

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学 校	华北电力大学（保定）
参赛队号	10079005
队员姓名	1. 王志兰
	2. 杨磊
	3. 刘杰

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 基于光的波粒二象性一种猜想的数学仿真

摘 要:

本文在光的干涉、衍射等实验现象和前人对光本质认识的基础上,提出了三种光的传播模型,分别对光的传播规律进行了解释,并以 MATLAB 为工具进行数学仿真,给出了单缝衍射中衍射缝的尺寸以及光子模型中的尺度、频率等参数对衍射屏上光强的空间分布形式的影响,并与《光学原理》中的结果作了比较。

模型一认为光子是以振轴为基准按正弦规律振动着向前传播,当光子通过孔或缝时,靠近孔或缝边缘的光子就会受到边缘影响,进而产生了衍射和干涉。给出了光子通过细缝后方向偏转角概率密度分布,用复合梯形的数值积分方法进行了单缝衍射的数学实验,光强包络线与《光学原理》中给出的光强分布一致。

模型二在龚祖同院士的猜想基础上,建立了一个与氢原子构造类似的光子模型,并分析了此模型产生的电场相量和磁场相量。基于该模型进行了数学仿真,并给出了衍射图样及缝宽对衍射图样空间分布的影响,结果与实际情况相符。

模型三在光波与传统机械波作对比的基础上,把光波看作以光子为传播介质的广义机械波,通过与经典波动方程的类比,得到光子的振动方程,并引进光子的概率模型,通过对单缝衍射中线光子的积分求出光在屏幕上某点的光强,最后得出单缝衍射的光强图,结果与实际情况近似相符。

关键词: 衍射; 干涉; 光子; 波粒二象性; 振动

1 模型一

1.1 前言

光通常是按直线传播的，为什么光经过细缝后前进方向会发生改变？为什么必须是光通过很窄的细缝才会使前进方向发生改变？本模型对以上问题做出了创新性的大胆猜想，回答了这个问题，按照猜想建立了数学模型，并以 MATLAB 为工具进行数学仿真，来验证模型的正确性。数学仿真结果与实际结果很相近或者说是基本相同，这表明所做的猜想能够在一定程度上正确反映实际物理现象。

1.2 一种新的基于光的波粒二象性的猜想

建立猜想的过程如图 1.2.1 所示：

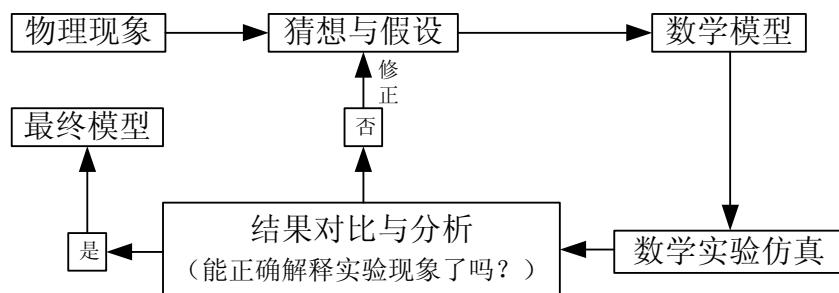


图 1.2.1 基于光的波粒二象性的模型猜想过程

我们对于光的波粒二象性猜想的具体描述如下：

光是一种携带能量的物质粒子。光子是以图 1.2.2 所示的方式沿某直线传播的，图中有方向的直线叫振轴，光子以振轴为基准按正弦规律振动着向前传播，且光子只能在过振轴的某个平面内振动。所有光子的传播速度都相同，但是频率可以不同，也就有了不同波长的光。光的亮暗取决于振幅的大小。振幅可叠加。

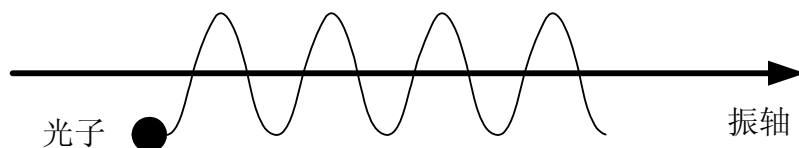


图 1.2.2 光的传播方式示意图

如图 1.2.3 所示，现在有一束光，它是由同一光源发出的，所以可以认为这束光由无数条单一频率的光线组成，所有光子都沿相互平行的振轴向前传播。振动平面是过振轴的任意平面，且向各方向是等概率的。

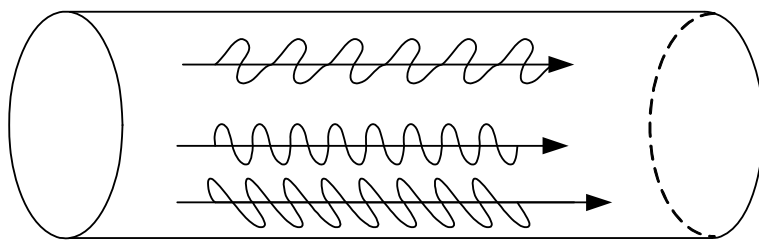


图 1.2.3 光束示意图

光具有稠密性，如图 1.2.3 所示光束中，沿同一振轴向同一方向传播的两个光子间总还有无穷多个光子，换句话说，沿同一振轴向同一方向传播的两个相邻光子的轴向距离无穷小。

光不受其他物质影响时，按直线传播，而当周围存在物质时，其传播方向受到影响。不同介质对光传播的影响也不一样，如光可以在某些介质中传播，可能发生反射和折射使振轴方向突然改变，频率和振幅也可能改变。光在通过小孔或细缝时，会受到小孔或细缝边缘的影响而改变原来光子的状态。例如，光子可能打在孔或缝的边缘上直接被边缘吸收，或者与边缘发生碰撞或被边缘弹开，这时前进方向会发生改变。对于衍射现象，只有在孔或缝的边缘很小或很窄时才能清楚地显现出来，如果缝比较宽，则与小孔或细缝边缘发生碰撞的光子的比例就会大大减少，直至几乎看不出来衍射。

根据上述对光的直线传播，以及光子的衍射、双缝干涉的猜想，通过建立数学模型进行验证。

1.3 衍射模型的建立

设有一束平行光打在一个单缝上，然后在后面的屏上计算光通过这一狭缝在屏上所呈现的图样，如图 1.3.1 所示。设狭缝到屏的距离为 D 。

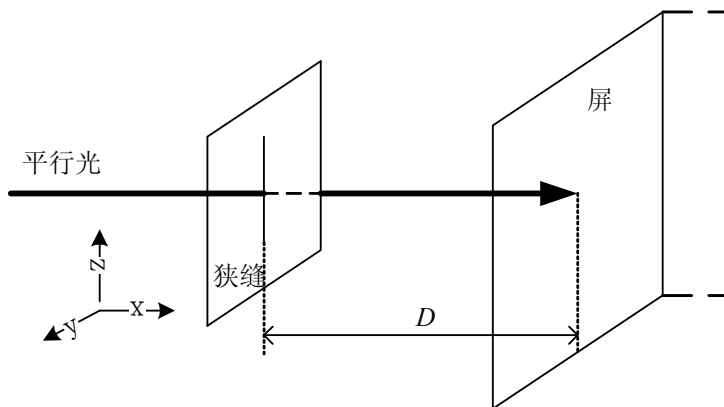


图 1.3.1 衍射示意图

设狭缝的宽和长分别为 a 和 b ，如图 1.3.2 所示。由于 $a \ll b$ ，所以不考虑上下底边对光子的影响，只考虑两个侧边对光子运动的影响。这样，在与 z 轴平行的方向上，屏上的衍射图样不会变化，因而可只计算缝上中心处在屏上的衍射图样。

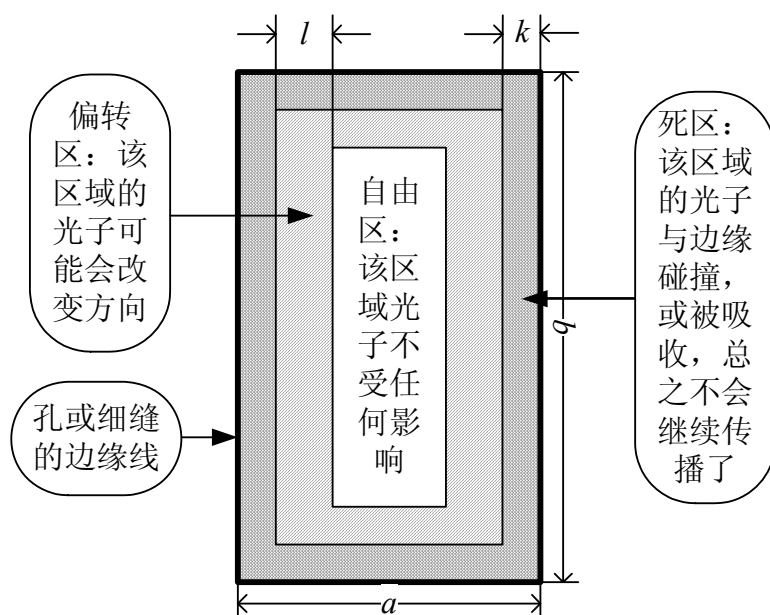


图 1.3.2 光子通过细缝不同区域所受影响示意图

在与缝的边缘相距为 k 的区域, 光子只要从这个区域通过, 就认为光子被吸收或被弹回, 即光子只要落入此区, 就对衍射图样没有任何贡献, 这一区域叫死区。与死区相距为 l 的区域叫转向区, 落入这一区域的光子在通过缝后方向会发生改变; 剩下的区域为自由区, 从这一区域穿过的光子不受到任何影响, 依然按原来的方向直线传播, 就像没有细缝一样。通常 k 比 l 要小得多, 且对于同一个缝来讲, k 为一个固定值。

那么当光子通过偏转区时, 它的方向和原来的方向相比会怎样变化呢? 如图 1.3.3 所示, 光子通过偏转区后相对一原方向的偏转角为 θ , 规定向左偏为正, 则 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ 。其概率密度用下面的式 (1.3.1) 表示, 见图 1.3.4。

$$p(\theta) = \begin{cases} 0.068914 \exp\left(-\frac{\theta^2}{67.025}\right), & -90^\circ < \theta < 90^\circ \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

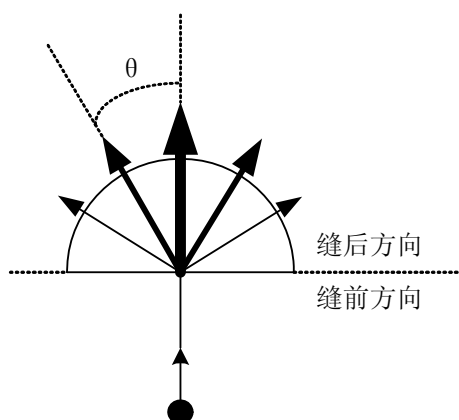


图 1.3.3 落入偏转区的光子偏转方向示意图

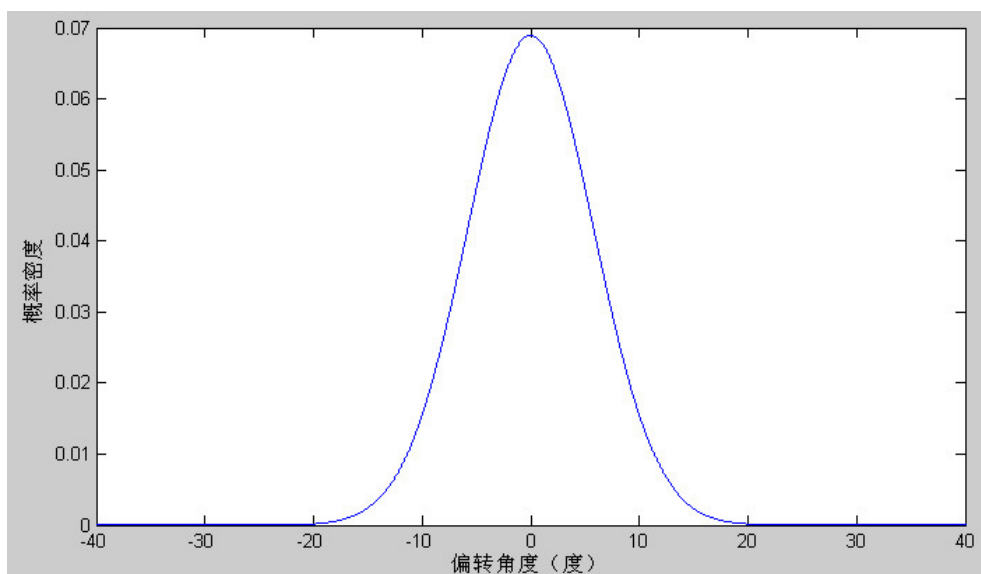


图 1.3.4 光子偏转概率密度

知道了细缝对光子的影响情况后，就可以计算衍射图形了，如图 1.3.5 建立坐标系：

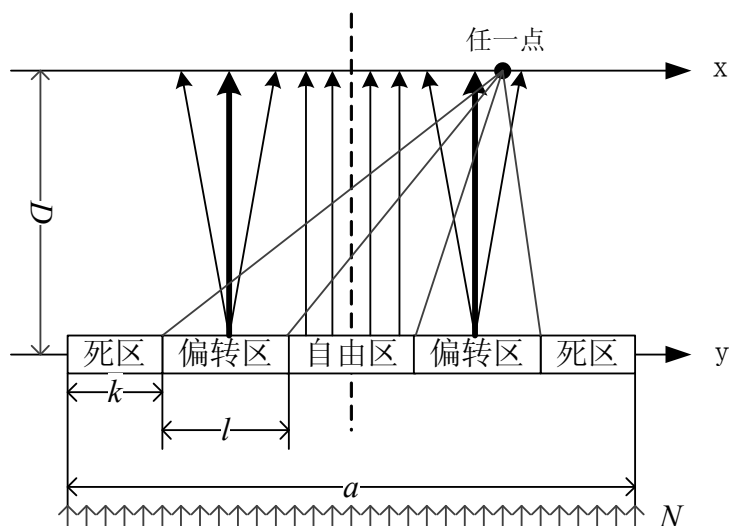


图 1.3.5 衍射图样计算示意图

由于衍射图样关于中心轴对称，所以只需计算一半长度即可。设所有光子到达狭缝时的相位均相同（不妨设为 0），且振动面平行于细缝，如图 1.3.6 所示。设入射的光子数的线密度为 N （个/米）。由于光的稠密性，所以 N 很大，可认为趋于正无穷。

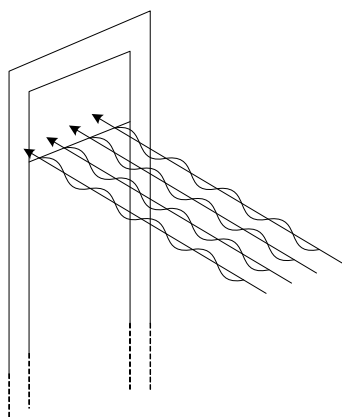


图 1.3.6 光线到达细缝时具有相同相位

在 x 轴上任取一点，计算某行光线经过细缝后照射到该点时的合成振幅。如果这点不在自由区正对方向，则合成振幅为

$$F(x) = \int_{-\frac{a}{2}+k}^{-\frac{a}{2}+k+l} Af(\theta)Ndy + \int_{\frac{a}{2}-k-l}^{\frac{a}{2}-k} Af(\theta)Ndy \quad (1.3.2)$$

其中

$$A = \sin(2\pi \frac{L}{\lambda}) \quad (1.3.3)$$

$$L = \sqrt{(x-y)^2 + D^2} \quad (1.3.4)$$

$$\theta = \arctan(\frac{|x-y|}{D}) \quad (1.3.5)$$

设光速为 c ，频率为 f ，光的波长为 λ ，则有

$$\lambda f = c \quad (1.3.6)$$

当 $2k < a \leq 2(k+l)$ 时，自由区长度为 0。如当 $a = 2(k+l)$ 时，式 (1.3.2) 变为

$$F(x) = \int_{-\frac{a}{2}+k}^{\frac{a}{2}-k} Af(\theta)Ndy \quad (1.3.7)$$

由于光的强度正比于振幅的平方，于是便可由式 (1.3.7) 得到光强度随坐标 x 的分布。

用 MATLAB 编程进行仿真，用复合梯形法求数值积分，程序见附件 1。各参数如下表：

参数	c	f	D	a	k	l
取值	3e8	5e14	1	5e-5	1e-6	2.4e-5

得到结果后归一化，如下图所示：

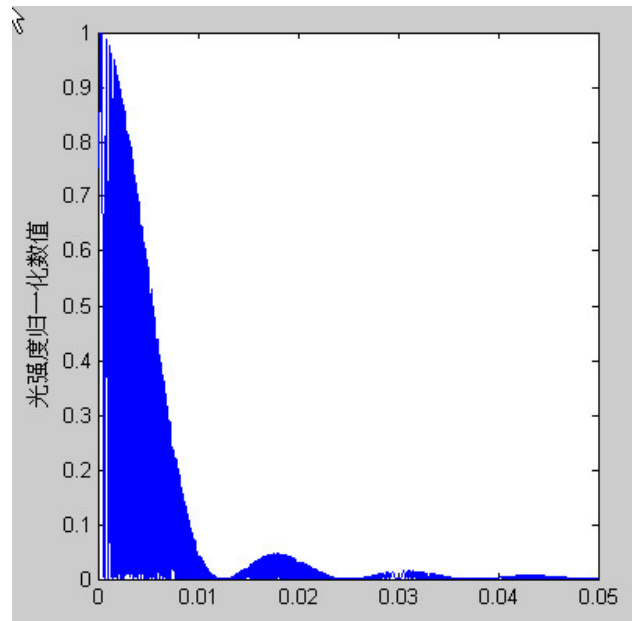


图 1.3.7 单缝衍射归一化光强度分布

可以看出，包络线显示的为光的归一化强度，该结果与诺贝尔物理奖获得者玻恩的光学经典名著《光学原理》中的光的衍射的强度近似公式相比较，结果是一致的。

2 模型二

2.1 问题重述

我国已故龚祖同院士猜想，光子并非仅是一个质点，其构造可能与氢原子类似，最简单的形式是由一个负电荷和一个与其等量的正电荷组成，负电荷在一个球形的轨道上围绕正电荷旋转。因此光线通过一个小孔或一条细缝时，如果其中一个电荷与小孔或狭缝边沿发生弹性碰撞或非弹性碰撞或被边缘吸引，光子的运动方向就会改变（在微观情况下遮挡物也不再可以视为平面），由此产生衍射。如果缝比较宽，则与小孔或细缝边缘发生碰撞的光子比例就会大大减少，直至几乎看不出来衍射。

现在要建立仿真这些猜想的数学模型，例如：单缝衍射中衍射缝的尺寸以及光子模型中的尺度、频率等参数对衍射屏上光强的空间分布形式的影响；双缝干涉试验中两条缝之间的距离、缝的宽度与干涉光图样的光强空间分布形式的关系等，并将得到的结果与诺贝尔物理奖获得者玻恩的光学经典名著《光学原理》中的光的衍射、双缝干涉、多缝干涉的强度近似公式进行比较。

2.2 模型假设

1. 光子与小孔或细缝边缘发生的碰撞为弹性碰撞，碰撞后光子不发生能级跃迁。
2. 入射光为平行光。
3. 模型中假设接收屏位于狭缝的无限远处，即采用夫琅禾费法。
4. 空气的电导率很小，可假设为理想介质，即没有电磁能量的损耗。
5. 模型中的正负电荷的质量相等。

2.3 符号说明

r : 光子模型的半径, 即光子模型中正负电荷的间距

a : 衍射缝的宽度

θ : 衍射角

D : 狭缝到接收屏的距离

E : 正负电荷产生的电场强度

H : 正负电荷产生的磁场强度

2.4 模型建立

光子模型:

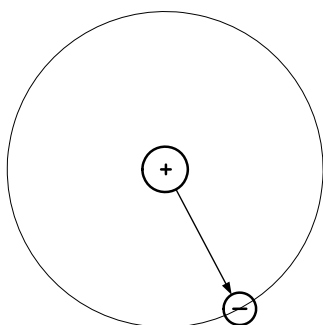


图 2.4.1 光子模型

光子由正负电荷组成, 正电荷位于中央, 负电荷在正电荷外围的一个球面上旋转运动, 在最接近正电荷的轨道处, 负电荷绕正电荷旋转的线速度为 $u=0.007c$, 因此, 可以认为, 负电荷和正电荷以相同速度 c 向前运动。综合考虑, 由于正负电荷之间的静电力对两个电荷存在束缚, 所以负电荷做的是螺旋运动, 在向前运动的同时旋转运动, 如图 2.4.2:

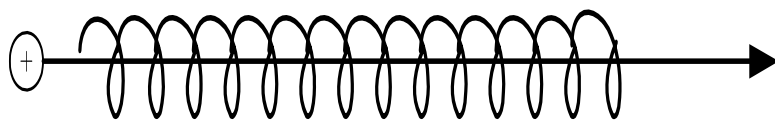


图 2.4.2 光子运动模型

我们所建的模型中, 负电荷在随正电荷沿 z 轴正方向运动的同时, 还在围绕正电荷的球形轨道中旋转运动, 所以, 正负电荷产生的电场具有两个相互垂直的振动分量, 其轨迹与平头螺丝钉的螺纹相似, 任一螺丝钉螺纹的旋转方向是固定不变的, 而按照龚院士的猜想, 电场方向是不固定, 若观察者迎着波传播来的方向看去, 电场矢量的端点时而作顺时针旋转, 时而作逆时针旋转, 但其横断面是一个圆, 为使模型简单, 我们假设负电荷围绕正电荷的球形轨道位于一个与 xOy 平面平行的平面内, 如图 2.4.3 所示。

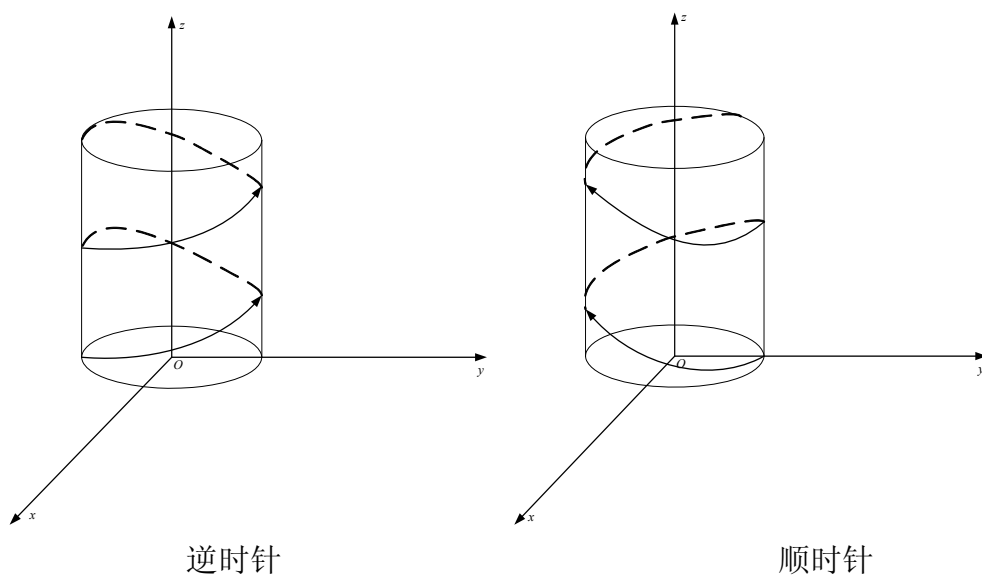


图 2.4.3 两种光子的运动模型

正负电荷之间形成一个由正电荷指向负电荷的电场强度 E , 如图 2.4.4 所示。

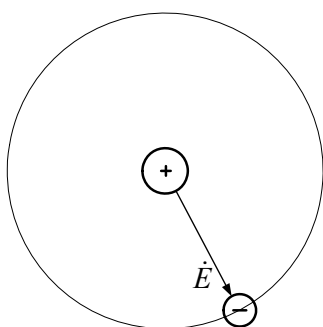


图 2.4.4

正负电荷在电场力的作用下相互吸引，负电荷在正电荷的库伦场内运动，处于束缚状态。这两个电荷以相同的速度向前运动，电荷的移动形成电流，正电荷产生的电流方向与其运动方向相同，负电荷产生的电荷方向与其运动方向相同。根据奥斯特的电流磁效应，所以会有磁场产生，根据右手定则，二者产生的磁场是相互叠加的，没有抵消，所以光是一种磁场，如图 2.4.5：

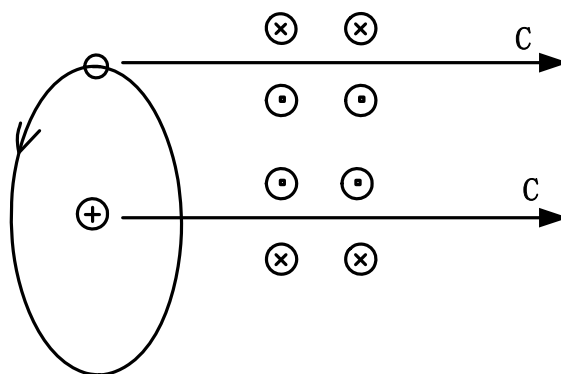


图 2.4.5 光子的电磁场分布

这两个电荷产生的电场和磁场是相互垂直的，且都与光子的运动方向垂直，

假设相量矢量 \dot{E} 和 \dot{H} 的有效值也相等，某一时刻，各个相量的关系如图 2.4.6:

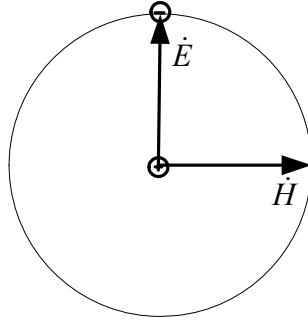


图 2.4.6

图中，光子的运动方向是垂直纸面的。

在直角坐标系中，正负电荷产生的电磁场的有效值相量矢量 \dot{E} 和 \dot{H} 可分别表示为：

$$\dot{E} = \dot{E}_x e_x + \dot{E}_y e_y + \dot{E}_z e_z$$

$$\dot{H} = \dot{H}_x e_x + \dot{H}_y e_y + \dot{H}_z e_z$$

波有纵波与横波之分，纵波的振动方向与传播方向一致，横波的振动方向与传播方向相垂直。本模型中正负电荷产生的电场 \dot{E} 和磁场 \dot{H} 均与光子的运动方向，即电磁波的传播方向垂直，所以是横波，且只要场点远离波源，通过场点的等相面上一小部分曲面就可以看作是平面，故该光子模型所产生的电磁场是均匀平面电磁波。横波的振动矢量相对于传播方向呈不对称分布，称为偏振。

均匀平面电磁波中的振动矢量 \dot{E} 和振动矢量 \dot{H} 相互垂直，两者的偏振情况相同，只研究其中之一。在电磁场理论中，偏振波的振动矢量特指电场强度矢量。

在直角坐标系中，光子模型产生电磁波的电场为

$$\dot{E} = (\dot{E}_{ox} e_x + \dot{E}_{oy} e_y + \dot{E}_{oz} e_z) e^{-jk \cdot r}$$

假设电磁波沿 z 轴正方向传播，即 $\mathbf{k} = k e_z$ ，根据平面电磁波的性质，必有

$$\dot{E}_{oz} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz。$$

为了形象表示均匀平面电磁波的振动矢量 \dot{E} 相对于传播方向 e_z 的分布情况，可用电场强度矢量端点随时间 t 的变化轨迹来表示。在直角坐标系中，取 x 轴表示分量 $\dot{E}_x(z, t)$ ， y 轴表示分量 $\dot{E}_y(z, t)$ ，设平面波在 $t=0$ 时，则以时间 t 为变量的空间轨迹的参数方程为：

$$\begin{cases} E_x = E_{mx} \cos \theta(t) \\ E_y = E_{my} \cos [\theta(t) + \delta] \\ z = vt \end{cases}$$

式中， v 是模型产生的均匀平面电磁波向 z 轴正方向传播的相速， δ 为相角差，满足 $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ ，电场强度矢量端点随时间 t 的变化轨迹与 δ 相对应，不同的 δ 对应不同的轨迹。

可以推知，我们所建的模型中，相角差为：

$$\delta = \varphi_y - \varphi_x = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$E_{mx} = E_{my} = C (\text{常量})$$

其轨迹参数方程为：

$$\begin{cases} E_x + E_y = C^2 \\ z = vt \end{cases}$$

按照龚先生的猜想，旋转的光子有相位。由图 2.4.6 也不难看出，当两个光子相遇时，由于它们到达屏上某点时走过的光程不同，所以相位也不同。如果相位完全相反，则发生光子湮灭现象，打在屏上为暗纹；如果相位完全相同，则增强，打在屏上为明纹；若相遇时相位既不完全相同，也不是完全相反，则它们相位叠加后打在屏上的光强处于明纹和暗纹之间。

单缝衍射模型

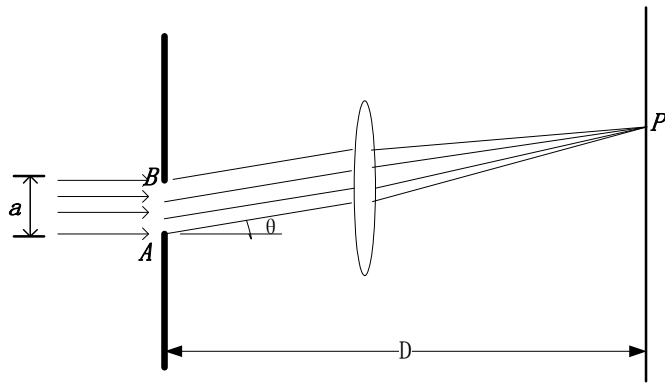


图 2.4.7 单缝衍射模型

上述模型属于远场衍射，单缝的宽度 a 与观察屏到狭缝的距离 D 必须满足关系： $\frac{a^2}{8D\lambda} \ll 1$ ，其中 λ 为入射光波长。

将单缝处的波阵面 AB 看成 N (N 很大) 条等宽度的波带组成，因为这些波带是属于同一波阵面的，所以每个波带发出的子波的电场强度 \dot{E} 和磁场强度 \dot{H}

相位均分别相同。根据龚院士的猜想，我们可以假设光子模型中负电荷绕正电荷旋转的角速度 ω 满足：当光子以光速 c 走过光程 λ 时，正负电荷产生的电场强度 \dot{E} 和磁场强度 \dot{H} 的相位改变量为 2π ，即有下面的式子成立：

$$\begin{cases} c\Delta t = \lambda \\ \omega\Delta t = 2\pi \end{cases}$$

建立如下图所示坐标轴：

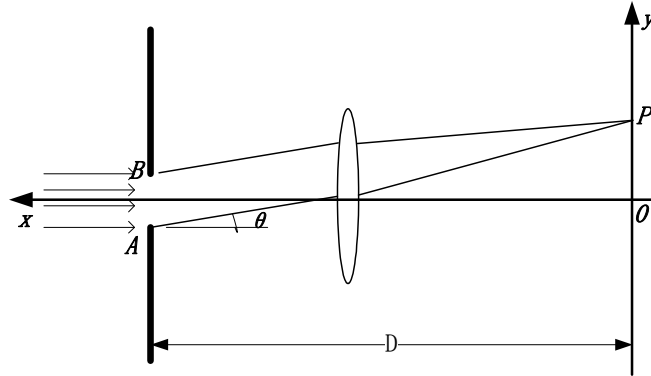


图 2.4.8 单缝衍射模型

各点坐标为：

$$O(0,0); A\left(D, -\frac{a}{2}\right); B\left(D, \frac{a}{2}\right)$$

设屏上任一点 P 的坐标为： $P(0,y)$

由于在微观领域，遮挡物不能再视为平面，所以当大量光子射向狭缝时，除狭缝中央的光子直接打在屏上，狭缝边缘的光子与凹凸不平的狭缝边缘发生碰撞，光子运动方向改变。光子中的任一电荷与狭缝边缘发生碰撞后，光子的运动轨迹是随机的，光子向各个方向运动的概率是等同的，所以衍射角 θ 是任意的。

下面对从狭缝射入的一束衍射角为 θ 的光在屏上任一点 P 的光强进行分析。

将单缝处的波阵面 AB 分成 N (N 很大) 条等宽度的波带，每条波带的宽度为 $ds = a/N$ 。各波带发出的子波到 P 点的传播方向一样，距离也近似相等，所以在 P 点各子波的场强相位也近似相同，则其场强幅值近似相等，以 ΔA 表示。相邻两波带发出的子波传到 P 点时的光程差都是

$$\Delta L = \frac{a \sin \theta}{N}$$

相应的相位差均为

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \sin \theta}{N}$$

根据叠加思想，到达 P 点的子波总场强振幅等于这 N 个波带发出的子波在

P 点场强振幅的叠加，根据相关结论，衍射角为 $\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 的 P 点合场强振幅为：

$$A = \Delta A \cdot \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

由于 N 很大，所以 $\Delta\varphi$ 非常小， $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$ ，所以：

$$A = \Delta A \cdot \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = N\Delta A \cdot \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\frac{N\Delta\varphi}{2}}$$

令

$$\beta = \frac{N\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

则

$$A = N\Delta A \frac{\sin \beta}{\beta}$$

接下来，求每个波带到达 P 点的振幅 ΔA 。假设所有光子从狭缝射出时，其正负电荷产生的电场强度 \dot{E} 和磁场强度 \dot{H} 的相位如图 2.4.9 所示：

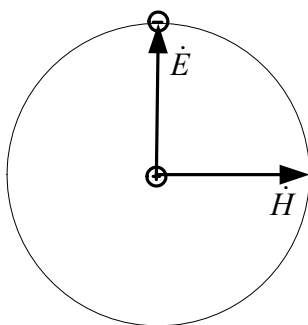


图 2.4.9 相位图

对于屏上任一点 $P(0, y)$ ，从狭缝射入的一束衍射角为任意角 $\theta \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

的光，则 $\tan \theta = \frac{y}{D}$ 。当将 AB 无限细分后，即 $N \rightarrow \infty$ 时，每个小波带可近似为该波带最下点和最上点处的微小波带发出的子波在 P 点的叠加。该波带最下点和最上点处的微小波带发出的子波到达 P 点的波程差为 $\Delta L = \frac{a \sin \theta}{N}$ ，对应的相

位差为 $\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \sin \theta}{N}$ ，如图 2.4.10 所示：

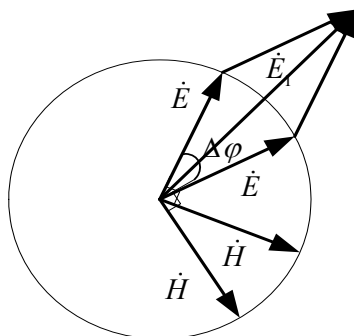


图 2.4.10

合成场强 \dot{E}_1 为：

$$\dot{E}_1 = 2\dot{E} \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2}$$

这里的 \dot{E}_1 即是每个波带到达 P 点的振幅 ΔA 。

所以 P 点光波的合振幅为：

$$A = N\Delta A \frac{\sin \beta}{\beta} = 2N\dot{E} \cdot \cos \frac{\pi a \sin \theta}{N\lambda} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}$$

由于能量与电磁场的强度是平方关系，两边平方得 P 点的能量为：

$$I = A^2 = \left(N\Delta A \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = 4N^2 \dot{E}^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

仿真一：接收屏上光强的分布

设缝宽为 $a = 5\lambda$ ，狭缝到接收屏的距离 $D = 1m$ ， $N = 100$ ， $\dot{E} = 1V/m$ ，取 θ

的范围为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，步长为 0.001，则用 MATLAB 仿真得到接收屏上的光强分布

如图 2.4.11 所示。

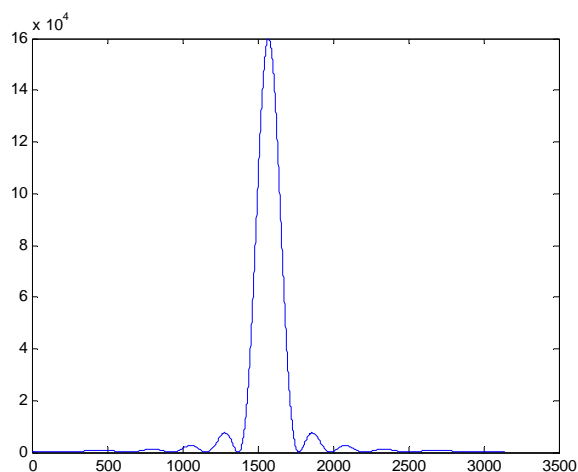


图 2.4.11 光强分布图

仿真结果与玻恩的《光学原理》中的光的衍射的结果相同，证明龚祖同院士关于光子模型的猜想在一定条件下是正确的。

仿真 2：单缝衍射中衍射缝的尺寸对衍射屏上光强的空间分布形式的影响

设 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ，狭缝到接收屏的距离 $D = 1\text{m}$ ， $N = 100$ ， $\dot{E} = 1\text{V/m}$ ，用 MATLAB 仿真得到接收屏上的光强分布为：

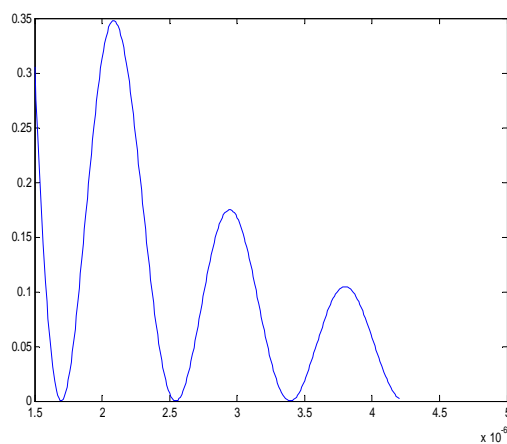


图 2.4.12 光强分布与缝宽的关系

仿真结果表明，随缝宽 a 的增大，光强存在一定的周期变化，且其幅值随缝宽的增大呈减小趋势。

3 模型三

3.1 问题的提出

直到 19 世纪末，人们一直把光看作是一种经典的电磁波动，但在 20 世纪初，黑体辐射及光电效应等试验事实迫使人们重新认识光的本性，而这种认识是有一定发展过程的。在普朗克能量子假设中，只假定谐振子辐射光能是一份一份的，而被发射的光能仍以电磁波的形式连续分布于整个空间。在爱因斯坦对光电效应的解释中，则进一步认为光就是由称为光子的粒子所组成，故光能

并非在空间连续分布，而是以离散的形式集中存在于其载体光子之上。

但光子与实物粒子并不完全等同，例如：（1）实物粒子具有静止质量，而光子没有，它只具有运动质量；（2）实物粒子的速度可以取小于光速 c 的任意值，而光子的速度只能为 c 。

光的这种既具有波动性，又具有粒子性的性质称为光的波粒二象性，光电效应和光的干涉、衍射很好的证明了光的这一特性。通过光子的下列公式我们可以揭示这种二象性及其定量联系：

光子的能量：

$$E = h\nu$$

光子的质量

$$m = h\nu / c^2$$

光子的动量

$$p = mc$$

光子的能量密度

$$\omega = NE = Nh\nu$$

光子的能流密度

$$S = \omega c = Nh\nu c$$

如果把实物的德布罗意波长公式引入，这样实物粒子也就即具有波动性又具有粒子性，我们可以把实物粒子的波粒二象性认为是光的波粒二象性的一种推广。

但是光子毕竟不同于实物粒子，特别是不同于宏观实物，除前面所提到的不同外，光子与宏观实物最大的区别在于，实物的运动轨迹是可以确定的，它们可以通过受力分析，预测实物的下一时刻物体所处于的位置，但是光子的运动轨迹是不确定的，它可以在任意时刻到达任意位置，而且在很多时候也表现出其波动性的一面，这一点在光的干涉和衍射现象中可以明显看出，下图为单缝衍射示意图：

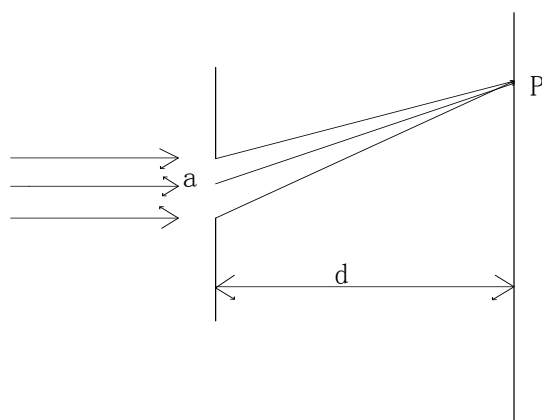


图 3.1.1 单缝衍射示意图

当两束光分别通过一个距离比较近的小狭缝时，在狭缝另一端的屏幕上会出现明暗相间的条纹，这就是光的干涉现象，如下图所示：

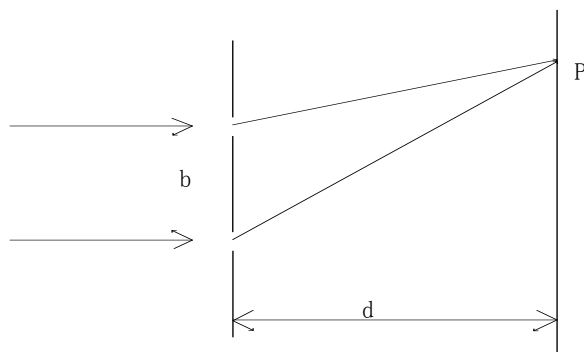


图 3.1.2 双缝干涉示意图

即使是一个光子通过一个狭缝后，如果是足够的时间，则其运动轨迹也是单缝衍射的条纹，这揭示了光子本身也具有光的波粒二象性。

上述介绍中，我们介绍了光具有波粒二象性被人们认识的经过和证明，以及光子不同与宏观实物的一些性质。但是在光子通过单一小狭缝或者多个狭缝时，在另一端的屏幕上会出现稳定的干涉和衍射条纹，这究竟是什么原因让直线传播的光出现“拐弯”的现象，在光出现“拐弯”后在另一端的屏幕上为什么会出现明暗相间的条纹，为什么是在通过一个小狭缝时才会出现这种现象，而在空间中传播时，光仍然是沿直线传播，这通过光表现出来的波动性就可以解释清楚吗，这是基于什么样的物理原理，或者数学基理？这仍然是物理学界一大难题，介于此，很多学者提出了多种假设，但是假设是否成立，仍待去证明。

3.2 分析问题

在上述分析中我们已经了解了光的波粒二象性，这样我们是不是可以设计一个试验来测量光究竟是波还是粒子，是不是可以测量单个光子的路径？但是到目前为止，我们还没有找到这种试验方法，因为它涉及量子力学的海森伯测不准原理。

海森伯测不准原理将光子的动量误差 Δp 和其位置误差 Δx 的关系写成：

$$\Delta p \Delta x \approx h$$

上式称为海森伯测不准原理。

由海森伯测不准原理可以，对于单个光子，除了它与物质相互作用以外，它在空间没有确定的位置，要同时测准光子的位置和动量是不可能，这种测不准并不是测量技术造成的，而是光子的固有性质造成，海森伯测不准原理适用于一切微观粒子。

这样我们就不能把光的波动性和粒子性分开来讨论，而是应该把其粒子和波动性综合起来讨论，其具有波的特性，同时也要把光看成是由大量光子构成，光子在许多方面具有经典粒子的属性，它出现的几率按波动学的预言来分布，但同样它与波的很多特性是不能忽略的。

光具有波粒二象性，它具有波的很多性质，包括干涉、衍射现象，在 19 世纪末，人们依旧认为光是一种电磁波，由于量子论的提出，人们逐渐认为波具有波粒二象性。

当机械波遇到障碍物或者小孔后，在另一端也能检测到机械波，也就是机械波可以绕过障碍或者小孔继续传播，这就是机械波的衍射。当两列相同频率，振动方向不正交，相位差稳定的机械波相遇时会在其相遇的区域出现机械波变强变弱的现象，这种现象被称为干涉，典型的表现比如驻波的出现，既两列机械波相遇，出现“抵消”的现象。

将光的波的特性与机械波比如声波的特性作比较，我们可以发现，他们的性质具有很多相似点，他们的干涉衍射现象很相似，只是声波是不能通过眼睛看到，所以形成的强弱条纹我们不能直观的得到，但是通过仪器的检测我们是能检测到声音的强弱变化，这样我们就可以把光波与机械波联系在一起，运用机械波的部分性质来解释光的运动。

3.3 提出假设

通过上述的分析，我们可以知道光和机械波（以下用声波为例）具有很多的相似之处，而且光具有波动性是已经得到证明的事实，因此在进行光的干涉衍射时，我们可以把光类比为一种高频率，高传播速度的“机械波”，但是光与机械波在本质上是有区别的，光的传播是不依靠任何介质的，但是我们也可以认为光的传播是依靠光子来传播，它的介质是有别于其它物质的光子，这样我们就可以把光波当成是机械波的推广，可以定义为广义机械波，它的传播具有和机械波在空气中传播相同的性质，其本身具有高能量，这样我们就把光的问题，转化为“机械波”的问题，同时我们也将考虑进光本身所具有的性质。

通过上面的论述，我们可以假设光是一种具有本身特有性质的广义机械波。光在通过一个小狭缝后，会在狭缝另一端的屏幕上出现明暗相间的条纹，这在前面所述中已经与声波做过比较，这里我们就可以通过声波的衍射理论来类比光的衍射，当其通过一个小狭缝后，会像声波一样向四周扩散，但是其到达屏幕上的某一位置是一个时空的函数，其向各个方向传播的几率不是均等的，而是延直线传播的几率最大，由直线向外(离狭缝的距离逐渐增大的方向)逐渐递减，到无穷远处为零。同时我们假设光的传播介质是光子，则光的能量全部为其振动能量，这样我们可以通过概率函数和光子的振动方程来求出同一束光(包括了 N 个光子)通过狭缝后，到达屏幕上某一点的能量，也就是光强。

3.4 模型的建立

光的衍射波形延中间两条纹两端对称的明暗相间的条纹，为了简化模型，下面的描述中我们将其简化为一条垂直于中间亮条纹的向两端延长的直线。

光的表现形式为横波，这与声波的振动方向不同，但是两种波在某种程度上的表现形式很相似，因此我们可以用声波的振动方程来类比光波的振动方程，光是由大量光子构成的，光子在运动过程中，其表现形式也是波动的，这样我们可以认为光的波动是由于大量光子的振动构成，我们假设大量光子的振动方向一致，则振动方程是一样的，这样我们可以得到其运动轨迹为：

$$\phi(x,t) = \overrightarrow{k_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + ct}$$

它是一个时空的周期函数，沿着前进方向不断做着正弦性质的周期变化。

当某一点的位置，即其离光源的光路距离确定后我们就可以得到光子在这点的振动方程为：

$$\phi_x(t) = k_2 \sin(\omega_1 t + \theta_2)$$

其波形我们可以通过下图表示（由于光的波长、频率、能量等值未确定，所以只给出了近似波形，仿真程序见附件三）：

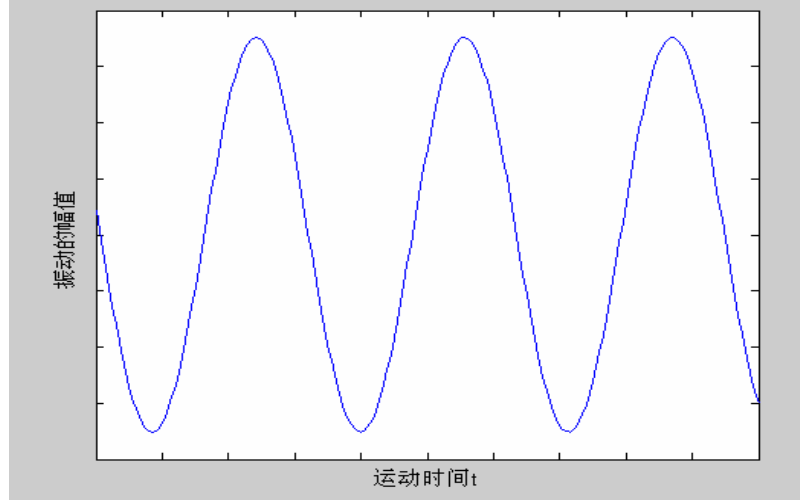


图 3.4.1 光子振动示意图

当把光的前进方向也考虑进来以后，则需要其振动方程和前进距离（ct）进行矢量和，运用平行四边形法则即可得到光子的轨迹方程。

让一个光子通过一个小狭缝后，其所到达的位置是不确定的，这是一个概率的函数，即其沿着某一方向运动是不确定的，之所以我们日常生活中所见到的光沿直线传播是因为光子沿直线运动的概率比较大，这样大量光子所表现出来的形式是直线的，但是如果是单个光子，它到达任何位置都是不确定的，它落到某一点的可能性我们只能通过一个概率函数来确定，这个概率函数与我们大学中所学的正态分布函数近似，在这里我们假设光子运动到某一点的概率符合正态分布 $N(0,1)$ ，即：

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

函数的波形我们可以通过下图来表示（程序见附件三）：

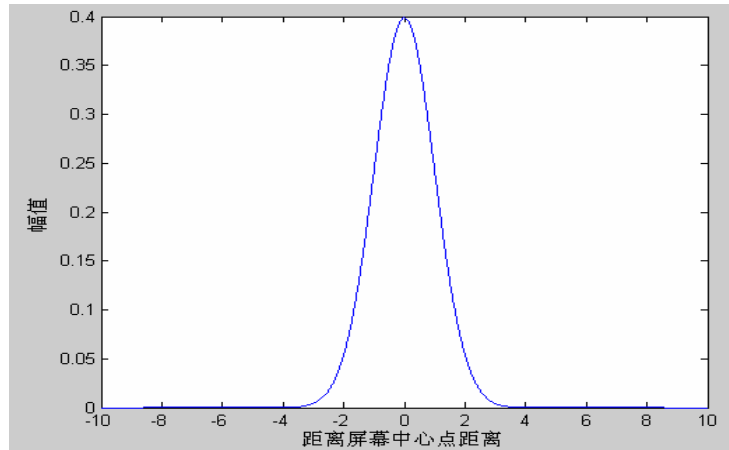


图 3.4.2 光子概率示意图

由图 3.4.2 我们可以知道，光子沿直线传播的机率最高，而沿其它方向传播的概率逐渐降低，当大于一定值时，这种机率几乎为零，可以忽略。这样我们就可以得到光通过小孔或者狭缝后的在屏幕上某处的振动轨迹方程为

$$\psi(x,t) = P(x)\phi(x,t)$$

即：

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \overrightarrow{(k_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \vec{ct})}$$

光是由大量光子组成，在单缝衍射中，我们可以把光看作是一种特殊的机械波，即前面提到的广义机械波，这样我们就可以用机械波的原理来模拟仿真光的衍射现象，把光子的能量认为全部为其振动能，当两束光波相遇时，如果其相差半个波长，则两束光就会湮灭，在屏幕上表现为湮灭，而当两束光波的波长相差波长的整数倍时，则光波就会再次加强，光的能量得到增加，从而表现出亮斑，则光的的振动方程可以表示为：

$$i(x,t) = P(x,t)\phi_x(t) = K e^{\frac{-x^2}{2}} \sin(\omega_1 t + \theta_2)$$

当屏幕上的点的位置确定后就振动能就只是 t 的方程。

我们建立以过狭缝中心，方向指向屏幕，且与屏幕垂直的一条直线为 x 轴，以与屏幕平行，且与下周垂直相较于屏幕的一条直线为 y 轴，定义直线的在 x 轴的一侧为 y 的正方向。

我们假设一束光通过一个狭缝，照射在另一端的屏幕上，单位长度上的光子数为 N，则屏幕上任意一点 P 离中心线的距离为 y，这样我们选取狭缝中一个微小的线光子单元为 $\Delta x N$ ，其横坐标为 x，则其到达 P 点的距离为 $\sqrt{(y-x)^2 + d^2}$ ，则微小的线单元光到达 P 点时的振动幅值为

$$I = \Delta x N i(t)$$

假设光到达狭缝后，各个光子的振动相位是一致的。这样我们就通过对狭缝所

通过的光进行积分就可以达到屏幕上某一点振动幅值为：

$$F_p = \int_{-a/2}^{a/2} Ni(x,t)dx$$

$$= KN e^{\frac{-y^2}{2}} \int_{-a/2}^{a/2} \sin(\omega_1 t + \theta_2) dx$$

其中 $t = \sqrt{(y-x)^2 + d^2} / c$ ，这样上式积分将是一个很常见的积分公式。光强 I_p 可以用 F_p 的平方表示，它将只是 P 点的位置函数，这样我们就可以得到光在屏幕上的亮度分布。

这样我们查资料得到一种单色光的频率为 $f = 5 * 10^{14} Hz$ ，设 $d=1m$ ， a 为 5 倍的波长， N 值假设为 10000（ N 值需要通过测量单位长度上光的能量和单个光子能量来计算得到，但是考虑到 N 值对我们的最后结果没有影响，因此我们可以自己设定一个值），所有光子到达狭缝处得时刻为 $t=0$ ，设其相位角为 0，光的能量用振幅的平方表示。

这样我们通过数值的方法对上述振幅，和光强进行 MATLAB 计算仿真，由于光子振动的角频率很高，而且我们所设置的 N 值相对于实际情况偏低，而所有软件的计算精度有限，通过 MATLAB 仿真后，我们所得到的波形不能显示出来，只能看到中间位置有一条模糊的虚线，但是通过调用光强的最后结果数据（见附件三），对数据进行分析，可以发现所测定的光强在 $y=0$ ，也就是屏幕上正对狭缝中间的位置，光强最大，向两端依次减弱，并在减弱过程中出现光强周期性变化的现象，但是每个周期内光强的最大值是逐渐减弱的，且周期的宽度随离中心点距离的增大也逐渐变大。

3.5 结论

通过仿真数据我们与《光学》书中的波形进行对比，发现：

- （1）在屏幕上会形成明暗相间的亮斑
- （2）中间亮斑的宽度比其他亮斑较宽，而且光强较大
- （3）亮条纹到暗条纹之间是一个渐变的过程，表现在光强曲线上，是一条光滑的曲线。
- （4）亮斑的光强，随亮条纹纵坐标绝对值的增大而增大，且两端亮条纹关于中间亮斑对称。

上述我们只进行了光的单缝衍射现象，光的双缝和多缝干涉现象也通过我们所提出的假设和数学模型进行仿真，结果可以和附件四很好的匹配，介于单缝干涉和双缝和多缝衍射具有相同的模型，我们就不在此赘述。

上述猜想和仿真，我们进行了大量的假设和近似，最后虽然得到的光强图和试验结果一致，但是其假设的理论正确性仍然需要我们继续去探讨。光的本质仍然是现代物理学中无法解释的问题，虽然量子学的提出使我们更容易去解释光某些现象的机理，但是仍然有很多光学现象是我们现在无法理解的问题，这就需要我们去做更多的试验，改进试验方法和试验仪器，去探索光的本质。

4 参考文献

- [1] 雷银照, 电磁场, 北京: 高等教育出版社, 2010。
- [2] 姜启源, 数学模型, 北京: 高等教育出版社, 2011。
- [3] 尚涛, 谢龙汉, 杜如虚, Matlab 工程计算及分析, 北京: 清华大学出版社, 2011。
- [4] 蔡履中, 光学, 北京: 科学出版社, 2007。

5 致谢

感谢在论文过程中, 给予我们帮助的老师 and 同学, 感谢评委老师审阅, 请老师指正。