

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学 校	东南大学
参赛队号	10286004
队员姓名	1. 薛敏迪
	2. 王 伟
	3. 朱秉诚

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 基于光的波粒二象性一种猜想的数学仿真

摘 要：

本文首先介绍了光子建模的一些经典假设。包括龚祖同院士提出的类氢原子假设以及北京大学提出的光子是一个按光速直线前进的电磁场的猜想。之后又简要介绍了国内外一些其他的模型。针对以上各种假设，我们认真借鉴了其中的合理部分，同时也仔细分析了各个模型中不符合客观事实的一些内容，为提出自己的模型作出铺垫。

我们认为经典的碰撞模型不符合光子和原子核体积极小的事实，而且不能够很好的解释单缝衍射中“缝变窄，则偏离中心较远处光强变强”的现象。更重要的是，如果光子真的在单一狭缝处产生碰撞作用，那么到达光屏聚焦点的相位将会千差万别，根本无法形成实验现象中呈现 sinc 平方形式的亮度条纹。在文中我们也对于这种碰撞进行了建模，尝试着说明碰撞模型的缺陷。而对于波动论中将光子完全建模成电磁场的设想，虽然能够较好的解释干涉、衍射等现象，但是对于赫兹于 1887 年提出的光电效应以及 1923 年美国物理学家康普顿发现的康普顿散射都无法给出合理的说明。而且对于光波在细缝处不沿直线传播这一现象，波动论也没有办法给出直观的解释。

针对这一系列现象，我们从微观角度提出，任何缝壁都是原子的集合，光子由于体积微小，速度极快，直接和原子核撞击的概率几乎为 0，更多时候是受到大量原子核的牵引产生多次微弱的角度变化。我们借鉴了天体物理中关于二体运动的三种轨迹，利用其中得到的结论对大量原子核的牵引作用进行概率建模，使用中心极限定理提出出射角度基本符合高斯分布的假设，和实验现象进行了对比，得出了接近各个实验现象的结果。构造出一个在误差范围内能够符合波粒二象性的模型。

之后，我们使用这一统计模型，仿真了单缝衍射、双缝干涉、多缝干涉现象，和实验得到的图样进行了对比。

关键词：波粒二象性、光子、中心极限定理、二体运动、光衍射、光干涉

1 问题背景

人类对光的研究起源很早，但对光本质的认识经历了一个较漫长的过程。光究竟是波还是粒子？光的波动说与微粒说之争从十七世纪初开始，至二十世纪初以光的波粒二象性告终。但是至今，人类都未能对光子的结构有一个准确的认识，关于光子结构的猜想与相关实验仍旧是物理学中的一大热门课题。

1.1 相关假设

爱因斯坦提出光子概念之后，有许多物理学家致力于探索光子波粒二象性的奥秘，对光子结构提出许多假设，其中很多模型有一定价值。

1.1.1 龚祖同院士假设

爱因斯坦之后继续有许多物理学家致力于探索光子波粒二象性的奥秘，并且也取得一定的进展。我国已故的龚祖同院士猜想，光子并非仅是一个质点，其构造可能与氢原子类似，最简单的形式是由一个负电荷和一个与其等量的正电荷组成，负电荷在一个球形的轨道上围绕正电荷旋转。因此光线通过一个小孔或一条细缝时，如果其中一个电荷与小孔或狭缝边沿发生弹性碰撞或非弹性碰撞或被边缘吸引，光子的运动方向就会改变（在微观情况下遮挡物也不再可以视为平面），由此产生衍射。如果缝比较宽，则与小孔或细缝边缘发生碰撞的光子比例就会大大减少，直至几乎看不出来衍射。

1.1.2 北京大学假设

北京大学又有学者提出光子是一个按光速直线前进的电磁场的猜想。光子的速度都相等。这个电磁场按照由光的波长所决定的角速度围绕上述前进直线旋转，相位由电场在 x 方向的投影或磁场在 y 方向的投影所决定，其旋转方向也只有左旋、右旋两种，因此事实上单个光子只有左旋光子、右旋光子两种。但一个左旋光子与一个右旋光子可以组成一个线性偏振光子对。当一个左旋光子与一个运动方向完全相同的右旋光子相遇时，如果相位完全相反，则发生光子湮灭现象。如果相位完全相同，则增强，由于能量与电磁场的强度是平方关系，相当于有 4 个光子存在。由于从两条细缝到达屏幕上同一点的距离不同，分别通过两条缝来的光子就会有相位差，由此产生双缝干涉现象。猜想偏振镜片仅让相位均值方向与偏振镜片光轴平行的线性偏振光子对通过。由于正常光线中包含处于各种相位的光子对，在同时与偏振镜片碰撞时，这时各种相位的光子对会重新组合，产生平行于、垂直于偏振镜光轴的光子对，平行于偏振镜光轴的光子对能够通过偏振镜，而垂直于偏振镜光轴的光子对则被偏振镜阻挡，由此大约 50% 的光线可以通过偏振镜片。这种情况仍然符合能量、动量、角动量守恒定律。

既然原子是经典电磁场中的最小单位，我们完全有理由将光子假设为电场矢量 E_p 和磁场矢量 H_p 的叠加，当然这两个分量是相互垂直且共存于一球体空间中

($H_p E_p$)，在这里分别用红色和绿色的箭头表征电场和磁场矢量的方向。如图：

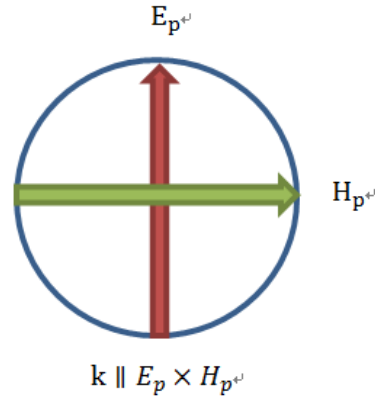


图 1-1 北大猜测光子模型

对大量光子而言，也可通过波矢量来表征，因而光子的能量就沿着方向 \mathbf{k} 流动，这也就意味着它与经典的 $\mathbf{E\&M}$ 平面波类似。光子成为平面波中一微小的单元。换言之，经典的平面 $\mathbf{E\&M}$ 波就是大量上述光子的重叠。根据爱因斯坦质能方程：

$$E = mc^2 = pc = h\omega \quad (1-1)$$

$$m = h\omega/c^2 \quad (1-2)$$

光子的动量表示为 $\vec{p} = h\vec{k}$ ，这里 h 为普朗克常量。根据麦克斯韦电磁场方程，

光子的质量来源于电场和磁场分量 E_p 和 H_p 。大量运动的光子组成了这样的物质场。

既然光子的角动量为 $J = \pm h$ ，这说明在现实中的光子要么是非极化的要么是线性极化的，根据螺旋型参量的不同存在着右手循环极化光子和左手循环极化光子，其中左右手的循环极化光组成了左旋或右旋的光子，而相干的左右旋光子对中同步的合成出线性极化光。

在量子电动力学中， ω 作为光子的振荡频率，而 $\pm h$ 表示光子的自旋角动量。

这里我们假设光子并不像电磁场那样进行振荡，而 ω 代表光子的极化旋转角频率，即旋转频率。波数量 k 为其单位长度沿运动方向的旋转周期。对于在真空中的平面波光子而言，满足以下分散关系： $\frac{\omega}{k} = c$ （左旋）； $\frac{\omega}{k} = -c$ （右旋）。光子运动一个波长所花的时间刚好等于其在自由空间旋转一个周期的时间（弧度数为 2π ），如图所示。电场和磁场分量 (E_p, H_p) 的方向决定了光子的旋转相角。这

里我们定义光子运动的群速率为 v_g ，

$$v_g = \frac{p}{m} = \frac{hk}{m} \quad (1-3)$$

光子的相速度则由其旋转相位的移动速率决定，

$$v_p = \frac{\omega}{k} = f\lambda \quad (1-4)$$

在自由空间中， $v_g = v_p = c$ 的事实意味着光子的径向运动和旋转是完全同步的。
明显的，光子的能量表达式可被重写为：

$$E = mc^2 = mv_g v_p = p v_p \quad (1-5)$$

在无限大的真空空间中，光子呈螺旋状存在，以光速 c 和旋转速度 ω 传播。
在任何瞬态，光子的能量，动量以及角动量都是存在的。其波状特性来源于螺旋形旋转运动的周期性，而不是传播的到处都是。事实上，根据我们的模型，光子的重心保持着直线运动，而电场和磁场分量 (E_p, H_p) 呈螺旋形的运动。这是光子能量守恒、动量守恒、角动量守恒定律的重要推论。

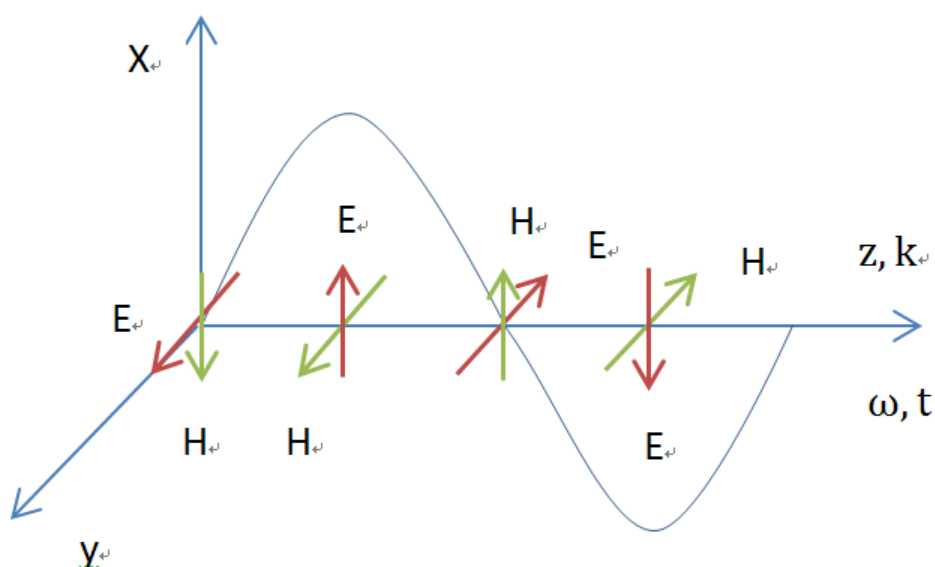


图 1-2 左旋光子模型

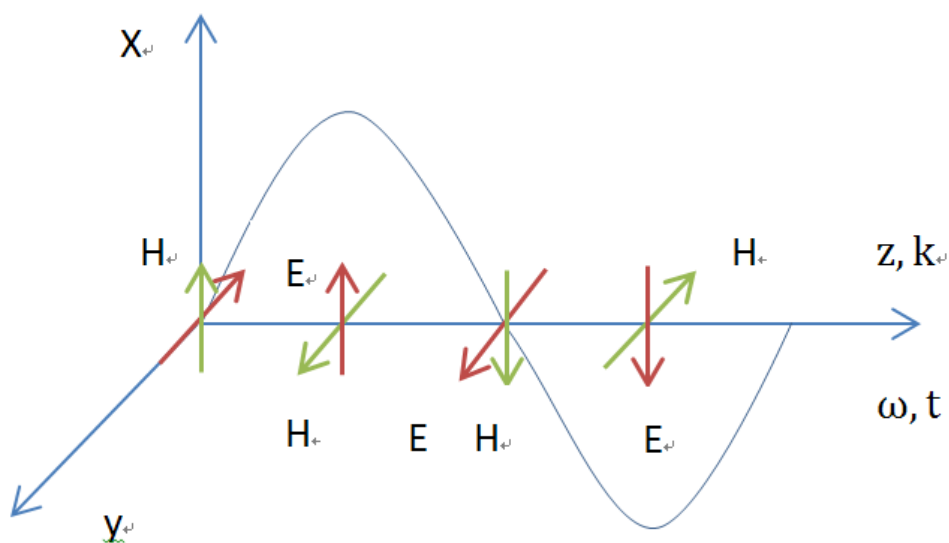


图 1-3 右旋光子模型

当相同频率的光子相互干涉时，会发生两种情况。当两相干光子的电磁场分量 (E_p, H_p) 同向时，合成的电磁场分量等于 $2E_p(2H_p)$ ，该表观能量为单个光子的 4 倍，称为光子的表观状态，它等同于呈现 4 个光子。同样的，两相干光子的电磁场分量 (E_p, H_p) 反向时，合成的电磁场分量为 0，这等同于没有光子呈现。

这叫做光子的隐匿域。事实上，两相干光子可在 ($0^\circ \sim 360^\circ$) 任意叠加。

线性极化光是由右手循环极化光和左手循环极化光之间进行同步干涉形成的，如图 1-4 所示：

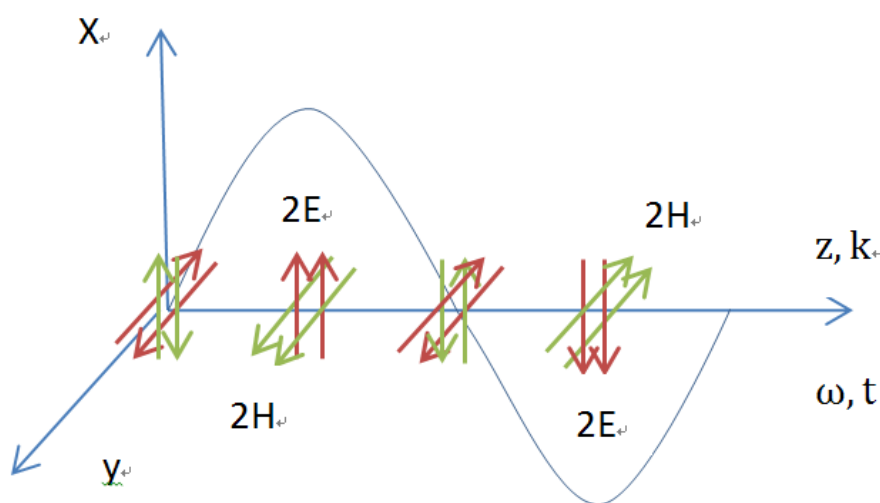


图 1-4 左旋右旋光子叠加

上述两种极化光经叠加后，其电磁场分量在波长周期内，有些点增强，有些点减弱，产生不同的相位，在双缝干涉、单缝衍射及光栅衍射中产生明暗条纹。

1.2 自建模型——电磁场能量互换

龚祖同院士的类氢原子模型直观易懂，将相位特征归结于“双星结构”，构造出了一个同时具有质量和相位的微粒结构。但是在利用基于氢原子结构的碰撞模型进行建模时，出现了一些意想不到的矛盾，具体内容将在碰撞模型中详述。

电磁场旋转模型赋予了光子相位特征，然而对于电磁波中矢量方向圆周旋转的原因并未给出更具体的解释。

正如北京大学提出的假设，经典波动论直接将光看做一种电磁波，因而从根本上禁止了光子具有质量。1899 年，俄国物理学家列别捷夫用实验测得了光压，证实了麦克斯韦的预言。光压的存在说明了电磁波具有动量，因而是光子具有质量的有力证明。华中科技大学教授罗俊在日前出版的权威的《物理学评论快报》(Physicak Review Letters)上指出，在任何情况下，光子的质量都不会超过 10 的负 54 次方千克，这实际上也默许了光子质量的存在。

我们认为电磁波受到麦克斯韦方程组的支配，呈现出电磁场能量交换的过程

是肯定的。同时，这种电磁波本身应该再被赋予质量，就形成了我们假设的光子结构模型。光子的结构图如图 1-5 所示：

这种光子模型由于具有质量，因此有可能受到其他微粒的影响，后文仿真中将会详述。同时由于电磁波本身的电磁能量互换，也会有相位特征，能够产生波动性实验中的一系列现象。

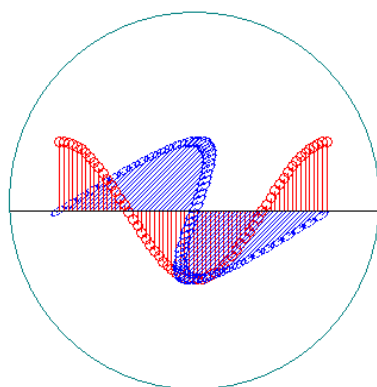


图 1-5 自建光子模型

在我们的猜想中，光子的粒子性结构于北京大学关于电磁场旋转的猜想略有不同，既然光子同时包含了电场分量和磁场分量 (E_p, H_p)，根据能量守恒定律，在光子的运动过程中，电场和磁场是互相转化的，在一个波长周期内电场和磁场的大小变化情况如下：

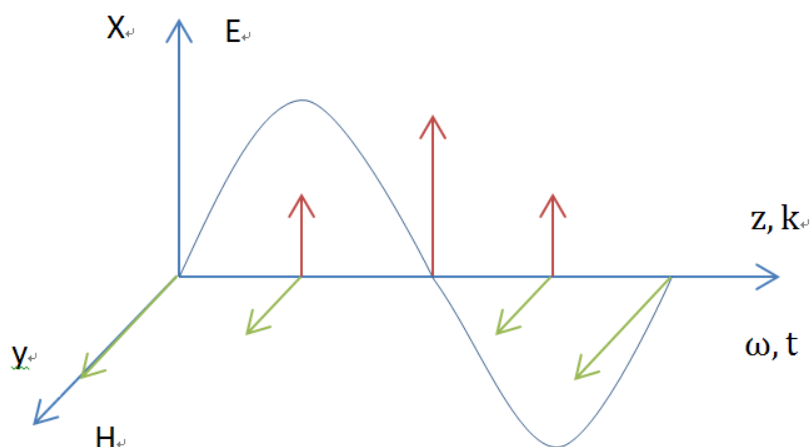


图 1-6 自建光子模型电磁场示意

如上图所示，沿光子的运动方向，在波长的整数倍位置，光子仅有磁场分量 H_p ，即能量全部由磁场的能量体现；在四分之一波长处，光子既包含了电场分量 E_p ，也包含了磁场分量 H_p ；依此类推，在光子的运动方向上，电场和磁场的能量相互转化，与一个波长周期中的运动位置同步变化。

对大量光子而言，也可通过波矢量来表征，因而光子的能量就沿着方向 \mathbf{k} 流

动,这也就意味着它与经典的 **E&M** 平面波类似。光子成为平面波中一微小单元。换言之,经典的平面 **E&M** 波就是大量上述光子的重叠,而在我们的假设模型中,同一运动方向上仅有电场和磁场方向固定的光子。

由于打在光屏上的光程差的不同,光子的电场与磁场分量叠加后,产生了相位的改变
如图所示。

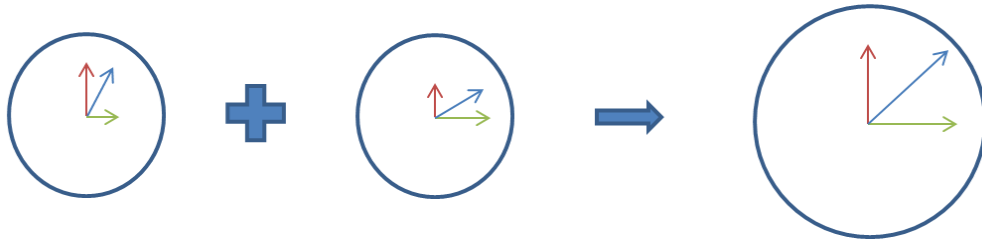


图 1-7 光子相位变化示意

上述光子模型的相位由电场分量于磁场分量的合成方向来表征,从宏观角度出发,打到光屏上的光子,将进行电场分量和磁场分量的叠加,而叠加后电磁场分量的合成方向也就决定了该处的光子相位。

2 单缝衍射

单缝衍射是光在传播过程中遇到障碍物，光波会绕过障碍物继续传播的一种现象。如果波长与障碍物相当，衍射现象最明显。衍射现象是具有波动性的物质的共性。因此，单缝衍射是光具有波动性的一个佐证。

2.1 实验现象

当一束单色光垂直射向狭缝，部分光线改变方向继续传播，在光屏上形成明暗交错的条纹。若是白光，则会出现明暗交错的彩色条纹，如图 所示。单色情况下，实验测量光强分布大约服从 sinc 函数的平方。

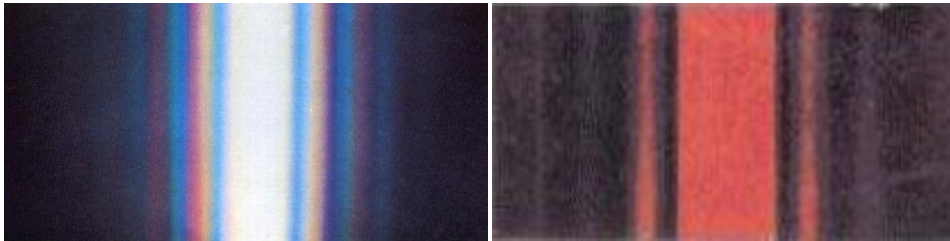


图 2-1 单缝衍射现象

2.2 经典理论

惠更斯—菲涅耳波带法：

经典单缝衍射的观察装置如图 2-2 所示。一束可无限细分的同相同频光从 AB 入射，由于单缝作用产生各个方向的绕射。中端的凸透镜作用在于让平行光束汇聚在一点，形成类似光屏无限远的效果。从 AB 单缝出射后，方向角不同的光束汇聚在光屏的不同点（例如，图中所有方向角为 θ 的光线汇聚在 P 点），相当于对单缝射出的所有该角度光线的积分，积分结果就是这一点的光强度。

由于根据凸透镜光学性质，光线簇自 AC 平面出射以后，到达 P 的各个光路基本不再产生光程差。因此，每条光线的总光程差基本取决于图中直角 $\triangle ABC$ 的形状，这也是决定 P 点是增强区还是减弱区的关键区域。 BC 边的长度能够容纳多少个半波长决定了 P 点究竟是加强还是减弱。当 BC 容纳偶数个半波长，意味着积分后所有光线都能够找到与其相位相差 180° 的光线，因此 P 点光线积分为 0；当 BC 能够容纳整奇数个半波长，说明 AB 出射光线簇积分后某些半波无法被抵消，因此在 P 处将产生亮纹。

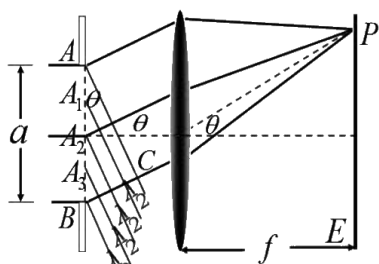


图 2-2 单缝衍射分析示意

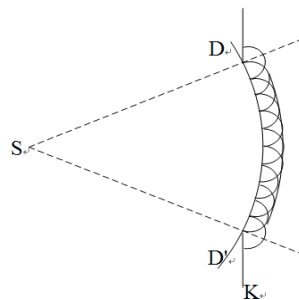


图 2-3 衍射孔波面相干次波源

下面导出惠更斯—菲涅耳原理的数学表达式，考察单色光源 S 对空间任意 P 点的作用。

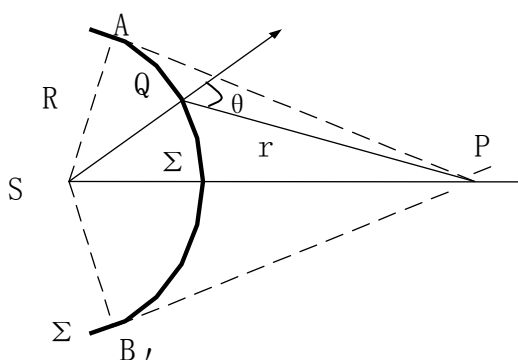


图 2-4 衍射示意图

在 Q 点处取面元 $d\sigma$ ，面元发出的子波在 P 点产生的复振幅与在面元上的复振幅、面元大小和倾斜因子 $K(\theta)$ 成正比。面元 $d\sigma$ 在 P 点产生的复振幅可以表示为： $K(\theta)$ 表示子波的振幅随面元法线与 QP 的夹角 θ 的变化。（ θ 称为衍射角） c 为一常数， $r = QP$ 。菲涅耳假设：当时 $\theta = 0$ ，倾斜因子 K 有最大值，随着 θ 增加， K 减小，当 $\theta \geq \pi/2$ 时， $K=0$ 。对 P 点产生作用是波面 Σ 中界于 $z z'$ 范围内的波面 Σ 上的面元发出的子波。则

$$U(P) = \frac{Ce^{ikR}}{R} \iint_{\Sigma} K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \quad (2-1)$$

上式为惠更斯—菲涅耳数学表达式，原则上可任意的孔径或屏障的衍射问题，但实际计算积分是很复杂。

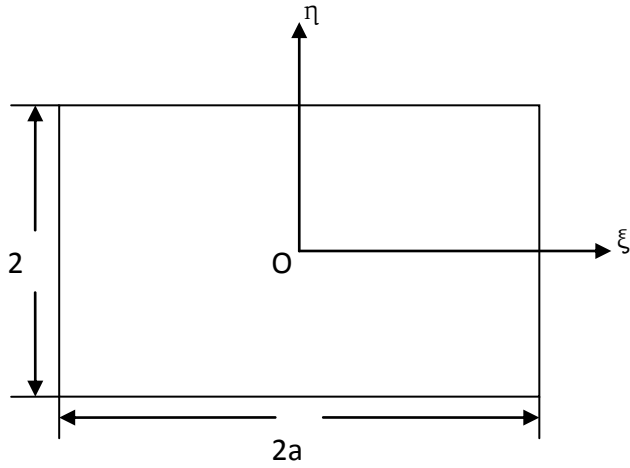


图 2-5 矩孔

当光孔为矩孔时，令原点 O 在矩孔中心， ξ 轴和 η 轴平行于孔边，则此类情况下的强度为：

$$\begin{aligned}
 U(P) &= C \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta = C \int_{-a}^a e^{-ikp\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ikq\eta} d\eta \\
 &= 4C \frac{\sin kpa}{kp} \cdot \frac{\sin kqb}{kq}
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

因此强度

$$I(p) = |U(p)|^2 = \left(\frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \left(\frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2 I_0 \tag{2-3}$$

其中 I_0 是图样中心处的强度， p 为入射角与衍射角的正弦差值 $p = \sin \theta - \sin \theta_0$ 。

2.3 衍射建模

2.3.1 碰撞模型

碰撞模型示意图如下。

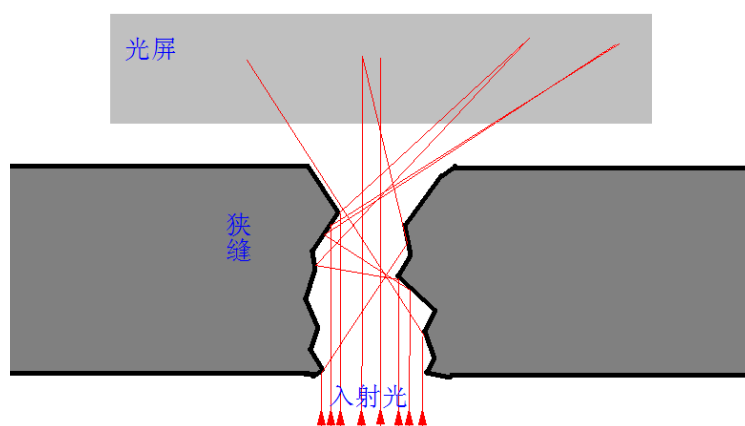


图 2-6 自建碰撞模型示意

假设光子数量和光强正比例关系。入射光看作同方向光子的集合。光子与狭缝壁发生弹性碰撞、非弹性碰撞或吸引效应。则可以断定，越接近狭缝壁的光子，其最终位置受到狭缝壁碰撞、吸引的概率就越大。若将光屏与光子碰撞的位置建模为一个随机变量，则该随机变量将具有与光子入射直线和狭缝壁距离相关的方差。也就是说，越接近狭缝壁的光子，其最终位置的方差越大；那些从接近狭缝中间穿过的，几乎不受阻碍的光子，其最终在光屏上的位置的方差就小得多了。如示意图 所示。

假设光屏上光子最终位置呈现高斯分布。将方差 σ 建模为光子与狭缝壁距离的倒数，均值 u 为出射位置的横坐标。经过 matlab 仿真产生大量具有该性质的光子，最后统计其在光屏上的位置得到如下统计图，图中横坐标为光屏的水平方向，0 位置为狭缝中心所对应的位置。纵坐标为光强。

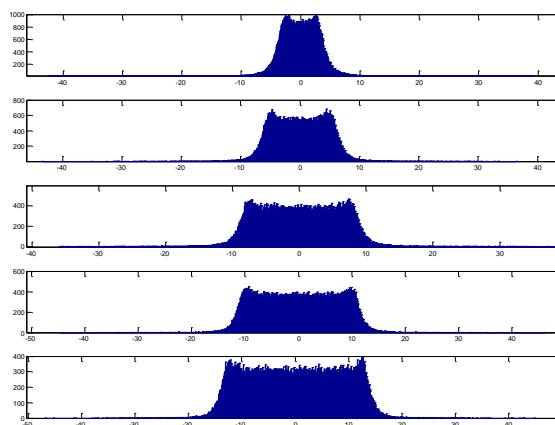


图 2-7 碰撞模型光强分布

碰撞模型下，光屏上的仿真图如下：



图 2-8 碰撞模型光屏仿真图

可见，依照碰撞模型仿真得出的单缝图和实际情况还是有较大差异的。主要表现在：1、没有衍射现象。而且即使赋予了光子相位属性，在碰撞模型中不可捉摸的光程差也会让干涉现象荡然无存。2、当狭缝收窄，实验中会出现很明显的“扩散”现象，即光屏远离中心位置的区域会很明显的因为狭缝收窄而变亮。可是碰撞模型仿真结果显示，即使狭缝收窄，远离中心位置的地方也是不会被变亮的。

更为具体的说明将在绕射模型中指出。

2.3.2 绕射模型

1) 二体运动模型：

碰撞模型对于衍射现象的解释存在不完美。

首先，光子的大小是可以和原子核相比的，简单将光子和缝壁之间的作用看做弹性碰撞是不合理的。著名的卢瑟福 α 粒子撞击金箔实验指出：撞击的粒子大部分穿过、小部分折射、极少数反射。体积相对庞大的 α 粒子尚且能大量避开与原子核的撞击，体积几乎可以忽略不计的光子更不可能和缝壁的原子产生类似弹性碰撞的效果。

其次，单缝衍射范围存在问题。实验现象表明，随着缝宽变窄，光屏上距离缝隙中心较远的地方光强是会出现由弱变强趋势的。可是，若是仅仅将缝隙和光子的作用看做弹性碰撞，那么这种对光线“出射角分散”的作用，不会随着缝宽变窄而越来越明显。题目中的说法“小孔或细缝边缘发生碰撞的光子比例就会大大减少，直至几乎看不出来衍射”是无法解释缝宽变窄时出射角度变大以及远离中线处光强变强的现象的。

再者，根据诺贝尔奖获得者玻恩所著的经典光学教程《光学原理 第七版》第 42 页中关于全反射的内容，光线在发生全反射时是会产生复杂的相位变化的。如此一来，基于光程差理论的干涉现象，在碰撞模型中就更找不到自圆其说的说法了。

二体运动模型的假设是建立在缝壁是原子的集合的基础上的。而且原子之中大部分是“空旷”的，光子和原子核的直接碰撞基本不可能发生。物体对光子的吸收是由于光子受到原子核吸引的作用产生类似天体运动中二体运动的效应。根据入射速度的切线和原子核的不同距离，光子或呈双曲线轨迹射出，或围绕原子核做椭圆运动直至被吸收湮没，或沿抛物线向相反方向射出。

假设光子质量为 m ，原子核质量为 M ，力 F 大小与光子和原子核的距离呈二次倒数关系，引力常数为 k ，入射速度为长度固定为光速的向量 \mathbf{vc} ，则可得如下方程：

$$F=ma \quad (2-4)$$

$$\text{即 } k \frac{Mm}{|r|^3} \mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2-5)$$

分离变量并将 \mathbf{v} 表示成 \mathbf{r} 的导数，可得，

$$k \frac{Mm}{|r_x+r_y|^3} r_x = m \frac{d^2 r_x}{dt^2} \quad (2-6)$$

$$k \frac{Mm}{|r_x+r_y|^3} r_y = m \frac{d^2 r_y}{dt^2} \quad (2-7)$$

由于只是示意，光子真正的绕射情况要更为复杂，因此花费大量时间解该二元微分方程是不必要的。因此，我们采用了计算机迭代描点的方式。具体算法流程图及最终仿真结果如下。

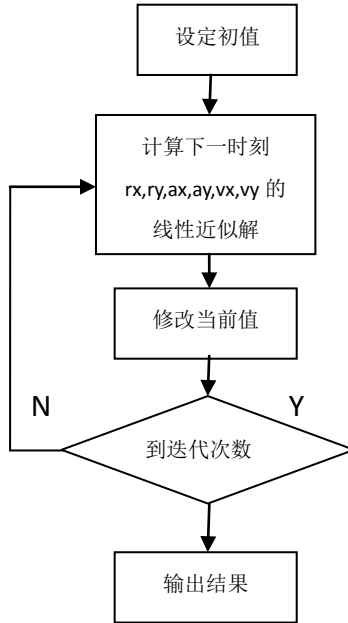


图 2-9 迭代计算二体轨迹方程

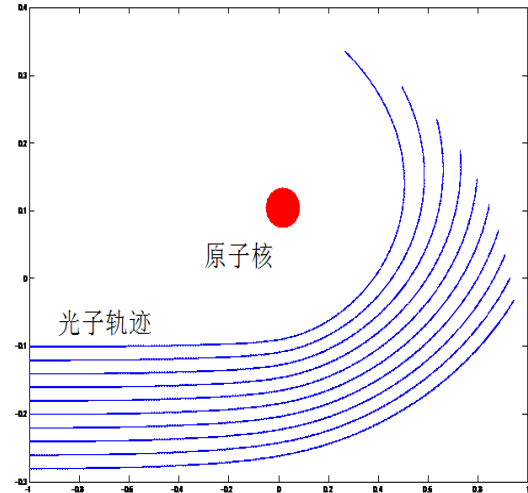


图 2-10 绕射轨迹仿真

2) 多个原子核影响下光子轨迹特征

原子绕射过程大多数情况下不造成光子的湮没，也不会对光子本身相位造成明显影响。光子出射的最终方向是受到有限次相对原子核的绕射的结果。单缝衍射过程中，双缝的距离越近，光子同时受到双边的原子影响的可能性就越大，也就更可能从一个大的方向角出射，如图 2-11 所示。

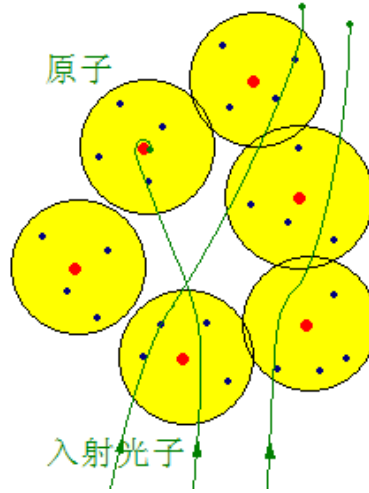


图 2-11 光子绕射示意图

假设某光子在前进过程中受到 n 个原子核的引力作用，则对二体运动的方程进行简单扩展，即可得到描述 n 个原子核影响下光子的运动方程。

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \quad (2-8)$$

$$\text{即 } \sum_{i=1}^n \frac{Mm}{|r_i|^3} \mathbf{r}_i = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2-9)$$

$$\sum_{i=1}^n k \frac{Mm}{|r_{xi}+r_{yi}|^3} r_{xi} = m \frac{d^2 r_x}{dt^2} \quad (2-10)$$

$$\sum_{i=1}^n k \frac{Mm}{|r_{xi}+r_{yi}|^3} r_{yi} = m \frac{d^2 r_y}{dt^2} \quad (2-11)$$

3) 关于光子接近原子核时受力因素的猜想：

绕射模型是建立在光子在接近原子核时会受力的假设上的。因此，有必要对这种力的来源进行分析。

我们知道，对于距离很小的微观粒子，原子力成为了促成其结合的主要原因。这种力的作用远大于宏观中万有引力的作用。因此，具有质量的光子在接近原子核的时候，很有可能也会受到原子力的影响。

此外，宏观现象中的库伦力，由于在微观环境中微粒距离比宏观物体低好几个数量级，在微观环境中也会起到很显著的作用。我们知道，原子核和电子是分别带有不同等量电荷的微粒，因此二者之间必然会有电场存在。文章中也指出，光的本质是电磁波，这也就意味着光子周围必然存在自我产生的、幅度呈正弦变化的小型电磁场。这个小型电磁场在通过原子核和电子的正负电荷产生的电场时，也可能会受到力的作用。

电子速度估算结果就是建立在微观库仑力的假设之上的。其推导公式如下：

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (2-12)$$

代入原子半径 r 、电子电量 e 、电子质量 m 、库伦常数 k 的实验值，可得 $v =$

$1.590 \times 10^6 \text{ m/s}$ 。可见，电子的速度大致比光子的速度低 200 倍左右。所以，对于以光速运动的光子来说，原子核和电子基本是静止不动的。

假设入射位置的横坐标为均匀分布，则经过第 i 个原子核的绕射过程后，方向角的变化为随机变量 $\Delta\theta_i$ ，则经过整个单缝后，方向角的变化为随机变量 $\Delta\theta = \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i$ 。假设 $\Delta\theta_i$ 是独立等分布的，且均值为 0，方差为 σ^2 。中心极限定理指出，若 $E\{X_k\} = m, \text{Var}\{X_k\} = \sigma^2$ 则随机变量 $Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_n - m)$ 依分布收敛于标准正态随机变量，即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (2-13)$$

由此可知 $\Delta\theta$ 近似服从高斯分布。

这样一来就可以猜测，单缝衍射的条纹实际上是由于菲涅尔波带效果和绕射角高斯分布的叠加效应。不过在真实情况下，散射角度高斯分布的效应相对于菲涅尔波带效果并不明显，即高斯分布方差较大，小角度范围内，菲涅尔波带效应大于绕射效应。示意图如下：

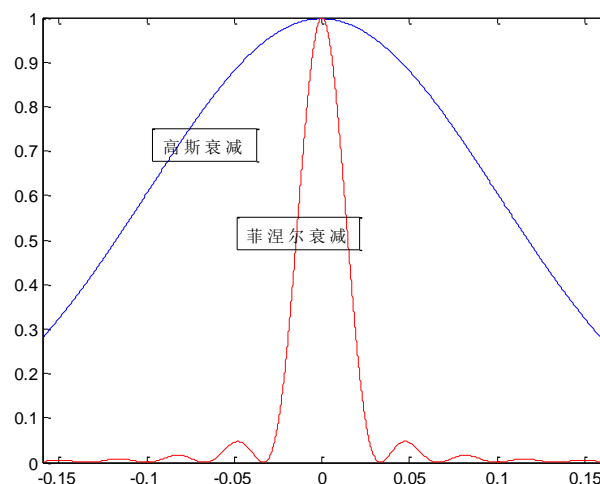


图 2-12 高斯衰减及菲涅尔衰减

2.4 模型输出和真实情况的对比

模型的算法流程如图 所示：

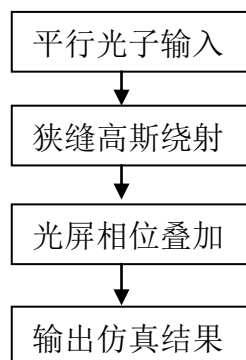


图 2-13 光子过单缝算法流程图

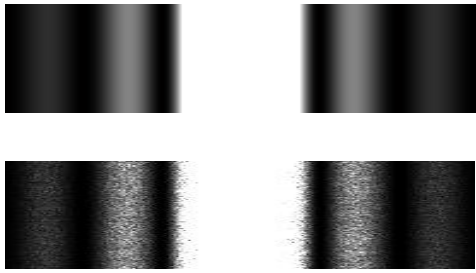


图 2-14 实验现象及仿真结果

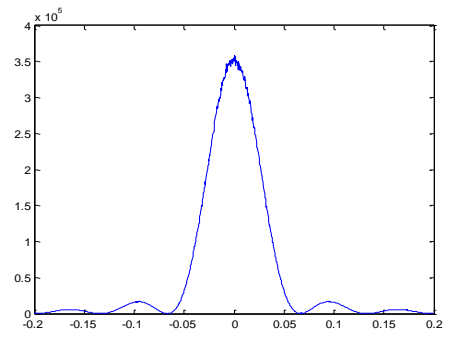


图 2-15 光强统计图

由仿真结果可知，本文所建立的光子模型可以解释光的衍射现象，但是由于计算机的计算能力有限，模拟光子的样本数量有限，故仿真结果有噪点的影响。其实这种现象也是粒子性的一个很好佐证。

3 双缝干涉

干涉是指满足一定条件的两列相干波相遇叠加，在叠加区域某些点的波振幅始终加强，某些点的波振幅始终减弱，即在干涉区域内振动强度有稳定的空间分布。干涉现象是具有波动性的物质的共性。因此，光的双缝干涉是光具有波动性的一个佐证。

3.1 实验现象

平行的同光源单色光投射到一个有两条狭缝的挡板上，狭缝相距很近，平行光的光波会同时传到狭缝，它们就成了两个振动情况总是相同的波源，它们发出的光在挡板后面的空间相互叠加，就发生了干涉现象。

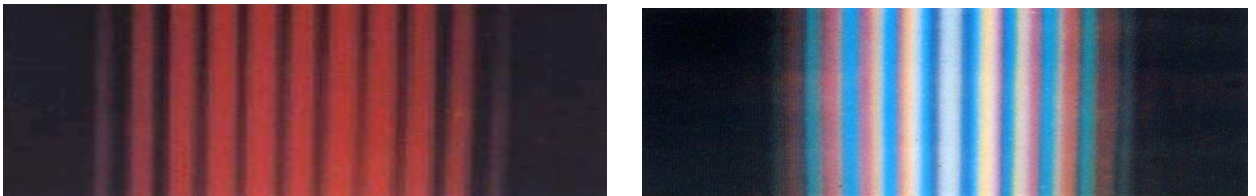


图 3-1 双缝干涉现象

3.2 经典理论思想

光的干涉现象是光的波动性的最直接、最有力的实验证据。光的干涉现象是牛顿微粒模型根本无法解释的。所以当时认为，只有用波动说才能圆满地加以解释。干涉现象是波的相干迭加的必然结果，它肯定了光的波动性，我们还可进一步把它推广到其他现象中去，凡有强弱按一定分布的干涉图样出现的现象，都可作为该现象具有波动本性的最可靠最有力的实验证据。两束光在相遇的区域内形成稳定的敏感交替或彩色条纹的现象称为光的干涉现象。比如双缝干涉中将 S 光源发出的一束光通过 S_1 ， S_2 的双狭缝，分离出两个很小的部分作为相干线光源，这样在双缝后面的屏幕上呈现了明暗相间的条纹，也就是我们所说的干涉图样。也即对空间某处而言，干涉迭加后的总发光强度不一定等于分光束的发光强度的迭加，而可能大于、等于或小于分光束的发光强度，这是由波的叠加原理决定的（即波峰和波峰相加为两倍的波峰）。

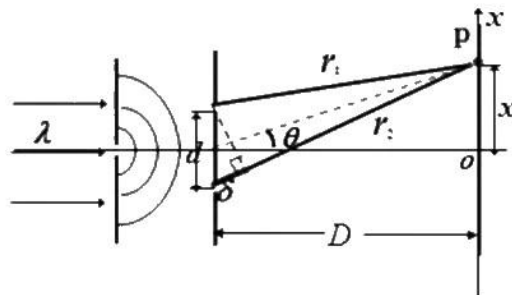


图 3-2 双缝干涉原理图

根据两条光路上的介质的实际情况，计算光程差：

$$\delta = n(r_2 - r_1) \approx n * d \sin \theta \approx n * d \tan \theta = nd * \tan \theta \quad (3-1)$$

当两条相干光经过多种不同介质时，其光程差的计算式变为：

$$\delta = L_2 - L_1 = \left(\sum_1^j n_j x_j \right)_2 - \left(\sum_1^i n_i x_i \right)_1 \quad (3-2)$$

在图中 θ 较小的情况下，当整个装置放置于折射率为 n 的介质中时，变为

$$\delta = n(r_2 - r_1) \approx nd * \frac{x}{D} \quad (3-3)$$

其中，当 $\delta = \pm k\lambda$ ， $k=0,1,2\dots$ 时，光屏上出现明纹。

即 k 级明纹的位置为 $x = \pm k \frac{D\lambda}{nd}$ ， $k=0,1,2\dots$ ，其中， k 等于几，代表的就是第几级明纹的位置，而中央明纹对应着光程差为零的情况。

$$\delta = n(r_2 - r_1) \approx nd * \frac{x}{D} \quad (3-4)$$

当 $\delta = \pm(2k-1) \frac{\lambda}{2}$ ， $k=0,1,2\dots$ 时，光屏上出现暗纹。

k 级明纹的位置为 $x = \pm(2k-1) \frac{D\lambda}{2nd}$ ， $k=0,1,2\dots$ ，其中， k 等于几，代表的就是第几级暗纹的位置，没有零级暗纹的情况。

双缝产生的干涉条纹是明暗相间的，其相邻两条明纹或暗纹的间距为：

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{nd} \lambda \quad (3-5)$$

对于同一频率的单色光而言，经双缝后将出现一系列平行等间距的条纹，其明暗条纹满足如下规律：

$$\text{明纹宽度} = \text{暗纹宽度} = \frac{1}{2} \text{明纹间隔} \quad (3-6)$$

而对于不同频率的光而言，同一级条纹（ k 值相同），呈现的位置不同，干涉条纹的间距不同，其中紫光比较密集，红光比较稀疏。

如果入射光为白光，经双缝干涉后将出现彩色条纹，其中零级条纹仍是白色的，而两侧形成的是由紫到红的彩色条纹。

对于普通的光源，保证相位差恒定成为实现干涉的关键。为了解决发光机制中初相位的无规则迅速变化和干涉条纹的形成要求相位差恒定的矛盾，可把同一原子所发出的光波分解成两列或几列，使各分光束经过不同的光程，然后相遇。这样，尽管原始光源的初相位频繁变化，分光束之间仍然可能有恒定的相位差，因此也可能产生干涉现象。

3.3 干涉建模

在建立了光子的模型以后，双缝干涉现象自然就成了单缝衍射现象的简单拓展。在每一条单缝处，都发生着光子受缝壁原子核影响而绕射的情况。前文已经指出，单缝中光子出射的角度可近似为高斯分布。则在双缝问题中，光子在光屏上的分布近似等于两个高斯函数的叠加是显而易见的。

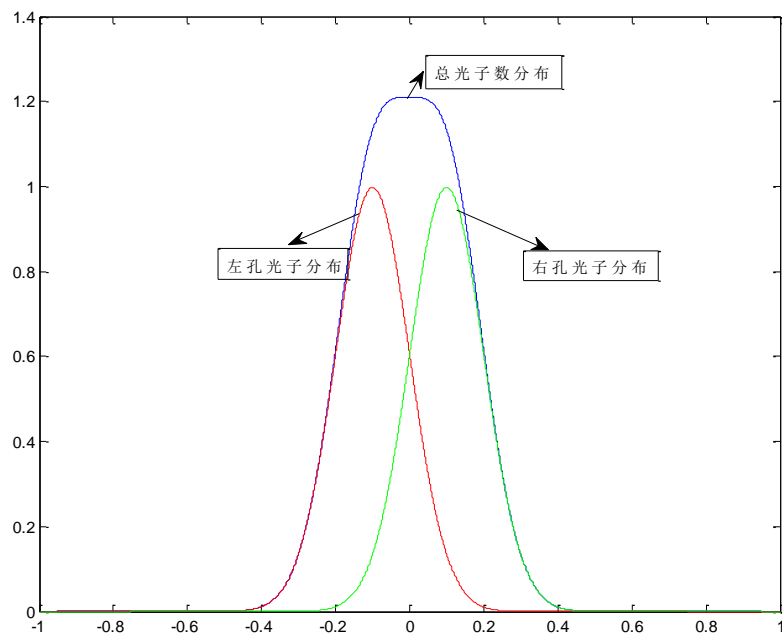


图 3-3 双缝出射光子的角度分布

3.4 模型输出和真实情况对比

算法流程图如下：

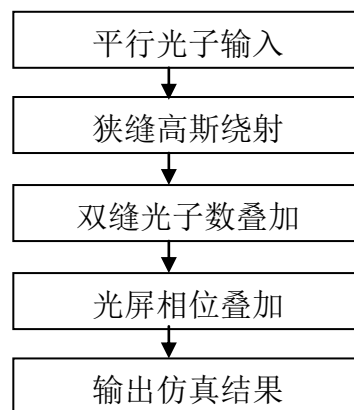


图 3-4 双缝干涉的算法流程

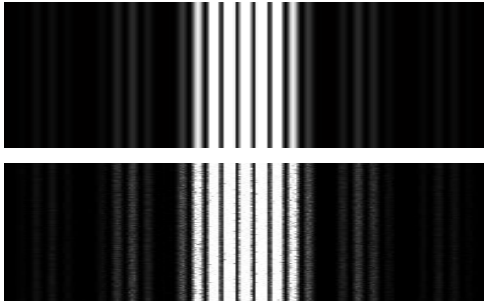


图 3-5 实验现象及仿真对比

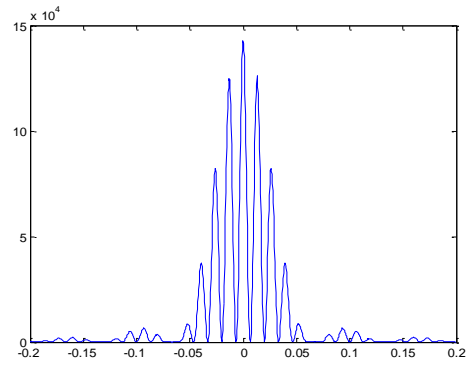


图 3-6 光强统计图

由仿真结果可知，本文所建立的光子模型可以有效地解释光的双缝干涉现象。宏观现象与微观模拟结果相差不大。

4 光栅的衍射与干涉现象

光栅是利用光的多狭缝衍射效应进行色散的光学元件，它能使光波衍射而产生大量光束，利用这些光束的干涉形成光谱。

4.1 实验现象

广义上讲，任何一种装置或结构，只要它能给入射光的振幅或位相，或者二者同时加上一个周期性的空间调制，都可以称为衍射光栅。

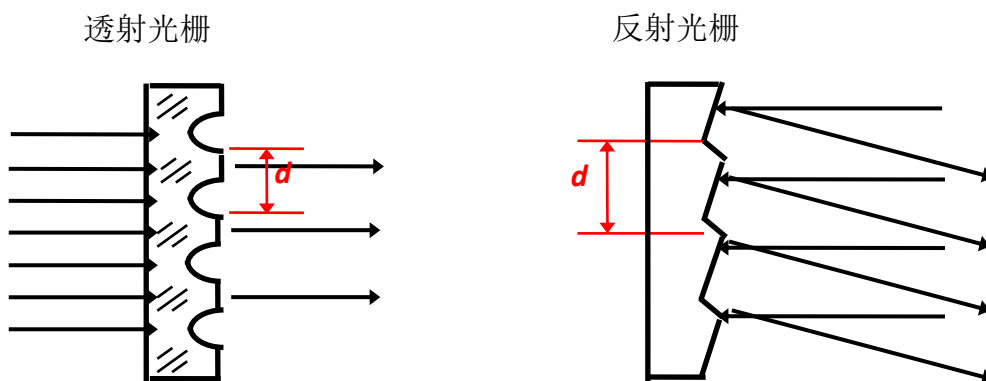


图 4-1 常见光栅结构图

图 XX 中，光栅常数 $d=a+b$ ，其中 a 是透光（反光）部分的宽度， b 是不透光（不反光）部分的宽度。



图 4-2 光栅衍射现象

4.2 经典理论思想

以透射光栅为例，对光栅的衍射进行分析。该透射光栅由 N 条平行刻线构成，刻线断面的形状可任意，刻在一块平行平面玻璃的一个表面上。设 ξ η 面与板的平表面重合， η 是刻线方向，并设 d 是 ξ 方向上的周期。

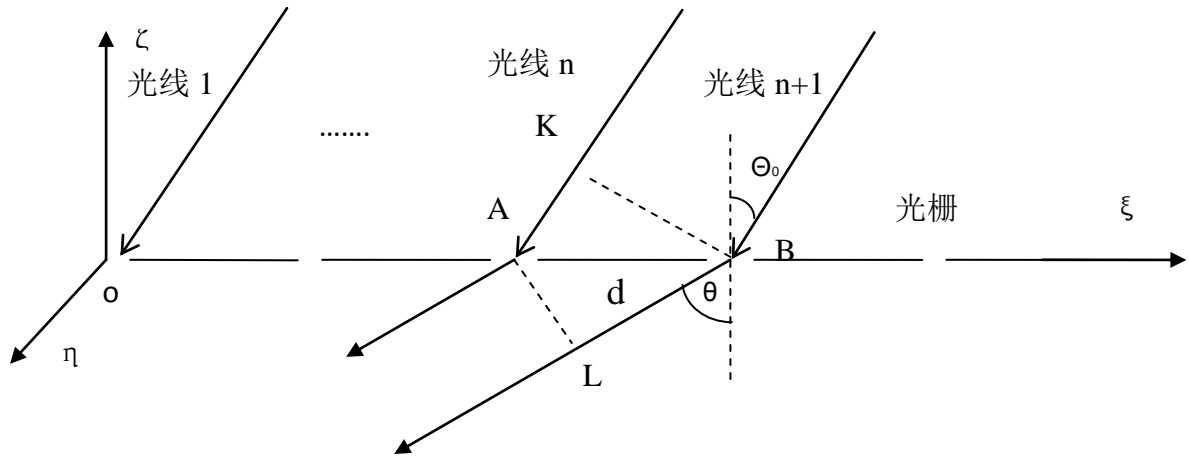


图 4-3 光栅衍射示意图

设光栅入射波的传播方向与 $O\xi$ 成 θ_0 角，并设 θ 代表极远处观察点 P 至光栅连线与 $O\xi$ 的夹角。令 $p = \sin \theta - \sin \theta_0$ ，于是，光线 n 和光线 $n+1$ 的光程差为 $dp = d \sin \theta - d \sin \theta_0$ 。明显，光线 n 与光线 m 的光程差为 $(m-n)dp$ 。

光栅的作用是给入射波加上一个周期性的空间调制。光的衍射图样被干涉图样所“调制”图样。下面将分干涉、衍射两个效应分别对光栅进行分析。

4.2.1 多缝干涉

令光线 1 在 P 点的光矢量幅度为 $U^{(0)}(p)$ ，位相为 0，则光线 $n+1$ 在 p 的光矢量为 $U^{(n)}(p) = U^{(0)}(p) \exp(-ikndp)$ ，则 N 条光线在 p 的光矢量叠加为

$$U(p) = U^{(0)}(p) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-ikndp) = U^{(0)}(p) \frac{1 - e^{-iNkdp}}{1 - e^{-ikdp}} \quad (4-1)$$

因此， P 点的光强为

$$\begin{aligned} I(p) &= |U(p)|^2 = \frac{1 - e^{-iNkdp}}{1 - e^{-ikdp}} \cdot \frac{1 - e^{iNkdp}}{1 - e^{ikdp}} |U^{(0)}(p)|^2 \\ &= \frac{1 - \cos Nkdp}{1 - \cos kdp} I^{(0)}(p) \\ &= \left[\frac{\sin Nkdp / 2}{N \sin(kdp / 2)} \right]^2 I^{(0)}(p) \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中 $I^{(0)}(p)$ 为一条缝的光强。则归一化干涉的效应

$$\frac{1}{N^2} H_I = \left[\frac{\sin(Nkdp/2)}{N \sin(kdp/2)} \right]^2 \quad (4-3)$$

若没有衍射效应，即 $I^{(0)}(p) = C$ (C 为常数) 时，光的多缝干涉图样如图 XX（缝的数量 $N=8$ ）。

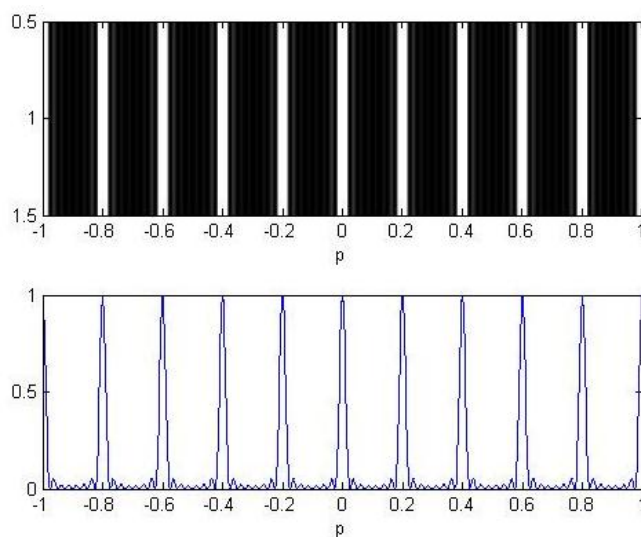


图 4-4 多缝干涉图样（缝的数量 $N=8$ ）

4.2.2 单缝衍射

由第二章的分析可知，单缝缝衍射的归一化强度函数为

$$I^{(0)}(p) = \left[\frac{\sin ksp/2}{ksp/2} \right]^2 \quad (4-4)$$

单缝衍射图样如图 4-5。

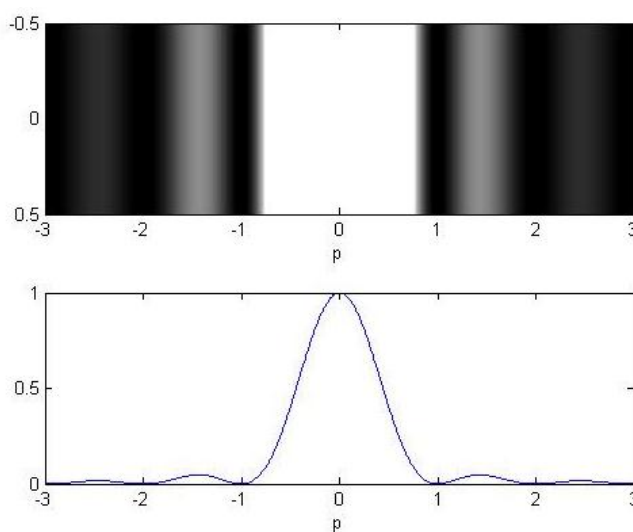


图 4-5 单缝衍射图样

4.2.3 光栅的干涉与衍射现象

平行光穿过透射光栅的现象实际上是多缝干涉和单缝衍射的效果合成。N 条同样的等距平行狭缝组成的光栅的归一化强度函数为：

$$\frac{1}{N^2} I(p) = I^{(0)}(p) \cdot \frac{1}{N^2} H_I(p) = \left[\frac{\sin(Nkdp/2)}{N \sin(kdp/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin ksp/2}{ksp/2} \right]^2 \quad (4-5)$$

从式中可以看出，光的干涉图样被衍射图样所“调制”。N=8 时的透射光栅干涉示意图见图 4-6

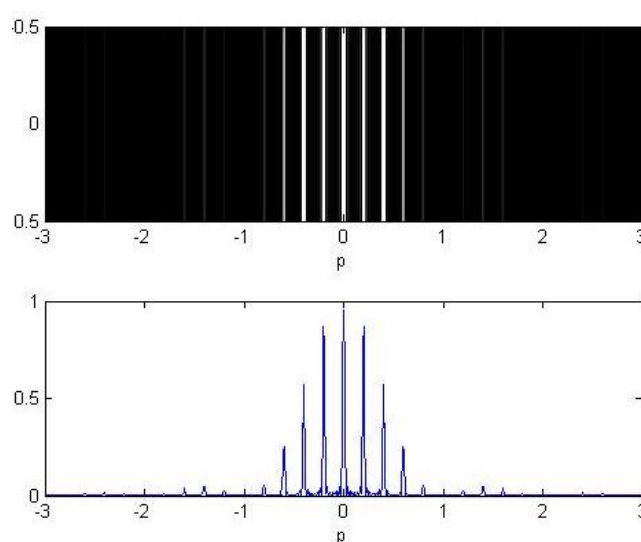
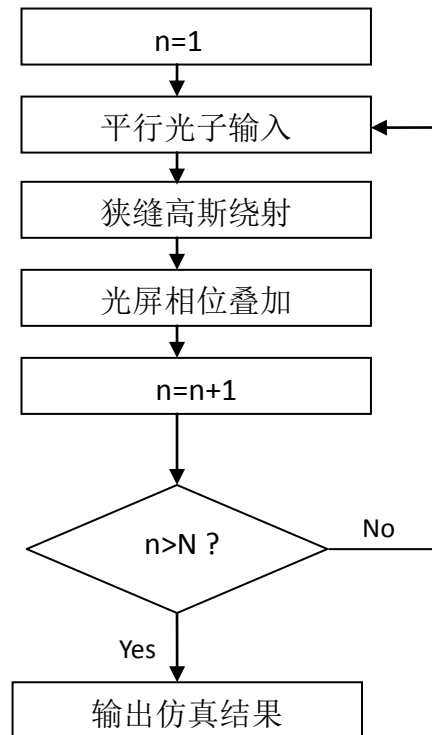


图 4-6 透射光栅干涉示意图（光栅数量 N=8 时）

4.3 光栅建模

光透过光栅后的现象是光的衍射以及光的干涉的合成体。算法首先模拟了单缝衍射现象，然后在其基础上叠加来自另一光栅的衍射光，以模拟干涉现象，直至将所有光栅（N 条）的效应完全叠加，最后得到平行光透过光栅后的图案。

算法流程图如下：



4.4 模型输出和真实情况的对比

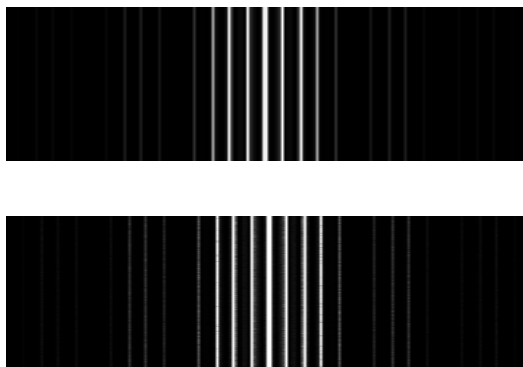


图 4-7 实验现象及仿真对比

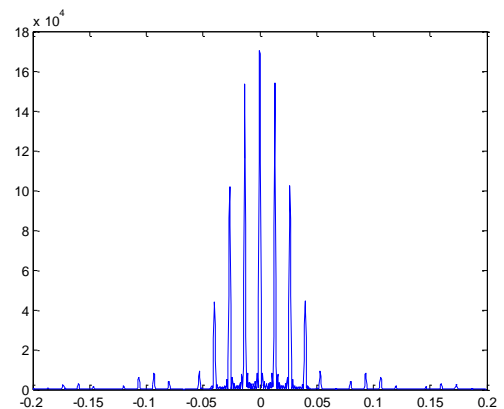


图 4-7 光强统计图

由仿真结果可知，本文所建立的光子模型可以有效地解释光穿过光栅后的干涉以及衍射现象。

5 总结与展望

5.1 猜想的评价与推广

文中建立的微观光子模型和宏观现象能够较好的吻合，对波粒二象性有自成体系的解释。对于光子在单缝衍射的过程中发生的变化，基于二体绕现象，颇具新意的提出了光子受大量原子核作用的轨迹微分方程，也给出了求解这类复杂微分方程的计算机近似方法。基于单缝衍射的模型，我们又给出了多缝情况下干涉现象的仿真，得到了符合客观实验的一系列仿真结果。

5.2 假设模型存在的局限性

本模型存在的不足在于：由于对狭缝壁的微观结构没有深刻了解，对于狭缝出射光子的角度分布不能给出更加具体的推导，只是以高斯模型笼统代替，这将是造成实验误差的最主要原因。

参考文献

- [1] 龚祖同, 光子结构论, 光子学报, 28 (1), 1999。
- [2] 光学原理, 马科斯·玻恩, 电子工业出版社, 2005。
- [3] 陈美纯, 张军朋, 托马斯·杨与杨氏双缝干涉实验, 物理教师, 2010, 。
- [4] 赵升频, 杨氏双缝干涉实验条纹光强分布, 重庆工学院学报, 2006。
- [5] 王国伟, 杨氏双缝干涉实验的精确公式, 石油大学学报(自然科学版), 1991。
- [6] 王爱中, 由杨氏双缝干涉讨论光的相干性, 太原科技大学学报, 2008。
- [7] 李玉春, 张学刚, 夫琅禾费单缝衍射光强分布的探讨, 大庆师范学院学报, 2007。
- [8] 刘克杰, 如何正确理解光的波粒二象性 包头职业技术学院学报, 2006。
- [9] 张晓波, 张一治, 光子单缝衍射过程的动态模拟大众科技, 2011。
- [10] 罗礼进, 基于蒙特卡罗的电子双缝衍射的计算机模拟, 南通大学学报(自然科学版), 2005。
- [11] 韩雪松, 孙继德, 计算机单缝衍射光强分布曲线的拟合, 大学物理实验, 2006, 。
- [12] 杨振峰, 夫琅和费单缝衍射的光能量分布, 河北北方学院学报(自然科学版), 2006。
- [13] 张明霞, 艾小刚, 夫琅禾费单缝衍射光强分析与探讨, 湘潭师范学院学报(自然科学版), 2009。
- [14] 杨植宗, 段永法, 刘洋, 喻莉, 光的干涉与衍射现象的物理本质, 高师理科学刊, 2011。
- [15] 刘春平, 宋汉阁, 光栅衍射实验现象引发的新思考, 大学物理实验, 2004。
- [16] 谢甫珍, 文光俊, 颜华, 姚晓玲, 陈俊斌, 光栅衍射条纹次极大强度研究, 激光杂志, 2003。
- [17] 吕春梅, 苏为宁, 潘永华, 不同结构光栅的衍射光强分布, 物理实验, 2008。
- [18] 李松柏, 吴加贵, 卢孟春, 陆智, 杨敏, 基于 MATLAB 的光栅衍射实验仿真与研究, 西南民族大学学报(自然科学版), 2010。
- [19] 张景川, 基于 Matlab 的光栅衍射条纹强度研究, 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2011。
- [20] 段萍, 刘金寿, 光栅衍射条纹分布的探讨, 大连大学学报, 2004。
- [21] 王家慧, 何志巍, 金仲辉, 从单缝夫琅禾费衍射的图形来看衍射的定义, 物理通报, 2010。
- [22] 赵明富, 邵芸, 钟年丙, 胡新宇, 刘杰徽, 具有温度补偿的光纤生物量浓度在线测量传感器, 半导体光电, 2010。
- [23] 刘效勇, 卢佩, 杨氏双缝干涉实验的虚拟仿真实现, 石河子大学学报(自然科学版), 2008。
- [24] 陈琳, 朱湘柱, 杨氏双缝干涉仿真模型设计, 计算机仿真, 2009。
- [25] Dr Zu, THE CLASSICAL STRUCTURE MODEL OF SINGLE PHOTON AND CLASSICAL POINT OF VIEW WITH REGARD TO WAVE-PARTICLE DUALITY OF PHOTON, Progress In Electromagnetics Research Letters, Vol. 1, 109 - 118, 2008。
- [26] Roy J. Glauber, ONE HUNDRED YEARS OF LIGHT QUANTA, Nobel Lecture, December 8, 2005。