

参赛密码 \_\_\_\_\_

( 由组委会填写 )

## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

学 校                      南京航空航天大学

---

参赛队号                      10287013

---

队员姓名                      1.秦 鹏

---

   2.张 粲

---

   3.孙加亮

---

参赛密码 \_\_\_\_\_

( 由组委会填写 )



## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目                      面向节能的单/多列车优化决策问题

### 摘                      要:

本文研究了单/多列车动力学建模以及面向节能的运行优化控制问题,对比分析了非线性内点法和遗传算法的优缺点并灵活运用,取得了如下成果:

问题一为单列车的节能运行优化控制问题。

第(1)问中首先建立了以时间为自变量的单列车动力学模型,并以“牵引-巡航-惰行-制动”四个阶段关键点参数为变量、以能耗最低为目标建立了单列车节能运行最优化模型。利用 MATLAB 编程,分别采用非线性内点法和遗传算法求解该问题,这两种方法的结果吻合得很好,且得到的能耗降幅均超过 20%,说明了模型的有效性以及优化方法的可行性。

第(2)问中首先给出了以位移为自变量的新动力学模型,对比第(1)问的建模,在优化中考虑了两个运行区间时间分配的影响,同样建立了以能耗最低为目标函数的最优化模型。非线性内点法以其能够准确快速求解中型非线性约束优化问题,被用来寻找该模型的最优解,最优能耗降幅相对于初始值超过 28.5%,结果也表明两区间的时间分配近似与区间路程成正比。

问题二为多列车的节能运行优化控制问题,主要考虑再生能量的利用。

第(1)问中为缩短问题规模,根据“能耗与运行时间成反比”条件,假设站停时间最短,以列车发车时间间隔为变量,创新性地以所有列车制动段与牵引段重叠时间最大为目标建立最优化模型。遗传算法具有大规模问题搜索全局最优解的能力,也被用来求解该问题,结果表明优化后所有列车间的制动与牵引重叠时间比优化前增加了 10.8%,有效地提高了再生能量的利用率。

第(2)问中考虑早晚高峰的影响,提出了一种新型“分步”优化方法,首先优化 240 辆列车在 5 个时间段的最优分配方案,其次利用遗传算法进行全局

的最优发车间隔时间求解。“分步”建模优化方法能够有效地处理复杂的约束问题，具有创新性。

问题三在问题二的基础上考虑列车延误问题。建立了以站停时间调整量和区间运行调整量为变量、以列车总延误时间最小为目标的线性规划模型，并用问题二中高峰期和非高峰期的两辆列车延误 10s 进行验证，内点法求解结果表明高峰期中列车延误影响范围更大、延误总时间更长，符合实际情况，从而验证了模型的有效性。再考虑延误时间的随机性，推导并分析了最小总延误时间的数学期望，具有理论指导意义。

**关键词：**单/多列车，再生制动，非线性内点法，遗传算法，“分步”优化方法

## 一、问题重述

轨道交通系统的能耗是指列车牵引、通风空调、电梯、照明、给排水、弱电等设备产生的能耗。根据统计数据，列车牵引能耗占轨道交通系统总能耗 40% 以上。在低碳环保、节能减排日益受到关注的情况下，针对减少列车牵引能耗的列车运行优化控制近年来成为轨道交通领域的重要研究方向。

列车在站间运行时会根据线路条件、自身列车特性、前方线路状况计算出一个限制速度。列车运行过程中不允许超过此限制速度。限制速度会周期性更新。在限制速度的约束下列车通常包含四种运行工况：牵引、巡航、惰行和制动。

如果车站间距离较短，列车一般采用“牵引-惰行-制动”的策略运行。如果站间距离较长，列车通常会采用牵引到接近限制速度后，交替使用惰行、巡航、牵引三种工况，直至接近下一车站采用制动进站停车。

列车在运行过程中，实际受力状态非常复杂。采用单质点模型是一种常见的简化方法。单质点模型将列车视为单质点，列车运动符合牛顿运动学定律。其受力可分为四类：重力  $G$  在轨道垂直方向上的分力与受到轨道的托力抵消，列车牵引力  $F$ ，列车制动力  $B$  和列车运行总阻力  $W$ 。

列车牵引力  $F$  是由动力传动装置产生的、与列车运行方向相同、驱动列车运行并可由司机根据需要调节的外力。牵引力  $F$  在不同速度下存在不同的最大值  $F_{\max} = f_F(v)$ ，具体数据详见附件。列车实际输出牵引力（kN）基于以下公式进行计算： $F = \mu F_{\max}$ 。其中， $\mu$  为实际输出的牵引加速度与最大加速度的百分比， $F_{\max}$  为牵引力最大值（kN）。

列车总阻力是指列车与外界相互作用引起与列车运行方向相反、一般是阻碍列车运行的、不能被司机控制的外力。按其形成原因可分为基本阻力和附加阻力。附加阻力主要考虑坡道附加阻力和曲线附加阻力。有时为了计算方便，当坡道附加阻力，曲线附加阻力同时出现时，根据阻力值相等的原则，把列车通过曲线时所产生的附加阻力折算为坡道阻力，加上线路实际坡度即为加算坡度。

制动力  $B$  是由制动装置引起的、与列车运行方向相反的、司机可根据需要控制其大小的外力。制动力  $B$  存在与制动时列车速度有关的最大值， $B_{\max} = f_B(v)$ ，当然制动力也可以小于  $B_{\max}$ 。具体数据详见附件。列车实际输出制动力（kN）基于以下公式进行计算  $B = \mu B_{\max}$ 。其中， $\mu$  为实际输出的制动加速度与最大加速度的百分比， $B_{\max}$  为制动力最大值（kN）。

当列车在站间运行时，存在着多条速度距离曲线供选择。不同速度距离曲线对应不同的站间运行时间和不同的能耗。此外，即便站间运行时间相同时，也存在多条速度距离曲线可供列车选择。

一般认为，列车站间运行时间和能耗存在近似的反比关系，比较准确的定量关系应根据公式计算。增加相同的运行时间不一定会减少等量的能耗。列车站间运行时间与能耗变化的趋势影响能耗的减少。

随着制动技术的进步，目前城市轨道交通普遍采用再生制动。再生制动时，牵引电动机转变为发电机工况，将列车运行的动能转换为电能，发电机产生的制动力使列车减速，此时列车向接触网反馈电能，此部分能量即为再生制动能。列车  $i+1$  在制动时会产生能量  $E_{\text{reg}}$ ，如果相邻列车  $i$  处于加速状态，其可以利用  $E_{\text{reg}}$ ，从而减少从变电站获得的能量，达到节能的目的。如果列车  $i+1$  制动时，其所处供电区段内没有其他列车加速，其产生的再生能量除用于本列车空调、照明等设

备外，通常被吸收电阻转化为热能消耗掉。

需研究以下问题：

#### 一、单列车节能运行优化控制问题

(1) 请建立计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从  $A_6$  站出发到达  $A_7$  站的最节能运行的速度距离曲线，其中两车站间的运行时间为 110 秒，列车参数和线路参数详见文件。

(2) 请建立新的计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从  $A_6$  站出发到达  $A_8$  站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在  $A_7$  车站停站 45 秒， $A_6$  站和  $A_8$  站间总运行时间规定为 220 秒（不包括停站时间），列车参数和线路参数详见文件。

#### 二、多列车节能运行优化控制问题

(1) 当 100 列列车以间隔  $\mathbf{H}=[h_1, \dots, h_{99}]^T$  从  $A_1$  站出发，追踪运行，依次经过  $A_2, A_3, \dots$  到达  $A_{14}$  站，中间在各个车站停站最少  $D_{\min}$  秒，最多  $D_{\max}$  秒。间隔  $H$  各分量的变化范围是  $H_{\min}$  秒至  $H_{\max}$  秒。请建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔  $H$ 。要求第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为  $T_0 = 63900$  秒，且从  $A_1$  站到  $A_{14}$  站的总运行时间不变，均为 2086s（包括停站时间）。假设所有列车处于同一供电区段，各个车站间线路参数详见文件。

补充说明：列车追踪运行时，为保证安全，跟踪列车（后车）速度不能超过限制速度  $V_{\text{limit}}$ ，以免后车无法及时制动停车，发生追尾事故。其计算方式可简化如下： $V_{\text{limit}} = \min(V_{\text{line}}, \sqrt{2LB_e})$ 。其中  $V_{\text{line}}$  是列车当前位置的线路限速（km/h）， $L$  是当前时刻前后车之间的距离（m）， $B_e$  是列车制动的最大减速度（m/s<sup>2</sup>）。

(2) 接上问，如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列。请重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。

#### 三、列车延误后运行优化控制问题

接上问，若列车  $i$  在车站  $A_j$  延误  $DT_j^i$ （10 秒）发车，请建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。

假设  $DT_j^i$  为随机变量，普通延误（ $0 < DT_j^i < 10\text{s}$ ）概率为 20%，严重延误（ $DT_j^i > 10\text{s}$ ）概率为 10%（超过 120s，接近下一班，不考虑调整），无延误（ $DT_j^i = 0$ ）概率为 70%。若允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒，根据上述统计数据，进行分析。

## 二、模型假设

1. 为便于分析，忽略列车长度，将单列车视为质点模型进行动力学分析；
2. 忽略乘客质量，即假设列车在运行过程中质量不变；
3. 多列车在整条线路上运行时，假设每一辆列车完全相同，并且列车单向行驶，不往返运行；
4. 多列车在整条线路上运行时，假设所有列车处于同一供电区段，每一辆列车的总运行时间相同，并且在同一个站段区间内的运行时间相同，在各个车站停站

时间都等于最小值以减少能耗。

### 三、符号说明

符号	含义	符号	含义
$A_n$	第 $n$ 站编号	$i$	第 $i$ 辆列车
$G$	列车重力	$M$	列车质量
$F$	列车所受牵引力	$\mu_f$	牵引加速度比值
$B$	列车制动力	$\mu_b$	制动加速度比值
$W$	列车运行阻力	$C$	列车所受合力
$\omega_0$	单位基本阻力	$\omega_1$	单位附加阻力
$\omega_i$	单位坡道阻力系数	$\omega_c$	单位曲线阻力系数
$a$	阻力多项式系数	$b$	阻力多项式系数
$c$	阻力多项式系数	$d$	线路坡度
$s$	列车路程	$v$	列车速度
$V_{\text{limit}}$	后车（跟车）限制速度	$V_{\text{line}}$	当前位置的线路限速
$t_i$	列车运行时刻	$T_0$	发车时间总间隙
$T_n$	站段区间内运行时间	$T_r$	线路分段运行时间
$T_d$	列车总晚点时间	$\mathbf{H}$	发车间隔时间集合
$D$	停站时间	$E$	列车运行耗能
$E_{\text{used}}$	再生能量利用量	$E_{\text{mech}}$	制动过程产生总机械能
$E_{\text{reg}}$	制动过程产生有效能量	$E_f$	制动过程阻力耗能
$t_{\text{overlap}}$	列车间制动与加速重叠时间	$t_{\text{break}}$	制动时间
$L$	前后车距	$B_e$	列车制动的最大减速度
$DT_j^i$	列车延误时间	$\text{Pr}$	列车延误的概率
$a_n^i$	列车 $i$ 到达 $A_n$ 站的时刻	$a_n^{i-}$	列车 $i$ 到 $A_n$ 站前的制动时刻
$d_n^i$	列车 $i$ 离开 $A_n$ 站的时刻	$d_n^{i+}$	列车 $i$ 加速离开 $A_n$ 站后时刻
$pa_{ij}$	列车 $i$ 在 $A_j$ 站计划到达时间	$pl_{ij}$	列车 $i$ 在 $A_j$ 站计划到达时间
$ta_{ij}$	列车 $i$ 在 $A_j$ 站实际到达时间	$tl_{ij}$	列车 $i$ 在 $A_j$ 站实际到达时间
$da_{ij}$	列车 $i$ 在 $A_j$ 站到达延误时间	$dl_{ij}$	列车 $i$ 在 $A_j$ 站到达延误时间
$y_i$	站段区间内运行时间最小值	$q$	两车间追踪间隔
$N$	列车延误模型目标函数	$\alpha$	延误恢复的能耗权重系数
$T_{\text{delay}}$	列车最小总延误时间	$n$	延误时间 $DT_j^i$ 比 10 取整

## 四、问题一求解

### 4.1 问题分析

问题一是关于单列车的节能运行优化控制问题。单列车节能运行操纵优化问题可简单描述为：列车从零开始以初速度从始发站出发,要求在给定运行时间到达终点站,运行距离给定,运行初、末速度为0。建立适当的计算速度距离曲线的数学模型,要求运行能耗极小。

列车在运行过程中,一般包括牵引阶段、巡航阶段、惰行阶段、制动阶段四种工况<sup>[1-2]</sup>。为便于分析,将单列车视为单质点模型进行运动学与动力学分析,列车运动符合牛顿运动学定律。通常,其受力包括:重力 $G$ ,轨道垂直方向上的支撑力,列车牵引力 $F$ ,列车制动力 $B$ 和列车运行总阻力 $W$ 。

问题一第(1)问要求寻找一条列车从 $A_6$ 站出发到达 $A_7$ 站的最节能运行的速度距离曲线,其中两车站间的运行时间为110秒,两车站间距1354m。根据给定数据,我们可以作出该段线路的限制速度图,如图1所示。由此可知,从 $A_6$ 站出发120m后,限制速度从55km/h增大至80km/h,直到到达 $A_7$ 站。

首先考虑限制速度为55km/h的初始段。如果列车在牵引阶段以最大加速度 $1\text{m/s}^2$ 从 $A_6$ 站出发,运行120m后,可得速度为55.77km/h,与限制速度差异很小,所以在这一段路程中,可以认为速度不会超过该段限制速度。因此,在实际分析中,可以将整段路程的限制速度均视为80km/h来简化处理。

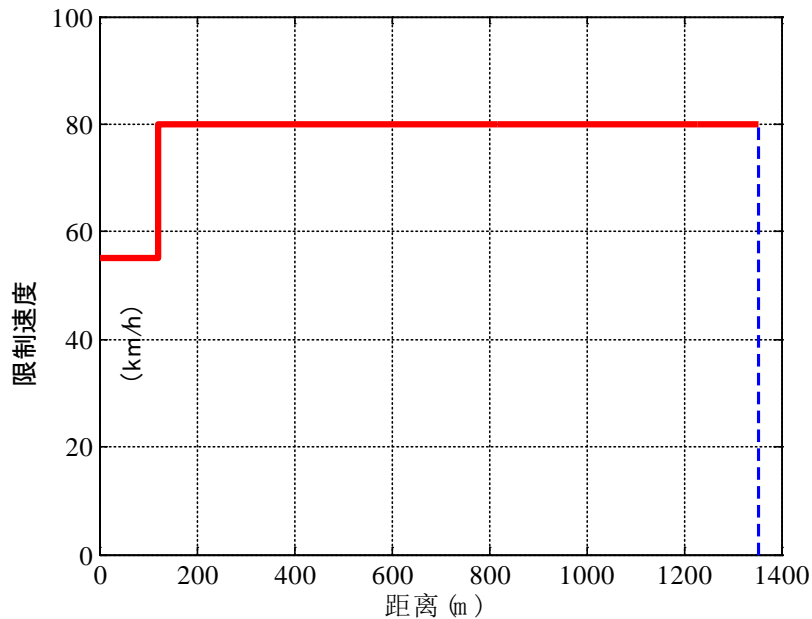


图 1.  $A_6$ 站到 $A_7$ 站的限制速度图

问题一第(2)问要求寻找一条列车从 $A_6$ 站出发到达 $A_8$ 站的最节能运行的速度距离曲线,其中列车在 $A_7$ 车站停站45秒,总运行时间为220秒(不包括停站时间),两车站间距2634m。根据给定数据,作出该段线路的限制速度图,如图2所示。由图可知,从 $A_6$ 站出发120m后,限制速度从55km/h增大至80km/h,直到到达 $A_7$ 站,限制速度降至55km/h。再经过120m后,限制速度增大至80km/h,

直到到达  $A_8$  站。

类似地，列车在  $A_7$  站停靠 45 秒出发运行 120m 后，速度不会超过 55km/h，因此在实际分析中，也可以将整段路程的限制速度视为 80km/h 来处理。

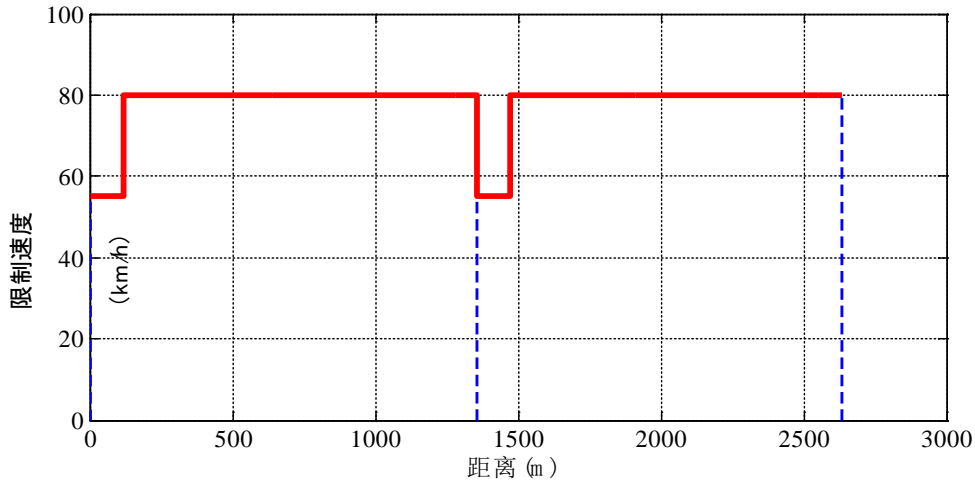


图 2.  $A_6$  站到  $A_8$  站的限制速度图

## 4.2 第（1）问的模型建立与求解

### 4.2.1 动力学模型与最优化模型的建立

在建立模型前，需对列车进行动力学分析。

根据线路情况和列车运行要求，列车可以有四种工况，每种工况下作用于列车上的合力由不同的力组合而成。牵引阶段时，作用于列车上的力有牵引力和运行阻力，其合力  $C = F - W$ ；巡航阶段时，作用于列车上的力有牵引力和运行阻力，其合力  $C = 0$ ；惰行阶段时，作用于列车上的力只有列车运行阻力，故合力  $C = -W$ ；制动阶段时，作用于列车上的力有列车制动力和列车运行阻力，其合力  $C = -(B + W)$ 。

当合力  $C > 0$ ，即合力方向与列车运行方向相同，列车将加速运行；当合力  $C < 0$ ，即合力方向与列车运行方向相反，列车将减速运行；当合力  $C = 0$  时，列车将匀速运行或静止不动。

根据问题描述，对上述几种外力进行分析。

列车实际输出牵引力  $F$ （kN）基于以下公式进行计算：

$$F = \mu_f F_{\max} \quad (4.1)$$

其中： $\mu_f \in [0, 1]$  表示实际输出的牵引加速度与最大加速度的百分比，牵引力最大值的大小  $F_{\max}$  由牵引特性曲线决定，其取值与列车运行速度  $v$  有关，满足如下关系：

$$F_{\max}(v) = \begin{cases} 203 & 0 \leq v \leq 51.5 \text{ km/h} \\ -0.002032v^3 + 0.4928v^2 - 42.13v + 1343 & 51.5 < v \leq 80 \text{ km/h} \end{cases} \quad (4.2)$$

列车的总阻力分为基本阻力和附加阻力。在从  $A_6$  站出发到达  $A_7$  站的运行过程中，轨道线路的曲率半径为 0，所以曲线附加阻力不计，因此列车运行总阻力  $W$ （N）表达式可表示为：



$$\begin{aligned}
W &= (\omega_0 + \omega_1) \times g \times M / 1000 \\
&= (a + bv + cv^2 + \omega_i + 0) \times g \times M / 1000 \\
&= (2.031 + 0.0622v + 0.001807v^2 + d) \times g \times M / 1000
\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中： $M$  是列车重量 (kg)， $g$  是重力加速度 ( $\text{m/s}^2$ )， $d$  是线路坡度 (‰)。查阅线路数据可知，在  $A_6$  站到  $A_7$  站之间，线路坡度随距  $A_6$  站的路程  $s$  变化关系为：

$$d = \begin{cases} 0 & 0 \leq s < 304\text{m} \\ 1.8 & 304 \leq s < 684\text{m} \\ -3.5 & 684 \leq s < 1304\text{m} \\ 0 & 1304 \leq s < 1354\text{m} \end{cases} \tag{4.4}$$

列车实际输出制动力  $B$  (kN) 基于以下公式进行计算：

$$B = \mu_b B_{\max} \tag{4.5}$$

其中： $\mu_b \in [0,1]$  表示实际输出的制动加速度与最大加速度的百分比，制动力的最大值  $B_{\max}$  与列车运行速度有关，满足如下关系：

$$B_{\max}(v) = \begin{cases} 166 & 0 \leq v \leq 77\text{km/h} \\ 0.1343v^2 - 25.07v + 1300 & 77 < v \leq 80\text{km/h} \end{cases} \tag{4.6}$$

考虑到  $A_6$  站到  $A_7$  站之间的距离、坡度、速度、时间限制和列车运动的动力学性能，考虑一般情况，即假设列车在运行时采用“牵引-巡航-惰行-制动”的典型工况进行建模，如图 3 所示。

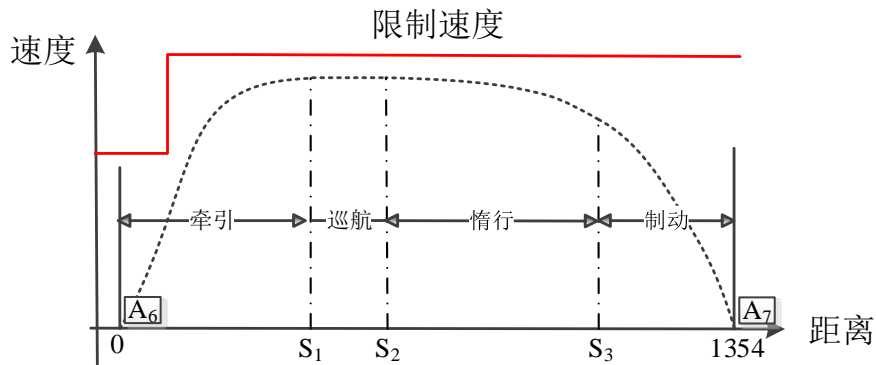


图 3. 列车在  $A_6$  站到  $A_7$  站之间运行示意图

从该图中可以看出，距  $A_6$  站的路程  $s$  被分成 4 个阶段，其中： $0-s_1$  为牵引阶段的路程，对应的运行时间为  $0-t_1$ ； $s_1-s_2$  为巡航阶段的路程，对应的运行时间为  $t_1-t_2$ ； $s_2-s_3$  为惰行阶段，对应的运行时间为  $t_2-t_3$ ； $s_3-s_4$  为制动阶段的路程，对应的运行时间为  $t_3-t_4$ ，题目中  $t_4=110\text{s}$ ，该时刻到达  $A_7$  站。

因此，列车在该过程中的能量消耗表达式为：

$$E = \int_0^{t_1} \mu_f F_{\max}(v) \cdot v dt + \int_{t_1}^{t_2} W \cdot v dt \tag{4.7}$$

其中： $E$  是列车运行的总能耗 (J)。由于列车运行的四个阶段中，只有牵引阶段和巡航阶段发动机处于耗能阶段，并且巡航阶段的牵引力与总阻力平衡，因此总能耗可用牵引阶段和巡航阶段两段时间内的外力做功来积分表达。

据此，从列车的受力与运动的角度分析，以时间为自变量，可建立质点（即

单列车) 的动力学微分方程如下:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} (\mu_f F_{\max}(v) - \mu_b B_{\max}(v) - W) \\ \frac{ds}{dt} = v \end{cases} \quad (4.8)$$

分析可知, 该模型的设计变量有 5 个, 记为:  $\mathbf{x} = [\mu_f \ t_1 \ t_2 \ t_3 \ \mu_b]^T$ , 所以模型总结如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & E \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq v_i \leq V_{\text{line}}, \quad v_0 = 0, \quad v_n = 0 \\ & 0 \leq s_i \leq s_4, \quad s_0 = 0, \quad s_4 = 1354\text{m} \\ & 0 \leq t_i \leq t_4, \quad t_0 = 0, \quad t_4 = 110\text{s}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \\ & 0 \leq \mu_f \leq 1, \quad 0 \leq \mu_b \leq 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中:  $V_{\text{line}} = 80\text{km/h}$ , 表示该段线路的限制速度。

#### 4.2.2 模型求解

由于该模型是非线性动态优化问题, 所以本题拟采用 2 种优化方法进行优化, 得到优化数据并进行分析比较, 为解决后续问题提供指导。

##### 方法 1 传统的梯度法——非线性内点法

首先采用传统的梯度方法——非线性内点法进行编程求解。现代内点法解非线性规划问题的基本思想是, 把原问题转换为只有等式约束和简单的不等式约束的等价问题, 求等价问题的一阶最优性条件, 对一阶最优性条件进行扰动, 并 Newton 法解非线性的扰动 KKT 条件, 得到搜索方向。基于扰动 KKT 条件的原始对偶内点算法在处理大规模非线性规划问题时, 比对数障碍函数的内点算法更有效。它具有多项式时间复杂性, 迭代次数不随问题规模的增大而显著增加。而且它对初始点的要求不严格, 具有二次收敛性和鲁棒性<sup>[3]</sup>。

利用该方法, 编制的优化程序主要运用了 MATLAB 软件自带的 ode45 函数求解该动力学模型<sup>[4]</sup>。ode 是专门用于解微分方程的功能函数, 其中 ode45 求解器属于变步长的一种, 采用的是 Runge-Kutta 算法。ode45 表示采用四阶-五阶 Runge-Kutta 单步算法, 它用 4 阶方法提供候选解, 5 阶方法控制误差, 是一种自适应步长(变步长)的常微分方程数值解法, 其整体截断误差为  $(\Delta x)^5$ , 解决的是 Nonstiff(非刚性)常微分方程, 是解决数值解问题的首选方法。

使用 MATLAB 编制程序, 得到了单列车从  $A_6$  站出发到达  $A_7$  站的运行过程中的实时运动参数, 并给出了所得到的能耗最低时的速度距离曲线, 如图 4 所示。

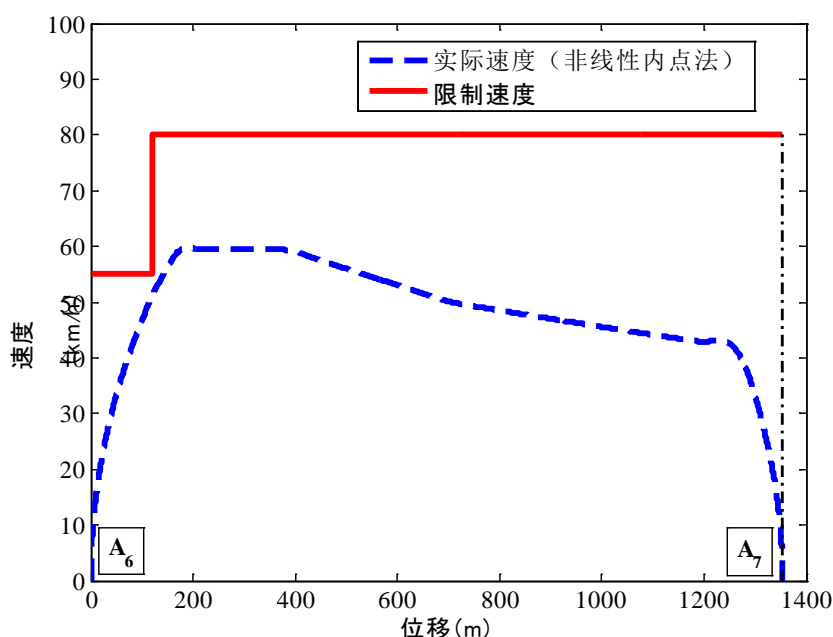


图 4. 优化的速度距离曲线（非线性内点法）

图中，蓝色虚线表示优化的速度距离曲线。该曲线依次包含了“牵引-巡航-惰行-制动”阶段，每一个阶段的运动参数列于表 1 中。

表 1 优化后的列车运动参数（非线性内点法）

运行阶段	运行路程(m)	运行时间(s)
牵引阶段	0-187.12	0-20.8
巡航阶段	187.12-389.92	20.8-30.0
惰行阶段	389.92-1266.49	30.0-95.0
制动阶段	1266.49-1353.95	95.0-110

整个运行过程中的速度变化为：在牵引阶段，牵引力的作用下，速度从 0 增大至 59.65km/h，加速度从较大值逐渐减小，至 21s 左右进入巡航阶段，速度维持在 59.26km/h 左右，加速度基本为 0，并于运行 9s 后进入惰性阶段，速度逐渐降低至 40.93km/h，加速度数值缓慢增加，直至 95s 时开始制动，加速度数值迅速增大，速度迅速降低至 0。

在该优化结果下，总耗能  $E = 3.4079 \times 10^7 \text{ J}$ 。并且注意到，优化结束时列车运行路程为 1353.95m，与精确的路程 1354m 有 5cm 的误差。该优化结果将与下面这种优化方法相比较。

#### 方法 2 现代智能优化算法——遗传算法

此外，本题采用一种现代智能优化算法——遗传算法来求解该问题。遗传算法是一种模拟自然进化过程的随机化搜索算法,其主要特点是群体搜索策略和群体中个体之间的信息交换,搜索不以梯度信息为基础,尤其适用于处理传统搜索方法难以解决的复杂非线性问题。在遗传算法中,群体中的每个个体表示问题搜索空间的一个近似解。遗传算法从任意初始群体出发,通过个体染色体的遗传和变异达到一种稳定优化状态的繁殖和选择过程,使得群体进化到搜索空间中越来越

好的区域。它运用随机规则在全局范围内进行搜索。作为一种全局的优化算法,它具有简单通用,鲁棒性强,使用范围广等特点,是一种有效的搜索方法<sup>[5]</sup>。

遗传算法模拟自然选择和自然遗传过程中发生的繁殖、交叉和基因突变现象,在每次迭代中都保留一组候选解,并按某种指标从解群中选取较优的个体,利用遗传算子(选择、交叉和变异)对这些个体进行组合,产生新一代的候选解群,重复此过程,直到满足某种收敛指标为止<sup>[5]</sup>。算法的计算流程图如图 5 所示。

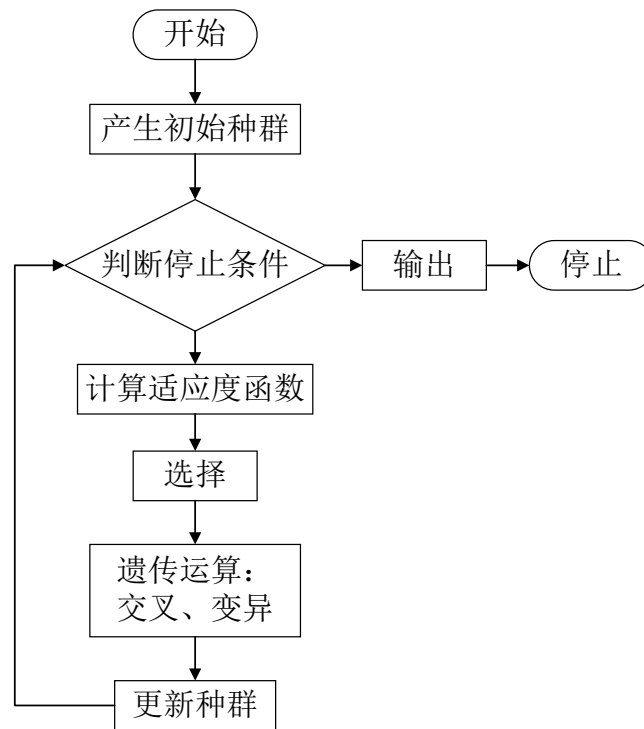


图 5. 遗传算法流程图

由上图可以看到遗传算法实现中的各个步骤包括:初始种群的产生、编码方法、适应度函数、选择、遗传运算、停止准则。遗传算法规定适应度函数必须为非负,并且在任何情况下总是希望越大越好。本题采用优化的目标函数作为适应度函数,由于原目标函数为求最小值,所以适应度函数取原目标函数的倒数。设置种群规模为 20,交叉概率 0.8,变异概率 0.2,采用算法的最大代数 100 作为停止准则,使用 MATLAB 自带的遗传算法 ga 函数求解该问题。经多次优化,可得到一组最优的运动参数,并给出了能耗最低时的速度距离曲线,如图 6 所示。

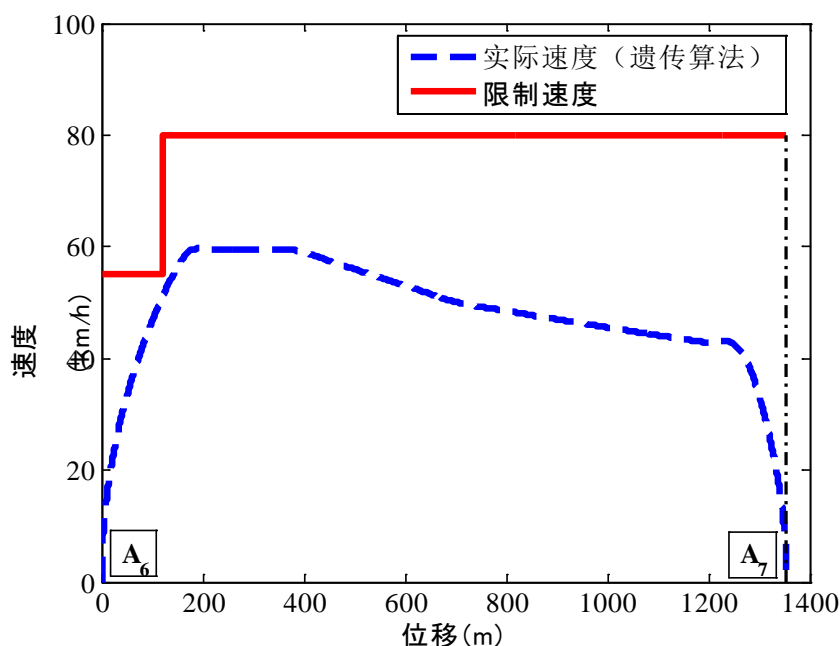


图 6. 优化的速度距离曲线（遗传算法）

与上一种算法类似分析，图中蓝色虚线表示优化的速度距离曲线。该曲线依次包含了“牵引-巡航-惰行-制动”阶段，每一个阶段的运动参数列于表 2 中。

表 2 优化后的列车运动参数（遗传算法）

运行阶段	运行路程(m)	运行时间(s)
牵引阶段	0-172.95	0-20.1
巡航阶段	172.95-372.12	20.1-29.1
惰行阶段	372.12-1277.79	29.1-96.0
制动阶段	1277.79-1354.05	96.0-110

类似地，整个运行过程中的速度变化为：在牵引阶段，牵引力的作用下，速度从 0 增大至 59.18km/h，加速度从较大值逐渐减小，至 20s 左右进入巡航阶段，速度维持在 59.44km/h 左右，加速度基本为 0，并于运行 9s 后进入惰性阶段，速度逐渐降低至 39.10km/h，加速度数值缓慢增加，直至 96s 时开始制动，加速度数值迅速增大，速度迅速降低至 0。

在该优化结果下，总耗能  $E = 3.2446 \times 10^7 \text{ J}$ 。并且注意到，优化结束时列车运行路程为 1354.05m，与精确的路程 1354m 有 5cm 的误差。

#### 4.2.3 模型验证与分析

求解该模型时，选取设计变量的初值  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 20 \ 30 \ 95 \ 1]^T$ ，分别代入上述 2 种求解算法中得到两组最优的设计变量值。对两组优化结果进行分析，我们发现：非线性内点法得到的能耗值  $E = 3.4079 \times 10^7 \text{ J}$ ，遗传算法得到的能耗值  $E = 3.2446 \times 10^7 \text{ J}$ ，而未优化前，初始变量对应的能耗值为  $E = 4.0602 \times 10^7 \text{ J}$ 。该分析验证了本题建立的优化模型具有很好的寻优性能，优化结果使得列车运行的能耗降幅超过 20%，模型十分有效地达到了节能的效果。

本题还对比了两种优化算法，分析发现：

① 对该问题而言，非线性内点法与遗传算法的计算精度大致相同，并且误差都很小（0.034‰），能够满足解决该问题的精度需求。

② 通过比较具体的运动参数，我们发现两者在每一瞬时的运动参数值也很接近，遗传算法得到的总能耗稍低于非线性内点法，说明遗传算法具有更为良好的优化效果。

③ 尽管如此，遗传算法的计算耗时远远多于非线性内点法，并且需要多次运行以找到最优的结果，在实际应用中效率偏低。

第(1)问得到的曲线数据按每秒钟一行已填写到“输入数据 A6-A7.xlsx”文档中，表格数据见附录表 7。

### 4.3 第(2)问的模型建立与求解

#### 4.3.1 动力学模型与最优化模型的建立

根据问题描述，对该问题涉及的几种外力进行分析。对比第(1)问，我们发现，这两问的主要区别在于：

① 第(2)问列车在  $A_7$  站停靠 45 秒，因此运动以时间为自变量时是不连续的，所以本题从能量的角度对问题进行重新建模；

② 第(2)问列车的运行区间为  $A_6 - A_7$  和  $A_7 - A_8$  两段，总运行时间确定但每一段的运行时间不确定；

③  $A_7 - A_8$  段的路程和坡度随路程的变化与  $A_6 - A_7$  段的不同。所以列车运动参数不同。

但是，列车实际输出牵引力  $F$  (kN) 和列车实际输出制动力  $B$  (kN) 的表达式是一致的，列车的总阻力  $W$  (N) 表达式基本与第(1)问一致，只有线路坡度  $d$  (‰) 随距  $A_6$  站的路程  $s$  变化关系更为复杂，具体为：

$$d = \begin{cases} 0 & 0 \leq s < 304\text{m} \\ 1.8 & 304 \leq s < 684\text{m} \\ -3.5 & 684 \leq s < 1304\text{m} \\ 0 & 1304 \leq s < 1594\text{m} \\ 3 & 1594 \leq s < 1994\text{m} \\ -2 & 1994 \leq s < 2554\text{m} \\ 0 & 2554 \leq s < 2634\text{m} \end{cases} \quad (4.10)$$

类比第(1)问，假设列车在每一段内运行时，均采用“牵引-巡航-惰行-制动”的工况运动，其速度距离曲线示意图如图 7 所示。

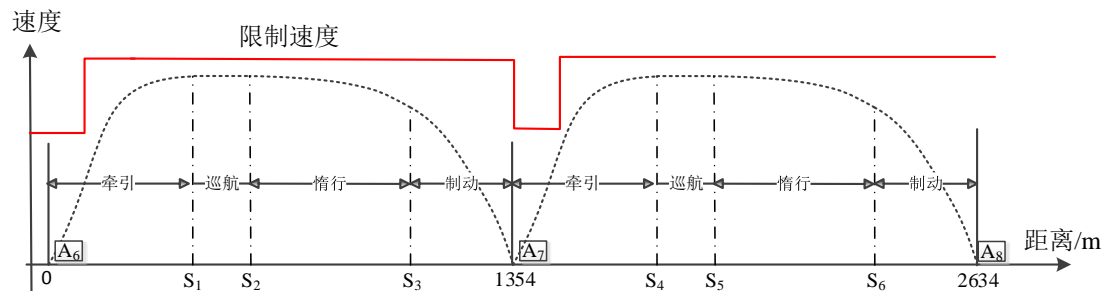


图 7. 列车在  $A_6$  站到  $A_8$  站之间运行示意图

从该图中可以看出，距  $A_6$  站的路程  $s$  分成 8 个阶段，前 4 个阶段对应于间为  $A_6 - A_7$  段，后 4 个阶段对应于  $A_7 - A_8$  段。其中： $0 - s_1$  为牵引阶段的路程，对应的运行时间为  $0 - t_1$ ； $s_1 - s_2$  为巡航阶段的路程，对应的运行时间为  $t_1 - t_2$ ； $s_2 - s_3$  为惰行阶段，对应的运行时间为  $t_2 - t_3$ ； $s_3 - 1354\text{m}$  为制动阶段的路程，对应的运行时间为  $t_3 - t_4$ ，在  $t_4$  时刻到达  $A_7$  站。停留 45 秒后，即  $t_5 = t_4 + 45\text{s}$  时，列车从  $A_7$  站出发， $1354\text{m} - s_4$  为牵引阶段的路程，对应的运行时间为  $t_5 - t_6$ ； $s_4 - s_5$  为巡航阶段的路程，对应的运行时间为  $t_6 - t_7$ ； $s_5 - s_6$  为惰行阶段，对应的运行时间为  $t_7 - t_8$ ； $s_6 - 2634\text{m}$  为制动阶段的路程，对应的运行时间为  $t_8 - t_n$ ，在  $t_n = 220 + 45 = 265\text{s}$  时刻到达  $A_8$  站。

因此，列车在该过程中的能量消耗表达式为：

$$E = \int_0^{t_1} \mu_f^1 F_{\max}(v) \cdot v dt + \int_{t_1}^{t_2} W \cdot v dt + \int_{t_5}^{t_6} \mu_f^2 F_{\max}(v) \cdot v dt + \int_{t_6}^{t_7} W \cdot v dt \quad (4.11)$$

其中： $E$  是列车运行的总能耗 (J)。类似地，由于列车运行的四个阶段中，只有牵引阶段和巡航阶段发动机处于耗能阶段，并且巡航阶段的牵引力与总阻力平衡，因此总能耗可用牵引阶段和巡航阶段两段时间内的外力做功来积分表达。在第 (2) 问中，列车的运行有两段组成，因此一共由四个积分作为总能耗，同时实际运行牵引力  $F$  和实际运行制动力  $B$  的系数  $\mu_f$  和  $\mu_b$  分别采用  $\mu_f^1$ 、 $\mu_f^2$  和  $\mu_b^1$ 、 $\mu_b^2$  来区分为  $A_6 - A_7$  和  $A_7 - A_8$  两段的参数。

由于第 (2) 问列车的运动不是连续的，在运行过程中有 45 秒的停止，因此本题从能量与运动的角度对列车重新进行分析，以路程为自变量，可得到动能、运动时间与列车运行路程之间的关系。于是，建立新的质点（即单列车）的动力学微分方程<sup>[6]</sup>如下：

$$\begin{cases} \frac{dK(s)}{ds} = \mu_f F_{\max}(v) - \mu_b B_{\max}(v) - W \\ \frac{dt(s)}{ds} = \sqrt{\frac{M}{2K(s)}} \end{cases} \quad (4.12)$$

其中： $K(s)$  是列车在运行过程中的动能 (J)，它与列车运动路程  $s$  有关。

综上分析可知，该模型需要确定的设计变量有 12 个，记为： $\mathbf{x} = [\mu_f^1, t_1, t_2, t_3, \mu_b^1, t_4, t_5, \mu_f^2, t_6, t_7, t_8, \mu_b^2]^T$ ，模型总结为：

$$\begin{aligned} & \min E \\ & \text{s.t. } 0 \leq v_i \leq V_{\text{line}}, \quad v_0 = v(t_4) = v(t_5) = v_n = 0 \\ & \quad 0 \leq s_i \leq s_n, \quad s_0 = 0, \quad s_n = 2634\text{m} \\ & \quad 0 \leq t_i \leq t_n, \quad t_0 = 0, \quad t_n = 265\text{s}, \quad t_5 - t_4 = 45\text{s}, \\ & \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 < t_5 \leq t_6 \leq t_7 \leq t_8 \leq t_n \\ & \quad 0 \leq \mu_f^1 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_f^2 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_b^1 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_b^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中： $V_{\text{line}} = 80\text{km/h}$ 。

### 4.3.2 模型求解

该模型从理解上与第 (1) 问类似，但由于建立的模型不同，所以本题拟采用速度上较快、效率较高的非线性内点法得到优化数据。

使用 MATLAB 编制程序，得到了单列车从  $A_6$  站出发，经停  $A_7$  站 45 秒后，到达  $A_8$  站的运行过程中的运动参数，并给出了所得到的能耗最低时的速度距离曲线，如图 8 所示。

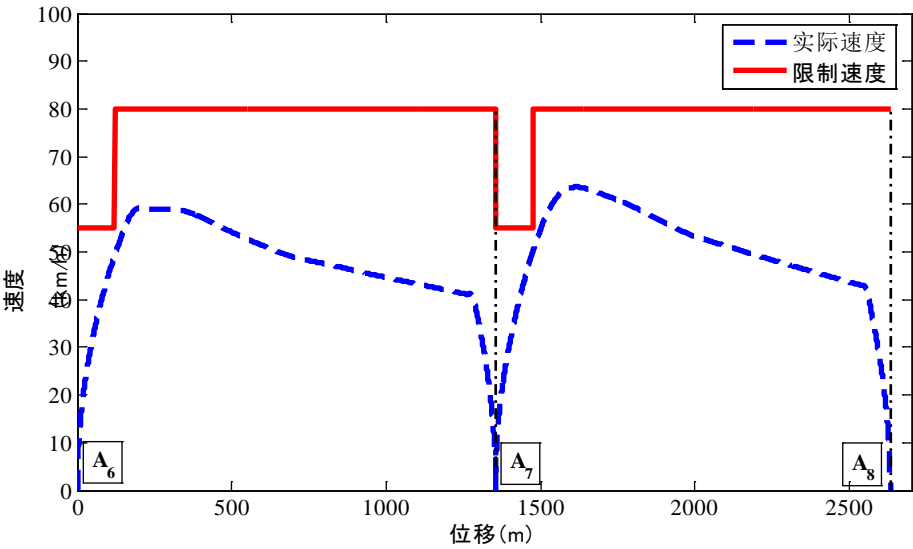


图 8. 优化的速度距离曲线

图中，蓝色虚线表示优化的速度距离曲线。该曲线依次包含了两个运行段的“牵引-巡航-惰行-制动”阶段，现按运行路程的增加将运动参数列于表 3 中。

表 3 优化后的列车运动参数

运行阶段		运行路程(m)	运行时间(s)
$A_6 - A_7$	牵引阶段	0-176.07	0-21.1
	巡航阶段	176.07-338.11	21.1-31.0
	惰行阶段	338.11-1279.37	31.0-101.9
	制动阶段	1279.31-1354.00	101.9-114.0
经停 $A_7$ 站		1354.00	114.0-159.0
$A_7 - A_8$	牵引阶段	1354.00-1561.66	159.0-180.5
	巡航阶段	1561.66-1640.61	180.5-185.0
	惰行阶段	1640.61-2627.14	185.0-249.1
	制动阶段	2627.14-2631.38	249.1-265.0

整个运行过程中的速度变化为：在  $A_6 - A_7$  段的牵引阶段，牵引力的作用下，速度从 0 增大至 58.03km/h，加速度从较大值逐渐减小，至 21s 左右进入巡航阶段，速度维持在 58.75km/h 左右，加速度基本为 0，并于运行 10s 后进入惰性阶段，速度逐渐降低至 40.82km/h，加速度数值缓慢增加，直至 102s 时开始制动，加速度数值迅速增大，速度迅速降低至 0。到 114s 时，列车到达  $A_7$  站，并停留 45s，之后进入  $A_7 - A_8$  的运行。类似地， $A_7 - A_8$  段的牵引阶段在牵引力的作用下，速度从 0 增大至 62.17km/h，加速度从较大值逐渐减小，至 180s 左右进入巡航阶



段,速度维持在 63.43km/h 左右,加速度基本为 0,并于运行 5s 后进入惰性阶段,速度逐渐降低至 41.72km/h,加速度数值缓慢增加,直至 249s 时开始制动,加速度数值迅速增大,速度迅速降低至 0。

在该优化结果下,总耗能  $E = 6.5212 \times 10^7 \text{ J}$ 。并且注意到,优化结束时列车运行路程为 2631.38m,与精确的路程 2634m 有 2.62m 的误差。

#### 4.3.3 模型验证与分析

利用本题模型,选取设计变量的初值  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 20 \ 30 \ 100 \ 1 \ 113 \ 158 \ 1 \ 180 \ 185 \ 250 \ 1]^T$  进行寻优,将得到的最优结果与其相比较,发现:最优设计变量对应的能耗值为  $E = 6.5212 \times 10^7 \text{ J}$ ,而初始设计变量对应的能耗值为  $E = 8.3822 \times 10^7 \text{ J}$ 。因此我们可以看到:采用本题模型解决  $A_6 - A_8$  段的列车能耗优化问题十分有效。非线性内点法用于计算这一类优化问题具有迅速高效的特点,验证了模型的有效性。

同时,对本问题的优化结果进行分析,我们发现几个有意义的结论:

① 计算的误差 (1‰) 相比于第 (1) 问的误差 (0.034‰) 有所增大,但仍然非常小,具有明显的实用意义,远远满足实际需求。

② 此外,我们发现以上所有的运行情况中,巡航阶段占总运行时间的比例都很低,这表明以节能为目标的运行优化中,应尽量减少巡航阶段或者不包含巡航阶段,这样对降低能耗具有积极作用。当然,这样做可能会导致列车运行时间偏长,运行速度偏低,在列车实际运行中会降低运行效率。

③ 在该问的两段运行过程中,我们还发现:  $A_6 - A_7$  段总长 1354m,运行用时 114s;  $A_7 - A_8$  段总长 1280m,运行用时 106s。列车在站间的运行时间与站间距离几乎对应成比例,如果将该结论应用于列车全线路的运行,将对问题的简化起很大作用。

第 (2) 问得到的曲线数据按每秒钟一行已填写到“输入数据 A6-A8.xlsx”文档中,表格数据见附录表 8。

## 五、问题二求解

### 5.1 问题分析

问题二是关于多列车的节能运行优化控制问题。多列车的运行优化控制问题不能简单视为单列车节能运行优化控制问题的推广,这是因为多列车在运行时涉及再生制动能量的利用,在同一供电区段的列车均有可能相互产生影响,因此问题复杂性大大提高。

问题二第 (1) 问要求: 100 列列车以间隔  $\mathbf{H} = [h_1, \dots, h_{99}]^T$  从  $A_1$  站出发,追踪运行,依次经过  $A_2$ 、 $A_3$  等等到达  $A_4$  站,中间在各个车站停站最少  $D_{\min}$  秒,最多  $D_{\max}$  秒,建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔  $\mathbf{H}$ 。分析可知,该问也是一个非线性优化问题,需要优化的变量包括列车间隔  $\mathbf{H}$  和每一辆列车在各个车站停站时间  $D$ ,一共有  $99 + 100 \times 12 = 1299$  个设计变量需要优化。优化变量过多,优化操作将会十分复杂,在有限的时间内难以完成。因此,在建立模型求解该问题之前,需要进行一些合理的假设以减少变量,使问题简化。

该问题的优化目标是列车运行总能耗最低。由题干可知,一般认为列车站间运行时间和能耗存在近似的反比关系,而列车从  $A_1$  站到  $A_4$  站的总运行时间不变,

所以列车应当尽可能减小停站时间  $D$  以保证较大的行驶时间使能耗降低。同时，被利用了的再生能量可按照以下假设的公式计算：

$$E_{\text{uesd}} = E_{\text{reg}} \cdot \frac{t_{\text{overlap}}}{t_{\text{break}}} \quad (5.1)$$

其中：  $E_{\text{uesd}}$  表示被利用了的再生能量，  $E_{\text{reg}}$  表示列车  $i+1$  制动产生的再生能量，  $t_{\text{overlap}}$  是列车  $i+1$  制动的时间与列车  $i$  加速时间的重叠时间，  $t_{\text{break}}$  是列车  $i+1$  的制动时间。

由于行驶时间越长，列车间制动时间与加速时间的重叠概率越大，由上式可知，再生能量的利用率得到提高，这样就可以降低能耗，达到节能的目的。因此，可以假设每一辆列车在各个车站停站时间  $D$  相等且等于  $D_{\min} = 30\text{s}$ 。这样的假设减少了优化变量，且较为合理，为求解提供了便利。

题目亦告知：列车追踪运行时，为保证安全，跟踪列车（后车）速度不能超过限制速度  $V_{\text{limit}}$ ，以免后车无法及时制动停车，发生追尾事故。因为第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为  $T_0 = 63900$  秒，且从  $A_1$  站到  $A_{14}$  站的总运行时间不变，均为  $2086\text{s}$ （包括停站时间），因此每一时刻，在整个运行区间上平均最多不超过 4 辆列车在行驶。运行区间上有 14 个站，因此可以假设第（1）问不考虑追尾的情况。

问题二第（2）问要求：如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列，需重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。这个问题对间隔  $H$  分时段进行了更强的限制，并增加了列车数目，因此增大了列车之间追尾的可能，需要加以考虑。

在建立模型前，需对再生能量利用原理进行分析。再生能量利用发生在某一辆列车的进站制动阶段。牵引电动机转变为发电机工况，将列车运行的动能转换为电能，发电机产生的制动力使列车减速，此时列车向接触网反馈电能，此部分能量即为再生制动能。只有当相邻列车处于加速状态，才可以利用再生能量，从而减少从变电站获得的能量，达到节能的目的。如果某列车在制动时，其所处供电区段内没有其他列车加速，其产生的再生能量不能被利用而转变成热能被耗散。

由于列车运行的动能转换为电能的效率为 95%，因此产生的再生能量  $E_{\text{reg}}$  的计算方法为：

$$E_{\text{reg}} = (E_{\text{mech}} - E_f) \cdot 95\% \quad (5.2)$$

其中：  $E_{\text{mech}}$  是制动过程中列车机械能的变化量，  $E_f$  是制动过程中为克服基本阻力和附加阻力所做的功。

## 5.2 第（1）问的最优化模型

根据题目描述，假设每一辆列车通过每一个站段区间的时间是相等的。从  $A_1$  站行驶到  $A_{14}$  站共有 13 个区间，行驶完所有区间的时间为  $2086 - 12 \times 30 = 1726\text{s}$ 。

首先我们以一辆列车为研究对象，考查该列车从  $A_1$  站行驶到  $A_{14}$  站的整个过程中，列车在每一个站段区间上行驶时间的最优分配，即需要确定这 13 个区间的行驶时间  $T_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 13$ ) 的最优值，使得：

$$\sum_{n=1}^{13} T_n = 1726s \quad (5.3)$$

不难发现，该问题的解答类似于问题一第（2）问中把 220s 的行驶时间分配到两个站段区间上的解决方案。在对该问题的分析中我们有结论：列车在站间的运行时间与站间距离几乎对应成比例。因此，假设列车在站段区间的行驶时间与站间距离对应成比例，我们已知  $A_1$  站到  $A_{14}$  站的线路参数，就可以求出每一辆列车在各个站段区间的行驶时间。

从上一题的分析可知，在每一区间的行驶过程中，应尽量缩短巡航阶段可降低能耗。因此，针对本问题中每辆列车的每个区间，假设在每个区间内列车均采用“牵引-惰行-制动”的运行策略，取消巡航阶段，以使能耗最低，如图 9 所示。这样，每一个站段区间内的运动过程就可以采用类似于问题一第（1）问的优化方法得到该区间内每一阶段的运动时间，在本题中特别需要考虑的是牵引阶段和制动阶段的用时。所不同的是，列车没有巡航阶段，并且在有曲线阻力的路段需要把列车通过曲线时所产生的附加阻力折算为坡道阻力考虑到总阻力中去。

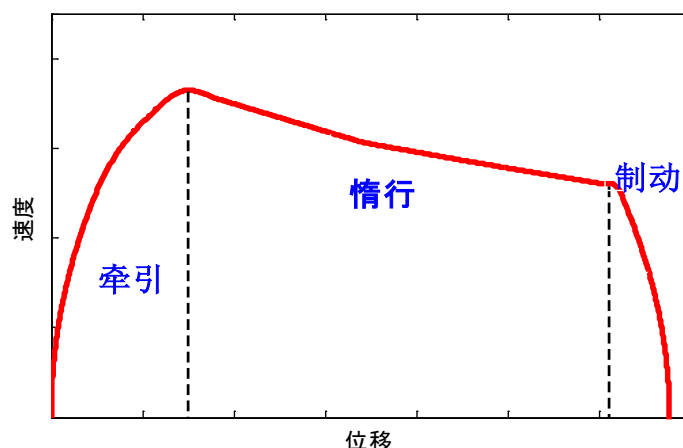


图 9. 单个站段区间内列车运行策略示意图

对上述的 13 个区间分别采用该方法得到每一个区间的牵引阶段和制动阶段的用时，列于表 4 中。详细的模型与算法不再赘述。

表 4 一辆列车在各个站段区间行驶参数表

站段区间	站间距离(m)	行驶时间(s)	牵引阶段用时(s)	制动阶段用时(s)
$A_1 - A_2$	1334	101.3	24.7	21.2
$A_2 - A_3$	1286	97.7	23.8	20.5
$A_3 - A_4$	2086	158.4	38.7	33.2
$A_4 - A_5$	2265	172.0	42.0	36.0
$A_5 - A_6$	2338	177.6	43.4	37.2
$A_6 - A_7$	1354	102.8	25.1	21.5
$A_7 - A_8$	1280	97.2	23.7	20.4
$A_8 - A_9$	1538	116.8	28.5	24.5
$A_9 - A_{10}$	993	75.4	18.4	15.8

$A_{10} - A_{11}$	1982	150.5	36.7	31.5
$A_{11} - A_{12}$	2366	179.7	43.9	37.6
$A_{12} - A_{13}$	1275	96.8	23.6	20.3
$A_{13} - A_{14}$	2631	199.8	48.8	41.8

通过以上假设与分析计算，每一辆车的运行过程基本确定，因此列车的耗能也基本确定。因此，多列车运行过程中，如果再生能量利用量高，则总耗能降低，达到节能的目的。基于以上考虑，要使列车再生制动能量利用量尽量高，列车间制动时间与加速时间的重叠时间就需要越大。所以，本题以列车间制动与加速阶段的重叠时间最大为优化目标。如图 10 所示为任意前后两列车在相邻车站的不同加减速状况图<sup>[7]</sup>，我们考虑两列车的运行过程，并引入再生能量的利用，通过对列车运行过程分析，寻找适当的目标函数表达式。

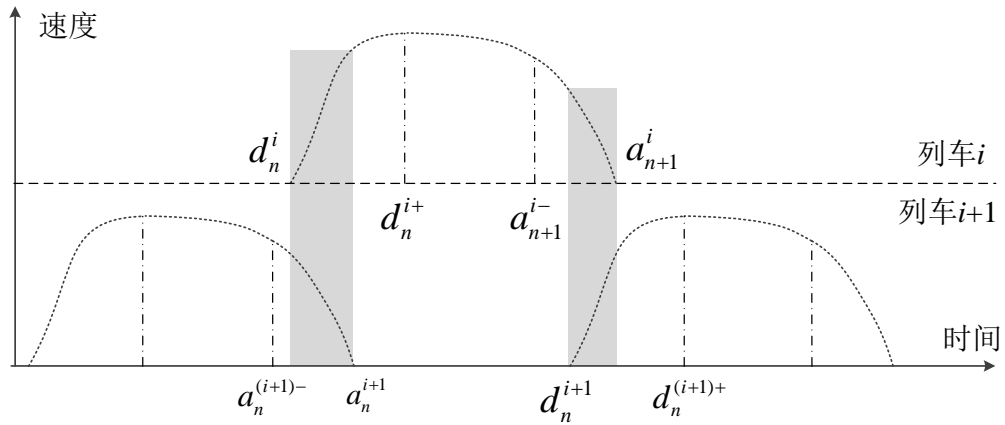


图 10. 两列车在相邻两车站的不同加减速状况图

上图中，从  $d_n^i$  到  $a_{n+1}^i$  表示列车  $i$  从  $A_n$  站到  $A_{n+1}$  站所用的时间，可以分为三个阶段，分别是牵引阶段、惰行阶段和制动阶段。 $d_n^i$  到  $d_n^{i+}$  表示列车  $i$  在站  $A_n$  的加速时间， $a_{n+1}^{i-}$  到  $a_{n+1}^i$  表示列车  $i$  在站  $A_{n+1}$  的制动时间。 $a_n^{i+1}$  到  $d_n^{i+1}$  表示列车  $i+1$  在站  $A_n$  的停留时间，其余符号含义类似。图中两列车在制动与加速的重叠时间用灰色块表示，这个时间段内产生的再生制动能量用于列车的牵引加速过程。

下面给出根据此图推导一般情况下的目标函数  $t_{\text{overlap}}(\mathbf{H})$  的伪代码：

```

 $t_{\text{overlap}} = 0$ 
FOR 遍历所有的制定区间  $[a_n^{i-}, a_n^i]$  ( $n = 2, 3, \dots, 14; i = 1, 2, \dots, 100$ )
     $T_s = []$ ,  $T_e = []$ 
    FOR 遍历所有的列车 ( $k = 1, 2, \dots, 99$ )
        IF  $d_{13}^{k+} \leq a_n^{i-}$  且  $d_{13}^{(k+1)+} > a_n^{i-}$  THEN
             $k_1 = k + 1$ 
        ENDIF
        IF  $d_1^k < a_n^i$  且  $d_1^{(k+1)} \geq a_n^i$  THEN
             $k_2 = k$ 
        ENDIF

```

```

ENDFOR
FOR 遍历  $k_1$  列车到  $k_2$  之间所有的牵引区间  $[d_m^j \ d_m^{j+}]$ 
    ( $m = 1, 2, \dots, 13; j = k_1, \dots, k_2$ )
     $t_s = \max(a_n^{i-}, d_m^j), \ t_e = \min(a_n^i, d_m^{j+})$ 
    IF  $t_s < t_e$  THEN
         $T_s = [T_s; t_s], \ T_e = [T_e; t_e]$ 
    ENDIF
ENDFOR
 $t_{\text{overlap}} = t_{\text{overlap}} + (\max(T_e) - \min(T_s))$ 
ENDFOR

```

下面建立关于列车在制动与加速的重叠时间最大的优化模型。模型的设计变量记为:  $\mathbf{H} = [h_1, \dots, h_{99}]^T$ , 模型总结如下:

$$\begin{aligned}
 & \max \ t_{\text{overlap}}(\mathbf{H}) \\
 & \text{s.t.} \ H_{\min} \leq h_i \leq H_{\max} \\
 & \sum_{i=1}^{99} h_i = 63900\text{s}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中:  $H_{\min} = 120\text{s}$ ,  $H_{\max} = 660\text{s}$ 。

### 5.2.1 模型求解

由于该问题是一个大型的优化系统, 故采用现代智能优化算法——遗传算法求解该模型。采用类似于问题一第(1)问中的遗传算法设置, 适应度函数取为目标函数, 得到优化结果。为了说明遗传算法的收敛性<sup>[8]</sup>, 本题首先设置遗传算法所需最大代数为 100, 并记录每一代的适应度如图 11 所示。

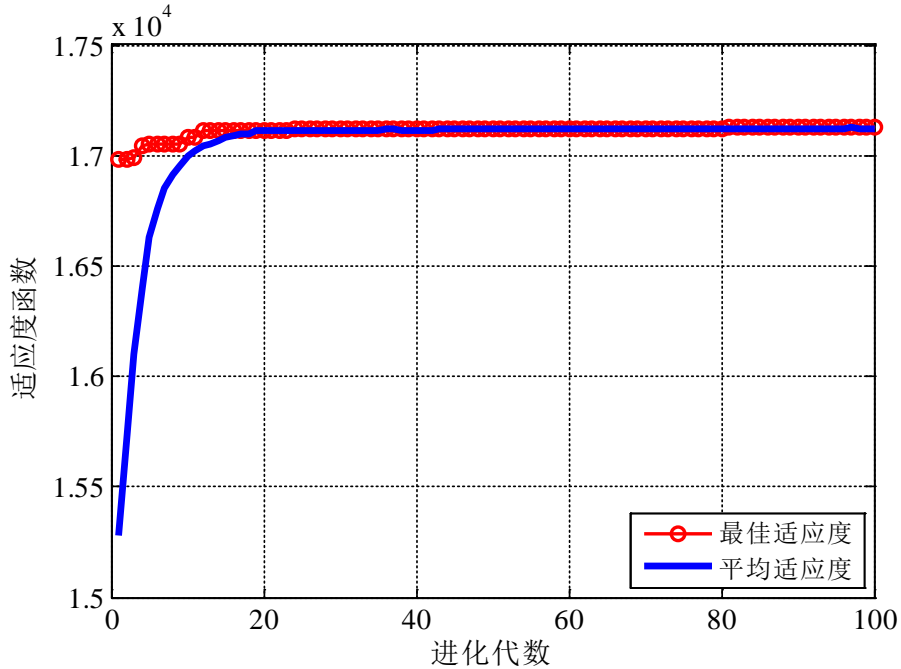


图 11. 遗传算法优化过程

该模型以时间间隔  $\mathbf{H}$  为优化变量。由于第一列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为  $T_0 = 63900$  秒, 所以设置初值时, 认为每个时间间隔相等, 为  $h_1 = h_2 = \dots = h_{99} = 63900 \div 99 = 645.45\text{s}$ 。经过优化, 得到了最优的时间间隔  $\mathbf{H}$ ,

列于表 5 中。

表 5 最优时间间隔表

$\mathbf{H}=[h_1,\cdots,h_{g_9}]^T$ 的最优值(s)									
650.60	650.31	648.94	649.90	652.67	649.95	651.46	649.69	648.43	652.98
649.71	651.29	650.70	651.24	649.44	650.02	652.76	649.65	651.47	651.08
651.19	649.43	650.45	649.49	650.35	651.94	650.39	649.03	650.87	651.24
650.22	652.44	648.94	651.22	651.30	650.87	651.54	650.98	651.08	651.43
650.94	650.99	650.41	650.94	650.48	651.47	650.27	651.17	651.42	649.35
653.04	649.65	649.15	653.09	649.43	650.44	649.46	650.81	651.07	651.32
649.79	651.25	649.59	650.88	650.33	650.95	651.40	650.25	652.58	650.14
650.70	650.28	652.53	649.15	650.78	651.21	649.74	650.00	651.95	652.70
126.52	652.54	650.05	650.33	652.07	650.48	651.15	651.23	650.94	651.59
651.22	650.70	650.44	649.34	651.78	650.67	649.67	653.17	648.31	/

观察发现，最优的时间间隔大部分都相差不大，在 650s 左右，只有一组数据偏小。现给出优化后 100 辆列车的运行图<sup>[9]</sup>，如图 12 所示。考虑到整体运行图数据太密，本文同时给出前 10 辆列车运行 0-6000s 的细节运行图，以便于分析观察，如图 13 所示。

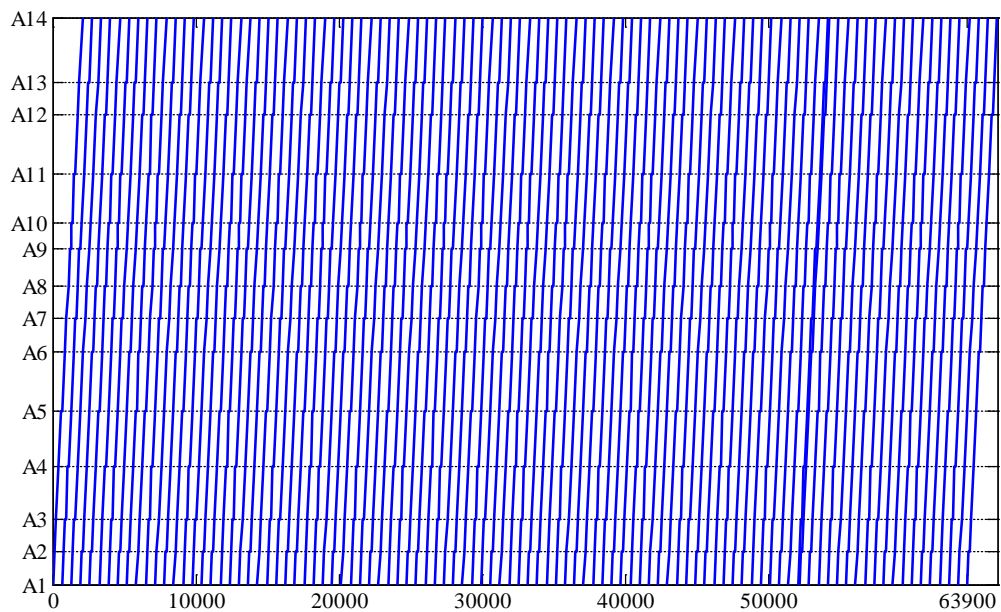


图 12. 100 辆列车的总运行图

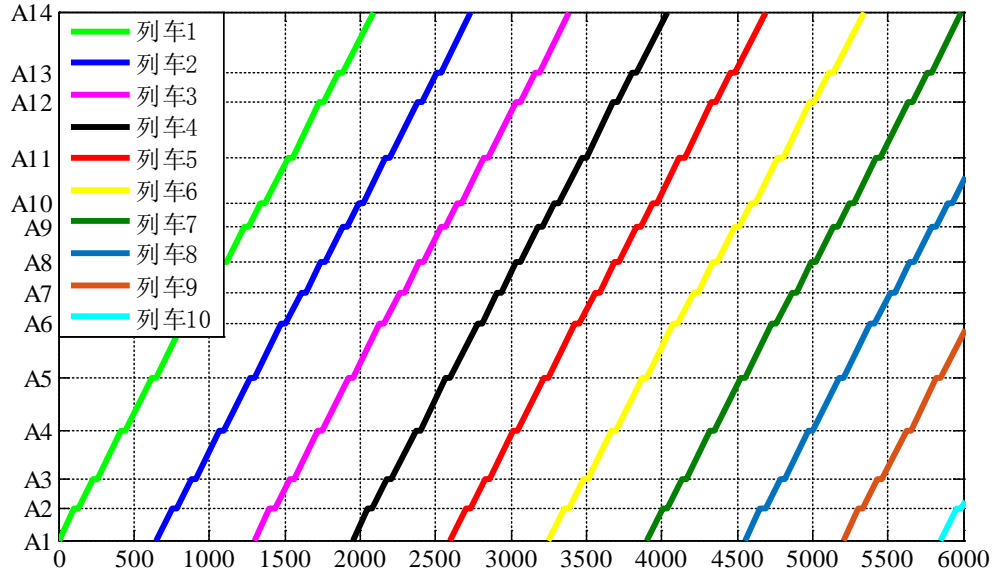


图 13. 前 10 辆列车运行 0-6000s 的细节运行图

### 5.2.2 模型验证与分析

求解该模型时，选取设计变量的初值  $\mathbf{H}_0 = [645.45 \ 645.45 \ \dots \ 645.45]^T$ ，即平均分配发车间隔时间，得到列车的运行过程中牵引阶段与制动阶段的重叠时间是 15462.5s，在利用模型得到的最优的时间间隔下，列车运行过程中牵引阶段与制动阶段的重叠时间是 17126.3s，相比于初始状态下的重叠时间提高了 10.8%，因此再生能量利用量显著增大，有效达到了节能的目的。

### 5.3 第 (2) 问的最优化模型

根据问题描述，第 (2) 问对列车的发车间隔进行了分时段的约束，在早高峰和晚高峰缩小发车间隔。因此，由于 240 辆列车均单向行驶，不往返运行，那么就可以对总运行时间进行分段考虑，即：当运行时间  $T_r = 0 - 7200s$  时，发车间隔  $300s \leq h_i \leq 660s$ ；当运行时间  $T_r = 7200s - 12600s$  时，发车间隔  $120s \leq h_i \leq 150s$ ；当运行时间  $T_r = 12600s - 43200s$  时，发车间隔  $300s \leq h_i \leq 660s$ ；当运行时间  $T_r = 43200s - 50400s$  时，发车间隔  $120s \leq h_i \leq 150s$ ；当运行时间  $T_r = 50400s - 63900s$  时，发车间隔  $300s \leq h_i \leq 660s$ 。

进行分时段处理后，需要分两个步骤建模。首先假设每个时间段内列车的发车间隔相等，基于此对每一运行时间段建立最优列车发车间隔数量的分配模型，分配好每一段的运行列车发车间隔数量，随后建立每一段的列车制动与加速的重叠时间最优模型，求解得到最优的发车间隔。

#### 模型 1 发车间隔数量分配模型

先对每一运行时间段建立最优列车发车间隔数量分配模型。设计变量为上述 5 个时间段上运行的列车发车间隔数依次为  $x_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) 辆，记为  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ 。根据每一段运行时间和发车间隔的关系，不难得到  $x_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) 的取值范围，于是模型建立如下：

$$\begin{aligned}
& \max t_{\text{overlap}}(\mathbf{H}) \\
& \text{s.t. } 19 \leq x_1 \leq 21 \\
& \quad 36 \leq x_2 \leq 45 \\
& \quad 80 \leq x_3 \leq 93 \\
& \quad 48 \leq x_4 \leq 60 \\
& \quad 35 \leq 239 - \sum_{i=1}^4 x_i \leq 41 \\
& \quad x_i \in \mathbf{Z}, (i=1,2,3,4)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

下面对约束条件进行说明。由于高峰期一共 12600s，采用  $120\text{s} \leq h_i \leq 150\text{s}$  的发车间隔，则有 84-105 个发车间隔数，按早高峰和晚高峰的时长比例分配发车间隔数，那么早高峰时段（第 2 段）有 36-45 个发车间隔，晚高峰时段（第 4 段）有 48-60 个发车间隔数。非高峰时段有 3 段，可发列车间隔数为 155-134 个，仍按这三段时长的比例分配发车间隔数，那么第 1 段有 19-21 个发车间隔数，第 3 段有 80-93 个发车间隔数，第五段有 35-41 个发车间隔数。由此即可设置约束条件。

求得该模型的最优解为  $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T=[21 \ 36 \ 90 \ 54]^T$ （求解方法是遗传算法，具体见下一节模型求解与分析）。由此，可得到各时间段分配的最优列车发车间隔数量依次为 21、36、90、54、38，一共 239 个发车间隔数。下面对每一时间段建立列车制动与加速的重叠时间最优模型，求得最优发车间隔  $\mathbf{H}=[h_1, \dots, h_{239}]^T$ 。

### 模型 2 最优发车间隔模型

建立每一段的列车制动与加速的重叠时间最优模型。对每一个时间段而言，已知每一段的列车间隔数量，求使所有列车运行总能耗最低的发车间隔  $\mathbf{H}$ ，这个问题与问题二第（1）问是类似的，区别在于列车发车密度增大，不可忽略追尾的影响。

基于以上考虑，模型的设计变量记为： $\mathbf{H}=[h_1, \dots, h_{239}]^T$ ，模型总结如下：

$$\begin{aligned}
& \max t_{\text{overlap}}(\mathbf{H}) \\
& \text{s.t. } 300\text{s} \leq h_i \leq 660\text{s}, (i=1, \dots, 21, 58, \dots, 147, 202, \dots, 239) \\
& \quad 120\text{s} \leq h_i \leq 150\text{s}, (i=22, \dots, 57, 148, \dots, 201) \\
& \quad \sum_{i=1}^{239} h_i = 63900\text{s} \\
& \quad v = \min(V_{\text{line}}, \sqrt{2LB_e})
\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中： $V_{\text{line}}$  是列车当前位置的线路限速（km/h）， $L$  是当前时刻前后车之间的距离（m）， $B_e$  是列车制动的最大减速度（m/s<sup>2</sup>）。

#### 5.3.1 模型求解

由于这一问的情况比较复杂，变量有 239 个，属于复杂大型非线性优化问题，并且本题模型是由两个步骤的优化得到的。因此，本题采用遗传算法求解该问题的最优解。遗传算法设置与上一问类似。

**模型 1** 对于每一运行时间段上最优列车数量分配模型，求得该模型的最优解为  $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T=[21 \ 36 \ 90 \ 54]^T$ 。最优情况下，列车制动与加速的重叠时



间为 $t_{\text{overlap}} = 7.9138 \times 10^4 \text{ s}$ 。该模型确定了每一个时间段上的列车间隔数量，也就确定了 5 个时间段的运行列车数量。但是该模型假设了每个时间段上列车发车间隔是相同的，因此还需进一步优化发车间隔，使得每一段的列车制动与加速的重叠时间最优。

**模型 2** 对每一段的列车制动与加速的重叠时间最优模型进行求解。由以上分析可知，每一段的列车数量、总运行时间均已知，因此计算方法与问题二第(1)问类似，在此不再赘述求解过程。本题首先设置遗传算法所需最大代数为 30,并记录程序运行的每一代的适应度如图 14 所示，并列出优化的发车间隔  $\mathbf{H} = [h_1, \dots, h_{239}]^T$  于表 6 中。在此最优情况下，列车制动与加速的重叠时间为  $t_{\text{overlap}} = 8.0954 \times 10^4 \text{ s}$ 。

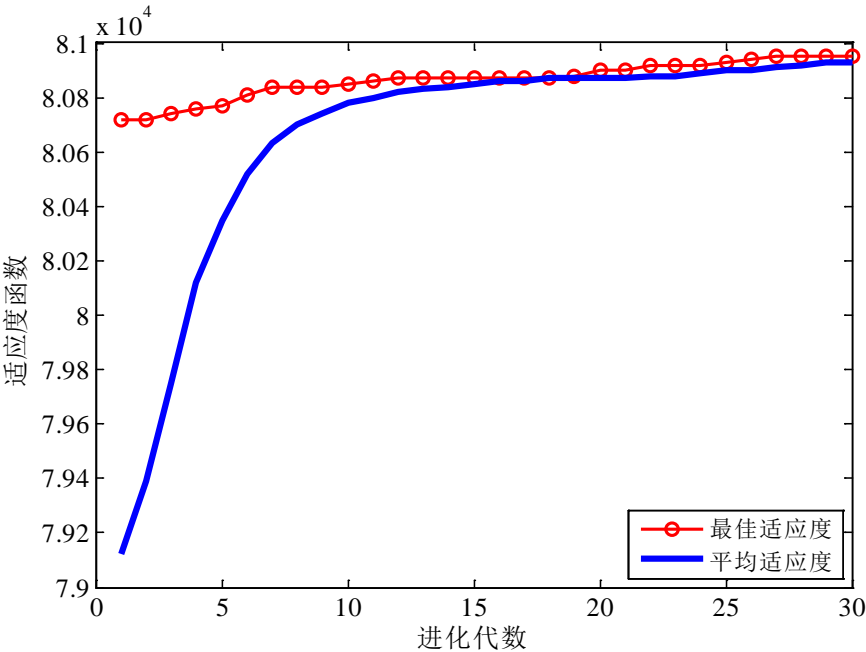


图 14. 遗传算法的优化过程

表 6 最优时间间隔表

运行时间	$\mathbf{H} = [h_1, \dots, h_{239}]^T$ 的最优值(s)							
第 1 段 0-7200s 21 个发车间隔	342.85	343.74	345.36	341.29	342.58	344.22	342.94	342.75
	342.54	343.33	343.19	341.55	341.36	343.07	342.47	342.37
	342.93	342.47	342.18	344.75	342.05	342.93		
第 2 段 “早高峰” 7200s-12600s 36 个发车间隔	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00
	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00
	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00
	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00
	150.00	150.00	150.00	150.00				
第 3 段 12600s-43200s	342.56	342.20	342.00	339.71	340.16	337.75	339.34	339.82
	340.60	340.85	339.42	339.24	339.14	338.32	341.14	339.34

90 个发车间隔	338.01	339.20	340.95	340.09	341.75	338.81	341.44	338.89
	339.55	341.07	339.15	340.19	341.37	339.23	339.00	340.68
	338.70	338.89	339.74	339.44	340.95	340.30	340.45	339.17
	341.21	340.59	339.80	341.17	339.98	338.19	341.15	338.24
	339.59	341.73	339.67	340.20	339.26	340.47	341.14	339.32
	339.01	339.61	339.73	342.13	339.68	339.30	339.61	340.48
	340.23	337.72	342.78	341.15	338.78	340.91	340.58	339.51
	339.50	340.73	339.13	338.14	341.19	339.07	338.46	340.66
	340.78	341.09	339.68	340.57	339.59	340.51	340.45	340.05
	339.22	339.66						
第 4 段 “晚高峰” 43200s-50400s 54 个发车间隔	131.03	132.41	133.98	132.57	133.95	134.43	132.60	132.53
	133.10	132.95	134.34	133.72	132.19	133.77	132.13	134.15
	131.68	139.98	133.01	133.31	136.03	134.08	132.43	133.10
	134.79	132.42	132.52	133.46	133.77	133.60	133.63	134.86
	133.21	134.11	132.21	133.97	134.83	131.93	132.48	133.20
	132.61	134.60	134.12	133.21	133.40	132.67	134.35	129.48
	133.21	133.04	133.16	132.87	132.36	132.49		
第 5 段 50400s-63900s 38 个发车间隔	347.69	346.58	345.69	345.32	348.38	347.13	347.32	347.45
	346.53	347.48	346.28	347.67	347.88	347.60	345.66	348.01
	347.19	347.27	348.35	348.80	347.68	345.28	345.28	346.56
	347.87	347.92	348.59	346.29	347.56	347.64	345.55	347.96
	347.31	345.85	346.48	344.72	347.26	659.96		

据此表格，可以重新制定列车的运行图。现给出优化后 240 辆列车的运行图，如图 15 所示。图中反映了上述 5 个时间段的列车运行时刻与发车间隔的趋势。

考虑到整体运行图数据太密，本文同时给出列车 9- 列车 40 在运行 5000s-10000s 的细节运行图，以便于分析观察，如图 16 所示。该图所在时间区域是第 1 段与第 2 段时间段的结合处，能清晰地看到发车密度在早高峰开始后明显增大，发车间隔明显减小并且保证不发生追尾。

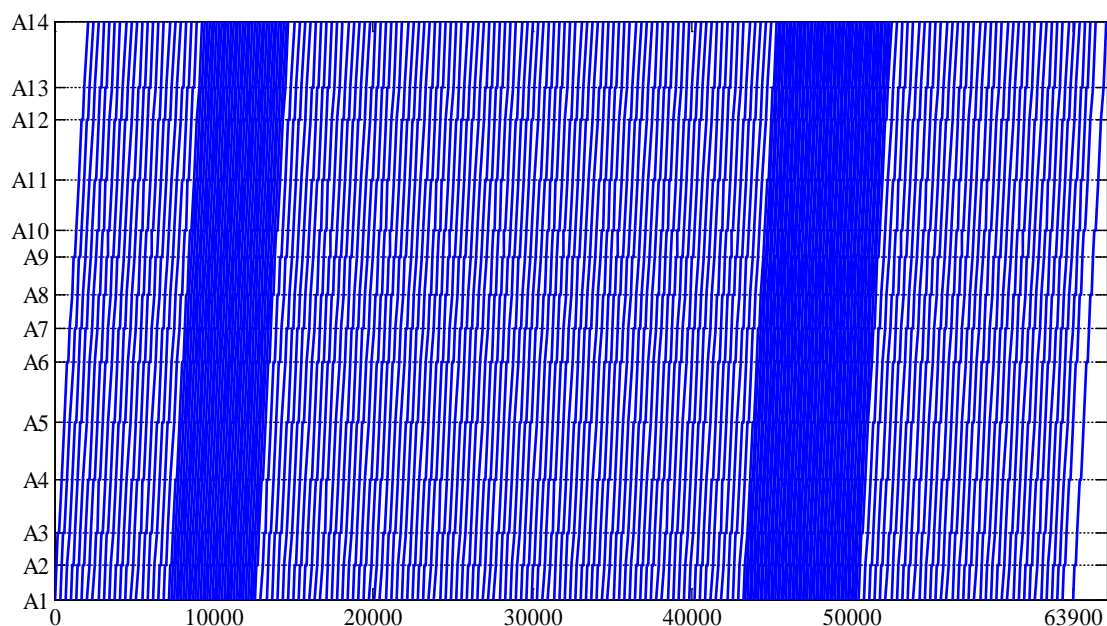


图 15. 240 辆列车的总运行图

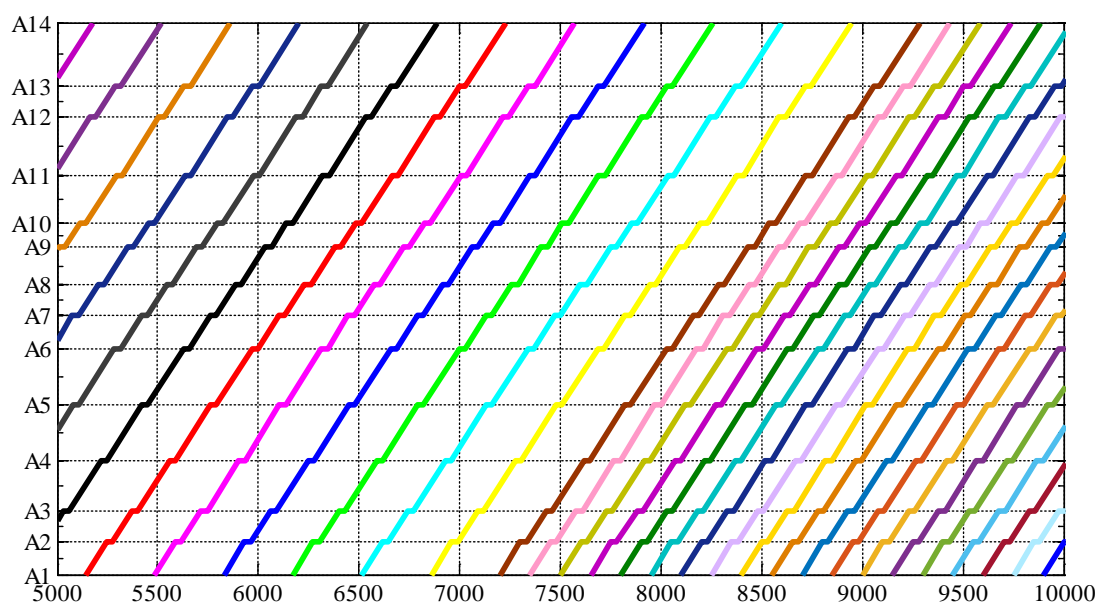


图 16. 列车 9-列车 40 在 5000s-10000s 时的运行过程图

### 5.3.2 模型验证与分析

本题模型采用遗传算法求解寻优，考虑了早晚高峰出现的情况下列车发车间隔的优化问题。该算法收敛性好，得到了符合题目约束的最优结果。本题中前一个模型计算出最优列车发车间隔数分配时，得到的列车制动与加速的重叠时间为  $t_{\text{overlap}} = 7.9138 \times 10^4 \text{s}$ ，后一个模型对发车间隔优化后得到的列车制动与加速的重叠时间为  $t_{\text{overlap}} = 8.0954 \times 10^4 \text{s}$ ，经验证发现：本题建立的两步模型能够在满足约束要求的前提下有效增大再生能量利用量，从而达到节能的目的，十分有效。

## 六、问题三求解

### 6.1 问题分析

问题三是关于列车延误后的运行优化控制问题。该问题在多列车的节能运行优化控制的基础上，考虑某一辆列车  $i$  在车站  $A_j$  延误  $DT_j^i$  时长后发车，要求建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。

因此，本题的主要任务是对列车晚点恢复的建模。其中，延误时长  $DT_j^i$  分为恒定值和随机变量两种情况进行考虑。当  $DT_j^i$  是恒定值时，取  $DT_j^i = 10s$  分析建模；当  $DT_j^i$  是随机变量时，应符合题目中的概率要求。

### 6.2 延误时间恒定时的最优化模型

在建立模型前，需对列车晚点问题进行分析。

由上一问可知，列车是按照计划运行图运行的，而列车发生晚点后，列车的实际运行图和计划运行图出现了偏差，所以列车晚点恢复问题可以看作如何合理的让列车运行时刻逐渐恢复到按照计划运行图运行的过程。下面我们就以运行图为基础，对列车晚点恢复过程进行建模。

列车运行图的基本要素由列车进站时间、列车出站时间、列车区间运行时间和列车站停时间等几个方面组成。本文根据列车运行图的每一个要素，定义以下几个矩阵，矩阵中的每一个元素代表第  $i$  辆列车在第  $j$  站的运动状态。这些矩阵分别为：列车计划到达时间矩阵  $PA = [pa_{ij}]$ 、列车计划出站时间矩阵  $PL = [pl_{ij}]$ 、列车实际到达时间矩阵  $TA = [ta_{ij}]$ 、列车实际出站时间矩阵  $TL = [tl_{ij}]$ 、列车到达时间误差矩阵  $DA = [da_{ij}]$  以及列车出站时间误差矩阵  $DL = [dl_{ij}]$ 。

由上述矩阵可以归纳总结出列车晚点各时间之间的关系<sup>[10]</sup>，在此基础上可以确定列车晚点的调整约束条件、调整优化目标以及构建列车晚点时间模型。

下面建立约束条件。作为一个多变量的复杂系统，列车是按照一定的规则运行的，这些规则组成列车调整的约束条件<sup>[10]</sup>。列车的运行速度有一定的限制，所以列车在站段区间的运行时间也有一个最小值  $y_j$ ，因此：

$$ta_{i,j+1} - tl_{ij} \geq y_j \quad (6.1)$$

其中： $y_j$  的取值假定为各站段区间运行时间的 5%，各站段区间的运行时间已由表 4 给出。

对于同向列车，前后车必须保持一定的追踪时间和追踪距离。晚点调整系统中，我们采用前后两趟列车到达车站或从车站出发的时间差来表示两车之间的追踪间隔  $q$ ，因此：

$$\begin{cases} ta_{i+1,j} - ta_{i,j} \geq q \\ tl_{i+1,j} - tl_{ij} \geq q \end{cases} \quad (6.2)$$

其中： $q$  的取值应考虑不大于发车间隔，但不宜太小，否则该条件失去约束意义。因此，结合上一问表 6 中数据，在本问中， $q = 130s$ 。

在列车晚点调整中，任何列车的进站时间和出站时间都不能早于规定的时间，因此：

$$\begin{cases} tl_{ij} \geq pl_{ij} \\ ta_{ij} \geq pa_{ij} \end{cases} \quad (6.3)$$

这样，上述式(6.1)-式(6.3)构成了该模型的约束条件。

下面考虑目标函数及其表达式。因为发生晚点后，列车就需要以某种最优的指标恢复调整到正常运行的状态。因此，设计列车的总晚点时间最小作为优化目标，其次考虑恢复期间耗能最少。记列车的总延误时间为 $T_d$ ，则有：

$$T_d = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^n da_{ij}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n dl_{ij}^2 \quad (6.4)$$

作为衡量总延误时间的指标， $T_d$ 值越小，说明列车晚点恢复越快。由于还需考虑耗能尽量低，因此将列车制动与加速的重叠时间 $t_{\text{overlap}}$ 纳入目标函数考虑，目标函数可以写成：

$$N = T_d - \alpha \cdot t_{\text{overlap}} \quad (6.5)$$

其中： $N$ 表示目标函数， $\alpha$ 是考虑恢复期间能耗最低时的权重系数<sup>[11-12]</sup>。

综上所述，该模型以某时刻晚点列车及其后列车的停站时间和在各站段区间行驶时间为优化变量，模型总结如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & N \\ \text{s.t.} \quad & ta_{i,j+1} - tl_{ij} \geq y_j \\ & ta_{i+1,j} - ta_{i,j} \geq q \\ & tl_{i+1,j} - tl_{ij} \geq q \quad (i = 1, 2, \dots, 240; j = 1, 2, \dots, 14) \\ & da_{ij} \geq 0 \\ & dl_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

### 6.2.1 模型求解

由于该问的延误时间 $DT_j^i$ 恒定且为 10s，模型的求解需要具体数据的支撑，因此接上问，也就是说高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列车运行的情况下，本题分别在高峰期和非高峰期各选择一组数据，在某站延误 10s 的情形下给出模型的求解与分析。

该问模型简洁易懂，采用内点法求解最优值即可。求解下面两例时，选取 $\alpha = 0$ 以考查延误恢复的对比，忽略能量对结果可能产生的影响。

1) 在非高峰期，假设第 90 号列车在 $A_5$ 站因故延误 10s 发车，那么根据问题二求得的数据，可求得结论为：列车到达 $A_6$ 站时延误缩短至 1.12s，之后开往 $A_7$ 站即可做到不晚点。该情况下的列车运行图如图 17 所示，图中红色折线即代表晚点恢复的运行过程。观察图形发现，列车在运行恢复过程中，没有对邻近列车的行驶造成影响，这是由于列车的发车间隙较大导致的。在该情况下，总延误时间 $T_d = 12.2s$ 。

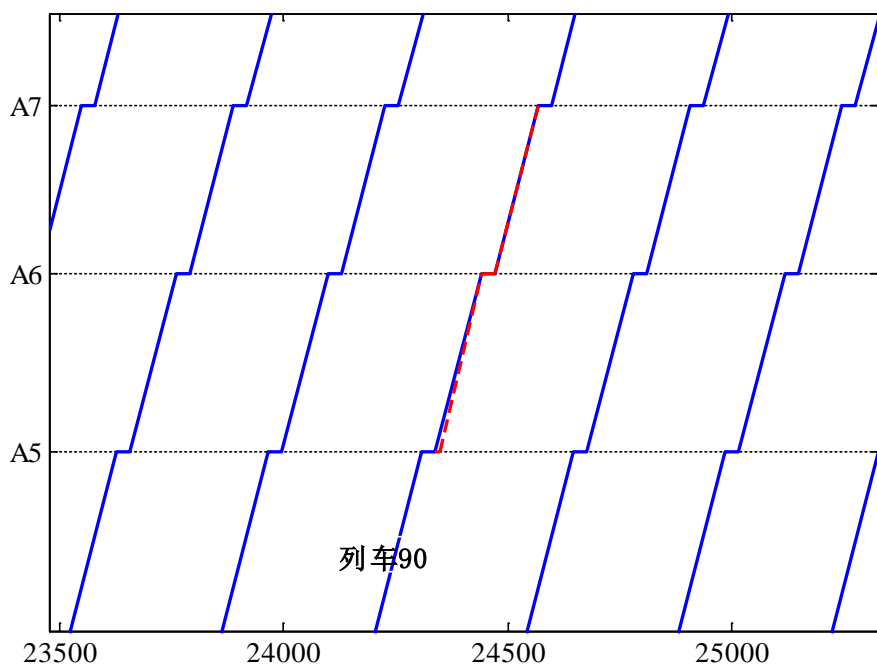


图 17. 非高峰期列车延误恢复示意图

2) 在高峰期, 假设第 180 号列车同样在  $A_5$  站因故延误 10s 发车, 那么根据问题二求得的数据, 可求得结论为: 列车到达  $A_6$  站时延误缩短至 1.12s, 之后开往  $A_7$  站即可做到不晚点。该情况下的列车运行图如图 18 所示, 图中红色折线即代表晚点恢复的运行过程。观察图形发现, 列车在运行恢复过程中, 对紧随其后的 3 辆列车的行驶造成影响, 它们依次在  $A_5$  站延误 6.79s、2.68s、0.48s, 到  $A_6$  站恢复。这是由于列车的发车间隙较小导致的。在该情况下, 总延误时间  $T_d = 22.2s$ 。

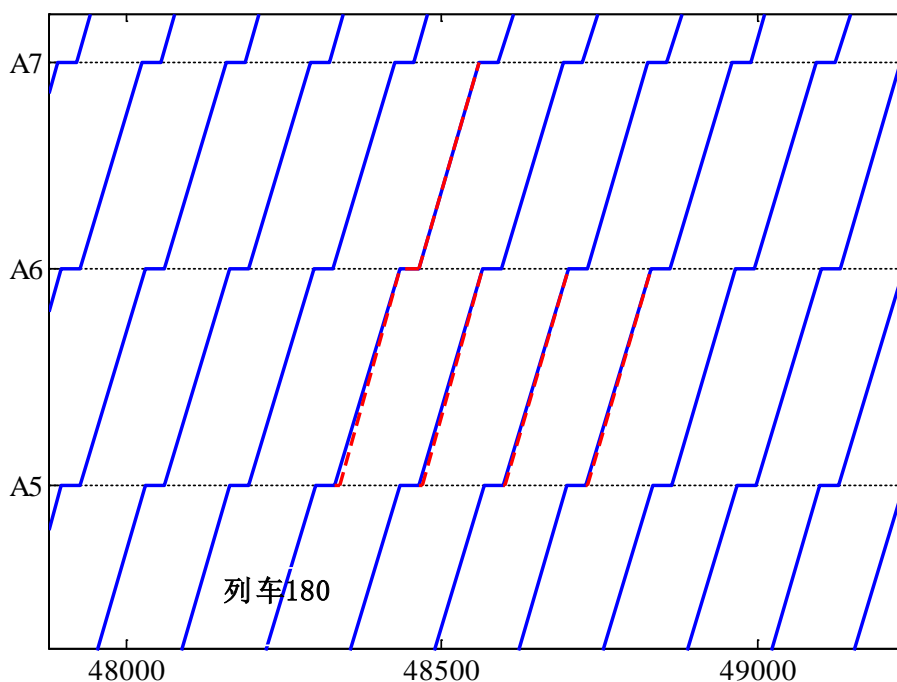


图 18. 高峰期列车延误恢复示意图

### 6.2.2 模型验证与分析

本题建立了延误时间恒定下的列车延误后尽快恢复正点的优化模型，并选取问题二第（2）问中两组典型的数据进行了寻优求解。求解结果与实际情况符合，能够快速使列车恢复正点。同时，我们发现：非高峰时间段内列车的延误不易对随后的车辆产生影响，延误总时间较短；而高峰时间段内列车的延误容易使随后的几辆列车被迫延误，并且延误总时间较长。

模型求得的结果符合实际，十分有效，具有实用意义。

### 6.3 基于统计数据的列车延误控制分析

假设  $DT_j^i$  为随机变量，普通延误（ $0 < DT_j^i < 10s$ ）概率为 20%，严重延误（ $DT_j^i > 10s$ ）的概率为 10%（超过 120s，接近下一班，不考虑调整），无延误（ $DT_j^i = 0$ ）的概率为 70%。即

$$\begin{cases} \Pr(DT_j^i = 0) = 70\% \\ \Pr(0 < DT_j^i < 10s) = 20\% \\ \Pr(10s < DT_j^i < 120s) = 10\% \end{cases} \quad (6.7)$$

其中： $\Pr(\bullet)$  表示事件  $(\bullet)$  的概率。

设列车最小总延误时间为  $T_{\text{delay}}$ ，则有题可知，当  $DT_j^i = 0$  时，有

$$T_{\text{delay}} = 0 \quad (6.8)$$

当  $0 < DT_j^i < 10s$  时，由于列车之间有一个缓冲时间 10s，所以列车  $i$  的在车站  $j$  晚点出发  $DT_j^i$  不会对  $i+1$  列车的运行产生任何影响，于是

$$T_{\text{delay}} = DT_j^i \quad (6.9)$$

当  $10s < DT_j^i < 120s$  时，先分析几个简单的情况：

①  $10s < DT_j^i < 20s$

此时列车  $i$  的晚点出发会对列车  $i+1$  产生影响，在列车区间运行时间最大调整量的作用下，列车  $i+1$  晚点  $(DT_j^i - 10)$  到达车站  $j$ ，并晚点  $(DT_j^i - 10)$  从车站  $j+1$  出发。而列车  $i$  也会晚点  $(DT_j^i - 10)$  到达车站  $j+1$ ，并晚点  $(DT_j^i - 10)$  从车站  $j+1$  出发。于是

$$\begin{aligned} T_{\text{delay}} = & DT_j^i + 2(DT_j^i - 10) \\ & + 2(DT_j^i - 10) \end{aligned} \quad (6.10)$$

②  $20s < DT_j^i < 30s$

此时列车  $i$  的晚点出发不仅会对列车  $i+1$  有影响，还对列车  $i+2$  产生影响。在列车区间运行时间最大调整量的作用下，对列车  $i+1$  的影响为晚点  $(DT_j^i - 20)$  到达车站  $j$ ，也晚点  $(DT_j^i - 20)$  从车站  $j$  出发，同时列车  $i+1$  会晚点  $(DT_j^i - 10)$  到达  $j+1$  车站，并晚点  $(DT_j^i - 10)$  从  $j+1$  车站出发。对列车  $i+2$  的影响为晚点  $(DT_j^i - 10)$  到达车站  $j$ ，并晚点  $(DT_j^i - 10)$  从车站  $j$  出发。于是

$$T_{\text{delay}} = DT_j^i + 2(DT_j^i - 20) + 2(DT_j^i - 10) + 2(DT_j^i - 20) + 2(DT_j^i - 10) + 2(DT_j^i - 10) \quad (6.11)$$

$$\textcircled{3} \quad 30s < DT_j^i < 40s$$

.....

总结以上规律，可以发现，当  $10s < DT_j^i < 120s$  时，最小总延误时间  $T_{\text{delay}}$  刻表示为

$$T_{\text{delay}} = (n+4)DT_j^i + 20 \sum_{i=1}^n i(n+2-i) \quad (6.12)$$

其中， $n = \left\lfloor \frac{DT_j^i}{10} \right\rfloor$  表示  $\frac{DT_j^i}{10}$  的整数部分。

于是，我们得到

$$T_{\text{delay}} = \begin{cases} 0 & (DT_j^i = 0) \\ DT_j^i & (0 < DT_j^i < 10s) \\ (n+4)DT_j^i + 20 \sum_{i=1}^n i(n+2-i) & (10s < DT_j^i < 120s) \end{cases} \quad (6.13)$$

根据随机变量  $DT_j^i$  的概率分布，可以得到最小总延误时间的期望值

$$\bar{T}_{\text{delay}} = 20\%DT_j^i + 10\% \left( (n+4)DT_j^i + 20 \sum_{i=1}^n i(n+2-i) \right) \quad (6.14)$$

这样，我们就可以将随机变量  $DT_j^i$  转化为与恒定值相类似的情况来进行建模与调整了。

## 七、模型评价

问题一模型的关键在于列车动力学微分方程的建立及其动力学分析，这样建模的思路是已知列车所受外力求其运动（位移、速度和加速度），不同于运动学建模（已知加速度、速度等求外力，进而求能耗），动力学模型能够准确描述列车的真实运动，符合实际情况，因为列车实际操纵时控制的就是牵引力的大小。这样建模模型精确度高，能较为真实地反映单列车的运行过程与能耗，具有良好地实用性和高仿真精度。而基于动力学模型的最优化问题称为动力响应优化设计，在优化的每个迭代步均需求解动力学方程，对于大型系统来说就会变得复杂，这也是该模型的一个缺点。为克服此缺点，我们利用非线性内点法和遗传算法求解该问题。非线性内点法是能够求解中大型优化问题的传统梯度优化算法，求解效率高；遗传算法适合求解大型优化系统的全局最优解，属于现代智能优化算法，缺点是求解速度较慢。综合利用这两个方法，我们成功求解了问题二及问题三。

整个问题二的模型都基于一个假设——假设所有列车站停时间均为最小。这样假设原因有二：一是列车运行时间越长，能耗越低；二是运行时间越长，列车牵引区和制动区重叠的概率越大。这样做可以极大的减小设计变量的个数，缩减



问题规模,提高求解效率。缺点是这样假设不能保证全局最优解,在站停时间不为最小处可能存在再生能源利用率更高的最优解。而对于“早晚高峰”问题,为解决定义约束时变量区间不定的问题,我们创造性地提出“分步”优化算法,将一个优化问题拆分为两个优化问题,从而简化问题的描述。同样的,该方法也有落入局部最优解的缺点,有待改进。

问题三针对问题二中模型,考虑延误时间对列车运行控制的影响,建立了一个线性规划模型,模型虽然简单,却也通过两个例子说明了模型建立的正确性和有效性。再考虑延误变量的随机性的时候,我们进行了最小总延误时间数学期望的分析,提供理论指导,缺点是没有进行实例仿真,当然,仿真也因其随机性变的相当困难,需大量的仿真数据以便统计。

总体而言,本文所建模型适用性高、有效性强、改进空间也较大,值得进一步研究。

## 八、参考文献

- [1] P. Howlett, An Optimal Strategy for the Control of A Train, Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, Volume 31, Issue 04, April 1990, pp. 454-471.
- [2] 丁勇,毛保华,刘海东,张鑫,王铁城,列车节能运行模拟系统的研究,北京交通大学学报,2004,28(2): 76-81.
- [3] Jorge, N. and S.J. Wright, Numerical Optimization. New York: Springer-Verlag. 2006, 564-593.
- [4] 陈杰, MATLAB 宝典, 北京: 电子工业出版社, 2007. 01.
- [5] 陈建安, 郭大伟, 徐乃平, 孙云芝. 遗传算法理论研究综述. 西安电子科技大学学报, 1998, 03: 99-104.
- [6] 沈钢, 周劲松, 任利惠. 列车动力学模型的研究. 铁道机车车辆, 2004, S1: 1-5.
- [7] 赵乐. 基于再生制动的地铁列车时刻表优化模型与算法研究[D]. 北京交通大学, 2014.
- [8] 冯佳. 考虑节能目标的城市轨道交通列车运行行为优化研究[D]. 北京交通大学, 2014.
- [9] 王媛媛. 城市轨道交通列车运行图编制理论与方法研究[D]. 西南交通大学, 2013.
- [10] 龙恺. 基于无模型自适应控制方法的地铁晚点恢复[D]. 北京交通大学, 2015.
- [11] E. Khmelnitsky, On an optimal control problem of train operation, IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 45, Issue 7, pp. 1257 - 1266.
- [12] Rongfang (Rachel) Liu, Lakov M. Golovitcher, Energy-efficient operation of rail vehicles, Transportation Research Part A: Policy and Practice, Volume 37, Issue 10, pp. 917-932.

## 九、附录

1. 问题一第（1）问的数据记录 Excel 表格：输入数据 A6-A7.xlsx

表 7  $A_6 - A_7$  数据

车站名称	A6	A7						
发车时刻	0:00:00							
站间实际长度(m)	1354							
停站时间(s)	XXX							
站间运行时间(s)	110							
满载率(%)	70%							
时刻(hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速度 (m/s <sup>2</sup> )	计算距离(m)	计算公里标(m)	当前坡度(%)	计算牵引力(N)	计算牵引功率(Kw)
00:00:00	0.00	0.00	0.88	0.00	13594.00	0.00	174904.80	0.00
00:00:01	87.93	3.17	0.88	0.44	13593.56	0.00	174904.80	153.79
00:00:02	175.62	6.32	0.88	1.76	13592.24	0.00	174904.80	307.17
00:00:03	263.06	9.47	0.87	3.95	13590.05	0.00	174904.80	460.10
00:00:04	350.19	12.61	0.87	7.02	13586.98	0.00	174904.80	612.50
00:00:05	437.00	15.73	0.87	10.95	13583.05	0.00	174904.80	764.33
00:00:06	523.44	18.84	0.86	15.76	13578.24	0.00	174904.80	915.52
00:00:07	609.49	21.94	0.86	21.42	13572.58	0.00	174904.80	1066.02
00:00:08	695.10	25.02	0.85	27.95	13566.05	0.00	174904.80	1215.77
00:00:09	780.26	28.09	0.85	35.32	13558.68	0.00	174904.80	1364.71
00:00:10	864.92	31.14	0.84	43.55	13550.45	0.00	174904.80	1512.79
00:00:11	949.06	34.17	0.84	52.62	13541.38	0.00	174904.80	1659.96
00:00:12	1032.66	37.18	0.83	62.53	13531.47	0.00	174904.80	1806.17
00:00:13	1115.67	40.16	0.83	73.27	13520.73	0.00	174904.80	1951.37
00:00:14	1198.08	43.13	0.82	84.84	13509.16	0.00	174904.80	2095.51
00:00:15	1279.86	46.08	0.81	97.23	13496.77	0.00	174904.80	2238.54
00:00:16	1361.57	49.02	0.82	110.44	13483.56	0.00	174904.80	2381.44
00:00:17	1442.68	51.94	0.78	124.46	13469.54	0.00	171910.83	2480.12
00:00:18	1517.42	54.63	0.70	139.26	13454.74	0.00	155854.26	2364.97
00:00:19	1583.49	57.01	0.62	154.77	13439.23	0.00	143329.07	2269.60
00:00:20	1640.76	59.07	0.38	171.11	13422.89	0.00	133622.55	2192.43
00:00:21	1658.03	59.69	0.00	191.57	13402.43	0.00	23218.65	384.97
00:00:22	1653.22	59.52	-0.06	214.29	13379.71	0.00	23126.89	382.34
00:00:23	1649.85	59.39	0.01	236.85	13357.15	0.00	23062.97	380.51
00:00:24	1651.63	59.46	0.00	258.89	13335.11	0.00	23096.72	381.47
00:00:25	1651.65	59.46	0.00	281.11	13312.89	0.00	23097.07	381.48
00:00:26	1651.65	59.46	0.00	303.33	13290.67	0.00	23097.07	381.48
00:00:27	1651.65	59.46	0.00	325.56	13268.44	1.80	26527.93	438.15
00:00:28	1651.65	59.46	0.00	347.78	13246.22	1.80	26527.93	438.15
00:00:29	1651.57	59.46	-0.02	369.97	13224.03	1.80	26526.47	438.10

00:00:30	1646.38	59.27	-0.09	389.99	13204.01	1.80	0.00	0.00
00:00:31	1635.43	58.88	-0.13	407.49	13186.51	1.80	0.00	0.00
00:00:32	1621.54	58.38	-0.15	423.59	13170.41	1.80	0.00	0.00
00:00:33	1606.78	57.84	-0.15	439.13	13154.87	1.80	0.00	0.00
00:00:34	1592.47	57.33	-0.14	454.63	13139.37	1.80	0.00	0.00
00:00:35	1579.20	56.85	-0.13	470.34	13123.66	1.80	0.00	0.00
00:00:36	1566.82	56.41	-0.12	486.24	13107.76	1.80	0.00	0.00
00:00:37	1554.45	55.96	-0.13	501.99	13092.01	1.80	0.00	0.00
00:00:38	1541.79	55.50	-0.13	517.47	13076.53	1.80	0.00	0.00
00:00:39	1529.24	55.05	-0.12	532.82	13061.18	1.80	0.00	0.00
00:00:40	1516.81	54.61	-0.12	548.05	13045.95	1.80	0.00	0.00
00:00:41	1504.49	54.16	-0.12	563.16	13030.84	1.80	0.00	0.00
00:00:42	1492.28	53.72	-0.12	578.14	13015.86	1.80	0.00	0.00
00:00:43	1480.18	53.29	-0.12	593.00	13001.00	1.80	0.00	0.00
00:00:44	1468.19	52.85	-0.12	607.75	12986.25	1.80	0.00	0.00
00:00:45	1456.31	52.43	-0.12	622.37	12971.63	1.80	0.00	0.00
00:00:46	1444.08	51.99	-0.12	636.87	12957.13	1.80	0.00	0.00
00:00:47	1431.61	51.54	-0.12	651.24	12942.76	1.80	0.00	0.00
00:00:48	1419.50	51.10	-0.12	665.49	12928.51	1.80	0.00	0.00
00:00:49	1408.19	50.69	-0.11	679.64	12914.36	1.80	0.00	0.00
00:00:50	1397.98	50.33	-0.10	693.68	12900.32	-3.50	0.00	0.00
00:00:51	1389.03	50.01	-0.08	707.62	12886.38	-3.50	0.00	0.00
00:00:52	1381.35	49.73	-0.07	721.48	12872.52	-3.50	0.00	0.00
00:00:53	1374.78	49.49	-0.06	735.26	12858.74	-3.50	0.00	0.00
00:00:54	1369.06	49.29	-0.05	748.97	12845.03	-3.50	0.00	0.00
00:00:55	1363.73	49.09	-0.05	762.63	12831.37	-3.50	0.00	0.00
00:00:56	1358.23	48.90	-0.06	776.23	12817.77	-3.50	0.00	0.00
00:00:57	1352.48	48.69	-0.06	789.78	12804.22	-3.50	0.00	0.00
00:00:58	1346.77	48.48	-0.06	803.28	12790.72	-3.50	0.00	0.00
00:00:59	1341.11	48.28	-0.06	816.72	12777.28	-3.50	0.00	0.00
00:01:00	1335.49	48.08	-0.06	830.10	12763.90	-3.50	0.00	0.00
00:01:01	1329.93	47.88	-0.06	843.43	12750.57	-3.50	0.00	0.00
00:01:02	1324.41	47.68	-0.05	856.70	12737.30	-3.50	0.00	0.00
00:01:03	1318.93	47.48	-0.05	869.92	12724.08	-3.50	0.00	0.00
00:01:04	1313.50	47.29	-0.05	883.08	12710.92	-3.50	0.00	0.00
00:01:05	1308.12	47.09	-0.05	896.19	12697.81	-3.50	0.00	0.00
00:01:06	1302.77	46.90	-0.05	909.24	12684.76	-3.50	0.00	0.00
00:01:07	1297.48	46.71	-0.05	922.24	12671.76	-3.50	0.00	0.00
00:01:08	1292.22	46.52	-0.05	935.19	12658.81	-3.50	0.00	0.00
00:01:09	1287.01	46.33	-0.05	948.09	12645.91	-3.50	0.00	0.00
00:01:10	1281.84	46.15	-0.05	960.93	12633.07	-3.50	0.00	0.00
00:01:11	1276.71	45.96	-0.05	973.72	12620.28	-3.50	0.00	0.00
00:01:12	1271.62	45.78	-0.05	986.47	12607.53	-3.50	0.00	0.00

00:01:13	1266.57	45.60	-0.05	999.16	12594.84	-3.50	0.00	0.00
00:01:14	1261.57	45.42	-0.05	1011.80	12582.20	-3.50	0.00	0.00
00:01:15	1256.60	45.24	-0.05	1024.39	12569.61	-3.50	0.00	0.00
00:01:16	1251.67	45.06	-0.05	1036.93	12557.07	-3.50	0.00	0.00
00:01:17	1246.79	44.88	-0.05	1049.42	12544.58	-3.50	0.00	0.00
00:01:18	1241.94	44.71	-0.05	1061.87	12532.13	-3.50	0.00	0.00
00:01:19	1237.12	44.54	-0.05	1074.26	12519.74	-3.50	0.00	0.00
00:01:20	1232.35	44.36	-0.05	1086.61	12507.39	-3.50	0.00	0.00
00:01:21	1227.61	44.19	-0.05	1098.91	12495.09	-3.50	0.00	0.00
00:01:22	1222.92	44.02	-0.05	1111.16	12482.84	-3.50	0.00	0.00
00:01:23	1218.25	43.86	-0.05	1123.37	12470.63	-3.50	0.00	0.00
00:01:24	1213.63	43.69	-0.05	1135.53	12458.47	-3.50	0.00	0.00
00:01:25	1209.04	43.53	-0.05	1147.64	12446.36	-3.50	0.00	0.00
00:01:26	1204.48	43.36	-0.05	1159.71	12434.29	-3.50	0.00	0.00
00:01:27	1199.96	43.20	-0.05	1171.73	12422.27	-3.50	0.00	0.00
00:01:28	1195.47	43.04	-0.04	1183.71	12410.29	-3.50	0.00	0.00
00:01:29	1191.04	42.88	-0.03	1195.64	12398.36	-3.50	0.00	0.00
00:01:30	1192.39	42.93	0.05	1207.61	12386.39	-3.50	0.00	0.00
00:01:31	1198.05	43.13	0.05	1219.66	12374.34	-3.50	0.00	0.00
00:01:32	1200.34	43.21	-0.02	1231.68	12362.32	-3.50	0.00	0.00
00:01:33	1193.41	42.96	-0.14	1243.60	12350.40	-3.50	0.00	0.00
00:01:34	1173.23	42.24	-0.28	1255.33	12338.67	-3.50	0.00	0.00
00:01:35	1137.58	40.95	-0.44	1266.76	12327.24	-3.50	0.00	0.00
00:01:36	1086.06	39.10	-0.60	1277.79	12316.21	-3.50	0.00	0.00
00:01:37	1020.11	36.72	-0.73	1288.31	12305.69	-3.50	0.00	0.00
00:01:38	942.97	33.95	-0.82	1298.20	12295.80	-3.50	0.00	0.00
00:01:39	859.70	30.95	-0.84	1307.33	12286.67	0.00	0.00	0.00
00:01:40	777.18	27.98	-0.80	1315.58	12278.42	0.00	0.00	0.00
00:01:41	697.64	25.11	-0.79	1322.95	12271.05	0.00	0.00	0.00
00:01:42	618.52	22.27	-0.79	1329.54	12264.46	0.00	0.00	0.00
00:01:43	539.80	19.43	-0.79	1335.33	12258.67	0.00	0.00	0.00
00:01:44	461.46	16.61	-0.78	1340.33	12253.67	0.00	0.00	0.00
00:01:45	383.44	13.80	-0.78	1344.56	12249.44	0.00	0.00	0.00
00:01:46	305.74	11.01	-0.78	1348.00	12246.00	0.00	0.00	0.00
00:01:47	228.32	8.22	-0.77	1350.67	12243.33	0.00	0.00	0.00
00:01:48	151.14	5.44	-0.77	1352.57	12241.43	0.00	0.00	0.00
00:01:49	74.19	2.67	-0.77	1353.70	12240.30	0.00	0.00	0.00
00:01:50	-0.07	0.00	0.00	1354.05	12239.95	0.00	0.00	0.00

2. 问题一第（2）问的数据记录 Excel 表格：输入数据 A6-A8.xlsx

表 8  $A_6 - A_8$  数据

车站名称	A6	A7	A8					
发车时刻	0:00:00	0:01:54						
站间实际长度(m)	1354	1280						
停站时间(s)	XXX	45						
站间运行时间(s)	114	106						
满载率(%)	70%	70%						
时刻(hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速度 (m/s <sup>2</sup> )	计算距离(m)	计算公里标(m)	当前坡度(%)	计算牵引力(N)	计算牵引功率(Kw)
00:00:00	0.00	0.00	0.81	0.00	13594.00	0.00	162197.00	0.00
00:00:01	81.39	2.93	0.81	0.41	13593.59	0.00	162197.00	132.02
00:00:02	162.58	5.85	0.81	1.63	13592.37	0.00	162197.00	263.69
00:00:03	243.52	8.77	0.81	3.66	13590.34	0.00	162197.00	394.99
00:00:04	324.20	11.67	0.81	6.50	13587.50	0.00	162197.00	525.84
00:00:05	404.58	14.56	0.80	10.14	13583.86	0.00	162197.00	656.22
00:00:06	484.64	17.45	0.80	14.59	13579.41	0.00	162197.00	786.06
00:00:07	564.34	20.32	0.79	19.83	13574.17	0.00	162197.00	915.34
00:00:08	643.66	23.17	0.79	25.87	13568.13	0.00	162197.00	1043.99
00:00:09	722.57	26.01	0.79	32.70	13561.30	0.00	162197.00	1171.99
00:00:10	801.05	28.84	0.78	40.32	13553.68	0.00	162197.00	1299.28
00:00:11	879.07	31.65	0.78	48.72	13545.28	0.00	162197.00	1425.83
00:00:12	956.60	34.44	0.77	57.90	13536.10	0.00	162197.00	1551.58
00:00:13	1033.63	37.21	0.77	67.85	13526.15	0.00	162197.00	1676.52
00:00:14	1110.18	39.97	0.76	78.57	13515.43	0.00	162197.00	1800.67
00:00:15	1186.37	42.71	0.76	90.05	13503.95	0.00	162197.00	1924.26
00:00:16	1261.99	45.43	0.75	102.29	13491.71	0.00	162197.00	2046.91
00:00:17	1336.60	48.12	0.74	115.28	13478.72	0.00	162197.00	2167.93
00:00:18	1409.59	50.75	0.72	129.02	13464.98	0.00	162197.00	2286.31
00:00:19	1480.68	53.30	0.73	143.48	13450.52	0.00	151608.10	2244.82
00:00:20	1552.09	55.88	0.66	158.67	13435.33	0.00	138263.90	2145.98
00:00:21	1607.90	57.88	0.42	174.46	13419.54	0.00	128964.12	2073.61
00:00:22	1637.58	58.95	0.15	190.66	13403.34	0.00	22830.38	373.86
00:00:23	1642.99	59.15	-0.04	207.09	13386.91	0.00	22932.76	376.78
00:00:24	1638.36	58.98	-0.01	223.54	13370.46	0.00	22845.20	374.29
00:00:25	1638.26	58.98	0.00	239.92	13354.08	0.00	22843.33	374.23
00:00:26	1638.26	58.98	0.00	256.31	13337.69	0.00	22843.33	374.23
00:00:27	1638.26	58.98	0.00	272.69	13321.31	0.00	22843.33	374.23
00:00:28	1638.26	58.98	0.00	289.07	13304.93	0.00	22843.33	374.23
00:00:29	1638.26	58.98	0.00	305.45	13288.55	1.80	26274.15	430.44

00:00:30	1636.41	58.91	-0.04	321.81	13272.19	1.80	26239.31	429.38
00:00:31	1631.51	58.73	-0.06	338.11	13255.89	1.80	26146.75	426.59
00:00:32	1624.06	58.47	-0.09	354.34	13239.66	1.80	0.00	0.00
00:00:33	1614.57	58.12	-0.10	370.49	13223.51	1.80	0.00	0.00
00:00:34	1603.48	57.73	-0.12	386.55	13207.45	1.80	0.00	0.00
00:00:35	1591.18	57.28	-0.13	402.50	13191.50	1.80	0.00	0.00
00:00:36	1578.05	56.81	-0.13	418.35	13175.65	1.80	0.00	0.00
00:00:37	1564.40	56.32	-0.14	434.08	13159.92	1.80	0.00	0.00
00:00:38	1550.51	55.82	-0.14	449.68	13144.32	1.80	0.00	0.00
00:00:39	1536.61	55.32	-0.14	465.16	13128.84	1.80	0.00	0.00
00:00:40	1522.90	54.82	-0.14	480.51	13113.49	1.80	0.00	0.00
00:00:41	1509.52	54.34	-0.13	495.72	13098.28	1.80	0.00	0.00
00:00:42	1496.58	53.88	-0.13	510.80	13083.20	1.80	0.00	0.00
00:00:43	1484.16	53.43	-0.12	525.75	13068.25	1.80	0.00	0.00
00:00:44	1472.27	53.00	-0.12	540.56	13053.44	1.80	0.00	0.00
00:00:45	1460.90	52.59	-0.11	555.24	13038.76	1.80	0.00	0.00
00:00:46	1449.98	52.20	-0.11	569.79	13024.21	1.80	0.00	0.00
00:00:47	1439.42	51.82	-0.10	584.22	13009.78	1.80	0.00	0.00
00:00:48	1429.07	51.45	-0.10	598.54	12995.46	1.80	0.00	0.00
00:00:49	1418.75	51.07	-0.10	612.74	12981.26	1.80	0.00	0.00
00:00:50	1408.22	50.70	-0.11	626.85	12967.15	1.80	0.00	0.00
00:00:51	1397.22	50.30	-0.11	640.87	12953.13	1.80	0.00	0.00
00:00:52	1386.70	49.92	-0.10	654.79	12939.21	1.80	0.00	0.00
00:00:53	1377.52	49.59	-0.09	668.62	12925.38	1.80	0.00	0.00
00:00:54	1369.46	49.30	-0.08	682.37	12911.63	1.80	0.00	0.00
00:00:55	1362.30	49.04	-0.07	696.04	12897.96	-3.50	0.00	0.00
00:00:56	1355.88	48.81	-0.06	709.64	12884.36	-3.50	0.00	0.00
00:00:57	1350.02	48.60	-0.06	723.17	12870.83	-3.50	0.00	0.00
00:00:58	1344.57	48.40	-0.05	736.64	12857.36	-3.50	0.00	0.00
00:00:59	1339.40	48.22	-0.05	750.05	12843.95	-3.50	0.00	0.00
00:01:00	1334.41	48.04	-0.05	763.41	12830.59	-3.50	0.00	0.00
00:01:01	1329.50	47.86	-0.05	776.71	12817.29	-3.50	0.00	0.00
00:01:02	1324.60	47.69	-0.05	789.97	12804.03	-3.50	0.00	0.00
00:01:03	1319.65	47.51	-0.05	803.18	12790.82	-3.50	0.00	0.00
00:01:04	1314.61	47.33	-0.05	816.34	12777.66	-3.50	0.00	0.00
00:01:05	1309.47	47.14	-0.05	829.45	12764.55	-3.50	0.00	0.00
00:01:06	1304.22	46.95	-0.05	842.52	12751.48	-3.50	0.00	0.00
00:01:07	1298.89	46.76	-0.05	855.54	12738.46	-3.50	0.00	0.00
00:01:08	1293.50	46.57	-0.05	868.51	12725.49	-3.50	0.00	0.00
00:01:09	1288.12	46.37	-0.05	881.43	12712.57	-3.50	0.00	0.00
00:01:10	1282.82	46.18	-0.05	894.29	12699.71	-3.50	0.00	0.00
00:01:11	1277.66	46.00	-0.05	907.09	12686.91	-3.50	0.00	0.00
00:01:12	1272.56	45.81	-0.05	919.84	12674.16	-3.50	0.00	0.00

00:01:13	1267.51	45.63	-0.05	932.54	12661.46	-3.50	0.00	0.00
00:01:14	1262.49	45.45	-0.05	945.19	12648.81	-3.50	0.00	0.00
00:01:15	1257.52	45.27	-0.05	957.79	12636.21	-3.50	0.00	0.00
00:01:16	1252.58	45.09	-0.05	970.34	12623.66	-3.50	0.00	0.00
00:01:17	1247.69	44.92	-0.05	982.84	12611.16	-3.50	0.00	0.00
00:01:18	1242.83	44.74	-0.05	995.30	12598.70	-3.50	0.00	0.00
00:01:19	1238.01	44.57	-0.05	1007.70	12586.30	-3.50	0.00	0.00
00:01:20	1233.23	44.40	-0.05	1020.06	12573.94	-3.50	0.00	0.00
00:01:21	1228.49	44.23	-0.05	1032.37	12561.63	-3.50	0.00	0.00
00:01:22	1223.78	44.06	-0.05	1044.63	12549.37	-3.50	0.00	0.00
00:01:23	1219.11	43.89	-0.05	1056.84	12537.16	-3.50	0.00	0.00
00:01:24	1214.48	43.72	-0.05	1069.01	12524.99	-3.50	0.00	0.00
00:01:25	1209.88	43.56	-0.05	1081.13	12512.87	-3.50	0.00	0.00
00:01:26	1205.32	43.39	-0.05	1093.21	12500.79	-3.50	0.00	0.00
00:01:27	1200.79	43.23	-0.05	1105.24	12488.76	-3.50	0.00	0.00
00:01:28	1196.30	43.07	-0.04	1117.22	12476.78	-3.50	0.00	0.00
00:01:29	1191.84	42.91	-0.04	1129.16	12464.84	-3.50	0.00	0.00
00:01:30	1187.42	42.75	-0.04	1141.06	12452.94	-3.50	0.00	0.00
00:01:31	1183.03	42.59	-0.04	1152.91	12441.09	-3.50	0.00	0.00
00:01:32	1178.68	42.43	-0.04	1164.72	12429.28	-3.50	0.00	0.00
00:01:33	1174.35	42.28	-0.04	1176.49	12417.51	-3.50	0.00	0.00
00:01:34	1170.06	42.12	-0.04	1188.21	12405.79	-3.50	0.00	0.00
00:01:35	1165.80	41.97	-0.04	1199.89	12394.11	-3.50	0.00	0.00
00:01:36	1161.58	41.82	-0.04	1211.52	12382.48	-3.50	0.00	0.00
00:01:37	1157.38	41.67	-0.04	1223.12	12370.88	-3.50	0.00	0.00
00:01:38	1153.22	41.52	-0.04	1234.67	12359.33	-3.50	0.00	0.00
00:01:39	1149.09	41.37	-0.04	1246.18	12347.82	-3.50	0.00	0.00
00:01:40	1144.99	41.22	-0.04	1257.65	12336.35	-3.50	0.00	0.00
00:01:41	1145.40	41.23	0.08	1269.10	12324.90	-3.50	0.00	0.00
00:01:42	1128.78	40.64	-0.57	1280.50	12313.50	-3.50	0.00	0.00
00:01:43	1046.98	37.69	-0.91	1291.43	12302.57	-3.50	0.00	0.00
00:01:44	960.77	34.59	-0.86	1301.47	12292.53	-3.50	0.00	0.00
00:01:45	873.79	31.46	-0.88	1310.64	12283.36	0.00	0.00	0.00
00:01:46	785.41	28.27	-0.88	1318.94	12275.06	0.00	0.00	0.00
00:01:47	697.69	25.12	-0.87	1326.35	12267.65	0.00	0.00	0.00
00:01:48	610.44	21.98	-0.87	1332.89	12261.11	0.00	0.00	0.00
00:01:49	523.62	18.85	-0.87	1338.56	12255.44	0.00	0.00	0.00
00:01:50	437.20	15.74	-0.86	1343.37	12250.63	0.00	0.00	0.00
00:01:51	351.14	12.64	-0.86	1347.31	12246.69	0.00	0.00	0.00
00:01:52	265.41	9.55	-0.86	1350.39	12243.61	0.00	0.00	0.00
00:01:53	179.98	6.48	-0.85	1352.62	12241.38	0.00	0.00	0.00
00:01:54	26.15	0.94	-0.26	1354.00	12240.00	0.00	0.00	0.00
00:01:55	0.00	0.00	0.00	1354.00	12240.00	0.00	0.00	0.00





00:02:39	0.00	0.00	0.82	1354.00	12240.00	0.00	0.00	0.00
00:02:40	82.31	2.95	0.82	1.53	12238.47	0.00	164003.70	318.67
00:02:41	276.08	9.94	0.82	3.88	12236.12	0.00	164003.70	452.78
00:02:42	357.57	12.87	0.81	7.05	12232.95	0.00	164003.70	586.42
00:02:43	438.75	15.79	0.81	11.03	12228.97	0.00	164003.70	719.56
00:02:44	519.04	18.69	0.79	15.81	12224.19	0.00	164003.70	851.25
00:02:45	597.50	21.51	0.78	21.34	12218.66	0.00	164003.70	979.92
00:02:46	675.07	24.30	0.77	27.65	12212.35	0.00	164003.70	1107.13
00:02:47	752.60	27.09	0.78	34.75	12205.25	0.00	164003.70	1234.29
00:02:48	830.71	29.91	0.79	42.66	12197.34	0.00	164003.70	1362.39
00:02:49	909.76	32.75	0.80	51.40	12188.60	0.00	164003.70	1492.04
00:02:50	989.90	35.64	0.81	60.96	12179.04	0.00	164003.70	1623.47
00:02:51	1071.02	38.56	0.82	71.33	12168.67	0.00	164003.70	1756.51
00:02:52	1152.79	41.50	0.82	82.53	12157.47	0.00	164003.70	1890.62
00:02:53	1234.63	44.45	0.82	94.53	12145.47	0.00	164003.70	2024.84
00:02:54	1315.73	47.37	0.80	107.33	12132.67	0.00	164003.70	2157.85
00:02:55	1395.05	50.22	0.78	120.89	12119.11	0.00	164003.70	2287.94
00:02:56	1471.31	52.97	0.74	135.19	12104.81	0.00	155196.32	2283.41
00:02:57	1542.97	55.55	0.68	150.21	12089.79	0.00	141432.70	2182.27
00:02:58	1608.30	57.90	0.61	165.91	12074.09	0.00	130336.29	2096.20
00:02:59	1665.29	59.95	0.52	182.24	12057.76	0.00	121681.02	2026.34
00:03:00	1710.19	61.57	0.36	199.11	12040.89	0.00	115475.05	1974.84
00:03:01	1740.10	62.64	0.23	216.29	12023.71	0.00	24813.67	431.78
00:03:02	1757.75	63.28	0.12	233.71	12006.29	0.00	25164.64	442.33
00:03:03	1765.77	63.57	0.04	251.29	11988.71	3.00	31042.99	548.15
00:03:04	1766.45	63.59	-0.03	268.94	11971.06	3.00	31056.68	548.60
00:03:05	1761.80	63.42	-0.07	286.61	11953.39	3.00	30963.66	545.52
00:03:06	1753.52	63.13	-0.10	304.25	11935.75	3.00	0.00	0.00
00:03:07	1742.99	62.75	-0.11	321.81	11918.19	3.00	0.00	0.00
00:03:08	1731.29	62.33	-0.12	339.27	11900.73	3.00	0.00	0.00
00:03:09	1719.19	61.89	-0.12	356.59	11883.41	3.00	0.00	0.00
00:03:10	1707.16	61.46	-0.12	373.76	11866.24	3.00	0.00	0.00
00:03:11	1695.37	61.03	-0.12	390.78	11849.22	3.00	0.00	0.00
00:03:12	1683.65	60.61	-0.12	407.64	11832.36	3.00	0.00	0.00
00:03:13	1671.56	60.18	-0.13	424.37	11815.63	3.00	0.00	0.00
00:03:14	1658.33	59.70	-0.14	440.98	11799.02	3.00	0.00	0.00
00:03:15	1643.60	59.17	-0.15	457.50	11782.50	3.00	0.00	0.00
00:03:16	1628.82	58.64	-0.15	473.87	11766.13	3.00	0.00	0.00
00:03:17	1614.07	58.11	-0.15	490.11	11749.89	3.00	0.00	0.00
00:03:18	1599.36	57.58	-0.15	506.20	11733.80	3.00	0.00	0.00
00:03:19	1584.72	57.05	-0.15	522.13	11717.87	3.00	0.00	0.00
00:03:20	1570.20	56.53	-0.14	537.91	11702.09	3.00	0.00	0.00
00:03:21	1555.87	56.01	-0.14	553.54	11686.46	3.00	0.00	0.00

00:03:22	1541.83	55.51	-0.14	569.03	11670.97	3.00	0.00	0.00
00:03:23	1528.21	55.02	-0.13	584.36	11655.64	3.00	0.00	0.00
00:03:24	1515.14	54.55	-0.13	599.56	11640.44	3.00	0.00	0.00
00:03:25	1502.79	54.10	-0.12	614.63	11625.37	3.00	0.00	0.00
00:03:26	1491.34	53.69	-0.11	629.59	11610.41	3.00	0.00	0.00
00:03:27	1481.01	53.32	-0.10	644.44	11595.56	-2.00	0.00	0.00
00:03:28	1472.03	52.99	-0.08	659.20	11580.80	-2.00	0.00	0.00
00:03:29	1463.82	52.70	-0.08	673.88	11566.12	-2.00	0.00	0.00
00:03:30	1455.69	52.40	-0.08	688.47	11551.53	-2.00	0.00	0.00
00:03:31	1447.63	52.11	-0.08	702.99	11537.01	-2.00	0.00	0.00
00:03:32	1439.64	51.83	-0.08	717.43	11522.57	-2.00	0.00	0.00
00:03:33	1431.72	51.54	-0.08	731.78	11508.22	-2.00	0.00	0.00
00:03:34	1423.87	51.26	-0.08	746.06	11493.94	-2.00	0.00	0.00
00:03:35	1416.09	50.98	-0.08	760.26	11479.74	-2.00	0.00	0.00
00:03:36	1408.38	50.70	-0.08	774.38	11465.62	-2.00	0.00	0.00
00:03:37	1400.73	50.43	-0.08	788.43	11451.57	-2.00	0.00	0.00
00:03:38	1393.15	50.15	-0.08	802.40	11437.60	-2.00	0.00	0.00
00:03:39	1385.63	49.88	-0.07	816.29	11423.71	-2.00	0.00	0.00
00:03:40	1378.18	49.61	-0.07	830.11	11409.89	-2.00	0.00	0.00
00:03:41	1370.79	49.35	-0.07	843.86	11396.14	-2.00	0.00	0.00
00:03:42	1363.46	49.08	-0.07	857.53	11382.47	-2.00	0.00	0.00
00:03:43	1356.19	48.82	-0.07	871.13	11368.87	-2.00	0.00	0.00
00:03:44	1348.99	48.56	-0.07	884.65	11355.35	-2.00	0.00	0.00
00:03:45	1341.84	48.31	-0.07	898.11	11341.89	-2.00	0.00	0.00
00:03:46	1334.76	48.05	-0.07	911.49	11328.51	-2.00	0.00	0.00
00:03:47	1327.73	47.80	-0.07	924.80	11315.20	-2.00	0.00	0.00
00:03:48	1320.76	47.55	-0.07	938.04	11301.96	-2.00	0.00	0.00
00:03:49	1313.85	47.30	-0.07	951.22	11288.78	-2.00	0.00	0.00
00:03:50	1307.00	47.05	-0.07	964.32	11275.68	-2.00	0.00	0.00
00:03:51	1300.20	46.81	-0.07	977.36	11262.64	-2.00	0.00	0.00
00:03:52	1293.46	46.56	-0.07	990.32	11249.68	-2.00	0.00	0.00
00:03:53	1286.77	46.32	-0.07	1003.23	11236.77	-2.00	0.00	0.00
00:03:54	1280.14	46.08	-0.07	1016.06	11223.94	-2.00	0.00	0.00
00:03:55	1273.56	45.85	-0.07	1028.83	11211.17	-2.00	0.00	0.00
00:03:56	1267.03	45.61	-0.06	1041.53	11198.47	-2.00	0.00	0.00
00:03:57	1260.55	45.38	-0.06	1054.17	11185.83	-2.00	0.00	0.00
00:03:58	1254.13	45.15	-0.06	1066.74	11173.26	-2.00	0.00	0.00
00:03:59	1247.75	44.92	-0.06	1079.25	11160.75	-2.00	0.00	0.00
00:04:00	1241.43	44.69	-0.06	1091.70	11148.30	-2.00	0.00	0.00
00:04:01	1235.16	44.47	-0.06	1104.08	11135.92	-2.00	0.00	0.00
00:04:02	1228.93	44.24	-0.06	1116.40	11123.60	-2.00	0.00	0.00
00:04:03	1222.76	44.02	-0.06	1128.66	11111.34	-2.00	0.00	0.00
00:04:04	1216.63	43.80	-0.06	1140.86	11099.14	-2.00	0.00	0.00

00:04:05	1210.55	43.58	-0.06	1152.99	11087.01	-2.00	0.00	0.00
00:04:06	1204.52	43.36	-0.06	1165.07	11074.93	-2.00	0.00	0.00
00:04:07	1198.53	43.15	-0.06	1177.08	11062.92	-2.00	0.00	0.00
00:04:08	1195.93	43.05	0.06	1189.05	11050.95	-2.00	0.00	0.00
00:04:09	1167.24	42.02	-0.82	1200.92	11039.08	0.00	0.00	0.00
00:04:10	1074.52	38.68	-0.90	1212.15	11027.85	0.00	0.00	0.00
00:04:11	984.30	35.43	-0.90	1222.44	11017.56	0.00	0.00	0.00
00:04:12	894.70	32.21	-0.89	1231.83	11008.17	0.00	0.00	0.00
00:04:13	805.65	29.00	-0.89	1240.34	10999.66	0.00	0.00	0.00
00:04:14	717.13	25.82	-0.88	1247.95	10992.05	0.00	0.00	0.00
00:04:15	629.09	22.65	-0.88	1254.68	10985.32	0.00	0.00	0.00
00:04:16	541.50	19.49	-0.87	1260.53	10979.47	0.00	0.00	0.00
00:04:17	454.32	16.36	-0.87	1265.51	10974.49	0.00	0.00	0.00
00:04:18	367.51	13.23	-0.87	1269.62	10970.38	0.00	0.00	0.00
00:04:19	281.04	10.12	-0.86	1272.86	10967.14	0.00	0.00	0.00
00:04:20	194.87	7.02	-0.86	1275.24	10964.76	0.00	0.00	0.00
00:04:21	108.96	3.92	-0.86	1276.76	10963.24	0.00	0.00	0.00
00:04:22	23.29	0.84	-0.86	1277.42	10962.58	0.00	0.00	0.00
00:04:23	-1.45	-0.05	-0.02	1277.45	10962.55	0.00	0.00	0.00
00:04:24	-3.44	-0.12	-0.02	1277.42	10962.58	0.00	0.00	0.00
00:04:25	-5.42	-0.20	0.00	1277.38	10962.62	0.00	0.00	0.00