
参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯”
全国研究生数学建模竞赛

学 校 东南大学

参赛队号 10286035

队员姓名	1.葛浏昊
	2.范将科
	3.汤锦杰

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目

基于卫星无源探测的空间飞行器

主动段轨道估计与误差分析

摘 要：

本文首先根据观测卫星的初始位置、速度，以及观测卫星的运动方程计算出卫星的轨道，并得到 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。

然后利用题目所提供的双星观测数据，按照逐点交汇的方法，初步得到空间飞行器的运行轨迹；接着拟合出一个平面，使得目标飞行器的轨迹点到该平面的距离最小，进而将轨迹点投影到该平面上，再对位置数据进行了拟合，并求出了位置、速度、加速度曲线；将位置量、速度、加速度带入到空间飞行器的运动方程中，估计出空间飞行器的运动模型，并得到了 $m(t)$ 的模型。

根据双星观测数据以及由模型反推出的观测量之间的偏差，估计出观测卫星的系统误差。我们经过公式推导发现，三轴指向误差与观测量偏差之间存在线性关系；因此采用最小二乘法对数据进行一次拟合，分别求出了两颗卫星的系统误差。然后消除观测量中的系统误差，重新求出了空间飞行器的轨迹，并拟合出位置、速度、加速度曲线，估计了空间飞行器的运动模型。

最后，我们对单卫星观测进行了设计，推导和利用空间飞行器轨迹的限制条件，缩小了轨迹的搜索区域，并提出了搜索轨迹的方案。

基于卫星无源探测的空间飞行器

主动段轨道估计与误差分析

一、问题的提出

有些国家会发射特殊目的的空间飞行器，如弹道式导弹、侦察卫星等。对他国发射具有敌意的空间飞行器实施监控并作出快速反应，对于维护国家安全具有重要的战略意义。发现发射和探测其轨道参数是实现监控和作出反应的第一步，没有观测，后续的判断与反应都无从谈起。卫星居高临下，是当今探测空间飞行器发射与轨道参数的重要平台。

探测的目的是为了推断空间飞行器的轨道参数，推断是基于观测数据并通过数学模型与计算方法作出的。当观测卫星飞行一段时间，探测器测得目标相对于运动卫星的观测数据，以观测卫星和空间飞行器的运动模型和观测模型为基础，对空间飞行器的轨道参数（包括轨道位置、速度初值和其他模型参数）进行数学推断，为飞行器类别、飞行意图的判断提供信息基础。

本题以中低轨近圆轨道卫星为观测星座对假想的空间飞行器进行仿真观测，生成仿真观测数据，要求利用仿真观测数据，对假想空间飞行器的轨道参数进行估计。我们根据本题所给出的 28 颗卫星的信息以及观测卫星对空间飞行器的观测数据，对空间飞行器的轨道参数估计进行了初步研究，完成了以下工作：

（1）首先，在仅考虑随机误差的条件下，我们研究了下列问题：

1、根据观测卫星信息和观测卫星的简化运动方程，计算 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。结果保留 6 位有效数字。

2、在本题给定的仿真数据下，06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器形成了立体交叠观测，请结合立体几何知识按照逐点交汇定位的思路，给出 0 号空间飞行器在公式（1）框架下的轨道估计，注意选取适当的 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的表示模型。按照从 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样，计算并列表给出 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度，并给出估计残差。结果保留 6 位有效数字。同时绘制 0 号空间飞行器的三个位置 t-x、t-y、t-z 和三个速度 t-vx、t-vy、t-vz 曲线示意图。

（2）其次，在同时考虑系统误差的条件下，进一步研究下列问题：

3、若 06 和 09 号两颗观测卫星均有可能带有一定的系统误差，对系统误差进行正确的估计能够有效提高精度。利用上述的逐点交汇方法能否同时对系统误差进行估计？若不能，是否还有其他的思路能够同时估计系统误差与轨道？给出你的解决方案与估计结果。在报告中除给出与第二问要求相同的结果外，还应分别给出两颗观测卫星的系统误差估计结果，共六个数值，分别是两颗卫星的 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 。

4、对只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计。

二、问题基本假设

- (1) 观测卫星为中低轨近圆轨道卫星；
- (2) 观测误差中随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声，可能产生于背景辐射干扰与信息处理等多个方面；
- (3) 观测误差中系统误差为折合到观测坐标系的三轴指向误差，在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差；
- (4) 卫星对空间飞行器的观测数据均集中在空间飞行器的重力斜飞段的后程段；
- (5) 空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程如下：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}$$

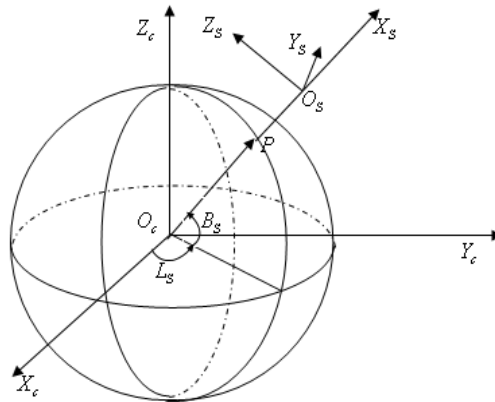
其中， $m(t)$ 为严格单调递减的非负函数， $\vec{v}_r(t)$ 的方向与飞行器的速度方向相反，其大小为恒定值；

$$(6) \text{ 观测卫星的简化运动方程为： } \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t)。$$

(7) 基础坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 系是惯性系。

三、符号说明

基础坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 系和随卫星运动的观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 如下图所示。



在空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程中：

\vec{F}_e ：表示飞行器所受的外力加速度之和；

\vec{F}_T ：表示火箭产生的推力加速度；

$m(t)$ ：为瞬时质量；

$\dot{m}(t)$ ：是质量变化率；

$\vec{r}(t)$ ：为空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量；

$\ddot{\vec{r}}(t)$ ：表示 $\vec{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数，即加速度；

G_m ：为地球引力常数（本题中地球引力常数取 $G_m = 3.986005 * 10^{14} m^3 / s^2$ ）；

$\vec{v}_r(t)$ ：是燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度。

观测卫星对于空间飞行器的观测数据：

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s}$$

其中， x_s, y_s, z_s 为空间飞行器在观测坐标系中的坐标。

三轴指向误差用三个常值小量 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 来表示：

d_α ：第一观测量 α 的平移量；

d_β ：第二观测量 β 的平移量；

d_θ ：观测量在 $\alpha\beta$ 平面内的旋转量。

以上符号均采用国际标准单位，即：时间单位为秒、距离单位为米、速度单位为米每秒，质量为千克。

四、模型的建立与求解

1. 观测卫星轨道的计算：

根据题目所提供的信息可知，观测卫星的简化运动方程：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (1.1)$$

在给定基础坐标系下的位置和速度初值情况下，可以利用常微分方程组数值解方法计算空间飞行器的运动轨迹。不同空间飞行器的本质差异就在于 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的模型不同， $m(t)$ 一般而言应为严格单调递减的非负函数。 $\vec{v}_r(t)$ 的方向一般应与飞行器的速度方向接近或相同，其大小一般较为稳定。

因此，可以利用常微分方程组数值解方法计算观测卫星的运动轨迹。

传统的常微分方程组的数值方法是 Runge-Kutta 法。但由于四阶 Runge-Kutta 法不收敛；本文中我们采用了 Runge-Kutta-Fehlberg 法，通过控制每步的步长，使得算法收敛。

本文在 MATLAB 中编写程序，计算出 09 号卫星的运行轨道，如图 1.1 所示（单位：m）。同时计算得到 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置，如表 1.1 所示，结果保留 6 位有效数字。

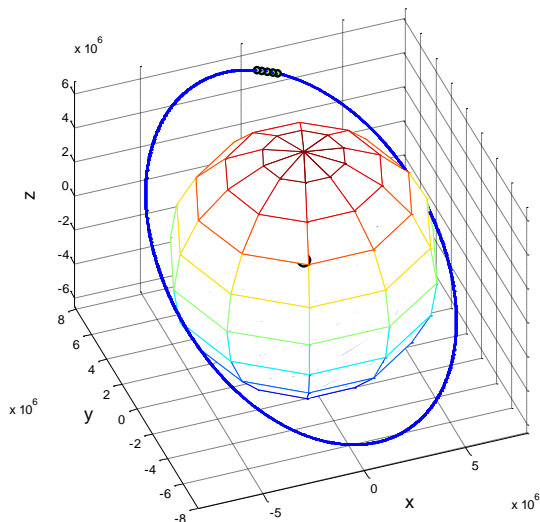


图 1.1 09 号卫星的运行轨道

表 1.1 09 号观测卫星在五个离散时刻的三维位置

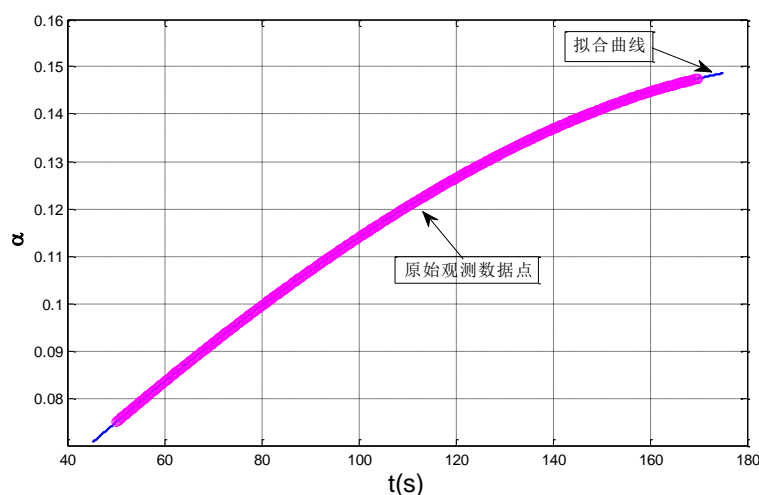
时刻 (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)
50.0	1.77381e+06	8.16139e+06	4.51670e+06
100.0	1.50163e+06	8.12678e+06	4.68469e+06
150.0	1.22771e+06	8.08273e+06	4.84723e+06
200.0	9.52360e+05	8.02931e+06	5.00416e+06
250.0	6.75911e+05	7.96659e+06	5.15529e+06

2. 利用双星定位估计空间飞行器的轨道：

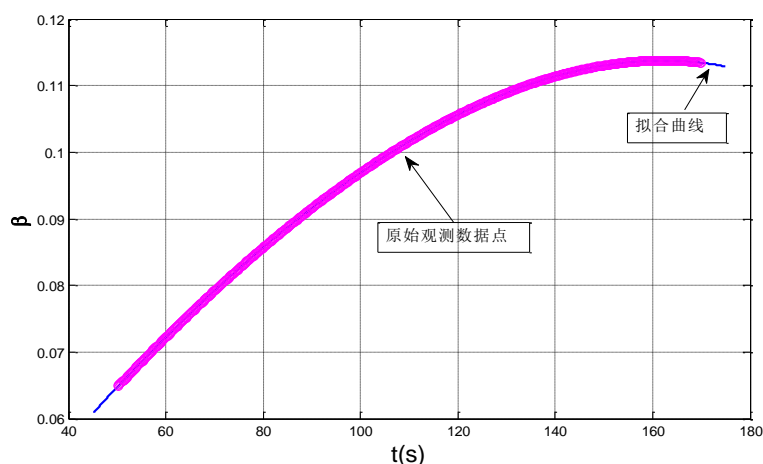
2.1 双星观测数据时间不对齐问题的解决：

通过观察仿真数据文件 meadata_06_00.txt 和 meadata_09_00.txt 中的仿真观测数据信息可以发现，虽然 06 号卫星和 09 号卫星均对 00 号空间飞行器进行观测，但是它们的观测时间并不严格对齐。因此，我们首先需要对其中一颗卫星的观测数据进行拟合，求出其在另一颗卫星观测时刻上的观测值。

由于该问仅考虑随机误差，且随机误差中仅包含白噪声，因此可以用最小二乘法对观测数据进行多项式拟合。本节以 09 号卫星的观测时刻为准，对 06 号卫星的观测数据进行六次多项式拟合，并将观测数据对齐到 09 号卫星的观测时刻上。在 MATLAB 中编写程序，绘制出拟合曲线以及原始数据点如图 2.1 所示。



(a) 观测量 α 的拟合



(b) 观测量 β 的拟合

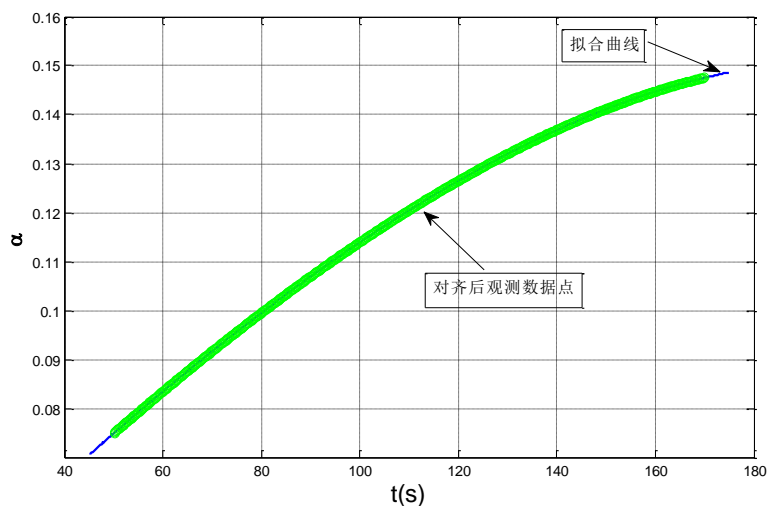
图 2.1 06 号卫星观测数据的拟合

同时得出观测量 α 、 β 的拟合曲线表达式为：

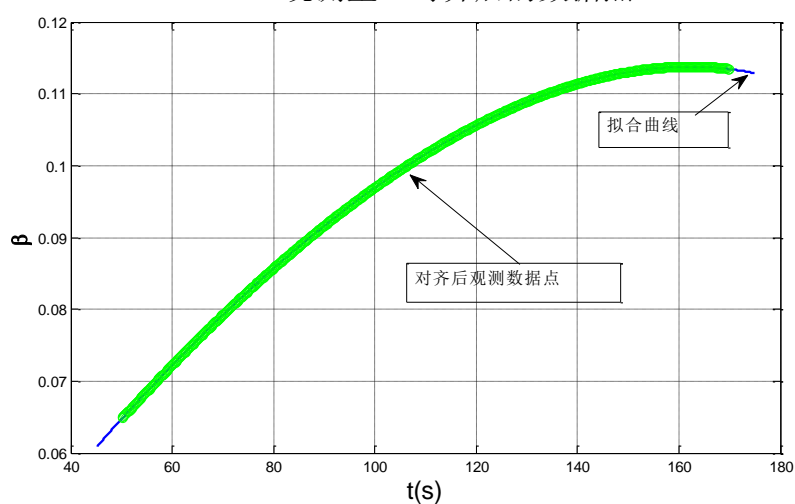
$$\alpha = -4.17448e-16t^6 + 1.82007e-13t^5 - 3.87875e-11t^4 + 1.64417e-10t^3 - 1.25631e-06t^2 + 0.001013t + 0.027504,$$

$$\beta = -1.45377e-16t^6 - 1.88970e-14t^5 + 1.58161e-11t^4 - 8.56294e-09t^3 - 1.15533e-06t^2 + 0.00094429t + 0.0213386$$

然后将 09 号卫星的观测时刻代入上述多项式表达式，求出 06 号卫星在 09 号卫星观测时刻上的观测值，在 MATLAB 中编写程序，绘制出拟合曲线以及对齐后的始数据点如图 2.2 所示。



(a) 观测量 α 对齐后的数据点



(b) 观测量 β 对齐后的数据点

图 2.2 06 号卫星对齐后的观测数据

2.2 计算双星在观测时刻上的位置：

采用第 1 节中的 Runge-Kutta-Fehlberg 方法，在 MATLAB 中分别求解 06 号和 09 号卫星的运动方程，并绘制出卫星轨道以及两卫星在 09 号卫星的观测时刻上的位置，如图 2.3 所示，图中粗线表示 06 号和 09 号两卫星在 09 号卫星的观测时刻上的运动轨迹。

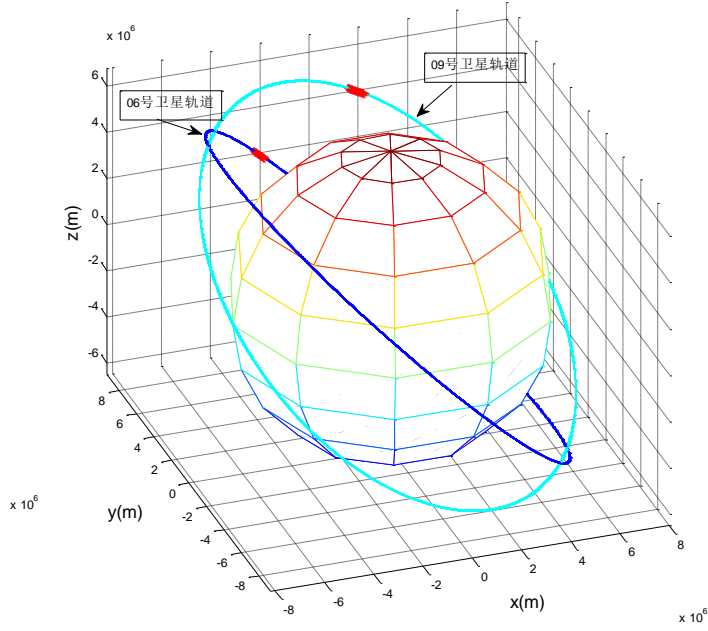


图 2.3 06 号和 09 号卫星的运行轨道

2.3 基础坐标系与观测坐标系之间的转换:

基础坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 系和随卫星运动的观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 如下图所示。

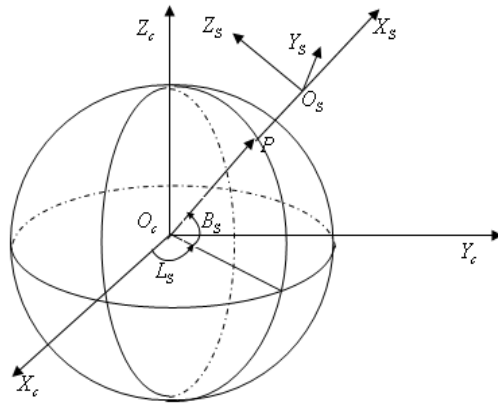


图 2.4 基础坐标系与观测坐标系

设观测坐标系原点 O_s 在基础坐标系中的坐标为 $[x_{os} \ y_{os} \ z_{os}]^T$ 。则坐标轴 X_s 在基础坐标系 X, Y, Z 三轴上的投影分别为 x_{os}/r_n , y_{os}/r_n 和 z_{os}/r_n , 其中 $r_n = \sqrt{x_{os}^2 + y_{os}^2 + z_{os}^2}$; 坐标轴 Z_s 在基础坐标系 X, Y, Z 三轴上的投影分别为 $a_x = -x_{os} \cdot \text{sgn}(z_{os})$, $a_y = -y_{os} \cdot \text{sgn}(z_{os})$ 和 $a_z = -(r_n^2/z_{os} - z_{os}) \cdot \text{sgn}(z_{os})$ 。同时令 $r_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ 。注意, 由于观测坐标系是, UEN 坐标系, Z 轴始终指向北极方向, 所以 Z_s 轴在基础坐标系 X, Y, Z 三轴上的投影的正负号应与 z_{os} 的正负有关。

设观测坐标系相对于基础坐标系的旋转矩阵为 ${}^c_s R = [\bar{n} \ \bar{o} \ \bar{a}]$, 其中 \bar{n} 、 \bar{o} 、

\vec{a} 均为三维列向量，计算方法如下：

$$\vec{n} = [x_{os}/r_n \quad y_{os}/r_n \quad z_{os}/r_n]^T, \quad \vec{a} = [a_x/r_a \quad a_y/r_a \quad a_z/r_a], \quad \vec{o} = \vec{a} \times \vec{n}。$$

如果已知某空间点 P 在观测坐标系中的坐标为 ${}^S P = [x_{ps} \quad y_{ps} \quad z_{ps}]^T$ ，那么该点在基础坐标系中的坐标应为 ${}^C P = {}^C T \cdot {}^S P$ 。

同理，设第 i 号 ($i=0,1,\dots,27$) 卫星的观测数据为 $(\alpha_i \quad \beta_i)$ ，即从 06 号卫星的观测坐标系原点指向目标的射线（以下称“观测射线”）的方向向量在观测坐标系中的坐标为 $[1 \quad \alpha_i \quad \beta_i]^T$ ，那么该方向向量在世界坐标系中的坐标为 ${}^C T \cdot [1 \quad \alpha_i \quad \beta_i]^T$ 。

2.4 用逐点交汇的方法求解目标飞行器的位置：

从理论上来说，如果不存在任何观测误差，在同一观测时刻双星对同一目标飞行器的观测射线应相交于一点，且该点即为该目标飞行器的位置。但由于观测误差的存在，在同一观测时刻 06 号卫星的观测射线与 09 号卫星的观测射线并不相交与一点。

为了解决上述问题，我们采取的方案是取距离两条双星观测射线距离最近的空间点为该观测时刻目标飞行器的位置。

当两空间直线不相交或不平行时，距离这两条空间直线最近的空间点即为它们的公垂线的垂足 P_1, P_2 连线中点 P_{mid} ，如图 2.5 所示。因此， P_{mid} 该观测时刻目标飞行器的位置点。

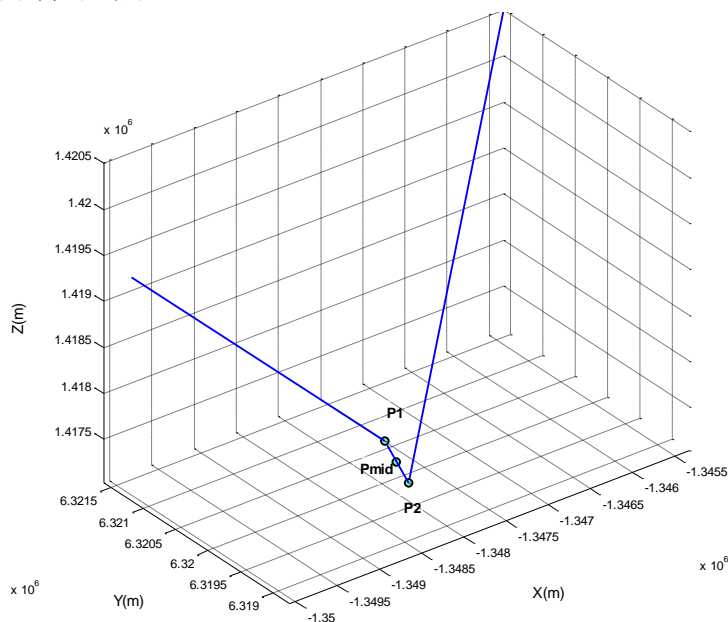


图 2.5 求两直线公垂线垂足连线中点的示意图

根据上述方法，逐点求出目标飞行器在 09 号卫星的观测时刻上的位置，如图 2.6 所示。

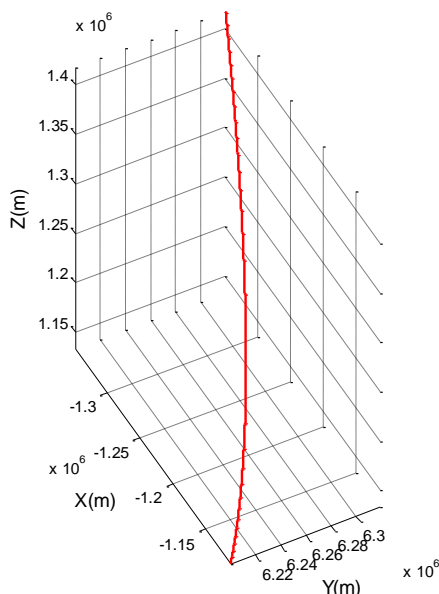


图 2.6 根据观测值得出的目标飞行器的运动轨迹

2.5 拟合目标飞行器的运动曲线:

上述求出的目标飞行器的运动轨迹是根据 06 号和 09 号两颗卫星的观测数据得出的，其中包含随机误差，即白噪声。因此，我们需要对得出的位置-时间曲线进行拟合，采用最小二乘法，去除其中的白噪声。

在对位置-时间曲线进行拟合之前，我们先来分析重力斜飞段中目标飞行器的运动规律。根据题目所给信息，在重力斜飞段，目标飞行器仅受重力 \vec{G} 和推力 \vec{T} 的作用，并且推力 \vec{T} 的方向始终与目标飞行器的速度方向相一致。根据所学的力学知识可知，在该运动阶段中，目标飞行器所受合力 $\vec{F} = \vec{G} + \vec{T}$ 与其运动速度始终在同一平面内，因此目标飞行器的运动轨迹必定在同一平面内。根据上述性质，我们首先在 MATLAB 中拟合出一个平面，使得 2.4 节中所求出的目标飞行器的轨迹点到该平面的距离最小；然后将这些轨迹点投影到该平面上。拟合得到的平面和投影轨迹如图 2.7 所示。

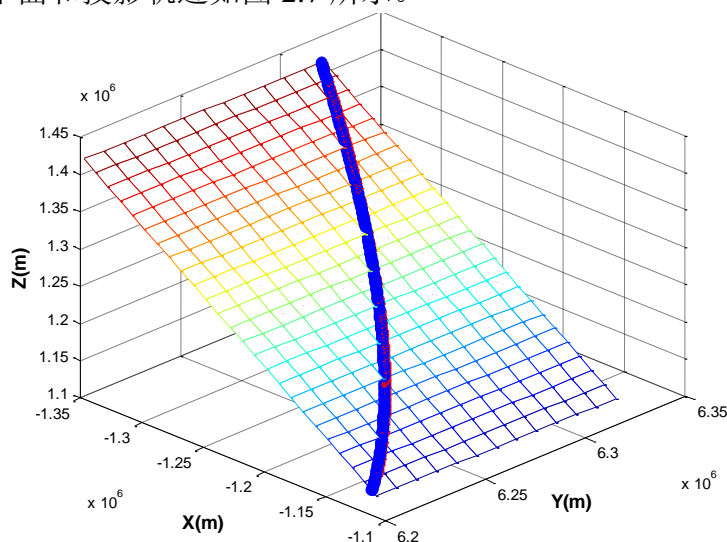


图 2.7 拟合平面与投影轨迹

接下来根据投影到平面上的目标飞行器的轨迹点拟合出三个位置分量 x, y, z

关于时间的函数。本文采用最小二乘法进行六次多项式拟合，在 MATLAB 中编写程序，拟合出的函数表达式如下：

$$p_x = -7.18812\text{e-}10t^6 + 2.44420\text{e-}07t^5 - 5.13831\text{e-}05t^4 - 0.0116596t^3 - 5.17592t^2 - 155.495t - 1.08957\text{e}06,$$

$$p_y = 2.24400\text{e-}10t^6 - 1.54686\text{e-}07t^5 + 7.03955\text{e-}05t^4 - 0.0217185t^3 + 5.42187t^2 + 317.048t + 6.17318\text{e}06,$$

$$p_z = 8.70490\text{e-}10t^6 - 2.93240\text{e-}07t^5 + 6.03146\text{e-}05t^4 + 0.0150115t^3 + 6.13428t^2 + 178.866t + 1.10660\text{e}06。$$

并且求出位置量的一阶导数 $v_x = \frac{d}{dt} p_x, v_y = \frac{d}{dt} p_y, v_z = \frac{d}{dt} p_z$ 和二阶导数 $a_x = \frac{d}{dt} v_x, a_y = \frac{d}{dt} v_y, a_z = \frac{d}{dt} v_z$ 。在 MATLAB 中绘制出目标飞行器的位置量拟合曲线及速度、加速度曲线如图 2.8 所示。三维空间中的运动轨迹如图 2.9 所示。

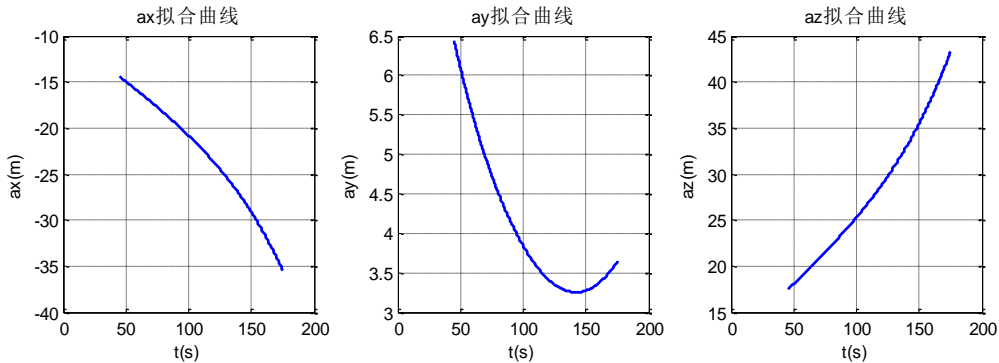
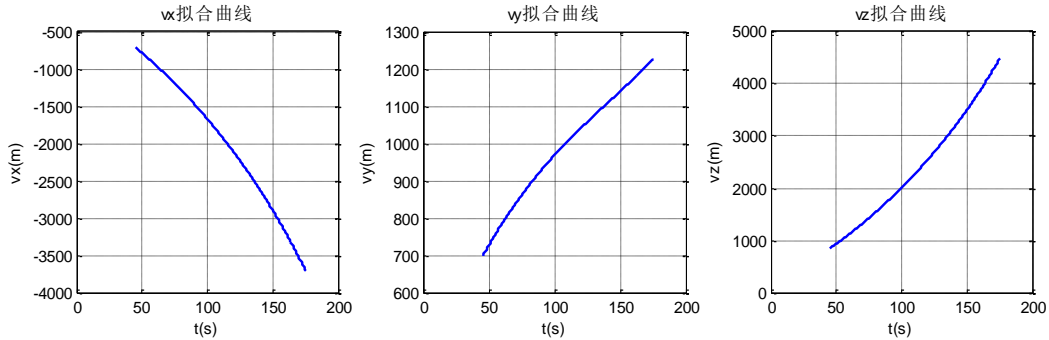
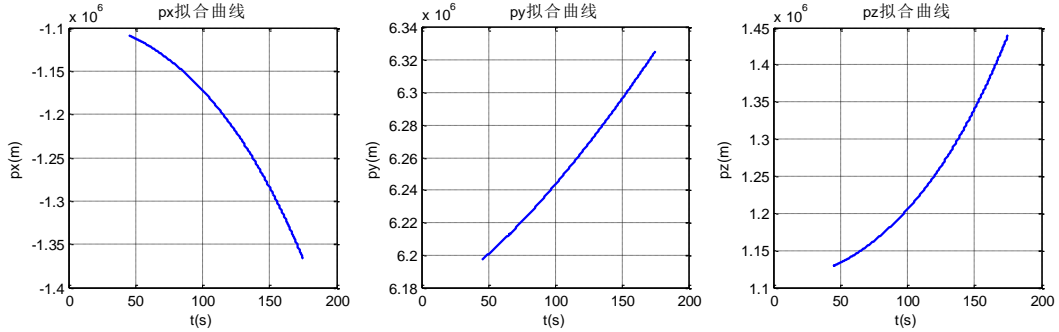


图 2.8 目标飞行器的位置量拟合曲线及速度、加速度曲线

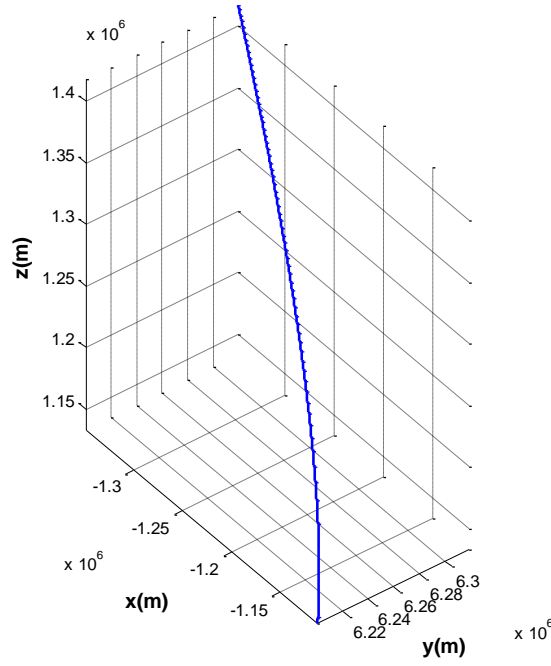


图 2.9 三维空间中的运动轨迹

2.6 计算估计残差:

根据如下公式计算估计残差: $Q_{ex} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}$, $Q_{ey} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$,

$Q_{ez} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}$ 。其中, $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为根据观测值直接计算出的空间飞行器位置坐标; $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为经过多项式拟合后, 在各观测时刻上的位置坐标估计值。

在 MATLAB 中编写程序, 求出三个方向上的估计残差 $Q_{ex}=4.59251(\text{m})$,

$Q_{ey}=8.58835(\text{m})$, $Q_{ez}=5.48184(\text{m})$ 。

2.7 估计空间飞行器的运动学方程:

根据题目信息可知, 空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程如下:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (2.1)$$

并且, $m(t)$ 为严格单调递减的非负函数, $\vec{v}_r(t)$ 的方向与飞行器的速度方向相反, 其大小为恒定值。

因此，可设 $\vec{v}_r(t) = k_v \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$, $k_v < 0$; $\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = f(t)$ 。

则方程 (2.1) 可以化为：

$$|\vec{v}(t)| \left(\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \right) = k_v f(t) \vec{v}(t) \quad (2.2)$$

即：

$$\begin{cases} k_v f(t) = \frac{|\vec{v}(t)|}{\dot{\vec{r}}_x(t)} \left(\ddot{\vec{r}}_x(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_x(t) \right) & \textcircled{1} \\ k_v f(t) = \frac{|\vec{v}(t)|}{\dot{\vec{r}}_y(t)} \left(\ddot{\vec{r}}_y(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_y(t) \right) & \textcircled{2} \\ k_v f(t) = \frac{|\vec{v}(t)|}{\dot{\vec{r}}_z(t)} \left(\ddot{\vec{r}}_z(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_z(t) \right) & \textcircled{3} \end{cases} \quad (2.3)$$

可以看出，方程①、②、③均可以求出 $k_v f(t)$ 。利用 2.5 节所拟合出的位置函数，以及速度、加速度函数，解出 $k_v f(t)$ 在 50s 至 170s 内的值，在 MATLAB 中分别绘制三个方程求出的 $k_v f(t)$ 变化情况，如图 2.10 所示。

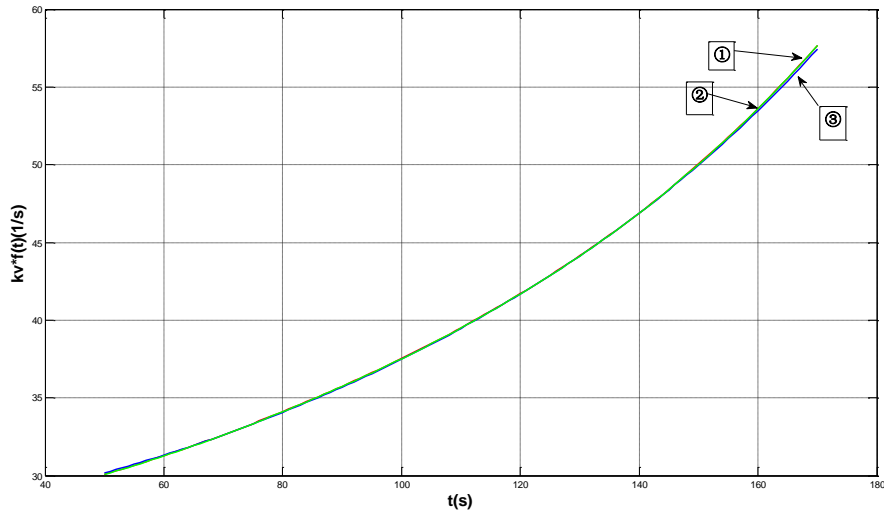


图 2.10 三个方程分别求出的 $k_v f(t)$ 变化情况

从上图中可以看出：三条曲线基本重合，这说明 2.5 节求出的拟合曲线基本符合空间飞行器的运动方程。

接下来要求与上述方程①、②、③吻合得最好的一条 $k_v f(t)$ 变化曲线。可以采用矩阵广义逆的方法，求出方程组 (2.3) 的最小二乘解。公式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_x(t) \\ \dot{\vec{r}}_y(t) \\ \dot{\vec{r}}_z(t) \end{bmatrix} k_v f(t) = |\vec{v}(t)| \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}}_x(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_x(t) \\ \ddot{\vec{r}}_y(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_y(t) \\ \ddot{\vec{r}}_z(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_z(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}}_x(t) \\ \dot{\vec{r}}_y(t) \\ \dot{\vec{r}}_z(t) \end{bmatrix}, \quad B = |\vec{v}(t)| \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}}_x(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_x(t) \\ \ddot{\vec{r}}_y(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_y(t) \\ \ddot{\vec{r}}_z(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}_z(t) \end{bmatrix}, \text{ 则最小二乘解为:}$$

$$k_v f(t) = A^+ B = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (2.5)$$

按照上述公式,在 MATLAB 中编写程序,计算 50s 到 70s 每隔 0.1s 的 $k_v f(t)$ 值,并绘制出 $k_v f(t)$ 变化曲线如图 2.11 所示。

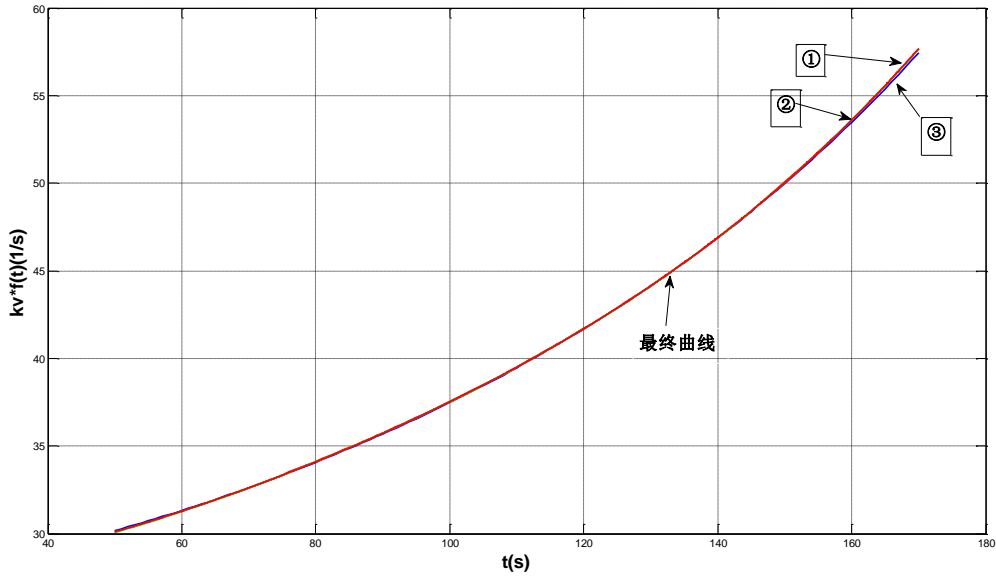


图 2.11 $k_v f(t)$ 的最小二乘解

然后对上一步求出的 $k_v f(t)$, 采用八次多项式拟合, 拟合多项式为:

$$k_v f(t) = -4.93504e-18t^8 + 4.92301e-15t^7 - 2.08501e-12t^6 + 4.67116e-10t^5 - 1.68335e-08t^4 - 8.15737e-06t^3 + 0.00193023t^2 - 0.0250461t + 27.5362 \quad (2.6)$$

从 $k_v f(t)$ 的解析表达式可以看出, $k_v f(t)$ 可以近似为

$k_v f(t) = -8.15737e-06t^3 + 0.00193023t^2 - 0.0250461t + 27.5362$ ，则 $m(t)$ 可以表示为：

$$m(t) = C_m \cdot \exp(-2.03934e-06t^4 + 6.43412e-04t^3 - 0.0125231t^2 + 27.5362t)$$

其中， C_m 为一常数。

同时，在 MATLAB 中绘制出 50s 到 170s 的拟合曲线如图 2.12 所示。

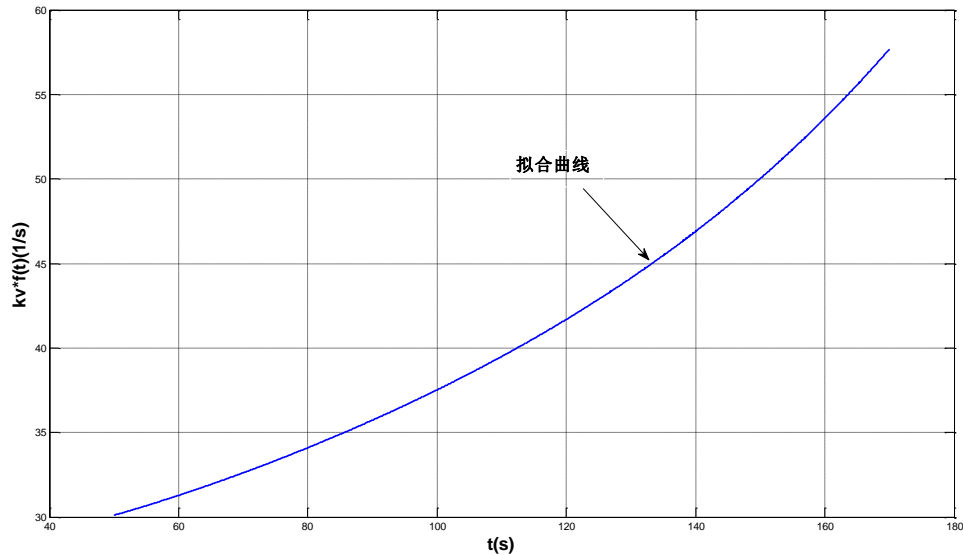


图 2.12 $k_v f(t)$ 拟合曲线

因此，将 $k_v f(t)$ 的表达式代入方程 (2.1)，可得空间飞行器的运动学方程为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + k_v f(t) \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad (2.7)$$

2.8 估计空间飞行器的轨道：

利用 Runge-Kutta-Fehlberg 法，求微分方程 (2.7) 的数值解。在 MATLAB 中编写程序，计算出微分方程 (2.7) 在 50s 到 170s 区间内的数值解，并绘制出其轨迹曲线，如图 2.13 所示。并从 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样，计算并列表给出 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度，具体数据见表 2.1。

同时绘制 0 号空间飞行器的三个位置 t - x 、 t - y 、 t - z 和三个速度 t - v_x 、 t - v_y 、 t - v_z 曲线示意图，如图 2.14 所示。

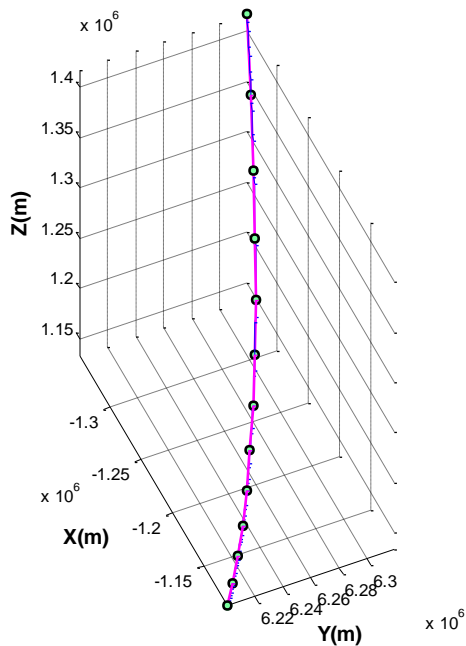
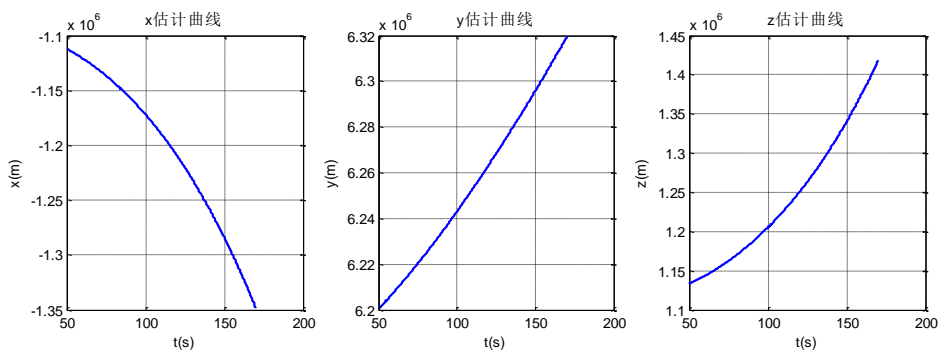


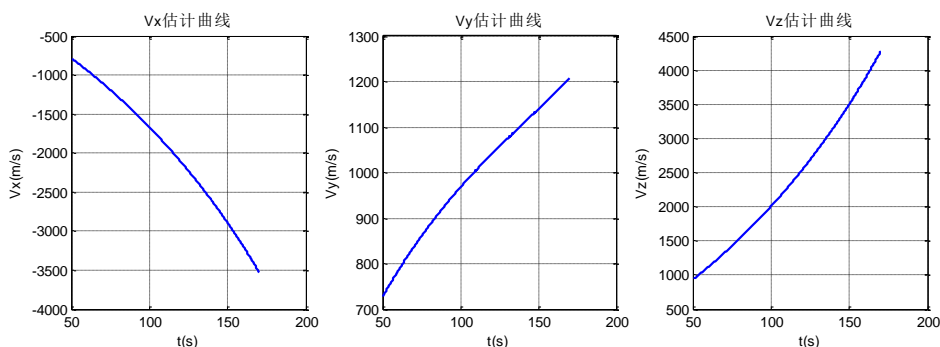
图 2.13 估计出的空间飞行器的轨道

表 2.1 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度

时刻 (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)	V _x (m/s)	V _y (m/s)	V _z (m/s)
50.0	-1.11200e+06	6.20027e+06	1.13305e+06	-779.416	727.146	927.930
60.0	-1.12055e+06	6.20783e+06	1.14326e+06	-933.845	784.677	1114.98
70.0	-1.13071e+06	6.21594e+06	1.15540e+06	-1099.18	836.688	1315.60
80.0	-1.14257e+06	6.22455e+06	1.16962e+06	-1275.85	884.007	1530.28
90.0	-1.15627e+06	6.23361e+06	1.18605e+06	-1464.39	927.336	1759.64
100.0	-1.17190e+06	6.24309e+06	1.20486e+06	-1665.41	967.306	2004.42
110.0	-1.18962e+06	6.25295e+06	1.22620e+06	-1879.73	1004.53	2265.59
120.0	-1.20955e+06	6.26317e+06	1.25023e+06	-2108.35	1039.60	2544.36
130.0	-1.23184e+06	6.27373e+06	1.27715e+06	-2352.57	1073.18	2842.29
140.0	-1.25666e+06	6.28463e+06	1.30715e+06	-2613.98	1105.92	3161.32
150.0	-1.28418e+06	6.29585e+06	1.34045e+06	-2894.58	1138.55	3503.85
160.0	-1.31462e+06	6.30740e+06	1.37731e+06	-3196.77	1171.83	3872.82
170.0	-1.34820e+06	6.31929e+06	1.41801e+06	-3523.47	1206.60	4271.75



(a) 目标飞行器的位置量估计曲线



(b) 目标飞行器的速度估计曲线

图 2.14 目标飞行器的位置、速度估计曲线

3. 估计卫星对空间飞行器观测的系统误差:

该题系统误差可折合为观测坐标系的原点位置误差和三轴指向误差。根据工程经验, 原点位置误差影响较小, 而三轴指向误差影响较大, 对三轴指向误差进行估计对于提高估计精度很有帮助, 本题中只考虑三轴指向误差。三轴指向误差在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差, 具体可以用三个常值小量 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 来表示, 分别表示第一观测量 α 的平移量、第二观测量 β 的平移量以及观测量在 $\alpha\beta$ 平面内的旋转量。

3.1 卫星观测数据中的系统误差:

在 2.7 节中, 我们分别在 x, y, z 三个方向进行模型反推, 计算出三个 $k_v f(t)$, 画出其变化曲线, 从图 2.10 中可以看出三条曲线基本重合, 说明计算拟合得到的 $x(t), y(t), z(t)$ 满足目标飞行器的简化运动方程。

利用 $x(t), y(t), z(t)$ 进行反推计算 α, β , 与观测的 α, β 进行比较, 06 号和 09 号卫星的观测数据与估计数据分别如表 3.1 和表 3.2 所示, 其中 $\Delta\alpha = \alpha_{\text{估计}} - \alpha_{\text{测量}}$, $\Delta\beta = \beta_{\text{估计}} - \beta_{\text{测量}}$ 。从这两个表中可以看出, 无论是 06 号卫星还是 09 号卫星, $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\beta$ 均为微小量, 且随时间变化不明显, 因此这一偏差主要不是由于随机误差引起的。而造成这一恒定偏差存在的原因就在于存在于观测误差中的系统误差。因此, 我们可以利用观测值与估计值之间存在的偏差来估计系统误差。

表 3.1 06 号卫星观测值与估计值比较

时刻 (s)	$\alpha_{\text{测量}}$	$\beta_{\text{测量}}$	$\alpha_{\text{估计}}$	$\beta_{\text{估计}}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
50.181218	0.0749844	0.0648250	0.0752362	0.0651167	0.0002518	0.0002917
60.181218	0.0835495	0.0723023	0.0838023	0.0725924	0.0002527	0.0002901
70.181218	0.0917636	0.0792941	0.0920182	0.0795839	0.0002545	0.0002898
80.181218	0.0995994	0.0857640	0.0998523	0.0860496	0.0002529	0.0002855
90.181218	0.1070283	0.0916754	0.1072838	0.0919615	0.0002555	0.0002862
100.181218	0.1140204	0.0969899	0.1142729	0.0972706	0.0002525	0.0002807
110.181218	0.1205436	0.1016669	0.1207995	0.1019494	0.0002559	0.0002825
120.181218	0.1265633	0.1056618	0.1268197	0.1059429	0.0002563	0.0002811
130.181218	0.1320416	0.1089253	0.1322979	0.1092046	0.0002563	0.0002793
140.181218	0.1369356	0.1114012	0.1371941	0.1116813	0.0002585	0.0002801
150.181218	0.1411959	0.1130254	0.1414542	0.1133038	0.0002582	0.0002784
160.181218	0.1447650	0.1137242	0.1450240	0.1140019	0.0002589	0.0002777

表 3.2 09 号卫星观测值与估计值比较

时刻 (s)	测量 α	测量 β	计算 α	计算 β	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
50.181218	-0.62660 90	0.4628 584	-0.62673 84	0.4625 817	-0.0001290	-0.0002766
60.181218	-0.62216 08	0.4708 146	-0.62228 67	0.4705 364	-0.0001259	-0.0002782
70.181218	-0.61820 07	0.4785 548	-0.61832 43	0.4782 741	-0.0001236	-0.0002807
80.181218	-0.61477 15	0.4860 447	-0.61489 12	0.4857 655	-0.0001197	-0.0002793
90.181218	-0.61189 56	0.4932 719	-0.61201 37	0.4929 895	-0.0001181	-0.0002824
100.181218	-0.60965 48	0.5002 066	-0.60976 89	0.4999 273	-0.0001141	-0.0002793
110.181218	-0.60805 99	0.5068 367	-0.60817 32	0.5065 535	-0.0001132	-0.0002833
120.181218	-0.60720 79	0.5131 352	-0.60731 92	0.5128 514	-0.0001113	-0.0002838
130.181218	-0.60714 71	0.5190 762	-0.60725 65	0.5187 924	-0.0001093	-0.0002838
140.181218	-0.60796 05	0.5246 453	-0.60806 90	0.5243 593	-0.0001086	-0.0002861
150.181218	-0.60975 50	0.5298 137	-0.60986 21	0.5295 281	-0.0001071	-0.0002856
160.181218	-0.61262 98	0.5345 583	-0.61273 60	0.5342 723	-0.0001062	-0.0002860

3.2 推导三轴指向误差与观测量的关系:

定义 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ 表示根据空间飞行器的估计模型反推出的观测量, α , β 表示直接由卫星观测得出的观测量。在 α - β 平面中, 点 (α, β) 绕坐标原点旋转角度 d_θ , 得到点的坐标为 $(\alpha \cos d_\theta - \beta \sin d_\theta, \beta \cos d_\theta + \alpha \sin d_\theta)$, 再将该点平移向量 (d_α, d_β) , 得到点的坐标为 $(\alpha \cos d_\theta - \beta \sin d_\theta + d_\alpha, \beta \cos d_\theta + \alpha \sin d_\theta + d_\beta)$ 。

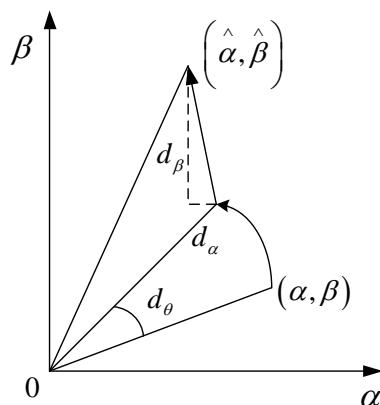


图 3.1 三轴指向误差示意图

由于系统误差全部折算到三轴指向误差 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 上, 因此点

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (\alpha \cos d_\theta - \beta \sin d_\theta + d\alpha, \beta \cos d_\theta + \alpha \sin d_\theta + d\beta)。$$

由于 θ 为一个微小的旋转量，所以有 $\cos d_\theta = 1, \sin d_\theta = d_\theta$ 。将该关系代入上式，可得如下方程组：

$$\begin{cases} \alpha - \beta d_\theta + d\alpha = \hat{\alpha} \\ \beta + \alpha d_\theta + d\beta = \hat{\beta} \end{cases} \quad (3.1)$$

因此，

$$\begin{cases} -\beta d_\theta + d\alpha = \hat{\alpha} - \alpha \\ \alpha d_\theta + d\beta = \hat{\beta} - \beta \end{cases} \quad (3.2)$$

从而推导出了三轴指向误差与观测量的关系。

3.3 计算三轴指向误差：

由公式(3.1)、(3.2)可知， $\hat{\alpha} - \alpha$ 与 β 存在线性关系， $\hat{\beta} - \beta$ 与 α 也存在线性关系。

首先对 06 号卫星的数据进行拟合。如图 3.2 所示，采用一次多项式拟合数据，得到 β 与 $\hat{\alpha} - \alpha$ 之间的关系为： $\hat{\alpha} - \alpha = 0.0001405\beta + 0.0002417$ ，从而可以得出 $d\theta = -0.0001405$ ， $d\alpha = 0.0002417$ 。如图 3.2 所示，采用一次多项式拟合数据，得到 α 与 $\hat{\beta} - \beta$ 之间的关系为： $\hat{\beta} - \beta = -0.0002062\alpha + 0.0003062$ ，从而可以得出 $d\theta = -0.0002062$ ， $d\beta = 0.0003062$ 。

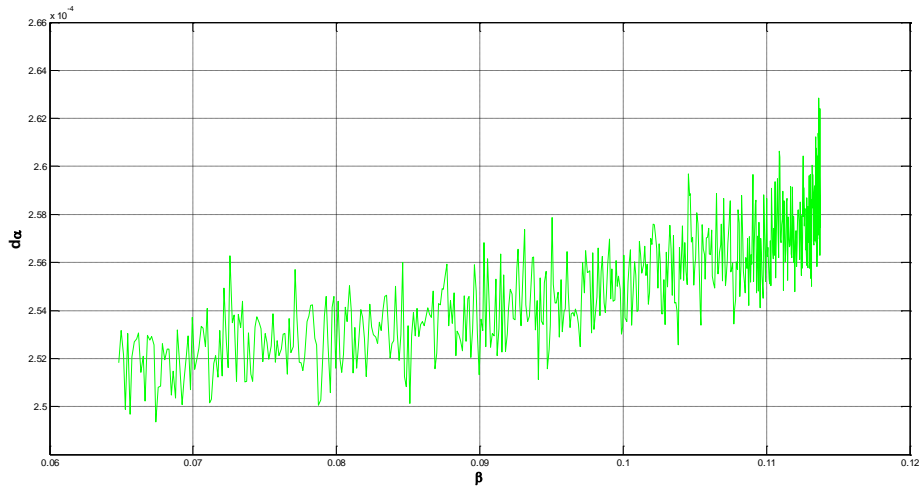


图 3.2 06 号卫星 β 与 $\hat{\alpha} - \alpha$ 之间的关系

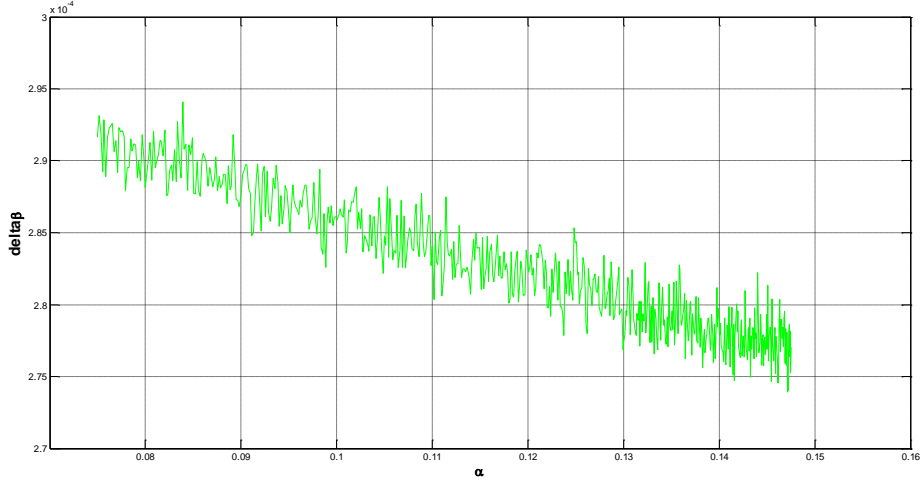


图 3.3 06 号卫星 α 与 $\hat{\beta}-\beta$ 之间的关系

将 (3.2) 方程组中两式相减，再次进行一次多项式拟合，结果求得 $(\hat{\beta}-\beta)-(\hat{\alpha}-\alpha)=-0.00017(4\alpha+\hat{\beta})+6.542e-5$ ，从而可得 $d\theta=-0.00017^\circ$ ， $d\beta-d\alpha=6.542e-05$ 。

综上，06 号卫星的三轴指向误差为 $d\theta=-0.0001627$ ， $d\alpha=0.0002417$ ， $d\beta=0.0003062$ 。

然后对 09 号卫星的数据进行拟合。如图 3.4 所示，采用一次多项式拟合数据，得到 β 与 $\hat{\alpha}-\alpha$ 之间的关系为： $\hat{\alpha}-\alpha=0.0003108\beta-0.0002713$ ，从而可以得出 $d\theta=-0.0003108$ ， $d\alpha=-0.0002713$ 。如图 3.5 所示，采用一次多项式拟合数据，得到 α 与 $\hat{\beta}-\beta$ 之间的关系为： $\hat{\beta}-\beta=-0.0003610\alpha-0.0005022$ ，从而可以得出 $d\theta=-0.0003610$ ， $d\beta=-0.0005022$ 。

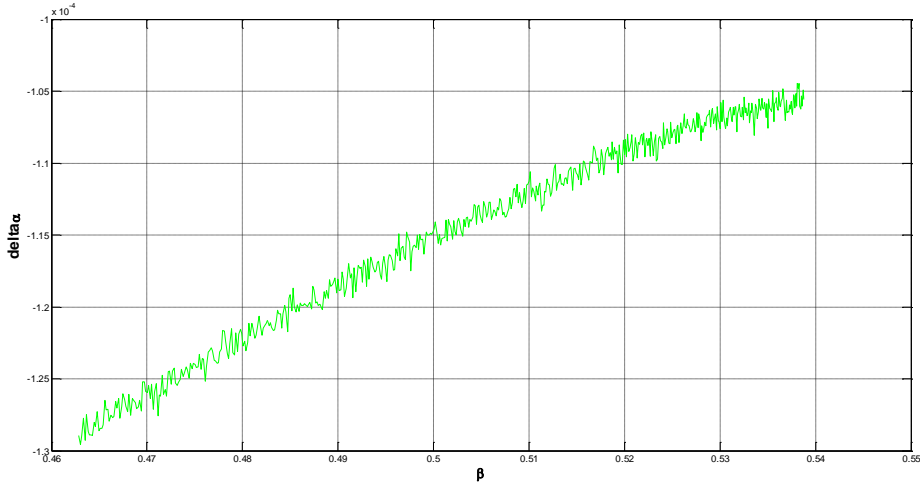


图 3.2 09 号卫星 β 与 $\hat{\alpha}-\alpha$ 之间的关系

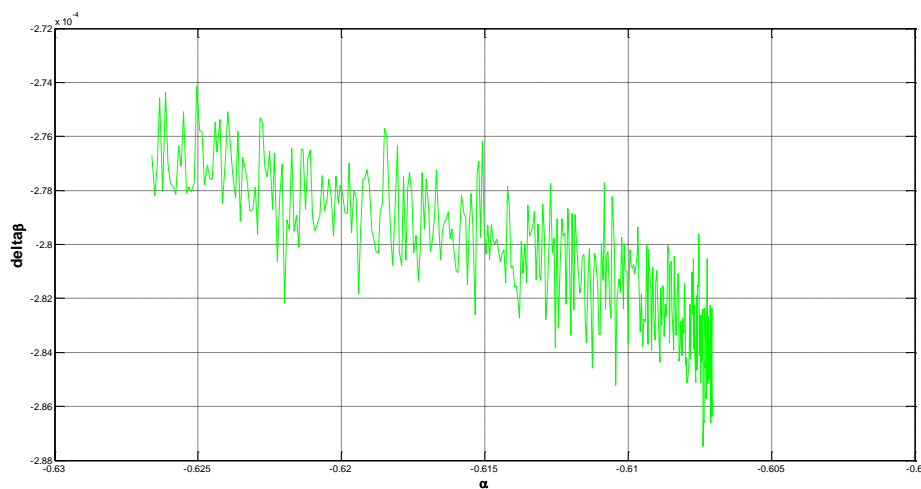


图 3.3 09 号卫星 α 与 $\hat{\beta}$ - β 之间的关系

综上，09 号卫星的三轴指向误差为 $d\theta = -0.0003359$ ， $d\alpha = -0.0002713$ ， $d\beta = -0.0005022$ 。

考虑了系统误差，对测量值 α, β 进行系统误差修正，利用修正后的结果重新估计空间飞行器的运动学方程，在 MATLAB 中分别绘制三个方程求出的 $k_v f(t)$ 变化情况，如图 3.4 所示。

从图 3.4 中可以看出：三条曲线几乎重合在一起，这说明本节求出的拟合曲线基本符合空间飞行器的运动方程。

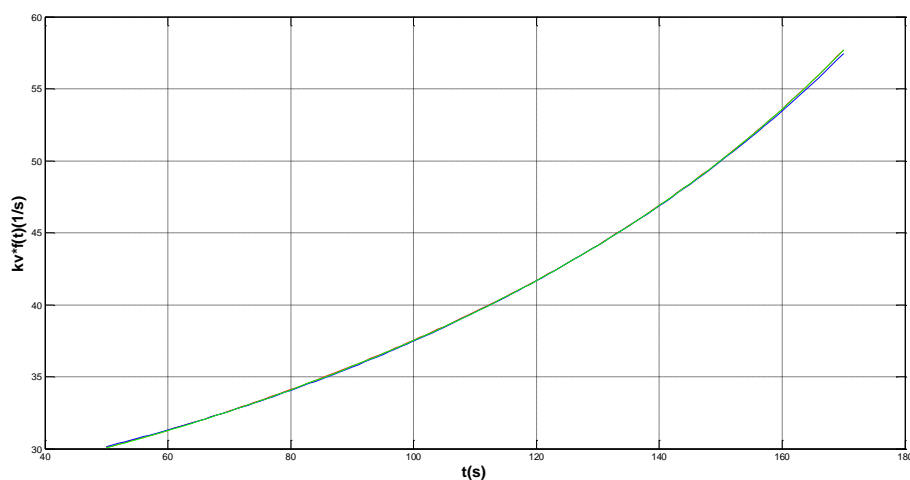
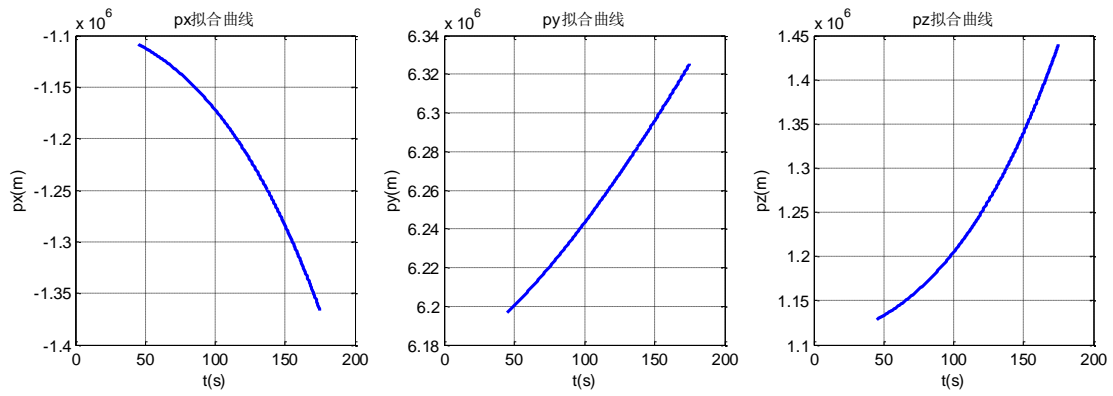


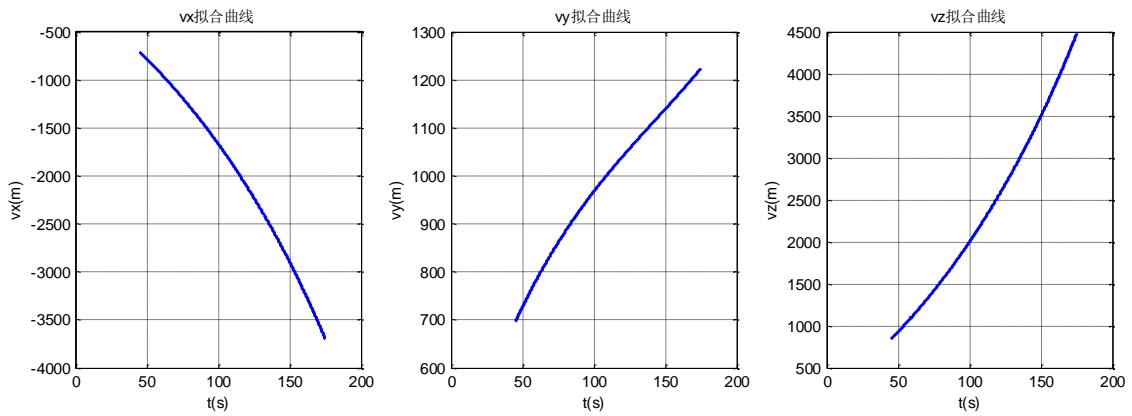
图 3.4 系统误差修正后的 $k_v f(t)$ 变化情况

3.4 重新计算目标飞行器的轨迹：

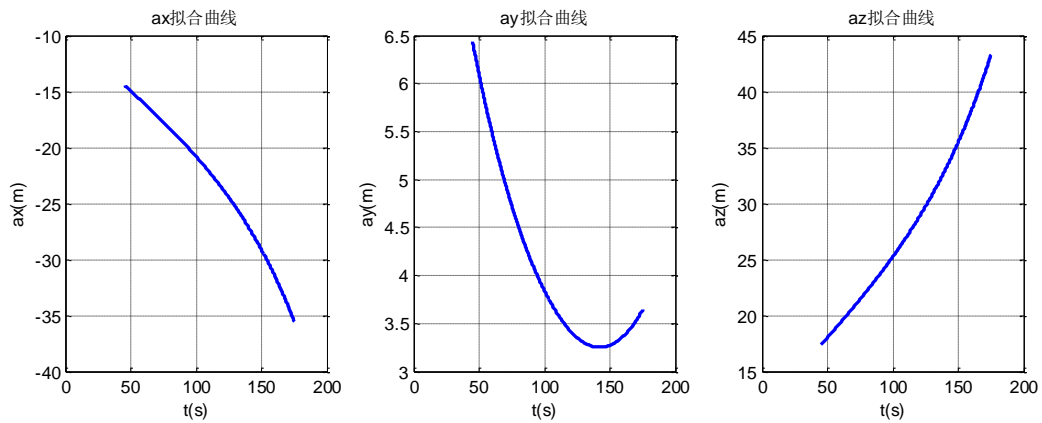
考虑了系统误差，对测量值 α, β 进行系统误差修正，利用修正后的结果重新求解目标飞行器的轨迹，并拟合其运动曲线如图 3.5 所示。



(a) 目标飞行器的位置量拟合曲线



(b) 目标飞行器的速度曲线



(c) 目标飞行器的加速度曲线

图 3.5 目标飞行器的位置量拟合曲线及速度、加速度曲线

根据拟合出的位置量变化曲线绘制出三维空间中的运动轨迹如图 3.6 所示。

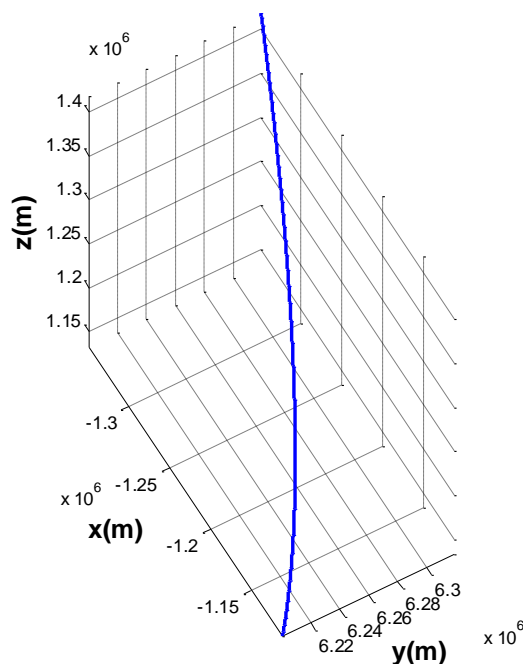


图 3.6 三维空间中的运动轨迹

从 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样,根据拟合出的位置曲线、速度曲线,计算并列表给出 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度,如表 3.3 所示。

表 3.3 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度

时刻 (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)	V _x (m/s)	V _y (m/s)	V _z (m/s)
50.0	-1.11199e+06	6.20021e+06	1.13304e+06	-779.874	727.332	927.488
60.0	-1.12055e+06	6.20777e+06	1.14324e+06	-934.374	785.140	1114.24
70.0	-1.13071e+06	6.21589e+06	1.15537e+06	-1099.85	837.29	1314.61
80.0	-1.14258e+06	6.22450e+06	1.16958e+06	-1276.74	884.602	1529.09
90.0	-1.15628e+06	6.23357e+06	1.18601e+06	-1465.53	927.837	1758.25
100.0	-1.17194e+06	6.24305e+06	1.20480e+06	-1666.84	967.691	2002.83
110.0	-1.18967e+06	6.25291e+06	1.22612e+06	-1881.45	1004.82	2263.76
120.0	-1.20961e+06	6.26314e+06	1.25013e+06	-2110.38	1039.86	2542.26
130.0	-1.23192e+06	6.27371e+06	1.27703e+06	-2354.93	1073.43	2839.88
140.0	-1.25677e+06	6.28460e+06	1.30700e+06	-2616.70	1106.18	3158.58
150.0	-1.28432e+06	6.29583e+06	1.34027e+06	-2897.69	1138.74	3500.77
160.0	-1.31479e+06	6.30738e+06	1.37710e+06	-3200.33	1171.83	3869.39
170.0	-1.34841e+06	6.31927e+06	1.41776e+06	-3527.54	1206.21	4267.98

根据如下公式计算估计残差: $Q_{ex} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}$, $Q_{ey} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$,

$Q_{ez} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}$ 。其中, $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为根据观测值直接计算出的空间飞

行器位置坐标； $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i (i=1,2,\dots,n)$ 为经过多项式拟合后，在各观测时刻上的位置坐标估计值。

在 MATLAB 中编写程序，求出三个方向上的估计残差 $Q_{ex}=4.59489(\text{m})$ ， $Q_{ey}=8.58727(\text{m})$ ， $Q_{ez}=5.48488(\text{m})$ 。

3.5 重新估计目标飞行器的运动学方程：

然后对 3.3 节求出的 $k_v f(t)$ ，采用八次多项式拟合，拟合多项式为：

$$\begin{aligned} k_v f(t) = & -4.95254\text{e-}18t^8 + 4.9396\text{e-}15t^7 - 2.0916\text{e-}12t^6 + 4.6852\text{e-}10t^5 \\ & - 1.6983\text{e-}08t^4 - 8.1558\text{e-}06t^3 + 0.00193155t^2 - 0.0251730t + 27.5380 \end{aligned} \quad (3.1)$$

从 $k_v f(t)$ 的解析表达式可以看出， $k_v f(t)$ 可以近似为 $k_v f(t) = -8.1558\text{e-}06t^3 + 0.00193155t^2 - 0.0251730t + 27.5380$ ，则 $m(t)$ 可以表示为：

$$m(t) = C_m \cdot \exp(-2.03895\text{e-}06t^4 + 6.4385\text{e-}04t^3 - 0.0125865t^2 + 27.5380t)$$

其中， C_m 为一常数。

4. 单卫星观测问题：

空间飞行器相对地心坐标系的轨迹 $r(t)$ 需要满足的条件如下：

(1) 简化运动方程满足公式 (4.1)，所求得的轨迹 $x(t), y(t), z(t)$ ，带入运动方程中可以得到关于 $m(t)$ 的三个曲线，按照正确的 $x(t), y(t), z(t)$ 轨迹，推导出的三个 $m(t)$ 曲线应该重合，如图 2.10 所示。

(2) 轨迹方程始终在一个平面内：由于飞行器在重力斜飞段中，只受到重力和推力作用，其中推力方向和速度方向在一条直线，而重力一直指向地心，因而速度方向应该一直在一平面中，轨迹也即始终在该平面内。

(3) 在飞行平面内的二维坐标系中，轨迹图形应该为一凸形：如图 4.1 所示，飞行器的合力方向向下，因而轨迹应当为一平滑的凸形曲线，不应该出现 S 形等其它类型的曲线。

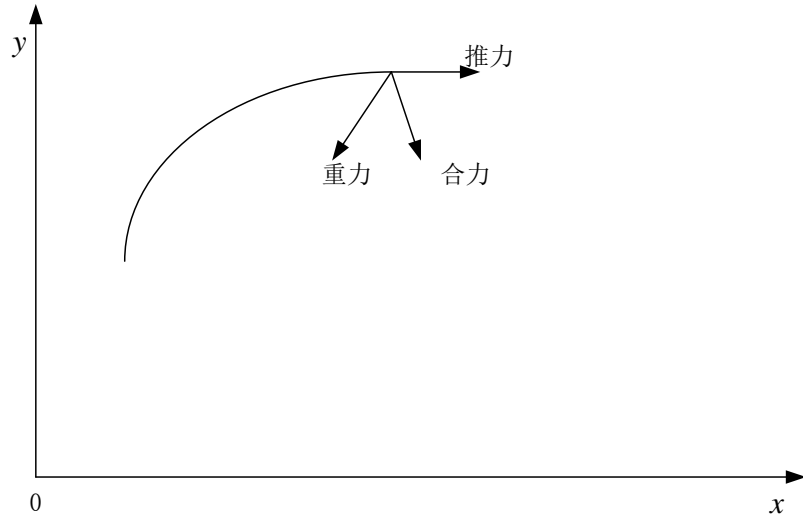


图 4.1 飞行器受力情况

(4) 空间飞行器重力斜飞段过程中具有速度限制 $v_{\min} < |v| < v_{\max}, v_{\min}$,

v_{\max} 可以通过查找资料获得, 同时行进过程中速度平滑, 相邻几个时刻的 Δv 应该不产生大的突变。如果找到的轨迹中途速度发生跳变, 则该轨迹不合理。

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \frac{km(t)}{m(t)}$$

(4.1)

根据上述四个约束条件可以设计方案估计出飞行器的轨迹, 方案算法如下:

Step1: 利用补偿后的 α, β 值, 算出各个离散时刻的卫星和空间飞行器的连线方程。利用限制条件 (4), 可以得到相邻时刻内行走距离的上限和下限, 依此可以得到两直线图 3.8 所示, 两直线为两相邻时刻卫星观测飞行器位置可能所在的直线, 粗线部分是相邻时刻空间飞行器满足限制条件 (4) 的位置范围。

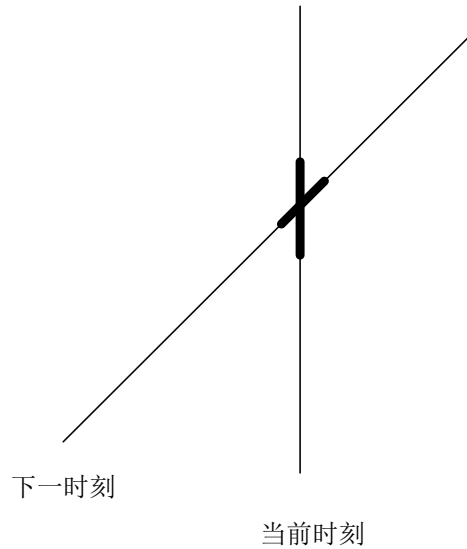


图 3.8 相邻时刻飞行器可能点范围

Step2: 根据各个时刻位置范围, 找出各个时刻可能位置范围的中点, 根据限制条件 (2), 进行平面拟合, 作为初始选择平面,

Step3: 得出平面和各个直线的交点, 作为各个时刻的位置点。根据限制条件 (3), 判断该轨迹是否为凹形, 若是, 转入下一步, 否则, 平面做一旋转和平移, 转入 Step3.

Step4: 拟合出 $x(t), y(t), z(t)$, 利用限制条件 (1), 计算出三个 $m(t)$ 曲线, 对三个 $m(t)$ 曲线求取平均值, 获取中间曲线, 三个曲线与平均曲线求取差值, 进行平方和运算 (方差) $S(m(t))$, 该值作为评定选取的轨迹, 判定是否小于阈值, 若小于代表该轨迹可行, 我们就认为该轨迹为我们要找的飞行器飞行轨迹, 结束。若大于, 则更新最小方差值和对应的轨迹曲线。以该最小方差值对应的平面做一旋转和平移, 转入 Step3. 若多次没有更新最小方差值, 则平面作较大角度选择和 平移。转入 Step3.

五、模型评价

(1) 第一问是一个微分方程求解的问题。需要注意的是卫星的运行轨道应当在较长时间内保持稳定。而传统的 Runge-Kutta 法容易发散, 因此这里我们采用了 Runge-Kutta-Fehlberg 法, 可以使得解出的卫星轨道在较长时间内保持稳定。

(2) 第二问中可能会出现求解三个方程, 解出的三个 $k_v f(t)$ 相差较大的情况, 这时说明拟合的运动曲线无法满足空间飞行器的运动方程。不过, 在本题中, 我们所解出的三个 $k_v f(t)$ 基本重合, 这说明我们拟合的运动曲线可以满足空间飞行器的运动方程。

(3) 第三问中, 我们认为第二问中所建立的空间飞行器的运动模型是正确的, 并利用该模型反推出 α, β , 与观测值相比较, 得到了系统误差。我们做出这种论断的原因是: 在第二问中, 我们所拟合的飞行器运动曲线可以很好地与运动方程相吻合, 这就可以证明第二问所建模型的正确性。

六、参考文献

- [1]. 王志刚, 施志佳. 远程火箭与卫星轨道力学基础[M]. 西北工业大学出版社, 2006.
- [2]. 中国人民解放军总装备部军事训练教材编辑工作委员会著. 外弹道测量数据处理[M]. 国防工业出版社, 2002.
- [3]. 王正明, 易东云著. 测量数据建模与参数估计[M]. 国防科技大学出版社, 1996.
- [4]. 科普托夫编著. 弹道式导弹设计和试验[M]. 国防工业出版社.
- [5]. 龙汉, 李贞杰. 基于视线观测的几何定位研究与仿真分析[J]. 计算机仿真, 2010.8, 27(8)