

全国第六届研究生数学建模竞赛



题 目

枪弹头痕迹自动比对方法的研究

摘 要:

本文通过综合考虑题目 1、2、3 的要求,运用数字图像处理技术,设计并实现了基于小波变换的弹痕识别模型,完成了以弹头痕迹的 3 维曲面数据为输入,弹头相似度为输出的自动比对。基于小波变换的弹痕识别模型的处理步骤如下:

- (1) 建立映射关系,将 3 维曲面数据转化为灰度图像
- (2) 利用刚体变换 6 参数法描述系统定位误差,通过小波变换提取反映图像的轮廓特征低频分量,以比对图像与样本图像低频分量灰度值的均方误差最小为目标建立规划模型,对系统定位误差进行校正
- (3) 采用小波阈值滤波模型对数据进行滤波降噪,抑制图像噪声的同时可以较好保护图像边缘特征。
- (4) 选取垂直于弹痕走势方向的横截面曲线作为对比特征,建立量化相似度模型,对弹头痕迹进行比对。利用问题 3 所给的数据进行检验,效果优异。

本文主要特色之处在于:

- (1) 综合考虑题目 1、2、3,建立基于小波变换的弹痕识别模型解决题目中多个问题
- (2) 对阳膛线和次棱线痕迹区域进行仿射变换,使弹痕的走势方向便与 y 轴平行,使得横截面曲线包含更显著的特征信息。

关键词: 小波变换 灰度图像 弹头识别

参赛队号 9000515

队员姓名 王科人 王肖楠 冯晓磊

参赛密码 _____

(由组委会填写)

枪弹头痕迹自动比对方法的研究

1. 问题的重述

在公安实践中，要根据弹头上的痕迹来判断两个弹头是否为同一支枪发射的。传统方法是通过显微镜肉眼观察，比对两个弹头上的线条型痕迹，看这些线条的粗细分布是否吻合。传统做法有两个弱点：一是效率极低，因为很多情况是“似是而非”的，所以对多个弹头（例如几十、几百个）的比对几乎无法进行；二是弹头样本不易保存，容易发生锈蚀损坏等情况。

现代高精度数据采集设备为自动比对方法创造了条件。自动比对方法的过程分为两步：

第一步，通过光学设备采集弹头上 8 片痕迹的 3 维数据，保存为 8 个文件。

第二步，采用适当的方法，通过电脑比对，判别一个弹头与样本弹头的相似程度，以便确认发射该弹头的枪支。这个问题很实用，但要求达到较高的准确性就很困难。希望研究生们研究下面几个问题：

1、如何处理由位置和姿态造成的测量误差，使得两个弹头可以尽量在相同位置和相同姿态的情况下进行比对。

2、弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性，会造成数据误差和噪声。第二个问题是：采取怎样的方法去消除这些误差和噪声。

3、已有 6 支枪发射的 12 个弹头（每支枪发射 2 个弹头）的次棱部分的测量数据，问题是：

(1) 依据这些数据，你们认为怎样的特征可以用于比对；并给出提取这些特征的方法。

(2) 依据这些数据，你们认为采用数据的哪一部分用作比对，其效果比较好。

(3) 给出完整的比对方案、算法，并在电子版附件中给出程序。

4、已有另外 11 支枪发射的 22 个弹头（每支枪发射 2 个弹头），问题是：

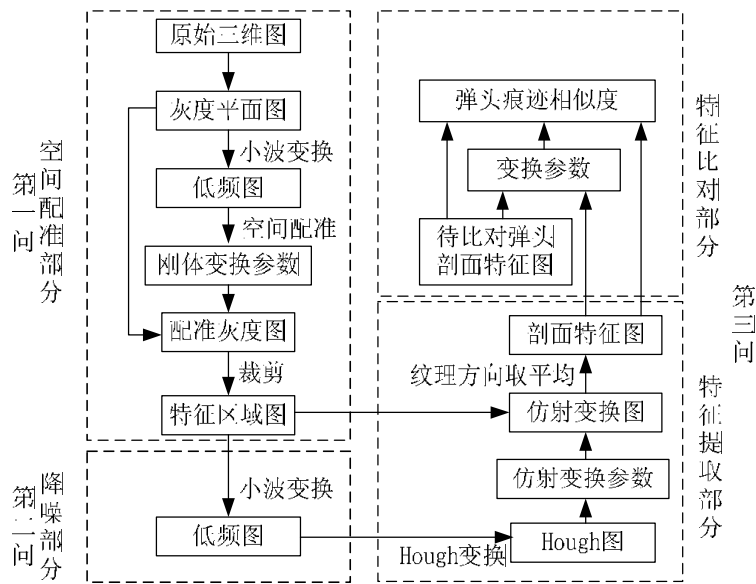
(1) 用解决第三个问题的方法给出这 22 个弹头痕迹两两之间的相似程度，并列表表示；

(2) 根据 (1) 的结果，用列表的方式给出每个弹头按相似度由高到低给出与之相似的前 5 位的弹头文件号。

2. 问题的分析

本文要解决的是如何判定两个弹头相似程度的问题。从光学设备采集到的弹头痕迹 3 维数据中寻找解决问题的信息，涉及到空间数据的比对和识别，包含数据的预处理（如空间变换，曲面滤波），曲面特征提取以及特征识别等多种技术。这类技术常常较为复杂，难以运用统一模型进行运算，并且不利于计算机自动化的实现

数字图像处理技术成熟，而且便于计算机的计算，广泛应用于目标识别领域。空间曲面经过简单转换，可以映射到灰度图像平面上来。这样，三维的曲面问题便可转化到对灰度图像的处理上来。



弹头痕迹鉴别流程

图（1）

本文的弹头痕迹比对过程主要由以下几部分组成：

首先，将原始三维图转化为灰度曲面图；接着进行空间配准，将配准后的图像裁剪出有用的特征区域图，并去噪，最后提取特征并比对。具体流程如图 1。

图 1 中的四个模块分别对应了图像匹配问题的版面校正、去噪、特征提取和比对四个部分。

题目 1 的目的是校正系统性误差，这种误差是由于测量坐标系与设计坐标系未达到精确重合造成的。假设对比图像坐标系相对于样本图像坐标系进行了某种平移、旋转变换，我们只需寻找出这种变换，对其进行逆运算，即可实现两个图像位置和姿态的一致性调整。本文以平移距离和旋转角度等参数为变量，以比对图像与样本图像灰度的均方误差最小为目标建立规划模型。由于图像的轮廓特征主要体现在低频部分，本文拟使用图像的低频图进行校正。

题目 2 是对数据降噪的过程。数字图像处理中有很多经典滤波模型，并且有各自的适用场合，例如，高斯滤波器能很好抑制随机性噪声，中值滤波则是一种滤除强噪声点的好方法。但是传统的滤波模型会导致图像边缘模糊甚至消失。考虑到随后需要提取图像的边缘特征，我们采用抑制图像噪声的同时可以较好保护图像特征小波阈值滤波模型。

题目 3 中需要解决的是特征的选择、提取和匹配。通过对题目给出的弹痕图片的观察，我们认为垂直于弹痕走势方向的横截面曲线包含更多的特征信息。首先提取出阳膛线和次棱线痕迹区域；然后对该区域进行仿射变换使弹痕的走势方向便与 y 轴平行；最后计算横截面曲线沿 y 轴方向的均值曲线作为对比特征。

综合考虑题目 1、2、3，各个部分并不独立，并且小波变换的方法可以解决题目中多个问题。因此，我们拟建立基于小波变换的弹痕识别模型，在解决问题的同时，将各个部分进行有机的结合。图（1）给出了基于小波变换的弹痕识别总体流程示意图。

3. 模型假设和符号说明

假设随机性痕迹造成的噪声为高斯噪声；

假设系统误差不会超过通常值的 2 倍；

$I(x, y)$: 图像在点 (x, y) 的灰度值 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ $\theta x, \theta y, \theta z$;

Δx : 两坐标系 $yo z$ 面的相对平移量;

Δy : 两坐标系 xoz 面的相对平移量;

Δz : 两坐标系 xoy 面的相对平移量;

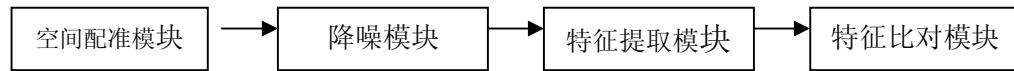
θx : 两坐标系 $yo z$ 面的夹角误差;

θy : 两坐标系 xoz 面的夹角误差;

θz : 两坐标系 xoy 面的夹角误差.

4. 基于小波变换的弹痕识别模型

基于小波变换的弹痕识别模型包括四个子模块, 如图(2)所示。



图(2)

其中, 灰度图像校正模块和降噪模块完成特征提取前图像信息的粗调整。灰度图像配准模块输出配准后的灰度图像, 为特征的提取提供更为精确的数据; 降噪模块的作用则是减少噪声对后续图像处理方法的影响。特征提取模块是模型的主要功能模块, 它需要为选定的特征设计合理的提取方法, 既要保护每个特征的完整性, 又要尽量统一多个特征的信息量, 以便于特征比对模块的比对识别。

4.1 三维曲面与二维灰度图像的映射模型

映射模型是弹痕识别模型的入口, 模型的输入是基于空间扫描的方法得到的弹头外表面的三维坐标信息。为了便于计算机的自动处理, 和利用一系列成熟的图像处理方法, 我们采用一种的映射模型将三维表面数据转化为二维灰度图像。该映射模型将均匀采样的 xoy 平面看作二维图像, 将每个采样点的高度值看作该点的灰度值, 这样数据曲面就转换成以高度为灰度的数字图像, 却保留了原来数据曲面的全部信息。

令 $I(x, y)$ 为图像中 (x, y) 点的灰度, 映射模型如下所示:

$$I(x, y) = \frac{z(x, y) - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}} \times 255 \quad (1)$$

其中 z_{\min} , z_{\max} 分别对应数据曲面中 z 可以取到的最小值和最大值。

4.2 问题一: 空间配准模块

4.2.1 问题分析

题目 1 需要完成对比图像和样本图像的校正工作, 如图(3)。而图像中的细节特征为校正工作带来了困难。我们可以对图像做小波变换, 取其低频图, 利用对比图像和样本图像低频图的灰度差异来刻画是否配准, 这样减少了细节对校准的干扰。

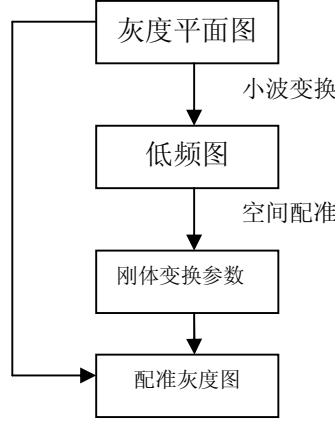


图 (3)

灰度图像和空间曲面比较，并没有信息的丢失。数字图像对系统定位误差的校正与刚体变换匹配并无实质上的区别。我们直接应用刚体变换的 6 参数法对系统定位误差进行描述。

4.2.2 模型的建立

4.2.2.1 图像的二维小波变换

为了能够刻画图像的不同频段的特征，我们引入可分离二维小波进行图像的多分辨率分析。二维小波的分解示意图如图 (4) 所示

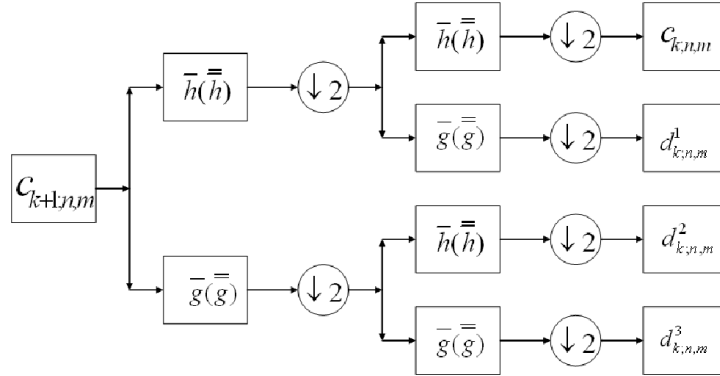


图 (4)

设 $I(n, m)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$) 是一幅输入图像，其像素点之间的距离为 N^{-1} ，其中 $N=2^L$ 。我们可以将 $I(n, m)$ 与尺度 2^L 下的一个逼近函数 $f(x, y) = \sum_{n,m} c_{n,m}^L \phi_{L,n,m}(x, y) \in V_L^2$ 联系起来。其中， $c_{n,m}^L = \{f, \bar{\phi}_{L,n,m}\}$ ， $\phi_{L,n,m}, \bar{\phi}_{L,n,m}$ 是两个对偶尺度函数。使得 $I(n, m)$ 为 $f(x, y)$ 的均匀采样。另外，根据 $c_{n,m}^L = \{f, \bar{\phi}_{L,n,m}\}$ ，有

$$Nc_{n,m}^L = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \frac{1}{N^{-2}} \bar{\phi}\left(\frac{u - N^{-1}n}{N^{-1}}, \frac{v - N^{-1}m}{N^{-1}}\right) dudv \quad (2)$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u, v) dudv = 1$ ，所以

$$Nc_{n,m}^L = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N^{-2}} \bar{\phi}\left(\frac{u - N^{-1}n}{N^{-1}}, \frac{v - N^{-1}m}{N^{-1}}\right) dudv = 1$$

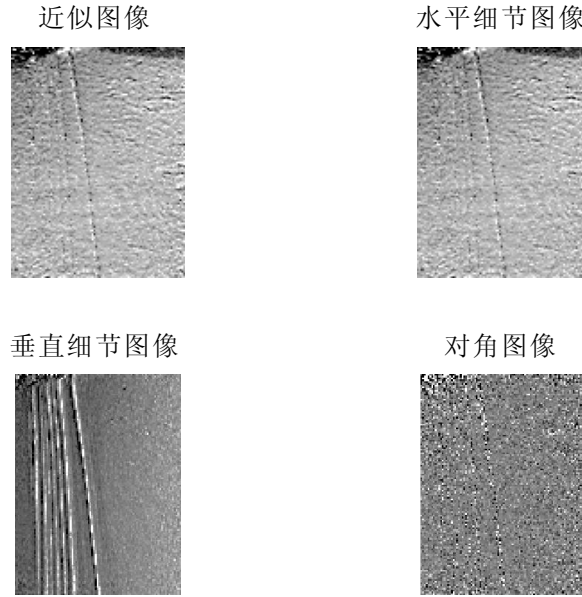
从而， $Nc_{n,m}^L$ 是 f 在 $(N^{-1}n, N^{-1}m)$ 的一个小临域上的加权平均，因此有

$$Nc_{n,m}^L \approx f(N^{-1}n, N^{-1}m) = I_{n,m} \quad (3)$$

若将 $c_{k+1,n,m}$ 看作一幅二维图像信号，则二维小波变换的过程是：先利用分析滤波器 \bar{h}, \bar{g} 对每一行做小波变换，得到低频部分 $\sum_j \bar{h}_{j-2m} c_{k+1;l,g}$ 和高频部分 $\sum_j \bar{g}_{j-2m} c_{k+1;l,j}$ ，然后对得到的数据的每一列用分析滤波器 \bar{h}, \bar{g} 做小波变换，对 $\sum_j \bar{h}_{j-2m} c_{k+1;l,g}$ 的各列做小波变换得到低频系数 $\sum_l \bar{h}_{l-2n} \sum_j \bar{h}_{j-2m} c_{k+1;n,m}$ ，即 $c_{k;n,m}$ ，高频系数 $\sum_l \bar{g}_{l-2n} \sum_j \bar{h}_{j-2m} c_{k+1;n,m}$ ，即 $d_{k;n,m}^1$ ；对 $\sum_j \bar{g}_{j-2m} c_{k+1;l,j}$ 的各列做小波变换得到低频系数 $\sum_l \bar{h}_{l-2n} \sum_j \bar{g}_{j-2m} c_{k+1;n,m}$ ，即 $d_{k;n,m}^2$ ，高频系数 $\sum_l \bar{g}_{l-2n} \sum_j \bar{g}_{j-2m} c_{k+1;n,m}$ ，即 $d_{k;n,m}^3$ 。这样，以及小波分解后的图像由 4 部分组成：

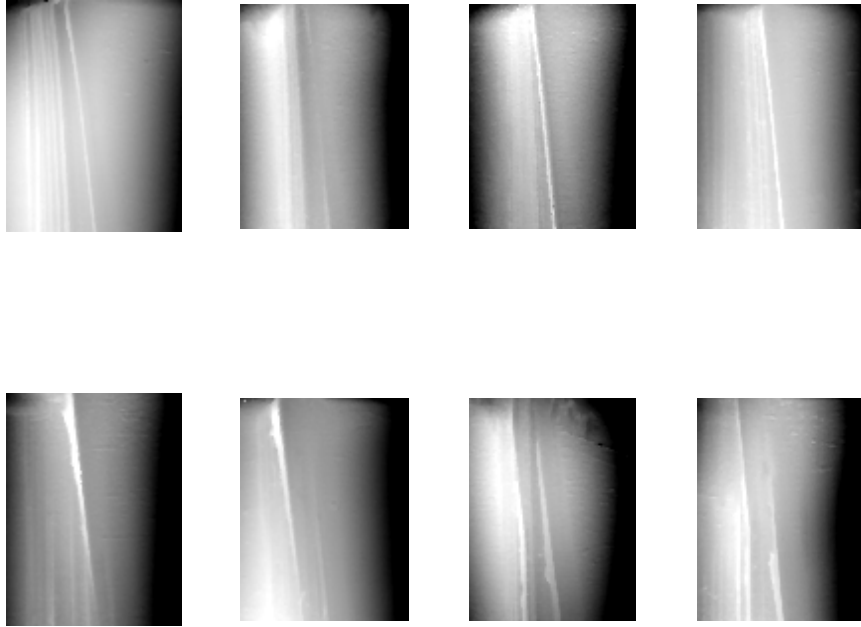
$$\begin{pmatrix} c_{k;n,m} & d_{k;n,m}^1 \\ d_{k;n,m}^2 & d_{k;n,m}^3 \end{pmatrix}$$

分别为近似图像、水平细节图像、竖直细节图像和对角图像。对数据文件 77T1-1203959-c1 进行小波变换后如图(5)所示。

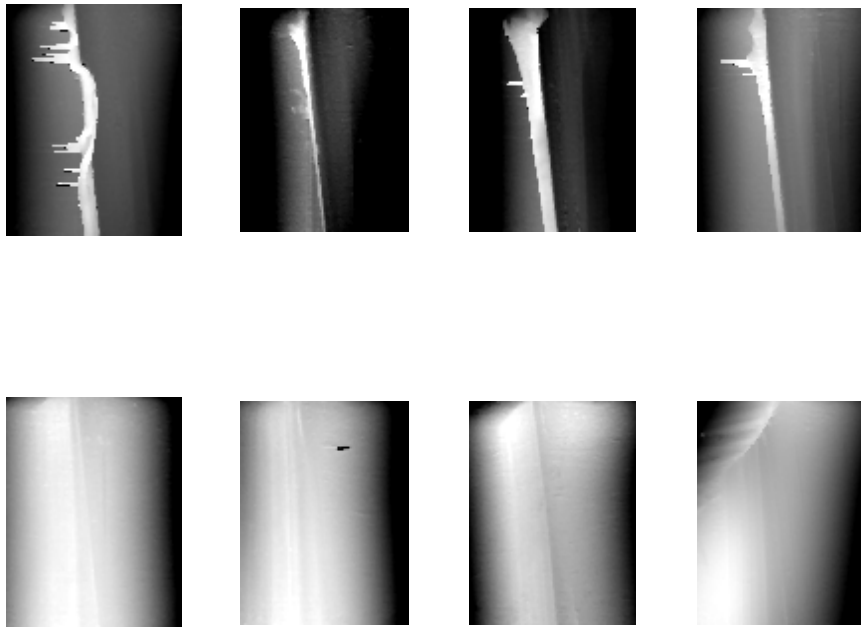


图(5)

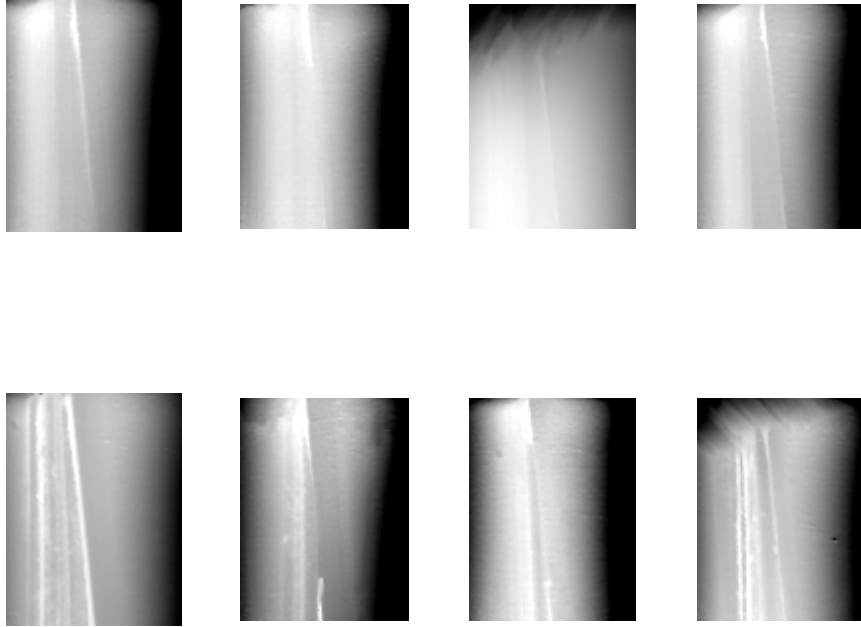
其中，近似图像是图像的低频分量，体现了图像的轮廓信息，而且去除了不同子弹擦痕的细节特征对配准的影响，因此，文中选用近似图像进行图像配准。图(6)至图(11)给出了题目 3 所有样本数据的低频图。



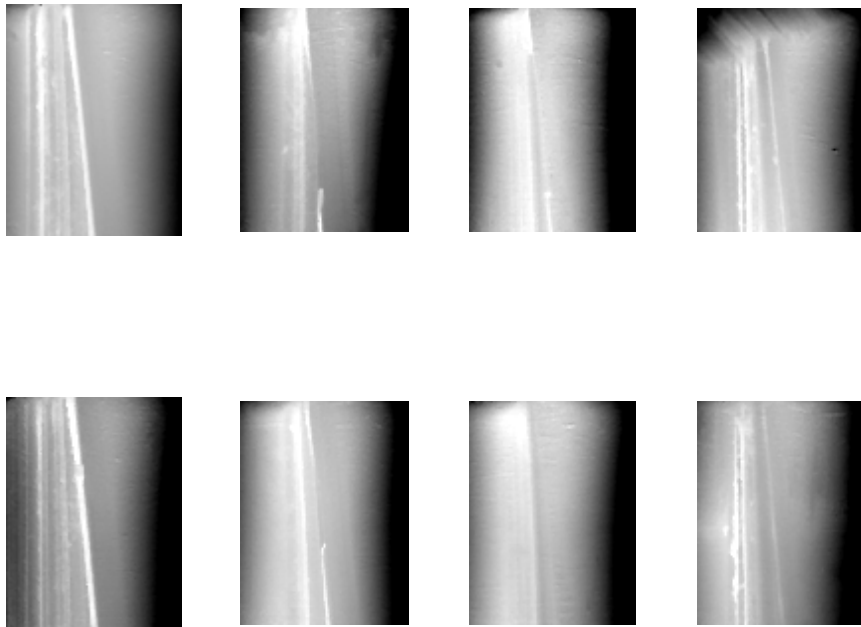
图（6）77T1-1203959 和 77T2-1203959 文件的低频图



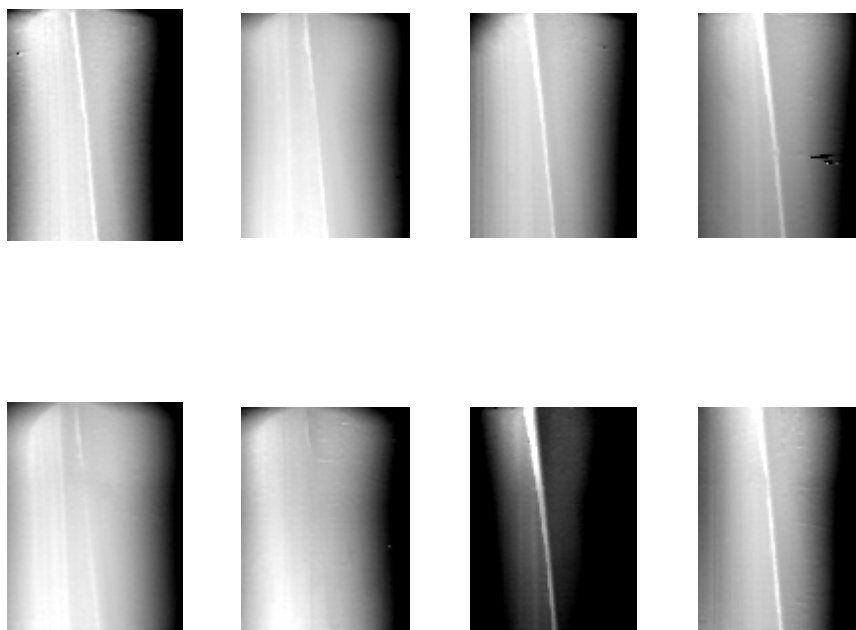
图（7）77T1-1504519 和 77T2-1504519 文件的低频图



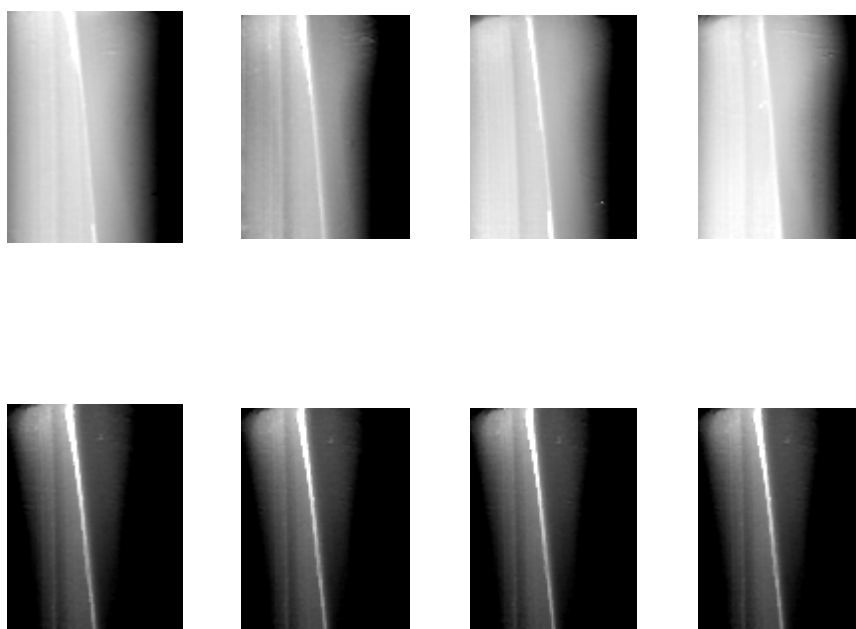
图（8）77T1-1811345 和 77T2-1811345 文件的低频图



图（9）77T1-1812492 和 77T2-1812492 文件的低频图



图（10）77T1-1923252 和 77T2-1923252 文件的低频图



图（11）77T1-1928033 和 77T2-1928033 文件的低频图

4. 2. 2. 2 对比图像到样本图像的坐标变换

假设对比图像在理想的状态下，可以与样本图像同位置 and 同姿态放置，那么它们之间的误差，可以用六个参数来表示，即三个平移参数 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 和三个旋

转参数 $\theta x, \theta y, \theta z$ 。这六个参数包括了灰度图像平移和旋转的所有可能。如果给出一组参数的值可以获得对比图像和样本图像的最优匹配, 我们便可以认为该组参数即为两图像的定位误差。

根据以上的分析, 设理想的对比图像为 $f_1(x, y, z) = 0$, 则与实测图像 $f_2(x, y, z) = 0$ 的对应关系为:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = R(\theta x)R(\theta y)R(\theta z) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $R_1(\theta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta x & \sin \theta x \\ 0 & -\sin \theta x & \cos \theta x \end{bmatrix}$

$$R_2(\theta y) = \begin{bmatrix} \cos \theta y & 0 & \sin \theta y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta y & 0 & \cos \theta y \end{bmatrix}$$

$$R_3(\theta z) = \begin{bmatrix} \cos \theta z & \sin \theta z & 0 \\ -\sin \theta z & \cos \theta z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

消除误差的过程, 也就是式 (4) 逆运算的过程, 即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = R(\theta z)^{-1} R(\theta y)^{-1} R(\theta x)^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \right) \quad (5)$$

由式 (5) 可得调整后的对比图像 $z_c(x_i, y_j)$ 。

4.2.2.3 插值运算

坐标变换使得对比图像的取值点不再与样本图像重合。由于调整的角度和幅度都较小, 为方便计算, 我们将超出样本图像取值范围的部分去除。

另外, 由于同样的原因, 经过规划模型调整后的对比图像的 (x, y) 值偏离了样本图像的取值点, 需要对调整后的对比数据进行插值运算。

该问题属于二维插值问题。由于数据量大, 我们采用计算速度较快, 内存消耗较小的最邻近插值模型, 算法设计如下:

- (1) 求变换后任一点 (x_1, y_1) 经过坐标变换后的坐标 (x_2, y_2) ;
- (2) 若 (x_2, y_2) 为样本图像的取值点, 则对比图像的取值不变; 否则, 取最近的取值点坐标的值为该点的取值。

4.2.2.4 规划模型

设 $z_s(x_i, y_j)$ 为样本图像, 则调整后的对比图像和样本图像之间的均方差为

$$MSE = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (z_c(x_i, y_j) - z_s(x_i, y_j))^2 / (m \times n) \quad (6)$$

其中, m 和 n 分别为样本图像在 x 轴和 y 轴的数据采集的个数。

我们认为, 与样本图像之间的均方差最小的对比图像, 达到与样本图像的位置和姿态的最大一致性。建立的规划模型为:

$$\min MSE \quad (7)$$

约束条件为

$$\begin{cases} -Lx \leq \Delta x \leq Lx \\ -Ly \leq \Delta y \leq Ly \\ -Lz \leq \Delta z \leq Lz \\ -\delta x \leq \theta x \leq \delta x \\ -\delta y \leq \theta y \leq \delta y \\ -\delta z \leq \theta z \leq \delta z \end{cases}$$

4.2.3 模型的求解

用式 (7) 所述的规划模型直接求解, 面临两个问题: 一是运算量较大, 需要设计简化而有效率的算法; 二是规划模型调整后的对比图像不再与样本图像的取值点重合, 因此在计算之前需要进行插值处理。

由题目可知, $\theta x, \theta y, \theta z$ 的值通常为 0.2° , 可以视为微小转角, 则它们之间存在以下关系

$$\begin{cases} \sin \theta x \approx \theta x \\ \sin \theta y \approx \theta y \\ \sin \theta z \approx \theta z \\ \cos \theta x = \cos \theta y = \cos \theta z \approx 1 \\ \sin \theta x \sin \theta y \approx \sin \theta x \sin \theta z \approx \sin \theta y \sin \theta z \approx 0 \end{cases}$$

这样, 式 (5) 简化为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta z & -\theta y \\ -\theta z & 1 & \theta x \\ \theta y & -\theta x & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

然后对模型的算法进行优化。由规划模型可知, 该问题本质上是一个有约束的非线性系统的参数辨识问题, 下面我们采用经典的 *zoutendijk* 可行方向法对问题进行求解。

要考虑的目标函数为

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \min f(\Delta x, \Delta y, \theta z) \end{aligned} \quad (9)$$

即,

由约束所确定的可行集为

$$\begin{cases} -0.06mm \leq \Delta x \leq 0.06mm \\ -0.06mm \leq \Delta y \leq 0.06mm \\ -0.06mm \leq \Delta z \leq 0.06mm \\ -0.04^\circ \leq \theta x \leq 0.04^\circ \\ -0.04^\circ \leq \theta y \leq 0.04^\circ \\ -0.04^\circ \leq \theta z \leq 0.04^\circ \end{cases}$$

zoutendijk 可行方向法求解的具体步骤为:

(1) 任选可行点作为初始点, 如 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \theta x, \theta y, \theta z)^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$;

(2) 令

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \theta x, \theta y, \theta z) = x = x^{(k)} + d, f(k) \approx f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T d$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.06 \\ 0.06 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

(3) 得到线性规划并求解

$$\begin{aligned} \min & \nabla f(x^{(k)})^T d \\ \text{s.t.} & Ad \geq 0 \end{aligned}$$

设其最优解为 d^* ;

(4) 若 $|\nabla f(x^{(k)})^T d^*| < \varepsilon$ (ε 为足够小值), 则 $x^{(k)}$ 即为所求的最优点, 停止运算; 否则, 转到步骤 (5);

(5) 确定沿 d^* 方向的步长 t 。若 $Ad^* \geq 0$, 则由线搜索 $\min f(x^{(k)} + td^*)$ 得 $x^{(k+1)} = t_k d^* + x^{(k)}$, 令 $k = k + 1$, 转到步骤 (2); 否则, 转到步骤 (6);

(6) 设 $u = Ax^{(k)} - b, v = Ad^*$, 计算

$$\bar{t} = \min \left\{ -\frac{u_i}{v_i} \mid v_i < 0 \right\}$$

由 $\min_{0 \leq t \leq \bar{t}} f(x^{(k)} + td^*)$ 确定 $x^{(k+1)} = t_k d^* + x^{(k)}$, 令 $k = k + 1$, 转到步骤 (2)。

4.3 问题二：降噪模块

弹头表面因损伤, 锈迹, 油斑, 杂质等引起的强噪声以及随机性噪声会造成数据误差, 给数据处理带来不良影响。因此, 消除这些噪声是非常必要的。常用滤波模型均可做到不同程度的去噪。中值滤波是滤除强噪声点的较好方法; 高斯滤波器则能很好抑制随机性噪声。但是, 传统的滤波器都是各向同性的, 滤波时对图像平滑区和边缘过渡区进行了相同的处理, 这样就会导致滤去噪声后图像纹理变模糊甚至纹理消失。考虑到模型随后的弹痕边缘的特征提取, 需要选择更为合适的滤波模型。

小波变换特别是正交小波变换具有很强的去相关性, 它能使信号的能量在小波域集中在一些大的小波系数中, 而噪声的能量却分布在整个小波域内。因此, 经小波分解后, 信号的小波系数幅值要大于噪声的系数幅值, 可以认为, 幅值比较大的一般以信号为主, 而幅值较小的大多是噪声。采用阈值可以把信号系数保留而使大部分噪声系数减少至零。同时, 可以为问题三提供很好的边缘特征。所以, 本文使用小波阈值滤波。

4.3.1 常用滤波模型分析

4.3.1.1 中值滤波模型

滤波模型在待处理的曲面的 xoy 投影平面上逐点的移动一个 $m \times n$ 大小的掩模 ($m \times n$ 的值需为奇数)，在每一点 (x, y) 处，滤波模型在该点的响应通过下述关系来计算：

$$g(x, y) = middle\{z(x-m, y-n), z(x-m+1, y-n), \dots, z(x, y), \dots, f(x+m, y+n)\}$$

其中， $middle$ 函数的功能是将掩模内数据确定出中值，并将中值赋予该投影点。

4.3.1.2 高斯滤波模型

高斯滤波函数表达式为：

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

其梯度矢量为

$$\nabla G = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}$$

用分解的方法提高速度，把 ∇G 的两个滤波卷积模板分解为两个一维的行列滤波器：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= kx \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= ky \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

其中， k 为常数， σ 为高斯滤波器的参数，分别平滑程度。对于 σ 值小的滤波器，虽然定位精度高，但信噪比低； σ 值大的则相反，因此要根据需要适当的选取 σ 。

4.3.1.3 小波阈值滤波模型

计算含噪信号的正交小波变换。对于长度为 N 的信号，设 $N = 2^J$ ，利用 FWT (小波变换的快速算法) 获得低分辨率 $L (0 \leq L < J)$ 下的尺度系数 $\{v_{L,k}, k = 1, \dots, 2^L\}$ ，及各分辨率下的小波系数 $\{w_{j,k}, j = L, L+1, \dots, J-1, k = 1, \dots, 2^j\}$ ，其中尺度系数和小波系数共 N 个。在处理边界时，常采用周期延拓方法。

对小波系数进行非线性阈值处理。为保持信号的整体形状不变，保留所有的低频系数 $v_{L,k}, k = 1, \dots, 2^L$ 。取阈值 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log N}$ ，对每个小波系数采用软阈值的方法进行处理：

$$\text{软阈值: } \tilde{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} - \lambda & w_{j,k} \geq \lambda \\ 0 & |w_{j,k}| < \lambda \\ w_{j,k} + \lambda & w_{j,k} \leq -\lambda \end{cases}$$

即，将含噪信号的小波系数与所选定的阈值 λ 进行比较，大于阈值的点收缩为该点与阈值的差值，小于阈值相反数的点收缩为该点与阈值的和；幅值小于阈值的点变为零。

进行小波反变换。由所有低频尺度系数，以及经阈值处理后的小波系数做小波反变换进行图像的重构。

由于噪声主要集中在最高分辨级 $J-1$ ，所以我们利用小波系数 $\{w_{J-1,k}, j=L, L+1, \dots, J-1, k=1, \dots, 2^{J-1}\}$ 估计噪声标准差，本文采用常用的估计公

式： $\tilde{\sigma} = \text{median}(|w_{J-1,k}|) / 0.6745$ 。

4.3.2 模型的求解

设图像 $z(x, y)$ 为 M_z 行乘以 N_z 列矩阵，二维数字滤波器 $h(x, y)$ 为 M_h 行乘以 N_h 列矩阵，输出 $z'(x, y)$ 为 $M_z + M_h - 1$ 行乘以 $N_z + N_h - 1$ 。用 MATLAB 编程实现图像 $z(x, y)$ 和二维数字滤波器 $h(x, y)$ 的卷积，其中高通滤波器参数设置为 (0.125, 0.375, 0.375, 0.125)，低通滤波器参数设置为 (0.5, -0.5)。对数据文件 77T1-1203959-c1 进行中值滤波、高斯滤波和小波阈值滤波后的图像如图 (12) 所示。

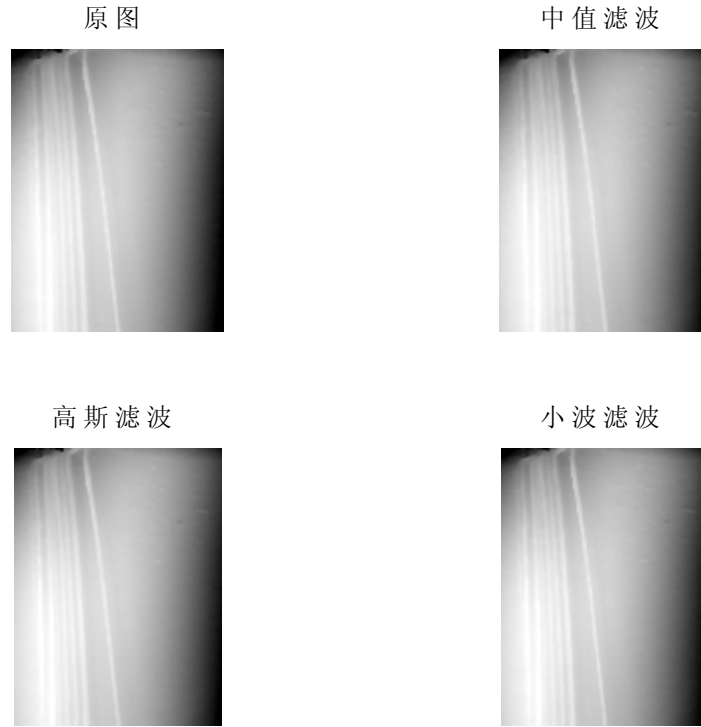


图 (12)

4.3.3 结果比较

由图(12)可知，中值滤波结果有明显的锯齿，高斯滤波结果低频不明显，而小波滤波结果既滤除了大部分噪声点又保持了较好的图像的低频。

4.4 问题三：特征提取模块和特征比对模块

4.4.1 问题分析

主次棱痕迹以及膛线痕迹中的小线纹痕迹是枪支的重要特征，这种痕迹由于枪管内壁的构造、擦拭、使用和锈蚀等情况产生，反应枪管内壁的相应部位的独特之处。在本题中，我们认为弹痕横截面曲线的累加平均曲线是反映次棱痕迹和小线纹痕迹的最优特征。

特征匹配方面，直观思路是将两条曲线用最小二乘法进行对比。但是对于本题而言，不能直接将两条横切面曲线进行对比，因为子弹本身大小和形状的不同导致即使是出自相同枪支，其金属卷屑和刻痕的深浅也有很大差异。所以将两条剖面线比对时的最小二乘目标函数应该去除子弹本身的特征。

在将两条横切面曲线进行对比之前，可以进行人工的预处理，去除金属卷屑和阳膛线部分，保留阳膛线和次棱线的痕迹，裁剪出有用的特征区域，并对模型的参数进行微调。

4.4.2 特征提取模型

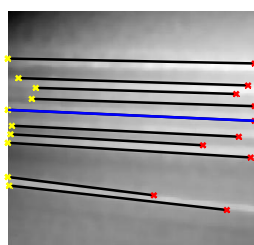
由图像的低频图可以看出，弹头的刻痕在子弹尾部均有部分发散，我们认为可能是有两个原因造成：枪管膛线经摩擦受热膨胀，所以在弹头上的刻痕在尾部会有轻微的扩张；测量过程中光学仪器离弹头和弹尾的距离不同，导致测量的数据稍有偏差。

Hough 变换是图像处理中用于提取直线型纹理的常用方法。为了更加准确的提取刻痕信息，我们首先用对降噪后的低频图进行 *hough* 变换提取弹头上的刻痕纹理线，从而得到仿射参数，然后对定位校准后的图像的特征图做仿射变换后再提取特征。

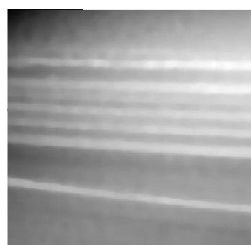
4.4.2.1 Hough 变换基本概念

对于二维图像上的一个点 (x_i, y_i) ，所有通过该点的直线均满足 $y_i = ax_i + b$ 。将该公式写为 $b = -ax_i + y_i$ 并考虑 ab 平面（也称为参数空间），可对一个固定点 (x_i, y_i) 产生单独的一条直线。此外，第二个点 (x_j, y_j) 也有这样一条在参数空间的直线与其相关，这条直线与 (x_i, y_i) 的相关直线相交于点 (a', b') ，其中 a' 和 b' 分别是 xy 平面上包含点 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) 的直线的斜率和截距。事实上，这条直线上的所有点都有在参数空间相交于点 (a', b') 的直线。

实际应用中，由于直线接近垂直方向时， a 的值接近无限大，为了避免这种情况，使用直线的标准表示法： $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$ 来构造参数空间。 $\rho\theta$ 面的每一条正弦曲线表示通过特定点 (x_i, y_i) 的一族直线，交点 (ρ', θ') 对应通过 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) 的直线。



图（13）



图（14）

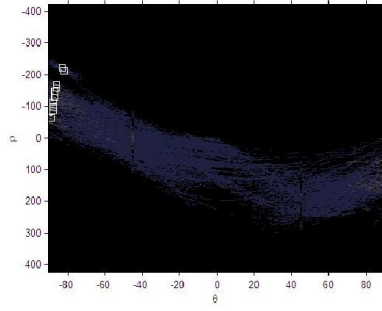


图 (15)

图(14)为降噪模块处理后的图像,对其进行 hough 变换,图(15)为该图在 $\rho\theta$ 参数空间的映射,图(15)中从左到右 10 个白色小方格表示的点分别对应图 1 中自下至上斜率依次变大的 10 条亮度最高的直线,也对应于图(14) hough 变换后绘出的自下至上的十条直线,图(13)中的直线中斜率最小的线和斜率最大的线与边框围成的四边形,其四个顶点坐标分别为 (x_{lu}, y_{lu}) , (x_{ru}, y_{ru}) , (x_{lb}, y_{lb}) , (x_{rb}, y_{rb}) 。

4.4.2.2 仿射变换

由 (x_{lu}, y_{lu}) , (x_{ru}, y_{ru}) , (x_{lb}, y_{lb}) , (x_{rb}, y_{rb}) 围成的特征区域图转换到顶点分别为 (x_{lu}, y_{ru}) , (x_{ru}, y_{ru}) , (x_{lb}, y_{rb}) , (x_{rb}, y_{rb}) 的矩形区域,八个点即可构成仿射变换的参数,从而将模块一输出的特征区域图转换为等宽的特征矩形图。如图(16)至图(21)所示。

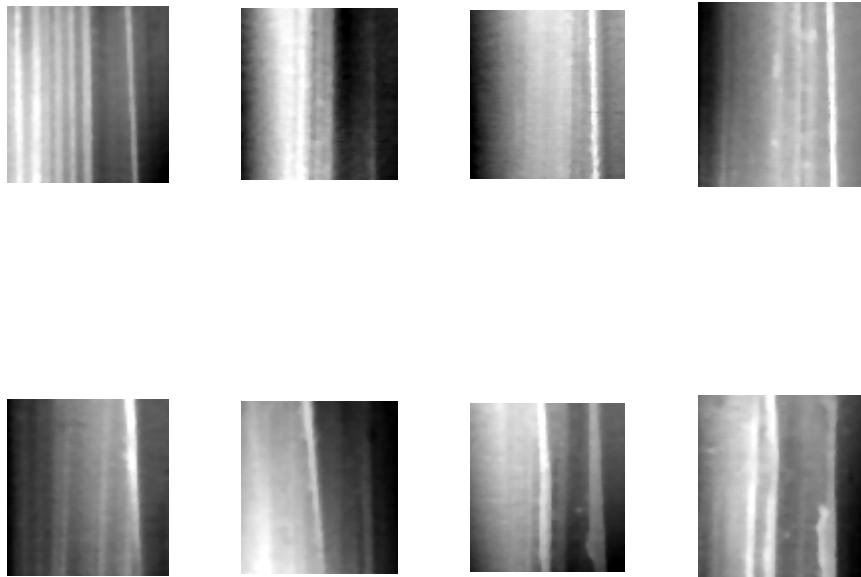
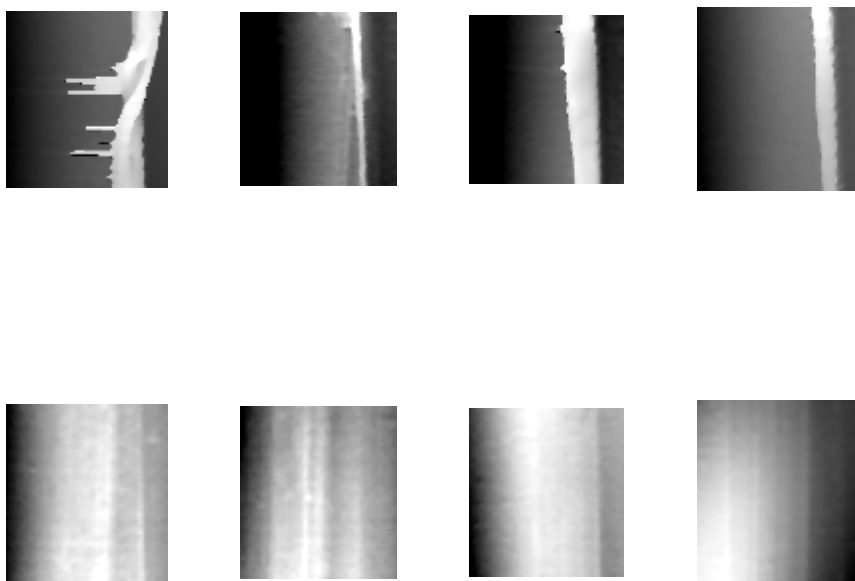
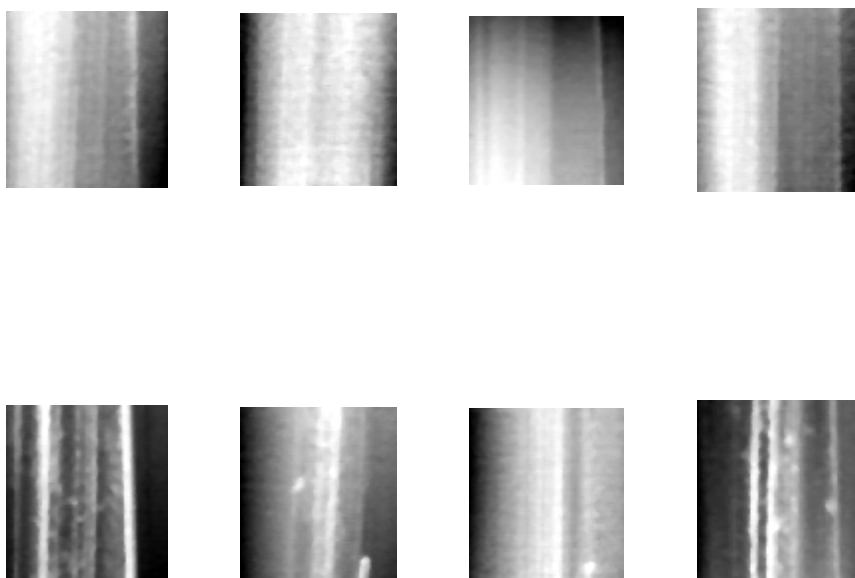


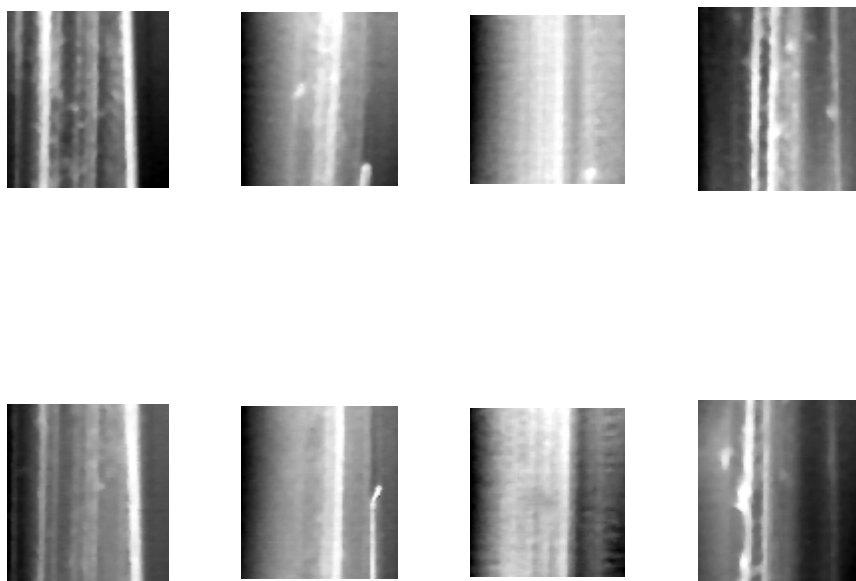
图 (16) 77T1-1203959 和 77T2-1203959 文件的裁剪、仿射变换示意图



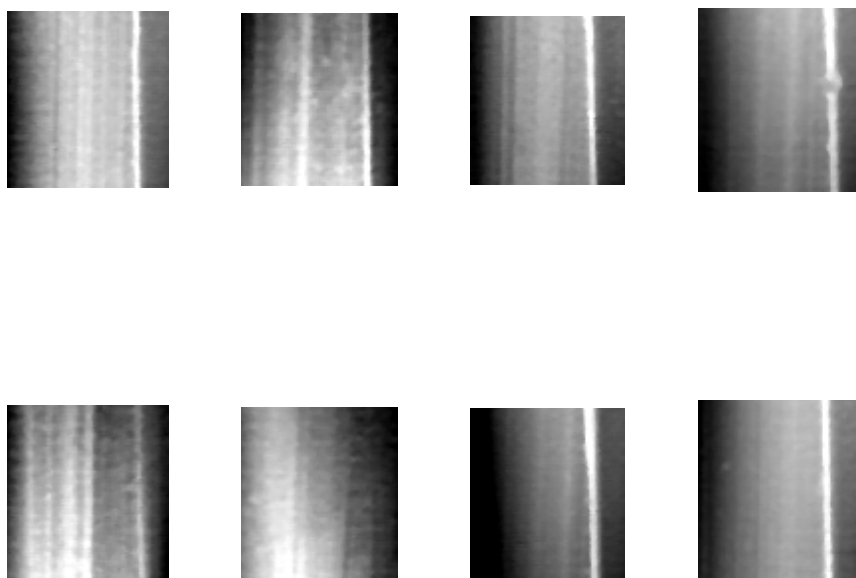
图（17）77T1-1504519 和 77T2-1504519 文件的裁剪、仿射变换示意图



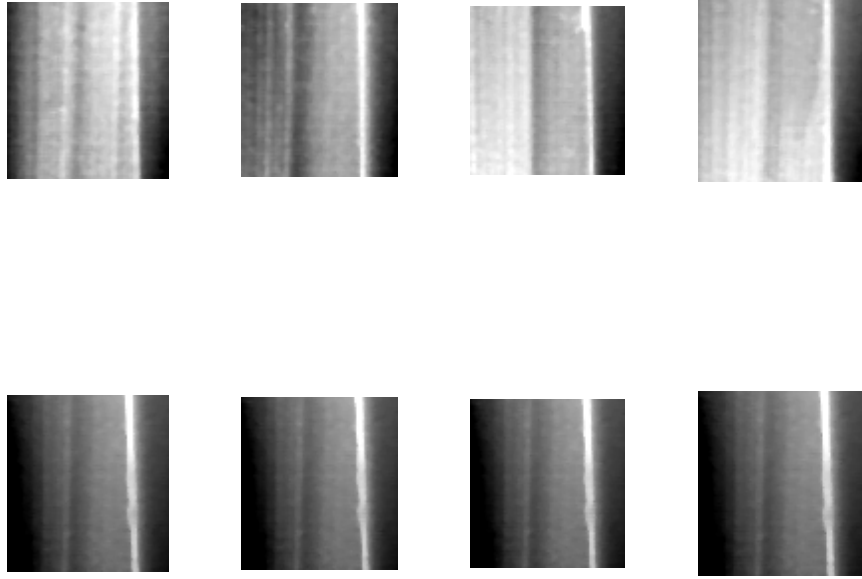
图（18）77T1-1811345 和 77T2-1811345 文件的裁剪、仿射变换示意图



图（19）77T1-1812492 和 77T2-1812492 文件的裁剪、仿射变换示意图



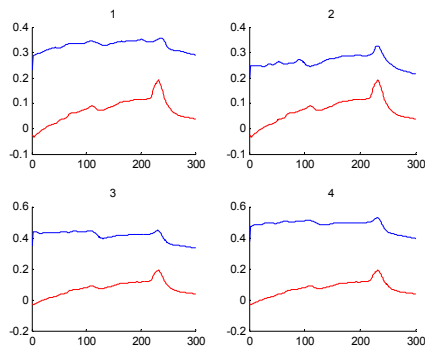
图（20）77T1-1923252 和 77T2-1923252 文件的裁剪、仿射变换示意图



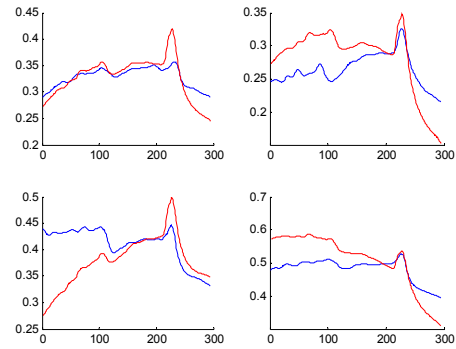
图（21）77T1-1928033 和 77T2-1928033 文件的裁剪、仿射变换示意图
对特征矩形图沿 y 轴方向取平均的过程，即是对图像沿纹理方向去噪的过程。令横切面曲线为 $\bar{L}(x)$ ，具体模型如下：

$$\bar{L}(x) = \sum_j L(x_i, y_j) / j \quad (12)$$

4.4.3 特征匹配模型



图（22）匹配前



图（23）匹配后

图（22）为 77T1-1928033 和 77T2-1928033 文件的弹痕横切面曲线匹配前的示意图。可以看出，曲线的脉络有明显的相似性，但还需要进行平移，旋转，缩放等变换，才能达到配准。图（23）为经过弹痕横切面曲线匹配后的示意图，经过特征匹配模型的配准，达到很大程度的相似性。

4.4.3.1 模型的建立

设 $\Delta x, \Delta z, \theta_{xoz}, h, g$ 为弹痕横切面曲线匹配模型的匹配参数。其中 $\Delta x, \Delta z$ 表

示曲线沿 x 轴、 z 轴方向的平移， θ_{xoz} 表示绕 y 轴的转动角度， h, g 表示幅度和宽度的缩放。对匹配参数进行调整，得到最小的曲线均方误差，则最小均方误差的值即为两条曲线的匹配度，而对所有 y 值的曲线匹配度取平均，即得到图像之间的匹配度。

设图像 $z_c(x, y)$ 和 $z_s(x, y)$ 之间的匹配度为 $MAT(z_s, z_c)$ ，具体模型如下：

$$MTA(z_s, z_c) = \min \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n (z_c(x_i, y_j) - z_s(x_i, y_j))^2 / n \right) / m \quad (13)$$

$$s.t. \begin{cases} -Lx \leq \Delta x \leq Lx \\ -Lz \leq \Delta z \leq Lz \\ -\delta xoz \leq \theta xoz \leq \delta xoz \\ g_1 \leq g \leq g_2 \\ h_1 \leq h \leq h_2 \end{cases}$$

4.4.3.2 模型的求解

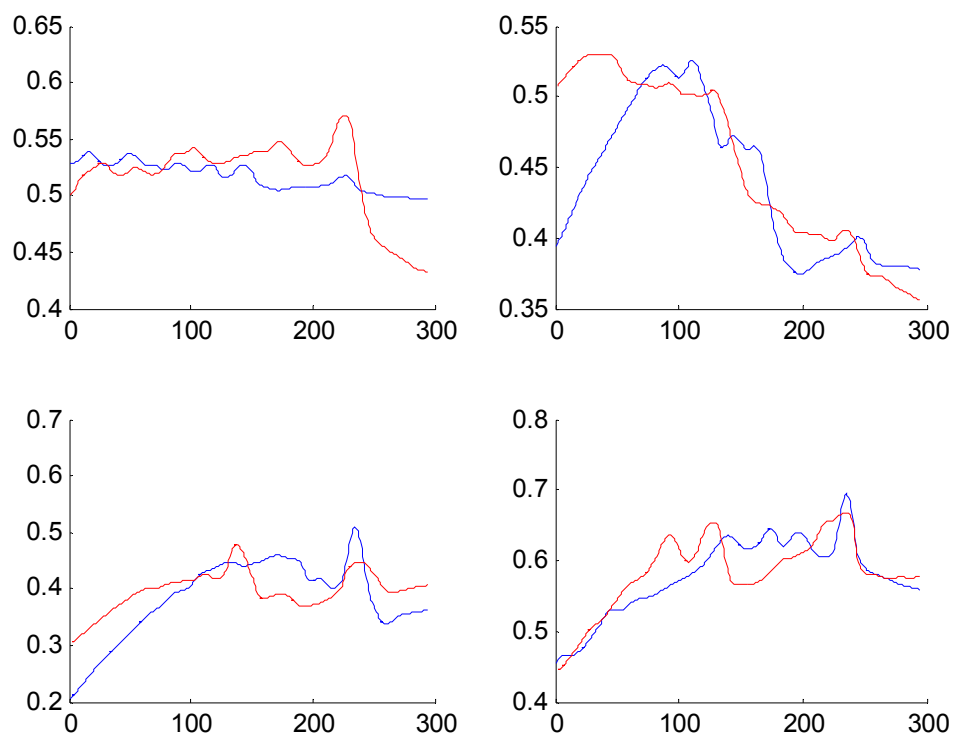
$\Delta x, \Delta z, \theta xoz, g, h$ 五个参数的取值范围分别为 $(-0.6\text{mm}, 0.6\text{mm})$ ， $(-0.6\text{mm}, 0.6\text{mm})$ ， $(-0.4^\circ, 0.4^\circ)$ ， $(0.5, 2)$ ， $(0.5, 2)$ 。算法在取值范围内穷举搜索，搜索步长分别为 0.00275mm ， 0.00275mm ， 0.04° ， 0.1 和 0.1

以图（12）为输入，算法得出的图像间匹配度如表（1）所示。

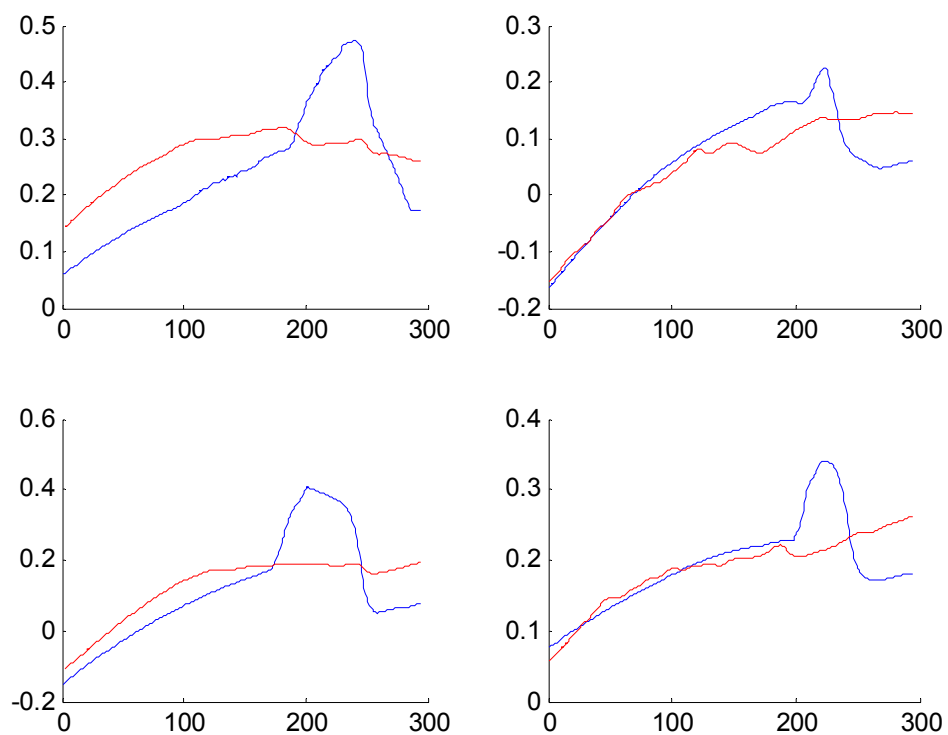
	77T1-1203959-C1	77T1-1203959-C2	77T1-1203959-C3	77T1-1203959-C4
77T2-1203959-C1	58.04	18.318	358.87	111.44
77T2-1203959-C2	170.05	103.75	301.43	111.32
77T2-1203959-C3	207.11	271.81	174.68	222.47
77T2-1203959-C4	46.117	116.19	416.18	76.151

表（1）

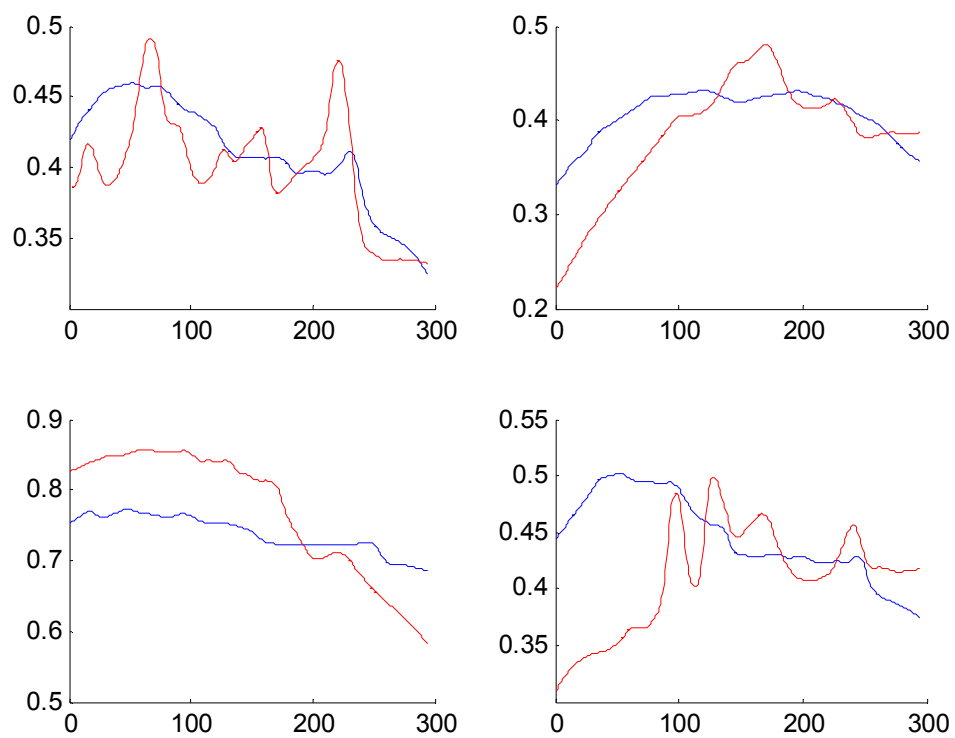
以图(16)至图(21)数据为输入，得到出自同一把枪的两子弹样本的弹痕横切面曲线匹配示意图，如图(24)至图(29)所示。



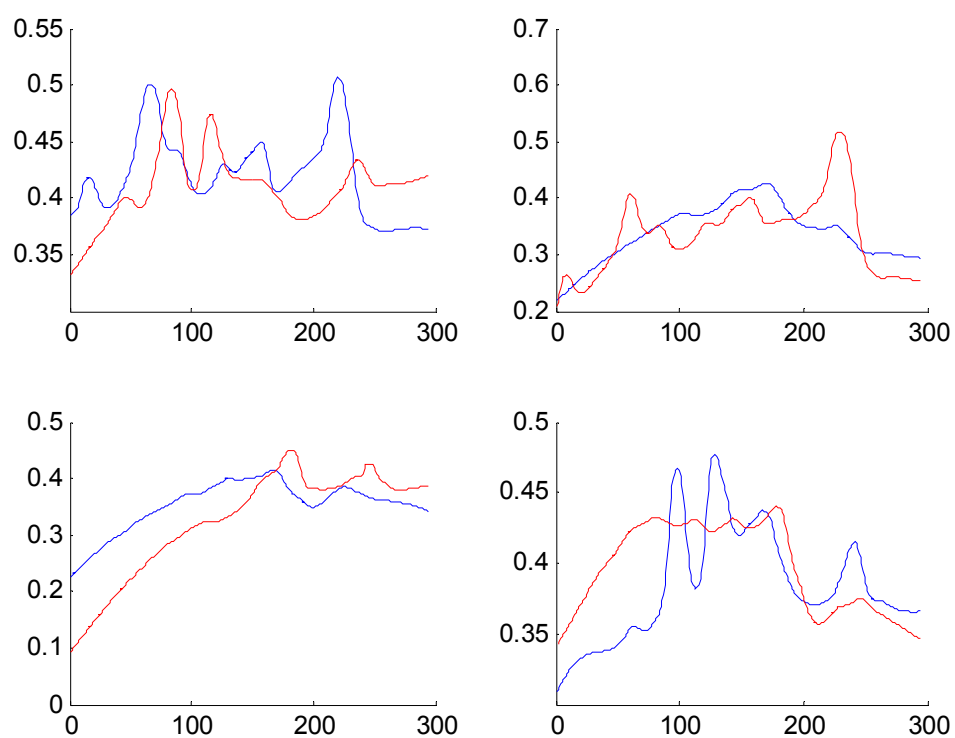
图（24）77T1-1203959 和 77T2-1203959 文件的弹痕横切面曲线匹配示意图



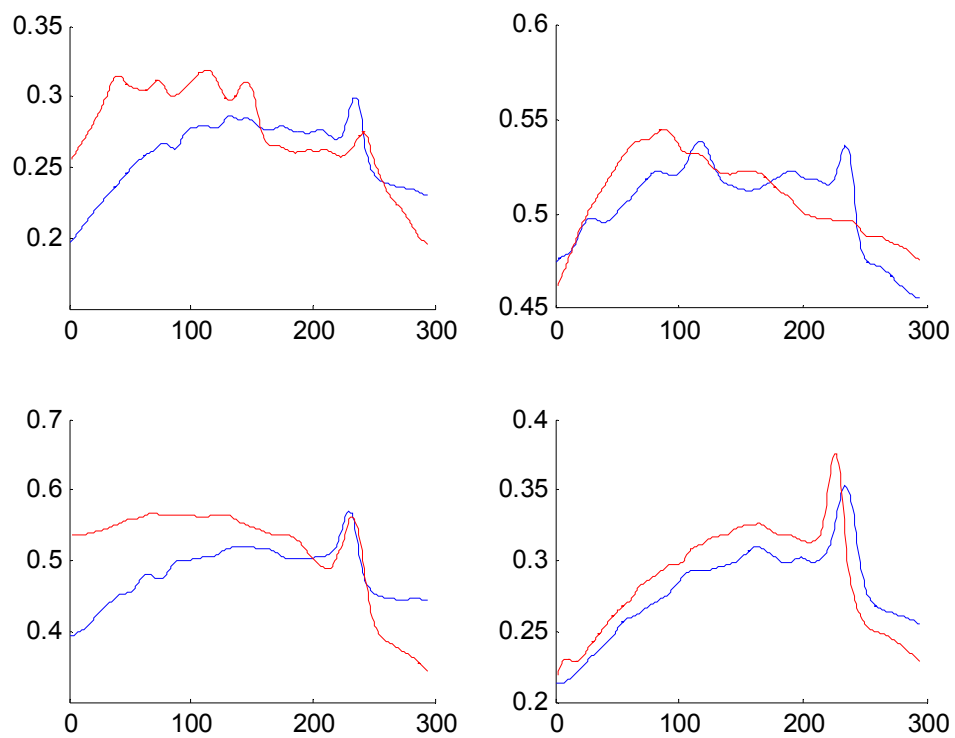
图（25）77T1-1504519 和 77T2-1504519 文件的弹痕横切面曲线匹配示意图



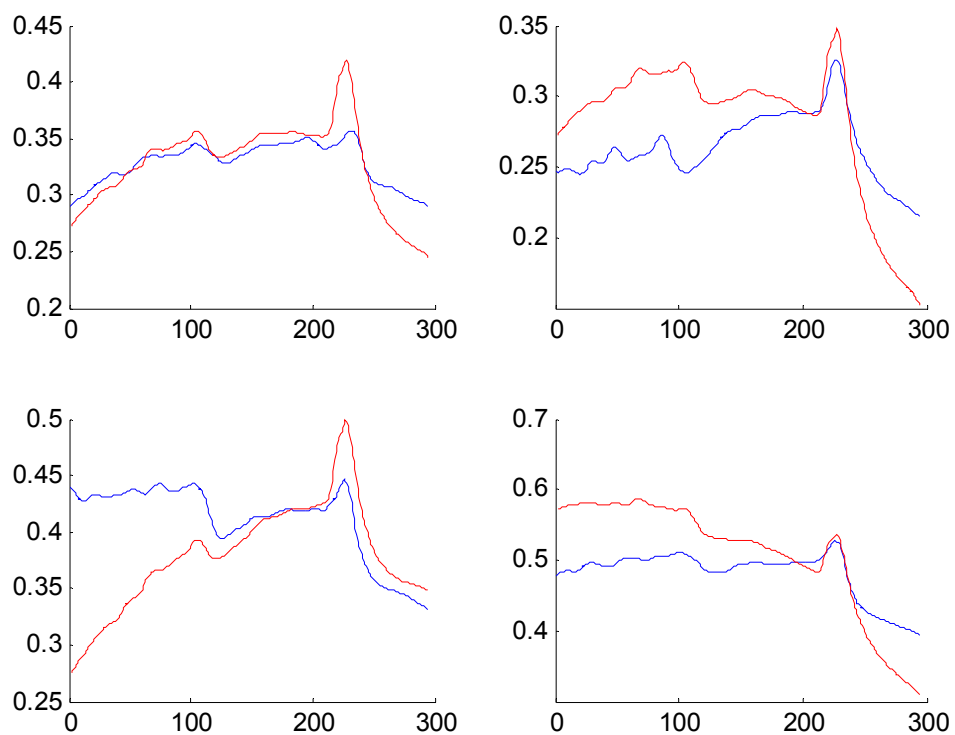
图（26）77T1-1811345 和 77T2-1811345 文件的弹痕横切面曲线匹配示意图



图（27）77T1-1812492 和 77T2-1812492 文件的弹痕横切面曲线匹配示意图



图（28）77T1-1923252 和 77T2-1923252 文件的弹痕横切面曲线匹配示意图



图（29）77T1-1928033 和 77T2-1928033 文件的弹痕横切面曲线匹配示意图

4.5 弹头的相似度模型

上述的弹痕横切面特征的匹配度模型解决了任意两个次棱数据间的匹配问题，但是对于问题 3 而言，文件中给出的 4 个次棱数据并不依编号对应。为了比对出两个弹头之间的相似程度，我们将一颗弹头 a 的 4 个次棱数据与另一颗弹头 b 的 4 个次棱数据分别对比，取出匹配度均值最小的一组，并将这个匹配度均值当做子弹 a, b 的相似度，记为 $SIM(a, b)$ 。

4.5.1 模型的建立

题目中提供的 4 条次棱数据，其顺序统一按照一个方向排序，那么两颗弹头的次棱对应方式只可能有四种。按照这四种对应方式，分别计算其匹配度均值：

$$\overline{MAT}_1 = \frac{1}{4}(MAT(c_1, c_1) + MAT(c_2, c_2) + MAT(c_3, c_3) + MAT(c_4, c_4))$$

$$\overline{MAT}_2 = \frac{1}{4}(MAT(c_1, c_2) + MAT(c_2, c_3) + MAT(c_3, c_4) + MAT(c_4, c_1))$$

$$\overline{MAT}_3 = \frac{1}{4}(MAT(c_1, c_3) + MAT(c_2, c_4) + MAT(c_3, c_1) + MAT(c_4, c_2))$$

$$\overline{MAT}_4 = \frac{1}{4}(MAT(c_1, c_4) + MAT(c_2, c_1) + MAT(c_3, c_2) + MAT(c_4, c_3))$$

那么，弹头 a, b 的相似度为

$$SIM(a, b) = \min(\overline{MAT}_1, \overline{MAT}_2, \overline{MAT}_3, \overline{MAT}_4) \quad (14)$$

4.5.2 模型的求解和性能检验

以图（18）至图（23）为输入，得出每一把手枪的两个弹头样本之间的相似度为如表（2）所示：

枪号	1203959	1504519	1811345	1812492	1923252	1928033
相似度	136.667	392.485	228.0778	177.293	55.494	29.238

表（2）

假设不知道哪两颗子弹出自于同一把手枪，弹痕识别模型对每两个弹头之间计算的相似度如表（3）所示。从中可以看出，相似度最小的 6 对弹头与真实出自同一把手枪的子弹对完全吻合。

文件号	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-120 \\ 3959 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-120 \\ 3959 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-150 \\ 4519 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-150 \\ 4519 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-181 \\ 1345 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-181 \\ 1345 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-181 \\ 2492 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-181 \\ 2492 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-192 \\ 3252 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-192 \\ 3252 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-192 \\ 8033 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-192 \\ 8033 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-120 \\ 3959 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 83 \\ .159 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 6.34 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 20 \\ 3.4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 18 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 18 \\ 5.36 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 15 \\ 8.12 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 13 \\ 6.3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 1.29 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 15 \\ 1.45 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 15 \\ 7.75 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 20 \\ 3.43 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-120 \\ 3959 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 83 \\ .159 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 21 \\ 6.28 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 24 \\ 2.27 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 22 \\ 5.52 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 23 \\ 5.63 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 20 \\ 0.12 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 8.67 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10 \\ 0.42 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 11 \\ 5.64 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 16 \\ 2.46 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 27 \\ 8.32 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 77 \\ T1-150 \\ 4519 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 6.34 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 21 \\ 6.28 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 12 \\ 0.6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 18 \\ 2.48 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 8.15 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 8.67 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 15 \\ 6.01 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 13 \\ 6.16 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 17 \\ 1.86 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 2.04 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 21 \\ 7.11 \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} 77 \\ T2-150 \\ 4519 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 20 \\ 3.4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 24 \\ 2.27 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 12 \\ 0.6 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 9.61 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 24 \\ 8.02 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10 \\ 0.42 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 13 \\ 6.16 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 26 \\ 0.17 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10 \\ 9.86 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 14 \\ 1.98 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 28 \\ 6.98 \end{smallmatrix}$

⁷⁷ T1-181 1345	¹⁸ 3	²² 5.52	¹⁸ 2.48	¹⁴ 9.61	⁰ 0	¹⁰ 9.86	¹¹ 5.64	¹⁷ 1.86	¹¹ 4.67	²⁰ 5.74	¹² 8.51	²⁵ 2.33
⁷⁷ T2-181 1345	¹⁸ 5.36	²³ 5.63	¹⁴ 8.15	²⁴ 8.02	¹⁰ 9.86	⁰ 0	¹⁶ 2.46	¹⁴ 2.04	¹⁴ 1.98	¹² 8.51	¹⁸ 9.36	²¹ 6.15
⁷⁷ T1-181 2492	¹⁵ 8.12	²⁰ 0.12	¹⁴ 8.67	¹⁰ 0.42	¹¹ 5.64	¹⁶ 2.46	⁰ 0	²¹ 7.11	²⁸ 6.98	²⁵ 2.33	²¹ 6.15	²⁸ 0.97
⁷⁷ T2-181 2492	¹³ 6.3	¹⁴ 8.67	¹⁵ 6.01	¹³ 6.16	¹⁷ 1.86	¹⁴ 2.04	²¹ 7.11	⁰ 0	²³ 0.96	²⁶ 9.48	²⁸ 4.31	³⁰ 1.15
⁷⁷ T1-192 3252	¹⁴ 1.29	¹⁰ 0.42	¹³ 6.16	²⁶ 0.17	¹¹ 4.67	¹⁴ 1.98	²⁸ 6.98	²³ 0.96	⁰ 0	¹² 0.41	¹⁸ 0.94	²⁵ 0.11
⁷⁷ T2-192 3252	¹⁵ 1.45	¹¹ 5.64	¹⁷ 1.86	¹⁰ 9.86	²⁰ 5.74	¹² 8.51	²⁵ 2.33	²⁶ 9.48	¹² 0.41	⁰ 0	²³ 1.51	²⁹ 8.35
⁷⁷ T1-192 8033	¹⁵ 7.75	¹⁶ 2.46	¹⁴ 2.04	¹⁴ 1.98	¹² 8.51	¹⁸ 9.36	²¹ 6.15	²⁸ 4.31	¹⁸ 0.94	²³ 1.51	⁰ 0	¹⁸ 0.51
⁷⁷ T2-192 8033	²⁰ 3.43	²⁷ 8.32	²¹ 7.11	²⁸ 6.98	²⁵ 2.33	²¹ 6.15	²⁸ 0.97	³⁰ 1.15	²⁵ 0.11	²⁹ 8.35	¹⁸ 0.51	⁰ 0

表（3）

5. 基于小波变换的弹痕识别模型对问题 4 的解决

问题 4 是对本文提出的基于小波变换的弹痕识别模型的应用。依题目要求，22 个弹头痕迹两两之间的相似度列表见附录 1；表（4）给出了与每个弹头最相似的前 5 为弹头文件号。

弹头文件号	最相似的前五个弹头文件号				
t1	t09	t06	t21	t05	t14
t2	t10	t13	t18	t15	t09
t3	t07	t17	t05	t14	t22
t4	t10	t22	t21	t16	t09
t5	t08	t03	t22	t11	t16
t6	t21	t14	t09	t01	t04
t7	t03	t22	t21	t17	t11
t8	t16	t11	t05	t22	t17
t9	t21	t06	t16	t01	t22
t10	t04	t11	t16	t15	t17
t11	t17	t20	t22	t08	t16
t12	t21	t15	t16	t17	t22
t13	t14	20	t03	t05	t10
t14	t03	t13	t06	t16	t05
t15	t10	t22	t12	t16	t13
t16	t22	t08	t11	t05	t20
t17	t11	t20	t03	t22	t08
t18	t17	t09	t16	t15	t11
t19	t01	t22	t10	t09	t13
t20	t17	t11	t22	t16	t08

t21	t09	t03	t06	t04	t07
t22	t16	t11	t08	t17	t05

表 (4)

6. 模型的评价

6.1 模型的优点:

(1) 本文提出的基于小波变换的弹痕识别模型, 综合考虑了问题 1、2、3 的要求, 结合弹头痕迹的多种特征, 较好解决了本题提出的所有问题。

(2) 本文将 3 维空间的匹配问题转化为二维灰度图像的处理与匹配, 对问题进行了简化。

(3) 本文给出的基于小波变换的弹痕识别模型具有普适性, 可以用于很多识别问题的求解。

6.2 模型的缺点:

模型中金属卷屑部分的特征需要手工去除, 没有实现系统的完全自动化。

参考文献

- [1] 韩中庚, 数学建模方法及其应用, 北京: 高等教育出版社, 2005
- [2] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods, Digital Image Processing Second Edition, 北京: 电子工业出版社, 2008
- [3] 孙延奎, 小波分析及其应用, 北京: 机械工业出版社, 2005
- [4] 张贤达, 现代信号处理, 北京: 清华大学出版社, 2008
- [5] 张德丰, MATLAB 小波分析, 北京: 机械工业出版社, 2009
- [6] 李弼程、邵美珍、黄洁, 模式识别原理与应用, 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005
- [7] 曾文涵、郭军、谢铁邦、蒋向前, 弹头发射痕迹计算机识别系统的研制, 华中科技大学学报, 第 30 卷第 6 期, 2002 年
- [8] 林晓梅、李琳娜、牛刚、杨晓红, 基于小波边缘检测的图像去噪方法, 光学精密工程, 第 12 卷第 1 期, 2004 年
- [9] 贾云得. 机器视觉[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 97~ 100.
- [10] 沈兵. 基于密切曲率法自由曲面数控加工软件 o s COMC 系统的研制[D]. 西安: 西安交通大学, 1999

附录 1 问题 4(1) 结果——22 个弹头两两之间的相似度.

相似度											
序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	196.2 4	144.6 3	228.0 9	136.8 3	120.0 3	168.3 9	220.3 9	113.1 3	144.6 1	196.7 7
2	196.2 4	0	217.6 1	243.1 8	184.8 2	231.7 4	235.1 7	213.8 8	177.2 1	107.6 6	206
3	144.6 3	217.6 1	0	182.7	77.04 5	181.3 7	55.68 2	136.7 4	144.4 9	186.9 7	123.4 4
4	228.0 9	243.1 8	182.7	0	130.3 4	144.6	142.2	135.0 4	124.7 1	68.43 1	130.8 6
5	136.8 3	184.8 2	77.04 5	130.3 4	0	160.2 1	149.5	75.10 6	178.3	168.6 5	92.20 5
6	120.0 3	231.7 4	181.3 7	144.6	160.2 1	0	178.8 5	220.0 6	104.9 2	225.6 8	168.0 2
7	168.3 9	235.1 7	55.68 2	142.2	149.5	178.8 5	0	141.2 1	132.3 7	217.6 2	121.4 6
8	220.3 9	213.8 8	136.7 4	135.0 4	75.10 6	220.0 6	141.2 1	0	276.0 2	121.4 8	74.92 2
9	113.1 3	177.2 1	144.4 9	124.7 1	178.3	104.9 2	132.3 7	276.0 2	0	241.4	163.4 7
10	144.6 1	107.6 6	186.9 7	68.43 1	168.6 5	225.6 8	217.6 2	121.4 8	241.4	0	95.08 6
11	196.7 7	206	123.4 4	130.8 6	92.20 5	168.0 2	121.4 6	74.92 2	163.4 7	95.08 6	0
12	188.7 1	228.2 2	164.6 1	196.9 1	177.2 5	179.5	179.2 2	206.0 5	166.7	165.6	170.4 4
13	170.9 1	168.4 8	119.0 9	125.5 5	119.8 4	259.9 2	161	139.7 1	230.3 9	123.3 1	139.1
14	142.1 2	230.7 2	80.12 6	124.9 3	105.1 5	94.75 1	137.4 6	112.2	138.3 5	107.9	113.2
15	190.1 4	172.5 6	148.8 2	144.7 6	180.3 5	198.5 3	144.5 7	147.2 6	179.6 5	103.7 9	147.5 2
16	161.4 5	263.2 3	110.3 5	110.2 3	93.97 6	157.9 8	127.3 3	62.93 1	105.7 4	99.09 6	85.74 3
17	159.1 7	232.2 8	69.01 4	136.7 7	105.6 3	185.5	113.9 2	90.43 2	227.3 5	107.1 1	56.29 1
18	176.9	168.6 5	160.3 8	194.1 6	187.8 5	178.8 3	215.6 6	214.7 8	138.5 8	183.1 5	155.4 4
19	189.9 5	221.1 6	284.8 5	225.7 3	206.6 2	260.2 2	305.5 1	254.2	202.9 2	194.5	218.6 1
20	246.2 7	240.3 2	143.7 1	155.0 8	103.4 8	259.3 3	133.9 8	96.71 1	199.9 3	158.8 5	60.73 6
21	127.9 4	259.1 4	89.20 8	106.5 5	183.3	94.22 2	111.8 5	243.4 2	70.14 1	228.4 8	173.1 1
22	250.8 3	238.3 9	85.89 3	85.09 7	78.17 8	157.7 2	95.70 1	76.23 9	122.8	120.5 1	70.86 2

相似度											
序号	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	188.71	170.91	142.12	190.14	161.45	159.17	176.9	189.95	246.27	127.94	250.83
2	228.22	168.48	230.72	172.56	263.23	232.28	168.65	221.16	240.32	259.14	238.39
3	164.61	119.09	80.126	148.82	110.35	69.014	160.38	284.85	143.71	89.208	85.893
4	196.91	125.55	124.93	144.76	110.23	136.77	194.16	225.73	155.08	106.55	85.097

5	177.25	119.84	105.15	180.35	93.976	105.63	187.85	206.62	103.48	183.3	78.178
6	179.5	259.92	94.751	198.53	157.98	185.5	178.83	260.22	259.33	94.222	157.72
7	179.22	161	137.46	144.57	127.33	113.92	215.66	305.51	133.98	111.85	95.701
8	206.05	139.71	112.2	147.26	62.931	90.432	214.78	254.2	96.711	243.42	76.239
9	166.7	230.39	138.35	179.65	105.74	227.35	138.58	202.92	199.93	70.141	122.8
10	165.6	123.31	107.9	103.79	99.096	107.11	183.15	194.5	158.85	228.48	120.51
11	170.44	139.1	113.2	147.52	85.743	56.291	155.44	218.61	60.736	173.11	70.862
12	0	160.75	154.32	129.62	136.01	139.69	163.37	203.72	165.58	124.74	147.79
13	160.75	0	83.159	136.3	141.29	151.45	157.75	203.43	106.92	190.45	170.38
14	154.32	83.159	0	148.67	100.42	115.64	162.46	278.32	135.47	138.72	113.41
15	129.62	136.3	148.67	0	136.16	171.86	142.04	217.11	186.05	167.39	124.73
16	136.01	141.29	100.42	136.16	0	109.86	141.98	286.98	94.681	220.61	60.966
17	139.69	151.45	115.64	171.86	109.86	0	128.51	252.33	59.821	210.57	76.86
18	163.37	157.75	162.46	142.04	141.98	128.51	0	216.15	283.83	162.56	192.51
19	203.72	203.43	278.32	217.11	286.98	252.33	216.15	0	249.13	314.75	192.86
20	165.58	106.92	135.47	186.05	94.681	59.821	283.83	249.13	0	207.53	79.049
21	124.74	190.45	138.72	167.39	220.61	210.57	162.56	314.75	207.53	0	124.51
22	147.79	170.38	113.41	124.73	60.966	76.86	192.51	192.86	79.049	124.51	0

