

所属类别	2020 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号

## 工业零件切割优化方案设计

### 摘要

在工业生产及设备加工过程中，初始零件的切割都是必不可少且最为常见的一道工序，对于很多精密零件，其原材料的成本十分高昂。因此，企业在多样化的零件切割过程中，如何选择最优的切割方案来最大化的降低成本和提高产量就变的尤为重要。零件的切割问题实质上可以被归结为不同形状的零件在原材料上的排样问题，不同的排样方案往往会导致原料利用率的不同。因此，本文在此基础上针对原料利用率、原料数量、零件生产利润等目标，讨论了不同尺寸的正椭圆柱体、圆柱体、长方体零件在矩形体原材料上的最优排样方案。

本文的主要工作如下：

问题 1：要求求得在单一原材料上切割正椭圆体零件并使得原材料利用率最大的方案。由于零件的厚度与原材料的高度成比例关系，本文假设该零件的厚度方向与原材料的高度方向重合，进而将该问题抽象为一个二维截面的排样问题。应用最常见的并排及品牌排样方案分别讨论了横排及纵排下的原料利用率，建立了相关模型，并应用 cplex 软件进行了求解。

问题 2：新加入了正圆柱体零件，要求求得在单一原材料上切割多种零件并使得原材料利用率最大的方案。由于新加入的零件与原材料的高度成比例关系，本文仍然假设零件的厚度方向与原材料的高度方向重合，将问题抽象为二维排样问题，并建立了相关模型。新加入的零件使得解空间变大，使得模型的求解变得困难，所以本文提出了一种启发式算法求解此问题，并将结果与 cplex 软件得求解结果进行了比较。

问题 3：零件种类不变，要求求得满足生产目标的前提下，使用最少的原材料数切割多种零件并使得原材料利用率最大的方案。在零件的厚度方向与原材料高度方向重合的假设下，将生产目标约束加入到问题 2 的模型中，建立新的模型。针对带有生产目标的排样问题，本文提出了一种新的启发式算法求解此问题。

问题 4：新加入了长方体零件，要求求得满足生产目标的前提下，使用最少的原材料数切割多种零件并使得原材料利用率最大的方案。由于长方体的厚度与以前零件不同，所以需要综合考虑零件的厚度与高度的关系。针对此问题，本文建立了新的模型，使用基于问题 2 和问题 3 的启发式算法解决此问题。

问题 5：零件种类不变，要求求得在给定数量为 100 的原材料条件下，使总利润最大的切割方案。本文将该问题抽象为一个二维截面下，以利润最大化为目标的排样问题。对此建立了相关模型，并提出了一种基于利润大小排序的贪婪算法解决此问题。

**关键字：**排样问题；多零件切割；原料利用率；启发式算法；贪婪算法

# 1. 问题重述

## 1.1 引言

在大型工业设备的生产过程中，如机床、轮船、飞机，常常需要用到很多的配件，如螺钉、螺帽、螺栓、活塞等。加工这些零件时需要依照产品尺寸，从原材料中截取初级产品。不同的截取方案具有不同的材料利用率，而原材料的利用率（原材料截取初级产品的总体积与原材料体积之比）将直接影响产品的生产成本。

原材料切割问题本质上可被抽象为排样问题。合理的排样方案可最大化地提高原材料的利用率，从而提高产品产量，节省成本。而优化排样问题是指在已知原材料和零件相关信息的前提下，在满足零件的需求和不超出原材料尺寸的条件下，实现初始零件在原材料上的合理派样，达到材料利用率最高或产生废料最少的目的<sup>[1]</sup>。在实际生产中，优化排样问题在企业内极为常见。设计一个优秀的排样方案，对于降低企业成本，提高生产效益乃至提高企业整个行业中的竞争力有着十分重要的作用。

排样是布局问题中的一个重要环节，诸多学者已经对其进行过相关研究。贾志欣<sup>[2]</sup>简述了排样问题的研究现状和趋势；张春玲等<sup>[3]</sup>讨论了解决一维下料问题的常用算法及适用情况，分析了与之相关的一些实际问题及应用；宋佩华等<sup>[4]</sup>以粒子群优化算法为基础，提出了一种基于离散粒子群优化算法来求解矩形件排样问题，并通过了大量的实例测试，验证了该算法的有效性；张克<sup>[5]</sup>在分析矩形件优化排样问题特点的基础上，建立了该问题的数学模型，分别应用三种方法进行优化求解，对不同约束条件下的算例的求解结果进行了比较和分析，发现其在总体上优于遗传算法和免疫算法；沈显君等<sup>[6]</sup>将粒子群优化算法与遗传算法相结合，利用交叉算子和变异算子，提出一种广义粒子群优化算法来求解一维下料问题，结果表明采用自适应广义粒子群优化算法求解一维下料问题具有高效性和鲁棒性；郑晓军等<sup>[7]</sup>对于普通下料问题，将满意度原理引入模拟退火算法，提出了一种基于满意度的模拟退火算法(SDSA)进行求解；对于批量下料问题，由于各坯料的数量较多，采用该算法与序列启发方法相结合的混合算法(SHP&SDSA)进行求解。对普通下料和批量下料的数值仿真结果表明，该算法可提高求解速度和质量，并可获得稳定的工程满意解；赵文余<sup>[8]</sup>针对建筑工程中的钢筋下料及钢结构矩形件排样问题，应用智能优化算法，如进化算法和模拟退火算法，对其进行优化研究。结果表明，采用该算法求解钢筋下料方案可在满足客户需求的前提下最大化地提高钢筋利用率，并且可以同时提供多个优化方案供用户根据实际情况和个人偏好进行选择。综上所述，对于排样问题，相关学者已经对其进行了大量的研究，可以为本文的研究奠定良好基础。

本文分别以原材料利用率，原材料数量和产品利润为优化目标，研究了不同规格的零件在矩阵原材料上的优化排样问题，并使用 Cplex 和 Python 软件构造合适的启发式算法解决了相关问题。经过验证，此启发式算法可以得到近似最优解。

## 1.2 需要解决的问题

问题 1：在一块原材料（长方体）上切割 LJ1（正椭圆柱体）产品，建立数学模型，给出原材料利用率最高的切割方案，即切割的数量和原材料的利用率。

问题 2：在一块原材料（长方体）上切割 LJ1（正椭圆柱体）、LJ2（正椭圆柱体）、LJ3（正椭圆柱体）、LJ4（正椭圆柱体）、LJ5（正椭圆柱体）、LJ6（正椭圆柱体）产品，建立数学模型，给出利用率由高到低排序的前 5 种切割方案，即每个零件产品的数量和原材料的利用率。

问题 3: 需要完成表 2 中 LJ1 (正椭圆柱体)、LJ2 (正椭圆柱体)、LJ3 (正椭圆柱体)、LJ4 (正椭圆柱体)、LJ5 (正椭圆柱体)、LJ6 (正椭圆柱体) 产品的生产任务, 至少需要多少个原材料? 由于工艺的缘故, 只允许至多采用 5 种切割方案, 建立数学模型, 给出原材料总利用率最高的至多 5 种切割方案。

问题 4: 将问题三的产品型号拓展到 LJ1-LJ9, 其中 LJ7、LJ8、LJ9 为长方体, 需要完成表 2 中 LJ1-LJ9 产品的生产任务, 同样需要多少个原材料? 同样只允许至多采用 5 种切割方案, 建立数学模型给出原材料总利用率最高的至多 5 种切割方案。

问题 5: 不考虑产品 LJ1-LJ9 的需求数量, 其中 LJ7、LJ8、LJ9 为长方体, 给定 100 个原材料, 按照表 2 中给出的利润, 建立数学模型, 给出总利润最大的切割方案 (同样要求切割方案不超过 5 个)。

文章的具体流程如下:

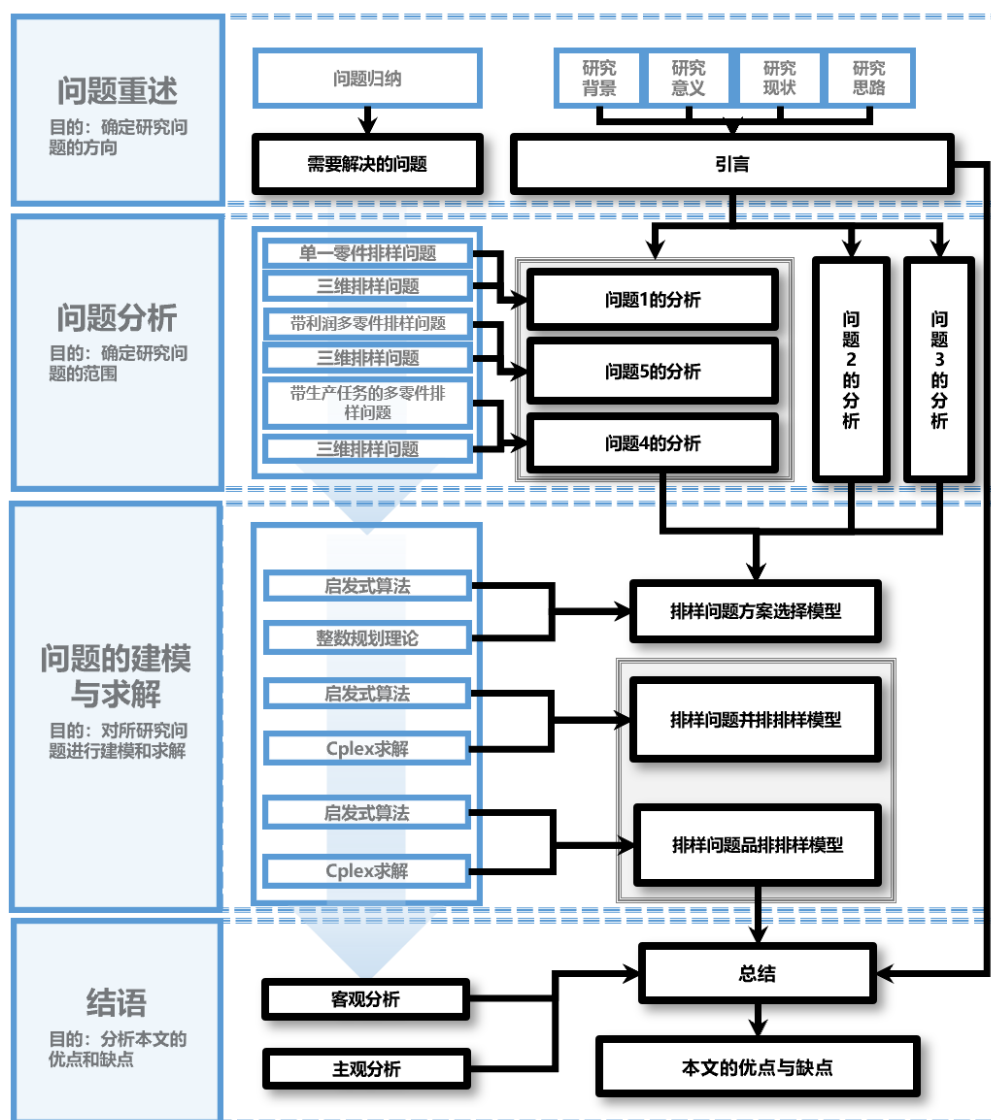


图 1 文章的研究思路

## 2. 问题分析

排样问题是一个 NPC (Non-deterministic Polynomial Complete) 问题<sup>[9]</sup>。NPC 问

题的复杂性体现在：随着求解问题规模的不断增大，问题的解空间呈指数倍增长。因此在有限的时间范畴内只能获得问题的最优近似解而非精确解。

本文研究的是一个三维排样问题，其相比于二维的排样问题更为复杂。在考虑二维截面排样的同时，还要考虑零件在空间高度上的分布情况。为降低问题的复杂性，本文假设零件的厚度方向与原材料的高度方向始终保持一致，即只研究原材料长和宽的截面，不考虑其他截面。需要说明的是，实际生产中，一般情况下首先把原材料切割为不同的条带，再进行冲孔，最后进行分割，过程如图 2-4：

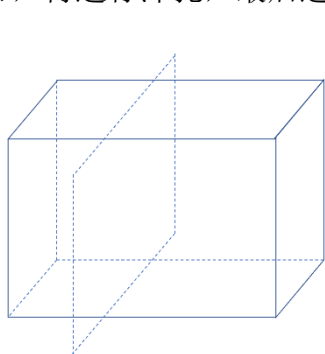


图 2 将原材料切成条带

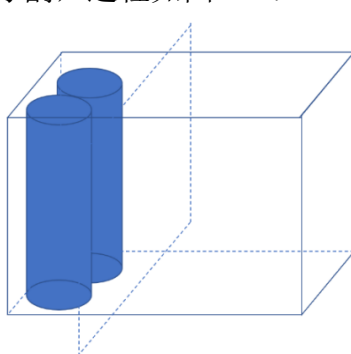


图 3 在条带上冲孔

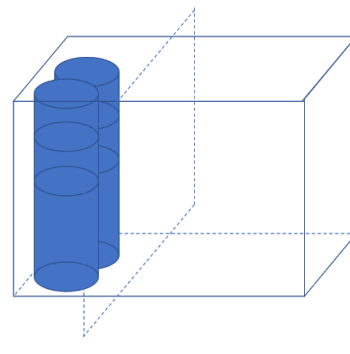


图 4 分割得到的零件

本文所研究的原材料的高度刚好可以被零件厚度整除，所以可以将该问题抽象为二维排样问题，且不会失去解的最优性；本文所研究的问题属于圆形零件排样问题，圆形零件排样问题相较于矩阵零件排样问题更为复杂，其切割方案往往由并排和品排排样方式构成，具体如下：

### (1) 并排

在上述问题分析中，本文已经将三维排样问题转化为二维排样问题。因此我们只需考虑原材料在长宽截面上的零件排样即可。并排的排样方式见图 5，图 6 所示。

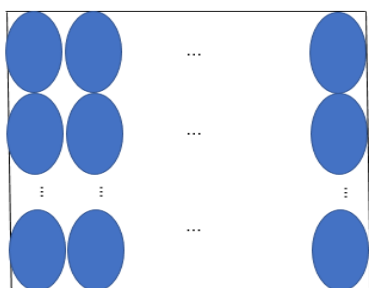


图 5 并排排样（纵排）

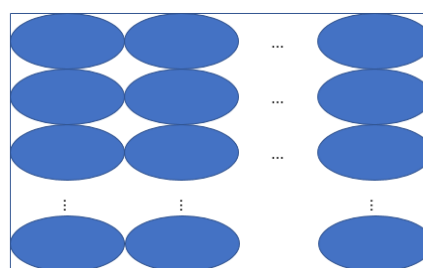


图 6 并排排样（横排）

### (2) 品排

在品排的情况下，零件的排样方向仍然一致。但值得注意的是，相较于并排排样，品排排样中的零件会发生堆叠，如图 7-10 所示。因此在品排排样下，材料的利用率更高<sup>[10]</sup>。

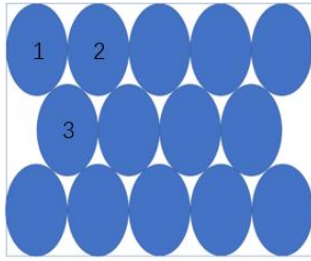


图 7 品排排样（纵排）  
（奇数排-偶数排=1）

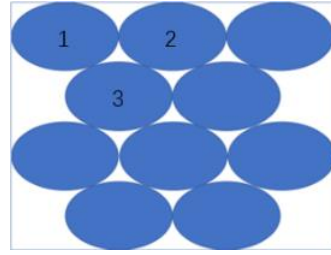


图 8 品排排样（横排）  
（奇数排-偶数排=1）

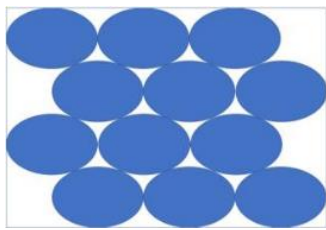


图 2 品排排样（横排）  
（奇数排=偶数排）

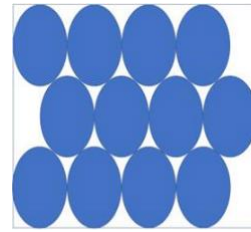


图 3 品排排样（纵排）  
（奇数排=偶数排）

## 2.1 对于问题 1 的分析

问题 1 要求在尺寸为  $6060\text{mm} \times 2160\text{mm} \times 240\text{mm}$  的长方体原材料上切割型号为 LJ1 的工件，并尽可能使原材料利用率最高。问题 1 可以被抽象为如何在一个尺寸为  $6060\text{mm} \times 2160\text{mm}$  的长方形截面中容纳更多尺寸为  $60\text{mm} \times 40\text{mm}$  的椭圆形。考虑到切割方案有无数多种，结合实际情况，应用最广泛的排样方案即为并排排样和品排排样。如何选择排样方案来提高原材料利用率成为了解决问题 1 的关键。

## 2.2 对于问题 2 的分析

在问题 1 的基础上，问题 2 加入了圆柱体零件。由于问题要求至多 5 种切割方案，所以仅建立模型求出最优解并不适用于此情况。同时，新加入的零件会使得解空间剧增，使用求解器求解将会耗费大量的时间。为此，本文提出一种启发式算法来解决该问题。

## 2.3 对于问题 3 的分析

在问题 2 的基础上，问题 3 提出了新的要求，即完成各零件的生产目标。题中要求至多使用 5 个切割方案，同时使原材料利用率最大。由于加入了新的约束条件，问题 3 的求解相较于问题 2 更加复杂。因此，本文提出一种基于问题 2 的改进启发式算法来解决此问题。

## 2.4 对于问题 4 的分析

在问题 3 的基础上，问题 4 加入了长方体零件。由于新加入的零件与现有的零件厚度不同，所以需要综合考虑原材料尺寸与零件尺寸之间的关系。长方体零件相较于圆柱体零件更容易计算，所以本文将优先计算长方体零件的排样方式，并在问题 3 的算法

上做出改进。

## 2.5 对于问题 5 的分析

问题 5 要求忽略生产任务，并在 100 个原材料下，求得使总利润最大的零件切割方案。本文将该问题抽象为一个在二维截面下，以利润最大化为目标的排样问题。值得注意的是，可行的排样方案有无数多种，想要枚举出所有的方案并一一计算其总利润是不现实的。因此，本文采用了贪婪算法求解此问题，可以得到该问题的近似最优解。

## 3. 问题的建模与求解

### 3.1 问题 1 的求解

在这一节中，我们首先建立了排样方案选择的泛化模型，随后针对并排和品排两种不同的排样方式下原料的最优利用率，分别建立了模型并应用 Cplex 进行了求解。相关参数及变量见下表：

表 1 相关参数及变量

参数	含义
$I$	排样方案集合, $i \in I$
$\tilde{I}$	方案数不超过 5 的排样方案集合, $\tilde{I} \subseteq I$
$M_j$	零件 $j$ 的生产任务
$m_{ij}$	第 $i$ 种方案单位原材料可切割零件 $j$ 的个数, $i = 1 \dots 6$
$P_j$	零件 $j$ 的单位利润
$\tilde{N}$	原材料总数
$n_i$	用于方案 $i$ 的原材料数量
$\theta_i$	第 $i$ 种方案下原材料的利用率
$v_j$	零件 $j$ 的体积
$V$	原材料的体积
$L$	原材料的长度
$W$	原材料的宽度
$H$	原材料的高度
$l_j$	零件 $j$ 的横径
$w_j$	零件 $j$ 的竖径
$h_j$	零件 $j$ 的厚度
$x_1$	LJ1 零件在原材料长度方向上横向排样的个数
$x_2$	LJ1 零件在原材料长度方向上纵向排样的个数
$y_1$	横向排样的 LJ1 零件在原材料宽度方向的个数
$y_2$	纵向排样的 LJ1 零件在原材料宽度方向的个数

#### 3.1.1 方案选择模型

上文中提到，不同的排样方案选择会导致不同的原料利用率，本文的目标是找到使原料利用率最大的一种排样方案。因此，方案选择模型可建立如下：

$$\max_i \theta_i$$

s.t.

$$m_{i1}v_1 \leq V, i \in I \quad (1)$$

$$m_{i1} \in N^+ \quad (2)$$

式 1 规定了型号为 LJ1 的零件在一个原材料上排样的最大数量限制，式 2 规定了型号为 LJ1 的零件数量的正整数约束。

### 3.1.2 并排模型建立

并排排样下，本文对横排及纵排方式分别建立了模型，具体如下：

#### 1) 横排方式下的并排排样模型

$$\max \theta_i = \frac{x_1 y_1 \times \frac{H}{h_1} \times \frac{1}{4} l_1 w_1 h_1 \pi}{W \times L \times H}$$

s.t.

$$l_1 x_1 \leq L \quad (3)$$

$$w_1 y_1 \leq W \quad (4)$$

$$x_1, y_1 \in N^+ \quad (5)$$

目标函数表示了在一件原材料中，以并排排样的方式下原材料的利用率，如图 5 所示。因此，式 3，式 4 表示了横排方式下，排样零件总长度和宽度限制；式 5 表示零件个数的正整数约束。

#### 2) 纵排方式下的并排排样模型

$$\max \theta_i = \frac{x_2 y_2 \times \frac{H}{h_1} \times \frac{1}{4} l_1 w_1 h_1 \pi}{W \times L \times H}$$

s.t.

$$w_1 x_2 \leq L \quad (6)$$

$$l_1 y_2 \leq W \quad (7)$$

$$x_2, y_2 \in N^+ \quad (8)$$

纵排方式下的目标函数与横排方式下的目标函数具有一样的意义，区别在于零件的排样方式，如图 6 所示。因此，式 6，式 7 表示了纵排方式下，排样零件总长度和宽度限制；式 8 表示了零件数量的正整数约束。

### 3.1.3 品排模型建立

品排排样下的模型建立将变的更加困难，这主要是由于品排排样下会产生堆叠，且横排和纵排的堆叠的长度也不相同。其次，不同排的零件个数将受到自身尺寸和原材料尺寸的影响而发生变化。基于以上特点，本文以横排和纵排两种方式分别建立了模型，如下所示：

#### 1) 横排方式下的品排排样模型

$$\max \theta_i = \frac{\{\beta \sum_{i=1}^{y_1} [\alpha x_1 + (1 - \alpha)(x_1 - 1)] + (1 - \beta)x_1 y_1\} \times \frac{H}{h_1} \times \frac{1}{4} l_1 w_1 h_1 \pi}{W \times L \times H}$$

s.t.

$$w_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} w_1 (y_1 - 1) \leq W \quad (9)$$

$$l_1 x_1 \leq L \quad (10)$$

$$x_1, y_1 \in N^+ \quad (11)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, i \text{ 为奇数} \\ 1, i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (12)$$

$$\beta = \begin{cases} 0, L \% l_1 \geq \frac{l_1}{2} \\ 1, L \% l_1 < \frac{l_1}{2} \end{cases} \quad (13)$$

式 9, 式 10 表示品排横排方式下, 零件在原材料长度及宽度方向上的数量限制; 式 11 为零件数量的正整数约束; 式 12, 式 13 规定了  $\alpha$  与  $\beta$  为 0-1 变量, 如果  $\beta$  为 1, 则为图 7 所示的品排情况, 奇数行将比偶数行的零件数多 1; 反之, 当  $\beta$  为 0, 则为图 8 所示的特殊情况, 每一行的零件数都相同。

## 2) 纵排方式下的品排排样模型

$$\max \theta_i = \frac{\{\beta \sum_{i=1}^{y_2} [\alpha x_2 + (1 - \alpha)(x_2 - 1)] + (1 - \beta)x_2 y_2\} \times \frac{H}{h_1} \times \frac{1}{4} l_1 w_1 h_1 \pi}{W \times L \times H}$$

s.t.

$$l_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} l_1 (y_2 - 1) \leq W \quad (14)$$

$$w_1 x_2 \leq L \quad (15)$$

$$x_2, y_2 \in N^+ \quad (16)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, i \text{ 为奇数} \\ 1, i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (17)$$

$$\beta = \begin{cases} 0, L \% w_1 \geq \frac{w_1}{2} \\ 1, L \% w_1 < \frac{w_1}{2} \end{cases} \quad (18)$$

同理, 式 14, 式 15 表示品排纵排方式下, 零件在原材料长度及宽度方向上的数量限制; 式 16 为零件数量的正整数约束; 式 17, 式 18 规定了  $\alpha$  与  $\beta$  为 0-1 变量, 如果  $\beta$  为 1, 则为图 6 所示的品排情况, 奇数行将比偶数行的零件数多 1; 反之, 当  $\beta$  为 0, 则为图 9 所示的特殊情况, 每一行的零件数都相同。

至此, 本文针对问题 1 建立了并排及品排排样的模型。在 3.1.4 及 3.1.5 节中, 我们将利用数据, 分析两种排样方式下的原料利用率情况。



### 3.1.4 并排排样模型的数据分析

依据 3.1 节中对并排模型及相关数据，本节将针对并排排样下的原材料利用率进行分析。利用 Cplex 求解器，我们得出了如下结果：

#### 1) 横排方式下的并排排样分析

表 2 并排横排排样结果

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
101	0	54	0

排样方式如图 11 所示，原料利用率为 78.5%，

#### 2) 纵排方式下的并排排样分析

表 3 并排纵排排样结果

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
0	151	0	36

排样方式如图 12 所示，原料利用率为 78.2%，

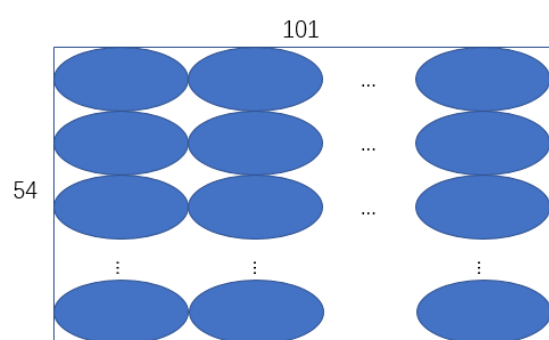


图 4 并排横排排样图

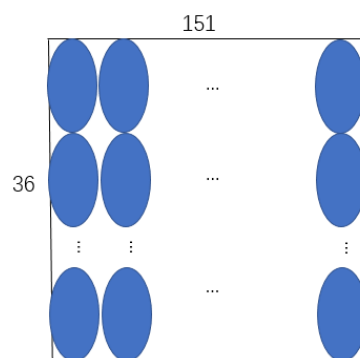


图 12 并排纵排排样图

### 3.1.5 品排排样下的分配方案及原料利用率

利用 Cplex 软件进行求解分析，我们得出了在品排排样下，横排及纵排方式下原材料的利用率及排样方案，如下所示，

#### 1) 横排方式下的品排排样分析

表 4 品排横排排样结果

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
101	0	62	0

排样方式如图 13 所示，原料利用率为 89.68%，

#### 2) 纵排方式下的品排排样分析

表 5 品排纵排排样结果

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
0	151	0	41

排样方式如图 14 所示，原料利用率为 89.1%，

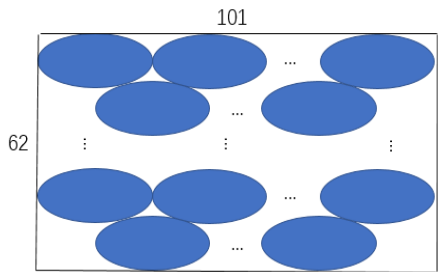


图 5 品排横排排样结果

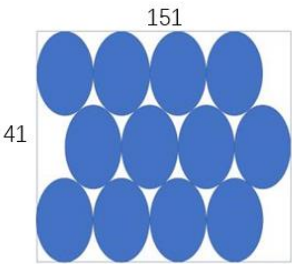


图 6 品排纵排排样结果

综上所述，我们应该选择原料利用率最高为 89.68% 的品排横排排样方案。

3.2 问题 2 的求解

相比问题 1，问题 2 要求我们在一块原材料上切割 6 种不同尺寸的零件，求得使原材料利用率最高的前 5 种方案，针对此问题，我们首先建立了方案选择模型.

3.2.1 方案选择模型

$$\max_i \theta_i$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^6 (m_{ij} v_j) \leq V \tag{19}$$

$$m_{ij} \in N^+ \tag{20}$$

式 19 规定了 6 种零件各自的体积与数量之积不能超出原料的总体积；式 20 规定了零件数量的整数约束。

3.2.2 品排模型

依据相关数据，品排排样模型的具体参数如表 6 所示：

表 6 品排排样模型的具体参数

自变量	含义（品排状态下）
$x_1$	LJ1 横排排样的行数
$x_2$	LJ1 纵排排样的行数
$x_3$	LJ2 横排排样的行数
$x_4$	LJ2 纵排排样的行数
$x_5$	LJ3 排样的行数
$x_6$	LJ4 排样的行数
$x_7$	LJ5 排样的行数

$x_8$	LJ6 排样的行数
参数	含义
$d_1$	LJ1 横排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_2$	LJ1 纵排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_3$	LJ2 横排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_4$	LJ2 纵排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_5$	LJ3 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_6$	LJ4 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_7$	LJ5 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_8$	LJ6 排样在原材料宽度方向上的长度
$c_i$	整数，安排零件 <i>i</i> 加工的行数除以 2 的除数
$e_i$	0-1 变量，安排零件 <i>i</i> 加工的行数除以 2 的余数

本文针对此问题建立的具体品排排样模型如下：

$$\begin{aligned}
\max Z2 = & \frac{1}{LW} \left\{ \frac{d_1 d_2 \pi}{4} \left\{ c_1 (2 \times \left\lfloor \frac{L}{d_2} \right\rfloor - 1) + \left\lfloor \frac{L}{d_2} \right\rfloor e_i + \left\lfloor \frac{L}{d_1} \right\rfloor \times x_2 \right\} \right. \\
& + \frac{d_3 d_4 \pi}{4} \left\{ c_4 (2 \times \left\lfloor \frac{L}{d_4} \right\rfloor - 1) + \left\lfloor \frac{L}{d_4} \right\rfloor e_4 + \left\lfloor \frac{L}{d_3} \right\rfloor \times x_4 \right\} + \frac{\pi d_5^2}{4} \left\lfloor \frac{L}{d_5} \right\rfloor \times x_5 \\
& + \frac{\pi d_6^2}{4} (c_6 (2 \times \left\lfloor \frac{L}{d_6} \right\rfloor - 1) + \left\lfloor \frac{L}{d_6} \right\rfloor e_6) + \frac{\pi d_7^2}{4} (c_7 (2 \times \left\lfloor \frac{L}{d_7} \right\rfloor - 1) + \left\lfloor \frac{L}{d_7} \right\rfloor e_7) \\
& \left. + \frac{\pi d_8^2}{4} \left\lfloor \frac{L}{d_8} \right\rfloor \times x_8 \right\}
\end{aligned}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^8 [d_i + \frac{\sqrt{3}}{2} d_i (x_i - 1)] \leq W \quad (21)$$

$$x_i > 0, \forall i = 1, \dots, 8 \quad (22)$$

$$c_i \leq \frac{x_i}{2}, \forall i = 1, \dots, 8 \quad (23)$$

$$e_i \leq x_i - 2c_i, \forall i = 1, \dots, 8 \quad (24)$$

式 21 表示宽度的限制；式 22 表示同一块材料上同时要加工 6 种零件至少一次；式 23 是确定 $c_i$ 的值；式 24 是确定 $e_i$ 的值。

### 3.2.3 问题 2 的算法设计

在实际生产过程中，单一条带内零件排数通常不超过 3 排，所以对于原材料切割产生的条带上不会出现 3 排以上的零件。针对此种情况，可以计算出每种零件使用并排排样和品排排样的利用率。本文只考虑横排条带且切割的间缝忽略不计的情况。当零件的排样方式为并排时，利用率计算如下：

(1) 正圆柱体零件

设 $n$ 为在条带上一排零件的个数， $n = \lfloor L/d \rfloor$ ， $s$ 为此圆柱体零件圆的面积， $s =$

$\pi(d/2)^2$ ，利用率 $P$ 为 $ns/Ld$ 。正圆柱体零件 2 排和 3 排的利用率同 1 排。

(2) 正椭圆体零件

横排情况（如第 2 章分析）： $n = \lfloor L/l \rfloor$ ， $s = \pi(lw)/4$ ，利用率 $P = ns/Lw$ ，正椭圆体零件 2 排和 3 排的利用率同 1 排。

纵排情况（如第 2 章分析）： $n = \lfloor L/w \rfloor$ ， $s = \pi(lw)/4$ ，利用率 $P = ns/Ll$ ，正椭圆体零件 2 排和 3 排的利用率同 1 排。

当零件的排样方式为品排时，利用率计算如下：

(1) 正圆柱体零件

设 $j$ 为零件的排数， $3 \geq j \geq 2$ ， $n_j$ 为零件在第 $j$ 排的数量，当偶数排零件数比奇数排零件数少 1，即 $n_1 - n_2 = 1$ ，且 $j = 2$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3}/2)Ld$ ； $j = 3$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(2n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3})Ld$ ， $n_1 = \lfloor L/d \rfloor$ ， $s = \pi(d/2)^2$ 。当偶数排零件数比奇数排零件数相等，即 $n_1 = n_2$ ，且 $j = 2$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3}/2)Ld$ ； $j = 3$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(2n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3})Ld$ ， $n_1 = \lfloor L/d \rfloor$ ， $s = \pi(d/2)^2$ 。

(2) 正椭圆体零件

横排：当偶数排零件数比奇数排零件数少 1，即 $n_1 - n_2 = 1$ ，且 $j = 2$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3}/2)Lw$ ； $j = 3$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(2n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3})Lw$ ， $n_1 = \lfloor L/l \rfloor$ ， $s = \pi(l + w)/2$ 。当偶数排零件数比奇数排零件数相等，即 $n_1 = n_2$ ，且 $j = 2$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3}/2)Lw$ ； $j = 3$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(2n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3})Lw$ ， $n_1 = \lfloor L/l \rfloor$ ， $s = \pi(lw)/4$ 。

纵排：当偶数排零件数比奇数排零件数少 1，即 $n_1 - n_2 = 1$ ，且 $j = 2$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3}/2)Ll$ ； $j = 3$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(2n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3})Ll$ ， $n_1 = \lfloor L/w \rfloor$ ， $s = \pi(d/2)^2$ 。当偶数排零件数比奇数排零件数相等，即 $n_1 = n_2$ ，且 $j = 2$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3}/2)Ll$ ； $j = 3$ 时，利用率 $P$ 为 $\pi s(2n_1 + n_2)/(1 + \sqrt{3})Ll$ ， $n_1 = \lfloor L/w \rfloor$ ， $s = \pi(lw)/4$ 。

在计算出以上利用率后，可以采用一种启发式算法解决问题 2。具体流程如下：

步骤 1，将排样方式的利用率非增排序，构成一个列表，并记录此时原材料的宽  $W$  和对应排样方式的宽 $y_i$ ；

步骤 2， $h=1$ ，选择列表第  $h$  个排样方式，记录此时原材料的宽  $W=W-y_h$ ；

步骤 3，重复选择列表第  $h$  个排样方式， $W=W-y_h$ 直到  $W-y_h < 0$ ；

步骤 4，遍历  $h$  之后的排样方式，若剩余的所有 $y_i > W$ ，生成切割方案；若存在剩余的 $y_i \leq W$ ，则添加第 $i$ 个排样方式，生成切割方案。

步骤 5，令  $h=h+1$  转到步骤 2，直到生成所有切割方案。

### 3.2.4 问题 2 的实例分析

由于该问题是一个 NPC 问题，使用相关方法得到解的上界，可以很好的评估启发式

算法的可靠性。因此，针对问题的性质，建立纵排品排排样模型如下：

$$\max \theta_1 = \frac{\frac{1}{4}lw\pi h}{L \times W \times H} \times \left\{ \beta \sum_{i=1}^{x_1} (\alpha x_2 + (1 - \alpha)(x_2 - 1)) + (1 - \beta)x_1 x_2 \right\} x_3$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ 60 + 30\sqrt{3}(x_1 - 1) \leq y_1 W + y_2 L + y_3 H \\ 40x_2 \leq y_1 L + y_2 H + y_3 W \\ 40x_3 \leq y_1 H + y_2 W + y_3 L \\ \alpha = i\%2 \\ \alpha, \beta \in \{0,1\} \\ x_1, x_2, x_3 \in N^+ \end{cases}$$

$$\text{其中 } \alpha = \begin{cases} 0, i \text{ 为偶数} \\ 1, i \text{ 为奇数} \end{cases}, \beta = \begin{cases} 0, \text{if } L\%w \geq 20 \\ 1, \text{if } L\%w < 20 \end{cases}$$

可以得到解的上界  $x_1 = 41, x_2 = 151, x_3 = 6$ , 利用率  $\theta_1 = 89.15\%$ 。

针对此问题的性质，建立横排品排排样模型如下：

$$\max \theta_2 = \frac{x_1 x_2 x_3 \times \frac{1}{4}lw\pi h}{L \times W \times H}$$

$$\begin{cases} 40 + 20\sqrt{3}(x_1 - 1) \leq 2060 \\ 60x_2 \leq 6060 \\ 40x_3 \leq 240 \\ 60x_2 + 30 - 6060 \leq Mx_0 \\ 60x_2 + 30 - 6060 \geq M(x_0 - 1) \\ x_1, x_2, x_3 \in N^+ \end{cases}$$

可以得到解的上界  $x_1 = 62, x_2 = 101, x_3 = 6$ , 利用率  $\theta_2 = 89.73\%$ 。

在开始上述启发式算法之前，需要针对每种零件计算其品排状态下是偶数排零件数比奇数排零件数少 1，还是偶数排零件数和奇数排零件数相等。以下是此 6 种零件的所有排样方式和其利用率：

表 7 各排样方式的利用率

排样方式	利用率
LJ3 并排排样	77.8%
LJ4 并排排样	78.2%
LJ5 并排排样	78.4%
LJ6 并排排样	78.2%
LJ1 横排并排排样	78.5%
LJ1 纵排并排排样	78.3%
LJ2 横排并排排样	78.4%
LJ2 纵排并排排样	78.3%
LJ4 品排（2 排）（奇数排-偶数排=1）排样	83.4%

LJ5 品排（2 排）（奇数排-偶数排=1）排样	83.7%
LJ4 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样	85.6%
LJ5 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样	85.8%
LJ3 品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样	83.4%
LJ6 品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样	83.8%
LJ3 品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	85.5%
LJ6 品排（6 排）（奇数排-偶数排=0）排样	85.8%
LJ1 横排品排（2 排）（奇数排-偶数排=1）排样	83.8%
LJ1 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样	86.0%
LJ1 纵排品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样	84.0%
LJ1 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	86.0%
LJ2 横排品排（2 排）（奇数排-偶数排=1）排样	83.7%
LJ2 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样	85.9%
LJ2 纵排品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样	84.0%
LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	86.0%

使用上述启发式算法，可以得到以下 5 个方案（利用率从大到小排列）：

表 8 次优的 4 个切割方案（注：1×被省略）

方案	利用率
16×LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	86.978%
14×LJ5 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+ LJ5 并排排样	85.598%
19×LJ2 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+ LJ1 横排品排（2 排）（奇数排-偶数排=1）排样	85.4328%
19×LJ1 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+ LJ1 横排品排（2 排）（奇数排-偶数排=1）排样	85.4304%
15×LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样+ LJ2 纵排品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样	85.1664%

使用附件中的数据，本文首先使用 Cplex 对上述模型进行求解，得到以下结果：

表 9 问题 2 品排排样方式下 Cplex 的最优解

排列方法	方案 1（行）	方案 2（行）	方案 3（行）	方案 4（行）	方案 5（行）
$x_1$	1	1	1	1	1
$x_2$	30	15	25	20	10
$x_3$	1	1	1	1	1
$x_4$	4	22	10	16	28
$x_5$	1	1	1	1	1
$x_6$	1	1	1	1	1

$x_7$	1	1	1	1	1
$x_8$	3	3	3	3	3
利用率	87.94%	87.94%	87.94%	87.94%	87.94%

从上述结果来看，使用启发式方法求得的最优利用率与 Cplex 求得的上界解利用率仅相差不到 3%，与 Cplex 求得的最优解相差不到 2%，并且当问题规模变大时，使用启发式方法往往比求解器所消耗的时间更少，所以足以证明此方法具有一定的可行性。

### 3.3 问题 3 的求解

问题 3 相较于问题 2 增加了关于生产任务的约束条件，要求使用至多 5 种切割方案使原材料利用率最大。

#### 3.3.1 方案选择模型

$$\min \sum_{i \in I} n_i$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^6 (m_{ij} v_j) \leq V \quad (25)$$

$$\sum_{i \in I} (n_i m_{ij}) \geq M_j, \forall j = 1 \dots 6 \quad (26)$$

$$m_{ij} \in N^+ \quad (27)$$

式 25 规定了同一块原材料上 6 种零件各自的体积与数量之积不能超出原料的总体积；式 26 规定了生产任务必须达标的约束限制；式 27 规定了零件数量的整数约束。

#### 3.3.2 问题 3 的模型构建

依据相关数据，品排排样模型的具体参数如表 10 所示：

表 10 品排排样模型的具体参数

自变量	切割方式
$x_{i,1}$	$i$ 方案 LJ1 横排排样的行数
$x_{i,2}$	$i$ 方案 LJ1 纵排排样的行数
$x_{i,3}$	$i$ 方案 LJ2 横排排样的行数
$x_{i,4}$	$i$ 方案 LJ2 纵排排样的行数
$x_{i,5}$	$i$ 方案 LJ3 排样的行数
$x_{i,6}$	$i$ 方案 LJ4 排样的行数
$x_{i,7}$	$i$ 方案 LJ5 排样的行数
$x_{i,8}$	$i$ 方案 LJ6 排样的行数
参数	含义

$d_1$	LJ1 横排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_2$	LJ1 纵排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_3$	LJ2 横排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_4$	LJ2 纵排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_5$	LJ3 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_6$	LJ4 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_7$	LJ5 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_8$	LJ6 排样在原材料宽度方向上的长度
$m_{i,j}$	在方案 <i>i</i> 中一块原材料上能够分配给零件型号为 <i>j</i> 的加工数量，整数
$M_j$	零件型号为 <i>j</i> 的生产目标总数
$n_i$	方案 <i>i</i> 至少所需要的原材料数量
$S_j$	零件型号为 <i>j</i> 的截面面积
$x_k$	第 <i>k</i> 种切割方式所切割的行数，整数变量
$b_k$	第 <i>k</i> 种切割方式所切割的列数，常数

本文针对此问题建立的具体品排排样模型如下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^I n_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^I m_{i,j} n_i \geq M_j, \forall j = 1, \dots, J \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^J S_j \frac{m_{i,j}}{\frac{H}{h_j}} \leq LW, \forall i = 1, \dots, I \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^8 [d_i + \frac{\sqrt{3}}{2} d_i (x_i - 1)] \leq W, \forall i = 1, \dots, I \quad (30)$$

$$\sum_{k=1}^2 x_{i,k} b_k \geq \frac{m_{i,1}}{\frac{H}{h_1}}, \forall i = 1, \dots, I \quad (31)$$

$$\sum_{k=3}^4 x_{i,k} b_k \geq \frac{m_{i,2}}{\frac{H}{h_2}}, \forall i = 1, \dots, I \quad (32)$$

$$x_{i,k} b_k \geq \frac{m_{i,k-2}}{\frac{H}{h_{k-2}}}, \forall i = 1, \dots, I, \forall k = 5, \dots, 8 \quad (33)$$

$$n_i \geq 0 \text{ 且为整数}, \forall i = 1, \dots, I \quad (34)$$

$$m_{i,j} \geq 0 \text{ 且为整数}, \forall i = 1, \dots, I, \forall j = 1, \dots, J \quad (35)$$



式 28 为各零件型号生产数量的限制；式 29 为在同一块原材料上加工的各型号零件面积限制；式 30 为原材料宽度方向上的长度限制；式 31 为同一块原材料切割零件 1 的数量不能小于其两种排样方式所排的最大数量；式 32 为同一块原材料切割零件 2 的数量不能小于其两种排列方式所排的最大数量；式 33 为同一块原材料切割零件*i*的数量不能超过其排列方式所排的最大数量；式 34、式 35 为变量约束。

### 3.3.3 问题 3 的算法设计

由于生产任务不同，需要先将生产量大的零件任务满足，再满足生产量小的零件任务，基于问题 2 的改进启发式算法流程如下：

步骤 1，将每个零件的总生产量非减排序，构成一个生产量列表；

步骤 2， $h=1$ ，对于第  $h$  个在生产量列表中的零件，找到其在利用率列表中的位置，使用问题 2 的启发式方法，得出该零件的最大利用率切割方案，满足其生产量；

步骤 3，每个零件的总生产量=每个零件的总生产量-切割方案中每个零件的生产量，记录此时每个零件的剩余总生产量；

步骤 4，将每个零件的总生产量非减排序， $h=h+1$ ，转到步骤 2。

### 3.3.3 问题 3 的实例分析

在暂不考虑零件厚度和原材料高度的情况下，切割方案如下：

(1) 不限制切割方案数量

表 11 不限制切割方案数量的生产方案

原材料（数量）	切割方式	利用率
800 张	13×LJ4 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+LJ4 并排排样+ LJ2 横排并排排样	85.157%。
518 张	14×LJ5 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+LJ5 并排排样	85.598%
476 张	22×LJ6 品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样	82.810%
203 张	16×LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	86.978%
217 张	13×LJ1 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	84.804%
521 张	14×LJ3 品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样+LJ3 并排排样	81.516%

通过计算得到，上述切割方案造成 LJ1 多切割 24 个，LJ2 多切割 6853 个，LJ3 多切割 160 个，LJ4 多切割 1031 个，LJ5 多切割 3672 个，LJ6 多切割 3400 个，等同于多用了原材料 3 张，因此总切割原材料数至少为 2732 张，利用率为其所有原材料的切割方式利用率加权平均值 84.245%。考虑到零件厚度和宽度的比例为 40：240=1：6，所以总切割原材料数至少为 $\lceil 2732 \div 6 \rceil$ ，即 456 张。

(2) 限制切割方案至多为 5 种

从上述切割方案可知，切割方式为 22×LJ6 品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样，和切割方式为 14×LJ3 品排（2 排）（奇数排-偶数排=0）排样+ LJ3 并排排样的利用率最低，所以针对此两种切割方案设计出一种切割方案切割 LJ6 和 LJ3。

已知 LJ3 和 LJ6 的生产量分别为 1161000 和 2421000，其比约为：1：13，等同于每生产一个 LJ3 要生产 13 个 LJ6，而对于 LJ3 在原材料上一排可以生产 77 个，对于 LJ6 在

原材料上一排可以生产 116 个， $77 \times 13 \div 116 \approx 9$ ，所以生产一排 LJ3 还要需要生产 9 排 LJ6。原材料的宽为 2160mm，LJ3 的直径为 78mm，LJ6 的直径为 52mm，所以在并排状态下  $2160 \div (78 + 52 \times 9) \approx 3.9$ ，对于一个原材料，需要生产 4 排品排状态的 LJ3 和 36 排品排状态的 LJ6，即可完成生产任务。通过计算可以得出，生产 4 排品排状态的 LJ3 和 36 排品排状态的 LJ6 剩下的宽度为 251mm 的原材料，为提高材料的利用率，使用问题 2 的启发式算法得到，可以使用 LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样+LJ1 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样，将其排满。方案变为使用 4 排品排状态的 LJ3+36 排品排状态的 LJ6+LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样+LJ1 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样的切割方案。

表 12 最多 5 种切割方案数量的生产方案

原材料（张数）	切割方式	利用率
580 张	4 排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ3 + 36 排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ6 + LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样 + LJ1 横排品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样	88.770%
800 张	13×LJ4 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+ LJ4 并排排样+ LJ2 横排并排排样	85.157%
518 张	14×LJ5 品排（3 排）（奇数排-偶数排=1）排样+ LJ5 并排排样	85.598%。
167 张(比原方案原材料少了 36 张)	16×LJ2 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	86.978%
188 张(比原方案原材料少了 29 张)	13×LJ1 纵排品排（3 排）（奇数排-偶数排=0）排样	84.804%

因此总切割原材料数至少为 2250 张，利用率为其所有原材料的切割方式利用率加权平均值 86.299%。考虑到零件厚度和宽度的比例为 40：240=1：6，所以总切割原材料数至少为 $\lceil 2250 \div 6 \rceil$ ，即 375 张。

### 3.4 问题 4 的求解

问题 4 仅在问题 3 的基础上拓展到了 9 个零件，包括正椭圆柱体，圆柱体及长方体。因此，我们的方案选择模型与问题 3 一致，唯一的区别是零件编号从 1~6 变为 1~9，所以我们在 3.4.1 节直接给出了方案选择模型。

#### 3.4.1 方案选择模型

$$\min \sum_{i \in I} n_i$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^9 (m_{ij}v_j) \leq V, \forall i \in \tilde{I} \quad (36)$$

$$\sum_{i \in \tilde{I}} (n_i m_{ij}) \geq M_j, \forall j = 1, 2, \dots, 9 \quad (37)$$

$$m_{ij} \in N^+ \quad (38)$$

式 36 规定了 9 种零件各自的体积与数量之积不能超出原料的总体积；式 37 规定了生产任务必须达标的约束限制；式 39 规定了零件数量的整数约束。

### 3.4.2 问题 4 的建模

依据相关数据，品排排样模型的具体参数如表 13 所示：

表 13 品排排样模型的具体参数

自变量	切割方式
$x_{i,1}$	$i$ 方案 LJ1 横排排样的行数
$x_{i,2}$	$i$ 方案 LJ1 纵排排样的行数
$x_{i,3}$	$i$ 方案 LJ2 横排排样的行数
$x_{i,4}$	$i$ 方案 LJ2 纵排排样的行数
$x_{i,5}$	$i$ 方案 LJ3 排样的行数
$x_{i,6}$	$i$ 方案 LJ4 排样的行数
$x_{i,7}$	$i$ 方案 LJ5 排样的行数
$x_{i,8}$	$i$ 方案 LJ6 排样的行数
$x_{i,9}$	$i$ 方案 LJ7 排样的行数
$x_{i,10}$	$i$ 方案 LJ8 排样的行数
$x_{i,11}$	$i$ 方案 LJ9 排样的行数
$x_k$	第 $k$ 种切割方式所切割的行数，整数变量
参数	含义
$d_1$	LJ1 横排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_2$	LJ1 纵排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_3$	LJ2 横排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_4$	LJ2 纵排排样在原材料宽度方向上的长度
$d_5$	LJ3 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_6$	LJ4 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_7$	LJ5 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_8$	LJ6 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_9$	LJ7 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_{10}$	LJ8 排样在原材料宽度方向上的长度
$d_{11}$	LJ9 排样在原材料宽度方向上的长度
$m_{i,j}$	在方案 $i$ 中一块原材料上能够分配给零件型号为 $j$ 的加工数量，整数
$M_j$	零件型号为 $j$ 的生产目标总数
$n_i$	方案 $i$ 至少所需要的原材料数量

---

 $S_j$ 零件型号为 $j$ 的截面面积 $b_k$ 第 $k$ 种切割方式所切割的列数，常数

本文针对此问题建立的具体品排排样模型如下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^I n_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^I m_{i,j} n_i \geq M_j, \forall j = 1, \dots, J \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^J S_j \frac{m_{i,j}}{\frac{H}{h_j}} \leq LW, \forall i = 1, \dots, I \quad (40)$$

$$\sum_{k=1}^8 [d_k + \frac{\sqrt{3}}{2} d_k (x_{i,k} - 1)] + \sum_{k=9}^{11} d_k x_{i,k} \leq W, \forall i = 1, \dots, I \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^2 x_{i,k} b_k \geq \frac{m_{i,1}}{\frac{H}{h_1}}, \forall i = 1, \dots, I \quad (42)$$

$$\sum_{k=3}^4 x_{i,k} b_k \geq \frac{m_{i,2}}{\frac{H}{h_2}}, \forall i = 1, \dots, I \quad (43)$$

$$x_{i,k} b_k \geq \frac{m_{i,k-2}}{\frac{H}{h_{k-2}}}, \forall i = 1, \dots, I, \forall k = 5, \dots, 11 \quad (44)$$

$$n_i \geq 0 \text{ 且为整数}, \forall i = 1, \dots, I \quad (45)$$

$$m_{i,j} \geq 0 \text{ 且为整数}, \forall i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \quad (46)$$

式 39 为各零件型号的生产数量限制；式 40 为同一块原材料上加工的各型号零件面积限制；式 41 为原材料宽度方向上的长度限制；式 42 为同一块原材料切割零件 1 的数量不能超过其两种排列方式所排的最大数量；式 43 为同一块原材料切割零件 2 的数量不能超过其两种排列方式所排的最大数量；式 44 为同一块原材料切割零件 $i$ 的数量不能超过其排列方式所排的最大数量；式 45、式 46 为整数变量约束。

### 3.4.3 问题 4 的算法设计

长方体零件的利用率要远远高于正圆柱体零件的利用率，同时由于其特殊性，剩下的材料可以再次利用，所以应优先满足长方体零件的生产任务。剩下的生产任务，需要优先将任务量大的零件满足，再满足任务量小的任务，基于问题 3 的改进启发式算法流程如下：

步骤 1, 按长方体的边长非增排序, 构成一个列表, 使用问题 3 的改进启发式算法将长方体零件的生产任务依次满足;

步骤 2, 将剩余每个零件的总生产量非减排序, 构成一个生产量列表;

步骤 3,  $h=1$ , 对于第  $h$  个在生产量列表中的零件, 找到其在利用率列表中的位置, 使用问题 3 的改进启发式方法, 得出该零件的最大利用率切割方案, 满足其生产量;

步骤 4, 剩余每个零件的总生产量=剩余每个零件的总生产量-切割方案中剩余每个零件的生产量, 记录此时每个零件的总生产量;

步骤 5,  $h=h+1$ , 转到步骤 2。

#### 3.4.4 问题 4 的实例分析

通过观察附件 1 的数据, 不难发现, 每种零件的厚度与原材料的高度均成比例, 对于单一零件而言, 只需研究其截面的切割方案即可。通过计算可以得到 LJ7、LJ8、LJ9 并排排样的利用率:

表 14 长方体零件的利用率

方案	利用率	零件数
LJ7 并排排样	99.80198%	224 (一排个数) $\times$ (240 $\div$ 120)
LJ8 并排排样	99.80198%	252 (一排个数) $\times$ (240 $\div$ 80)
LJ9 并排排样	99.80198%	288 (一排个数) $\times$ (240 $\div$ 60)

##### (1) 不限制切割方案数量

表 15 不限制切割方案数量的生产方案

原材料 (张数)	切割方式	利用率
109 张	79 $\times$ LJ7 并排排样+ LJ8 并排排样	99.663%
77 张	89 $\times$ LJ8 并排排样+ LJ9 并排排样	99.663%
35 张	102 $\times$ LJ9 并排排样	98.970%

通过计算可以获得, LJ7 多切割 3336 个, LJ8 多切割 63732 个, LJ9 多切割 52188 个, 等同于多用了原材料 2 张。因此, 总切割原材料数至少为 216 张, 才能满足 LJ7、LJ8、LJ9 的生产任务, 总利用率为 99.432%。

基于问题 3 结果, 于是可以得到, 切割原材料数至少为 219+455=674 张, 利用率为 91.839%,

##### (2) 限制切割方案至多为 5 种

由于 LJ1、LJ2 为正椭圆体零件, LJ4、LJ5、LJ3、LJ6 为正圆柱体零件, 所以将其分类设计切割方案。

LJ1、LJ2 的生产量分别为 1272000、1521000, 其比约为 11: 13, 等同于每生产 11 个 LJ1 要生产 13 个 LJ2, 而对于 LJ1 在原材料上纵排一排可以生产 151 个, 对于 LJ2 在原材料上纵排一排可以生产 151 个。因为生产个数相同, 所以生产 11 排 LJ1 还要需要生产 13 排 LJ2。原材料的宽为 2160mm, LJ1 的竖径为 60mm, LJ2 的竖径为 50mm, 所以在并排状态下  $2160 \div (11 \times 60 + 13 \times 50) \approx 1.65$ 。对于每一个原材料, 需要生产 11 排纵排品排状态的 LJ1 和 13 排纵排品排状态的 LJ2, 即可完成任务。通过计算可以得出, 生产 11 排纵排品排状态的 LJ3 和 13 排纵排品排状态的 LJ6 后剩下的宽度为 1010.77mm 的原材料。为提高材料的利用率, 使用问题 3 的改进启发式算法得到, 可以使用 42 $\times$ LJ8 并排排样将其排满。方案变为使用 11 排纵排品排 (奇数排-偶数排=0) 状态的 LJ1 + 13 排

纵排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ2 + 42×LJ8 并排排样的切割方案。

LJ4、LJ5 的生产量分别为 3229500、2434500，其比约为 13: 10，等同于每生产 13 个 LJ4 要生产 10 个 LJ5，而对于 LJ4 在原材料上纵排一排可以生产 104 个，对于 LJ5 在原材料上纵排一排可以生产 110 个， $13 \times 104 \div 110 \approx 12$ ，所以生产 13 排 LJ4 还要需要生产 12 排 LJ5。原材料的宽为 2160mm，LJ4 的直径为 58mm，LJ5 的直径为 55mm，所以在并排状态下  $2160 \div (13 \times 58 + 12 \times 55) \approx 1.53$ 。对于每一个原材料，需要生产 13 排品排状态的 LJ4 和 12 排品排状态的 LJ5，即可完成任务。通过计算可以得出，生产 13 排品排状态的 LJ4 和 12 排品排状态的 LJ5 后剩下的宽度为 920.3mm 的原材料，为提高材料的利用率，使用问题 3 的改进启发式算法得到，可以使用 34×LJ7 并排排样，将其排满。方案变为使用 13 排品排（奇数排-偶数排=1）状态的 LJ4 + 12 排品排（奇数排-偶数排=1）状态的 LJ5 + 20×LJ7 并排 + 4×LJ8 并排 + 13×LJ9 并排排样的切割方案。

LJ3 和 LJ6 的生产量分别为 1161000 和 2421000，其比约为 1: 13，等同于每生产一个 LJ3 要生产 13 个 LJ6，而对于 LJ3 在原材料上一排可以生产 77 个。对于 LJ6 在原材料上一排可以生产 116 个， $77 \times 13 \div 116 \approx 9$ ，所以生产一排 LJ3 还要需要生产 9 排 LJ6。原材料的宽为 2160mm，LJ3 的直径为 78mm，LJ6 的直径为 52mm，所以在并排状态下  $2160 \div (78 + 52 \times 9) \approx 3.9$ 。对于每一个原材料，需要生产 4 排品排状态的 LJ3 和 36 排品排状态的 LJ6，即可完成任务。通过计算可以得出，生产 4 排品排状态的 LJ3 和 36 排品排状态的 LJ6 后剩下的宽度为 251mm 的原材料，为提高材料的利用率，使用问题 3 的改进启发式算法得到，可以使用 9×LJ7 并排排样，将其排满。方案变为使用 4 排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ3+36 排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ6+9×LJ7 并排排样切割方案。

通过计算可以得出三种切割方案，切满足生产任务：

原材料（张数）	切割方式	利用率
130 张	11 排纵排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ1 + 13 排纵排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ2 + 42×LJ8 并排	94.051%
400 张	13 排品排（奇数排-偶数排=1）状态的 LJ4 + 12 排 品排（奇数排-偶数排=1）状态的 LJ5 + 20×LJ7 并 排， + 4×LJ8 并排 + 13×LJ9 并排排样	94.286%
97 张	4 排品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ3 + 36 排 品排（奇数排-偶数排=0）状态的 LJ6 +9×LJ7 并排 排样	90.225%

因此，在满足所有零件生产任务时，总切割原材料数为 627 张，利用率为其所有原材料的切割方式利用率加权平均值，为 93.609%。

### 3.5 问题 5 的求解

不同于上述问题的是，问题 5 对原材料数量进行了限制，增加了利润最大化目标，即在有限的原材料数量下，求出使得利润最大的切割排样方案。

#### 3.5.1 方案选择模型

$$\max \sum_{i \in \tilde{I}} \sum_{j=1}^9 m_{ij} P_j n_i$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^9 (m_{ij} v_j) \leq V, \forall i \in \tilde{I} \quad (47)$$

$$\sum_{i \in \tilde{I}} n_i \leq \tilde{N} \quad (48)$$

式 47 为规定了 9 种零件各自的体积与数量之积不能超出原料的总体积；式 48 为原材料数量的使用限制。

### 3.5.2 问题 5 的算法的设计

针对问题 5 的模型，我们采用了以利润最大为目标的贪婪选择算法来枚举所有单一零件的排样方案，算法步骤如下，

步骤 1，选取各个零件单一排样，使得原材料利用率最高的方案，分别计算其在一张原材料排样可产生的总利润，记为  $\tilde{P}_k, k = 1 \dots 9$ ，并依据总利润对零件编号进行非降序排序，得零件优先级向量  $L = (L_1, L_2, L_3, \dots, L_9)$

步骤 2，记  $k=1$ ，在单一原材料上全部采用编号为  $L_k$  的零件进行排样，直到无法再排编号为  $L_k$  的零件，记  $k=2$

步骤 2，针对排样方式、零件及原材料尺寸所产生的的每一个空隙，判断编号为  $L_k$  的零件是否可以“穿插”进去，如果可以则进行穿插，否则记  $k=k+1$ ，继续进行判断，当该空隙已被占用或没有零件可以穿插，检查下一个空隙。

步骤 4，重复步骤 3，直至对所有空隙都完成检查

### 3.5.3 问题 5 的实例分析

通过计算，我们得出了 9 种零件在其最大原料利用率下的排样方案下的利润如下表

零件编号	利润（单位：元）	排样方式
LJ1	1495440	品排（横排）
LJ2	1613736	品排（横排）
LJ3	464256	品排
LJ4	417312	品排
LJ5	413952	品排
LJ6	392544	品排
LJ7	286720	品排
LJ8	272160	品排
LJ9	235008	品排

由表中数据可知，编号为 LJ2 零件的利润最大，通过计算，我们求得编号为 LJ2 零件在原材料排样的部分空隙处，可对编号为 LJ8，LJ9 零件进行排样，由于  $\tilde{P}_8 > \tilde{P}_9$ ，因此，我们选择了 LJ8 零件，最终计算出单张原材料总利润应为 1614096 元，进而，100 张原材料所产生的总利润应为 161409600 元

## 4. 结语

### 4.1 本文的优点

本文根据排样问题的性质，建立了不同的模型，提出了不同的启发式算法，同时对于较为简单的问题，还使用 Cplex 进行求解，并比较了二者求得的解决方案，说明了算法和结果的可靠性。本文的工作量很大，对于同一个问题，既使用了 Cplex 编程对其求解，也使用了 Python 编程的启发式算法对其求解，相关结果小数点均保留了 2 位以上。

### 4.2 本文的缺点

本文使用的算法为启发式算法，得到的解不是最优解，为次优解，可以使用更为精确的算法求解排样问题，同时本文仅使用品排排样和并排排样两种排样方式，缺少其他排样方式。

## 参考文献

- [1] 洪灵, 徐云杰. 计算机辅助排样算法综述[J]. 锻压装备与制造技术, 2007, 4: 16-19.
- [2] 贾志欣. 排样问题的研究现状与趋势[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(7): 890-897.
- [3] 张春玲, 崔耀东. 一维优化下料问题[J]. 桂林工学院学报, 2004(1).
- [4] 宋佩华, 蒋联源, 欧启忠. 基于离散粒子群优化算法求解矩形件排样问题[D]. 2007.
- [5] 张克. 二维矩形件优化排样问题研究[D]. 山东大学, 2006.
- [6] 沈显君, 杨进才, 应伟勤, et al. 一维下料问题的自适应广义粒子群优化求解[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2007(09): 113-117.
- [7] 郑晓军, 杨光辉, 滕弘飞. 多规格一维下料问题基于满意度模拟退火算法[J]. 大连理工大学学报, 2009, 49(6).
- [8] 赵文余. 钢材下料问题的多目标智能优化算法研究[D]. 河北农业大学, 2011.
- [9] Leung Y T, Tam T W, Wong C S, et al. Packing squares into a square[J]. Journal of Parallel & Distributed Computing, 1990, 10(3): 271-275.
- [10] 张立. 考虑规范余料的圆形件下料优化算法[D]. 2019.