建立的模型。通过计算悬点运动参数, 并将仿真数据与实际数据对比, 分析出在运动过程中悬点速度和加速度方向和大小都在变化, 并且空载时悬点位移的要高于有负载时悬点位移。

问题二: 结合参考文献建立了泵功图的 Gibbs 模型, 详细推导和讨论了悬点示功图转化为泵功图的过程, 明确的给出了原始数据的处理方法, 边界条件和初始条件的定义和物理意义, 并用 Matlab 编程语言对模型进行了实现, 绘制了完整的程序设计流程图。最后利用题目附件提供的油井参数和悬点示功数据, 分别计算和绘制出两口油井的悬点示功图和泵功图, 并对结果分别在数学和物理层面上进行了分析, 得到两个主要结论: 数学上由于傅里叶级数的有限截断会对高频分量进行滤波, 泵功图曲线相对于悬点示功图会更为光滑, 物理上由于抽油杆受摩擦阻力的影响, 泵功图相对于悬点示功图会整体向左下方产生一定距离的平移。

问题三: 对于第一小问, 结合问题二获得的泵功图, 建立了两个不同的模型。

模型一是通过泵功图计算出有效冲程,利用有效冲程和题目附件数据估算出两口油井的日产油量,其中有效冲程的确定是通过分析固定阀和游动阀在一个冲程周期内的打开和关闭情况来确定。模型二是通过能量守恒原理,根据计算采油机械的做功与抽汲过程克服摩擦力做功和对混合液体做功总和相等构建模型,同样利用编程实现计算出两个不同油井的日产量。对于第二小问,通过对标准泵功图和实际泵功图在图形面积和图形曲率的情况,建立了判别泵功图是否充气的模型,利用该模型判断了不同阈值下两口井是否充气的可能性,一级杆油井有气体的可能性比较小,而三级杆油井有气体的可能性比较大。

问题四:针对阻尼系数的计算问题,论文从方程本身和原始数据出发,结合题目附件 1,2 的泵深等数据,利用摩擦功的计算来确定阻尼系数。在实现过程中,对阻尼系数 c 的计算进行了详细的理论推导,获得了最终的计算表达式。此外,利用本模型对问题二重新计算,计算结果的比较表明,基于本模型的计算结果相对原始模型,能更好的保持原始数据的荷载差,更贴合实际物理意义,更能完整的反应实际情况。

关键字: 有杆抽油,图解法,有效冲程, Gibbs, 示功图, 泵功图, 能量守恒, 摩擦功, 阻尼系数

目录

一、	问题重述.....	3
二、	问题假设.....	4
三、	符号说明.....	5
四、	问题一：光杆悬点运动规律	5
4.1	问题分析	5
4.2	模型建立及推导	6
4.2.1	悬点运动参数方程.....	6
4.2.2	悬点运动速度.....	7
4.2.3	悬点运动加速度.....	8
4.2.4	模型初始条件.....	8
4.2.5	阈值范围及初始条件	8
4.2.6	模型验证及误差分析	10
4.3	结论.....	12
五、	问题二：泵功图计算.....	12
5.1	Gibbs 模型的基本思想	12
5.2	Gibbs 波动方程的推导	12
5.3	Gibbs 波动方程的求解	14
5.3.1	一级杆 Gibbs 波动方程的求解	14
5.3.2	多级杆 Gibbs 波动方程的求解	16
5.4	模型详细实现过程.....	17
5.4.1	原始数据的处理.....	17
5.4.2	边界条件	18
5.4.3	初始条件	18
5.4.4	核心计算步骤.....	18
5.4.5	程序设计流程图.....	20
5.5	模型的验证	21
5.6	一级杆油井的模型验证.....	21
5.7	三级杆油井的模型验证.....	22

5.8 小结.....	22
六、 问题三：泵功图的应用.....	23
6.1 背景分析与假设	23
6.2 问题一有效冲程法模型.....	23
6.2.1 模型的建立与推导.....	23
6.2.2 模型的验证	27
6.2.3 产量计算	31
6.3 问题一有效功率求解法模型.....	32
6.3.1 模型的建立与推导.....	32
6.3.2 模型的验证	36
6.3.3 产量计算	36
6.4 问题二模型.....	36
6.4.1 模型的推导	36
6.4.2 模型的建立	37
6.4.5 模型使用	37
七、 问题四：Gibbs 模型深入研究.....	40
7.1 问题二.....	40
7.1.1 基于摩擦功的阻尼系数模型建立.....	40
7.1.2 模型求解	43
八、 模型评价.....	44
九、 参考文献.....	45

一、问题重述

目前，开采原油广泛使用的是有杆抽油系统。电机旋转运动转化为抽油杆上下往返周期运动，带动设置在杆下端的泵的两个阀的相继开闭，从而将地下上千米深处蕴藏的原油抽到地面上来。

在一个冲程期间，仪器以一系列固定的时间间隔测得悬点处的一系列位移数据和荷载数据，据此建立悬点的示功图称为悬点示功图。因为受到诸多因素的影响，在同一时刻，悬点处的荷载与柱塞的受力以及悬点、柱塞处的相对位移都不相同，因此悬点示功图与泵功图是不同的。工程上一般根据示功图形状与理论示功图进行对比来判断抽油机工作状态。通过悬点示功图可以初步诊断该井的工作状况，如产量、气体影响、等。要精确诊断油井的工作状况，需要采用泵功图。通过数学建模，把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图，并最终确定泵功图。

问题一：光杆悬点运动规律

电机旋转运动通过四连杆机构转变为抽油杆的垂直运动。悬点下只挂光杆。根据已给的四连杆各段尺寸，利用附件参数，求出悬点的一个冲程的运动规律：位移函数、速度函数、加速度函数。并与有荷载的附件悬点位移数据进行比较。

问题二：泵功图计算

使用 Gibbs 模型，给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法；根据附件 1、3 油井参数和悬点示功数据，分别计算这两口油井的泵功图数据，并绘制出两油井的悬点示功图和泵功图。

问题三：泵功图的应用

1) 建立 2 个不同的由泵功图估计油井产量的模型，至少一个要利用“有效冲程”；并利用附件数据估算两口油井一天（24 小时）的产液量。

2) 当泵中有气体，导致泵没充满。建立模型或算法，自动判别某泵功图数据是否属于泵内有气体的情况。并对附件对应的泵功图进行计算机诊断是否属于泵内充气这种情况。

问题四：深入研究

1) 对 Gibbs 模型进行原理分析，发现它的不足。在合理的假设下，重新建立抽油系统模型或对现有模型进行改进；并给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法；利用附件数据重新进行计算；对计算结果与问题二的计算结果进行比较，分析模型的优缺点。

2) Gibbs 模型在数学上可简化为“波动方程”：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t}$$
，其中 a 为

已知常数， c 称为阻尼系数，鉴于大多数的阻尼系数公式是作了诸多假设后推出的，并不能完整地反应实际情况。从方程本身和某些数据出发用数学方法估计参数 c ，详细给出计算 c 的理论推导过程并尽可能求出 c 。

二、 问题假设

基本假设:

- (1) 抽油机个连接件为长度、材质均匀的连杆
- (2) 摩擦阻力忽略不计, 运动过程连接杆件不发生形变
- (3) 假设驴头外轮廓线为部分圆弧
- (4) 电机匀速运动
- (5) 抽油管的长度变化
- (6) 上下冲程时间相等

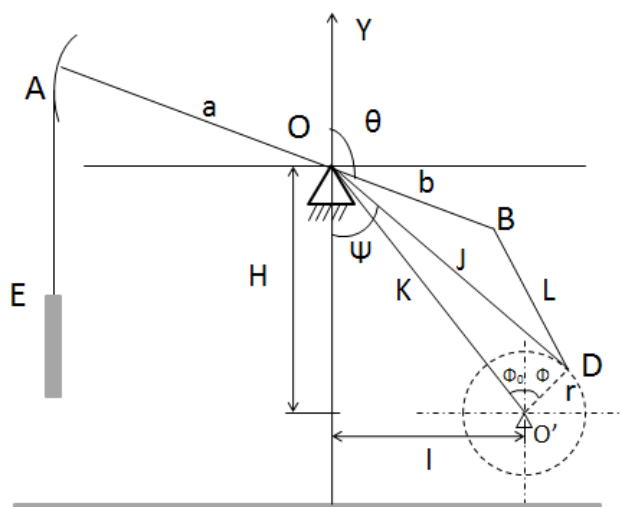
问题一、二假设:

- (1) 存在各级杆柱间的振动影响
- (2) 不发生传递时的波振动
- (3) 杆柱为长杆柱
- (4) 液体无气泡
- (5) 抽油机的电机是相对低转差
- (6) 抽油装置是平衡的

问题三、四假设:

- (1) 上冲程与下冲程所用时间和位移相同
- (2) 每个完整的冲程过程所用时间是相同的
- (3) 由于油田含水率很高, 当没气体存在时, 冲程过程中混合液体不会因为压缩或膨胀产生形变
- (4) 冲程过程连续
- (5) 不存在下冲程回流现象

三、符号说明



a	前臂 AO 长度
b	后臂 BO 长度
r	曲柄半径
J	支点与曲柄滑块 D 间距离
L	连杆 BD 长度
K	支点 O 与曲柄圆心 O'间距离
H	OO'垂直距离
I	OO'水平距离
θ	任意时刻后臂摆角
Ψ	任意时刻 J 和-Y 方向夹角
Φ	曲柄转角
Φ_0	后臂初始摆角度

四、 问题一：光杆悬点运动规律

4.1 问题分析

有杆式抽油机由曲柄、连杆、后臂、前臂、驴头、悬点、光杆这些基本结构组成，是的四连杆机构。其工作特点是：游梁架在支架上，分为前臂和后臂两部分，驴头和曲柄连杆分别位于游梁的两端，曲柄轴线中心位于后臂下方，上下冲程时间相等。工作中，电机将电能转化为旋转运动，利用四连杆机构将旋转运动转变为直线往复运动，通过驴头，连杆，曲柄，抽油杆带动井泵抽油。

根基于本题给出的条件，我们选择图解法建立模型。

据有杆抽油机的工作原理和几何特性,列出悬点处的位移方程,再将方程对 t 进行求导,分别得到悬点处的速度,加速度随曲柄转角的变化规律,进而建立出有杆抽油机的几何模型。

4.2 模型建立及推导

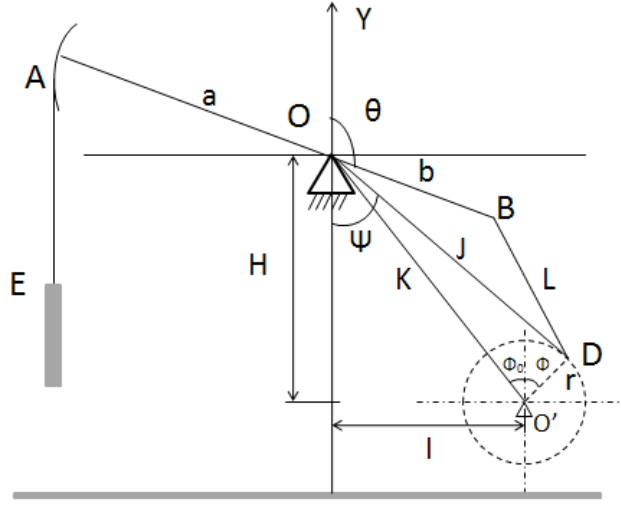


图 4.1 有杆抽油系统结构图

抽油杆结构如图 4.1 所示。曲柄由 12 点钟位置开始沿顺时针方向做匀速圆周运动，在 $\triangle OBD$ 中，根据余弦定理

$$L^2 = b^2 + J^2 - 2bJ \cos[\pi - (\theta + \psi)] \quad (4-2-1)$$

$$\text{其中 } J = \sqrt{(I + r \sin \phi)^2 + (H - G - r \cos \phi)^2} \quad (4-2-2)$$

$$\psi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{I + r \sin \phi}{H - G - r \cos \phi} \right) \quad (4-2-3)$$

式中， $\phi = \omega t$ 。由式 (4-2-1) 得

$$\theta = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + J^2 - L^2}{2bJ} \right) - \psi \quad (4-2-4)$$

式 4-2-4 为后臂摆动方程， J 和 ψ 都是只为 ϕ 的函数，因此 θ 也只为 ϕ 函数。

4.2.1 悬点运动参数方程

位移对于任意时刻，后臂的角位移 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \quad (4-2-5)$$

式中， θ_0 为后臂的初始摆角，即 $t=0$ 时刻，后臂和 Y 方向夹角，可令 $t=0$ 由式 (4-2-4) 求得。后臂绕指点 O 摆动时，因其前、后臂角位移相等，故任意时刻悬点位移

$$S_A = \alpha[\theta - \theta_0] \quad (4-2-6)$$

式(4-2-6)即为任意时刻悬点位移表达式。由于对某一给定型号的抽油机 θ_0 是一常数，因此 S_A 只是 ϕ 的函数，给定 ϕ 值，便可以计算出悬点位移 S_A 。

4.2.2 悬点运动速度

将式（4-2-4）两边同时对时间 t 求导数，得到后臂摆动的角速度 θ'

$$\theta' = \frac{J + \cos(\theta + \psi)}{bJ \sin(\theta + \psi)} J' - \psi' \quad (4-2-7)$$

式中， J' 和 ψ' 分别为 J 和 ψ 对应的时间导数，分别由式（4-2-2）（4-2-3）求得为

$$J' = \omega r \sin(\theta + \psi) \quad (4-2-8)$$

$$\psi' = \frac{\omega r}{J} \cos(\theta + \psi) \quad (4-2-9)$$

(4-2-8)(4-2-9)代入到（4-2-7）中，整理得

$$\theta' = \frac{\omega r [J \sin(\phi + \psi) + b \sin(\phi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (4-2-10)$$

由几何关系可得：

$$J \sin(\theta + \psi) = K \sin(\phi + \phi_0) \quad (4-2-11)$$

其中， K 与 ϕ_0 的计算公式为

$$K = \sqrt{I^2 + (H - G)^2}, \quad \phi_0 = \tan^{-1} \frac{I}{H - G}$$

（4-2-11）代入（4-2-10）得：

$$\theta' = \frac{\omega r [K \sin(\phi + \phi_0) + b \sin(\phi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (4-2-12)$$

后臂绕支点 摆动时因其前、后臂的角速度相等，故任意时刻悬点的速度 V_A 为

$$V_A = a\theta' = \frac{a\omega r [K \sin(\phi_0 + \phi) + b \sin(\phi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (4-2-13)$$

4.2.3 悬点运动加速度

将 4-2-12 式两边同时对时间 t 求导数，整理得任意时刻后臂摆动的角加速度 θ'' 为：

$$\theta'' = \frac{\omega^2 r [K \cos(\phi + \phi_0) + b \cos(\phi - \theta)] - 2b\omega r \theta' \cos(\phi - \theta) - \theta'^2 \cos(\theta + \psi)}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (4-2-14)$$

后臂绕 O 摆动时，因其前、后臂的角加速度相等，故任意时刻悬点加速度 W_A 为：

$$W_A = a\theta'' = a \frac{\omega^2 r [K \cos(\phi + \phi_0) + b \cos(\phi - \theta)] - 2b\omega r \theta' \cos(\phi + \theta) - \theta'^2 \cos(\theta + \psi)}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (4-2-15)$$

式 (4-2-5) 式 (4-2-12) 和式 (4-2-14) 反映了后臂摆角的变化规律，式 (4-2-6)，(4-2-13) 和式 (4-2-15) 是悬点运动的位移、速度和加速度计算公式。对于一定型号的抽油机，其几何尺寸 (a, b, L, H, G, r) 已知的，给定曲柄旋转的角速度 ω 或转速，应用以上公式便可计算各运动参数。

4.2.4 模型初始条件

表 1. 抽油机基本参数

a(mm)	b(mm)	L(mm)	r(mm)	n(1/min)
4315	2495	3675	950	7.6

基于题设给定的实际有杆抽油系统参数（表 1），利用上述建立模型，根据初始时刻 $\Phi = 0$ ，代入公式计算得到初始角度 $\Phi_0 = 119^\circ$ 。因此公式为(4-2-6)可以表示： $S_A = a[\theta - 120^\circ]$ 。

4.2.5 阈值范围及初始条件

1. O'点与 O 点相对位置

根据题设条件建立的抽油杆三个时刻运动模型（图 4.2）：

- (1) 取 OB 水平线，曲柄滑块在顶点 D，后臂位于 B 点；
- (2) 曲柄滑块做顺时针匀速运动，滑块到任意 D' 位置，此刻后臂位于 OB''；
- (3) 曲柄滑块处于最底端，此刻后臂与连杆间张角最大 ($< 180^\circ$)，O 点到滑竿尾端的距离等于 OD'' 也达到最大，经过 D'' 点后曲柄滑块回到 D 点。

为保证连杆的正常运动，D'' 点处， $b + L \geq OD''$ ，所以 $b + L = OD''$ 为保证抽油杆正常工作的临界情况。建立等式方程组：

$$BM^2 + MD^2 = L^2$$

$$(BM + OB)^2 + (MD + 2r)^2 = (b + L)^2$$

根据题设条件，求得 $BM=3671.7\text{mm}$, $ML=155.4611\text{mm}$ 。所以为保证连杆系统的正常工作， $I \leq 2614.4611$ ， $H \leq 4621.7$ 。

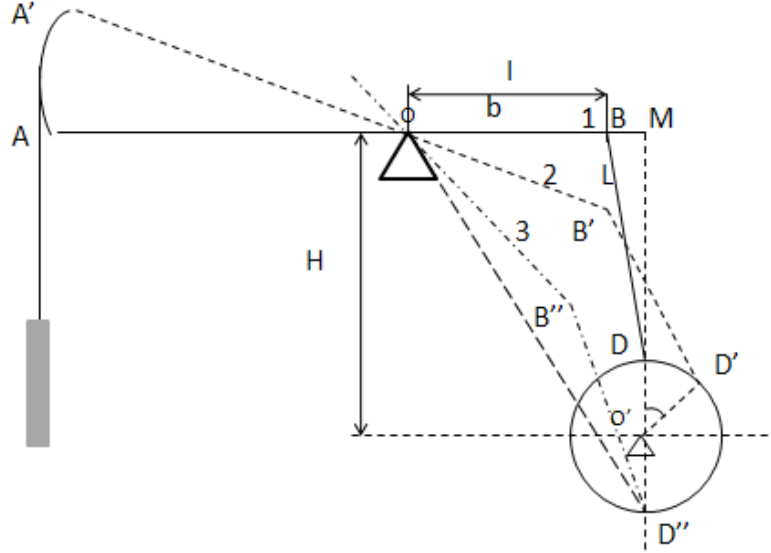


图 4.2 后壁水平时有杆抽油系统结构图

2. O'与 B 点相对位置

a. 当 O'位于 B 点正下方

部分资料中提到 O'位于 B 点正下方，对本模型进行分析。

$$OO'^2 = OM^2 + MD^2 = 5255\text{mm}^2$$

$$\text{此时 } OD'' = OD'^2 = OM^2 + MD'^2 = 6107.83\text{mm}^2 > b+L$$

此时 OD'' 的距离大于曲杆和后臂之和，故不成立。

所以，对于本有杆抽油系统，O'位于 B 点正下方并不符合。

b. O'点位于 B 右下方

$$OD'^2 = OB^2 + BD'^2 - 2OB \cdot BD' \cdot \cos \angle OBD' \leq OB^2 + BD'^2 = 6170^2\text{mm}^2$$

所以，得到 $BM \leq 1664.54715\text{mm}$ ，即 $I \leq 4159.54715\text{mm}$

c. O'点位于 B 左下方

此时系统可以正常工作，模型分析方法和上述类似，当时工程应用中不是最优设计，实际应用性不高，故不予讨论。

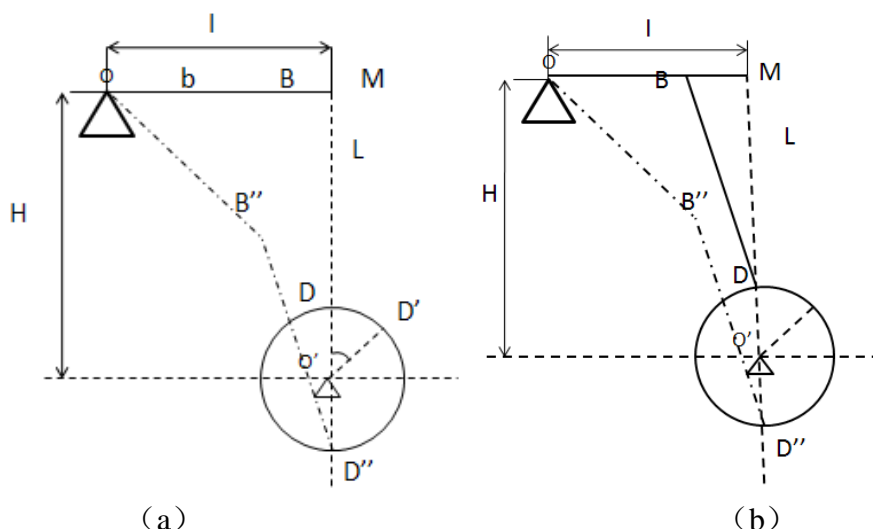


图 4.3 (a) O' 位于 B 点正下方有杆抽油系统结构图
(b) O' 位于 B 点右下方有杆抽油系统结构图

4.2.6 模型验证及误差分析

用 Matlab 实现推导的算法，建立有杆抽油系统模型，图 4.4 表示悬点运动的位移、速度、加速度模拟仿真曲线。从图中可知：

1. 悬点运动过程：

示功图 4.4 (a) 是对抽油杆选点出荷载变化与位移变化规律及相互关系的直观描述。用 Matlab 计算得到模型的悬点示功图。 A 是悬点运动的下死点， C 是悬点运动的上死点，从 A 到 B 再到 C 点的过程，是悬点的上行；从 C 到 D 再到 A 的过程是悬点的下行程。由 A 到 B ，油管卸载而缩短，抽油杆加载拉长，所以 AB 段悬点位移变化较小；由 B 到 C 过程中，油管与抽油杆的静态形变完毕，柱塞开始相对于泵向上移动，位移增大。由 C 到 D 过程中，抽油杆卸载而缩短，油管加载拉长，悬点位移变化较小；由 D 到 A 过程中，油管与抽油杆的静态变形完毕，柱塞开始相对于泵筒向下移动。

2. 仿真结果分析

通过对比发现，悬点位移实际数据的峰值要高于模型仿真得出的结果，可能有如下原因：

- (1) 实际测量数据不够全面，未测量到最高点，导致测量误差。
- (2) 仿真过程中系统为空载处理，而实际测试中，油泵中有油作为负载，由于负载的存在影响到曲柄的转速。

3. 死点位置

悬点速度曲线如图 4.4 (b)，从图中可以看出悬点速度零点不在二分之一周期和一个周期末，即速度零点不在 180° 和 360° 曲柄转角度。由此可知悬点下死点不是 0° 曲柄转角，反过来证明了后臂初始摆角 θ_0 不为零。

4. 加速分析

悬点加速度曲线如图 4.4 (c)，表示有杆抽油机的一个工作冲程中，下冲程的前半部分为减速运动，后半部分加速度为负。为加速运动，加速度为正，上冲程的前半为加速运动，加速度为正，后半部分为减速运动，加速度为负。

所以悬点不仅速度和加速度的方向在不断发生变化，而且大小也在不断改变。

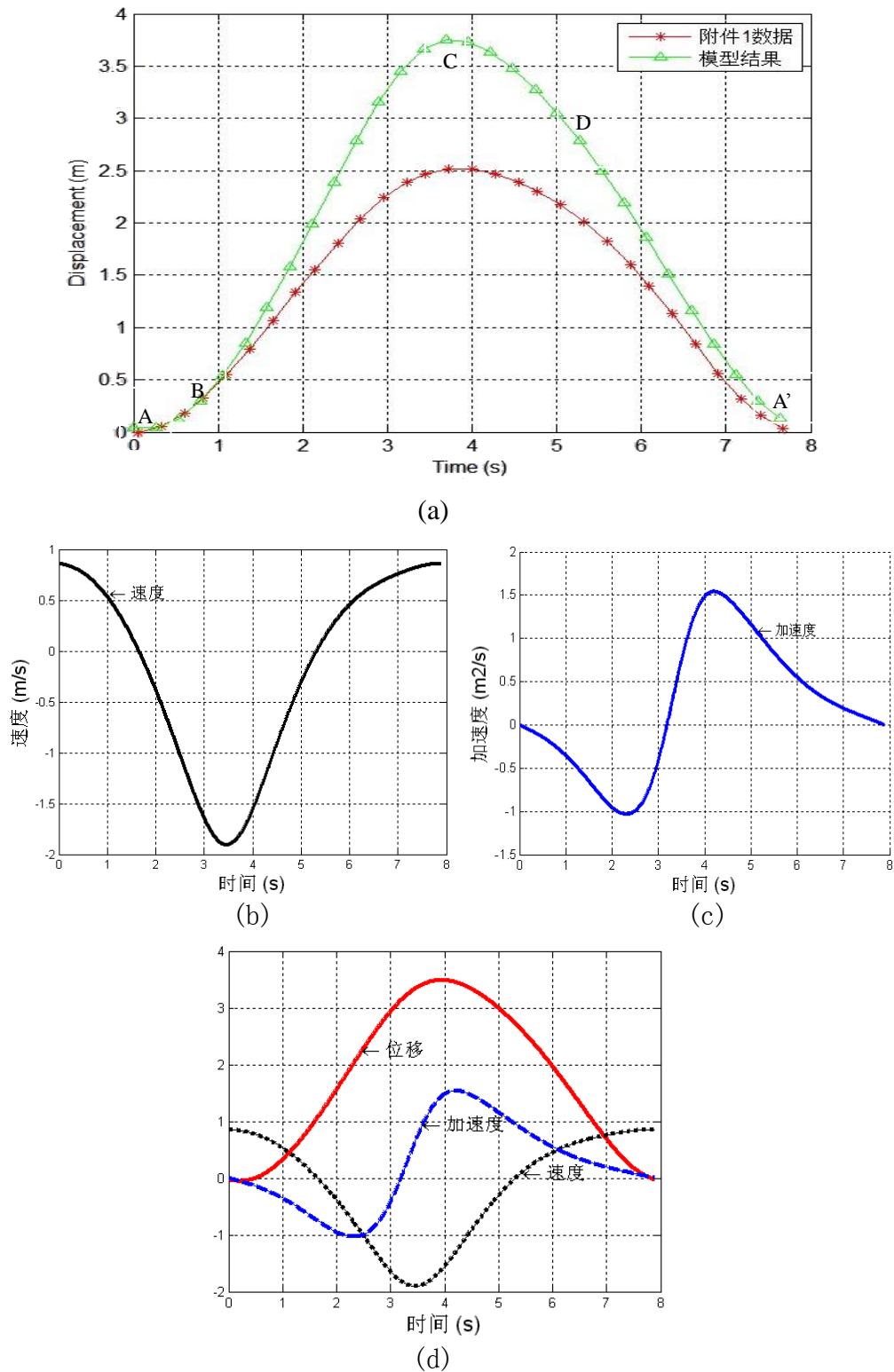


图 4.4 (a) 悬点位移曲线模拟结果和附件 1 实际测试曲线拟合
(b) 悬点速度变化曲线模拟结果
(c) 悬点加速度变化曲线模拟结果
(d) 悬点位移、速度、加速度曲线

4.3 结论

根据抽油机四连杆机构的结构关系和运动方程特点，建立了有杆抽油系统模型，并通过算法实现。通过和实际测试数据对比，悬点位移模拟结果比实际测试结果略大，分析了误差产生原因。模型较好计算出速度加速度的随时间变化曲线，可得出悬点的上、下死点位置不是常规认为的 180° 和 360° 曲柄转角，通过计算模型的初始旋转角，优化所建立的模型。

五、 问题二：泵功图计算

5.1 Gibbs 模型的基本思想

Gibbs 给出了悬点示功图转化为地下示功图的模型。如果我们将有杆抽油系统中的抽油杆看作一段传输线，并把抽油杆上端点看作接收器，把抽油杆的下端点看作发射器，那么抽油杆下端点的状态信息就可以通过应力波的形式，沿着抽油杆以一定波速(波速的大小由抽油杆的密度和弹性模量决定)传输到抽油杆上端点，并被地表的测试仪器记录下来。

为了分析抽油杆井下任意一点处的工作状态，需要对获得的采样信息进行数据处理，即获得位移时间图和荷载时间图，为了实现这个过程，Gibbs 在 60 年代提出了一维粘滞阻尼方程作为描述抽油杆运动和应力传播的偏微分波动方程，该方程的推导将在下节详细介绍。

5.2 Gibbs 波动方程的推导

由牛顿第二定律可以知道， $F=ma$ ，对于抽油杆而言，它受到的力主要有抽油杆上端点的张力 F_1 ，抽油杆下端点的张力 F_2 和抽油杆受到的阻力 F_3 ，由胡克定律可以得到张力计算公式：

$$F_1(x, t) = EA \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_1}, F_2(x, t) = EA \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_2} \quad (5-2-1)$$

其中： E 为抽油杆的弹性模量，由附录 6 可知 $E = 2.1 \times 10^{11}$ (pa);

A 为抽油杆的截面积;

$u(x, t)$ 为位移时间函数;

x_1 为抽油杆上端点坐标， x_2 为下端点坐标，且有 $x_2 = x_1 + L$ ， L 为抽油杆长度。

再利用应变力的泰勒公式可以知道：

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x_2} = \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x_1} + L \cdot \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x_1} + \dots \quad (5-2-2)$$

现取前两项作为数值近似计算公式，可以得到

$$F_2(x,t) = EA \cdot \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x_2} \approx EA \cdot \left(\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x_1} + L \cdot \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x_1} \right) \quad (5-2-3)$$

而抽油杆受到的摩擦阻力可以由如下公式求解得到：

$$F_3(x,t) = c \cdot m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c\rho AL \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (5-2-4)$$

利用牛顿第二定律可以得到：

$$\begin{aligned} F_1(x,t) - F_2(x,t) - F_3(x,t) &= EA \cdot L \cdot \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x_1} - c\rho AL \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ &= ma = \rho AL \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5-2-5)$$

对上式进行运算简化之后即可以得到 Gibbs 一维粘滞阻尼方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \\ \text{第一类边界条件: } u(x=0,t) = U(wt); \\ \text{第二类边界条件: } \frac{\partial u(x=0,t)}{\partial x} = \frac{D(wt)}{EA}; \\ \text{初始条件: } u(x=0,t=0) = U(0), u(x \neq 0, t=0) = 0; \end{cases} \quad (5-2-6)$$

其中： $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 为应力波在抽油杆上传播的速度，单位为(m/s)，由附录 6 可

知抽油杆的密度为 $\rho = 8456(\text{kg/m}^3)$ ，所以 $a = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^{11}}{8456}} = 4983.42 \text{m/s}$;

c 为阻尼系数;

$u(x,t)$ 为位移时间函数;

$U(wt)$ 为光杆处的位移时间函数;

$D(wt)$ 为光杆处的载荷时间函数。

由公式(5)可以知道，Gibbs 模型的本质是利用牛顿第二定律和传输线理论构建了一个抽油杆运动和应力传播的偏微分波动方程。因而求解 Gibbs 模型的过程就转变成了一个微分方程的边值问题，下一小节将会详细讨论如何求解这类边值问题。

5.3 Gibbs 波动方程的求解

5.3.1 一级杆 Gibbs 波动方程的求解

为了进一步求解 Gibbs 波动方程，可以用复变量 $z(x, t)$ 代替方程（5-2-6）中的 $u(x, t)$ ，则有：

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \quad (5-3-1)$$

依据数学物理方程的知识，波信号 $z(x, t)$ 是可以分离变量的，故采用分离变量法有：

$$z(x, t) = X(x)T(t) \quad (5-3-2)$$

将(5-3-2)式代入到(5-3-1)式，可以把 $z(x, t)$ 关于 x 和 t 的偏微分运算为 $X(x)$ 关于 x ， $T(t)$ 关于 t 的常微分运算，整理可得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{cT'(t)}{a^2 T(t)} \quad (5-3-3)$$

由于上式左边仅含有 x 的变量，右式仅含有 t 的变量，等式横等的唯一成立条件是等号左右两边都等于一个相同的常量，即有：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{cT'(t)}{a^2 T(t)} \quad (5-3-4)$$

由上式可以整理出两个常微分方程：

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (5-3-5)$$

$$T''(t) + cT'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 \quad (5-3-6)$$

为了确定参数 λ 的值，可以对 $T(t)$ 关于时间 t 进行周期傅里叶级数展开($T_n(t) = e^{inwt}$)，然后代入到（5-3-6）式中确定参数 λ_n ：

$$e^{inwt}(\lambda_n^2 a^2 - n^2 w^2 + icnw) = 0$$

由于 $e^{inwt} \neq 0$ ，而上式要成立，则必有 $\lambda_n^2 a^2 - n^2 w^2 + icnw = 0$ ，故可以确定 λ_n 的值：

$$\lambda_n = -\alpha_n + i\beta_n = \frac{-nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}} + i \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}}$$

观察方程（5-3-5）可以知道，它是一个标量奇次亥姆霍兹方程，此方程的一个基本解是有正弦函数和余弦函数线性组合迭加形成的，结合上式的求得的 λ_n ，

则有 $X(x): \sin(\lambda_n x), \cos(\lambda_n x)$, 对于特殊情况, 当采样值 $n = 0$ 时(5-3-5), (5-3-6)式的常量解可以表示为 $T(t): \xi, X(x): \eta x, \zeta$, 因而复位移函数可以表示为:

$$z(x, t) = X(x)T(t) = \xi\eta x + \xi\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \sin(\lambda_n x) + \Theta_n \cos(\lambda_n x))e^{in\omega t}$$

其中: $\Phi_n = -k_n - i\mu_n$ 和 $\Theta_n = v_n - i\delta_n$ 都是复常量。

下面我们通过构造的方法来得到模型的一个特解。

首先, 利用(5-2-6)式中的第二类边界条件可以有 $\frac{\partial u(x=0, t)}{\partial x} = \frac{D(\omega t)}{EA} = \text{Re}(\frac{\partial z(x=0, t)}{\partial x})$, 那么由上式可得

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} = \xi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \lambda_n \cos \lambda_n x - \Theta_n \lambda_n \sin \lambda_n x)e^{in\omega t}$$

即可得

$$D(\omega t) = EA[\xi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \lambda_n \cos \lambda_n x - \Theta_n \lambda_n \sin \lambda_n x)e^{in\omega t}]$$

通过下面的定义:

$$\sigma_n = EA(\kappa_n \alpha_n + \mu_n \beta_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tau_n = EA(\kappa_n \beta_n - \mu_n \alpha_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma_0 = 2EA\xi\eta$$

我们可以得到:

$$\kappa_n = \frac{\sigma_n \alpha_n + \tau_n \beta_n}{EA(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mu_n = \frac{\sigma_n \beta_n - \tau_n \alpha_n}{EA(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}, n = 1, 2, 3, \dots$$

这时, 为了满足第二类边界条件, 参数 σ_n 和 τ_n 需满足如下两个等式:

$$\sigma_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \cos n\omega t dt, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tau_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \sin n\omega t dt, n = 0, 1, 2, \dots$$

同理, 为了满足第一类边界条件, 也需满足如下的两个等式:

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^2 U(\omega t) \cos n\omega t d\tau, n=0,1,2,\dots \\ \delta_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^2 U(\omega t) \sin n\omega t d\tau, n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

其中， ν_n 和 δ_n 是由

$$\operatorname{Re}[z(0,t)] = U(\omega t) = \xi\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_n \cos n\omega t + \delta_n \sin n\omega t)$$

给出，且 $\nu_0 = 2\xi\zeta$ 。

这样，我们就得到了模型的一个特解。同前面的讨论一起，我们可以给出模型的位移通解如下：

$$u(x,t) = \frac{\sigma_0}{2EA}x + \frac{\nu_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} [O_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t] \quad (5-3-7)$$

其中

$$O_n(x) = (\kappa_n \cosh \beta_n x + \delta_n \sinh \beta_n x) \sin \alpha_n x + (\mu_n \sinh \beta_n x + \nu_n \cosh \beta_n x) \cos \alpha_n x$$

$$P_n(x) = (\kappa_n \sinh \beta_n x + \delta_n \cosh \beta_n x) \cos \alpha_n x - (\mu_n \cosh \beta_n x + \nu_n \sinh \beta_n x) \sin \alpha_n x$$

通过上面给出的解 (5-3-7)，再结合胡可定律 $F(x,t) = EA \frac{\partial u(z,t)}{\partial x}$ ，我们就可以得到方程关于载荷的通解：

$$F(x,t) = EA \left[\frac{\sigma_0}{2EA} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O'_n(x) \cos n\omega t + P'_n(x) \sin n\omega t) \right] \quad (5-3-8)$$

其中

$$O'_n(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA} \sinh \beta_n x + (\delta_n \beta_n - \nu_n \alpha_n) \cosh \beta_n x \right] \sin \alpha_n x +$$

$$\left[\frac{\sigma_n}{EA} \cosh \beta_n x + (\nu_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \sinh \beta_n x \right] \cos \alpha_n x$$

$$P'_n(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA} \cosh \beta_n x + (\delta_n \beta_n - \nu_n \alpha_n) \sinh \beta_n x \right] \cos \alpha_n x -$$

$$\left[\frac{\sigma_n}{EA} \sinh \beta_n x + (\nu_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \cosh \beta_n x \right] \sin \alpha_n x$$

这样，我们就完成了单级杆 Gibbs 方程的求解。

5.3.2 多级杆 Gibbs 波动方程的求解

设 L_1 、 L_2 和 f_{r1} 及 f_{r2} 分别为第一级和第二级抽油杆柱的长度和截面积。用公

式 (5-3-7) 和 (5-3-8) 可以得到第一级杆柱下端 (亦即第二级杆柱上端) 的位移函数 $u(L_1, t)$ 和荷载函数 $F(L_1, t)$ 。为了区别多级杆柱, 计算中所用的系数均按从上至下的级数编号在前面加新的角码, 对第一级杆柱下端有

$$u(L_1, t) = \frac{{}_1\sigma_0}{2Ef_{r1}}L_1 + \frac{{}_1\nu_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} [{}_1O_n(L_1)\cos n\omega t + {}_1P_n(x)\sin n\omega t] \quad (5-3-9)$$

$$F(L_1, t) = Ef_{r1} \left[\frac{{}_1\sigma_0}{2Ef_{r1}} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_1O'_n(L_1)\cos n\omega t + {}_1P'_n(L_1)\sin n\omega t) \right] \quad (5-3-10)$$

以 (5-3-9) 和 (5-3-10) 式作为计算第二级的边界条件, 它实际上也是截傅里叶级数。由此不难求得计算第二级杆柱所用新边界条件的傅里叶系数。
位移的傅里叶系数为

$${}_2\nu_0 = \frac{{}_1\sigma_0}{Ef_{r1}}L_1 + {}_1\nu_0 \quad {}_2\nu_n = {}_1O_n(L_1) \quad {}_2\delta_n = {}_1P_n(L_1)$$

荷载的傅里叶系数为

$${}_2\sigma_0 = {}_1\sigma_0 \quad {}_2\sigma_n = Ef_{r1} \frac{\partial {}_1O_n(L_1)}{\partial x} \quad {}_2\tau_n = Ef_{r1} \frac{\partial {}_1P_n(L_1)}{\partial x}$$

在新边界条件下, 解基本微分方程 (5-2-6) 时, x 的坐标原点取在第二级杆柱的顶部断面, 则第二级杆柱的位移和动负荷的计算公式为

$$u(x_2, t) = \frac{{}_2\sigma_0}{2Ef_{r2}}x_2 + \frac{{}_2\nu_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} [{}_2O_n(x_2)\cos n\omega t + {}_2P_n(x)\sin n\omega t] \quad (5-3-11)$$

$$F(x_2, t) = Ef_{r2} \left[\frac{{}_2\sigma_0}{2Ef_{r2}} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_2O'_n(x_2)\cos n\omega t + {}_2P'_n(x_2)\sin n\omega t) \right] \quad (5-3-12)$$

式中, ${}_2O_n(x_2)$ 及 ${}_2P_n(x_2)$ 的计算公式与单级杆时的相同, 如需要采用新的系数。如果令 $x_2 = L_2$, 则可计算出第二级杆柱下部断面不同时刻的位移和动负荷。对于多级抽油杆柱的计算, 同样可以采用上述方法来处理。

5.4 模型详细实现过程

5.4.1 原始数据的处理

对于附件 1 和 2 中原始数据的处理工作主要有以下几个:

【1】为了保证算法推导和代码实现中的一致性, 需要对原始数据中提供的各个参量进行标准国际单位制的转换工作;

【2】由 Gibbs 模型可知, 附件给出的悬点示功图本质上是 Gibbs 模型的两

类边界条件，即作为方程通解系数确定的必要条件，因而需要对悬点示功图进行采样，简单等份采样会在上死点和下死点获得更多的数据，导致转化为地下示功图时在这两点存在较大误差，为了避免这种现象，可以采用非均匀采样，即在这两点稀疏采样，其它地方稠密采样的办法，还有一种办法是进行插数据的办法，在非死点的地方插入一些原始数据。本论文采用的是前者的办法。

【3】原始数据同样也是 Gibbs 模型的初始条件，为了便于傅里叶系数的求解，需要先确定哪些数据属于上行程，哪些数据属于下行程，并将上行程的起点作为初始点值。

5.4.2 边界条件

由 Gibbs 一维粘滞阻尼方程的推导可以知道，Gibbs 模型主要包含两类边界条件，即第一类狄利克雷边界条件和第二类纽曼边界条件：

第一类狄利克雷边界条件： $u(x = 0, t) = U(wt)$;

第二类纽曼边界条件： $\frac{\partial u(x = 0, t)}{\partial x} = \frac{D(wt)}{EA}$;

其中： $U(wt)$ 为悬点处的位移时间函数；

$D(wt)$ 为悬点处的载荷时间函数；

E 为抽油杆的弹性模量，由附录 6 可知 $E = 2.1 \times 10^{11}$ (pa)；

A 为抽油杆的截面积。

5.4.3 初始条件

有题目可知，当悬点位于它的下死点时，令 $t = 0$ ，此时 Gibbs 模型的初始条件可以表示为：

$$u(x = 0, t = 0) = U(0), \quad u(x \neq 0, t = 0) = 0$$

即初始时刻，抽油杆上端点的位移为悬点初始时刻的位移大小，杆上其它地方的位移初始化为零。

5.4.4 核心计算步骤

本文对于 Gibbs 模型的求解主要包含以下几个主要步骤：

导入附件 1,2 地面示功图的抽样原始数据，并对原始数据进行单位转换，坐标平移等数据处理；

- 【1】 利用导入的抽样原始数据，对傅里叶级数展开中的待定系数进行计算，计算公式为：

$$\sigma_n \approx \frac{2}{K} \sum_{p=1}^K D_p \cos\left(\frac{2n\pi p}{K}\right), n=0,1,2,\dots,\bar{n} \quad \tau_n \approx \frac{2}{K} \sum_{p=1}^K D_p \sin\left(\frac{2n\pi p}{K}\right), n=1,2,\dots,\bar{n}$$

$$v_n \approx \frac{2}{K_1} \sum_{p=1}^{K_1} U_p \cos\left(\frac{2n\pi p}{K_1}\right), n=0,1,2,\dots,\bar{n} \quad \delta_n \approx \frac{2}{K_1} \sum_{p=1}^{K_1} U_p \sin\left(\frac{2n\pi p}{K_1}\right), n=1,2,\dots,\bar{n}$$

- 【2】 利用阻尼系数计算模型抽油杆系统中的计算阻尼系数 c ，并利用 c 计算 α_n 和 β_n ，计算公式为：

$$\alpha_n = \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}}, \beta_n = \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}}, n=1,2,\dots,\bar{n}$$

- 【3】 计算系数 κ_n 和 μ_n ：

$$\kappa_n = \frac{\sigma_n \alpha_n + \tau_n \beta_n}{EA(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}, \mu_n = \frac{\sigma_n \beta_n - \tau_n \alpha_n}{EA(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}, n=1,2,\dots,\bar{n}$$

- 【4】 利用以上两步获得到的系数计算地下任意一点处位移函数和荷载函数的系数 $O_n(x)$ ， $P_n(x)$ ， $O'_n(x)$ 和 $P'_n(x)$ ；

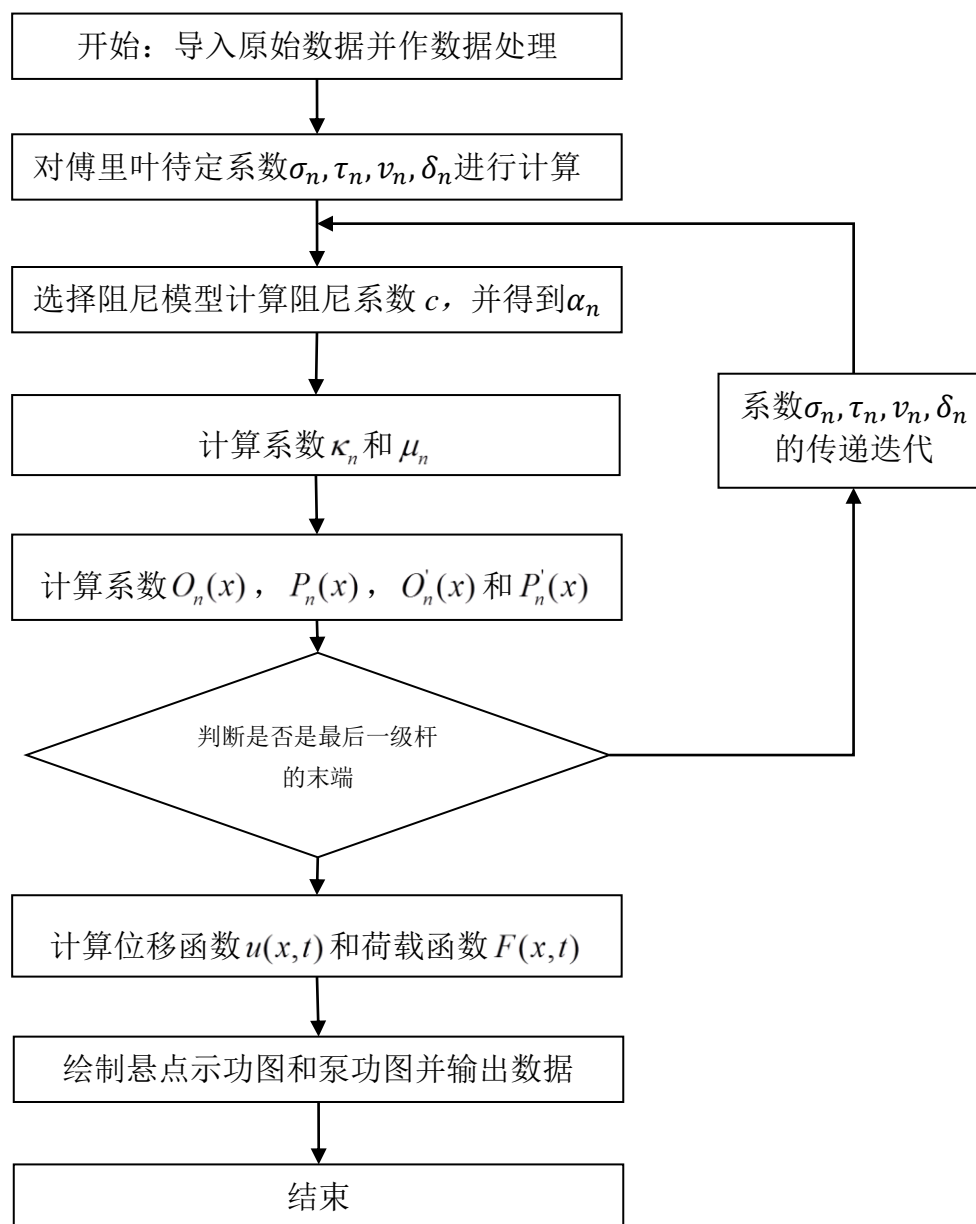
- 【5】 计算位移函数 $u(x,t)$ 和荷载函数 $F(x,t)$ ；

- 【6】 判断是否是最后一级的末端，如果是，输出数据并绘制泵功图，如果不是，利用力的连续性原理进行如下参数的传递，返回第三步，循环计算知道最后一级杆的末端，绘制泵功图。

$${}_{j+1}\sigma_0 = \sigma_0, {}_{j+1}\sigma_n = EA_j \cdot {}_jO'_n(x_j), {}_{j+1}\tau_n = EA_j \cdot {}_jP'_n(x_j);$$

$${}_{j+1}v_0 = \frac{{}_j\sigma_0 x_j}{EA_j} + {}_jv_0, {}_{j+1}v_n = {}_jO_n(x_j), {}_{j+1}\delta_n = {}_jP_n(x_j)$$

5.4.5 程序设计流程图



5.5 模型的验证

5.6 一级杆油井的模型验证

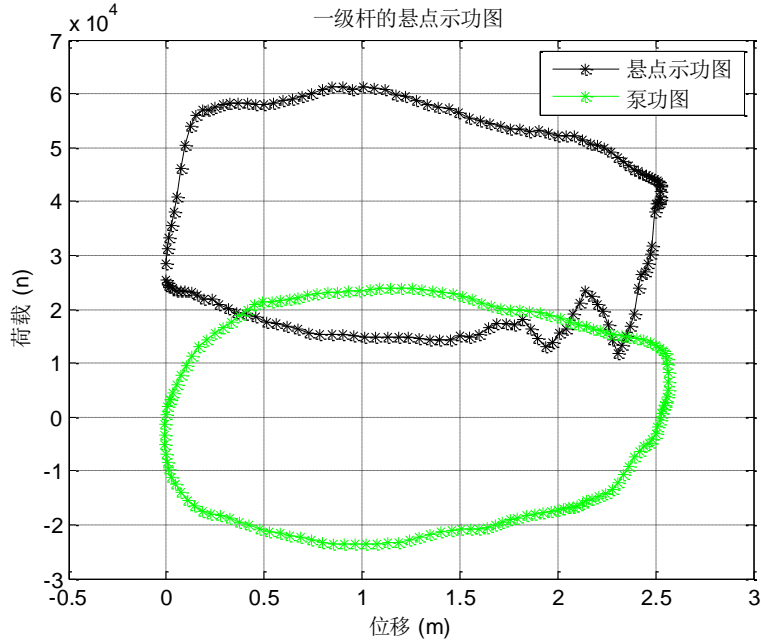


图 5.1 一级杆悬点示功图和泵功图

泵功图是对抽油杆柱最下端荷载变化与位移变化规律及相互关系的直观描述，通过模型计算得到有抽油系统的泵功图并与悬点示功图比较（图 5.1），泵功图有以下几方面的不同：

随着系统摩擦的增大，系统振幅减小，衰减速度加快

- (1) 柱塞振动荷载振幅相对悬点变小，荷载平稳

原因分析：建模过程中，推导出荷载在时域用傅里叶级数表达式为：

$$F(x,t) = EA \left[\frac{\sigma_0}{2EA} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O'_n(x) \cos n\omega t + P'_n(x) \sin n\omega t) \right], \text{ 其中 } n = \infty$$

仿真求解过程中， n 取值不可能取到 ∞ ，故用一个较大的数来代替 ∞ ，因此最终结果会略去模型中的高频成分，使得仿真曲线比实际曲线光滑。

- (2) 柱塞冲程小于悬点冲程

- a. 运动过程中，由于交变载荷作用，抽油杆柱和油管柱的弹性伸缩，柱塞冲程小于悬点冲程。
- b. 由于摩擦阻力的影响，泵功图相对于悬点示功图会整体向左下方产生

一定距离的平移。

- c. 光杆发生位移，柱塞由于种种原因还没有发生位移：悬点从下死点走到上死点，但由于抽油杆和油管柱的静变形，抽油泵柱塞存在冲程损失。
- d. 抽油杆为细长杆，在轴向压力作用下稳定性较差，抽油杆收轴向压力，会造成杆的变形，这样会使油泵在运动过程中和抽油机的运动不同步伐，使柱塞实际行程小于悬点冲程。

5.7 三级杆油井的模型验证

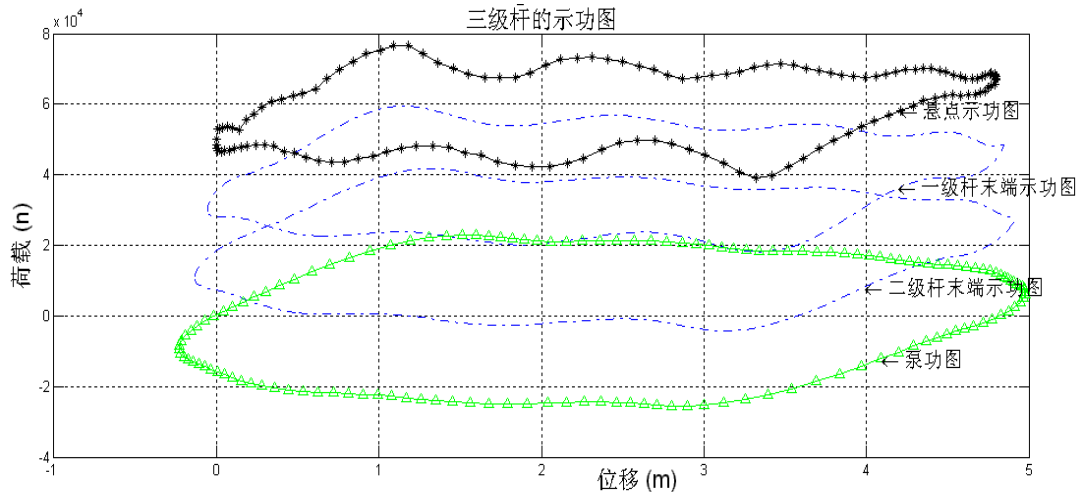


图 5.2 三级杆悬点示功图和泵功图

仿真结果和实际测试数据的对比：

傅里叶系数是通过荷载-时间，位移-时间曲线计算出来的，在实际数据中，以位移为等分取样数据，存在着不均匀性合系统误差。

5.8 小结

通过上述分析，比较泵功图的拓扑相似度、几何形状，Gibbs 模能比较准确反映出井下的实时工况，达到从地面示功图对到泵功图的转化，逐步消除抽油杆弹性形变的目的，符合理论泵功图的基本特性。

六、 问题三：泵功图的应用

6.1 背景分析与假设

油井在抽汲过程中，涉及众多因素，而产量的多少更是于此紧密相关。

通过前面对抽汲过程的分析，理论上通过有效冲程，我们应该可以建立一个产量的模型。但是第二个模型的建立则需要从其他方面入手，如果把整个抽汲过程看做一个物理运动，那么抽汲就可以认为是系统在电机带动下对抽汲液体的一个做功的过程，这样就可以建立起第二个产量模型。

对于第二个问题，通过比较泵功图，直观上我们认为可以从图形的面积以及冲程过程尤其是下冲程过程中图形的形状入手。

6.2 第二问的模型一：有效冲程法模型

6.2.1 模型的建立与推导

抽油机的理论产液量是指假设柱塞冲程长度等于悬点冲程长度，泵内为油水两相混合物且充满时的井口产液量。

假设有效冲程为 S ，则由油井井下部分的结构以及运动情况，我们认为理论产液量与有效冲程存在一个线性或分段线性的关系，且其分段情况与油杆每节的长度呈线性关系。即如果油杆为 n 节，每节长分别为 l_1, l_2, \dots, l_n ，则有

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{th} = \sum_{i=0}^{m-1} A_{pi} l_i + A_{pm} (S - \sum_{i=0}^{m-1} l_i) \quad 0 \leq i \leq m, 0 \leq m \leq n \\ \sum_{i=0}^{m-1} l_i \leq S \leq \sum_{i=0}^m l_i \\ l_i \geq 0 \end{array} \right.$$

其中 A_{pi} 理论上应为对应各节的油管横截面面积。

事实上，每次抽汲抽油杆柱上升的距离远小于第一级杆的长度，因此实际计算时大多时间需采用第一级杆的杆径。

油井的实际产液量是指井口原油脱气后的地面实际产液量，记作 V ，其计算公式为：

$$V = \alpha V_{th}$$

式中, V : 实际产液量, 单位为 $m^3/\text{次}$;

V_{th} : 理论产液量, 单位为 $m^3/\text{次}$;

α : 排量系数。

排量系数, 生产现场亦成为泵效。其影响因素主要有 4 各方面: (1) 冲程损失; (2) 充满程度; (3) 漏失程度; (4) 混合物的体积变化。这些因素对排量系数的影响关系可表示为:

$$\alpha = \eta_s \eta_f \eta_l \eta_v$$

式中:

η_s 为柱塞冲程系数, 是柱塞冲程 S_p 与悬点冲程 S_r 之比, 即: $\eta_s = S_p / S_r$, 反映了冲程的损失程度;

η_f 为泵筒充满系数, 是柱塞有效冲程 S_{pe} 与柱塞冲程 S_p 之比, 即:

$\eta_f = S_{pe} / S_p$, 反映了泵筒内液体的充满程度;

η_l 为泵的漏失系数, 反映了抽油泵的漏失程度。设一个抽汲周期内由 S_{pe} 计算得到的井下排液体积为 V_p , 漏失体积为 ΔV_p , 则漏失系数 $\eta_l = (V_p - \Delta V_p) / V_p$;

η_v 为混合物的体积系数, 反映混合物在抽油泵排出压力条件下体积与其对应的地面体积之间的关系, 设一个抽汲周期内抽油泵除去漏失量后的井下排液体积为 V_{pe} , 其对应的地面体积为 V_e , 则体积系数 $\eta_v = V_e / V_{pe}$ 。

将前面几式结合, 则可得到实际产液量的计算模型如下:

$$V = \left(\sum_{i=1}^{m-1} A_{pi} l_i + A_{pm} (S - \sum_{i=0}^{m-1} l_i) - \Delta V_p \right) \cdot \eta_v$$

式中, S : 柱塞有效冲程, 单位为 m ;

ΔV_p : 抽油泵一个冲次的漏失量, 单位为 m^3 ;

η_v : 泵排出压力条件下油管内混合物的体积系数。

从模型 (1) 可以看出, 实际产液量的计算需要解决 3 个问题:

- 计算柱塞有效冲程 S ;
- 计算抽油泵的漏失量 ΔQ_p ;
- 计算泵排出压力条件下油管内混合物的体积系数 η_v 。

1. 柱塞有效冲程

柱塞有效冲程应该主要依据泵功图上阀开闭点的位置来确定。换言之，可以通过游动阀或固定阀开闭点对应的位移差的最小值来确定。

通过分析抽油泵的工作原理，研究泵功图的几何特征可知，泵功图在阀开闭点的曲率变化比较大，且固定阀开闭点在上冲程的高荷载段，游动阀开闭点在下冲程的低荷载段。根据这一思路，我们可以通过求解泵功图在高低荷载段的曲率变化峰值处来确定阀开闭点。

S 可通过单个冲程周期中柱塞的最大位移来估计，不妨用 $S(T/2) - S(0)$ 先行估计，以作参考。

(1) 泵功图的预处理

为了便于计算有效冲程，在计算之前还需做一定的处理，主要有以下内容：

- 考虑到泵功图荷载值范围要远大于位移值范围，有必要对泵功图原始数据做归一化处理，归一化后的荷载比记为 R_f ，位移比记为 R_s 。
- 将归一化后的泵功图按柱塞位移展开，即把原来位移在区间 $[0,1]$ 的闭合曲线转化为在区间 $[0,2]$ 上的单值曲线 F_s 。
- 为了消除数据点的细微波动对结果的影响，在此基础上等值 ΔS 去点，运用数值方法计算曲率。

(2) 泵功图曲率计算模型（五点差值）

泵功图曲线上任意一点 P_i 的曲率 K_i 根据与其相邻的五个数据点：

$P_{i-2}(s_{i-2}, f_{i-2})$ ， $P_{i-1}(s_{i-1}, f_{i-1})$ ， $P_i(s_i, f_i)$ ， $P_{i+1}(s_{i+1}, f_{i+1})$ ， $P_{i+2}(s_{i+2}, f_{i+2})$ 之间的几何关系计算。如下图所示：

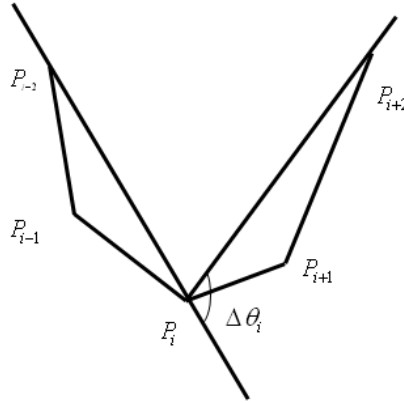


图 6.2.1 泵功图曲率计算模型

则 P_i 点的曲率为：

$$K_i = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta l_i}$$

式中， $\Delta\theta_i$ 为直线 $P_{i-2}P_i$ 到直线 P_iP_{i+2} 的有向旋转角度，计算公式为：

$$\Delta\theta_i = \arctan\left(\frac{(f_i - f_{i+2})(s_i - s_{i-2}) - (f_i - f_{i-2})(s_i - s_{i+2})}{1 + (s_i - s_{i-2})(s_i - s_{i+2})}\right)$$

弧长 Δl_i 的近似计算公式如下：

$$\Delta l_i = \overline{P_{i-2}P_{i-1}} + \overline{P_{i-1}P_i} + \overline{P_iP_{i+1}} + \overline{P_{i+1}P_{i+2}}$$

则点 P_i 处的曲率变化量 δK_i 根据 P_i ， P_{i+1} 两点处的曲率变化得到：

$$\delta K_i = |K_{i+1} - K_i|$$

泵功图曲线是按照数值计算方法得到的，因此曲线中含有复杂的频率成分。在实际计算中，为了降低或消除其引起的曲率变化量的波动，一般采取相邻五点取平均值的方法来确定中间点的曲率变化量 ΔK_i ，以提高计算精度，即：

$$\Delta K_i = (\delta K_{i-2} + \delta K_{i-1} + \delta K_i + \delta K_{i+1} + \delta K_{i+2})/5$$

(3) 阀开闭点的位置与柱塞有效冲程的确定

在泵功图高荷载段找出曲率变化最大的两个尖峰点，位移小者为固定阀开启点、反之为固定阀关闭点；在低荷载段找出曲率变化最大的两个点，位移小者为游动阀关闭点、反之为游动阀开启点。分别计算固定阀开闭点的位置差 S_{foc} 和游动阀开闭点的位置差 S_{moc} ，则柱塞有效冲程 S_{pe} 等于其中较小值。

(4) 柱塞有效冲程计算步骤

- a. 泵功图原始数据归一化处理，归一化荷载比记为 R_f 、位移比记为 R_s 。
- b. 归一化后的泵功图由区间 $S \in [0,1]$ 上的闭合曲线转化成在区间 $S \in [0,2]$ 上的单值曲线 $F(S)$ 。
- c. 按照等间隔 ΔS 重新取点。
- d. 采用第二部分的方法计算泵功图曲线上各点的曲率变化量。
- e. 在区间 $S \in (0,1)$ ， $F \in [0.8,1.0]$ 上依次找出曲率变化最大的两个点 $E_{g1}(s_{g1}, f_{g1})$ 和 $E_{g2}(s_{g2}, f_{g2})$ ，则可得比例下位移 $S_{Rg} = |s_{g2} - s_{g1}|$ 。
- f. 在区间 $S \in (1,2)$ ， $F \in [0,0.2]$ 上依次找出曲率变化最大的两个点 $E_{y1}(s_{y1}, f_{y1})$ 和 $E_{y2}(s_{y2}, f_{y2})$ ，则可得比例下位移 $S_{Ry} = |s_{y2} - s_{y1}|$ 。
- g. 比较 S_{Rg} 与 S_{Ry} ，其中较小者为比例下有效冲程 S_{Rpe} ，对其乘以归一化

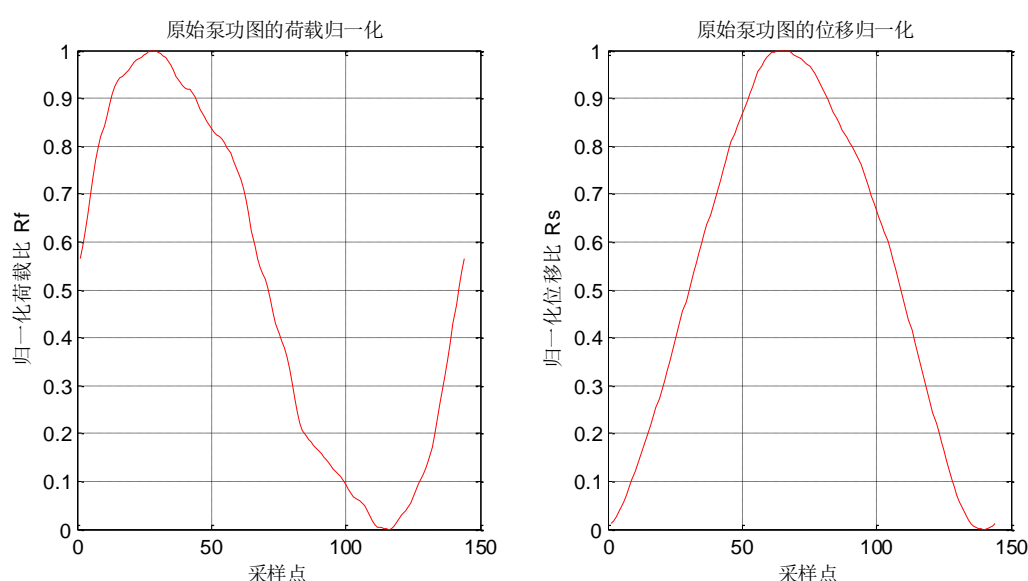
位移比 R_s 即可得到实际有效冲程。

6.2.2 模型的验证

首先，通过对测量数据进行线性仿真，我们发现并证明猜想的正确性。

1. 一级杆有效冲程计算步骤：

- a. 泵功图原始数据进行归一化处理（图 6.2.2 a, b），归一化荷载比记为 R_f 、位移比记为 R_s 。



(a) 一级杆原始泵功图荷载归一化曲线 (b) 一级杆原始泵功图位移归一化曲线

图 6.2.2

- b. 将归一化后的泵功图由区间 $S \in [0,1]$ 上的闭合曲线转化成在区间 $S \in [0,2]$ 上的单值曲线 $F(S)$ 如图 6.2.3。

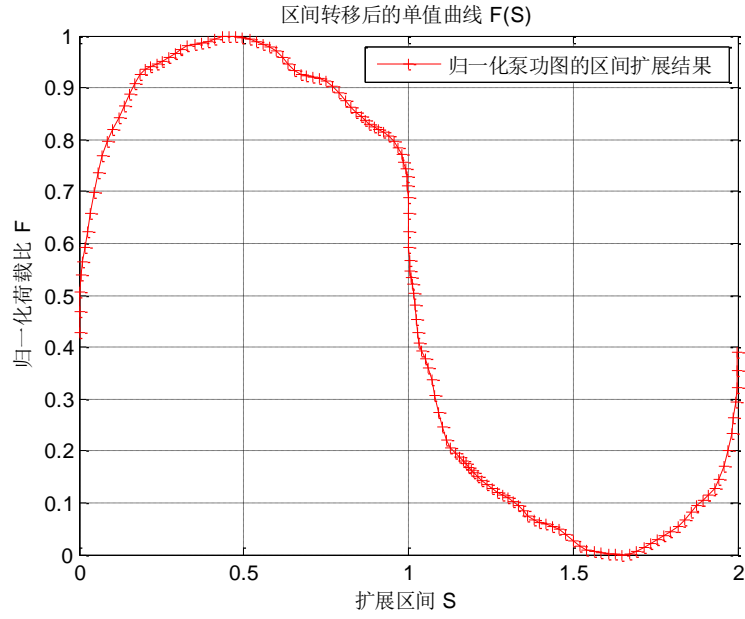


图 6.2.3 一级杆区间转移后的单值曲线

c. 按照等间隔重新取点（图 6.2.4）。

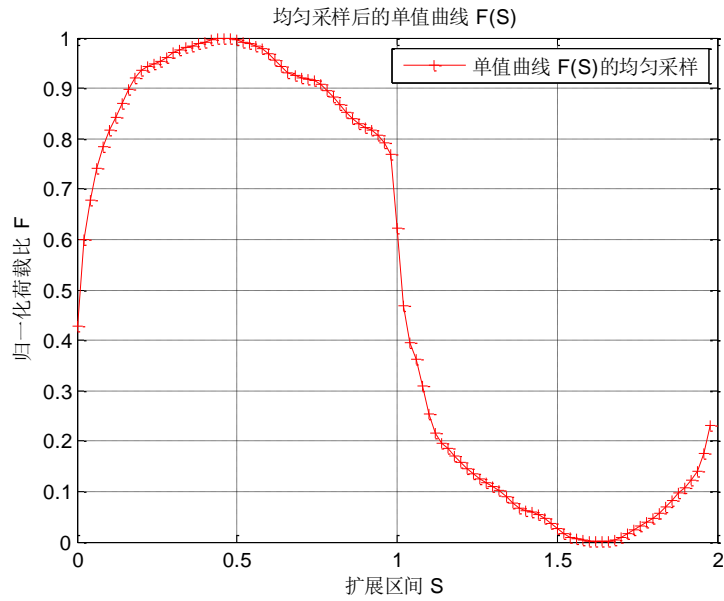


图 6.2.4 一级杆均匀间隔采样 $F(s)$ 曲线

d. 计算泵功图曲线上各点的曲率变化量（图 6.2.4）。

在上冲程上依次找出曲率变化最大的两个点 $E_{g1}(s_{g1}, f_{g1})$ 和 $E_{g2}(s_{g2}, f_{g2})$ ，求得比例下位移 $S_{Rg} = |s_{g2} - s_{g1}| = 0.812$ 。在下冲程上依次找出曲率变化最大的两个点 $E_{y1}(s_{y1}, f_{y1})$ 和 $E_{y2}(s_{y2}, f_{y2})$ ，则可得比例下位移 $S_{Ry} = |s_{y2} - s_{y1}| = 0.816$ 。

比较 S_{Rg} 与 S_{Ry} ，其中较小者为比例下有效冲程为 0.812，对其乘以归一化位移比 $R_s = 2.58$ 即可得到实际有效冲程 2.095 米。

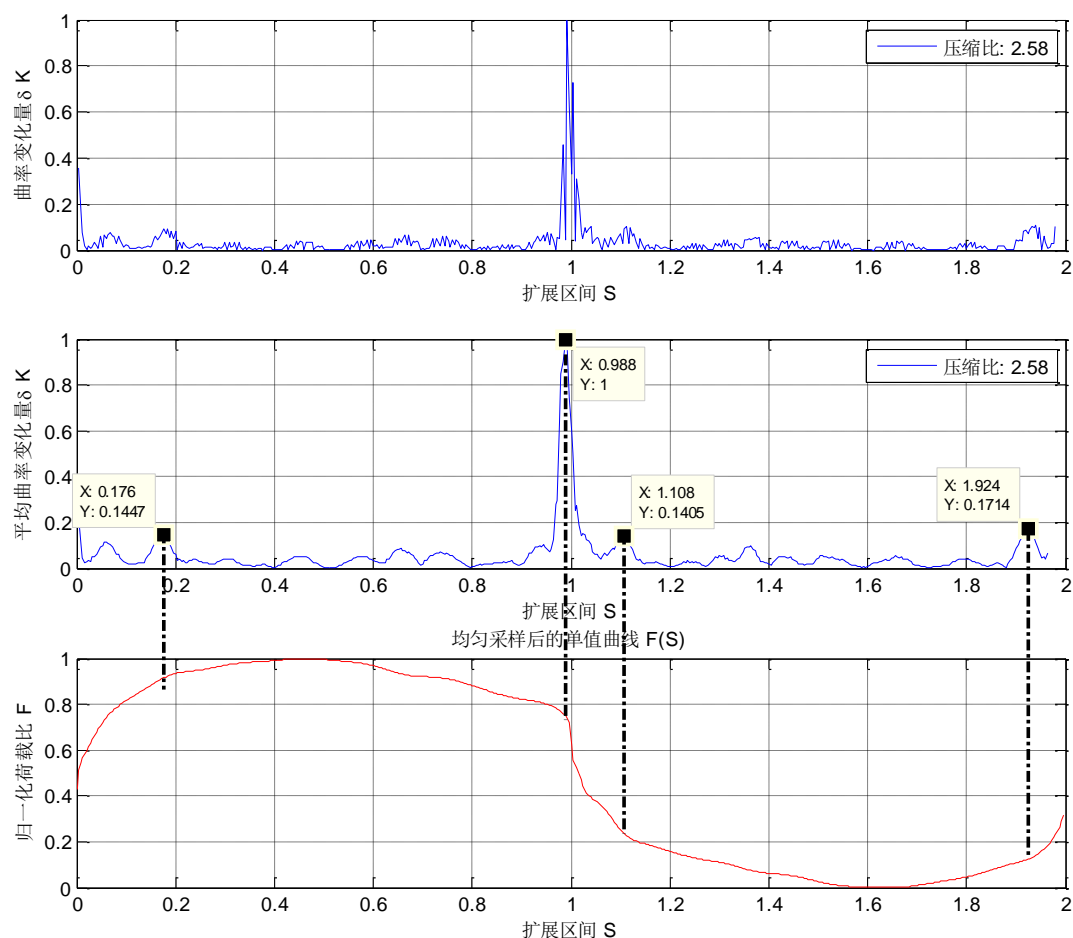
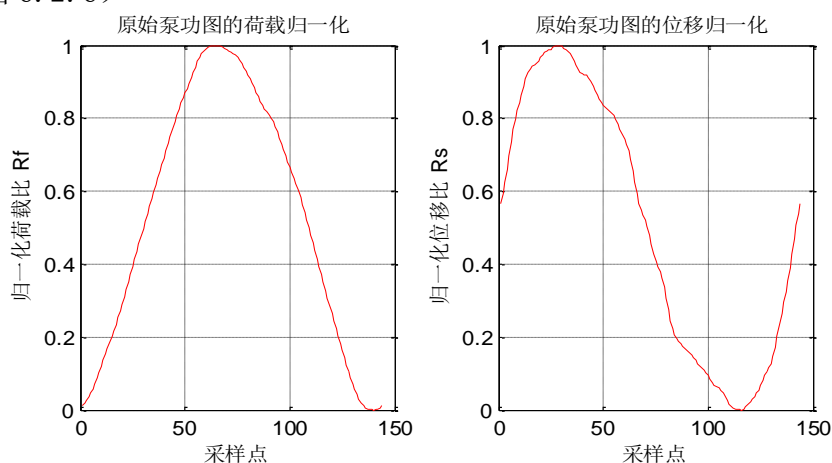


图 6.2.5 一级杆阀开闭点位置确定

2. 三级杆有效冲程计算步骤:

a. 泵功图原始数据进行归一化处理, 归一化荷载比记为 R_f 、位移比记为 R_s

(如图 6.2.6)



(a) 三级杆原始泵功图荷载归一化曲线 (b) 三级杆原始泵功图位移归一化曲线

图 6.2.6

b. 将归一化后的泵功图由区间 $S \in [0,1]$ 上的闭合曲线转化成在区间 $S \in [0,2]$ 上

的单值曲线 $F(S)$ 如图 6.2.7。

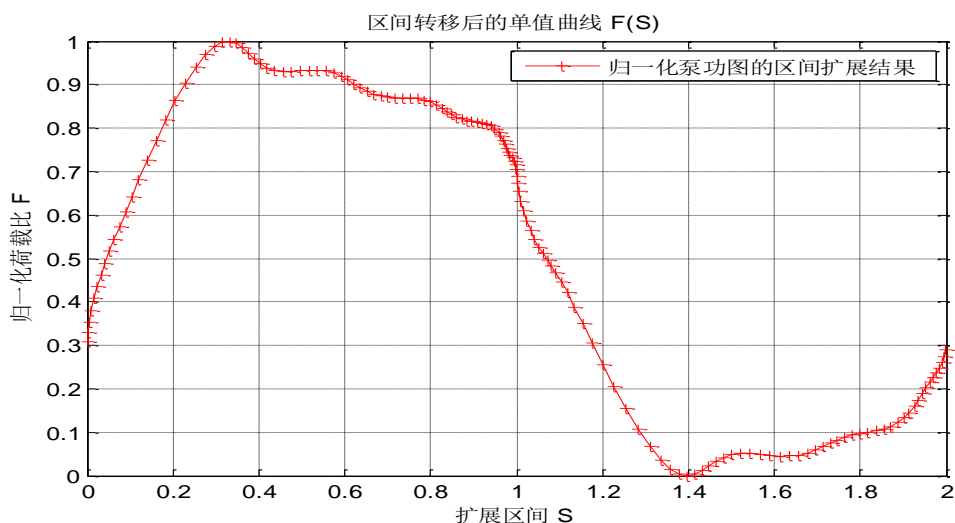


图 6.2.7 三级杆区间转移后的单值曲线

c. 按照等间隔重新取点如图 6.2.8。

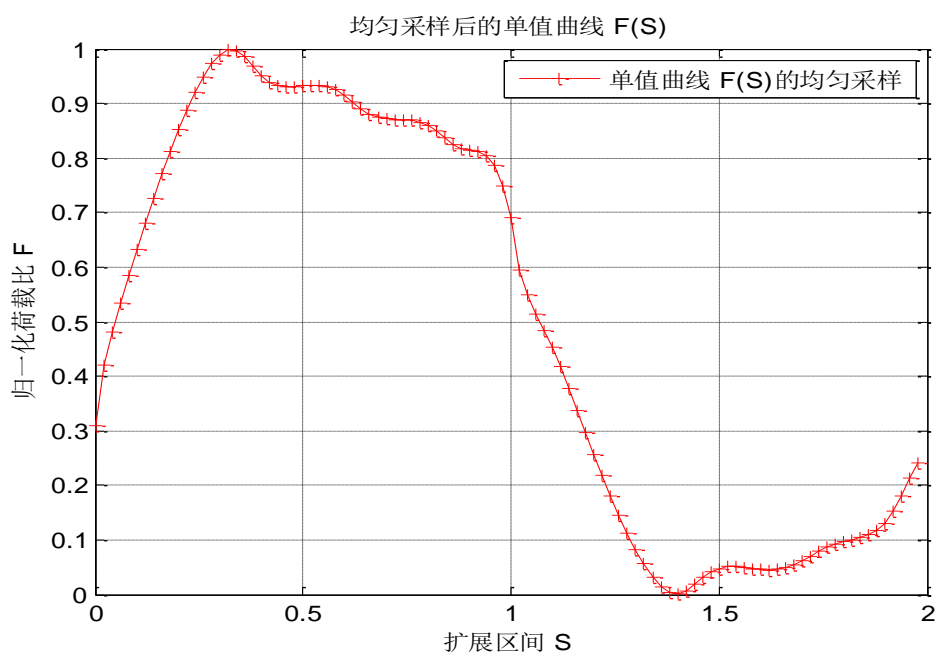


图 6.2.8 三级杆均匀间隔采样 $F(s)$ 曲线

d. 计算泵功图曲线上各点的曲率变化量如图 6.2.9。

在上冲程上依次找出曲率变化最大的两个点 $E_{g1}(s_{g1}, f_{g1})$ 和 $E_{g2}(s_{g2}, f_{g2})$ ，求得比例下位移 $S_{Rg} = |s_{g2} - s_{g1}| = 0.668$ 。

在下冲程上依次找出曲率变化最大的两个点 $E_{y1}(s_{y1}, f_{y1})$ 和 $E_{y2}(s_{y2}, f_{y2})$ ，则可得比例下位移 $S_{Ry} = |s_{y2} - s_{y1}| = 0.606$ 。

比较 S_{Rg} 与 S_{Ry} ，其中较小者为比例下有效冲程为 0.606，对其乘以归一化位移比 $R_s = 5.1933$ 即可得到实际有效冲程 3.147 米。

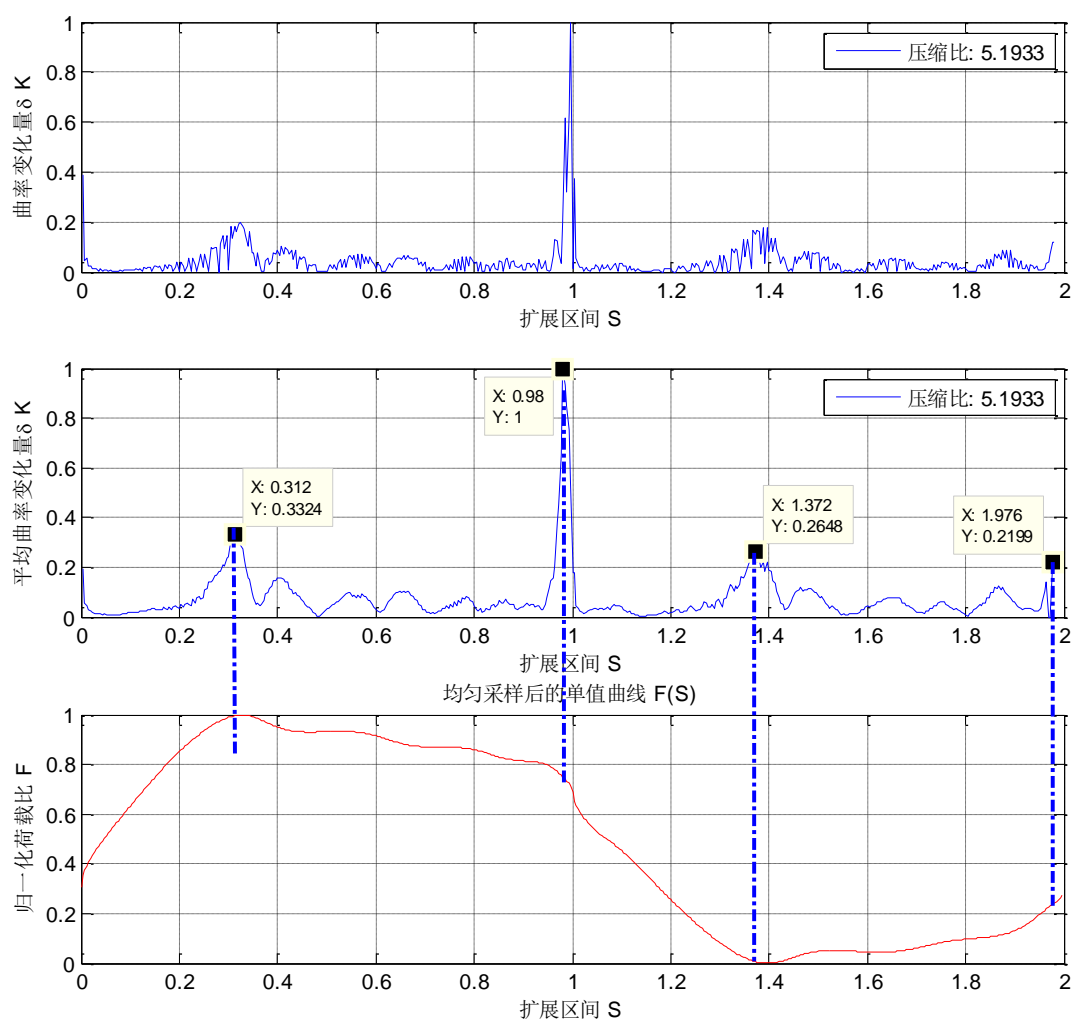


图 6.2.9 三级杆阀开闭点位置确定

6.2.3 产量计算

利用模型求产油量 Q ：

$$Q = 1440 N_s V$$

N_s 为抽油机的冲次

将附件 1 和附件 2 的参数值代入即可得一级杆的产量为 68.7057 吨，三级杆的产量为 16.1267 吨。

6.3 第二问的模型二：有效功率求解法模型

6.3.1 模型的建立与推导

从能量角度分析，抽油机在上下往复运动中做功主要有两个部分：

- (1) 将井下液体举升到地面所做的功。
- (2) 在运动过程中克服液体内部、液体与杆管之间的摩擦力所做的功。

光杆功率是指悬点示功图曲线所圈闭的面积与光杆运动周期之比，又称光杆马力，用符号 $PRHP$ 表示，且由下式计算：

$$PRHP = \frac{N_s}{60} \int_{t=t_0}^{t=t_0 + \frac{60}{N_s}} F(t)S(t)dt$$

式中， $F(t)$ ：表示悬点荷载值，单位为 N ，

$S(t)$ ：表示悬点位移值，单位为 m ，

N_s ：表示抽油机的冲次，单位为 \min^{-1} 。

在这里，我们用泵功图代替悬点示功图对抽油杆柱做的功进行分析，仍用 $PRHP$ 代替，这样光杆功率就可用泵功图所圈闭的面积与光杆运动周期之比。

有效功率是指抽油机在单位时间内，将一定量的液体提升到地面所做的无摩擦功，又称水马力，用符号 HP_h 表示，由下式计算：

$$HP_h = \frac{1}{86400} \times \rho_l g Q H_e$$

式中， ρ_l ：表示油管内混合液体的密度，单位为 kg/m^3 ；

g ：表示重力加速度，取 $g = 9.8m/s^2$ ；

Q ：表示井口日产液量，单位为 m^3 ；

H_e ：表示有效举升高度，单位为 m 。

摩擦功率是指抽油机在单位时间内，将一定量的液体举升到地面克服摩擦阻力所做的功，又称摩擦马力，用符号 HP_f 来表示。

通过泵功图，我们可以计算出抽油机的光杆功率。对于摩擦功率的计算，我们首先分析抽油机在工作时悬点所受到的摩擦荷载。基本上，摩擦荷载可以由以下五部分组成：

- (1) 抽油杆柱与油管的摩擦力：在直井中通常不超过抽油杆重量的 1.5%；
- (2) 柱塞与衬套之间的摩擦力：当泵径不超过 70 毫米时，其值小于 175 公斤；
- (3) 液柱与抽油杆柱之间的摩擦力：除与抽油杆柱的长度和运动速度有关外，

主要取决于液体的粘度；

- (4) 液柱与油管之间的摩擦力：除与液流速度有关外，主要取决于液体的粘度；
- (5) 液体通过游动阀的摩擦力：除与阀结构有关外，主要取决于液体粘度和液流速度。

上冲程中作用在悬点上的摩擦荷载是由(1)(2)和(4)三项组成，其方向向下，故增加悬点荷载。下冲程中作用在悬点上的摩擦荷载是由(1)(2)(3)和(5)四项组成，其方向向上，故减小悬点荷载。

在直井中，无论稠油还是稀油，油管与抽油杆柱、柱塞与衬套之间的摩擦力数值都不大，均可忽略。但在稠油井中，液体摩擦力所引起的摩擦荷载则是不可忽略的，下面我们给出如何求解摩擦力的方法与公式。

a. 抽油杆柱与液柱之间的摩擦力

抽油杆柱与液柱间的摩擦发生在下冲程，摩擦力方向向上，是稠油井内抽油杆下行遇阻的主要原因。阻力的大小随抽油杆的下行速度而变化，其最大值可由下面的近似公式来确定：

$$F_{f1} = \frac{2\pi\mu L}{9.81 \times 10^3} \left[\frac{m^2 - 1}{(m^2 + 1)Lm - (m^2 - 1)} \right] V_{\max}$$

式中， F_{f1} ——抽油杆柱与液柱之间的摩擦力，单位为 kg；

L ——抽油杆柱长度，单位为 m；

μ ——井内液体粘度；

m ——油管内径与抽油杆直径比， $m = dt / dr$ ；

dt ——油管内径；

dr ——抽油杆直径；

V_{\max} ——抽油杆柱最大下行速度；

V_{\max} 可以按悬点最大运动速度来计算，计算时采用下面的近似公式（把悬点看做简谐运动）：

$$V_{\max} = \frac{S}{2} \omega = \frac{\pi S n}{60}$$

式中， ω ——曲柄角速度， $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ ；

S ——光杆冲程；

n ——光杆冲数；

由上述公式可以看出，决定 F_{f1} 的主要原因是井内液体的粘度及抽油杆柱的运动速度；所以，在抽汲高粘度液体时，不能采用快速抽汲方式，否则将因下行阻力过大导致抽油杆无法正常下行。

b. 液柱与油管之间的摩擦力

上冲程时，游动阀关闭，油管内的液柱随抽油杆柱和活塞上行，液柱与

油管间发生相对运动而引起的摩擦力的方向向下，故增大悬点荷载。根据高粘度抽油井现场资料（示功图）分析，下冲程液柱与抽油杆间摩擦力 F_{f1} 约为上冲程中油管与液柱间摩擦力 F_{u1} 的 1.3 倍。因此，可根据 F_{f1} 来估算 F_{u1} ，即：

$$F_{u1} = \frac{F_{f1}}{1.3}$$

c. 液体通过游动阀时产生的摩擦力

在高粘度大产量井内，液体通过游动阀产生的阻力往往是造成抽油杆柱下部弯曲的主要原因，对悬点荷载也会造成不可忽略的影响。

液体通过游动阀时产生的压头损失可由下式计算：

$$h = \frac{1}{\mu^2} \frac{V_f^2}{2g} = \frac{1}{\mu^2} \frac{f_p^2}{f_f^2} \frac{V_p^2}{2g}$$

式中， h ——压头损失，单位为 m；

V_f ——液体通过阀门孔的流速；

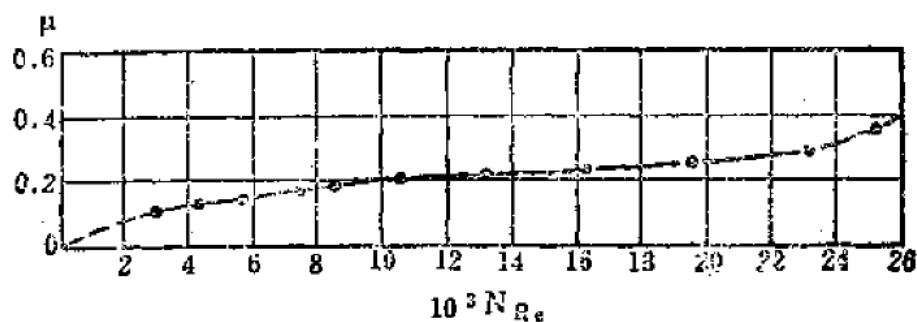
g ——重力加速度；

f_p ——活塞截面积，单位为 cm^2 ；

f_f ——阀门孔截面积，单位为 cm^2 ；

V_p ——活塞运动速度；

μ ——由实验确定的阀流量系数，对于常用的标准型阀可由下图查出。



上图中，

$$N_{Re} = \frac{d_f V_f}{\gamma}$$

式中， N_{Re} ——雷诺数；

d_f ——阀门孔径；

V_f ——液流速度；

γ ——液体运动粘度；单位为 cm^2/s 。

在抽汲过程中，通过阀门的液流速度随活塞运动速度而变。如果把活塞运动速度看作简谐运动，即：

$$V_p(t) = \frac{S}{2} \omega \sin \omega t$$

则活塞最大运动速度为：

$$V_p = \frac{S}{2} \omega$$

式中， S ——光杆冲程，不考虑抽油杆的弹性形变时，即为活塞冲程；

ω ——曲柄角速度， $\omega = \frac{\pi n}{30}$ 。

将 V_p 代入式 $h = \frac{1}{\mu^2} \frac{f_p^2}{f_f^2} \frac{V_p^2}{2g}$ ，可得：

$$h = \frac{1}{729\mu^2} \frac{f_p^2}{f_f^2} \frac{(Sn)^2}{2g}$$

由于液流通过游动阀的压头损失而产生的下行阻力位：

$$F_\gamma = \frac{\gamma_1 h}{10} f_p = \frac{\gamma_1}{7290\mu^2} \frac{f_p^3}{f_f^2} \frac{(Sn)^2}{2g}$$

式中， F_γ ——液流通过游动阀所产生的活塞下行阻力，单位为 kg ；

γ_1 ——液体比重；

综上可得 HP_f 的估计公式为：

$$HP_f = (F_{f1} + F_{u1} + F_\gamma)S$$

式中， $t_0 = 1\text{s}$ 为单位时间。

易知，光杆功率、水功率、摩擦功率三者之间满足如下关系：

$$PRHP = HP_h + HP_f$$

利用上述关系式，在得到光杆功率和摩擦功率后，计算出水功率，然后利用关系式就可得到油井的日产液量 Q 。

6.3.2 模型的验证

通过模型易知，产量大小与泵功图的面积呈线性关系，接下来，我们通过对附件数据的模拟，来验证模型的可靠性。

6.3.3 产量计算

结合本模型，利用附件 1 和附件 2 的原始数据，计算出一级杆的日产量为 103.7126 吨，三级杆的日产量为 47.1395 吨。

6.4 问题二模型

6.4.1 模型的推导

由泵功图易知，当存在气体时，泵功图的面积会发生显著地变化，因此我们可以把泵功图面积的变化率作为一个评判标准。但是由于其他各种影响因素的存在，单纯使用面积比较会存在误判的可能，因此根据理想情况下充气泵功图的特点，我们再加入下冲程过程中位移和荷载的变化率来对结果进行论证。

首先，根据理想的泵功图和充气泵功图，我们可以得到其在不同充气程度时的面积比例，以充气程度达到 $k_j (0 < k_j < 1)$ 为例：

$$k_j = \frac{S_A}{S_D}, \text{其中 } S_D \text{ 为理想泵功图面积, } S_A \text{ 为充气泵功图面积。}$$

则

$$\begin{cases} \frac{S'_A}{S'_D} \geq k, \text{ 没有充气} \\ \frac{S'_A}{S'_D} < k, \text{ 有可能充气} \end{cases}$$

若有可能充气，再通过位移和荷载的变换率来进行比较。由模型一的讨论可知，如果油井内没有充气，则变化率极值多发生在上下冲程的开始和结束处；而若内部充气，则有充气泵功图的特点易知在下冲程时位移变化率在开始时较为平缓。为此，我们通过计算没有充气的泵功图下冲程初段的荷载变化率与位移的变化率之比 ΔS ，由泵功图易知 $\Delta S \gg 1$ ，将此值作为一个评价标准，若有当前泵功图所得到的荷载变化率与位移变化率之比 $\Delta S'$ 满足 $\Delta S' \leq \tau \Delta S$ ，则可认为是充气的。其中松弛参数 $\tau \in (0,1]$ 根据实际情况选取。

6.4.2 模型的建立

以本题为例，首先可得

$$S_D = \frac{N_s}{60} \int_{t=t_0}^{t=t_0 + \frac{60}{N_s}} F(t)S(t)dt = (F(T/2) - F(0))(S(T/2) - S(0))$$

由理想充气泵功图的图形可简单的对 S_A 做如下近似：

$$S_A = \mu S_D$$

其中， μ 为充气百分比。则有

$$K_j = \mu$$

接下来，我们考虑实际情况下，没有额外损耗的泵功图。这可由泵效 η 给出一个近似的估计。作为实际产量与理论产量之比，泵效在正常情况下为 0.7~0.8。但是由于影响泵效的因素有很多，矿场实践中平均泵效往往低于 0.7。因此为了减小误判的情况，这里我们取 $\eta = 0.7$ ，即对实际泵功图面积可以做如下估计

$$S'_D = 0.7S_D$$

因此判断条件变为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S'_A}{0.7S_D} \geq k, \text{ 没有充气} \\ \frac{S'_A}{0.7S_D} < k, \text{ 有可能充气} \end{array} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu S'_A}{0.7S_A} \geq k, \text{ 没有充气} \\ \frac{\mu S'_A}{0.7S_A} < k, \text{ 有可能充气} \end{array} \right.$$

当判定有可能充气后，与模型一是计算相同，可以得到实际泵功图变化率之比 $\Delta S'$ ，结合前面的讨论，可以简单认为当 $\Delta S' \leq 1$ 时，泵内有气体的结论成立。

6.4.5 模型使用

1. 基于已建立模型，计算一级杆的泵功图及其面积如图 6.4.1

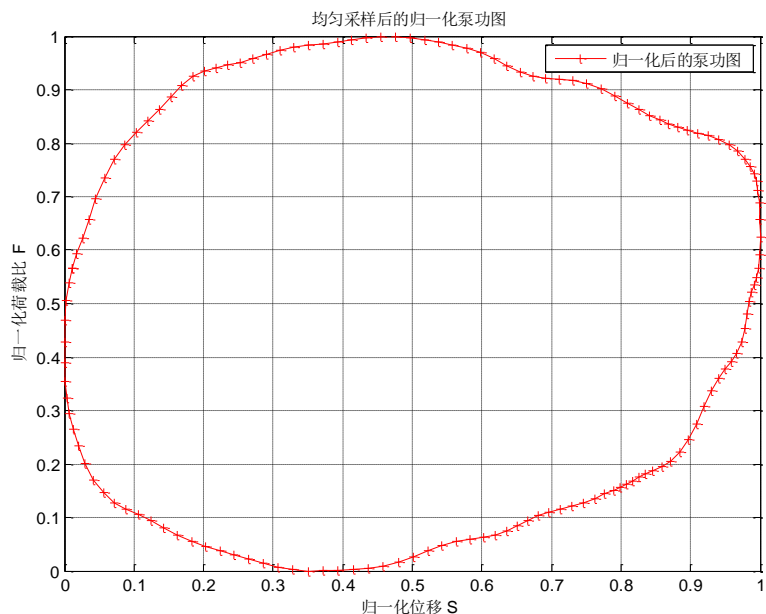


图 6.4.1 一级杆均匀采样归一化泵功图

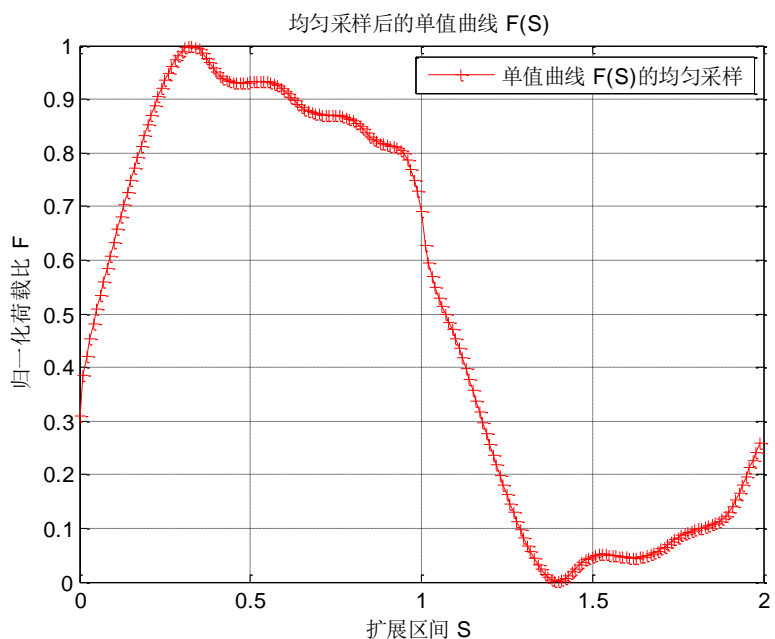


图 6.4.2 一级杆均匀采样后的单值曲线

2. 三级杆的泵功图及其面积的计算

将 s 区间 $[0,1]$ 范围曲线包含的面积减去 s 区间 $[1,2]$ 曲线包含的面积即为归一化后泵功图的有效面积，且计算结果为 0.6682。归一化后，可以认为标准泵功图的面积 S_D 大小为 1，通过选取不同的阈值，那么可以得到如下结果：

	单级杆（附录 1）	三级杆（附录 2）
阈值 ≥ 0.8	充气	充气
$0.7 \leq \text{阈值} < 0.8$	依阈值决定	充气
$0.6 \leq \text{阈值} < 0.7$	没充气	依阈值决定
阈值 < 0.6	没充气	没充气

对于判定充气的情况，为了降低误判的风险，我们通过比较泵功图的曲率对

问题进行分析，并根据比较情况给出最终结果。

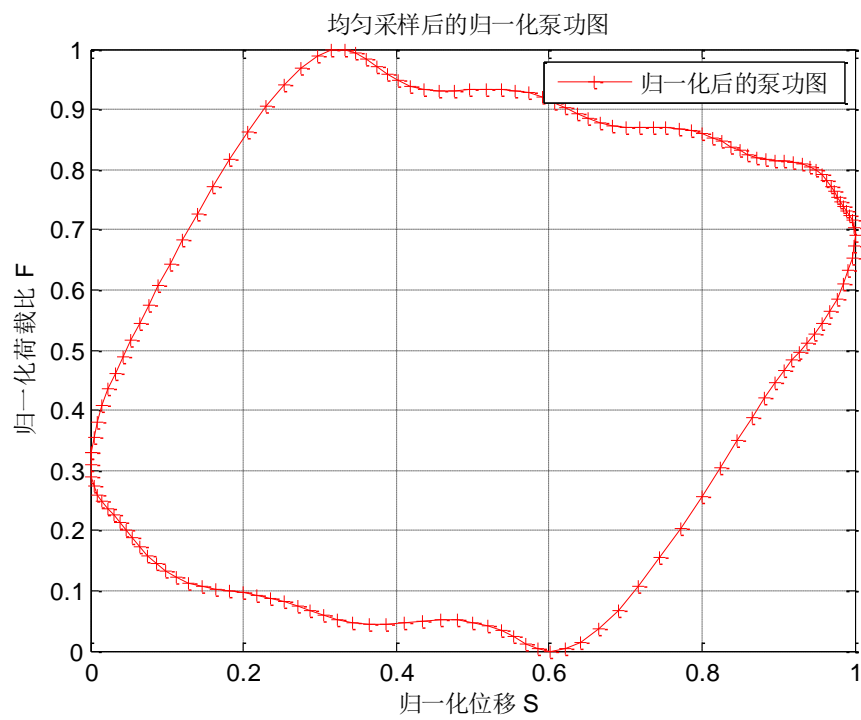


图 6.4.3 三级杆均匀采样后归一化泵功图

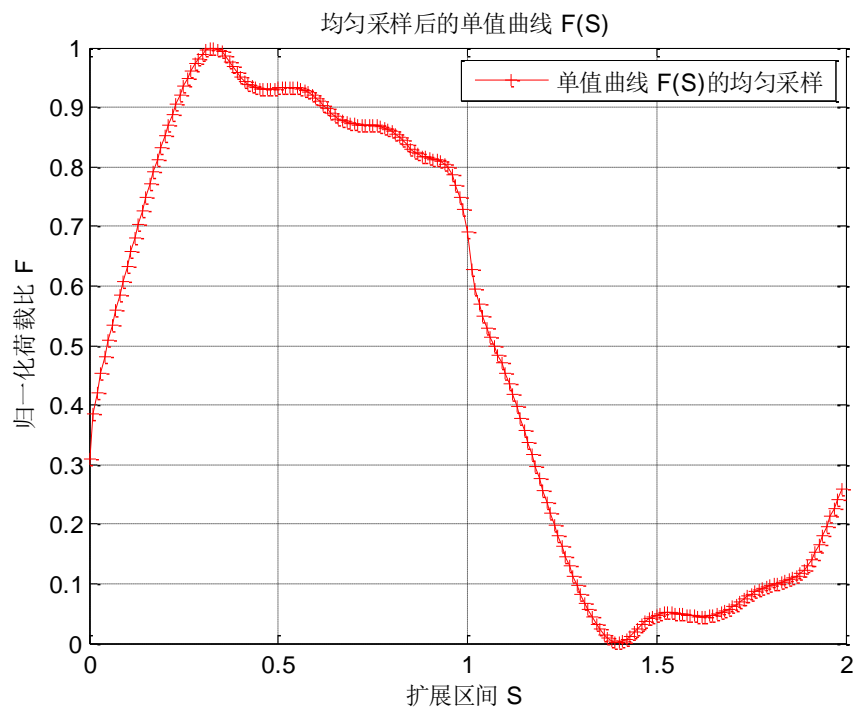


图 6.4.4 三级杆均匀采样后单值曲线

七、 问题四：Gibbs 模型深入研究

7.1 问题二

7.1.1 基于摩擦功的阻尼系数模型建立

根据地面示功图计算井下示功图时，需要确定阻尼系数。在应用 Gibbs 方程的解时，我们可以利用阻尼来表示各种阻尼力的综合效应，原始模型的阻尼系数公式做了很多近似假设，这些人为的假设使得模型不能完整的反应实际情况。

本文中结合题目附件 1,2 的泵深等数据，利用摩擦功的计算来确定阻尼系数。由于系统在消除等值阻尼力时，每一个循环中的能量与消除真实阻尼相同，因此我们可以通过计算抽油杆柱在一个循环中由粘滞阻力引起的摩擦功来确定阻尼系数。

首先，长度为 dx 的单元体的粘滞阻尼力为

$$F_d = C_F \frac{\partial u}{\partial t} dx = c \rho_r f_r \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (7-1-1)$$

则长度为 L 的抽油杆柱在一个循环中总的粘滞摩擦功可以表示为：

$$W = \int_0^L \int_0^T F_d \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = c \rho_r f_r \int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \quad (7-1-2)$$

故有

$$c = \frac{W}{\rho_r f_r \int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx} \quad (7-1-3)$$

利用将活塞提出泵筒（或脱卸器使抽油杆脱开活塞）后测得的示功图，就可以计算出抽油杆柱在粘性液体中运动时的摩擦功。每口井的抽汲条件不同，则摩擦功不同。在实际工作中，又不可能对所分析的油井都能进行这种专门的测试，但根据油井流体性质及抽汲参数可以得到摩擦功的表达式如下：

$$W = 2\pi\mu \left\{ \left[\frac{1}{\ln^m} + \frac{4B_1}{B_2} (B_1 + 1) \right] \int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \times \int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{x=L} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right] dx \right\} \quad (7-1-4)$$

这是因为抽油杆柱在液体中运动时，杆周围液体速度的分布可用不可压缩粘滞液体运动的微分方程来描述：

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \left(g - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (7-1-5)$$

令 $\mu = \frac{\gamma}{g\nu}$ ，则可将上述方程改写为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\gamma}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\gamma - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \quad (7-1-6)$$

为了简便地求得抽油杆柱在液体中运动时一个周期的粘滞摩擦功,忽略流体运动的惯性力影响,则 $\frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} = 0$ 。令 $A = -\left(\gamma - \frac{\partial p}{\partial x} \right)$, 则上述方程变为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{A}{\mu} r \quad (7-1-7)$$

对上式积分可得

$$v = \frac{A}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{其中 } C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 为任意实数}) \quad (7-1-4)$$

利用边界条件 $v|_{r=r_0} = \frac{\partial u}{\partial t}$ (抽油杆柱的运动速度) 和 $v|_{r=r_1} = 0$ 可得 C_1 和 C_2 , 将其值代入上式可得

$$v = \frac{-A}{4\mu} (r_1^2 - r) + \frac{\frac{A}{4\mu} (r_1^2 - r_0^2) + \frac{\partial u}{\partial t}}{\ln \frac{r_1}{r}} \ln \frac{r_1}{r} \quad (7-1-5)$$

根据抽油杆柱向下运动时,从环形空间被排出的液体体积流量 $\pi r_0^2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L}$,

可得

$$2\pi \int_{r_0}^{r_1} v r dr = -\pi r_0^2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L}$$

由上两式可得

$$A = \frac{4\mu}{r_0^2} - \frac{2}{B_2} \left(B_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \right)$$

其中, $B_1 = \frac{m^2 - 1}{2 \ln^m} - 1$, $B_2 = m^4 - 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{\ln^m}$, $m = \frac{r_1}{r_0}$ 。将 A 代入 (7-2-5)

式,并对 r 求导可得

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) = \frac{-1}{r_0} \left[\left(\frac{1}{\ln^m} + \frac{4B_1^2}{B_2} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4B_1^2}{B_2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \right]$$

则

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -2\pi r_0 \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right) = 2\pi \mu \left[\left(\frac{1}{\ln^m} + \frac{4B_1^2}{B_2} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4B_1^2}{B_2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \right]$$

将 A 代入 $A = -\left(\gamma - \frac{\partial p}{\partial x}\right)$ 可得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4\mu}{r_0^2} - \frac{2}{B_2} \left(B_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \right) + \gamma$$

取 x 断面处任意一个单元体 dx ，则它在一个循环中的粘滞摩擦功为

$$dw = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x} dx \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

其中， $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} + \pi r_0^2 \frac{\partial p}{\partial x}$ 为总的水力阻力梯度。

由 $\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0$ 和前面表达式可得

$$dW = 2\pi\mu \left\{ \left[\frac{1}{\ln m} + \frac{4B_1}{B_2} (B_1 + 1) \right] \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right\} dx \quad (7-1-6)$$

对整个抽油杆柱在一个冲程中积分即可得总的粘滞摩擦功 W 。

将 (7-2-4) 式代入 (7-2-3) 式可得阻尼系数的计算公式：

$$c = \frac{2\pi\mu}{\rho_r f_r} \left\{ \frac{1}{\ln m} + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \left[B_1 + \frac{\int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right] dx}{\int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx} \right] \right\} \quad (7-1-7)$$

上式中的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是未知的，不能直接用来计算 c 值。

为此，我们把悬点运动看成简谐运动，在确定 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 时，先不考虑粘滞阻尼（即先令 $c = 0$ ），把所研究的问题先归为上端做简谐运动、下端自由的细长杆的无阻尼纵振问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7-1-8)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} u|_{x=0} = \frac{S}{2} (1 - \cos \omega t) \\ -f_r E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

在上述边界条件下，解方程 (7-2-8) 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{S}{2} \omega \left(\cos \frac{\omega}{a} x + \tan \frac{\omega}{a} L \sin \frac{\omega}{a} x \right) \sin \omega t \quad (7-1-9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=L} = \frac{S}{2} \omega \frac{\sin \omega t}{\cos \frac{\omega}{a} L} \quad (7-1-10)$$

将 (7-2-9) 和 (7-2-10) 代入 (7-2-7) 可得

$$c = \frac{2\pi\mu}{\rho_r f_r} \left\{ \frac{1}{\ln^m} + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \left[B_1 + \frac{2}{\frac{\omega L}{a \sin \frac{\omega L}{a}} + \cos \frac{\omega}{a} L} \right] \right\}$$

7.1.2 模型求解

利用上节推导的公式，并结合附件 1,2 的原始测量数据，利用新模型对泵功图进行了重新计算（图 7.2.1），计算结果如下：

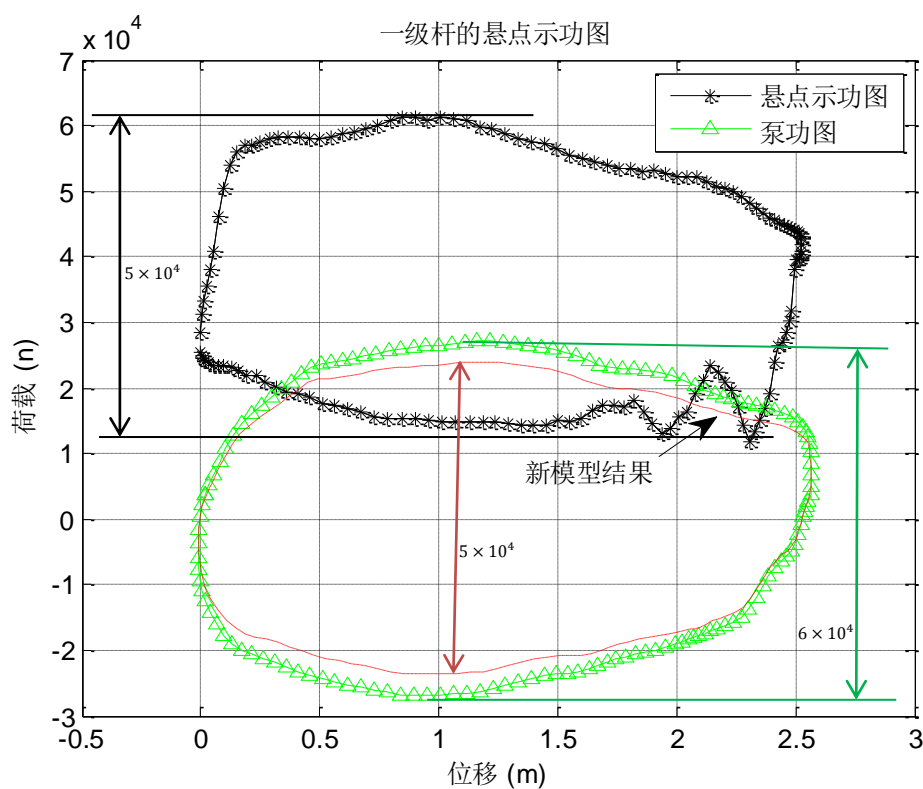


图 7.1.1 一级杆实际悬点示功图与仿真泵功图

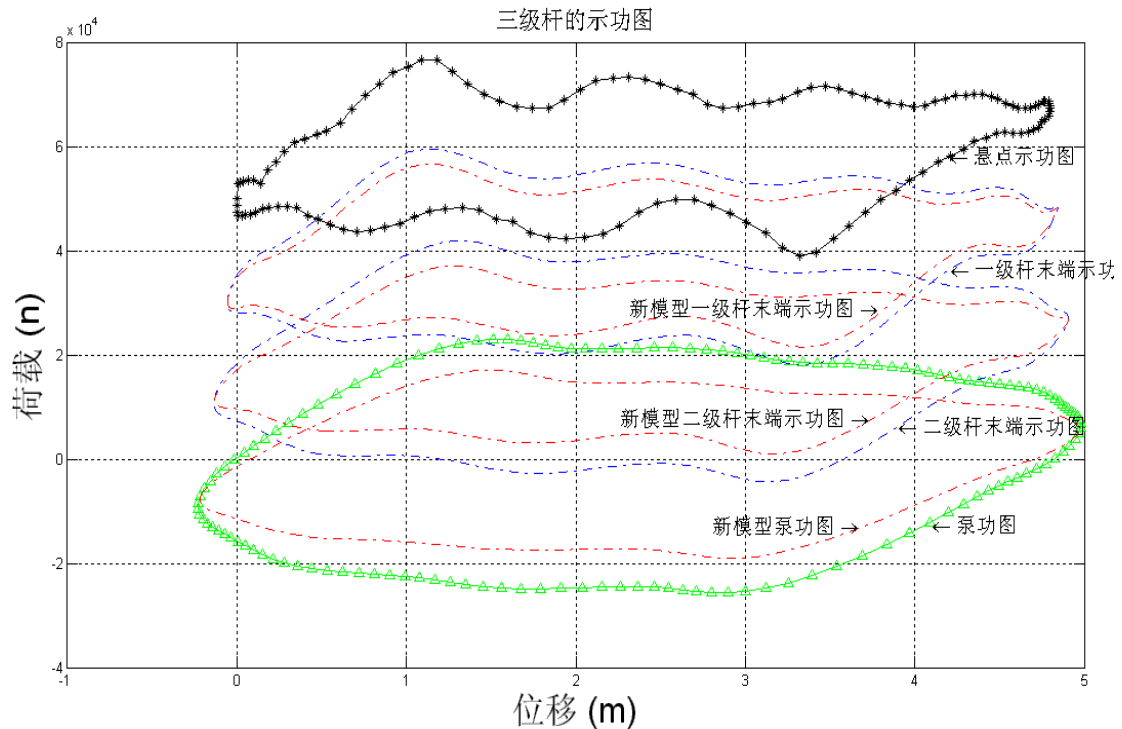


图 7.1.2 三级杆示功图与泵功图

从上图的结果可以看出,新模型下泵功图的荷载差更接近悬点示功图的荷载差,更符合实际情况一些,证明了修正后的阻尼系数计算表达式能完整反映实际情况,相同的结论同样可以在三级杆油井的计算结果中得出。

八、模型评价

本文首先用图解法分析建立了有杆抽油机四连杆机构后臂摆动方程,由该方程得出了前、后臂摆角的变化规律及悬点运动的位移、速度、加速度的计算模型,从而给出了求悬点运动参数精确解的一种计算方法。其次结合参考文献建立了泵功图的 Gibbs 模型,并用 Matlab 编程语言对模型进行了实现,分别计算和绘制出两口油井的悬点示功图和泵功图,并得到了一下重要的结论和规律。随后利用计算得到的泵功图对油井日产量的估计,井内有无气体的判断等实际应用问题做了详细的研究工作,得出了有实际参考价值的判断准则和计算方法。最后从方程本身和原始数据出发,对阻尼系数 c 的修正计算进行了详细的理论推导,并获得了更能完整的反应实际情况的计算表达式,实现了模型的推广。

为了抓住模型的核心问题,本文对实际问题做了诸多的合理模型假设,这些假设会使计算结果与实际测量结果存在一定的误差失真,因而本文的模型依然存在修正的空间。此外由于问题的部分简化,使我们的模型在通用性上存在一定的局限性,有待改正和推广。

九、 参考文献

- [1] Gibbs.S.G , Predicting the Behavior of Sucker Rod Pumping Systems, Jour.Pet.Tech.,July. 1963;
- [2] Gibbs.S.G , Neely,A.B , Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells, J.Pet.Tech.,Jan. 1966;
- [3] Gibbs.S.G ,Method of Determining Sucker Rod Pump Performance,United States Patent Office,Sep.1967;
- [4] 王元明,《数学物理方程与特殊函数》,高等教育出版社,2004 年 7 月;
- [5] 穆尔著,高会生,刘童娜,李聪聪译,《Matlab 实用教程(第二版)》,电子工业出版社,2010 年 1 月.