

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 基于改进顺序遍历法的特殊工件磨削加工研究

摘 要:

本文首先根据特殊工件磨削所用磨床的运动特点，建立了具有水平、垂直、旋转三个自由度的特殊工件磨削运动轨迹方程，对于工件磨削过程，采用切线逼近法进行模拟，即利用工件母线上等弧长分布节点的切线逐步逼近工件母线。经过详细分析工件各分步运行过程中的运动规律，推导并建立了其对应数学模型。

其次，利用建立的数学模型求解出各小段工件磨削过程中，三个自由度上工件的位移量。从而，进一步确定各个步进电机所需的控制脉冲数。

最后，本文提出采用顺序遍历法与逻辑判断相结合的搜索算法，对三个自由度上的步进电机脉冲进行时序优化组合，搜索出三个电机的最佳协调控制策略。在搜索过程中，对相邻区间频差采用基于“等窗滑差”的连续监测手段，使得工件能在较短时间内加工完毕，且保证了较高的磨削精度。

关键词：磨削加工 步进电机 控制脉冲 顺序遍历法 等窗滑差

参赛队号 10054039

队员姓名 陈冠宇 朱星阳 许建中

| |
|------------------------|
| 参赛密码 _____ (由组委会填写) |
|------------------------|

中山大学承办

目 录

| | |
|-----------------------------|----|
| 一、问题重述..... | 3 |
| 二、问题分析..... | 3 |
| 三、模型假设..... | 4 |
| 四、部分符号说明..... | 4 |
| 五、模型的建立与求解..... | 5 |
| 5.1 问题一：单调凸曲线工件的磨削..... | 5 |
| 5.1.1 加工基准的确定..... | 5 |
| 5.1.2 工件上离散磨削点的选取..... | 6 |
| 5.1.3 问题一模型的建立..... | 6 |
| 5.1.4 模型求解..... | 8 |
| 5.1.5 误差分析..... | 14 |
| 5.2 问题二：非单调凸曲线工件的磨削..... | 16 |
| 5.2.1 问题分析..... | 16 |
| 5.2.2 砂轮尺寸的选择..... | 16 |
| 5.2.3 加工基准的确定..... | 19 |
| 5.2.4 数学模型的建立..... | 19 |
| 5.2.5 电机脉冲时序优化策略的改进..... | 19 |
| 5.2.6 误差分析..... | 21 |
| 5.3 问题三：问题一中磨削点选取的改进方案..... | 21 |
| 5.4 问题四：问题二中磨削点选取的改进方案..... | 22 |
| 六、模型的评价与改进..... | 24 |
| 七、参考文献..... | 24 |
| 八、附录..... | 25 |

一、问题重述

在大型数控磨床对某些具有特殊母线的工件进行磨削时,对磨床工作台的驱动电机进行精确控制是保证工件加工总用时较短和磨削精度较高的重要前提。因此,对此磨削过程进行分析建模具有十分重要的工程实际意义。

特殊工件磨削加工所用的磨床有三个工作台,其运动分别由三组步进电机控制。每输入一个控制脉冲,电机主轴转动一个精确的步进角度,因此可通过输入适当个数的脉冲来控制电机主轴的角位移量。若某时段中的脉冲频率为常数,则电机主轴可视为匀速转动,否则为变速,从而实现了电机调速控制。

本文需要综合分析,分别建立相应模型,解决以下四个问题:

1、加工外表面母线为 $y = -\frac{7}{18 \times 10^3}(600-x)^2 + 0.45(600-x)$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件,采用圆柱型砂轮加工,给出一个合理的加工方案并对方案作出误差分析;

2、加工外表面母线为 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x+25\pi)\right) + 130$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件,采用轮式砂轮加工,给出一个合理的加工方案并对方案作出误差分析;

3、为了在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀,提出一个修整策略和一个合理的加工方案,并作出相应的误差分析。

4、提出一个修整策略,并给出一个使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案,最后作出相应的误差分析。

二、问题分析

为了提出一个合理的加工方案实现在满足加工精度要求的条件下尽可能快地对工件进行加工,首先需要明确工件与砂轮间的运动关系。

通过分析工件在三个平台的控制下相对于砂轮的运动规律,可知该运动可分解为三个分运动:沿底座直轨道的 x 轴方向的直线运动、沿下台直轨道的 y 轴方向的直线运动和绕中台圆轨道圆周运动。再以工件在 x 和 y 轴方向的位移变化量及偏转角度变化量为参量,可推导出工件轮廓母线与砂轮接触点的运动规律。

问题 1 中的工件外表面母线为二次函数曲线,砂轮为圆柱型,因此可在一个由 x 和 y 轴构成的二维坐标系中,将砂轮的切割面与工件的外表面间的运动看成是一条二次函数曲线不断旋转并保持与平行于 x 轴的一条直线上固定点(磨削点)相切的运动。由于问题 1 中代加工工件母线为单调凸,且砂轮选用圆柱型,故本题可忽略砂轮尺寸的影响,通过分析三个控制电机电机的需要给进量,进而采用改进顺序遍历法找出电机的控制脉冲最优时序组合,得出一个较好的加工方案,最后对该方案进行误差分析。

问题 2 中工件外表面母线为一条具有多拐点的曲线,此时需要考虑砂轮的尺寸(半径和厚度)对加工精度的影响,基于问题 1,在母线的拐点处建立了砂轮尺寸的约束条件,并将曲线分段后在每一段对三台电机的步进量方向进行分段控制,以砂轮选定定点进行磨削,提出了一个适用性更广的加工方案,较好地解决了具有复杂形状工件的外表面加工问题,并保证了一定的精度水平。

问题 3 是针对问题 1 中砂轮磨削点为定点时对砂轮局部磨损严重,以致影响工件磨削精度的局限性,对电机控制方式进行适当改进,使得砂轮的磨损均匀化分布,增加磨削精度。本文中将采取等分的原则,将砂轮的磨削面进行均匀分割,

与工件的磨削点数相等，既可减小砂轮损耗，又可增加磨削精度。最后，还将需对控制策略做出相应改变。

问题 4 是针对问题 2 中对工件具有复杂函数母线的情况下，轮式砂轮以定点去依次磨削工件上的选定点时，将使得砂轮损耗严重，工件磨削精度不足，因此本文中考虑将砂轮圆周等间隔划分，依次与相应工件上的点进行磨削，电机协调控制算法与问题 2 中类似。

三、模型假设

1. 本文中平面直角坐标系按如下原则建立：以工件转轴与夹具基准面交点为坐标原点，以工件转轴为 x 轴， y 轴平行于底座，且该坐标系不随工作台移动；
2. 假设圆柱型砂轮厚度 $d=10\text{mm}$ ；于是，磨削部分线段方程为：

$$y=130.1755, 0 \leq x \leq 10 \text{ (单位: mm)};$$
3. 在问题一中，圆柱型砂轮磨削点取为 $(0, 130.1755)$ ；
4. 在问题二中，轮式砂轮磨削点取为 $(0, 151.2132)$ ；
5. 假设待磨削工件的多余尺寸足够一次磨削耗损；
6. 工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 300 转；
7. 三个工作台的可移动范围足够大，能保证被加工工件的加工；

四、部分符号说明

k : 第 k 步加工， $k=0, 1, 2, \dots$ ； $k=0$ 时，代表工件已完成预动过程后的初始状态。

i : 第 i 个选定磨削点， $i=1, 2, \dots, N$ ；

N : 选定的磨削点个数；

$x_i^{(k)}$: 经 k 步加工后，工件母线上第 i 个选定磨削点在 x - y 平面中的横坐标；

$y_i^{(k)}$: 经 k 步加工后，工件母线上第 i 个选定磨削点在 x - y 平面中的纵坐标；

$A_i^{(k)}$: 经 k 步加工后，工件母线上的第 i 个选定磨削点， $A_i^{(k)} = (x_i^{(k)}, y_i^{(k)})$ ；

$\Delta x^{(k)}$: 第 k 步加工时，工件母线的 x 坐标平移变化分量；

$\Delta y^{(k)}$: 第 k 步加工时，工件母线的 y 坐标平移变化分量；

$\theta_i^{(k)}$: 经 k 步加工后，工件母线上的第 i 个选定磨削点相对于 x 轴正方向的夹角；当 $k=0$ 时，为该节点的切线夹角初始值；

$\Delta \theta^{(k)}$: 第 k 步加工时，工件母线需要转过的角度；

$\overline{\Delta x^{(k)}}$: 第 k 步加工时，控制 x 方向位移的电机给进量；

$\overline{\Delta y^{(k)}}$: 第 k 步加工时，控制 y 方向位移的电机给进量；

$n_x^{(k)}$, $n_y^{(k)}$, $n_\theta^{(k)}$: 分别代表第 k 次移动时发送给控制 x , y , θ 方向位移的给定电机脉冲个数。

五、模型的建立与求解

对题中约束条件本质的理解

1) 由已知, 各组步进电机的步进角度均为 1° , 变速器的传动比为 10:1, 丝杆的螺距为 12mm, 因此当步进电机收到一个触发脉冲时, 经计算, 下台或中台将分别移动 1/300mm, 在计算出待磨削点需要移动的 X 和 Y 方向分量后, 将其分别乘以 300 即得每个步进电机所需的触发脉冲个数。

2) 由于题中要求工件每转动 100 转, 工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上移动量不超过 4mm, 本文中假设工件工作箱主轴移动速度为每分钟 300 转, 由此可得, 上台步进电机的脉冲给定频率应小于 60Hz, 即脉冲触发周期应该大于 16.66ms。

3) 结合已知条件, 步进电机控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 个脉冲, 即脉冲频率不大于 100Hz, 则对应脉冲周期应不小于 10ms, 由于下台、中台、上台三个步进电机需要协调控制, 为了简化控制过程, 提高控制精度, 减小工件加工时间, 三台电机的脉冲周期应该取 2) 和 3) 中周期取值的交集的最小值。本文中, 全部电机的触发脉冲周期均选定为 16.66ms。

4) 题中已说明控制步进电机的脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级, 为使得电机有足够的信号识别时间, 本文中将该事件尺度取为 1ms, 此时电机转轴将旋转 1° , 触发脉冲持续低电平时间最短为 15.66ms, 也即 16.66ms 为一个完整的时间脉冲触发周期。

5) 题中有关于相邻两时间段的脉冲频率之差的约束, 以免造成工作台运动的不稳定和加工工件表面质量的下降。但题中并未给出对相邻时间段的频率测量所对应的测量周期, 同样的一组脉冲序列, 当测量周期发生变化时, 会导致计算出的频率差发生很大的波动, 为了简化电机最优化组合过程, 弱化该约束条件, 本文将采取 1s 为测量周期, 在模型求解中, 将需要接收脉冲数最多的电机所用总时长分成以 1s 为尺度的时间区间, 不论各区间内脉冲分布符合何种规律, 只要任意两个相邻的区间测量所得频率差满足题中要求即可。

6) 本文中为了使得各步进电机在任意两个相邻时间段内的脉冲频率偏差都满足题中的要求, 采用一种“等窗滑差”的算法对频差进行实时监测控制。具体方法是: 以 1s 为滑动监测的时间窗宽度, 任意时刻当滑窗内进入一个新的脉冲单元, 立刻去除最早进入滑窗内的一个脉冲单元, 并对更新后的滑窗内脉冲频率进行动态监测, 使其符合题中要求, 保证工作台的稳定以及工件磨削的精度。

5.1 问题一: 单调凸曲线工件的磨削

5.1.1 加工基准的确定

在此问中, 工件母线为二次函数曲线, 砂轮为圆柱型, 由模型假设知, 其磨削部分线段方程为: $y=130.1755$, $0 \leq x \leq 10$, 其中 130.1755 为母线函数在 $[0,600]$ 内的最大值 y_{\max} , 但该函数在 $x=0$ 处取值 $y_{x=0}=130.111 < y_{\max}$ 。为了便于计算和磨削, 问题一中的加工基准确定为当函数曲线在 $(0,130.111)$ 点与线段相切于

(0,130.1755)点的时刻，曲线以及曲线上各点所处的位置，以上微调过程称之为预动，本文全部的加工方案都是在预动后开始的。

5.1.2 工件上离散磨削点的选取

根据本文中解题的核心思想，即由磨削离散点的切线近似逼近待加工工件的母线方程，由于问题一中工件母线的斜率在任意位置均不相同，因此本文拟采取将工件母线按照等弧长划分的原则，选取 N 个离散点，逐一完成磨削，来近似模拟工件的完全加工过程，由于题中已知粗糙工件的多余尺寸足够一次磨损，因此在对每个选定的磨削点进行加工时，可以适当磨掉每个选定点外围的多余部分，当 N 取较大值时，经理论分析，文中采用的对选定点的精加工来近似模拟待加工工件的精确加工，可以使粗糙工件的多余部分将几乎全部被磨去，可以达到较高的磨削精度。

5.1.3 问题一模型的建立

对工件上选定的磨削点进行精确加工的过程实质上就是通过在前面假设的 $x-y$ 坐标系中将工件母线不断的进行平移和旋转操作，每次操作完成后均需使得各个选定磨削点与砂轮磨削部分线段相切，如图 1 所示：

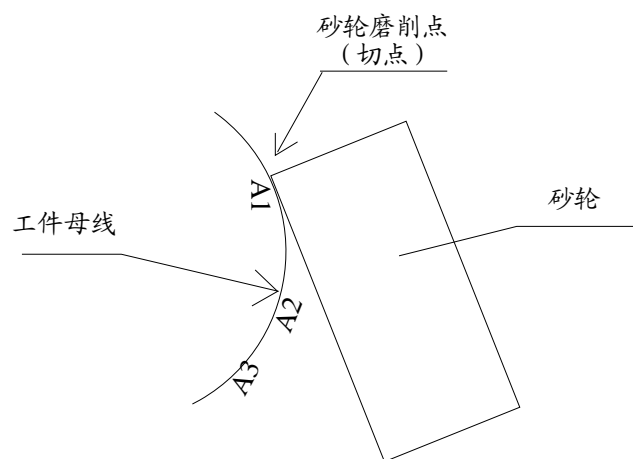


图 1 工件母线与砂轮磨削点相切示意图

下面研究选取的 N 个离散点(待磨削点)随着工件移动时的运动规律。考虑到工件在磨床上存在水平、垂直、旋转三个分运动，故以下将建立相应数学模型来分析工件母线上任意点在三个方向上的坐标变化规律。

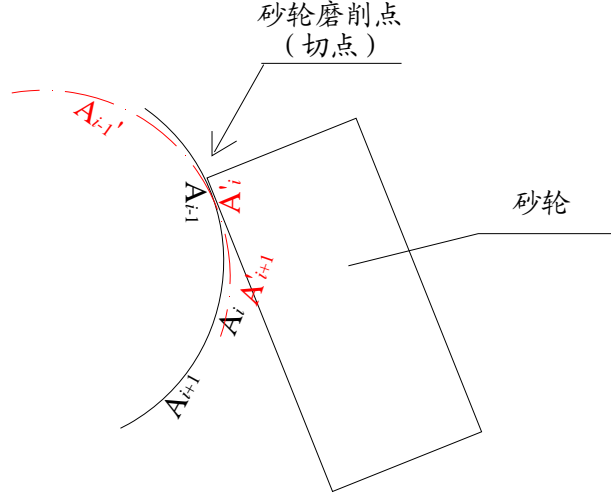


图 2 工件母线移动示意图

图 2 中点 $A_{i-1}^{(k)} = (x_{i-1}^{(k)}, y_{i-1}^{(k)})$ 与点 $A_i^{(k)} = (x_0^{(k)}, y_0^{(k)})$ 矢量差表示为式(1)、式(2):

$$\Delta x^{(k)} = x_{i-1}^{(k)} - x_0^{(k)} \quad (1)$$

$$\Delta y^{(k)} = y_{i-1}^{(k)} - y_0^{(k)} \quad (2)$$

其中 $i=1, 2, 3, \dots, N$, $(x_0^{(k)}, y_0^{(k)})$ 表示砂轮磨削基准点, 问题一中取定为 (0,130.1755)。

假设图 2 中实线为工件在第 k 次移动前的位置, 点划线为工件在第 k 次移动后的位置, 其间上台所转过的角度为 $\Delta\theta^{(k)}$ (可按式(10)计算得出), 则由于工件旋转使得其上任意点发生的水平和垂直方向位移 $\Delta x_{rot}^{(k)}$ 、 $\Delta y_{rot}^{(k)}$ 分别为:

$$\Delta x_{rot}^{(k)} = \sqrt{(x_i^{(k-1)} - 250)^2 + (y_i^{(k-1)})^2} (\cos(\theta_i^{(k-1)} - \Delta\theta^{(k)}) - \cos \theta_i^{(k-1)}) \quad (3)$$

$$\Delta y_{rot}^{(k)} = \sqrt{(x_i^{(k-1)} - 250)^2 + (y_i^{(k-1)})^2} (\sin(\theta_i^{(k-1)} - \Delta\theta^{(k)}) - \sin \theta_i^{(k-1)}) \quad (4)$$

从而, 在工件第 k 次移动过程中, 中台和下台的步进电机实际给进量 $\overline{\Delta x^{(k)}}$ 、 $\overline{\Delta y^{(k)}}$ 分别为:

$$\overline{\Delta x^{(k)}} = \Delta x^{(k)} - \Delta x_{rot}^{(k)} = \Delta x^{(k)} - \sqrt{(x_i^{(k-1)} - 250)^2 + (y_i^{(k-1)})^2} (\cos(\theta_i^{(k-1)} - \Delta\theta^{(k)}) - \cos \theta_i^{(k-1)}) \quad (5)$$

$$\overline{\Delta y^{(k)}} = \Delta y^{(k)} - \Delta y_{rot}^{(k)} = \Delta y^{(k)} - \sqrt{(x_i^{(k-1)} - 250)^2 + (y_i^{(k-1)})^2} (\sin(\theta_i^{(k-1)} - \Delta\theta^{(k)}) - \sin \theta_i^{(k-1)}) \quad (6)$$

工件第 k 次移动后, 母线上所有点的坐标 $A_i^{(k)}$ 可表示为:

$$A_i^{(k)} = A_i^{(k-1)} + (\overline{\Delta x^{(k)}}, \overline{\Delta y^{(k)}})$$

$$= A_i^{(k-1)} + (\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}) - (\sqrt{(x_i^{(k-1)} - 250)^2 + (y_i^{(k-1)})^2} (\cos(\theta_i^{(k-1)} - \Delta\theta^{(k)}) - \cos\theta_i^{(k-1)}), \sqrt{(x_i^{(k-1)} - 250)^2 + (y_i^{(k-1)})^2} (\sin(\theta_i^{(k-1)} - \Delta\theta^{(k)}) - \sin\theta_i^{(k-1)})) \quad (7)$$

第 1 次移动前, 工件母线上各选定的磨削点与 x 轴正向夹角为:

$$\theta_i^{(0)} = \arctan \frac{y_i^{(0)}}{x_i^{(0)}} \quad (8)$$

工件经(k-1)次移动后, 工件母线上各选定的磨削点与 x 轴正向夹角变为:

$$\theta_i^{(k-1)} = \theta_i^{(0)} - \sum_{j=1}^{k-1} \Delta\theta^{(j)} \quad (9)$$

工件第 k 次移动时, 所需转动角度为:

$$\Delta\theta^{(k)} = \theta_{k+1}^{(k-1)} \quad (10)$$

于是第 k 次移动过程中, 三个控制电机(水平、垂直、旋转)所需给定的脉冲数 $n_x^{(k)}$ 、 $n_y^{(k)}$ 、 $n_\theta^{(k)}$ 分别为:

$$n_x^{(k)} = \left\lfloor \overline{\Delta x^{(k)}} * 300 \right\rfloor, \quad n_y^{(k)} = \left\lfloor \overline{\Delta y^{(k)}} * 300 \right\rfloor, \quad n_\theta^{(k)} = \left\lfloor \overline{\Delta\theta^{(k)}} * 10 \right\rfloor \quad (11)$$

其中, “[]” 代表向下取整。

5.1.4 模型求解

本文将问题 1 的步进电机最优化组合方案分解为(N-1)次分段优化后的结果之和, 其中每段均指下一时刻待加工点到砂轮磨削点最优移动路径, 从而确定这一时段三个控制电机所需的脉冲数及其最优时序组合, 从而得出最佳加工方案。

5.1.4.1 脉冲数的求解

根据 5.1.3 中模型的建立过程, 可按图 3 所示流程图求解各控制电机所需脉冲数。

脉冲数求解源程序见附录 1。

5.1.4.2 脉冲序列的优化组合

针对此优化问题, 下面先结合本题进行分析排除某些方案, 以及确定本问题最优解的一些总体原则, 并以此作为各组合方案是否需进一步判断其可行性的逻辑条件, 从而对顺序遍历搜索算法进行改进, 然后利用该算法对各电机的时序脉冲序列进行组合, 找出最优控制策略, 这样可以大大减少无效的搜索判断, 从而提高算法效率。

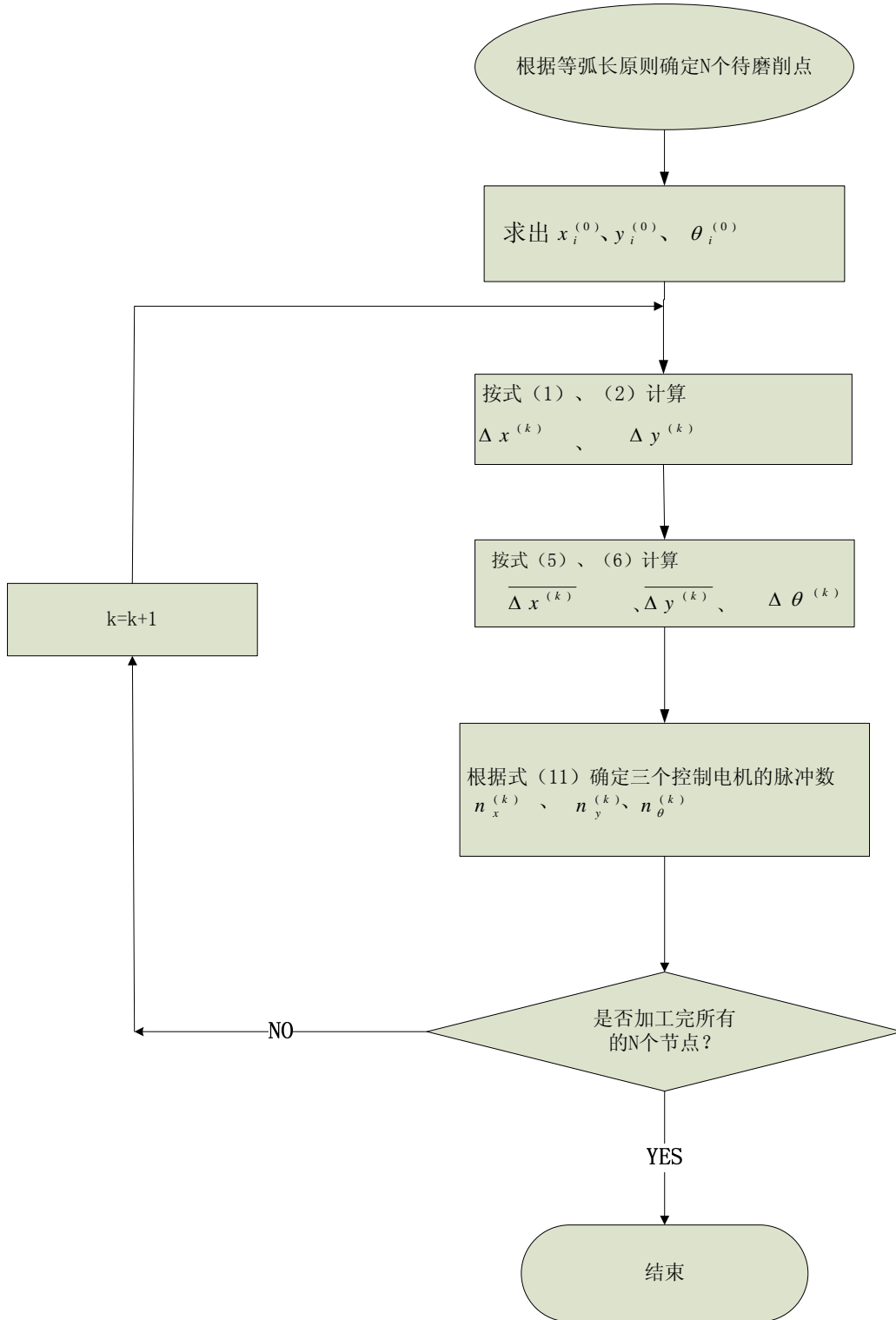


图 3 脉冲数求解流程图

依据本文假设以及对赛题本质的理解，三台电机接收的脉冲单元均假设为如图 4 所示，针对问题 1 中的已知母线方程，按照本文中所建立的数学模型求解得知，在每一次待加工点的移动过程中，控制 x 方向位移的步进电机（以下简称电机 x ）所需的脉冲数均大于控制 y 方向位移的步进电机（以下简称电机 y ）所需的脉冲数，远大于控制 θ 方向旋转的步进电机（以下简称电机 θ ）所需的脉冲数。

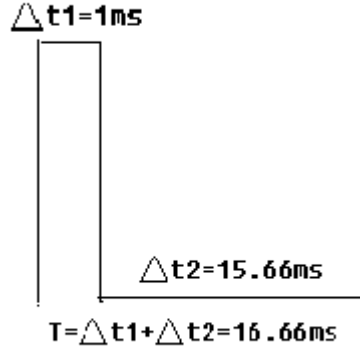


图4 步进电机脉冲单元

STEP1: 确定电机 x 的时序脉冲

基于以上分析, 本文将在以下的单段电机最优化组合方案中, 先取定电机 x 的全部时序脉冲。为了减少工件磨削所需总时间, 将电机 x 的时序脉冲依次无间隙排列 (基于模型假设以及选定的脉冲单元, 这种排列方法任意时刻均可满足题中对电机脉冲频率的要求, 同时使得任意相邻时段频差百分比较小, 从而提高磨削精度)。

STEP2: 确定电机 θ 的时序脉冲

由于问题 1 中母线为单调凸, 在电机 y 未接收到触发脉冲时, 电机 θ 的步进不会导致工件在移动过程中与磨削砂轮接触, 以致可能损坏工件, 因此电机 θ 的时序脉冲从零时刻开始给定, 无间隙排列, 直到计算出的脉冲个数全部发送完毕。

STEP3: 产生电机 y 的初始时序脉冲

该步采用改进顺序遍历法, 首先将电机 y 的全部时序脉冲依次从前往后无间隙排列, 作为初始试探状态, 如图 5 所示, 为第 k 次移动时, 初始试探状态;

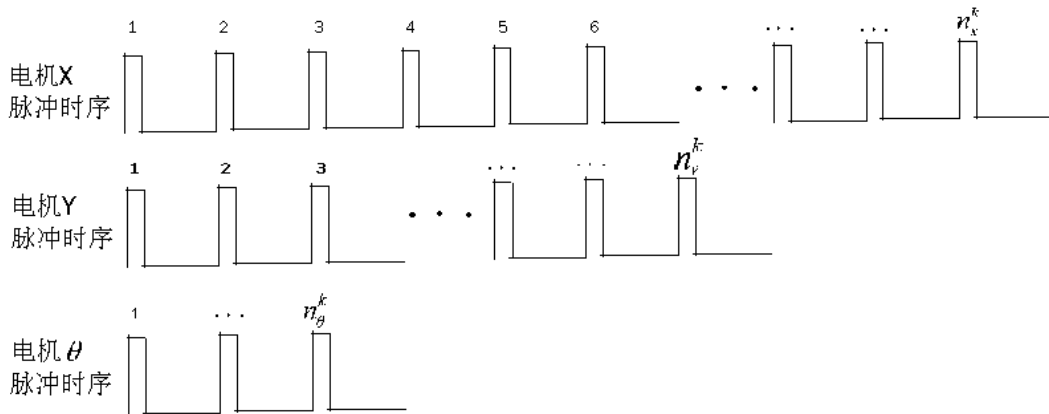


图5 工件第 k 次移动时电机脉冲组合初始方案

STEP4: 电机 y 的初始时序脉冲可行性判断

对于图 5 中的三台电机触发脉冲的初始组合方案, 判断第一组 (即图 5 中的第一列) 脉冲发送完毕后, 依据模型中所给出的公式(7)计算此时工件各待磨削点新的坐标值, 判断工件母线上是否存在纵坐标值 $y > 130.1755$ 的点, 如果不存在, 判断下一组脉冲发送后的情况; 如果存在, 则说明在工件移动过程中, 工件

与磨削砂轮发生了不必要的接触，以致损坏工件，下文中将称此脉冲为危险脉冲
如图 6 所示，则转 STEP5 对电机 y 的时序脉冲进行调整。

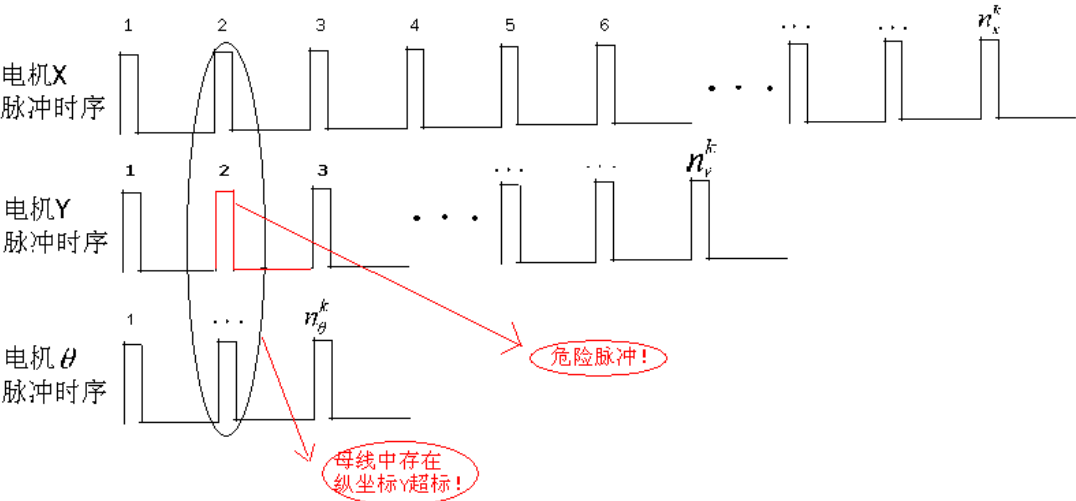


图 6 某时刻检测到危险脉冲

STEP5: 调整电机 y 的初始时序脉冲

将危险脉冲信号及其后续全部脉冲依次向后移动一个脉冲间隔，如图 7 所示。然后，以下一时刻为判断起点，重复 STEP4，进行判断，直到调整后的方案中不存在危险脉冲为止。

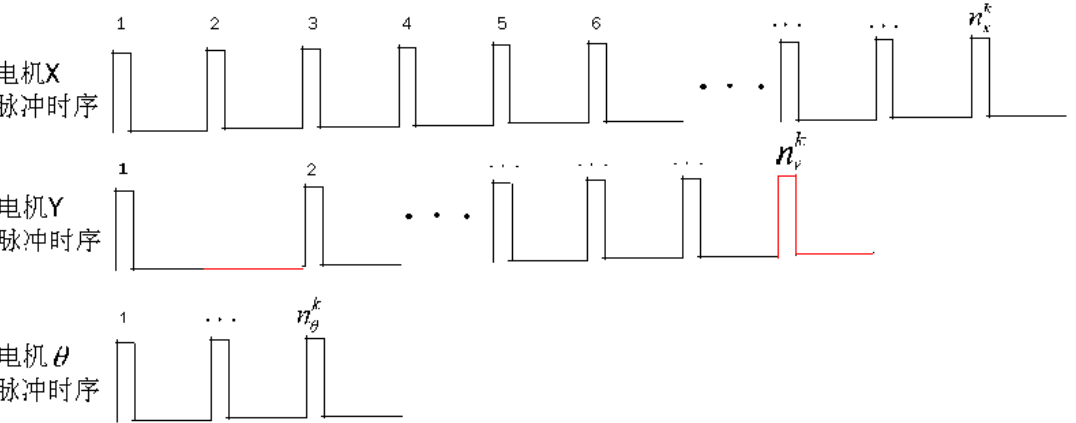


图 7 危险脉冲发生后电机 y 时序脉冲的调整方案

在此调整过程中，如果电机 y 的最后一个脉冲已超出电机 x 的最后一个脉冲，为了找出时间最短的方案，停止对电机 y 危险脉冲的后移和判断。而是转至以图 8 所示新的电机脉冲组合初始方案，即：将电机 y 的时序脉冲起点下移一个时刻发送，再返回 STEP4 对此方案进行判断。

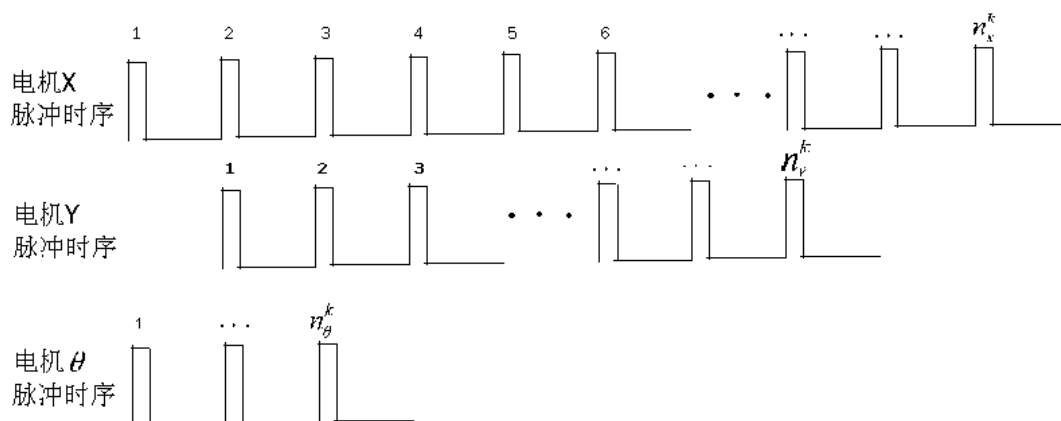


图 8 新的电机脉冲组合初始方案

如果按照上述调整流程，直到试探完毕，没有找到可行方案，即一直存在危险脉冲。则返回至第一次电机脉冲组合初始方案试探的最后一步，继续进行判断。此后必能找到可行方案，但是，工件加工花费的总时间大于电机 x 的时序脉冲发送总时间。

最后将搜索到的电机脉冲最优方案组合输出。

综上，对脉冲序列进行优化组合的程序流程图如图 9 所示。

脉冲序列优化组合源程序见附录 1，求解结果见附录 2。

为了直观表示三个电机控制脉冲的优化组合结果，部分脉冲组合如图 10 示：

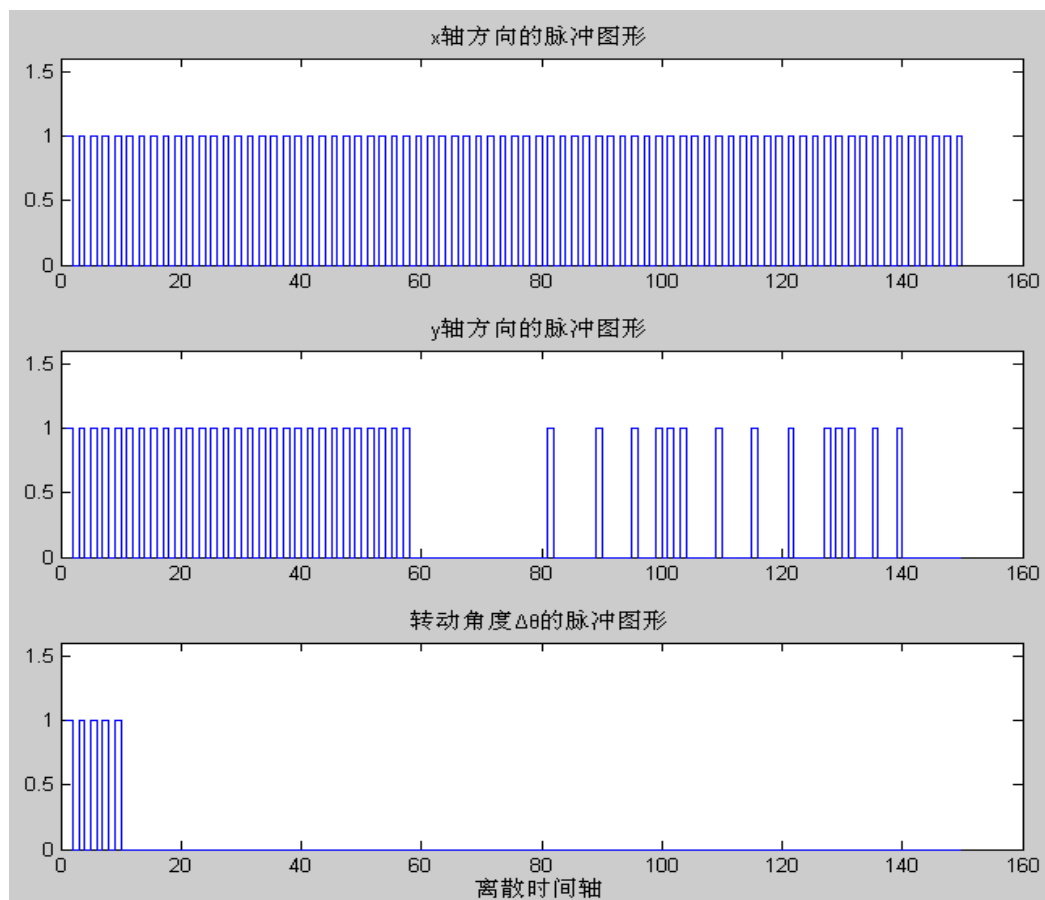


图 10 问题一中电机的部分控制脉冲时序组合图

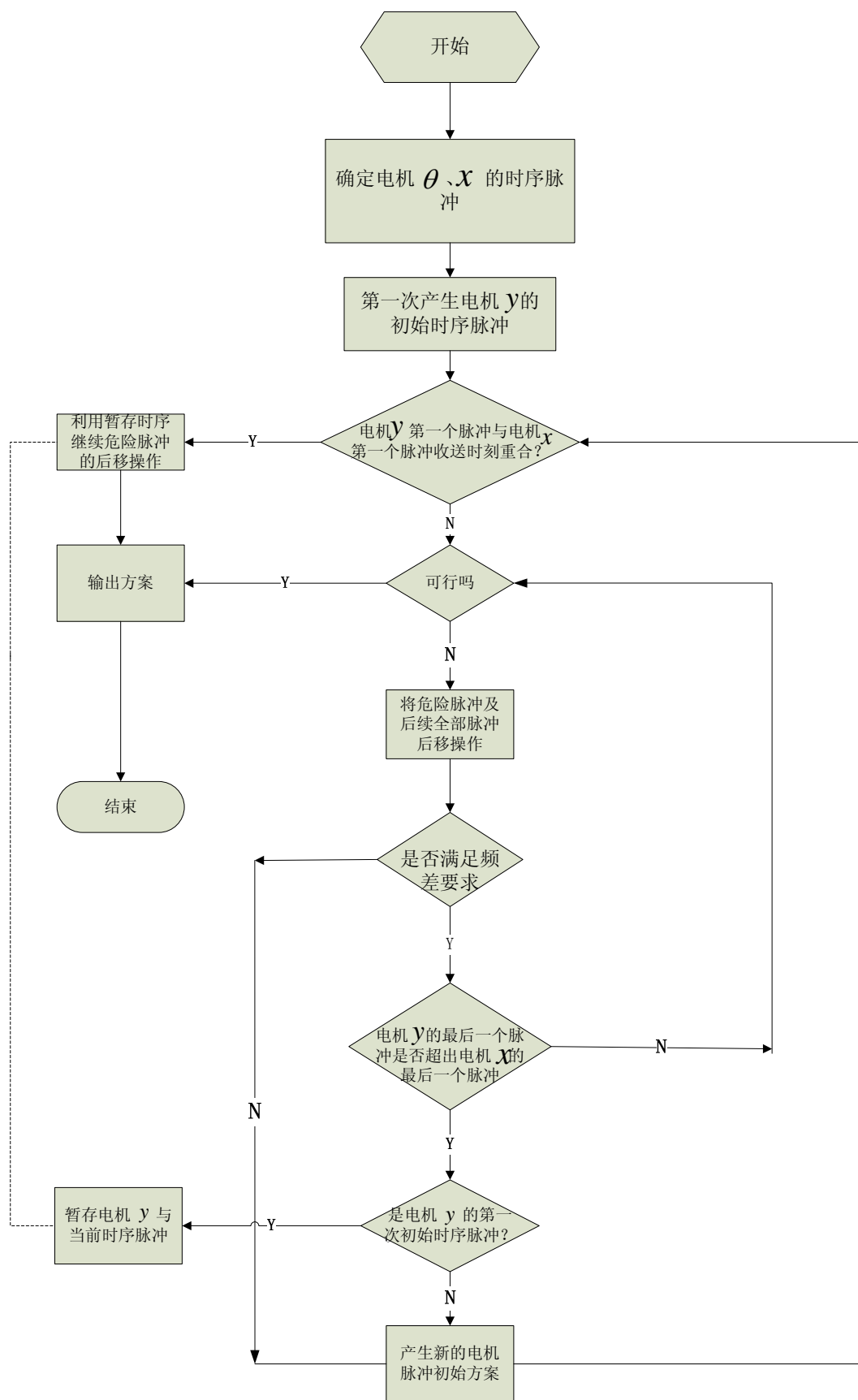


图9 脉冲序列优化组合程序流程图

5.1.5 误差分析

误差分析主要包括实际加工曲线与理论曲线的整体误差与局部误差及误差的来源分析。

5.1.5.1 局部误差

本文中，局部误差采用轮廓局部最大偏差 d_{\max} 表示，如图 11 所示。设图中相邻两切线的交点为点 A，过点 A 作 X 轴垂线，与工件母线交于 B 点，经分析可得，此时轮廓线与工件母线偏差最大，称其为轮廓局部最大偏差，记作 $d_{\max} = |AB|$ 。

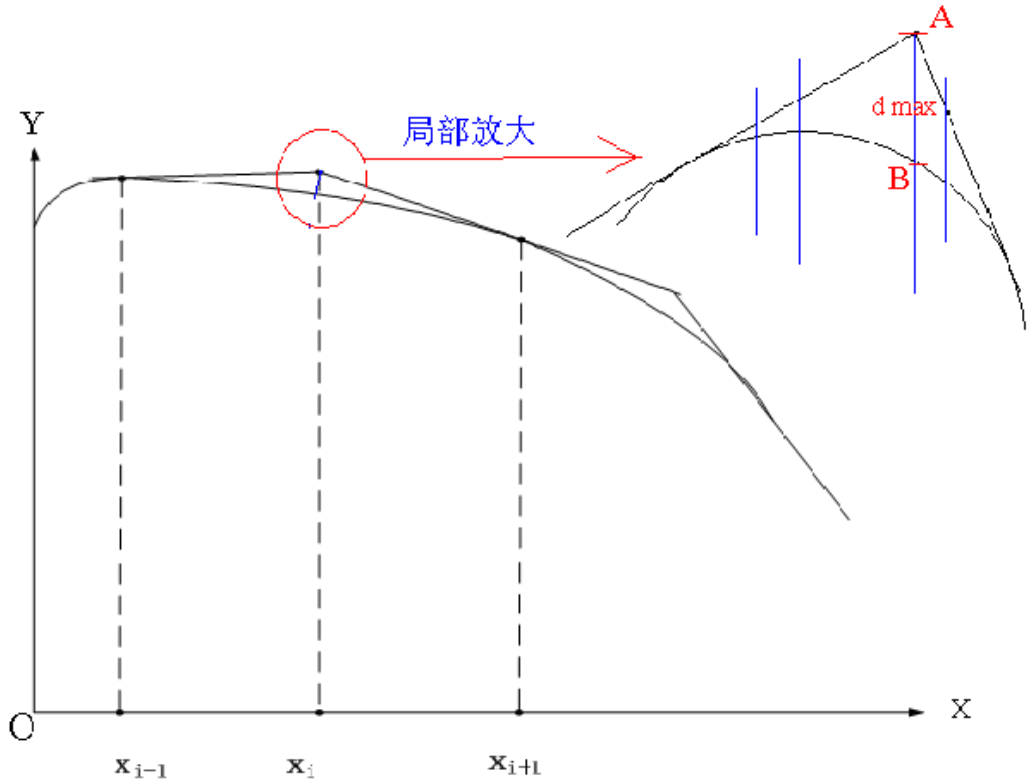


图 11 轮廓局部最大偏差量示意图

对于任意两个相邻的切线，都存在一个轮廓局部最大偏差量 d_{\max} ，分别记为： $d_{\max 1}, d_{\max 2}, \dots, d_{\max N}$ ，再取 $D_{\max} = \max(d_{\max 1}, d_{\max 2}, \dots, d_{\max N})$ ，定义其为轮廓最大偏差，可以在一定程度上反应工件磨削局部精度。

考虑到工件尺寸对磨削精度的影响，定义轮廓局部相对偏差 $\eta_i = \frac{d_{\max i}}{f(x^*)} \times 100\%$ ，其中 x^* 为两条相邻切线交点的横坐标， $f(x)$ 为工件母线方程。

下面以切线 l_{i-1} 和 l_i 相交为例，推导 x^* 和 d_{\max} 的求解过程：

$$\text{设： } l_i(x) = f'(x_i)(x - x_i) + y_i \quad (12)$$

$$l_{i-1}(x) = f'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + y_{i-1} \quad (13)$$

则切线 l_{i-1} 和 l_i 的交点 $A_{i-1} = (x_{i-1,i}, y_{i-1,i})$ 的坐标:

$$x_{i-1,i} = \frac{(f'(x_i)x_i - f'(x_{i-1})x_{i-1}) - (y_i - y_{i-1})}{f'(x_i) - f'(x_{i-1})} \quad (14)$$

$$y_{i-1,i} = x_{i-1,i}f'(x_i) + (y_i - f'(x_i)x_i) \quad (15)$$

由上式得到的 $x_{i-1,i}$ 即为此时的 x^* 。

根据上述结果求得两切线交点 A_{i-1} 到工件母线的距离为:

$$d_{\max(i-1)} = \sqrt{(x - x_{i-1,i})^2 + (y - y_{i-1,i})^2} \quad (16)$$

5.1.5.2 全局误差指标——面积比 δ_1

式(17)中 S_1 为工件母线与 x 轴所围成的曲边梯形面积; S_2 为加工完毕后工件外轮廓母线与所要求的母线围成的面积。

$$\delta_1 = \frac{S_2}{S_1} \times 100\% \quad (17)$$

式中:

$$S_1 = \int_0^{600} f(x) dx \quad (18)$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_{12}} l_1(x) dx + \dots + \int_{x_{i-1,i}}^{x_{i,i+1}} l_i(x) dx + \dots + \int_{x_N}^{x_{dp}} l_N(x) dx - S_1 \quad (19)$$

其中, $x_{dp} = \frac{-f(x_N)}{f'(x_N)} + x_N$ 是切线 $l_N(x)$ 与 x 轴交点的横坐标, 可通过方程

$l_N(x) = 0$ 求得。

面积比 δ_1 综合了工件加工完毕后的外形与标准母线所有点间的偏离程度, δ_1 值越大, 说明该加工方案产生的误差越大, 也即工件的应磨削掉而未加工部分残留越多。

5.1.5.3 误差计算及误差来源分析

本问题采用上述方案时, 其局部误差 D_{\max} 和 η_i 以及全局误差计算结果见附录 3。

误差来源分析：

在实际情况下，所建数学模型不够精确，步进电机、变速器，功放伺服机构和精密丝杆—螺母副的误差等因素，均可带来误差。但由于本题已假设不存在任何设备误差，故该方案误差主要由数学模型本身的原理误差引起。

5.2 问题二：非单调凸曲线工件的磨削

5.2.1 问题分析

问题二与问题一的最主要差别在于，问题一中采用圆柱式砂轮对母线为单调凸的工件进行磨削，对砂轮的磨削部分无尺寸限制，工件中选定磨削点依次向同一方向旋转一定角度，只要步进电机脉冲时序合理组合，就一定可以在磨削过程中保证工件与砂轮不会发生不必要的接触；问题二中采用轮式砂轮对母线为非单调凸的工件进行磨削，砂轮的磨削部分不再是一条线段中的一个点，而是一段半径为 r 的圆弧中的一点，当工件中选定磨削点依次旋转到该点进行磨削时，如果砂轮尺寸选择不当，如直径或厚度过大，则有可能导致工件除磨削点外的其余部分发生非计划磨削，且由于工件母线非单调凸，具有拐点，在拐点两侧，待加工点移动到磨削点的过程中所需转过角度的方向有发生偏转的可能，这既增加了步进电机优化组合的复杂性，也增大了工件与砂轮发生非计划磨削的可能性。

基于以上分析，在问题 1 的求解基础上，问题 2 主要针对以下两方面进行分析求解：

- 1) 轮式砂轮尺寸的选择，包括砂轮直径和厚度；
- 2) 电机脉冲时序优化策略的改进。

5.2.2 砂轮尺寸的选择

5.2.2.1 问题分析：

该部分共需求出轮式砂轮以下四个参数：砂轮直径 φ 、砂轮厚度 a ，砂轮横截面外端轮廓线半径 r 和张角 α ，其中半径 r 的取值受限于工件母线的极小值点，如果其曲率半径小于 r ，将导致砂轮无法对该极值点进行有效磨削；张角 α 在工程上一般取其不大于 180° ，经分析，其原因为：若 $\alpha > 180^\circ$ ，则砂轮横截面外轮廓线中的某些点将发生凹陷，从而无法将其用于磨削待加工工件，造成砂轮磨削面的浪费，当 r 确定后，砂轮参数 a 将与 r 一起唯一确定 α 。

砂轮厚度 a 和直径 φ 将共同受制于如下磨削工况：在非单调凸母线的极大值和极小值之间存在着一个拐点，在该点处切线斜率的绝对值最大，也即其法线的斜率最小。当选用轮式砂轮外轮廓的最低点作为定点，对待加工工件中选定点依次进行磨削时，磨削点与砂轮中心的连线要与该拐点的切线相互垂直，也即在拐点处的法线方向上，由于此时法线斜率最低，整个砂轮相对于待加工母线而言，砂轮的整体轮廓与母线右半部分的另一个拐点相接触的可能性最大，这种非计划磨削工况是应该通过砂轮参数的设计而避免的，以下将根据这一特殊工况作为砂轮尺寸的临界值，确定砂轮参数中的 φ 和 a 。

5.2.2.2 确定轮式砂轮的外轮廓弧线半径 r

由于待加工工件母线方程 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$, $x \in [0, 600]$ 已知,

可以求出该函数的导函数 y' 。

由圆弧上任意点处曲率 K 的求解公式:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} \quad (20)$$

得母线方程任意点 $P(x_0, y_0)$ 处的曲率半径 R 为:

$$R|_P = \frac{1}{K}|_P = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{|y''|}|_P \quad (21)$$

由 $y' = 0$, 可得母线方程的全部极值点, 其中函数值最小的点 x_{\min} 对应的曲率半径即为砂轮外轮廓曲线的最大半径, 取其边界值, 可得:

$$r = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{|y''|}|_{x=x_{\min}} \quad (22)$$

5.2.2.3 砂轮直径 φ 和厚度 a 的求解

首先求出母线方程在 $[0, 600]$ 之间的全部拐点, 由于先前已将母线按照等弧长原则划分为 N 个待加工点, 因此可以用相邻两点之间的坐标变化比来近代替后一点的切线斜率, 从而根据斜率的变化规律确定不同区间段内的拐点。当 N 取值较大时, 该方法具有较高的精度。

设经过第 i 点与第 $(i-1)$ 点的直线斜率为 $K(i)$:

$$K(i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (2 \leq i \leq N) \quad (23)$$

当 $K(i) = 0$ 时, 可得到母线方程的两个极值点横坐标分别为: $x_{peak1} = 91$ 和 $x_{peak2} = 369$, 于是, 这两个极值点可将区间 $[0, 600]$ 分成三个子区间, 7 分别为 $[0, 91]$ 、 $[91, 369]$ 、 $[369, 600]$, 在各自的区间内分别求出 $K(i)$ 绝对值最大的点, 即为对应区间内的拐点。

经计算, 在二、三区间内分别存在唯一的拐点, 其坐标分别为 $G1(180, 140)$ 和 $G2(500, 126)$ 。下面对如图 12 所示的临界情况进行分析:

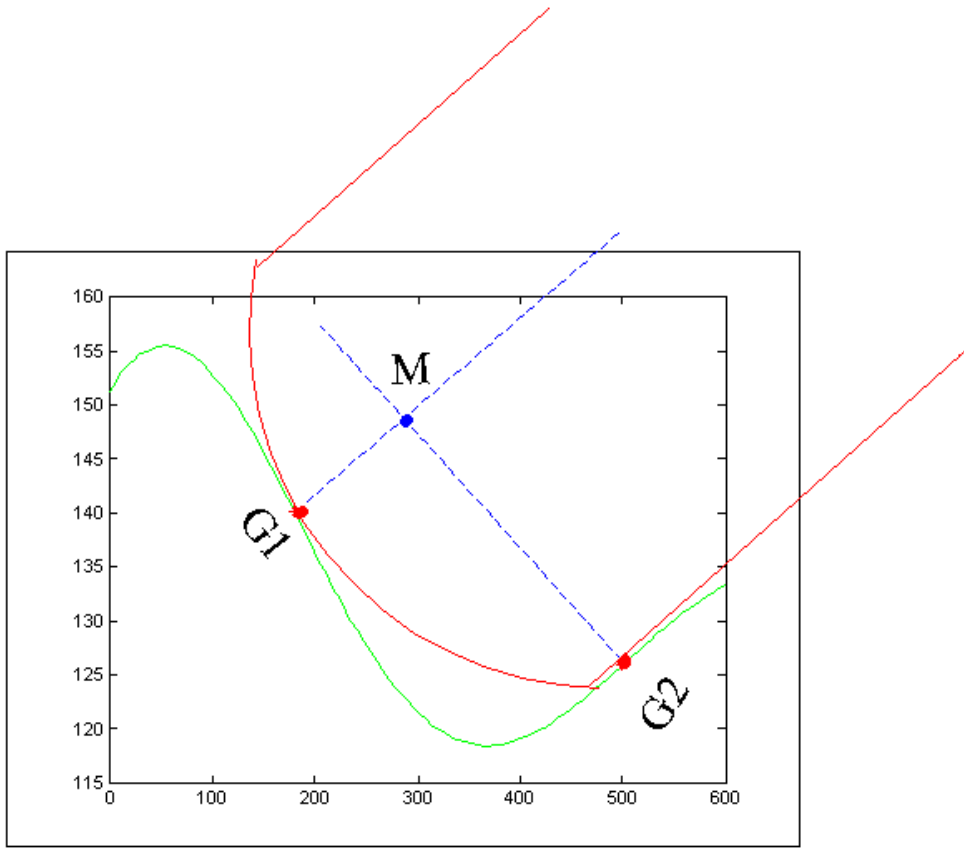


图 12 确定轮式砂轮临界尺寸的示意图

在图 12 中，砂轮的直径方向与拐点 $G1$ 的法线方向重合，且砂轮外轮廓的最低点正在磨削该拐点，同时由于砂轮的厚度和直径选择不当，使得此时刻砂轮的径向外轮廓线恰与区间三内的拐点 2 相外切，这时工件将发生计划外的磨削，可能会降低磨削精度，以致损坏工件。依据产生这种危险工况时砂轮和工件的相对位置关系可以同时求解出直径 φ 和厚度 a 的临界值，具体求解过程如下：

根据拐点 1 的坐标 $G1(180, 140)$ 和拐点 2 的坐标 $G2(500, 126)$ 以及 $G1$ 处法线斜率 F_{G1} 和 $G2$ 处法线斜率 F_{G2} 分别得到两条法线方程 $L1$ 和 $L2$ ，记两条法线的交点为 $M(x_M, y_M)$ ，则可得砂轮的直径 φ 和厚度 a 的临界值如下：

$$a = 2|MG2| = 2\sqrt{(x_{G2} - x_M)^2 + (y_{G2} - y_M)^2} \quad (24)$$

$$\varphi = 2|MG1| = 2\sqrt{(x_{G1} - x_M)^2 + (y_{G1} - y_M)^2} \quad (25)$$

由于当砂轮的直径 φ 和厚度 a 分别减小时，总是可以分别使得这种危险工况出现的可能性降低，但是结合实际工件加工需求可知，为了使得砂轮具有相当的刚性和韧性，应使得其厚度不至过小而直径不至过大，因此当选择砂轮的尺寸和型式时，可使用式(24)和(25)中推荐的砂轮直径和厚度的值。

又由于当砂轮磨削 $G2(500,126)$ 时, $G1(91,154)$ 点同样存在可能与砂轮发生接触的危险工况, 因此可以再计算出这种情况下的砂轮直径 φ 和厚度 a 的限值, 最终砂轮厚度和直径均取两种情况下的较小值,

基于以上计算, 可以确定实际工程砂轮直径 φ 和厚度 a 的取值。

5.2.2.4 求解轮式砂轮外轮廓圆弧的张角 α

由几何关系可知:

$$\alpha = 2 * \arcsin \frac{a}{2 * r} \quad (26)$$

5.2.3 加工基准的确定

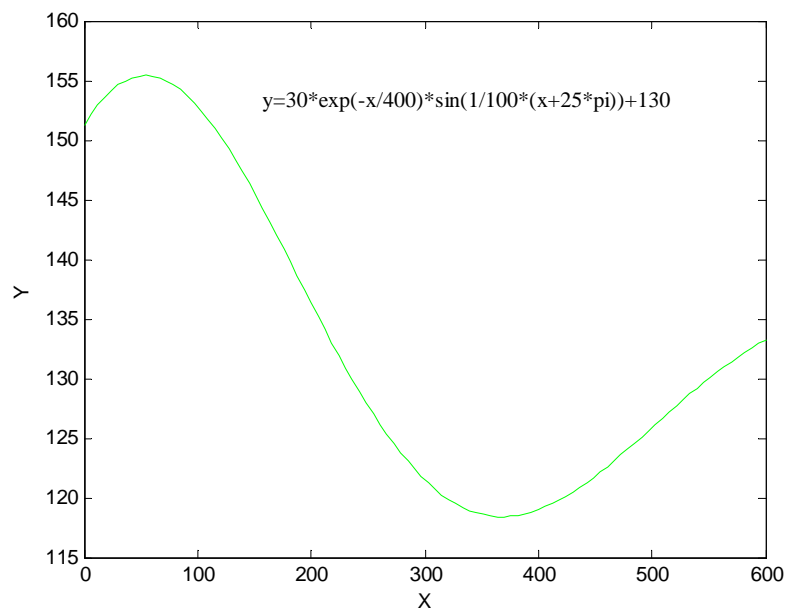


图 13 问题二中工件母线图

为了便于计算和磨削, 问题二中的加工基准确定为将上图沿顺时针方向转动, 使得工件母线在 $(0, 151.2132)$ 点与直线 $y=151.2132$ 相切, 此时刻对应于加工开始时刻, 此前的旋转为预动过程, 本文不给予考虑。

5.2.4 数学模型的建立

由于在问题一中建立的数学模型, 与曲线图形无关, 故同样适用于问题二的求解, 并且模型求解时的第一步: 各控制电机所需脉冲数求法也与问题一类似, 在此就不再赘述。

5.2.5 电机脉冲时序优化策略的改进

通过 5.2.2 分析可得问题二中工件母线有两个拐点, 分别为 $A1(180,140)$ 和 $A2(500,126)$, 如图 14 所示。

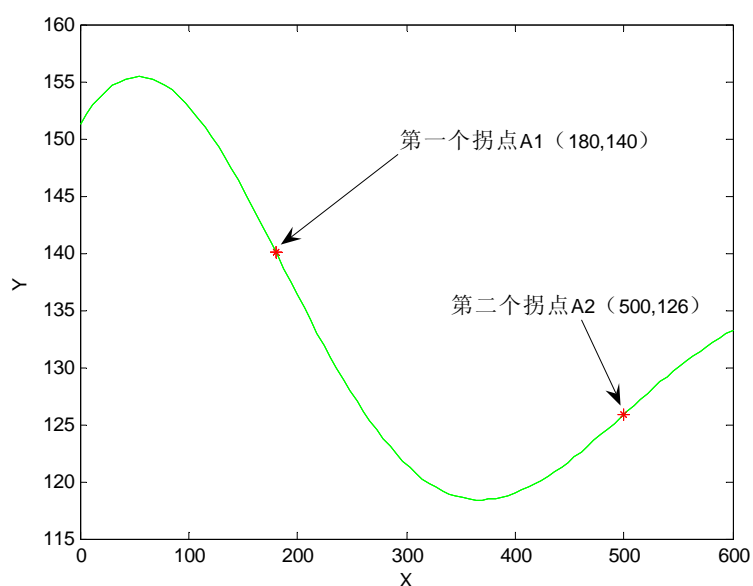


图 14 问题二中工件母线拐点标示图

在工件加工过程中，点 A1 和 A2 将是发送脉冲方向发生翻转的时刻，在 A1 点磨削以前，电机 θ 给进量为正值，使工件逆时针方向旋转，当 A1 点磨削以后，电机 θ 给进量变为负值，工件变为顺时针方向旋转，直到 A2 点磨削，当 A2 点磨削完毕后，工件旋转方向再次发生翻转，又变为逆时针方向旋转。

基于上述分析，我们针对问题二的电机脉冲时序优化，只需在问题一的优化方案基础上作如下改进即可：

在点 A1 加工前，给电机 θ 发送正向脉冲，当 A1 点加工完毕后，转为发送负向脉冲，直到 A2 点加工完毕，又变为发送正向脉冲即可。

脉冲序列优化组合源程序见附录 1，求解结果见附录 4。

为了直观表示三个电机控制脉冲的优化组合结果，部分脉冲组合如图 14 所示：

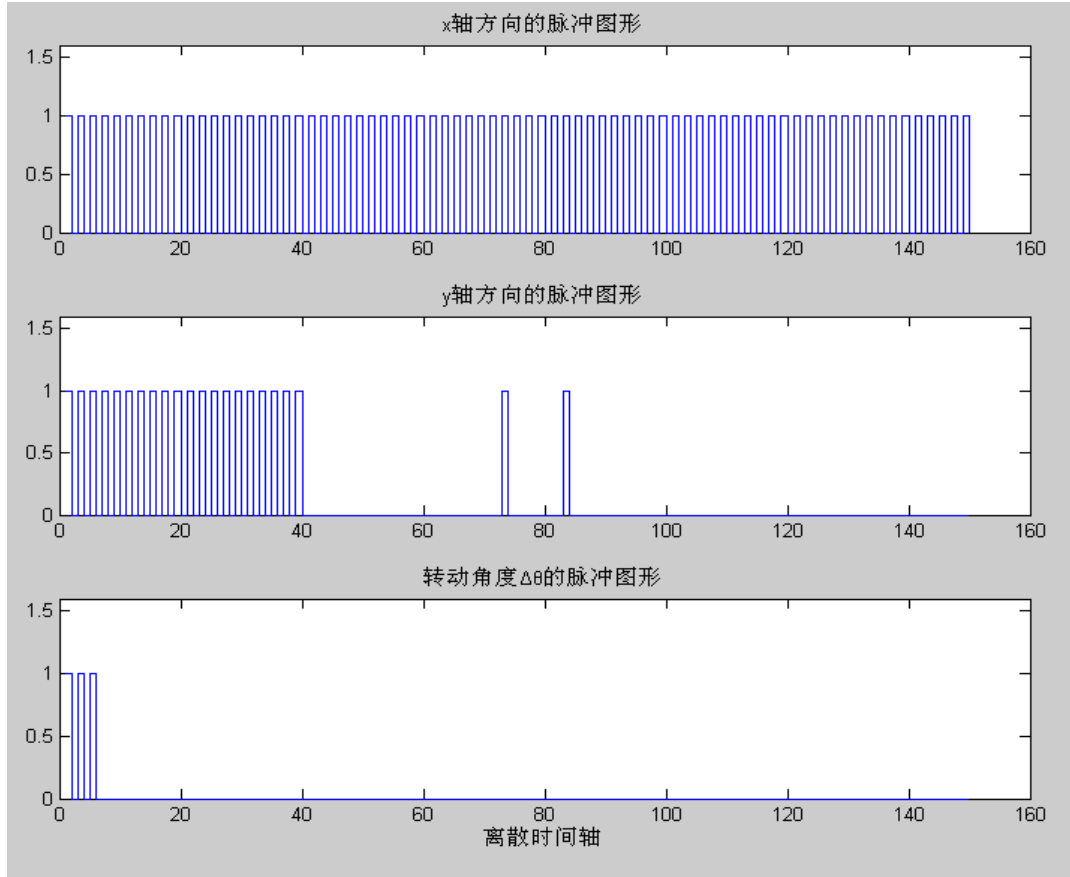


图 15 问题二中电机的部分控制脉冲时序组合图

5.2.6 误差分析

运用问题一中提出的误差分析指标体系，误差分析结果见附录 5。

5.3 问题三：问题一中磨削点选取的改进方案

问题一中工件水平方向尺寸为 600mm，而砂轮尺寸为 10mm，此时 $600/10=60 > 10$ ，说明此时工件的尺寸远大于砂轮尺寸，因此无需再对砂轮中磨削点位置采取动态优化，仅从减小砂轮磨削损耗、增加磨削精度的目的出发，将砂轮外轮廓磨削部分 ($0 \leq x \leq 10$) 等间距分为 N 个磨削点，并依次选定为工件中的 N 个待加工点的磨削点，在工件磨削过程中，通过控制三个电机的给进量，使得 N 个待加工点逐一移动到预先设定的磨削点处，完成磨削工序，就可以减小砂轮的局部磨削损耗，同时提高工件的磨削精度。

在问题一中建模过程中，磨削点取为定点(0,130.1755)，而本题中磨削点为：

$(x_0^{(k)}, y_0^{(k)})$ ，其中 $x_0^{(k)} = 10/N * k$ ， $y_0^{(k)} = 130.1755$ 。

则问题一模型中式(1)、(2)作如下改变：

$$\Delta x^{(k)} = x_{i-1}^{(k)} - x_0^{(k)} = x_{i-1}^{(k)} - 10/N * k \quad (1^*)$$

$$\Delta y^{(k)} = y_{i-1}^{(k)} - y_0^{(k)} = y_{i-1}^{(k)} - 130.1755 \quad (2^*)$$

模型求解过程中脉冲数的求解、电机时序脉冲优化组合、误差分析与问题一完全类似，此处不再赘述。

脉冲序列优化组合源程序见附录 1，求解结果见附录 6；误差分析结果见附录 7。

为了直观表示三个电机控制脉冲的优化组合结果，部分脉冲组合如图 16 所示：

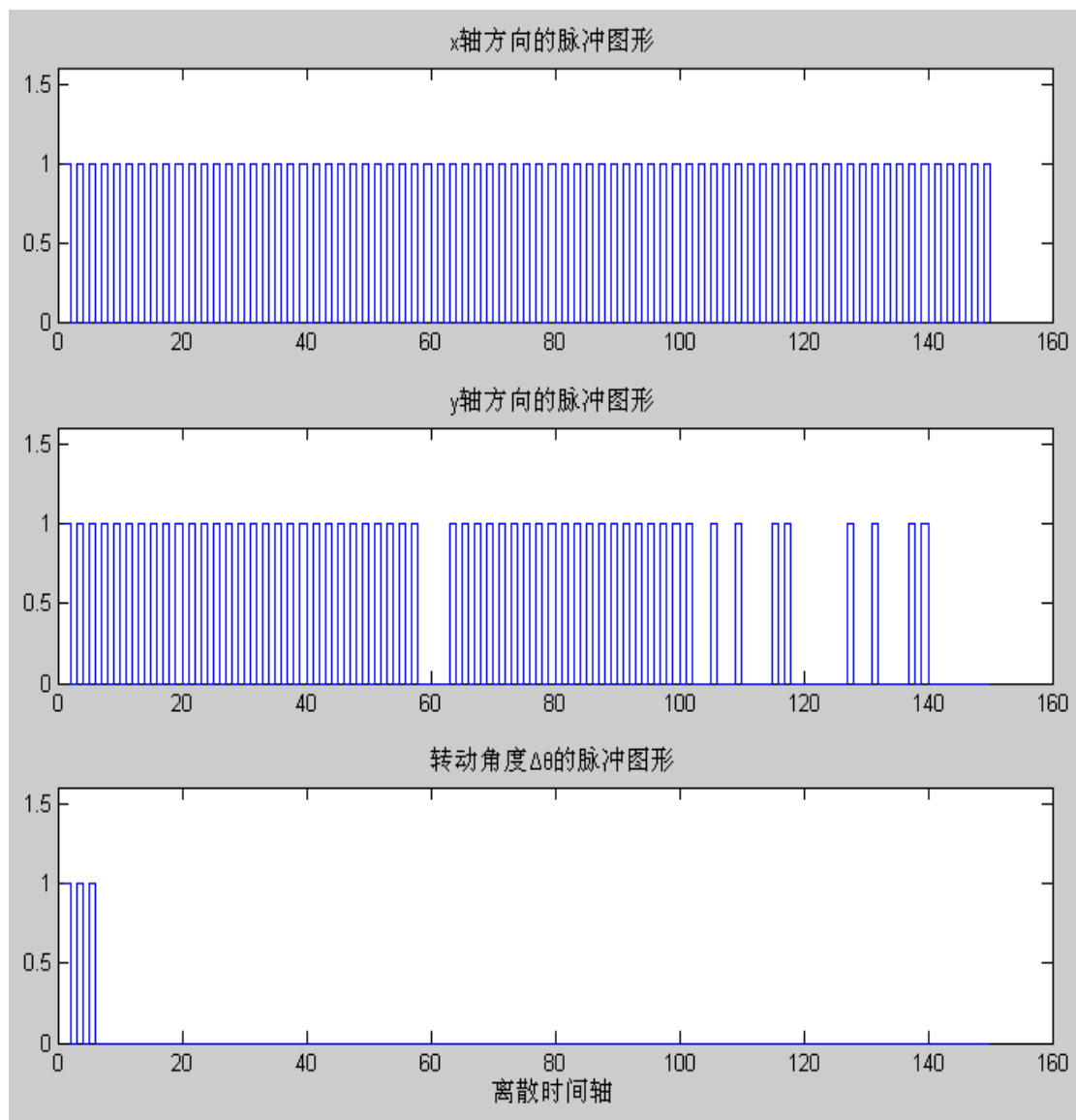


图 16 问题三中电机的部分控制脉冲时序组合图

5.4 问题四：问题二中磨削点选取的改进方案

问题二中，为了便于对工件母线的最小极值点处进行有效磨削，选取轮式砂轮的外轮廓弧线最低点为定磨削点，然后逐一对工件中选定的磨削点进行加工。

在问题四中，假定轮式砂轮的尺寸参数均与问题二中相同，只是对砂轮的磨削点进行合理分布，基于以上假设，为了保证工件母线的有效磨削，问题二中选定的定磨削点依然对工件母线的最小极值点处进行磨削，由于该极值点并非工件

母线水平方向的等分点，经计算，其坐标(x_{peak2} , y_{peak2})=(369, 118),则在工件极小值点左侧待加工点个数为： $N1=369*N/600$ ；右侧待加工点个数为： $N2=N-N1$ 。

为了使得工件磨削过程中所需旋转角度最小，对圆弧分段时，以砂轮外端轮廓线最低点为分界点，其左侧等弧长划分为 $N1$ 个磨削点，右侧等弧长划分为 $N2$ 个磨削点，在工件的磨削过程中，工件上的待加工点从左至右依次在砂轮的 N 个磨削点处进行磨削，从而可以减小砂轮局部磨损，同时提高工件的磨削精度。

至于建模过程，与问题二中类似，只是磨削点不再为定点，针对此变化，模型的修改方案与问题三相同，在此不再赘述。

按照问题二相同的流程进行脉冲数的求解、电机时序脉冲优化组合、误差分析。

脉冲序列优化组合源程序见附录 1，求解结果见附录 8；误差分析结果见附录 9

为了直观表示三个电机控制脉冲的优化组合结果，部分脉冲组合如图 17 所示：

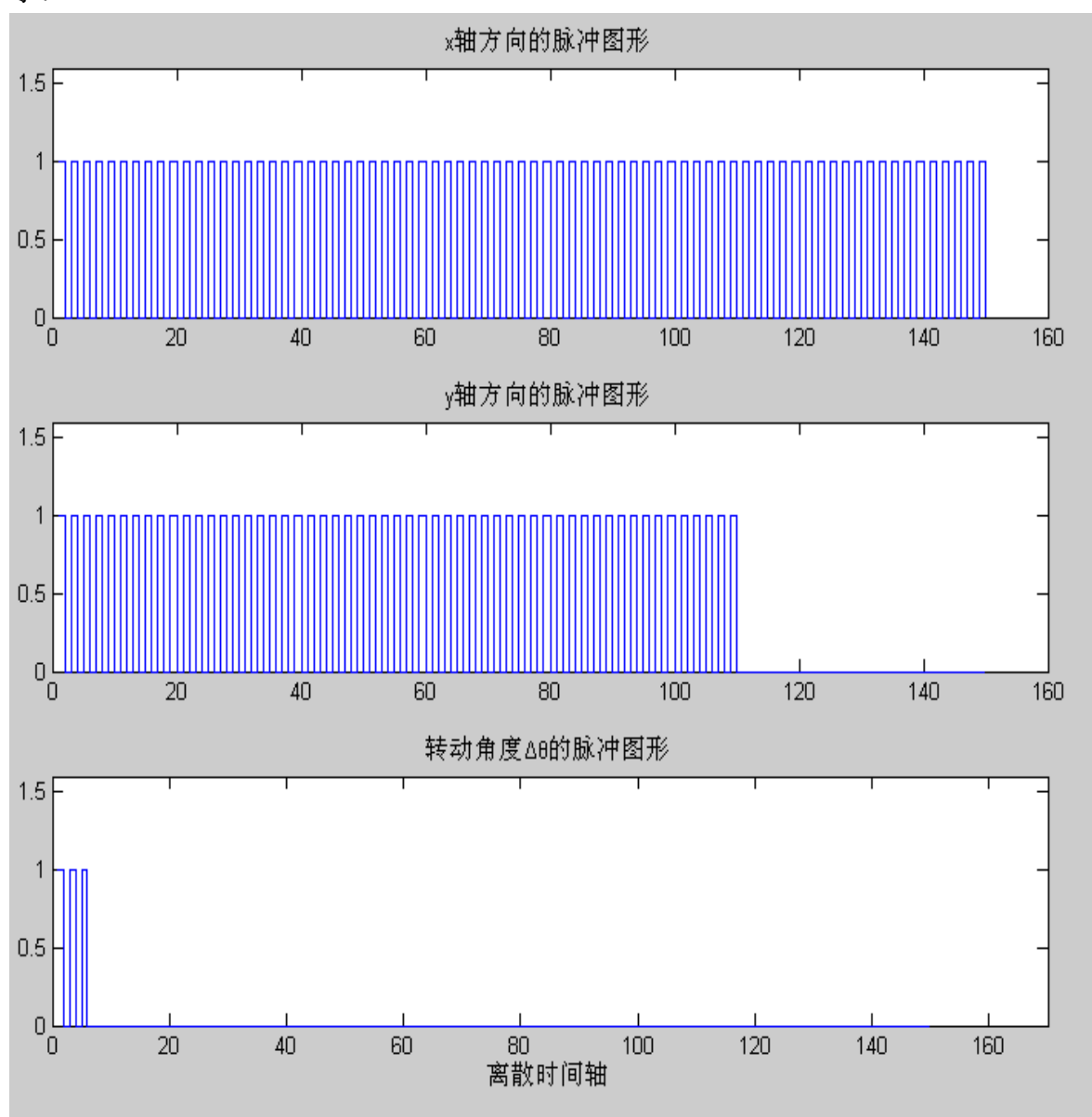


图 17 问题四中电机的部分控制脉冲时序组合图

六、模型的评价与改进

(1) 在问题一中建立的数学模型具有较强的鲁棒性,在问题二到四中,只需对原模型作局部修整,即可很好地解决相应的实际问题,从而避免了多次建模。

(2) 本文利用顺序遍历结合逻辑判断的搜索算法来寻找电机 x 电机 y 电机 θ 时序脉冲的最优组合,该算法与直接顺序遍历或随机搜索算法相比,加快了最优可行解的搜索速度;与无穷列举法相比,大大减少了无效解的遍历,从而提高了搜索效率。

(3) 在问题三和四的模型改进过程中,所采取的砂轮磨削点划分原则,不仅可以保证砂轮磨损的均匀化,以提高工件磨削精度。在问题四中,结合磨削过程中工件的旋转,对弧线采取了分段等弧长划分的方法,避免了工件不必要的旋转,在一定程度上减少了工件磨削的总用时。

(4) 本文在电机控制脉冲时序优化过程中,采用“等窗滑差”的方法进行脉冲频差的监测,可以连续监测任意两个相邻时间段内的频率差,与固定监测区间相比,频差监测结果可信度更高。

(5) 本文中在进行步进电机时序脉冲优化组合时,假设了三个步进电机的给定脉冲单元完全相同,即均为高电平 1ms ,低电平 15.66ms ,且三个电机在协调控制工件的旋转时,轮空的电机等待的时间为脉冲单元的整数倍,这就造成了工件的“离散化”运动,使得砂轮在磨削工件时,在工件的外表面留下的是切线痕迹,降低了工件的光滑度,如果三个电机脉冲单元不完全相等,轮空电机等待时间不受整数倍限制,则可使得工件发生“连续”运动,此时,磨削工件外表将更加光滑,磨削精度更高。但在这种情况下,将使电机间的优化组合算法更加复杂。

七、参考文献

- [1] 邓自立,王欣,高媛.建模与评估[M],北京:科学出版社,2007.
- [2] 赵静,但琦.数学建模与数学实验[M],北京:高等教育出版社,2003.
- [3] 王正林,龚纯.精通 MATLAB 科学计算[M],北京:电子工业出版社,2009.
- [4] 杨继昌,李金伴.数控技术基础[M],北京:化学工业出版社,2008.
- [5] 汪木兰.数控原理与系统[M],北京:机械工业出版社,2004.
- [6] 李婷,潘存云,吴武辉.球齿轮渐开线齿廓曲面磨削加工方法研究[J].机械科学与技术,2008,1207~1215.
- [7] 王建君,朱宪国.高精度凸轮磨削加工的一种方法[J].常德师范学报.2004,35~39.
- [8] 何云红.分形、小波理论用于磨削加工表面的特性研究[D].南京农业大学报.2003.

八、附录

附录 1

源程序 1:

```
function drawpic(x,y,z)
y1=zeros(1,150);%对应于坐标 x,y,z 的可表示为脉冲形式的新坐标数组
x1=zeros(1,150);
z1=zeros(1,150);
for i=1:70      %对各个点坐标构造相应的脉冲序列，若某个坐标值为 1，则使其
                %连续的元素
                对应于新数列中的两个
    if y(i)==1
        y1(1+(i-1)*2)=1;
        y1(2+(i-1)*2)=0;
    else
        y1(1+(i-1)*2)=0;
        y1(2+(i-1)*2)=0;
    end
end
for i=1:75
    x1(1+(i-1)*2)=1;
    x1(2+(i-1)*2)=0;
end
for i=1:70      %构造 z 坐标的脉冲形式坐标，存入在 z1 数列中
    if z(i)==1
        z1(1+(i-1)*2)=1;
        z1(2+(i-1)*2)=0;
    else
        z1(1+(i-1)*2)=0;
        z1(2+(i-1)*2)=0;
    end
end
subplot(3,1,2),stairs(x,y1),title('y 轴方向的脉冲图形');
subplot(3,1,1),stairs(x,x1),title('x 轴方向的脉冲图形');
subplot(3,1,3),stairs(x,z1),title('转动角度的脉冲图形');
```

源程序 2:

```
function arc2(N)
% x1=linspace(0,360000,N);
% x=x1.^(1/2);
x=linspace(0,600,N);
y=30*exp(-x/400).*sin(1/100*(x+25*pi))+130;
%y1=Threepoint(y,x,1);
```

```

A(1,:)=x;
A(2,:)=y;
plot(x,y,'g');
hold on
A
for i=1:N-1
    B(i)=atand((y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i)));
end
x=180;
y=30*exp(-x/400).*sin(1/100*(x+25*pi))+130;
plot(x,y,'r*');
x
y
hold on
x=500;
y=30*exp(-x/400).*sin(1/100*(x+25*pi))+130;
plot(x,y,'r*');
x
y
B
x=91
y=30*exp(-x/400).*sin(1/100*(x+25*pi))+130
x=369
y=30*exp(-x/400).*sin(1/100*(x+25*pi))+130
%f=y+sqrt(x^2+y^2)*sind(8.52)-30*exp(-(y+sqrt(x^2+y^2)*cosd(8.52))/400).*sin(1/
100*((y+sqrt(x^2+y^2)*cosd(8.52))+25*pi))+130+151.21
%ezplot('y+sqrt(x^2+y^2)*sind(8.52)-30*exp(-(y+sqrt(x^2+y^2)*cosd(8.52))/400).*s
in(1/100*((y+sqrt(x^2+y^2)*cosd(8.52))+25*pi))-130+151.21',
[-50,50,100,151.2132]);

```

源程序 3:

```

function A2=div(A)
N=length(A);
%%%%%%%%%%%%%%
% 步骤 1.将工件移动至磨削基准位置，计算各点新坐标
%%%%%%%%%%%%%%
delta_X(1)=0-A(1,1);
delta_Y(1)=130.1755-A(2,1);
delta_theta(1)=0-A(3,1);
ri=1-cosd(A(3,1));
ri2=0-sind(A(3,1));
r=sqrt(250^2+130.1755^2);
delta_X(1)=delta_X(1)-r*ri;
delta_Y(1)=delta_Y(1)-r*ri2;

```

```

A0(1,1)=A(1,1)+delta_X(1)+r*ri;
A0(1,2:N)=A(1,2:N)+delta_X(1)+sqrt((A(1,2:N)-250).^2+A(2,2:N).^2).*(cosd(A(3,2:
N)-delta_theta(1))-cosd(A(3,2:N)));
A0(2,1)=A(2,1)+delta_Y(1)+r*ri2;
A0(2,2:N)=A(2,2:N)+delta_Y(1)+sqrt((A(1,2:N)-250).^2+A(2,2:N).^2).*(sind(A(3,2:
N)-delta_theta(1))-sind(A(3,2:N)));
A0(3,:)=A(3,:)+delta_theta(1);
%A0
%plot(A(1,:),A(2:,:), 'r');
%hold on
%plot(A0(1,:),A0(2:,:), 'g');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 步骤 1 完成
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%步骤 2.计算加工工件时各次的 x, y, theta 电机给进量, 存入矩阵 A2
%      并计算每次给进后工件旋转母线上各点的新坐标, 存入矩阵 X,Y
%      以便模拟工件按本方案加工时的动态过程
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X=zeros(N,N);
Y=zeros(N,N);
X(1,:)=A0(1,:);
Y(1,:)=A0(2,:);
A1=A0;
A2=zeros(3,99);
%A2=A0;
%sum=0;
%for i=2:N
%    sum=A1(:,i)-A1(:,1);
%    for j=i+1:N
%        A1(:,j)=A1(:,j)-sum;
%    end
%end
%a=A2(:,1);
%for i=2:N
%    sum=A2(:,i)-a;
%    for j=1:N
%        A2(:,j)=A2(:,j)-sum;
%        X(i,:)=A2(1,:);
%        Y(i,:)=A2(2,:);
%    end
%end

```

```

% A1(2,:)=130.1755-A1(2,:);      %
% a=A1(1,:);
% b=A1(2,:);
% c=1-cosd(A1(3,:));
% d=sind(A1(3,:));
% r=sqrt((a-250).^2+(b-0).^2);
% for i=2:N
%     A2(1,i)=A1(1,i)+c(i)*r(i);  %%%%%%%%%%%
%     A2(2,i)=A1(2,i)+d(i)*r(i);  %%%%%%%%%%%
%     A2(3,i)=A1(3,i);
% end
% A2(1,:)=-A2(1,:);
for i=1:N-1
    delta_theta=0-A1(3,i+1); % <0
    div1=0-A1(1,i+1);      % <0
    div2=130.1755-A1(2,i+1); % >0
    delta_X=div1+sqrt((A1(1,i+1)-250)^2+A1(2,i+1)^2)*(1-cosd(delta_theta));
    delta_Y=div2+sqrt((A1(1,i+1)-250)^2+A1(2,i+1)^2)*(0-sind(delta_theta));
    % 存放本次给进量
    A2(1,i)=delta_X;
    A2(2,i)=delta_Y;
    A2(3,i)=-delta_theta;
    % 更新移动后各点坐标值,以及各点新切线与 x 轴正方向夹角
    for j=1:N
        % if A1(1,i)<=250
        %
        A1(1,j)=A1(1,j)+delta_X+sqrt((A1(1,j)-250)^2+A1(2,j)^2)*(cosd(25.5-A1(3,j)+delta_theta)-cosd(25.5-A1(3,j)));
        %
        A1(2,j)=A1(2,j)+delta_Y+sqrt((A1(1,j)-250)^2+A1(2,j)^2)*(sind(25.5-A1(3,j)+delta_theta)-sind(25.5-A1(3,j)));
        % A1(3,j)=A1(3,j)+delta_theta;
        % else

        A1(1,j)=A1(1,j)+delta_X+sqrt((A1(1,j)-250)^2+A1(2,j)^2)*(cosd(A1(3,j)+delta_theta)-cosd(A1(3,j)));

        A1(2,j)=A1(2,j)+delta_Y+sqrt((A1(1,j)-250)^2+A1(2,j)^2)*(sind(A1(3,j)+delta_theta)-sind(A1(3,j)));
        A1(3,j)=A1(3,j)+delta_theta;
    % end
end
% 将新坐标值存入矩阵 X, Y
X(i+1,:)=A1(1,:);

```

```

        Y(i+1,:)=A1(2,:);
        if i==2
            A1
            A2
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 步骤 2 完成
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:2
    A2(i,:)=A2(i,:)*300;
end
A2(3,:)=A2(3,:)*10;
A2=roundn(A2,0);
%plot(A(1,:),A(2,:), 'g');
%hold on
%plot(X(1,:),Y(1,:), 'b');
%hold on
%p=plot(X(5,:),Y(5,:), 'r');
%imrotate(p,A2(3,6))
%hold on
%p=plot(X(20,:),Y(20,:), 'r');
%imrotate(p,A2(3,21))
%hold on
%p=plot(X(50,:),Y(50,:), 'r');
%imrotate(p,A2(3,51))
%hold on
%p=plot(X(80,:),Y(80,:), 'r');
%imrotate(p,A2(3,81))
%hold on
%end

```

源程序 4:

```

function A=arc(N)
x1=linspace(0,600^(25/18),N);
x=x1.^(18/25);
%x=linspace(0,600,N);
y=-7/18000*(600-x).^2+0.45*(600-x);
%y=30*(exp(-x/400)).*sin((1/100)*(x+25*pi))+130;
A(1,:)=x;
A(2,:)=y;
y1=-7/9000*x+7/15-0.45;
% y1 为导数
zz1=-atan(y1);

```

zz2=zz1/pi*180;
A(3,:)=zz2;

附录 2: 问题一中 1-7 次移动的脉冲时序部分摘录

(注: 此表中 NO.1-1 表示问题 1 中工件磨削过程中移动第一步, 此大列均包括三个子列, 其中第一列代表电机 x 发出脉冲的脉冲单元数累加, 第二列代表电机 y 是否在相应时刻发出控制脉冲, 0: 不发送, 1:发送, 第三列表电机 θ 的情况, 含义同第二列)

| NO. 1-1 | | | NO. 1-2 | | | NO. 1-3 | | | NO. 1-4 | | | NO. 1-5 | | | NO. 1-6 | | | NO. 1-7 | | |
|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | |
| 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | |
| 7 | 1 | 1 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | |
| 8 | 1 | 1 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | |
| 9 | 1 | 1 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | |
| 10 | 1 | 1 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | |
| 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | |
| 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | |
| 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | |
| 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | |
| 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | |
| 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | |
| 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | |
| 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | |
| 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | |
| 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | |
| 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | |
| 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | |
| 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | |
| 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | |
| 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | |
| 26 | 1 | 0 | 26 | 0 | 0 | 26 | 1 | 0 | 26 | 1 | 0 | 26 | 0 | 0 | 26 | 1 | 0 | 26 | 1 | |
| 27 | 1 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 1 | 0 | 27 | 1 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 1 | 0 | 27 | 1 | |
| 28 | 1 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 1 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 1 | 0 | 28 | 1 | |
| 29 | 1 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 1 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 1 | 0 | 29 | 1 | |
| 30 | 1 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 1 | 0 | 30 | 1 | |
| 31 | 1 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 1 | 0 | 31 | 1 | |
| 32 | 1 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 1 | 0 | 32 | 1 | |
| 33 | 1 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 1 | 0 | 33 | 1 | |
| 34 | 1 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 1 | 0 | 34 | 1 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|
| 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 |
| 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 |
| 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 |
| 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 |
| 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 |
| 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 |
| 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 |

附录 3：问题一方案误差分析结果

（下表为相邻两待磨削点之间的轮廓最大偏差量，从第一列开始依次对应于 $d_{\max 1}$, $d_{\max 2}$
由于本文取了 100 个磨削点，故只存在 $d_{\max 1}$ $d_{\max 99}$ ，第 10 列的最后一个元素 0 无任何意义，仅为了格式工整而填写）（单位：mm）

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.82 | 0.33 | 0.48 | 1.20 | 0.95 | 0.55 | 0.66 | 0.71 | 0.77 | 0.91 |
| 0.46 | 0.62 | 1.02 | 1.07 | 0.45 | 1.23 | 0.70 | 1.01 | 1.16 | 1.19 |
| 1.04 | 0.35 | 1.09 | 0.54 | 0.64 | 0.73 | 0.81 | 0.40 | 1.13 | 1.01 |
| 0.79 | 0.67 | 0.63 | 0.75 | 0.32 | 0.35 | 0.35 | 0.68 | 0.78 | 0.50 |
| 0.95 | 0.68 | 1.08 | 0.57 | 1.07 | 1.20 | 1.29 | 1.05 | 0.64 | 0.41 |
| 0.34 | 0.64 | 1.08 | 0.72 | 0.76 | 1.28 | 0.61 | 0.45 | 0.84 | 1.04 |
| 0.63 | 1.19 | 0.40 | 1.00 | 0.34 | 0.96 | 0.56 | 0.96 | 0.86 | 1.06 |
| 0.73 | 0.54 | 0.63 | 1.12 | 0.40 | 1.03 | 0.91 | 0.54 | 1.23 | 0.58 |
| 0.40 | 0.38 | 0.56 | 1.13 | 1.26 | 0.79 | 0.75 | 1.03 | 0.57 | 1.15 |
| 0.98 | 0.60 | 0.69 | 0.70 | 0.91 | 0.99 | 0.72 | 0.56 | 0.60 | 0.00 |

Dmax= 1.2914 mm

此表为轮廓局部相对偏差（已经乘过 100%）（对应关系与 d_{\max} 类似）

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.77 | 0.91 | 0.53 | 0.94 | 1.17 | 0.76 | 0.45 | 0.89 | 1.19 | 1.41 |
| 0.35 | 0.90 | 0.78 | 0.41 | 1.12 | 0.72 | 0.52 | 1.74 | 1.00 | 4.54 |
| 0.77 | 0.74 | 0.40 | 0.83 | 0.29 | 1.25 | 0.82 | 0.63 | 1.37 | 3.81 |
| 0.29 | 0.91 | 0.40 | 1.03 | 0.63 | 0.74 | 1.08 | 1.10 | 2.69 | 6.75 |
| 0.27 | 0.98 | 0.68 | 0.30 | 0.90 | 0.52 | 1.33 | 1.59 | 2.68 | 5.16 |
| 0.63 | 0.97 | 0.26 | 1.02 | 0.31 | 1.21 | 1.68 | 0.58 | 2.55 | 3.17 |
| 0.73 | 0.93 | 0.37 | 0.63 | 0.87 | 0.80 | 1.06 | 1.12 | 1.03 | 8.82 |
| 0.41 | 0.66 | 0.68 | 0.66 | 0.80 | 0.77 | 0.41 | 2.38 | 3.74 | 1.28 |
| 0.34 | 0.88 | 0.60 | 0.81 | 0.91 | 1.16 | 1.53 | 1.90 | 1.88 | 5.43 |
| 0.41 | 0.43 | 0.58 | 0.93 | 0.44 | 1.05 | 0.94 | 0.79 | 3.08 | 0.00 |

全局误差指标——面积比 $\delta=1.5287\%$

附录 4：问题二中 1-7 次移动的脉冲时序部分摘录

（本表各列含义同附录 2）

| N0.2-1 | | | N0.2-2 | | | N0.2-3 | | | N0.2-4 | | | N0.2-5 | | | N0.2-6 | | | N0.2-7 | | |
|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 | 11 | 1 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 | 12 | 1 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 | 14 | 1 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 | 15 | 1 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 | 16 | 1 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 17 | 0 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 | 17 | 1 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 18 | 0 | 0 | 18 | 0 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 | 18 | 1 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 19 | 0 | 0 | 19 | 0 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 | 19 | 1 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 20 | 0 | 0 | 20 | 0 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 | 20 | 1 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 21 | 0 | 0 | 21 | 0 | 0 | 21 | 0 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 | 21 | 1 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 22 | 0 | 0 | 22 | 0 | 0 | 22 | 0 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 | 22 | 1 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 23 | 0 | 0 | 23 | 0 | 0 | 23 | 0 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 | 23 | 1 | 0 |
| 24 | 0 | 0 | 24 | 0 | 0 | 24 | 0 | 0 | 24 | 0 | 0 | 24 | 0 | 0 | 24 | 1 | 0 | 24 | 1 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 25 | 0 | 0 | 25 | 0 | 0 | 25 | 0 | 0 | 25 | 0 | 0 | 25 | 1 | 0 | 25 | 1 | 0 |
| 26 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0 | 26 | 1 | 0 | 26 | 1 | 0 |
| 27 | 0 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 0 | 0 | 27 | 1 | 0 |
| 28 | 0 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 0 | 0 | 28 | 1 | 0 |
| 29 | 0 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 0 | 0 | 29 | 1 | 0 |
| 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 |
| 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 |
| 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 |
| 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 |
| 35 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 |
| 36 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 |
| 37 | 1 | 0 | 37 | 1 | 0 | 37 | 1 | 0 | 37 | 1 | 0 | 37 | 1 | 0 | 37 | 1 | 0 | 37 | 1 | 0 |
| 38 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 |
| 39 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 |
| 40 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|
| 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 |
|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|

附录 5：问题二方案误差分析结果

（下面两表的含义同附录 3）

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.88 | 1.65 | 1.60 | 0.94 | 1.88 | 1.71 | 1.85 | 1.63 | 1.33 | 1.46 |
| 1.82 | 1.53 | 1.13 | 1.29 | 1.72 | 0.95 | 0.97 | 1.85 | 1.04 | 1.24 |
| 1.36 | 1.10 | 1.43 | 1.13 | 0.94 | 1.52 | 1.34 | 1.23 | 1.48 | 1.80 |
| 1.46 | 1.36 | 1.70 | 1.01 | 1.19 | 1.30 | 1.11 | 1.23 | 1.10 | 1.13 |
| 1.39 | 1.17 | 1.60 | 1.33 | 1.62 | 1.50 | 1.71 | 1.46 | 1.32 | 1.30 |
| 1.89 | 0.90 | 0.90 | 1.18 | 1.00 | 1.13 | 1.40 | 1.63 | 1.10 | 1.23 |
| 0.93 | 1.02 | 1.19 | 1.75 | 1.84 | 1.73 | 1.67 | 1.20 | 1.59 | 1.30 |
| 1.16 | 1.46 | 1.07 | 0.93 | 1.36 | 0.97 | 1.12 | 1.72 | 1.73 | 1.18 |
| 1.23 | 1.79 | 1.10 | 1.88 | 1.89 | 1.13 | 1.70 | 1.71 | 1.18 | 1.54 |
| 1.02 | 1.80 | 0.99 | 1.86 | 1.31 | 1.39 | 0.94 | 1.39 | 1.27 | 0.00 |

Dmax =1.8940 mm

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.24 | 1.06 | 1.07 | 0.67 | 1.46 | 1.41 | 1.56 | 1.36 | 1.07 | 1.12 |
| 1.20 | 0.99 | 0.76 | 0.93 | 1.34 | 0.79 | 0.82 | 1.54 | 0.83 | 0.95 |
| 0.89 | 0.71 | 0.96 | 0.82 | 0.74 | 1.26 | 1.13 | 1.02 | 1.17 | 1.38 |
| 0.95 | 0.88 | 1.16 | 0.74 | 0.95 | 1.09 | 0.94 | 1.01 | 0.87 | 0.87 |
| 0.90 | 0.76 | 1.09 | 0.99 | 1.29 | 1.26 | 1.44 | 1.20 | 1.04 | 0.99 |
| 1.22 | 0.59 | 0.62 | 0.88 | 0.81 | 0.95 | 1.18 | 1.33 | 0.87 | 0.93 |
| 0.60 | 0.66 | 0.82 | 1.32 | 1.48 | 1.45 | 1.40 | 0.98 | 1.24 | 0.98 |
| 0.75 | 0.96 | 0.75 | 0.71 | 1.10 | 0.82 | 0.94 | 1.40 | 1.35 | 0.89 |
| 0.79 | 1.18 | 0.78 | 1.44 | 1.54 | 0.96 | 1.42 | 1.38 | 0.92 | 1.16 |
| 0.66 | 1.19 | 0.71 | 1.43 | 1.08 | 1.17 | 0.78 | 1.12 | 0.98 | 0.00 |

全局误差指标——面积比 δ =2.2340%

附录 6：问题三中 1-7 次移动的脉冲时序部分摘录

（本表各列含义同附录 2）

| N0.3-1 | | | N0.3-2 | | | N0.3-3 | | | N0.3-4 | | | N0.3-5 | | | N0.3-6 | | | N0.3-7 | | |
|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|--------|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|----|---|---|
| 51 | 0 | 0 | 51 | 0 | 0 | 51 | 1 | 0 | 51 | 1 | 0 | 51 | 1 | 0 | 51 | 1 | 0 |
| 52 | 0 | 0 | 52 | 0 | 0 | 52 | 0 | 0 | 52 | 0 | 0 | 52 | 1 | 0 | 52 | 1 | 0 |
| 53 | 1 | 0 | 53 | 1 | 0 | 53 | 1 | 0 | 53 | 1 | 0 | 53 | 1 | 0 | 53 | 1 | 0 |
| 54 | 0 | 0 | 54 | 0 | 0 | 54 | 0 | 0 | 54 | 0 | 0 | 54 | 1 | 0 | 54 | 1 | 0 |
| 55 | 1 | 0 | 55 | 1 | 0 | 55 | 1 | 0 | 55 | 1 | 0 | 55 | 1 | 0 | 55 | 1 | 0 |
| 56 | 0 | 0 | 56 | 0 | 0 | 56 | 0 | 0 | 56 | 0 | 0 | 56 | 1 | 0 | 56 | 1 | 0 |
| 57 | 0 | 0 | 57 | 0 | 0 | 57 | 0 | 0 | 57 | 0 | 0 | 57 | 1 | 0 | 57 | 1 | 0 |
| 58 | 1 | 0 | 58 | 1 | 0 | 58 | 1 | 0 | 58 | 1 | 0 | 58 | 1 | 0 | 58 | 1 | 0 |
| 59 | 1 | 0 | 59 | 1 | 0 | 59 | 1 | 0 | 59 | 1 | 0 | 59 | 1 | 0 | 59 | 1 | 0 |
| 60 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 60 | 1 | 0 | 60 | 1 | 0 |
| 61 | 0 | 0 | 61 | 0 | 0 | 61 | 0 | 0 | 61 | 0 | 0 | 61 | 1 | 0 | 61 | 1 | 0 |
| 62 | 0 | 0 | 62 | 0 | 0 | 62 | 0 | 0 | 62 | 0 | 0 | 62 | 1 | 0 | 62 | 1 | 0 |
| 63 | 0 | 0 | 63 | 0 | 0 | 63 | 0 | 0 | 63 | 0 | 0 | 63 | 1 | 0 | 63 | 1 | 0 |
| 64 | 1 | 0 | 64 | 1 | 0 | 64 | 1 | 0 | 64 | 1 | 0 | 64 | 1 | 0 | 64 | 1 | 0 |
| 65 | 0 | 0 | 65 | 0 | 0 | 65 | 0 | 0 | 65 | 0 | 0 | 65 | 1 | 0 | 65 | 1 | 0 |
| 66 | 1 | 0 | 66 | 1 | 0 | 66 | 1 | 0 | 66 | 1 | 0 | 66 | 1 | 0 | 66 | 1 | 0 |
| 67 | 0 | 0 | 67 | 0 | 0 | 67 | 0 | 0 | 67 | 0 | 0 | 67 | 1 | 0 | 67 | 1 | 0 |
| 68 | 0 | 0 | 68 | 0 | 0 | 68 | 0 | 0 | 68 | 0 | 0 | 68 | 1 | 0 | 68 | 1 | 0 |
| 69 | 1 | 0 | 69 | 1 | 0 | 69 | 1 | 0 | 69 | 1 | 0 | 69 | 1 | 0 | 69 | 1 | 0 |
| 70 | 1 | 0 | 70 | 1 | 0 | 70 | 1 | 0 | 70 | 1 | 0 | 70 | 1 | 0 | 70 | 1 | 0 |
| 71 | 0 | 0 | 71 | 0 | 0 | 71 | 0 | 0 | 71 | 0 | 0 | 71 | 1 | 0 | 71 | 1 | 0 |
| 72 | 0 | 0 | 72 | 0 | 0 | 72 | 0 | 0 | 72 | 0 | 0 | 72 | 1 | 0 | 72 | 1 | 0 |
| 73 | 0 | 0 | 73 | 0 | 0 | 73 | 0 | 0 | 73 | 0 | 0 | 73 | 1 | 0 | 73 | 1 | 0 |
| 74 | 0 | 0 | 74 | 0 | 0 | 74 | 0 | 0 | 74 | 0 | 0 | 74 | 1 | 0 | 74 | 1 | 0 |
| 75 | 1 | 0 | 75 | 1 | 0 | 75 | 1 | 0 | 75 | 1 | 0 | 75 | 1 | 0 | 75 | 1 | 0 |
| 76 | 0 | 0 | 76 | 0 | 0 | 76 | 0 | 0 | 76 | 0 | 0 | 76 | 1 | 0 | 76 | 1 | 0 |
| 77 | 1 | 0 | 77 | 1 | 0 | 77 | 1 | 0 | 77 | 1 | 0 | 77 | 1 | 0 | 77 | 1 | 0 |
| 78 | 1 | 0 | 78 | 1 | 0 | 78 | 1 | 0 | 78 | 1 | 0 | 78 | 1 | 0 | 78 | 1 | 0 |
| 79 | 0 | 0 | 79 | 0 | 0 | 79 | 0 | 0 | 79 | 0 | 0 | 79 | 1 | 0 | 79 | 1 | 0 |
| 80 | 0 | 0 | 80 | 0 | 0 | 80 | 0 | 0 | 80 | 0 | 0 | 80 | 1 | 0 | 80 | 1 | 0 |
| 81 | 0 | 0 | 81 | 0 | 0 | 81 | 0 | 0 | 81 | 0 | 0 | 81 | 1 | 0 | 81 | 1 | 0 |
| 82 | 1 | 0 | 82 | 1 | 0 | 82 | 1 | 0 | 82 | 1 | 0 | 82 | 1 | 0 | 82 | 1 | 0 |
| 83 | 1 | 0 | 83 | 1 | 0 | 83 | 1 | 0 | 83 | 1 | 0 | 83 | 1 | 0 | 83 | 1 | 0 |
| 84 | 0 | 0 | 84 | 0 | 0 | 84 | 0 | 0 | 84 | 0 | 0 | 84 | 1 | 0 | 84 | 1 | 0 |
| 85 | 0 | 0 | 85 | 0 | 0 | 85 | 0 | 0 | 85 | 0 | 0 | 85 | 1 | 0 | 85 | 1 | 0 |
| 86 | 1 | 0 | 86 | 1 | 0 | 86 | 1 | 0 | 86 | 1 | 0 | 86 | 1 | 0 | 86 | 1 | 0 |
| 87 | 0 | 0 | 87 | 0 | 0 | 87 | 0 | 0 | 87 | 0 | 0 | 87 | 1 | 0 | 87 | 1 | 0 |
| 88 | 0 | 0 | 88 | 0 | 0 | 88 | 0 | 0 | 88 | 0 | 0 | 88 | 1 | 0 | 88 | 1 | 0 |
| 89 | 1 | 0 | 89 | 1 | 0 | 89 | 1 | 0 | 89 | 1 | 0 | 89 | 1 | 0 | 89 | 1 | 0 |
| 90 | 0 | 0 | 90 | 0 | 0 | 90 | 0 | 0 | 90 | 0 | 0 | 90 | 1 | 0 | 90 | 1 | 0 |
| 91 | 1 | 0 | 91 | 1 | 0 | 91 | 1 | 0 | 91 | 1 | 0 | 91 | 1 | 0 | 91 | 1 | 0 |
| 92 | 0 | 0 | 92 | 0 | 0 | 92 | 0 | 0 | 92 | 0 | 0 | 92 | 1 | 0 | 92 | 1 | 0 |
| 93 | 1 | 0 | 93 | 1 | 0 | 93 | 1 | 0 | 93 | 1 | 0 | 93 | 1 | 0 | 93 | 1 | 0 |
| 94 | 1 | 0 | 94 | 1 | 0 | 94 | 1 | 0 | 94 | 1 | 0 | 94 | 1 | 0 | 94 | 1 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|-----|---|---|
| 139 | 0 | 0 | 139 | 0 | 0 | 139 | 0 | 0 | 139 | 0 | 0 | 139 | 0 | 0 | 139 | 0 | 0 |
| 140 | 1 | 0 | 140 | 1 | 0 | 140 | 1 | 0 | 140 | 1 | 0 | 140 | 1 | 0 | 140 | 1 | 0 |
| 141 | 1 | 0 | 141 | 1 | 0 | 141 | 1 | 0 | 141 | 1 | 0 | 141 | 1 | 0 | 141 | 1 | 0 |
| 142 | 0 | 0 | 142 | 0 | 0 | 142 | 0 | 0 | 142 | 0 | 0 | 142 | 0 | 0 | 142 | 0 | 0 |
| 143 | 0 | 0 | 143 | 0 | 0 | 143 | 0 | 0 | 143 | 0 | 0 | 143 | 0 | 0 | 143 | 0 | 0 |
| 144 | 1 | 0 | 144 | 1 | 0 | 144 | 1 | 0 | 144 | 1 | 0 | 144 | 1 | 0 | 144 | 1 | 0 |
| 145 | 0 | 0 | 145 | 0 | 0 | 145 | 0 | 0 | 145 | 0 | 0 | 145 | 0 | 0 | 145 | 0 | 0 |
| 146 | 1 | 0 | 146 | 1 | 0 | 146 | 1 | 0 | 146 | 1 | 0 | 146 | 1 | 0 | 146 | 1 | 0 |
| 147 | 1 | 0 | 147 | 1 | 0 | 147 | 1 | 0 | 147 | 1 | 0 | 147 | 1 | 0 | 147 | 1 | 0 |
| 148 | 1 | 0 | 148 | 1 | 0 | 148 | 1 | 0 | 148 | 1 | 0 | 148 | 1 | 0 | 148 | 1 | 0 |
| 149 | 0 | 0 | 149 | 0 | 0 | 149 | 0 | 0 | 149 | 0 | 0 | 149 | 0 | 0 | 149 | 0 | 0 |
| 150 | 1 | 0 | 150 | 1 | 0 | 150 | 1 | 0 | 150 | 1 | 0 | 150 | 1 | 0 | 150 | 1 | 0 |
| 151 | 1 | 0 | 151 | 1 | 0 | 151 | 1 | 0 | 151 | 1 | 0 | 151 | 1 | 0 | 151 | 1 | 0 |
| 152 | 0 | 0 | 152 | 0 | 0 | 152 | 0 | 0 | 152 | 0 | 0 | 152 | 0 | 0 | 152 | 0 | 0 |
| 153 | 1 | 0 | 153 | 1 | 0 | 153 | 1 | 0 | 153 | 1 | 0 | 153 | 1 | 0 | 153 | 1 | 0 |
| 154 | 0 | 0 | 154 | 0 | 0 | 154 | 0 | 0 | 154 | 0 | 0 | 154 | 0 | 0 | 154 | 0 | 0 |
| 155 | 0 | 0 | 155 | 0 | 0 | 155 | 0 | 0 | 155 | 0 | 0 | 155 | 0 | 0 | 155 | 0 | 0 |
| 156 | 1 | 0 | 156 | 1 | 0 | 156 | 1 | 0 | 156 | 1 | 0 | 156 | 1 | 0 | 156 | 1 | 0 |
| 157 | 1 | 0 | 157 | 1 | 0 | 157 | 1 | 0 | 157 | 1 | 0 | 157 | 1 | 0 | 157 | 1 | 0 |
| 158 | 1 | 0 | 158 | 1 | 0 | 158 | 1 | 0 | 158 | 1 | 0 | 158 | 1 | 0 | 158 | 1 | 0 |
| 159 | 0 | 0 | 159 | 0 | 0 | 159 | 0 | 0 | 159 | 0 | 0 | 159 | 0 | 0 | 159 | 0 | 0 |
| 160 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 | 160 | 0 | 0 |
| 161 | 0 | 0 | 161 | 0 | 0 | 161 | 0 | 0 | 161 | 0 | 0 | 161 | 0 | 0 | 161 | 0 | 0 |
| 162 | 1 | 0 | 162 | 1 | 0 | 162 | 1 | 0 | 162 | 1 | 0 | 162 | 1 | 0 | 162 | 1 | 0 |
| 163 | 0 | 0 | 163 | 0 | 0 | 163 | 0 | 0 | 163 | 0 | 0 | 163 | 0 | 0 | 163 | 0 | 0 |
| 164 | 1 | 0 | 164 | 1 | 0 | 164 | 1 | 0 | 164 | 1 | 0 | 164 | 1 | 0 | 164 | 1 | 0 |
| 165 | 1 | 0 | 165 | 1 | 0 | 165 | 1 | 0 | 165 | 1 | 0 | 165 | 1 | 0 | 165 | 1 | 0 |
| 166 | 1 | 0 | 166 | 1 | 0 | 166 | 1 | 0 | 166 | 1 | 0 | 166 | 1 | 0 | 166 | 1 | 0 |
| 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 | 167 | 1 | 0 |
| 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 | 168 | 0 | 0 |
| 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 | 169 | 0 | 0 |
| 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 | 170 | 1 | 0 |
| 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 | 171 | 0 | 0 |
| 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 | 172 | 1 | 0 |
| 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 | 173 | 0 | 0 |

附录 7：问题三方案误差分析结果

（下面两表的含义同附录 3）

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 69 | 2. 19 | 1. 79 | 1. 72 | 1. 46 | 2. 01 | 2. 10 | 1. 42 | 2. 11 | 2. 37 |
| 2. 37 | 2. 22 | 1. 40 | 2. 19 | 1. 74 | 2. 04 | 2. 22 | 1. 96 | 1. 52 | 1. 59 |
| 1. 81 | 1. 55 | 1. 83 | 1. 69 | 1. 64 | 2. 17 | 1. 59 | 2. 01 | 1. 91 | 1. 55 |
| 1. 61 | 2. 04 | 1. 73 | 2. 20 | 1. 93 | 1. 95 | 1. 60 | 1. 85 | 1. 50 | 1. 62 |
| 1. 42 | 1. 98 | 2. 19 | 1. 61 | 2. 08 | 1. 81 | 1. 61 | 1. 43 | 2. 09 | 1. 95 |
| 2. 16 | 1. 61 | 1. 84 | 1. 79 | 1. 62 | 1. 61 | 2. 17 | 2. 39 | 1. 68 | 2. 29 |
| 1. 84 | 2. 11 | 2. 11 | 2. 33 | 2. 06 | 2. 03 | 2. 31 | 1. 44 | 1. 86 | 1. 72 |
| 1. 49 | 2. 40 | 2. 35 | 2. 38 | 1. 52 | 2. 23 | 1. 63 | 1. 45 | 2. 04 | 1. 85 |
| 1. 40 | 2. 22 | 2. 11 | 2. 15 | 2. 25 | 2. 16 | 1. 75 | 1. 51 | 1. 44 | 1. 85 |
| 1. 61 | 2. 17 | 1. 54 | 2. 02 | 1. 57 | 2. 16 | 2. 10 | 1. 71 | 2. 29 | 0. 00 |

Dmax =2.3975 mm

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 30 | 1. 69 | 1. 42 | 1. 43 | 1. 31 | 2. 03 | 2. 48 | 2. 11 | 4. 52 | 1. 56 |
| 1. 82 | 1. 72 | 1. 12 | 1. 83 | 1. 58 | 2. 08 | 2. 67 | 3. 01 | 3. 43 | 3. 82 |
| 1. 39 | 1. 20 | 1. 46 | 1. 42 | 1. 50 | 2. 25 | 1. 95 | 3. 17 | 4. 53 | 1. 13 |
| 1. 24 | 1. 58 | 1. 38 | 1. 87 | 1. 79 | 2. 04 | 2. 00 | 3. 02 | 3. 74 | 2. 94 |
| 1. 09 | 1. 54 | 1. 76 | 1. 38 | 1. 95 | 1. 93 | 2. 07 | 2. 41 | 5. 56 | 1. 44 |
| 1. 66 | 1. 25 | 1. 48 | 1. 54 | 1. 53 | 1. 75 | 2. 84 | 4. 18 | 4. 74 | 1. 18 |
| 1. 42 | 1. 65 | 1. 72 | 2. 03 | 1. 98 | 2. 23 | 3. 11 | 2. 61 | 5. 64 | 2. 40 |
| 1. 15 | 1. 88 | 1. 92 | 2. 09 | 1. 47 | 2. 50 | 2. 25 | 2. 73 | 6. 67 | 3. 94 |
| 1. 08 | 1. 75 | 1. 73 | 1. 90 | 2. 21 | 2. 46 | 2. 47 | 2. 97 | 5. 09 | 1. 42 |
| 1. 24 | 1. 71 | 1. 27 | 1. 80 | 1. 56 | 2. 51 | 3. 04 | 3. 50 | 8. 89 | 0. 00 |

全局误差指标——面积比 δ =2.8279%

附录 8：问题四中 1-7 次移动的脉冲时序部分摘录

（本表各列含义同附录 2）

| NO. 4-1 | | | NO. 4-2 | | | NO. 4-3 | | | NO. 4-4 | | | NO. 4-5 | | | NO. 4-6 | | | NO. 4-7 | | |
|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|---|---------|---|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | |
| 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 6 | 1 | |
| 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | |
| 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | 0 | 8 | 1 | |
| 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 9 | 1 | |
| 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | 0 | 10 | 1 | |

附录 9：问题四方案误差分析结果

(下面两表的含义同附录 3)

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2.49 | 2.60 | 2.66 | 2.62 | 2.12 | 1.92 | 2.49 | 2.45 | 2.58 | 2.27 |
| 2.61 | 2.26 | 2.14 | 2.83 | 2.71 | 1.92 | 2.83 | 2.84 | 2.82 | 2.01 |
| 2.61 | 1.91 | 2.66 | 2.45 | 2.17 | 2.38 | 2.37 | 2.01 | 1.97 | 2.51 |
| 2.16 | 2.07 | 2.44 | 2.02 | 2.71 | 2.43 | 2.68 | 2.07 | 2.49 | 2.43 |
| 2.01 | 2.77 | 2.85 | 2.42 | 2.31 | 2.86 | 2.52 | 2.27 | 2.13 | 2.41 |
| 2.01 | 2.46 | 2.89 | 2.46 | 2.52 | 2.67 | 1.94 | 2.58 | 2.87 | 2.04 |
| 2.02 | 1.93 | 1.95 | 2.09 | 2.45 | 2.06 | 1.98 | 2.88 | 2.30 | 2.22 |
| 2.25 | 2.07 | 2.88 | 2.21 | 2.41 | 2.52 | 2.37 | 1.95 | 2.42 | 2.41 |
| 2.63 | 2.07 | 2.22 | 2.86 | 1.92 | 2.65 | 2.33 | 1.99 | 2.41 | 2.65 |
| 2.28 | 2.00 | 2.35 | 2.84 | 2.33 | 2.05 | 2.89 | 1.98 | 2.49 | 0.00 |

Dmax =2.89 mm

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.65 | 1.68 | 1.77 | 1.87 | 1.64 | 1.58 | 2.10 | 2.04 | 2.07 | 1.75 |
| 1.72 | 1.46 | 1.44 | 2.04 | 2.11 | 1.59 | 2.39 | 2.36 | 2.25 | 1.55 |
| 1.71 | 1.24 | 1.79 | 1.78 | 1.71 | 1.98 | 2.00 | 1.66 | 1.57 | 1.92 |
| 1.40 | 1.34 | 1.65 | 1.48 | 2.15 | 2.02 | 2.26 | 1.71 | 1.98 | 1.85 |
| 1.31 | 1.79 | 1.95 | 1.79 | 1.85 | 2.39 | 2.13 | 1.87 | 1.68 | 1.83 |
| 1.30 | 1.60 | 1.99 | 1.84 | 2.03 | 2.24 | 1.64 | 2.12 | 2.26 | 1.55 |
| 1.30 | 1.26 | 1.35 | 1.57 | 1.98 | 1.73 | 1.66 | 2.35 | 1.80 | 1.68 |
| 1.45 | 1.36 | 2.01 | 1.68 | 1.96 | 2.12 | 1.99 | 1.59 | 1.88 | 1.82 |
| 1.69 | 1.36 | 1.56 | 2.19 | 1.57 | 2.23 | 1.95 | 1.61 | 1.87 | 1.99 |
| 1.47 | 1.32 | 1.67 | 2.19 | 1.91 | 1.73 | 2.41 | 1.60 | 1.93 | 0.00 |

全局误差指标——面积比 $\delta = 3.4094\%$