

中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第十七届中国研究生
数学建模竞赛

学 校

华中科技大学

参赛队号

20104870015

队员姓名

1.

李智

2.

皮鉴源

3.

季秋涵

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第十七届中国研究生

数学建模竞赛

题 目 载波恢复算法设计及实现

摘 要：

光通信技术构建起了全球通信的骨架。光传送链路建模与建设是运营商、设备商以及政府必须考虑的课题。光数字信号处理芯片以即时处理资料的特性被广泛应用，本文针对芯片的一种典型的载波恢复（CR）算法进行研究，分别讨论了在多种情况下算法的最优工程设计方案。

针对问题一，本文首先确定了 16QAM 由格雷映射进行编码的矩形星座图，随后根据确定的调制格式得出 SNR 与 BER 的关系，在 BER=0.02 的情况下确定了 RSNR，然后通过蒙特卡洛模拟法计算 BER 与 Pilot 符号数以及总符号数的关系，进一步确定插值方法后通过插值补偿的方式计算 BER 的增量，最终计算出 Pilot 符号数为 9，总符号数为 826 以及 Pilot 开销为 1.09%。

针对问题二，本文首先确定了 BER 与相位噪声方差的函数关系，随后基于第一问的模型建立了考虑线宽和色散情况的目标规划模型，求解得到 Pilot 符号数与线宽以及色散的定量关系：

$$\begin{cases} N = \frac{8.26 \times 10^7}{LW} \\ M = 9 \\ \min P_{\text{cost}} = \frac{M}{N} = 1.09 \times 10^{-7} LW \end{cases}$$

最后得出可视化的 Pilot 开销与线宽以及色散的变化关系图。

针对问题三，首先通过分析 RSNR 为 12.71dB 时高斯白噪声的标准差，得到接收端符号的整数位要求；然后通过定点量化该算法的参数，得出该算法的资源函数；随后进一步分析定点量化噪声对性能的影响，得到量化噪声对应的等效相位噪声功率；最后构造定点量化的资源最优化模型，解得：当 $LW < 830\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 6；当 $830\text{kHz} < LW < 897\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 7；当 $897\text{kHz} < LW < 912\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 8；当 $912\text{kHz} < LW < 917\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 9；当线宽超过 917kHz 时，无解。

针对问题四，本文首先确定了性能以及代价的对应函数关系，并将数据进行归一化处理，然后建立了评价模型，最后以长距干线传输为例输入对应参数，得出当 $LW=100\text{kHz}$ 时，

长距干线传输的最佳位宽为 7。为了提供一套可自动优化位宽的方案，本文设计了一个判断模型，根据输入参数的不同提供相对应的方案。

最后，本文对模型进行了理论检验和实际检验，保证了模型的可行性，并提出了针对其它类型星座图进行进一步 CR 算法设计的改进方案。

关键词:载波恢复算法；蒙特卡洛模拟法；目标规划模型；

目录

一、问题重述	5
1.1 问题的背景.....	5
1.2 问题的提出.....	5
二、问题分析	5
2.1 问题一分析.....	6
2.2 问题二分析.....	6
2.3 问题三分析.....	6
2.4 问题四分析.....	6
三、模型假设	7
四、符号定义与说明.....	7
五、模型建立与求解.....	8
5.1 问题一模型建立与求解	8
5.1.1 16QAM 星座图.....	8
5.1.2 高斯白噪声对星座图的影响.....	10
5.1.3 蒙特卡洛方法计算误码率.....	13
5.1.4 光纤的色散补偿	15
5.1.5 相位噪声建模.....	15
5.1.6 插值方式的讨论	17
5.1.7 M 及平均点数 L 对 Pilot 相位的影响	17
5.1.8 N 对 BER 的影响.....	20
5.1.9 问题一的求解与结果分析.....	21
5.2 问题二模型建立与求解	22
5.2.1 Pilot 开销和线宽关系的定量求解.....	22
5.3 问题三模型建立与求解	24
5.3.1 定点数位宽的初步分析.....	24
5.3.2 定点量化占用资源计算.....	25
5.3.3 定点量化噪声对性能的影响.....	30
5.3.4 考虑定点量化噪声的资源最优化模型	31
5.4 问题四模型建立与求解	32
5.4.1 模型的梗概.....	32

5.4.2 指标的去量纲化处理	33
5.4.3 综合代价函数模型及求解.....	33
六、 模型检验	34
6.1 蒙特卡洛仿真检验	34
七、模型总结与评价.....	35
7.1 模型优点.....	35
7.2 模型缺点与改进方向	35
参考文献.....	36
附录	37

一、问题重述

1.1 问题的背景

光数字信号处理（DSP）芯片是一种快速强大的微处理器，通过内部独特的哈佛结构以及专门的硬件乘法器，实现各种数字信号的即时处理。随着计算机技术和信息技术的不断发展，DSP 芯片已成为通信、计算机、消费类电子产品等领域的基础器件。如图 1 所示，在光传输领域，由于传输链路的性能受环境、各类电器件等因素的影响很大，普遍会产生相位噪声、色度色散等干扰。因此在芯片设计时提供一种较优的工程设计算法补偿色散以及相位噪声具有重要意义。

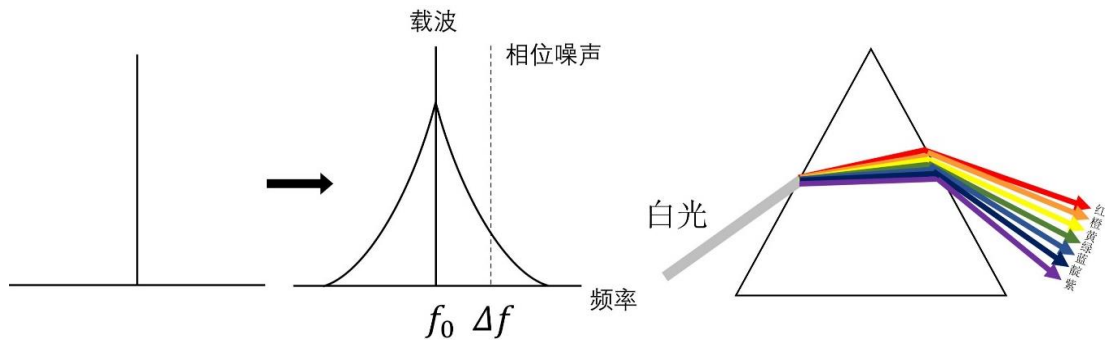


图 1 相位噪声及色度色散示意图

1.2 问题的提出

题目要求通过载波恢复(Carrier Recovery, CR)算法补偿相位噪声，在不考虑色散补偿和误码率计算的情况下初步完成芯片设计，通过建立相应的数学模型和算法，解决以下问题：

(1) 在给定波特率为 150Gbaud 的标准 16QAM 信号，线宽 100kHz，色散值为 2 万 ps/nm，算法并行度为 128 的情况下建立目标规划模型，以 Pilot 开销最小为目标，以系统所能容忍的噪声量 RSNR 代价<0.3dB 为约束，设计一套 CR 算法。

(2) 在其他条件不变的情况下，定量分析线宽在 10kHz 到 10MHz 变化以及色散在 0 到 10000 ps/nm 变化对 Pilot 开销的影响情况。

(3) 在问题二的基础上，将芯片实现的资源最小作为目标，增加净荷量>145Gbaud 以及定点量化不影响芯片性能和资源为约束，建立目标规划模型设计资源最低的 CR 算法。

(4) 进一步考虑性能和资源在实际应用中的妥协情况，针对问题 3 的场景中某一种可行的场景，构造一种既考虑性能也兼顾资源的代价函数，并尝试给出一种自动优化位宽和实现性设计的方案，并给出定量的结果。

二、问题分析

题目围绕光数字信号处理(DSP)芯片中一种载波恢复(CR)算法进行展开，要求在不同的约束情况下，设计合适的 CR 算法。QAM(Quadrature Amplitude Modulation)是正交载波调制技术与多电平振幅键控的结合，16QAM 是指包含 16 种符号的 QAM 调制方式。

2.1 问题一分析

问题一要求在给定波特率、线宽、色散值以及算法并行度且不考虑定点量化的情况下，以 RSNR 代价 $<0.3\text{dB}$ 为约束条件，以 Pilot 开销最小为目标函数，确定一种载波恢复的方法。针对本题的假设，不考虑色散的补偿，只考虑相位噪声以及高斯白噪声的影响，影响情况如图 2 所示，并通过 CR 算法补偿相位噪声^[1]。

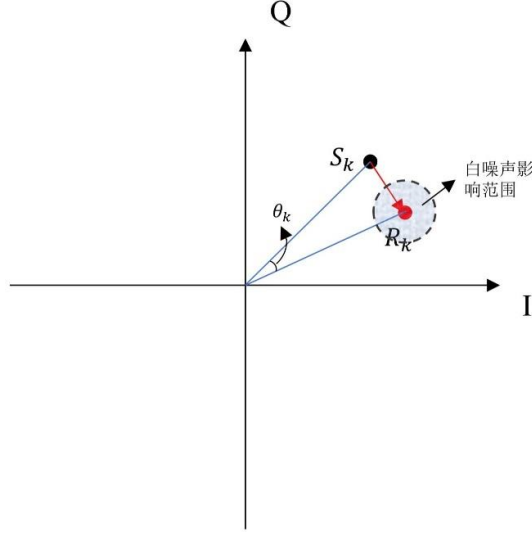


图 2 信号受相位噪声及白噪声影响示意图

如果要求 BER 是连续的则可将 BER 视为是由 SNR、 N 、 M 确定的多元函数 $BER(SNR, N, M)$ ，应当满足

$$\Delta SNR \cdot \frac{\partial BER}{\partial SNR} + N \cdot \frac{\partial BER}{\partial N} + M \cdot \frac{\partial BER}{\partial M} = 0 \quad (4.21)$$

其中 BER 为 0.02，因此本文需要开展的工作是计算出公式中的各个系数。

2.2 问题二分析

本文拟在问题一的基础上，以 RSNR 代价 $<0.3\text{dB}$ 为约束条件，通过敏感性分析的方式，对色散、线宽与 Pilot 开销的关系进行定量计算。

2.3 问题三分析

本文拟在在问题二的基础上，将芯片实现的资源最小作为目标函数，增加净荷量 $>145\text{Gbaud}$ 的约束，以引入定点量化噪声，建立目标规划模型设计资源最低的 CR 算法。

定点位宽越大，占用的资源也会更多。加法资源近似与最大位宽呈正比，乘法资源近似与位宽乘积成正比，延时资源和位宽以及延时深度近似呈正比。另一方面，定点位宽过小，带来的量化噪声过大，会影响系统性能，两者综合作用，可以确定一个最优解。

2.4 问题四分析

本文拟通过建立性能以及资源各自的函数关系，通过归一化的方式标准化数据，并进一步给出综合评价模型。针对自动优化位宽的设计方案，本文拟根据工业界对光通信的分类，提前输入不同情况下的评价模型为后续自动优化提供数据支持。

三、模型假设

- (1) 假设采用 16QAM 格雷映射矩形的星座图，即相邻星座只差 1 个比特；
- (2) 假设在进行平均时，Pilot 的相位基本保持不变；
- (3) 不考虑色散补偿和误码率计算等的复杂度和资源；
- (4) 假设色散可以完全补偿，并且不考虑色散和线宽的耦合；
- (5) 把量化噪声等效为相同方差的高斯白噪声。

四、符号定义与说明

符号	说明	量纲
N	相邻导频间隔的符号数	个
M	连续传输的导频符号数	个
s_k	理想星座点	--
r_k	接收到的符号	--
n_k	高斯白噪声	--
P_{S16QAM}	16QAM 调制格式下的平均功率	W
P_n	噪声功率	W
$S_0(t)$	理论中不受干扰的信号接受波形	--
$S_1(t)$	仅受相位噪声影响的信号接受波形	--
$\theta(n)$	n 个采样时刻的相噪	--
LW	线宽	Hz
f_b	波特率	baud
BER	错误比特数占总比特数的比率	--
SNR	信号功率和噪声功率的比例	dB
$RSNR$	BER 达到门限时信道中施加的 SNR	dB
P_{cost}	Pilot 开销	--
λ	波长	m
Dz	色散值	s/m
L	导频平均点数	个
SNR_{eq}	平均后等效的信噪比	dB
$\sigma_{pilot}^2(M)$	Pilot 相位计算引入的相噪功率	W
$\sigma_{\theta}^2(N)$	长度为 N 的净荷的平均相噪功率	W
σ_{all}^2	总相位噪声	W
ΔSNR	RSNR 代价	dB
Δ	量化当量	
W	定点数位宽	1
d	小数位	1
σ_{quan}^2	量化噪声平均功率	W

注：未列出以及重要的符号均以出现处为准

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型建立与求解

5.1.1 16QAM 星座图

针对问题一，本文模型主要流程如图 3 所示。

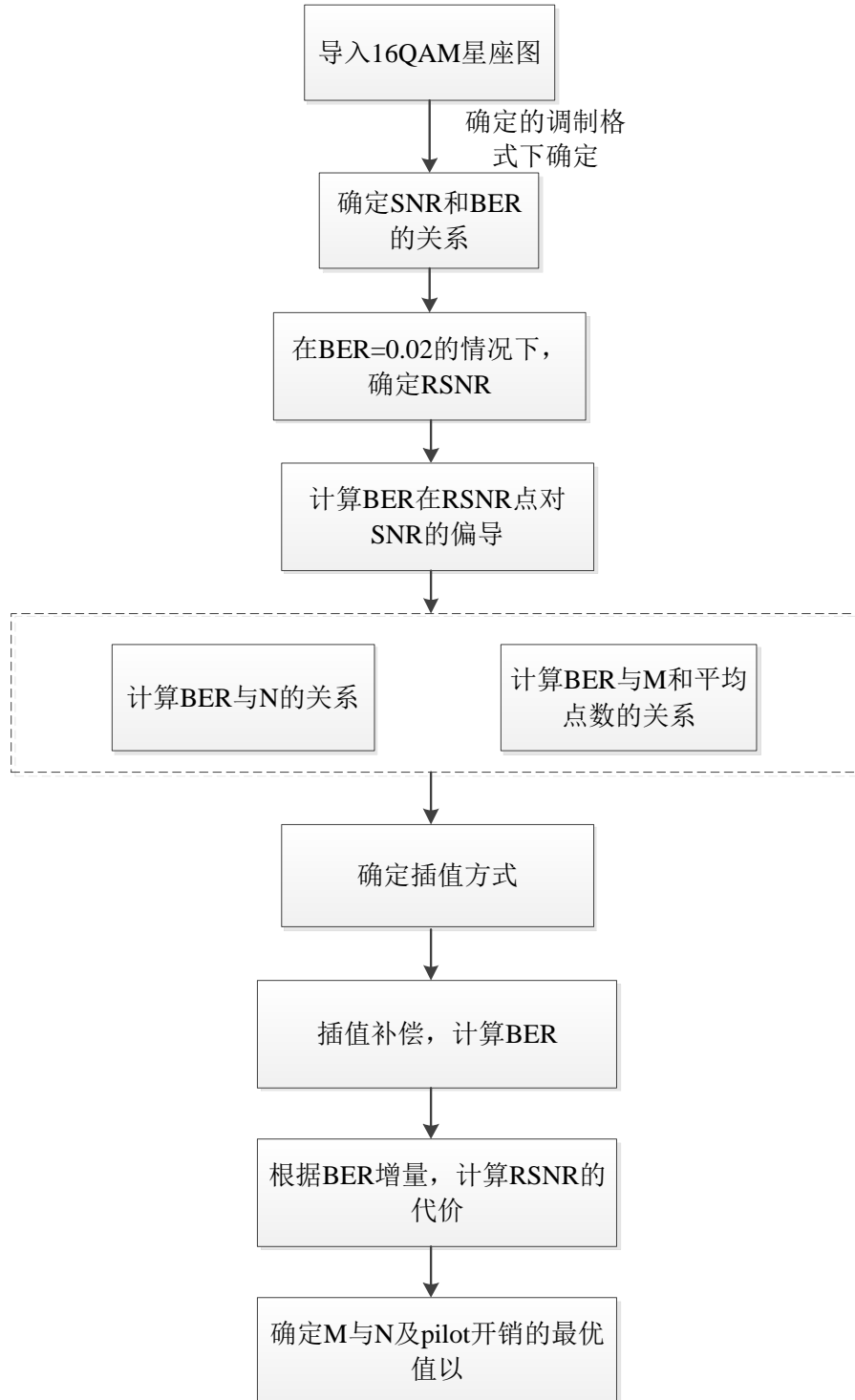
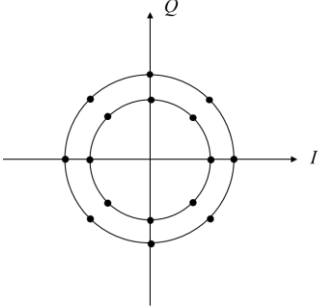
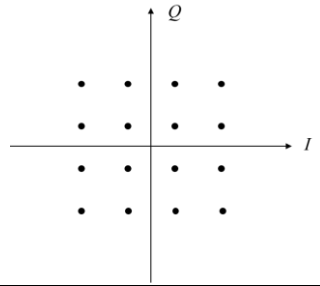


图 3 问题一主要流程

星座图的编码分布模式也称为调制格式，对于 16QAM 的信号而言，常用的星座图种类有圆形和矩形两种^[2]。

表 1 星座图比较

16QAM 星座图种类	图示	特点
圆形星座图		圆形星座图振幅值小于矩形星座图，相位值大于矩形星座图，且圆形星座图最小相位偏移为 45° ，矩形星座图最小相位偏移为 18° 。因此，圆形星座图最小相位偏移比矩形星座图大，抗相位抖动能力强。
矩形星座图		矩形星座图的信号平均功率为 $10A^2$ 小于圆形星座图的 $14.03A^2$ ，两者相差 1.4dB。即在相同平均功率的情况下，矩形星座图的最小欧几里得距离较圆形星座图大，因此抗干扰的能力更强。

在编码设计上，格雷映射在相邻位间转换时只有一位产生变化，避免了其他映射转换模拟信号时导致数字电路产生很大尖峰电流脉冲的问题。在用于方向的转角位移量到数字量的转换中，方向的转角位移量发生微小变化时，格雷码仅改变一位。与其它映射同时改变两位或多位的情况相比更为可靠，减少出错的可能性。

因此，本文采用格雷码设计的 16QAM 矩形星座图进行建模分析，其调制格式（相邻星座点距离相等）如图 4 所示：

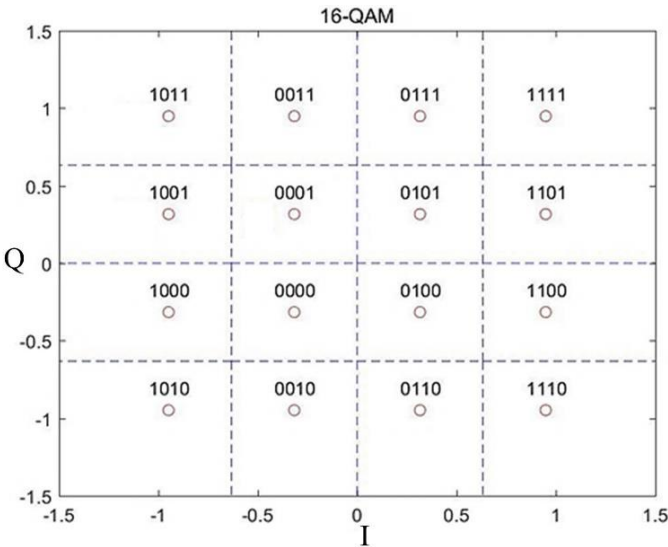


图 4 16QAM 调制星座图

将图 4 中的星座点分为 3 类，每一类和最邻近点的差别只有 1bit，但是每类点的最邻近点的个数是不相同的。因此需要分类计算每一类点的误比特数的期望，最后结合每一类星座点出现的概率综合计算 BER，进而给出 RSNR。

5.1.2 高斯白噪声对星座图的影响

求解步骤如下：

Step1: 计算信号平均功率；

Step2: 根据信噪比给出噪声功率；

Step3: 根据二维高斯分布的概率密度函数模拟高斯白噪声；

Step4: 结合星座点的概率 P 和概率密度函数得到误比特数期望；

Step5: 计算设定 SNR 区间 BER；

Step6: 使用二分法不断逼近 $BER = 0.02$ 的 SNR 容限点。

信号平均功率定义为发送符号绝对值平方的均值：

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |S_k|^2 \quad (5.1)$$

其中， N 为总传输符号数。对于 16QAM 编码， $N=16$ ，十六个星座点坐标可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} (-3,3) & (-1,3) & (1,3) & (3,3) \\ (-3,1) & (-1,1) & (1,1) & (3,1) \\ (-3,-1) & (-1,-1) & (1,-1) & (3,-1) \\ (-3,-3) & (-1,-3) & (1,-3) & (3,-3) \end{bmatrix}$$

如图 4 所示，16QAM 星座图包含 3 种不同功率的星座。由于实际信号中各个符号出现的概率相同，每种类型的星座点均计算一次。由公式(4.1)可得 16QAM 调制格式的信号平均功率为：

$$P_{S16QAM} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{16} |S_k|^2 = \frac{1}{4} (2+10+10+18) = 10W$$

信号和噪声功率的比值为信噪比（SNR）：

$$SNR = P_s / P_n \quad (5.2)$$

即：

$$P_n = P_s / SNR \quad (5.3)$$

计算得到噪声的功率，需要补偿的主要噪声通常是高斯白噪声，服从均值为 0 的正态分布，噪声的方差等于噪声的平均功率，即：

$$P(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_k}} \exp\left(-\frac{n_k}{2P_n}\right), n_k \sim N(0, P_n) \quad (5.4)$$

噪声的虚部和实部相互独立，分别通过一维高斯分布来表示：

$$n_i \sim N(0, P_n / 2), n_Q \sim N(0, P_n / 2)$$

例如，在 16QAM 左上角 1011 符号加高斯噪声后，如图 5 所示：

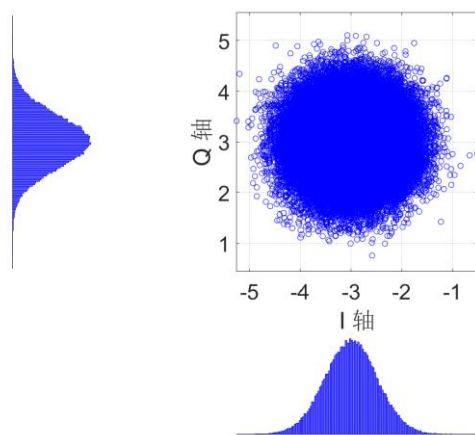


图 5 1011 符号叠加高斯白噪声的星座图及概率密度分布
由于高斯白噪声的存在，接收端接收到的符号为：

$$r_k = s_k + n_k \quad (5.5)$$

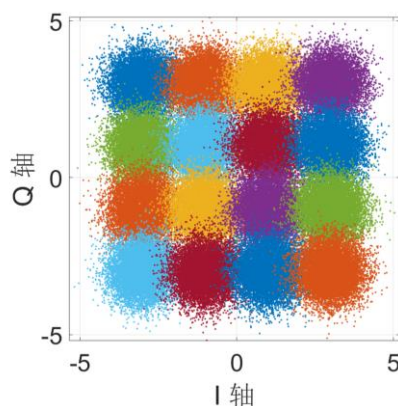


图 6 16QAM 编码叠加高斯白噪声的星座图

如图 7 所示，当实际接收信号被错误识别为不同的星座点时，其错误的比特数也可能不同。四个星座点将复平面划分成了 4 个区域，分界线为相邻两点的中垂线，即为图中的 I 轴和 Q 轴，当符号“00”被错误识别为“01”时，传输错误的比特数为 1；而当符号“00”被错误识别为“11”时，传输错误的比特数为 2。

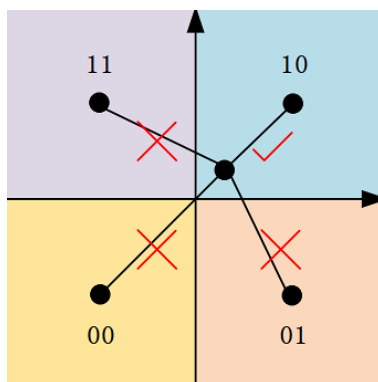


图 7 误码示意图

为便于后续问题的分析和说明，将各星座点按照从上到下，从左到右的顺序进行编号。根据 16QAM 调制星座图，可以得到如表 2 所示的 16×16 的系数矩

阵 A , 其矩阵元 $A(i, j)$ 表示星座图中第 i 个星座点被错误识别为第 j 个星座点时, 传输错误的比特数。

表 2 星座点被错误识别时的误比特数

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	2	1	1	2	3	2	2	3	4	3	1	2	3	2
2	1	0	1	2	2	1	2	3	3	2	3	4	2	1	2	3
3	2	1	0	1	3	2	1	2	4	3	2	3	3	2	1	2
4	1	2	1	0	2	3	2	1	3	4	3	2	2	3	2	1
5	1	2	3	2	0	1	2	1	1	2	3	2	2	3	4	3
6	2	1	2	3	1	0	1	2	2	1	2	3	3	2	3	4
7	3	2	1	2	2	1	0	1	3	2	1	2	4	3	2	3
8	2	3	2	1	1	2	1	0	2	3	2	1	3	4	3	2
9	2	3	4	3	1	2	3	2	0	1	2	1	1	2	3	2
10	3	2	3	4	2	1	2	3	1	0	1	2	2	1	2	3
11	4	3	2	3	3	2	1	2	2	1	0	1	3	2	1	2
12	3	4	3	2	2	3	2	1	1	2	1	0	2	3	2	1
13	1	2	3	2	2	3	4	3	1	2	3	2	0	1	2	1
14	2	1	2	3	3	2	3	4	2	1	2	3	1	0	1	2
15	3	2	1	2	4	3	2	3	3	2	1	2	2	1	0	1
16	2	3	2	1	3	4	3	2	2	3	2	1	1	2	1	0

本文通过类似热力图的形式更直观地展示上述矩阵，如图 8 所示：

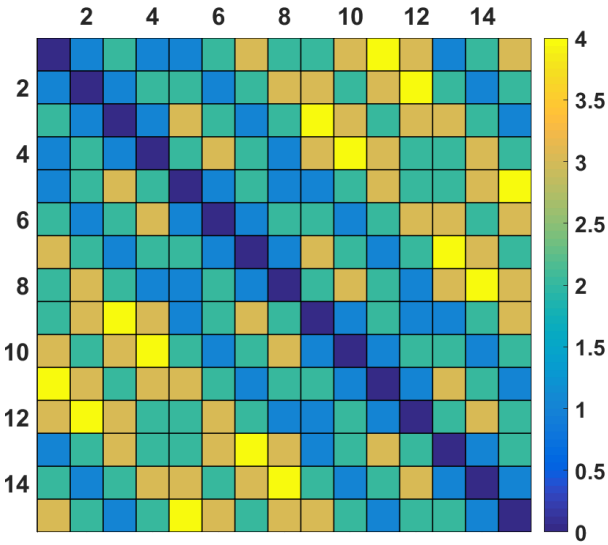


图 8 系数矩阵 A

显然，矩阵 A 是实对称的。当给定 SNR 值，即可计算对应的 BER 值，从而得到 BER 与 SNR 的关系曲线，下面采用蒙特卡洛方法进行仿真求解。

5.1.3 蒙特卡洛方法计算误码率

蒙特卡洛方法，又称随机模拟方法，是计算数学的一个重要分支，于上世界四十年代中期为适应当时原子能事业的发展而发展起来。随着科学技术的发展和电子计算机的发展，蒙特卡洛方法被广泛应用到物理、化学和医学等领域。蒙特卡洛方法在解决一些复杂计算问题，例如高维量子问题时，能十分快速得到近似解。

误码率是通信系统性能评价的一个重要指标，在给定信道、编译码方式下，误码率是一个固定取值。但是在大多数情况下，理论误码率无法推得，需要通过蒙特卡罗方法对误码率进行仿真^[3]。

Step1: 随机产生波特率为 150Gbaud 的标准 16QAM 信号；

Step2: 利用给定算法进行加密、调制；

Step3: 随机产生满足线宽为 100kHz，波特率为 150Gbaud 的信道噪声；

Step4: 计算接收端接收信号，利用给定算法解调、译码判决；

Step5: 计算仿真误码率。

通信系统蒙特卡洛仿真模型流程图如下：

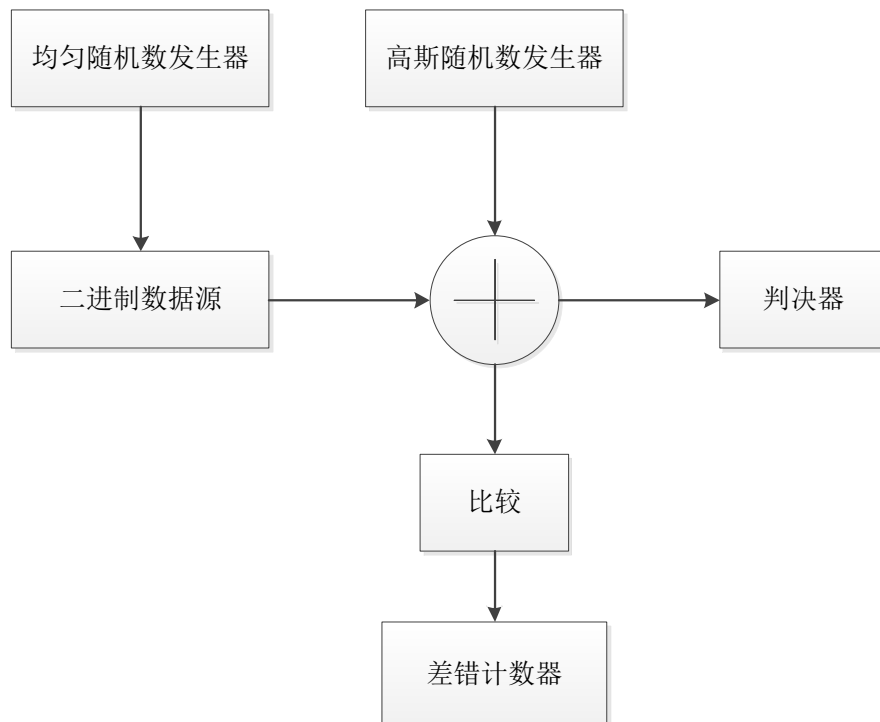


图 9 通信系统蒙特卡洛仿真模型流程图

利用 MATLAB 指令 `normrnd` 或者 `randn` 可快速产生大量服从 $N(0, P_n)$ 分布的随机数，用来模拟高斯白噪声。

BER 达到门限时信道中施加的 SNR 为 Required SNR (RSNR)，它代表系统能够容忍的噪声量。

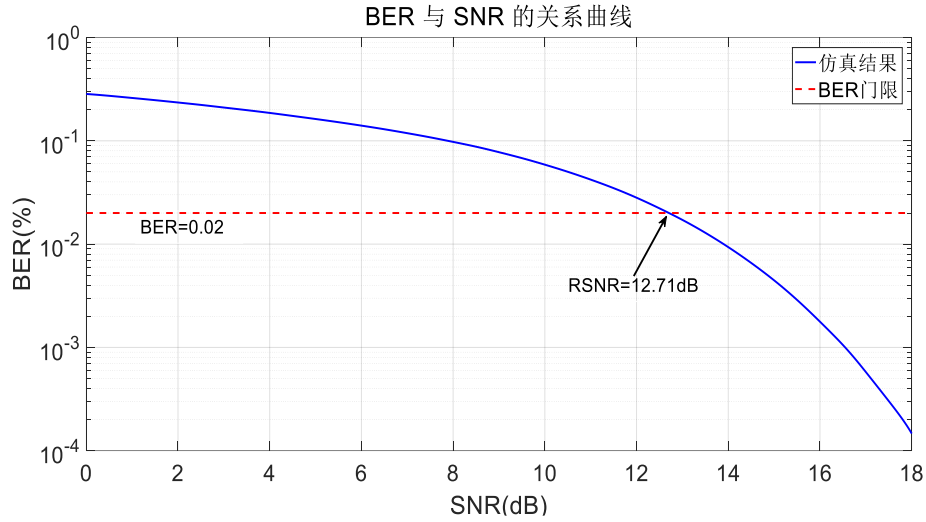


图 10 BER 与 SNR 关系曲线图

如图 10 所示，本文取 BER 门限为 0.02，求得 16QAM 编码方式对应的 SNR 容限点（即 RSNR）为 12.71(±0.01)dB。

表 2 不同 BER 门限点对应的 SNR

BER 门限(%)	0.03	0.02	0.01	0.005
RSNR (dB)	11.86	12.71	13.89	14.86

为了便于进行理论计算，对 BER 与 SNR 的关系曲线在 RSNR 点处进行线性拟合：

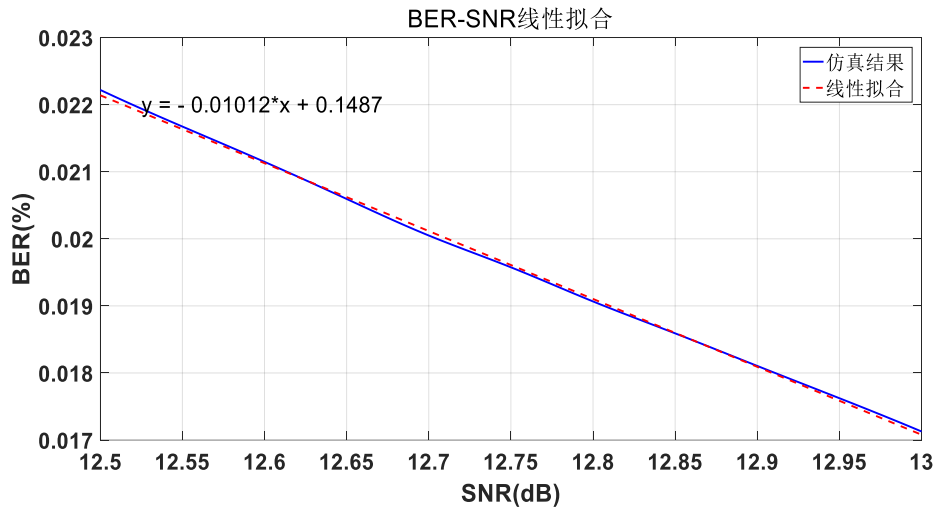


图 11 BER-SNR 线性拟合

拟合方程为

$$\text{BER} = -0.01014\text{SNR} + 0.1489$$

Linear model:

$$f(x) = p1 * x + p2$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p1 = -0.01014 \text{ } (-0.01016, -0.01012)$$

$$p2 = 0.1489 \text{ } (0.1486, 0.1492)$$

拟合 RMSE 为 3.559e-05, R2 为 0.9994, 表明拟合精度很高, 线性假设成立。

5.1.4 光纤的色散补偿

光纤的色度色散是指不同频率的光在光纤中具有不同的群速度从而传输时延不同，传输后光脉冲会被展宽并相互重叠，引起信号失真色散对光信号引入的损伤是线性的，并没有导致新的频率成分产生。相干光通信系统中，接收机可以获得光载波的电场信息，色散导致的信号失真可以通过算法实现补偿，即所谓的电色散补偿。

光纤中的色散主要为二阶色散，即群速度色散^[4]，其频域传递函数可以表示为

$$H(f) = \exp \left[j \times \left(\frac{\lambda^2 \pi D z}{c} f^2 \right) \right]$$

其中 λ 是波长，取 1550nm， Dz 是色散值， c 是光速， f 则是频域格点。补偿色散可以通过将被色散恶化后的信号通过传递函数为

$$H(f) = [H(f)]^{-1} = \exp \left(-j \times \frac{\lambda^2 \pi D z}{c} f^2 \right)$$

的数字滤波器来实现。

色散补偿的过程如图 12 所示：

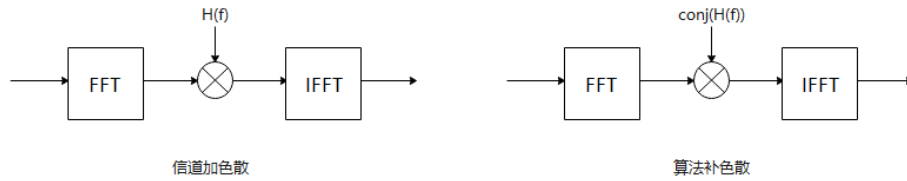


图 12 色散和色散补偿方法

5.1.5 相位噪声建模

当存在相位噪声、色散等干扰后，相同门限点对应的 SNR 值会提高，说明系统能够容忍的噪声量减少了，将 RSNR 的增加部分称为 RSNR 代价。

由于相干光通信系统发射机与接收机中激光器具有一定的谱线宽度，相位存在随机起伏，用作光载波与本振光会对信号引入相位噪声。载波相位恢复的目的就是估计出激光器的相位噪声，并从信号中消除此相位噪声的影响。与信号相比，高阶信号星座图中星座点分布更密集，更容易受激光器相位噪声的影响，采用合适的算法实现高阶信号载波相位恢复从而使系统具有良好的相位噪声容忍度，是相干光通信系统实用化的关键技术之一。

在发射机发出的信号中加入固定的导频，在接收机提取出导频信息，通过与原始导频相比较进行相位噪声的估计，从而实现载波相位恢复。采用导频方法的不足之处是导频的加入会减小系统的有效传输速率或带宽^[3]。

下面对相位噪声的影响进行建模。相位噪声会对信号叠加一个时变相位，

$$S_1(t) = S_0(t) \exp\{j\theta(t)\} \quad (5.6)$$

其中 $S_0(t)$ 是叠加相噪前的波形， $S_1(t)$ 是叠加相噪后的波形， $\theta(t)$ 是相噪。通信系统常用等间隔采样后的离散方式表示，每个采样点对应了某个时刻采样到的波形。对于相位噪声， $k+1$ 时刻和 k 时刻采样值的相位差表示为：

$$d\theta = \theta_{k+1} - \theta_k = \sqrt{\frac{2\pi \times LW}{f_b}} X_k \quad (5.7)$$

其中 LW 为激光器线宽指标，单位为 Hz 。 f_b 是波特率，单位为 baud 。而 X_k 满足：

$$P(X_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} X_k} \exp\left(-\frac{X_k}{2}\right), X_k \sim N(0,1) \quad (5.8)$$

由于相位噪声是高斯白噪声，那么 $k+n$ 时刻和 k 时刻采样值的相位差可以表示为：

$$d\theta(n) = \theta_{k+n} - \theta_k = \sqrt{\frac{2\pi \times LW}{f_b}} N(0,n) = \sqrt{\frac{2\pi n \times LW}{f_b}} N(0,1) \quad (5.9)$$

相位噪声的存在，会使得星座图围绕原点发生歪斜，原始星座图到接收端星座图之间的旋转可以用如下坐标系变换矩阵表示：

$$C_o^n = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$r_k' = \begin{pmatrix} I' \\ Q' \end{pmatrix} r_k = C_o^n r_k = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}$$

$$\theta(n) = \sqrt{\frac{2\pi n \times LW}{f_b}} X_k$$

理想的星座点在相位噪声及白噪声的影响变化情况示意图如下：

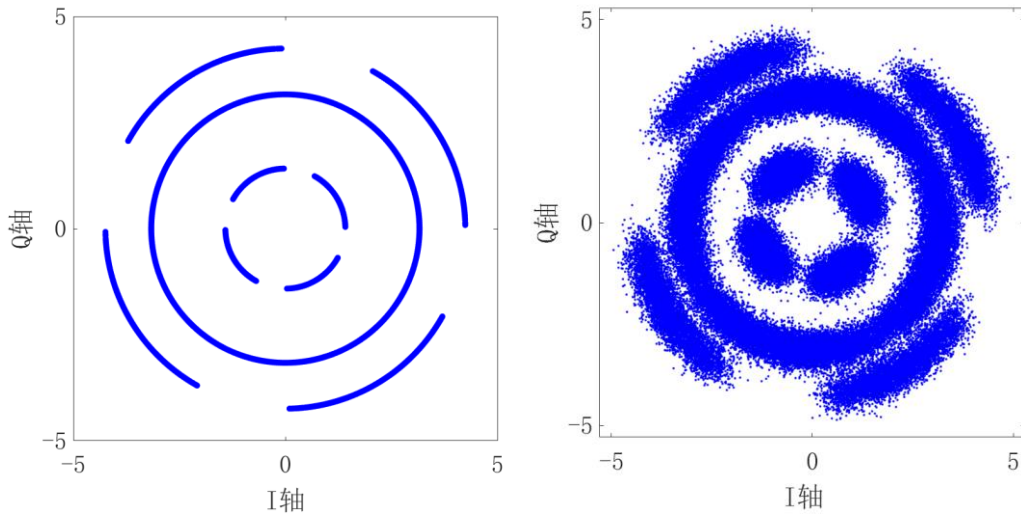


图 13 星座图叠加相位噪声及高斯白噪声

本问中，波特率限定为 150Gbaud ，线宽为 100kHz ，典型相位噪声演化曲线及功率谱如图 14 所示：

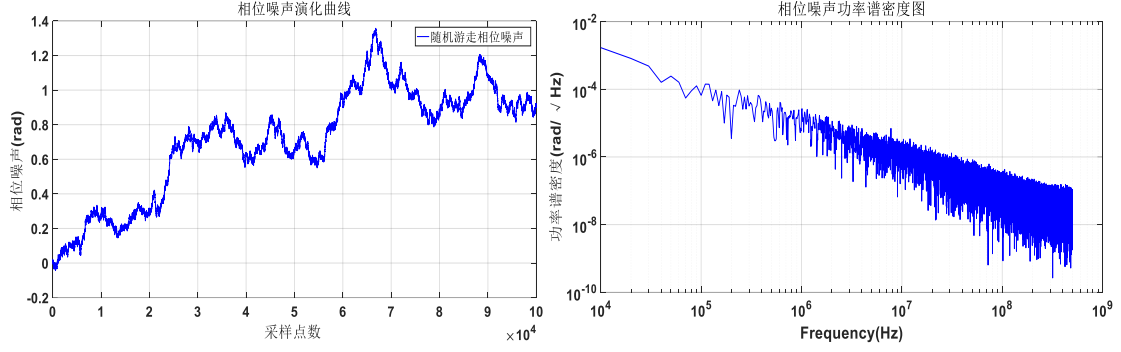


图 14 相位噪声演化曲线及功率谱

相位噪声是典型的 $1/f$ 噪声，通常称为随机游走噪声，由高斯白噪声经过一次积分得到的，即相位噪声的一阶微分（对于采样系统来说是一阶差分）是高斯白噪声。

5.1.6 插值方式的讨论

相位噪声是随机噪声，因此使用诸如拉格朗日多项式插值、牛顿插值、Hermite 插值和三次样条插值等复杂的插值方法并无意义。本文仅讨论分段线性插值与最近邻插值、向后最近邻插值这 3 种插值方法。

对于分段线性插值与最近邻插值：它们都需要用 Pilot 符号进行运算，来对 Pilot 符号之前的数据进行插值，这意味着当收到信号之后不能够立即进行补偿，会带来额外的延迟，因此本文采用向后最近邻插值这一插值方法。

5.1.7 M 及平均点数 L 对 Pilot 相位的影响

高斯白噪声对 Pilot 相位的计算会产生干扰，为了抑制高斯白噪声的影响，需要对每一段 Pilot 的数据进行一定点数的平均。这里假设在进行平均时，Pilot 的相位基本保持不变^[5]。

记接收端的 Pilot 序列为 $a(t)$

$$a(t) = a_0 + \varepsilon_1 \quad (5.10)$$

其中

$$\varepsilon_1 = N(\mu, \sigma^2) \quad (5.11)$$

记平均时间为 τ ，单位为秒，在 $[t, t + \tau]$ 时间 Pilot 序列的平均值为：

$$y(t, t + \tau) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} a(t) dt \quad (5.12)$$

记时间平均操作为

$$\langle y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt \quad (5.13)$$

当 $a(t)$ 为平稳过程时，有下式成立：

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \langle y^2(t, t + \tau) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} a(t)(t) dt dt' \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} a(t)a'(t) dt dt' \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中, $\langle a(t)a'(t) \rangle$ 表示 $a(t)$ 与 $a'(t)$ 的相关函数 $R_a(t, t')$, 根据自相关函数与功率谱的关系:

$$R_a(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) e^{-i2\pi f(t-t')} df \quad (5.15)$$

则有

$$\begin{aligned} \langle y^2(t, t+\tau) \rangle &= \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) e^{-i2\pi f(t-t')} df dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \end{aligned} \quad (5.16)$$

上式等号左边表示平均后信号的时域功率, 等号右边表示平均后信号的频域功率, 被积函数的物理含义是平均后信号的功率谱密度, 因此:

$$S_y(f) = S_a(f) \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} \quad (5.17)$$

对信号取平均可看做是一种特殊的滤波, 它的传递函数为:

$$H(if) = \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} = Sa(\pi f \tau) \quad (5.18)$$

从表达式可以看出, 对信号取平均具有低通滤波器特性。下图以白噪声为例, 直观地显示了 $Sa(\pi f \tau)$ 的频率特性:

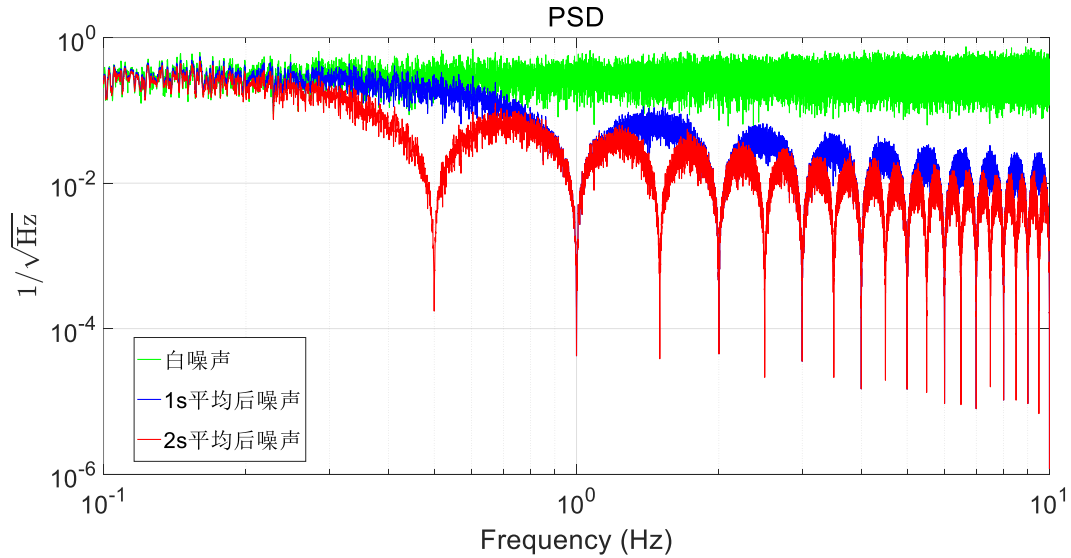


图 15 $Sa(\pi f \tau)$ 频率特性

对于采样系统, 平均操作是对离散的 Pilot 点的平均, 而非时间平均。类似的, 可得接收端离散的 Pilot 序列为

$$a(i) = a_0 + N(\mu, \sigma^2) \quad (5.18)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L a(i) = a_0 + \frac{1}{L} N(\mu, L\sigma^2) = a_0 + \frac{1}{\sqrt{L}} N(\mu, \sigma^2) \quad (5.19)$$

图 16 展示了高斯白噪声经过不同点数平均后的时域图像:

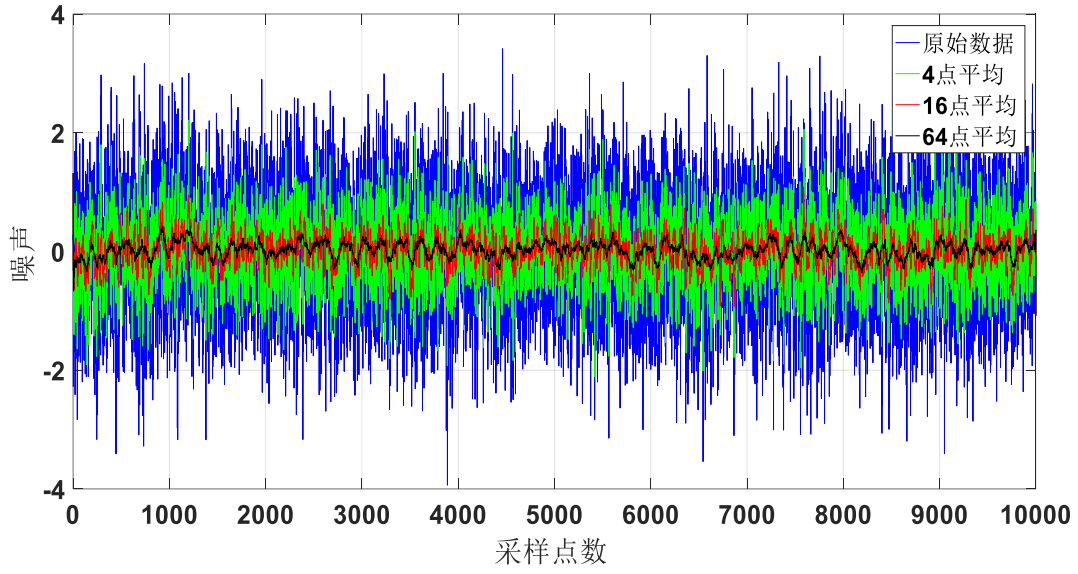


图 16 高斯白噪声时域图

第一问中已确定 $RSNR$ 的值为 12.71 dB。则经过 L 点平均后，等效的信噪比为：

$$SNR_{eq} = RSNR + 10\log_{10}(L) \quad (5.20)$$

据此推导出 L 与 M 的关系：

$$L = M \quad \text{because} \quad L \leq M \quad \text{and} \quad L_{best} = \max(L)$$

$L \leq M$ 表明最多只有 M 个点可以用于平均。而对于一个确定的 M ，平均点数 L 应该尽可能的取最大值，来达到对高斯白噪声的最好抑制效果。

在信噪比为 SNR_{eq} 的情况下，通过蒙特卡洛法得到高斯白噪声对 Pilot 相位影响引入的等效相位噪声功率 $\sigma_{pilot}^2(M)$ 与平均点数 M ($L = M$) 的关系如下表，其中的 $\sigma_{pilot}^2(M)$ 是放大 10000 倍后的值：

表 3 M -等效相位噪声功率

M	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma_{pilot}^2(M)$	151.51	74.44	49.90	37.02	29.81	24.77	21.32
M	8	9	10	11	12	13	14
$\sigma_{pilot}^2(M)$	18.56	16.56	14.88	13.57	12.45	11.40	10.69
M	15	16	17	18	19	20	21
$\sigma_{pilot}^2(M)$	9.90	9.34	8.74	8.24	7.81	7.48	7.10

如图 17 所示，对 $\sigma_{pilot}^2(M)$ 与 M 进行幂函数拟合：

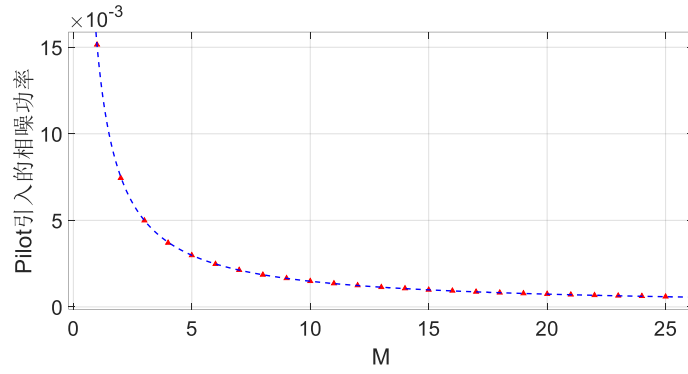


图 17 等效相位噪声

拟合结果为

$$\sigma_{pilot}^2(M) = \frac{0.015}{M}$$

General model:

$$f(x) = a/x$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a = 0.01506 (0.015, 0.01511)$$

拟合 RMSE 为 3.274e-05, R2 为 0.9999。

5.1.8 N 对 BER 的影响

如果不考虑 Pilot 相位计算引入的等效相位噪声，可以得到在不同 N 值下的 BER，程序运行时间约 1min:

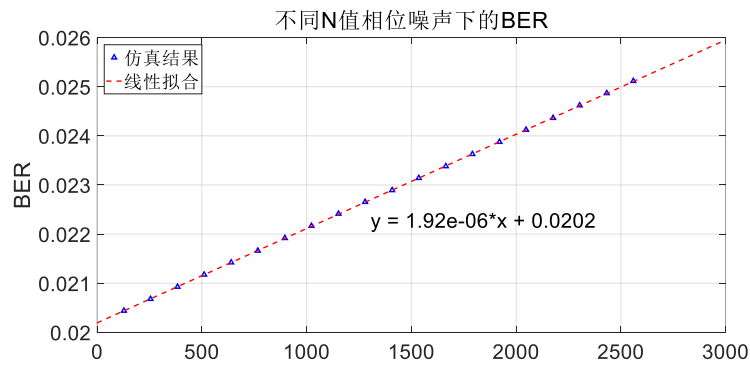


图 18 不同 N 值下的 BER

对 BER 和 N 进行线性拟合，拟合结果为

$$BER = 1.92 \times 10^{-6} N + 0.020$$

Linear model:

$$BER = p1 * N + p2$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p1 = 1.919e-06 (1.916e-06, 1.923e-06)$$

$$p2 = 0.02019 (0.02019, 0.0202)$$

拟合 RMSE 为 4.944e-05, R2 为 0.9999, 表明拟合精度很高, 线性假设成立。

5.1.9 问题一的求解与结果分析

如图 13 所示，对于一段长度为 N 的净荷，BER 与 N 成线性关系，因此可以用其中间时刻（即 $N/2$ 处）的 BER 和方差表征长度为 N 的净荷的平均 BER 和方差：

$$\theta\left(\frac{N}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi N \times LW}{f_b}} X_k, \quad X_k \sim N(0,1)$$

$$\sigma_\theta^2(N) = \sigma^2\left(\theta\left(\frac{N}{2}\right)\right) = \frac{\pi N \times LW}{f_b}$$

从公式(4.9)和公式(4.11)中消去 N ，可以得到 BER 与相位噪声的方差之间的函数关系：

$$BER = \frac{1.92 \times 10^{-6} f_b}{\pi \times LW} \sigma_{all}^2 + 0.020$$

在用 Pilot 相位补偿净荷相位噪声时，两者总的相位噪声为

$$\sigma_{all}^2 = \sigma_{pilot}^2(M) + \sigma_\theta^2(N) = \frac{0.015}{M} + \frac{\pi N \times LW}{f_b}$$

代入公式(4.12)得到

$$\begin{aligned} BER &= \frac{1.92 \times 10^{-6} f_b}{\pi \times LW} \left(\frac{0.015}{M} + \frac{\pi N \times LW}{f_b} \right) + 0.02 \\ &= \frac{2.88 \times 10^{-8} f_b}{\pi \times LW \times M} + 1.92 \times 10^{-6} N + 0.02 \\ &= \frac{0.0138}{M} + 1.92 \times 10^{-6} N + 0.02 \end{aligned}$$

把 BER 看作是由 SNR、 N 、 M 确定的多元函数 $BER(SNR, N, M)$ ，当满足

$$\Delta SNR \cdot \frac{\partial BER}{\partial SNR} + N \cdot \frac{\partial BER}{\partial N} + \frac{0.0138}{M} = 0 \quad (5.21)$$

时，BER 为 0.02。上式中 ΔSNR 为 RSNR 代价。

综上所述，问题转换为如下最优化模型：

$$\begin{aligned} \min P_{cost} &= \frac{M}{N} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta SNR < 0.3dB \\ \Delta SNR \cdot \frac{\partial BER}{\partial SNR} + N \cdot \frac{\partial BER}{\partial N} + \frac{0.0138}{M} = 0 \\ \frac{\partial BER}{\partial SNR} = -0.01014 \\ \frac{\partial BER}{\partial N} = 1.92 \times 10^{-6} \end{array} \right. \quad (5.22) \end{aligned}$$

由以上公式计算得 RSNR 代价与 N 、 M 的函数关系如图 17 所示

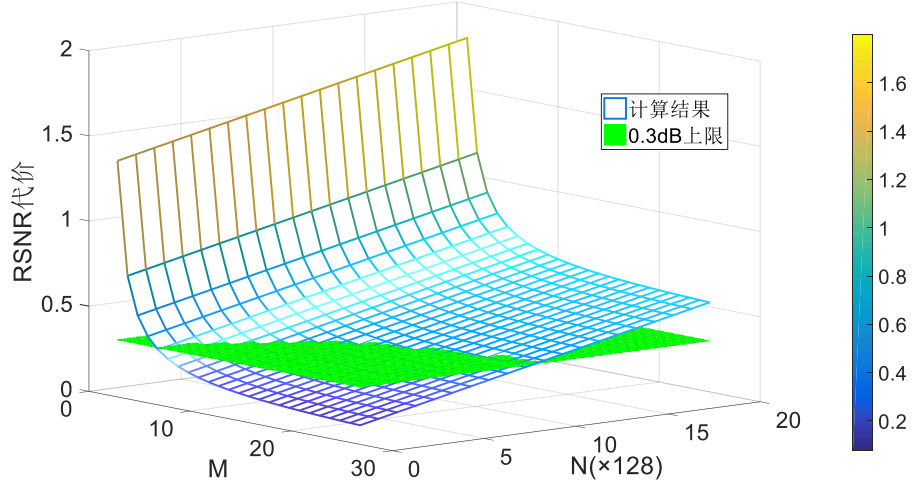


图 19 不同N、M 下的 RSNR 代价

解得：

$$\min P_{\text{cost}} = \frac{M}{N} = \frac{9}{826} = 1.09\%$$

即 N=826, M=9, Pilot 开销最小值为 1.09%。

设计的 CR 算法如图 20 所示：

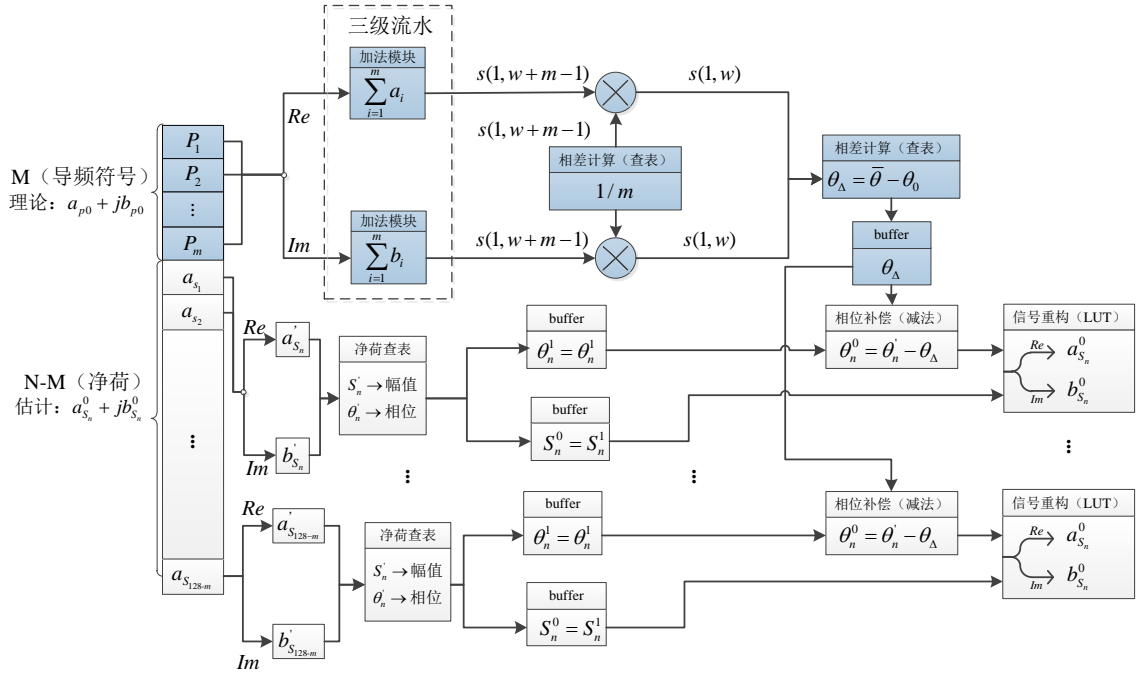


图 20 CR 算法流程图

5.2 问题二模型建立与求解

5.2.1 Pilot 开销和线宽关系的定量求解

在问题一中，本文在线宽为 100kHz 的条件下，得到了：

$$BER = \frac{1.92 \times 10^{-6} f_b}{\pi \times LW} \left(\frac{0.015}{M} + \frac{\pi N \times LW}{f_b} \right) + 0.02$$

BER 与相位噪声方差 $\sigma_\theta^2(N)$ 是确定的函数关系, 与线宽 LW 无关。这意味着,

$$\sigma_\theta^2(N) = \frac{\pi N \times LW}{f_b} \text{ 前面的系数为常数, 即}$$

$$k = \frac{1.92 \times 10^{-6} f_b}{\pi \times 10^5} = 0.9167$$

因此:

$$BER = 0.9167 \left(\frac{0.015}{M} + \frac{\pi N \times LW}{f_b} \right) + 0.02$$

代入问题一的模型, 可得考虑线宽后的模型:

$$\begin{cases} \min P_{\text{cost}} = \frac{M}{N} \\ \Delta SNR < 0.3 \text{ dB} \\ \Delta SNR \cdot \frac{\partial BER}{\partial SNR} + N \cdot \frac{\partial BER}{\partial N} + \frac{0.0138}{M} = 0 \\ \frac{\partial BER}{\partial SNR} = -0.01014 \\ \frac{\partial BER}{\partial N} = 1.92 \times 10^{-11} LW \end{cases} \quad (5.23)$$

对比问题一和问题二的模型, 可以发现, 如果把 $\frac{N \times LW}{10^5}$ 看作一个整体变量,

那么问题一和问题二的模型在形式完全相同, 这样可以解得 Pilot 开销和线宽 LW 的定量关系如下:

$$\begin{cases} N = \frac{8.26 \times 10^7}{LW} \\ M = 9 \\ \min Z = \frac{M}{N} = 1.09 \times 10^{-7} LW \end{cases}$$

考虑线宽 LW 从 10kHz-10MHz, 色散 Dz 从 0-10000ps/nm 变化场景, 本文给出 Pilot 开销和线宽 LW 的关系如图 16 所示:

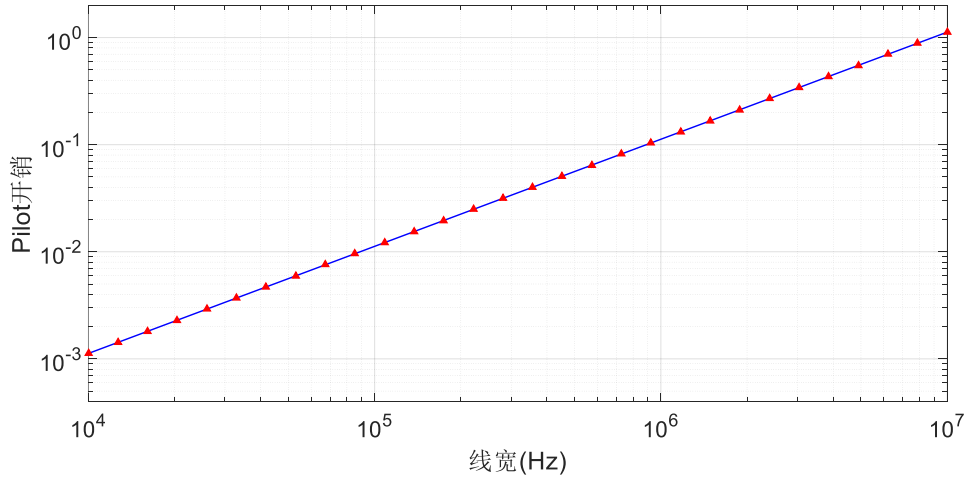


图 21 Pilot 开销和线宽关系

Pilot 开销与线宽 LW 成正比关系，比例系数为 1.09×10^{-7} 。可以看到，当线宽增大到一定值后，Pilot 开销变得非常大，例如当线宽 LW 超过 9.2MHz 后，Pilot 开销已经超过了 100%，这在物理上是不可能的，这意味着当线宽超过 9.2MHz 时模型无解。在实际中，建议激光器的线宽 LW 做到 $\leq 460\text{kHz}$ ，这样可以保证净荷的流量 $>95\%$ 。

5.3 问题三模型建立与求解

问题三是基于问题二的场景，进一步考虑定点量化对性能和资源的的影响，需要对量化位数分别为 6, 7, 8, 9 的输入位宽分别进行分析，找到一种系统占用资源最小的方法。在导频开销可以任意变化的基础上，以最小化芯片占用资源为目标，约束条件为 RSNR 代价 $\leq 0.3\text{dB}$ 和净荷的流量 $\geq 145\text{Gbaud}$ 。

表示定点数的二进制位数称为定点位宽，定点位宽越大，算法的量化噪声越小，系统的性能也就越好；当确定好了算法收端的符号位数后，其计算相位噪声部分的位数也基本确定。若要进行全精度的计算，在进行加法运算，乘法运算时最好不进行截位的运算，在这样的方式下，输入位宽越高，整个系统进行运算所使用的系统资源也就越多。

系统的导频开销可以任意变化，即此时 CR 算法可以通过增加导频数目来提高系统的信噪比。例如算法用 6 位量化来表示，相对于使用 9 位的量化位宽表示收端的输入符号来说，系统的量化噪声更大，可以用更多的连续 Pilot 符号求平均以抑制噪声影响^[6,7]。

5.3.1 定点数位宽的初步分析

把标准星座点的坐标记为 $a+ib$ ，其实部和虚部的取值范围均为

$$a, b \in (-3, -1, 1, 3)$$

a, b 有存在非正数，因此需要 1 个符号位。当 RSNR 为 12.71 dB 时，可以计算出高斯白噪声的标准差为 0.732，如果只有 2 个整数位，那么至少有 8.6%（对应于 1.36σ ）的星座点的坐标取值会超过 ± 4 而导致溢出，因此取 3 个整数位能够保证星座点的坐标取值不溢出并且资源占用最少。

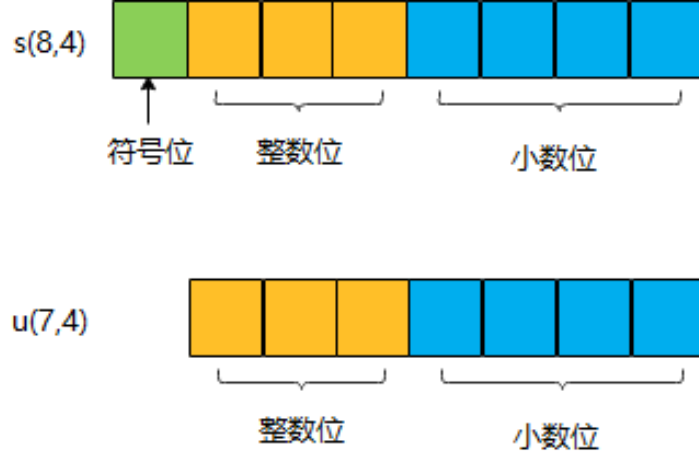


图 22 定点表示法

收端受影响的符号往往用 6-9bit 定点数表示，意味着小数位的位数为 2-5bit。

5.3.2 定点量化占用资源计算

根据建立的 CR 算法模型,画出整体算法的程序框图，如图 21 所示。

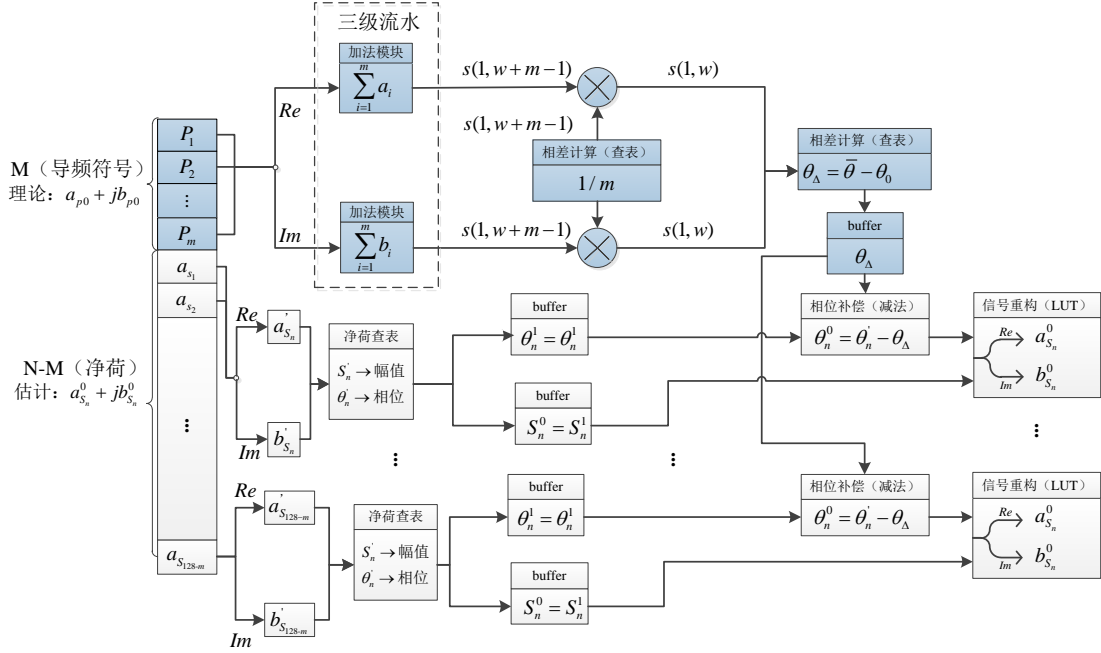


图 23 CR 算法模型

首先分析系统在假定条件下不同的量化位数其算法相应的资源占用情况，在本算法中，定点量化位数的位数低，则系统需要提高导频的个数来增加信道的信噪比，系统的资源消耗增加；定点量化位数高，则系统进行相应的定点运算需要消耗更多的资源。不合理的量化位数，会导致系统的资源消耗量增加。因此，想要设计一个系统资源占用最低的算法，需要折衷考虑导频提高与位数增加哪一个对芯片的资源提高占据主导地位^[8]。

根据已知条件，芯片在一个时钟周期下的并行度为 128，记定点数位宽为 w 。根据以上的假定条件，列出 CR 算法中不同模块所占用的资源数：

表 4 占用资源统计表

基本操作	导频符号资源占用量(bit)	单个净荷符号资源占用(bit)
Buffer	$W \cdot (127+1) \cdot 127 / 2 / 2048$	
加法	$W \cdot M$	W
乘法	W^2	0
查表	$W \cdot 2^{(4W)}$	$(2^{2W}) \cdot 2W + (2^{2W}) \cdot 2W$
总计	1*导频符号总资源	128*单个净荷符号总资源

下面对系统的资源做一个整体的评估，来阐述上表的计算过程。

由于系统的并行度是 128，也就是芯片在一个芯片时钟周期内，有 128 个符号会通过符号延迟进入到芯片中来，为了能够在每个芯片主频时钟周期均能够接收并处理这些数据，需要对这 128 个数据同时进行处理并增加多级流水线的方式来保证噪声路径的延时与补偿噪声路径的延时相匹配。

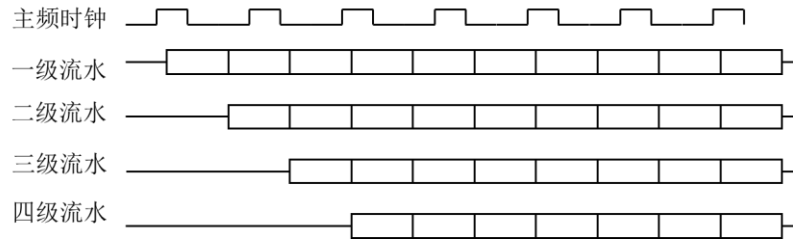


图 24 多级流水线

在该 CR 算法中，将系统的资源开销分成两部分考虑，第一部分是芯片的导频处理的资源，第二部分是芯片的净荷处理的资源。

1、第零级

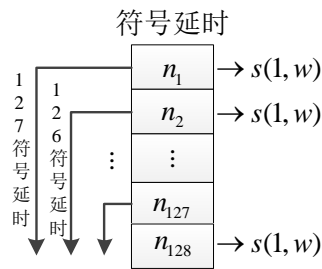


图 25 符号延迟

第零级是输入符号（包含导频和净荷，总符号个数为 128）延时，在 150Gbaud 的波特率下，在每个波特率的上升沿或者下降沿将符号进行相应的延时处理，由于输入的第 1 个符号延时 127 个符号，第 2 个符号延时 126 个符号，第 3 个符号延时 125 个符号.....第 128 个符号进来时，延时为 0。此时芯片的主频时钟上升沿或者下降沿触发一次 128 位的并行操作，总共需要 8128 级符号延迟。

芯片的导频处理的资源开销：

1、第一、二、三级

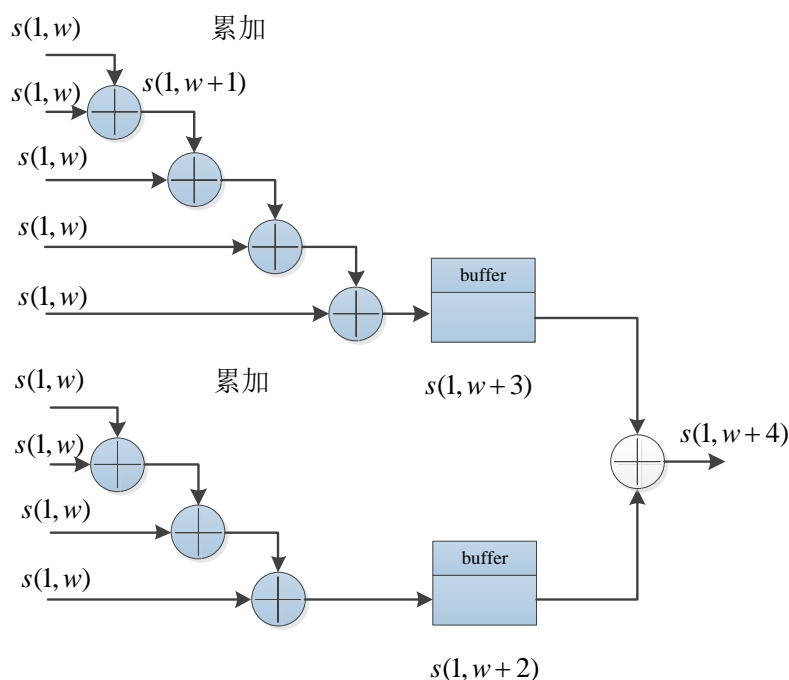


图 26 三级流水线累加结构

芯片的导频处理第一、二、三级是对输入的 M （根据模型计算为 9）个导频符号进行求和操作，若输入的导频数 M 大于 4，则需要在每 4 个加法操作中需要加入一级缓存器来缓存前 4 个符号求和的值，以流水线的形式来实现求和运算，实现框图如图所示：

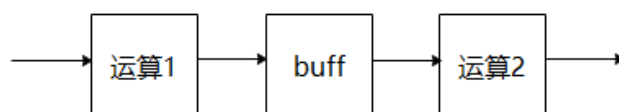


图 27 流水线示意图

2、第四级

芯片的导频处理第四级是对求和运算后的实部和虚部分别乘以 $1/M$ ，由于 M 已知且为定值（根据模型计算为 9），我们将 $1/M$ 存入一个寄存器中（不算在 CR 算法中的资源消耗），其位宽为 $W+M-1$ ，由于做了平均操作，在这里，运算的输出值的位宽一定小于第一级中输入最大值的位宽即可以完全表示其大小，因此将其位宽进行截位操作，使用与系统输入位宽（ W 位）相同的位宽，该操作可以大大降低运算的资源。



图 28 乘法模块示意图

3、第五级

芯片的导频处理第五级是对乘法运算后的实部和虚部进行查表操作，得到实测导频相位的平均值 $\bar{\theta}$ 和理想导频相位 θ_0 的相位差 θ_Δ 。

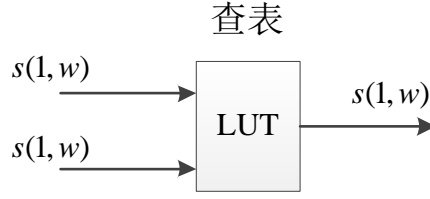


图 29 查表示意图

3、第六级

芯片的导频处理第五级是对查表操作后得到的相位差 θ_{Δ} 进行缓存。

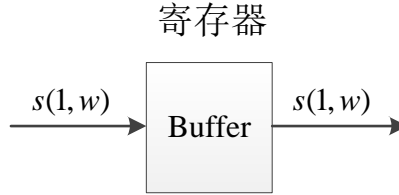


图 30 寄存器示意图

芯片的导频处理的资源开销：

1、第一级：

芯片的净荷处理第一级是将输入的每一个净荷符号的实部和虚部进行查表操作，得到该净荷所对应的幅值 S_n^1 和相位 θ_n^1 ；

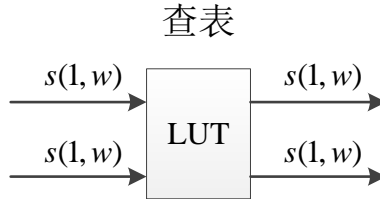


图 31 查表示意图

2、第二级

芯片的净荷处理第二级是将查表操作得到得该净荷所对应的幅值 S_n^0 和相位 θ_n^1 进行缓存操作；

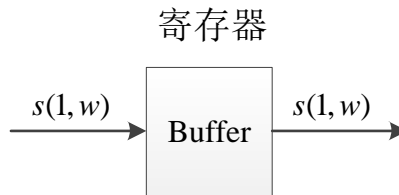


图 32 寄存器示意图

3、第三、四、五、六级

芯片的净荷处理第三、四、五、六级是在时钟周期下打一拍进入第六级，保持六级中的净荷所对应的幅值 S_n^0 和相位 θ_n^1 的值；

4、第七级

芯片的净荷处理第四级是将净荷所对应芯片的相位 θ_n^1 与导频处理第三级中相位差 θ_{Δ} 进行相位补偿的操作得到 $\theta_n^0 = \theta_n^1 - \theta_{\Delta}$ ，并将净荷所对应的幅值 S_n^0 进一步打一拍；

减法+缓存

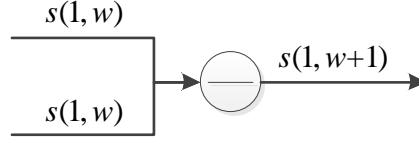


图 33 减法+缓存示意图

5、第八级

芯片的净荷处理第四级是将第四级中得到相位 θ_n^0 与幅值 S_n^0 输入到查找表，得到补偿后的净荷符号，其实部为 a_{sn}^0 ，虚部为 b_{sn}^0 。

查表

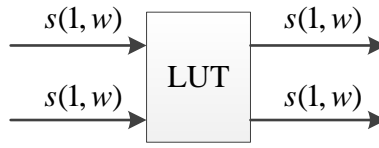


图 34 查表示意图

总资源开销：

芯片计算的吞吐量必须要大于信号传输速度，才能确保信息不丢失，所以以 150Gbaud 的波特率对信号进行处理，存在严重的问题，该问题中，已经指定芯片对应符号的并行度为 128 级，所以在每个芯片主频的上升沿或者下降沿到来时刻，需要对输入的 128 个符号进行运算，在我们的导频选择方案中，不一定每个时钟周期都需要进行导频的相差计算，在某些周期中，128 个符号有可能均为净荷符号，此时在 128 的并行度下面，我们需要同时处理 128 个净荷符号，因此我们设计总的资源开销中，包含两部分开销，一部分是导频相差提取的资源，一部分是 128 倍的单个净荷相位补偿的开销。

1、在含有导频的周期中，使用 M 个导频相差计算资源和 128-M 个净荷补偿的资源；

2、在仅含有净荷的周期中，使用 128 个净荷补偿的资源；

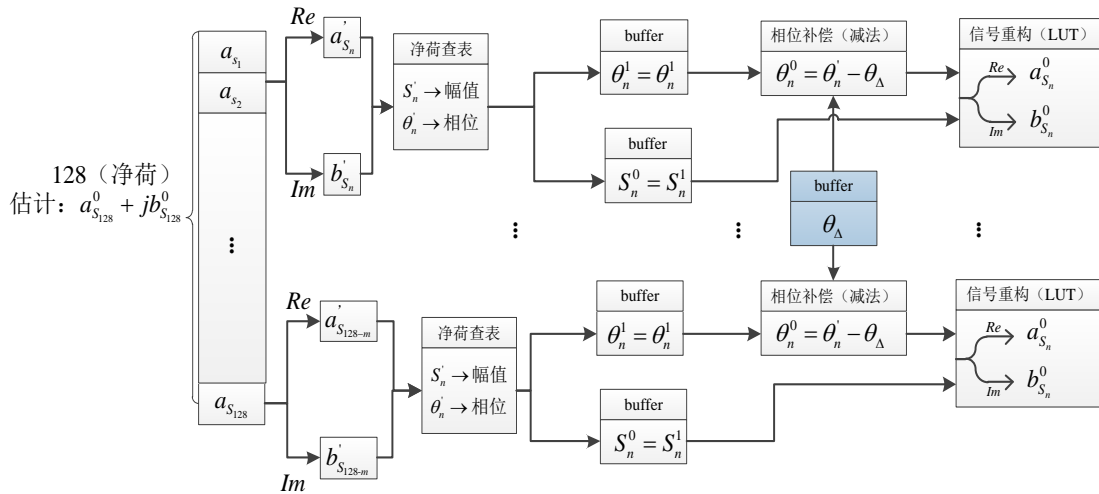


图 35 仅含净荷周期运算示意图

综上，总资源=M 个导频相差计算资源+128 个净荷补偿的资源（详见表

4)。

总的资源为：

$$S \approx 4W + WM + W^2 + 128W + 2^{4W}W + 2^{2W+9}W$$

5.3.3 定点量化噪声对性能的影响

量化噪声是一切量化操作所固有的噪声，只要进行数字量化编码采样，信号的理想值与量化值之间就必然会存在微小的差别，假设量化当量为 Δ 。对于四舍五入型量化噪声，视其为服从均匀分布的零均值白噪声，量化噪声系数为 $\Delta/\sqrt{12}$ ，此即均匀分布的均方根值(Root Mean Square, RMS)，方差(平均功率)为 $\Delta^2/12$ 。该白噪声功率谱在 $f = -f_s/2 \sim f_s/2$ 上为常值， f_s 为采样率^[9]。根据信号时域方差与频域功率谱积分面积相等原则，得量化噪声的功率谱密度为：

$$S_{\Delta}(f) = \frac{\Delta^2}{12f_s} \quad (5.24)$$

对定点数量化，记其小数位为 d ，那么

$$\Delta = \frac{1}{2^d} = \frac{1}{2^{W-4}} \quad (5.25)$$

量化噪声和高斯白噪声在概率密度分布上十分接近，这一点可以从量化噪声和高斯白噪声的分位数-分位数图中得出：

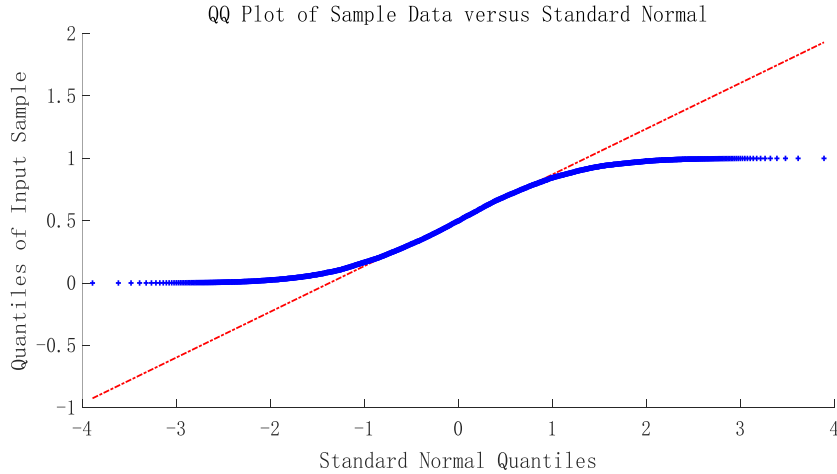


图 36 量化噪声和高斯白噪声的分位数-分位数图

两种分布在中心区间是高度重合的，可以把量化噪声等效为相同方差的高斯白噪声，其平均噪声功率为：

$$\sigma_{quan}^2 = \frac{1}{12 \times 2^{2W-8}} = \frac{1}{3 \times 4^{W-3}}$$

在问题一中，当RSNR为12.71 dB时，计算出高斯白噪声的标准差为0.732，对应的等效相位噪声功率为 $\sigma_{pilot}^2(1)=0.015$ ，因此量化噪声对应的等效相位噪声功率为：

$$\sigma_{quan}^2(W) = \frac{0.0281}{3 \times 4^{W-3}}$$

5.3.4 考虑定点量化噪声的资源最优化模型

考虑定点量化噪声的影响，误码率为

$$\begin{aligned} BER &= 0.917 \sigma_{all}^2 + 0.02 \\ &= 0.917 \left[\sigma_{pilot}^2(M) + \sigma_{\theta}^2(N) + \sigma_{quan}^2(W) \right] + 0.02 \\ &= 0.917 \left(\frac{0.015}{M} + 2.09 \times 10^{-11} LW \times N + \frac{0.0281}{3 \times 4^{W-3}} \right) + 0.02 \\ &= \frac{0.0138}{M} + 1.92 \times 10^{-11} LW \times N + \frac{0.0086}{4^{W-3}} + 0.02 \end{aligned}$$

为了保证净荷的流量 $\geq 145\text{Gbaud}$ ，Pilot 开销不宜过大，令

$$P_{cost} = \frac{M}{N} \leq 10\%$$

综上所述，问题转换为如下最优化模型：

$$\begin{cases} \min S \approx 132W + WM + W^2 + 2^{4W}W + 2^{2W+9}W \\ \Delta SNR < 0.3dB \\ \frac{\partial BER}{\partial SNR} = -0.01014 \\ \Delta SNR \cdot \frac{\partial BER}{\partial SNR} = \frac{0.0138}{M} + 1.92 \times 10^{-11} LW \times N + \frac{0.0086}{4^{W-3}} \\ P_{cost} = \frac{M}{N} \leq 10\% \\ W \in (6, 7, 8, 9) \end{cases} \quad (5.26)$$

在线宽为 100kHz 的条件解得：

表 4 不同位宽下的 Pilot 开销

定点位宽	Pilot 开销	M	N	资源占用(bit)
6	0.012	9	750	1.13e8
7	0.0112	9	807	1.94e9
8	0.011	9	821	3.46e10
9	0.0109	9	825	6.20e11

当线宽变化时，用如下公式修正表中的 N 值：

$$N'(LW) = \frac{10^5 N}{LW} \quad (5.27)$$

定点位宽为 6 时，若线宽超过 830kHz 则无解。定点位宽为 7 时，若线宽超过 897kHz 则无解。定点位宽为 8 时，若线宽超过 912kHz 则无解。定点位宽为 9 时，若线宽超过 917kHz 则无解。

因此，当 $LW < 830\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 6；当 $830\text{kHz} < LW < 897\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 7；当 $897\text{kHz} < LW < 912\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 8；当 $912\text{kHz} < LW < 917\text{kHz}$ 时，最佳的定点位宽为 9；若线宽超过 917kHz 则无解。

从模型的计算结果可知，随着定点位宽的增大，系统对线宽的容忍度更高，但是当位宽增大到一定程度时，对线宽容忍度的增加变得不明显，这是因为当位宽足够大时，定点量化噪声不再是制约性能的主要因素。另一方面，随着定点位宽的增大，可以看到占用的资源明显增加。

5.4 问题四模型建立与求解

5.4.1 模型的梗概

问题四模型流程图如图 37 所示

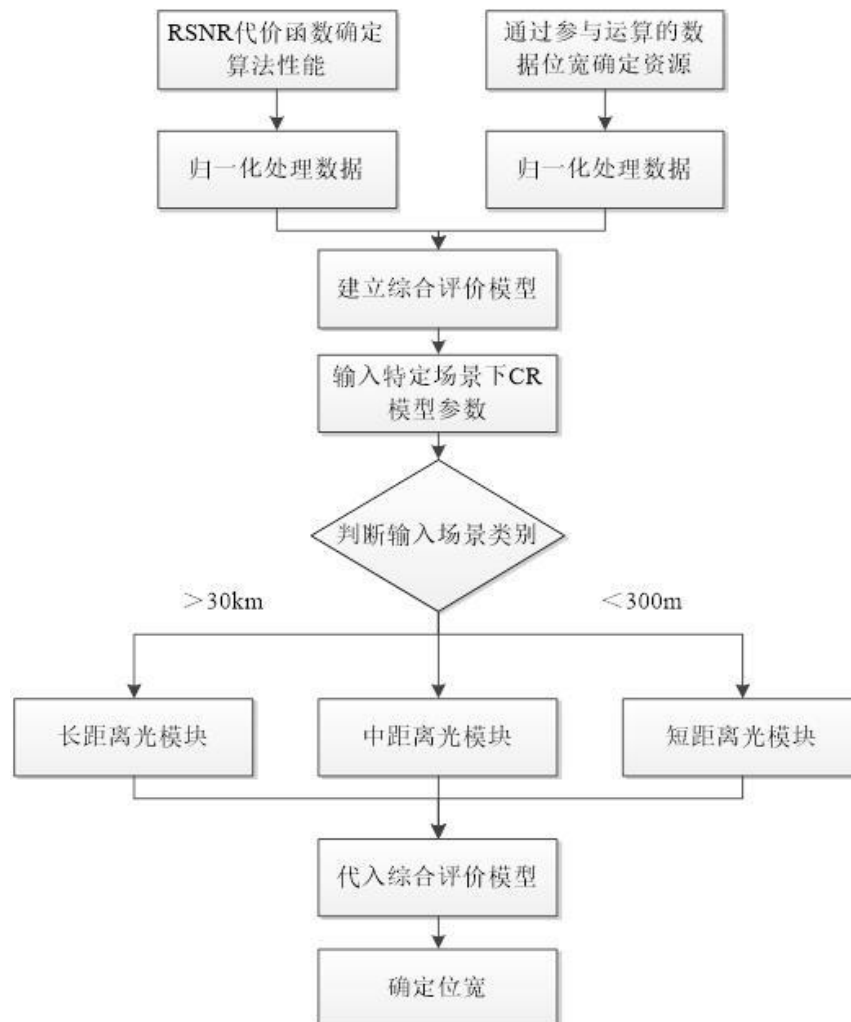


图 37 问题四求解流程图

本题要求选出问题三中的 1 种场景，给出统筹性的“性能-资源”综合考虑下的算法设计思路，构造性能和资源的综合代价函数，尝试给出一套自动优化位宽和实现性设计的方案，并给出定量结果。

即自行确定一组色散、线宽参数，以 RSNR 代价和占用资源为目标函数，约束条件为净荷流量为 >145Gbaud。根据使用场景确定合适的权重系数，进行最优化计算^[10]。问题一、二、三模型都是单一目标优化，在此题环境下就显得不再合适。

本问中选择在线宽为 100kHz，色散值为 2 万 ps/nm，算法的并行度固定为 128 的参数以及长距传输的场景下，进行方案的设计与求解。

5.4.2 指标的去量纲化处理

RSNR 代价和资源具有不同的量纲，因此首先要进行去量纲化处理，消除变量的量纲效应，使每个变量都具有同等的表现力，数据分析中常用的消量纲的方法，是对不同的变量进行所谓的压缩处理，即使每个变量的方差均变成 1，即

$$x_{ij}^* = x_{ij} / s_j \quad (5.28)$$

其中

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} \quad (5.29)$$

还可以有其他消除量纲的方法，如

$$\begin{aligned} x_{ij}^* &= x_{ij} / \max_i \{x_{ij}\}, \quad x_{ij}^* = x_{ij} / \min_i \{x_{ij}\} \\ x_{ij}^* &= x_{ij} / \bar{x}_j, \quad x_{ij}^* = x_{ij} / (\max_i \{x_{ij}\} - \min_i \{x_{ij}\}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

本文选择如下的去量纲化处理

$$\Delta SNR_{std} = \frac{\Delta SNR}{0.3\text{dB}}, S_{std} = \log_{10} \left(\frac{S}{1 \times 10^7 \text{bit}} \right) \quad (5.31)$$

对 S 取对数是因为 ΔSNR 的初始单位是 dB，也经过了一次对数运算。

5.4.3 综合代价函数模型及求解

综上所述，问题转换为如下最优化模型：

这里可以取目标函数为

$$\begin{aligned} \min : \text{money} &= p \Delta SNR_{std} + (1-p) S_{std} \\ \left\{ \begin{aligned} S &\approx 132W + WM + W^2 + 2^{4W} W + 2^{2W+9} W \\ \Delta SNR_{std} &= \frac{\Delta SNR}{0.3\text{dB}}, S_{std} = \log_{10} \left(\frac{S}{1 \times 10^7 \text{bit}} \right) \\ \frac{\partial BER}{\partial SNR} &= -0.01014 \\ \Delta SNR \cdot \frac{\partial BER}{\partial SNR} &= \frac{0.0138}{M} + 1.92 \times 10^{-11} LW \times N + \frac{0.0086}{4^{W-3}} \\ P_{cost} &= \frac{M}{N} \leq 10\% \\ W &\in (6, 7, 8, 9) \end{aligned} \right. \quad (5.32) \end{aligned}$$

长距传输可付出更多的资源以降低 RSNR 代价，这里取 $p=0.99$ ，在线宽为 100kHz 的条件解得：

表 5 不同定点位宽下的目标函数值

定点位宽	M	N	S	ΔSNR	money
6	27	271	1.13e8	0.1133	0.3843
7	27	271	1.94e9	0.1027	0.3618
8	27	271	3.46e10	0.1001	0.3656
9	27	271	6.20e11	0.099	0.3759

因此，当 $LW=100\text{kHz}$ 时，长距传输最佳的定点位宽为 7。光传送网深远的影响着人们的生活，从不同的角度考虑，对于光传送网的认知不同，对光传送网的价值理解就不同。可以尝试从企业发展的利益，考虑充分利用经济发达地区的特点，以及政府角度想要保障发展的角度考虑，结合可以从网上查找到的统计数据，例如加入不同地区的人口结构，产业结构或者区域总 GDP 的因素，对多个目标函数的权重进行合适的调整。

六、模型检验

6.1 蒙特卡洛仿真检验

蒙特卡洛算法的主要缺点在于它是一种统计抽样的方法，不可避免的带有统计误差，要减小统计误差则需要增加样本数。本模型中使用了 1000000 个采样点，根据伯努利大数定律：设 m 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数， p 是事件 A 在每次试验中发生的概率($0 < p < 1$)，则对于任意 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon = 1$$

这表明，当 n 足够大时，时间的频率与其发生的概率的偏差小于任意小的数 ε 的概率为 1。以本题为例当随机时间发生的次数足够多时（趋向于正无穷），其发生的频率就可视为此事件发生的概率。

假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01 和 0.00001，则当计算 1000000 个点后，有任意一个点能落在高值区的概率分别为

$$1 - 0.99^{1000000} \approx 0.99 \dots 99 (100 \text{ 多位})$$

$$1 - 0.99999^{100000} \approx 0.999954602$$

由上可知，问题一使用蒙特卡洛法的统计误差可以忽略，不影响模型精度。

七、模型总结与评价

7.1 模型优点

(1) 本文将问题一转变为极值函数的驻点问题，给出了精确的解析解，避免了蒙特卡洛仿真法产生的小概率误差。

(2) 本文通过蒙特卡洛算法对误码率进行仿真避免了复杂的理论计算过程，并检验了其精确性，方法满足真实生产工作需求；

(3) 本文通过理论计算和蒙特卡洛相结合的方法，即保证了模型的准确性，也简化了计算过程；

(4) 针对问题三，本文对位宽模型进行了简化设计，减小了模型运算的复杂度；

7.2 模型缺点与改进方向

(1) 本文采用的蒙特卡洛模拟法需要的试验次数较多，浪费资源且精度不太高，如果时间充裕的情况下可以通过理论计算的方式，依次叠加色散影响，相噪影响等进行理论建模，得出相对准确的结果。

(2) 在计算过程中，出于简化计算的目的，本文假设噪声服从均值为 0 的正态分布，而在实际建模过程中，噪声的情况远比假设复杂。所以在保证本文模型结果正确性的同时还需要对算法进行进一步地简化，降低计算时的复杂程度。

(3) 为了满足抗干扰能力更强以及计算更为便利的情况本文采用的是矩形星座图，在实际过程中，剩余的星座图中有可能存在“性能—资源”综合评价更为出色的方案，所以本文的模型还有进一步改善的空间^[11]。

参考文献

- [1] 高雨良. 相干光通信中的数字信号处理算法的仿真与研究[D].北京邮电大学,2011.
- [2] 于风云,张平.QAM 调制与解调的全数字实现[J].现代电子技术,2005(03):53-55.
- [3] 庄铭杰.蒙特卡洛仿真在移动通信中的应用研究[J].计算机仿真,2004(11):116-120.
- [4] G.Li,"Recent advances in coherent optical communication,"Advances in optics and Photonics,Vol.1,pp.279-307,2009.
- [5] 杨国翔. QAM 系统中抑制相位噪声算法的研究[D].西安电子科技大学,2014.
- [6] 张方正.高速光通信中数字信号处理 (DSP) 与波形产生技术研究[D].北京邮电大学,2013.
- [7] 王红恩. 相干光通信系统中载波频偏和相位恢复算法研究[D].北京邮电大学,2019.
- [8] 何宾,张艳辉.Xilinx FPGA 数字信号处理系统设计指南:从 HDL、simulink 到 HLS 的实现[M].北京:电子工业出版社,2019.1.
- [9] 严恭敏.惯性仪器测试与数据分析[D].北京:国防工业出版社.2012:130-140.
- [10] Mohamed Morsy-Osman, Qunbi Zhuge, Lawrence R Chen, David V Plant.. Feedforward carrier recovery via pilot-aided transmission for single-carrier systems with arbitrary M-QAM constellations[D]. Optics Express.2011.
- [11] M.M.Osman,Q.Zhuge,L.R.Chen and D.V.Plant,"Feedforward carrier recovery via pilot-aided transmission for single-carier systems with arbitrary M-QAM constellations,"Optics Express,Vol.19,No.24,pp.24331-24343,Nov,2011.

附录

代码 1，用于计算 SNR-BER 曲线，确定 RSNR 点：

```
%计算 SNR-BER 曲线
clc;
L=37;
BER=zeros(1,L);
kk=0:0.5:18;
snrr=10.^(kk/10);%信噪比
SNR=10*log10(snrr);%信噪比 dB
%位置坐标矩阵
xy=[-3 3;-1 3;1 3;3 3;
     -3 1;-1 1;1 1;3 1;
     -3 -1;-1 -1;1 -1;3 -1;
     -3 -3;-1 -3;1 -3;3 -3];
dis=[0 1 2 1 1 2 3 2 2 3 4 3 1 2 3 2;
      0 0 1 2 2 1 2 3 3 2 3 4 2 1 2 3;
      0 0 0 1 3 2 1 2 4 3 2 3 3 2 1 2;
      0 0 0 0 2 3 2 1 3 4 3 2 2 3 2 1;
      0 0 0 0 0 1 2 1 1 2 3 2 2 3 4 3;
      0 0 0 0 0 0 1 2 2 1 2 3 3 2 3 4;
      0 0 0 0 0 0 0 1 3 2 1 2 4 3 2 3;
      0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 2 1 3 4 3 2;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 1 1 2 3 2;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 1 2 3;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 3 2 1 2;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 2 1;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 1;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
dis=dis+dis';
%计算信号平均功率
ps=zeros(16,1);
s=0;
for i=1:16
    ps(i)=xy(i,1).^2+xy(i,2).^2;
    s=s+ps(i);
end
s=s/16;
for k=1:L;
    snr=snrr(k);
    n=s/snr;
```

```

%高斯分布
sigma=sqrt(n);
SS=100000;
x=zeros(1,SS);
y=zeros(1,SS);
pp=0;
for j=1:16
    m=0;
    %蒙特卡洛算法
    gauss1=normrnd(0,sigma/sqrt(2),1,SS);
    gauss2=normrnd(0,sigma/sqrt(2),1,SS);
    x=xy(j,1)+gauss1;%新坐标
    y=xy(j,2)+gauss2;
    for jj=1:SS
        distance=Inf;
        for q=1:16
            if (x(jj)-xy(q,1))^2+(y(jj)-xy(q,2))^2<distance
                distance=(x(jj)-xy(q,1))^2+(y(jj)-xy(q,2))^2;% 计算最近邻
点
                qq=q;
            end
        end
        m=m+dis(j,qq);
    end
    pp=pp+m/SS/64;%16*SS 个模拟点，每个点 4bite
end
BER(k)=pp;
end
figure(1)
semilogy(SNR,BER,'b','linewidth',1.5)
grid on;
hold on;
figure(2)
snr2=0:0.005:18;    %插值生成更细致的网格
ber2=interp1(SNR,BER,snr2,'spline');
semilogy(snr2,ber2,'b','linewidth',1.5)
grid on
hold on
RBER=0.02*ones(1,L);
semilogy(SNR,RBER,'r','linewidth',1.5)
hold on
title('BER 与 SNR 的关系曲线');
xlabel('SNR(dB)');
ylabel('BER');

```

```

legend('仿真结果','BER 门限','Location','northeast','FontSize',24);
set(gca,'FontSize',24,'FontWeight','bold','FontName','monospace');

```

代码 2，用于生成相位噪声并计算功率谱：

```

phase=zeros(100000,1);
NUM=100000;
delta_t=1;
LW=100e3;
fb=150e9;
for i=2:NUM
    phase(i)=phase(i-1)+sqrt(2*pi*LW*delta_t/fb)*randn(1);
end
t=linspace(1,NUM,NUM);
t=t';
figure(1)
plot(t,phase,'b','linewidth',1)
grid on;
hold on;
title('相位噪声演化曲线','FontSize',24);
xlabel('采样点数','FontSize',24);
ylabel('相位噪声(rad)','FontSize',24);
legend('随机游走相位噪声','Location','northeast','FontSize',24);
set(gca,'FontSize',24,'FontWeight','bold','FontName','monospace');
%%%
n=NUM;
Window=hann(n);
[P,f]=periodogram(phase,Window,'onesided',n,1e9); %10
figure(2)
loglog(f,sqrt(P),'b','linewidth',1.5)
title('相位噪声功率谱密度图');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('功率谱密度(rad/sqrt(Hz))');
set(gca,'FontSize',24,'FontWeight','bold','FontName','monospace');
grid on;
hold on;

```

代码 3，用于计算 N 与 BER 的关系：

```

%RSNR 点仿真
tic
LW=100e3;
fb=150e9;
L=20;
st=128;
leng=(L+1)*st;%
BER2=[];
for c=1:4000

```



```

BER=[];
true_BER=[];
F=zeros(1,leng);
for i=2:leng
    F(i)=F(i-1)+sqrt(2*pi*LW/fb)*randn(1); %相位噪声
end
for k=1:L;
    pp=0;
    for j=1:16
        m=0;
        %蒙特卡洛算法
        theta=F(1+k*st-st:k*st);%相位噪声
        x0=xy(j,1).*cos(theta)-xy(j,2).*sin(theta);%叠加相位噪声
        y0=xy(j,1).*sin(theta)+xy(j,2).*cos(theta);
        ngaussx=normrnd(0,sigma/sqrt(2),1,st);
        ngaussy=normrnd(0,sigma/sqrt(2),1,st);
        x=x0+ngaussx;%叠加高斯白噪声
        y=y0+ngaussy;
        for jj=1:st %计算最近邻点
            distance=Inf;
            for q=1:16
                if (x(jj)-xy(q,1))^2+(y(jj)-xy(q,2))^2<distance
                    distance=(x(jj)-xy(q,1))^2+(y(jj)-xy(q,2))^2;
                    qq=q;
                end
            end
            m=m+dis(j,qq);
        end
        pp=pp+m/st/64;%16*SS 个模拟点，每个点 4bite
    end
    BER(k)=pp;
    true_BER(k)=mean(BER');
end
BER2(c,:)=true_BER;
end
BER3=mean(BER2);
figure(3)
t=128:128:L*128;
plot(t,BER3,'b^','linewidth',2)
grid on;
hold on;
title('不同 N 值相位噪声下的 BER');
xlabel('N(× 采样周期)');
ylabel('BER');

```

```

legend('仿真结果','线性拟合','Location','northeast','FontSize',30);
set(gca,'FontSize',30,'FontName','monospace');
toc
代码 4, 用于计算 M 及与 BER 的关系:
noise=[];
for L=1:25
kk=12.71+10*log10(L);
snr=10.^(kk/10);%信噪比
SNR=10*log10(snr);%信噪比 dB
    n=s/snr;
    %高斯分布
    sigma=sqrt(n);
    SS=1e5;
    x=zeros(1,SS);
    y=zeros(1,SS);
    pp=0;
    for j=1:16
        m=0;
        %蒙特卡洛算法
        gauss1=normrnd(0,sigma/sqrt(2),1,SS);
        gauss2=normrnd(0,sigma/sqrt(2),1,SS);
        x=xy(j,1)+gauss1;%新坐标
        y=xy(j,2)+gauss2;
        theta_noi=atan(y./x)-atan(xy(j,2)./xy(j,1));%相位误差
        theta_noise=rms(theta_noi); %相位误差标准差
    end
    noise(L)=theta_noise;
end
figure(4);
pn=noise.^2;%相位噪声功率
plot(kkk,pn,'MarkerFaceColor',[1 0 0],'MarkerEdgeColor',[1 0 0],'Marker','^',...
    'LineWidth',1.5,'Color',[0 0 1],'linewidth',1.5);
xlabel('M');
ylabel('Pilot 引入的相噪功率');
set(gca,'FontSize',30,'FontName','monospace');
grid on
hold on

```