

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校

同济大学

参赛队号

10247056

队员姓名

1.刘艳君

2.任毅

3.刘栋

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 无线通信中的快速时变信道建模

摘 要：

无线通信技术改变了人们的生活方式，而人们日益苛刻的用户体验要求更为通信系统的设计提出了挑战。由于移动通信网络的连接环境十分复杂，高速移动的环境尤为如此。由于移动台高速运动产生的多普勒频移会使得信道有快速时变的特性。因此本文针对无线通信中的快速时变信道进行了一系列的研究。

首先针对信道估计问题我们提出了基于基扩展(BEM)的建模算法，针对特定的通信场景和环境，我们首先根据实际信道测试数据的预处理结果(相关分析及傅里叶分析)以及实际测试环境的物理参数(速度，载波频率，采样频率)对 BEM 的部分参数进行了取值范围的一个预估。进而我们分析讨论了 BEM 建模算法中基底的选取，所用基底个数的选取，预测长度 K 的大致范围，以及采样点的分布等问题。并在接下来的数值仿真中对预估的结论进行了逐一的验证。值得一提的是我们将估计算法的效率，精确度，复杂度等指标联合考虑，给出了它们相互之间互相平衡的关系，以求对接下来的通信系统的设计与实现进行指导。模型可以做到在 NMSE 为 $1e-4$ 量级的情况下用小于 1% 的样值点去预测整体值。

其次我们给出了移动台速度与模型精确度之间的相互影响关系，并用题目中所提供的 4 组数据初步验证了这个关系。为了更加完备的分析所提出的 BEM 与移动台速度之间的相互影响关系，我们在经典的 Clarke 模型基础上仿真实现了一个改进的模型。利用该模型可以产生不同多普勒频移下的快速时变信道样值。我们利用这个模型产生的数据进一步完成了前述 BEM 模型对于移动速度的鲁棒性分析，并在移动速度，估计长度和 NMSE 之间建立了相应的量值关系。

最终，为了进一步验证 BEM 模型的准确性，我们用仿真搭建了一个基带通信系统，两端采用 16-QAM 和 QPSK 数字调制方式。在这个完整的基带通信系

统中我们发现简单的引入 **BEM** 模型计算量并不是小数目。因此，我们特别地在文章中提出了一个基于矩阵预处理的快速收敛算法。通过对信道矩阵进行预处理，使得信道样值在复平面上的位置更加接近单位圆，从而从理论上加速其收敛过程。应用该算法可以在保证 **BER** 的情况下大大减少解码所应用的迭代次数。最终，我们对这个通信系统的 **BER-SNR** 曲线进行了细致的分析，并且将之与移动台的速度建立了数学上的联系。

关键字：信道估计，**BEM**，加速收敛算法，鲁棒性分析，多普勒频移

目录

一、 问题重述.....	- 5 -
二、 系统模型及符号说明.....	- 7 -
2.1 系统模型	- 7 -
2.2 符号定义	- 8 -
三、基于基扩展 (BEM) 的快速时变信道估计算法	- 9 -
3.1 问题意义	- 9 -
3.2 问题分析	- 9 -
3.3 问题解决——基于 BEM 的快速时变信道估计算法.....	- 12 -
3.4 问题小结	- 22 -
四、BEM 估计算法对多普勒频移的鲁棒性分析.....	- 23 -
4.1 问题意义——速度对于多普勒频移的影响规律	- 23 -
4.2 问题分析——影响规律的猜想及预测	- 23 -
4.3 问题解决——速度影响规律的验证	- 24 -
4.4 问题扩展——对多径时变信道的建模	- 24 -
4.5 问题扩展——利用模拟信道数据验证 BEM 算法特性.....	- 28 -
4.6 问题小结	- 29 -
五、基于 BEM 的基带通信系统.....	- 30 -
5.1 多径衰落信道下的解调信号的基本原理	- 30 -
5.2 基于 BEM 方法的多径衰落信道估计及 BER 和 SNR 关系分析	- 31 -
5.3 算法的优化	- 35 -
参考文献.....	- 39 -

一、 问题重述

移动通信中，终端的高速移动和散射会引起多普勒效应，导致信道的快速时变特性，即信道具有时间选择性。而当多径时延扩展长度大于码元周期时，多径衰落使得信道具有频率选择特性。高速宽带数据传输和终端的高速移动性使得信道变成双选择性（时间-频率选择性）信道，而信道的双选择性会严重影响系统性能，极大降低信息传输的速度和质量。因此，如何准确高效地完成信道估计，获得较好的性能增益成为了研究热点。

常用的信道估计方法包括基于训练序列（导频）的信道估计和盲信道估计。盲信道估计依赖于接收信号的统计特性，利用多普勒频谱（U 型谱和钟型谱）的统计特性描述信道抽头。该方法需要更多的接收数据，且计算复杂度非常高，只适用于慢时变环境中。使用训练序列（导频）进行信道估计时在发送端插入训练序列，在接收端根据已知导频估计信道。由于信道是时变的，需要周期性地插入训练信号和进行信道参数估计。在慢时变信道情况下，使用导频是一种比较准确经济的方法，但在高速移动的快时变信道情况下，需要频繁地增加训练序列（开销），在接收端增加相同的估计次数。但是由于导频不承载有用信息，过密的导频插入会占用过多的传输资源，降低有用信息的传输速率。因此，在快时变信道中，希望发现新的数学模型估计快时变的信道参数，降低导频的插入频率，减小计算复杂度。

减少信道参数的估计方法中，基扩展模型（BEM, Basis Expansion Model）是最近研究得比较多的一种方法，主要利用有限个基函数的线性组合来描述一定时间内的时变信道，模拟有多普勒效应的快时变信道，减少信道参数直接估计的次数。基于上述背景，本文主要考虑如下的问题：

问题一：

在第三章中，我们根据数据文件 1 给出的信道测试参数（运动速度 180Km/h，载波频率 3GHz，信道采样频率 200KHz）寻找并建立基本的 BEM 估计算法，对其参数，性能进行分析与仿真验证。最终可以实现用极少量的数据预测整体数据（以预测效率来评价）。算法复杂度的分析证明了此算法的有效性。

问题二：

在第四章中我们主要讨论 BEM 模型对于不同移动台速度的鲁棒性。由于多普勒效应引起信道的变化，在载波频率一定的情况下，变化的程度与相对速度有关[3][4]。数据文件 2、3、4 分别是载波频率为 3GHz 时，信道在不同速度 90Km/h、270Km/h、450Km/h 时的测试数据（信道采样频率是 200KHz）。我们猜想，分析，并最终用数值仿真的方法验证了 BEM 模型性能与移动台速度之间的关系。在此过程中，我们利用数学的方法模拟的产生多条路径相互独立，幅度服从瑞利(Rayleigh)分布，相位服从均匀分布[5]的信道数据，在验证了此模拟数据有效的基础上，我们完善了 BEM 模型有效性以及鲁棒性的分析。

问题三：

问题三的求解中我们结合数字调制以及解调过程[3][4]，（例如 16-QAM 调制，QPSK 调制），进而建立了一个带有信道仿真的实际通信系统。我们一方面用此通信系统验证了前述 BEM 模型的有效性。另一方面以此模型研究了 SNR（信噪比）与 BER（误比特率）的关系。为了更好的将 BEM 模型与实际通信系统结

合，更为了减少实际解调信号时的算法复杂度，我们提出了一个不需要建立信道矩阵的加速迭代解调算法，并在第五章中对算法进行了详尽的分析以及仿真验证。

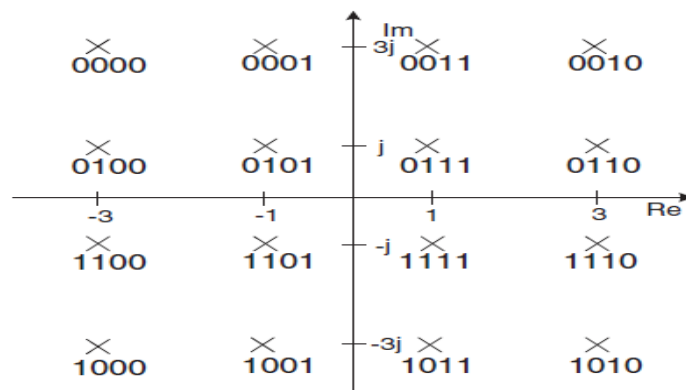


图1.1 16QAM星座图

图 1.1 为 16QAM 星座图，可以把 4 位二进制数按顺序转换为相应的复数（如 0000 转换为 $-3+3j$ ），并与载波信号相乘后送入信道。接收端接收到复数信号后进行载波解调后解码（即按逆变换将 $-3+3j$ 转换为 0000），恢复二进制序列。

二、系统模型及符号说明

2.1 系统模型

一般的基带通信系统都会有如图 2.1 这样的结构。发送端调制好的信号经过信道的卷积被接收机所接收（基带通信系统假设载波调制过程是理想的）。白噪声和衰落信道一同对发送信号 $s(t)$ 进行扭曲，如下式：

$$y(t) = h(t) * s(t) + \omega(t) \quad (2.1)$$

信道对于信号的影响主要有两个方面，一个是由于幅度的衰落而使得相应的无线信号的幅值随时间体现出变化的特性，另一个是由于信道的频率特性而对信号进行的扭曲。随机的高斯白噪声主要影响接收信号的判决过程。

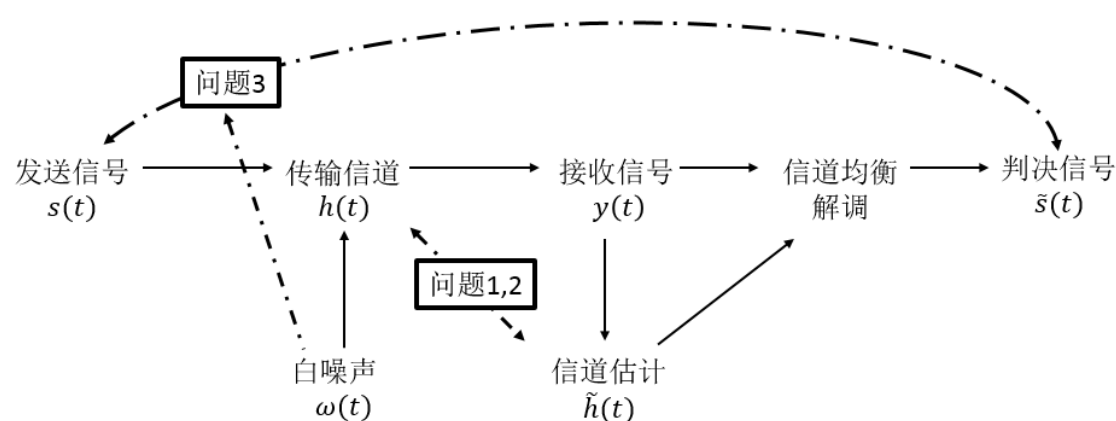


图 2.1 基带通信系统以及问题位置

从图 2.1 可以看出，本文研究的问题 1,2 处于传输信道与信道估计的关节，而问题 3 则是要求我们实现完成一个基本的基带通系统，并以此检验我们的信道估计算法是否有效。

由于要对快速时变信道进行建模和估计，我们首先应了解快速时变信道是如何产生的：

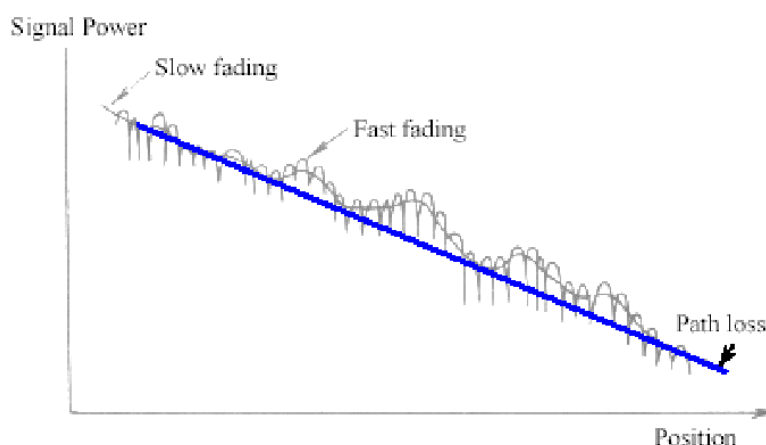


图 2.2 衰落信道的特性

从图 2.2 可见，信道的衰落大致由三部分组成。首先是随位置变化的路损衰落，表现为整体信号的能量关于距离的 2 次方或 4 次方衰减。其次是快衰落和慢衰落，本题中研究的快速时变信道即是快衰落和慢衰落结合起来的情景。由于多

条路径的散射，信号的具体反射面会随时间剧烈变化，这是快衰落的成因。而慢衰落主要是由多普勒频移造成。多普勒频移效应会产生频域的扩展，也即会产生新的频率分量。例如以载波 f_c 调制的余弦波信号 $\cos(2\pi f_c t)$ 在经历了多普勒频移 f_d 后变为了 $\cos(2\pi(f_c + f_d)t)$ ，而在接收端，通带解调时与此信号相乘的解调因子仍为 $\cos(2\pi f_c t)$ ，于是解调的信号便为：

$$\cos(2\pi f_c t) \times \cos(2\pi(f_c + f_d)t) = \frac{1}{2}(\cos 2\pi(2f_c + f_d)t + \cos(2\pi f_d t)) \quad (2.2)$$

由式 2.2 可知，信号产生了新的低频分量也即 f_d 处的低频分量，从时域上表现为时间选择性衰落。我们的任务便是对这样的一种信道进行估计。

2.2 符号定义

通信模型			
$x[n]$	发送信号	v	移动台速度
$y[n]$	接收信号	f_c	载波频率
$h_l[n]$	实际信道时域响应	f_s	采样频率
$\hat{h}_l[n]$	估计信道时域响应	f_d	多普勒频移
L	多径路径数	μ	相对多普勒频移

基扩展模型(BEM)			
$B_m[n]$	基函数 (3.3)	M	基个数 (3.3)
b_{lm}	基系数 (3.3)	$P_m[x]$	勒让德多项式
K	一个 Frame 的长度		

评价指标			
ρ	相关系数 (3.1)	M	基个数 (3.3)
η	估计效率 (3.5)	$P_m[x]$	勒让德多项式
$NMSE$	归一化均方误差 (3.6)	\tilde{K}_v	5%NMSE 有效限下的最大 K
O_{BEM}	时间复杂度 (3.7)	\tilde{f}_d	5%NMSE 有效限下的最大 f_d
S_{BEM}	空间复杂度 (3.8)		

三、基于基扩展（BEM）的快速时变信道估计算法

在上一章中，我们主要讨论了无线通信中的快速时变信道的产生，特点，以及新数学模型的工程意义。本章我们将具体细化题目中的问题一，并分别从问题意义，问题分析，问题解决，验证这四个步骤一一的进行阐述。

3.1 问题意义

从第二章的描述中可知，想要准确的从接收端得到发送端的信号，就必须对无线信道 \mathcal{H} 进行尽可能精确的估计。常见的信道估计是基于时域上的训练序列，即每隔一段时间，发射机会发送一串特定的，收发双方都已知的数据，接收端根据训练序列估计出当前的信道，并假设在一段时间内 \mathcal{H} 是不变的。然而由[8]中的分析可知，接收机的移动会引入多普勒频移，而多普勒频移会在频域上产生新的低频分量，这个低频分量在时域上会表现为 \mathcal{H} 的幅度随时间缓变的特性。因此，发射机需要频繁增加训练序列，从而使得通信的效率大大降低。因此，本文试图发现并验证一种新的数学模型来估计快速时变信道的参数，从而降低训练序列的插入频率。

3.2 问题分析

测试数据中给出了一段时间内，快速时变信道的时域采样参数（9 条路径）。在 200kHz 的信道采样率下，数据给出了 20000 个采样点，也即 100ms 的测试数据。我们需要建立一个数学模型，在保持一定准确度的前提下，减少实际数据点的测试量。算法中所利用的测试点相当于实际通信系统中训练序列插入的位置。因此如果可以在这 20000 个点中，用少部分的测试点估计出整体的数据，在实际的通信系统中我们便可以只在测试点的位置插入训练序列，从而提高资源的利用率。在本节我们首先对将要使用的数据进行预处理和分析，以验证数据的有效性。主要的分析有相关性分析和傅里叶分析：

●数据预处理——相关性分析

由于数据给出的是 9 条不同的路径分别的时域信息，我们首先将对路径之间的相关性进行分析。一般而言，多径衰落信道之间应是相互独立的，如果测试数据中多条路径表现出较强的相关性，我们将认为该条路径是冗余的数据。

在这里我们利用相关系数 ρ 作为数据相关性的评价指标：

$$\rho = \left| \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \right| \quad (3.1)$$

N 为每一条路径中数据点的个数，而 \bar{x} 为该条路径中所有点的均值。我们分别对数据中 9 条路径之间两两的相关系数进行求解，并将得到的结果取模，得到其相关系数矩阵如下：

表 3.1. 路径间互相关系数

ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0.021	0.107	0.086	0.142	0.049	0.095	0.104	0.143
2	0.021	1	0.044	0.052	0.194	0.046	0.126	0.14	0.074
3	0.107	0.044	1	0.163	0.04	0.069	0.121	0.189	0.12
4	0.086	0.052	0.163	1	0.075	0.179	0.139	0.066	0.135
5	0.142	0.194	0.04	0.075	1	0.073	0.073	0.055	0.287
6	0.049	0.046	0.069	0.179	0.073	1	0.204	0.09	0.112
7	0.095	0.126	0.121	0.139	0.073	0.204	1	0.097	0.022
8	0.104	0.14	0.189	0.066	0.055	0.09	0.097	1	0.107
9	0.143	0.074	0.12	0.135	0.287	0.112	0.022	0.107	1

一般而言，相关系数在 0.3 以下被判定为不相关，我们发现除了表示自相关项的对角线之外，所有的互相关系数都在 0.3 以下。因此我们认为这 9 条路径之间两两相互独立，也即针对信道的建模是针对于一条路径的。

● 数据预处理——傅里叶分析

用 f_d 表示多普勒频移， v 表示移动台相对速度， f_c 表示载波频率， c 表示光速。问题一中的多普勒频移 f_d 可以计算得出：

$$f_d = \frac{v}{c} f_c = 500 \text{ Hz} \quad (3.2)$$

由第二章的分析可知，信道中 f_d 大小的多普勒频移将会在解调时产生 f_d 大小的频率分量，而这个频率分量体现在信道的时域选择性衰落上。因此，我们将首先对数据进行傅里叶分析，从频域角度来确定数据中没有异常点。已知信道数据的采样频率为 $f_s = 200 \text{ kHz}$ ，为了确定所选用傅里叶分析的长度，我们首先观察信号的时域特性以估计出信道数据的大致周期，为了方便观察我们选取任意一条信道数据，其实部如下：

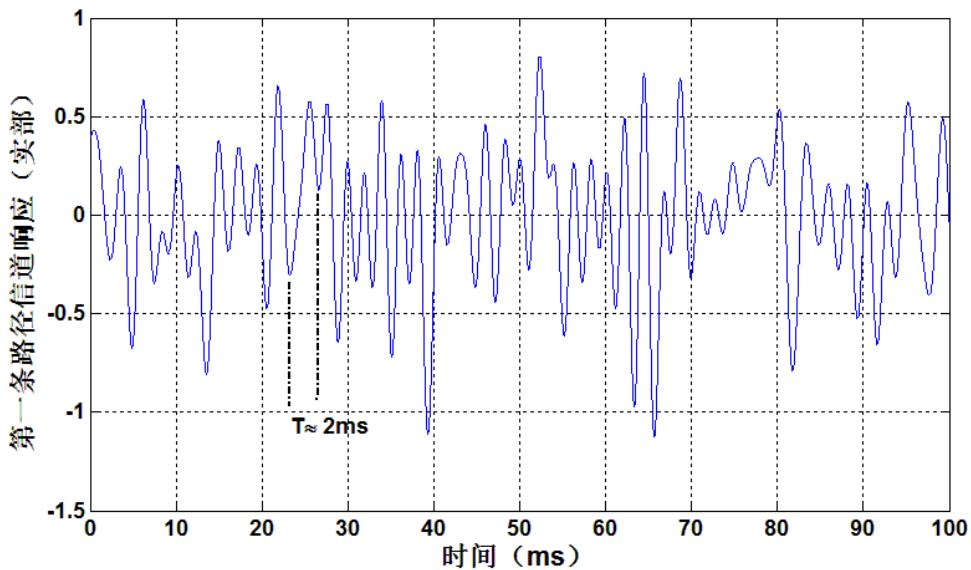


图 3.1. 第一条路径的响应实部

由图 3.1 可见，信道响应的最短周期应该在 5ms 左右，也即约有 1000 个采样点，因此我们选取 4000 点的 DFT 长度对信道数据进行分析。在 DFT 分析中，

DFT 的长度除以不为零的频率分量的位置（左边缘处）等于响应的频率分量的周期。我们将 9 条信道的频率响应展示如下：

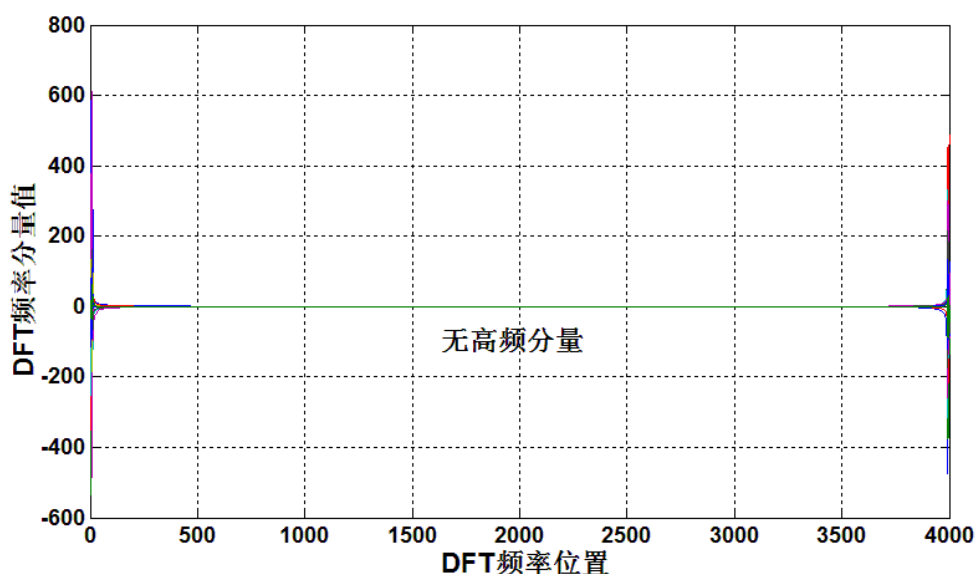


图 3.2(a) 全部路径的 4000 点 DFT 分析（整体）

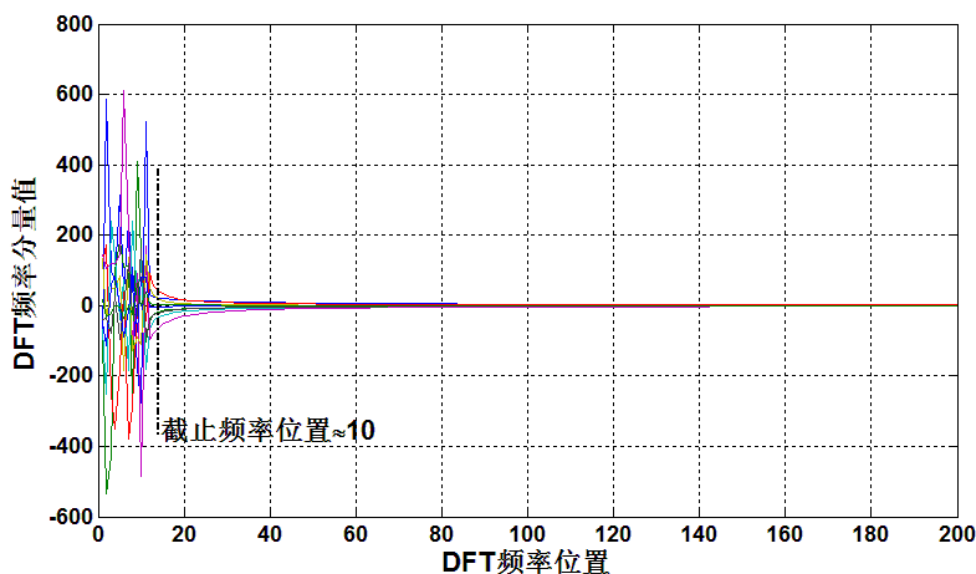


图 3.2(b) 全部路径的 4000 点 DFT 分析（局部）

首先我们观察图 3.2(a)，以横轴上 200 为轴，左右两边的频域数据呈对称分布。在 DFT 分析中，越靠近中心的频率分量代表着越高的频率。如果给出的数据中存在着因为记录或存储原因产生的错误，相邻的数据理应和这个错误数据相差很大，从而产生跳变。跳变将在频域上体现为高频分量。从图 3.2(a)(b) 的 DFT 分析结果来看，我们得出以下两条结论：

1. 数据中无坏点：从图 3.2(a) 可知，由于整个数据在 500-3500 之间几乎没有频率分量，我们可以认为题目中给出的数据是没有明显记录错误。
2. 所给数据基本条件中 $f_d = 500\text{Hz}$ 的假设：从图 3.2(b) 可知，主要的频率分量集中在 10 以内，我们进行 DFT 分析的长度为 $\frac{4000}{f_s} = 20\text{ms}$ ，因此

主要的低频分量的周期大约在 2ms 左右，也即 500Hz，这恰恰符合我们在图 3.1 中观测的 2ms 周期，以及题目中给出的 3GHz 载波，180km/h 相对速度的描述。因此我们认为数据是准确且有效的。

类似的傅里叶分析在其余 3 组数据（即 90km/h 组，270km/h 组，450km/h 组）中都得到了验证，在此不再赘述。

3.3 问题解决——基于 BEM 的快速时变信道估计算法

在上一节我们对数据的有效性进行了验证，这一节中我们将具体利用 BEM 算法从理论上对快速时变信道进行建模，并用给出的信道测试参数进行算法性能的测试和探究。

传统的减少信道估计次数的方法有各种插值的方法。即利用合适的插值基函数，用两个端点的检测值来计算端点之间的估计值。常用的插值方法有 Lagrange 插值，埃尔米特插值，样条插值，牛顿插值等方法[9]。然而由于传统的插值方法其计算相对复杂，并且其数学形式不容易与各种通信系统的表达式结合（如 OFDM 系统便同时涉及信道卷积以及 IFFT 的表达式，传统插值的繁琐表达将增加理论分析难度），因此在这里我们并不做过多的讨论。

基扩展（Basis Expansion Model）方法是最近研究得比较活跃的一种方法[1][2]，与传统的插值方法相比，它不仅可以更为精确的模拟快速时变信道以及双选择性衰落信道的信道特性，其简洁的数学形式更可以降低理论分析的难度，此外，基于 BEM 的特殊展开结构，一些加速迭代的算法可以进一步降低整个信道估计的算法复杂度（在后文有专门设计的加速算法），从而在以后的实际通信系统中提高性能。

●BEM 模型数学原理：

所谓 BEM，是指利用一组有限个数的基底对信道的冲激响应进行合理的近似，它能与具有 Jakes 功率谱的瑞利衰落信道有很好的近似度。具体信道估计的数学模型为（ $\hat{h}_l[n]$ 为估计量）：

$$\hat{h}_l[n] = \sum_{m=0}^{M-1} b_{lm} \cdot B_m[n], \quad l = 0, \dots, L-1; \quad n = 0, \dots, K-1 \quad (3.3)$$

式中 b_{lm} 是第 l 条路径的第 m 个基系数，它在一定的时间周期 K 内不随 n 变化， B_m 是第 m 个基函数矢量，变量是时间 n 。在定时间周期 K 内，上式可以把时变量 $h_l[n]$ 转化为非时变变量 b_{lm} 和另一个时变变量 $B_m[n]$ 。但在不同的周期当中， b_{lm} 是变化的，而 $B_m[n]$ 是不变的。这样，在 K 内估计一次 b_{lm} 就可以实现对快速时变信道 $h_l[n]$ 的估算。从物理意义上讲，模型中的 b_{lm} 项对应着信道中时间选择性衰落的衰减倍数，由于时间选择性衰落总是与多普勒频移相关，因此 b_{lm} 每隔一段时间重新估计一次来描述当前的衰落深度，而 $B_m[n]$ 体现的是无线信道中各种反射，折射等快衰落最终综合起来的响应值。由于瞬时的信道的大体环境是类似的，因此在所有时刻这些随机的影响将会有相同的物理特性，所以 $B_m[n]$ 将会不随时间变化，也即在所有的估计周期内保持相同的向量形式。

由公式 3.3，我们可以先将每一个信道路径的测试数据分成长度为 K 的片段，片段中的数据编号为 $n = 0, \dots, K-1$ ，之后再在每一个片段当中选取时刻

$(n_0, n_1, \dots, n_{M-1})$ 这 M 个样点作为测试点。例如考虑第一条信道路径，即 $l = 0$ 的情况：

$$\begin{cases} \hat{h}_0[n_1] = b_{00}B_0[n_0] + b_{01}B_1[n_0] & \cdots & + b_{0M-1}B_{M-1}[n_0] \\ \hat{h}_0[n_2] = b_{00}B_0[n_1] + b_{01}B_1[n_1] & \cdots & + b_{0M-1}B_{M-1}[n_1] \\ & \vdots & \\ \hat{h}_0[n_M] = b_{00}B_0[n_{M-1}] + b_{01}B_1[n_{M-1}] & \cdots & + b_{0M-1}B_{M-1}[n_{M-1}] \end{cases} \quad (3.3)$$

在方程组 3.3 中， $n_1, n_2, \dots, n_M \in [0, K-1]$ ，通过解这样一个 M 元一次方程组，我们可以得到一组系数向量： $\mathbf{b}_0 = [b_{00}, b_{01}, \dots, b_{0M-1}]^T$ 。这样一来，通过这个系数向量以及基底 $B_m[n]$ ，我们可以利用基底的线性组合（系数为 \mathbf{b}_0 ）来表示在 $n \in [0, K-1]$ 的任何一个 $\hat{h}_0[n_i]$ ：

$$\hat{h}_0[n_i] = [B_0[n_i] \ B_1[n_i], \dots, B_{M-1}[n_i]] \cdot \mathbf{b}_0 \quad (3.4)$$

也即，利用了 M 个数据，完成了对整个时间段 K 内所有数据的估计。

●BEM 模型评价指标：

1.) 估计效率

从上一节的分析我们可以看出，BEM 算法是采用 M 个数据，来完成长度为 K 的整个时间段内的数据估计，因此第一个评价 BEM 算法的指标我们称之为估值效率 η ，它定义为：

$$\eta = \frac{K - M}{K} \quad (3.5)$$

此参数体现了 BEM 的估计效率，同时可以作为实际通信系统中训练序列插入频率的指导：也即在 K 个帧当中用 M 个帧作为训练帧， $K-M$ 个帧作为数据帧。在此模型中， K 的取值将取决于已有的信道测试信息，而 M 的取值与基底 $B_m[n]$ 的选择有很大的关系，下一节我们将仔细讨论本文中这些参数的选择过程。

2.) 估计准确度

对于一个估计模型，估计的准确度是十分重要的一个参数。本文中采用归一化均方误差(NMSE)来评判模型的优劣，其数学表达式为：

$$NMSE = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} |h_l(n) - \hat{h}_l(n)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} |h_l(n)|^2} \quad (3.6)$$

在通信系统中，NMSE 指标并非越小越好。小的 NMSE 可能牺牲的是估值效率或是其他的一些参数，因此在下一节的分析中我们会将 NMSE 作为比较参数之一，与其他几个参数共同分析讨论。

3.) 算法复杂度

模型所用的算法复杂度的优劣对于实用性的影响很大，在保证性能的前提下，低算法复杂度可以使得系统成本更低。这里我们主要讨论两个算法复杂度，即：时间复杂度 $O(f(n))$ 和空间复杂度 $S(g(n))$ 。

对于基础的 BEM 估计算法，估计的流程包括：选取 M 个响应值，并组成方程组 3.3 → 求解此线性方程组 → 向量运算完成 K 个点估算。

时间复杂度指执行算法所需要的计算工作量，定量描述了该算法的运行时间。而空间复杂度指执行这个算法所需要的内存空间。

采用高斯消元法求解 M 元一次线性方程组，时间复杂度和空间复杂度分别

为 $O_{BEM}(f(n)) = O(M^3)$ 和 $S_{BEM}(g(n)) = O(M^2)$ 。因此，估计 L 条路径的基础的 BEM 估计算法的时间复杂度为和空间复杂度分别为

$$O_{BEM}(f(n)) = O(LM^3 + (K - M)LM) \quad (3.7)$$

$$S_{BEM}(g(n)) = O(M^2 + 2M) \quad (3.8)$$

然而在实际的通信系统中，相应的算法复杂度不仅仅是估计出 $\hat{h}_l[n_i]$ ，利用估计出的信道信息，结合接收信号解调出发送信号这一过程所涉及的算法复杂度更为重要。我们将在第五章中详细的介绍一个减少计算复杂度的算法，此算法可以很好的和通信模型进行兼容，在不存储信道矩阵的情况下，以极少次数的迭代求解出相应的接收信号。

●BEM 模型参数选择：

从 BEM 的数学原理一节，我们可以发现该模型中主要存在着 4 个待定的部分：基底 $B_m[n]$ ，估计周期 K ，单周期内样点个数 M ，以及样点 $(n_0, n_1, \dots, n_{M-1})$ 选取的位置。同时利用迭代方法寻找最优参数在这个问题中显然不是很现实，由于问题 1 有着很特定的通信环境（速度 180km/h，载波 3GHz，采样 200kHz），我们可以利用预处理当中的一些结论和快速时变信道的一些物理特性来大致确定一些参数或是规定一些参数的合理取值范围，再来进行最优参数的寻找。

1.) 基底 $B_m[n]$ 的选取

常用的基底有傅里叶基底和多项式基底，我们在本小节将综合比较一下傅里叶基底和两种多项式基底：勒让德多项式和切比雪夫多项式基底。

本文中我们首先排除的是傅里叶基底（ $e^{-j\frac{2\pi n}{M}}$ ），原因是吉布斯现象（Gibbs Phenomenon）。所谓吉布斯现象即使：将具有不连续点的周期函数（如矩形脉冲）进行傅立叶级数展开后，选取有限项进行合成。当选取的项数越多，在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时，该峰起值趋于一个常数，大约等于总跳变值的 9%。[10]文中式 3.3 告诉我们，按照傅里叶基展开的 $\hat{h}_l[n]$ 将是一个由前 M 个傅里叶基线性组合成的截断傅里叶级数，因此若利用傅里叶基底进行展开将会产生无法消除的 9%的幅值跳变，为此我们首先排除。

正如[2]中所分析和描述的那样，我们可以通过将截断傅里叶序列映射到以多项式的线性组合为基底的空间当中来抑制吉布斯现象。此外，由于快速时变信道的频域响应一定是带限的（由于通信系统是带通通信系统），并且信道频域响应的某一抽头的位置将会受到多普勒频移的轻微影响。为了在 $B_m[n]$ 中更好的体现这一物理特性（我们知道 $B_m[n]$ 描述了信道中各种折射反射等物理本质），文献[11][12]利用了扁长椭球序列(prolate spheroidal sequences)来作为 BEM 的基底，在其结论中表明，这种基底将会在理论上有更好的拟合特性。我们知道，扁长椭球序列的基底是如下二阶微分方程的解析解：

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + (\lambda_{cb} - c_{tb}^2x^2)y = 0 \quad (3.9)$$

在这里 c_{tb} 是时间带宽积，也即信道频域响应抽头位置（由于多普勒效应展宽之后）主能量集中的带宽乘以一段固定的时延（例如我们的 $\frac{K}{f_s}$ ，或者 OFDM 系统中一个 symbol 的长度等）。利用[2]的表达式，带入我们的系统参数：

$$c_{tb} = T \cdot f_d = K \cdot \frac{f_d}{f_s} = 2.5K \times 10^{-3} \quad (3.10)$$

由于 K 一般而言不会太大，因此系数 c_{tb}^2 将会是高阶小量，可以忽略。再令公式 3.9 当中的 $\lambda_{c_{tb}} = n(n+1)$ ，我们便可以得到勒让德多项式的原微分方程：

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (3.11)$$

一般在实际计算中，勒让德多项式 $P_n(x)$ 是 n 阶多项式，一般应用时会采用如下的罗德里格公式进行递推：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (3.12a)$$

在本文中，我们最高应用到了 7 阶勒让德多项式（也即 $M=8$ ），更高阶次的基底没有考虑是因为龙格效应以及计算的复杂度。试试证明在接下来的仿真环节中， $M=8$ 的参照组曾多次出现因为系数矩阵接近于其奇异值，而导致计算结果偏差很大的情况，前八阶勒让德多项式的表达式如下：

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

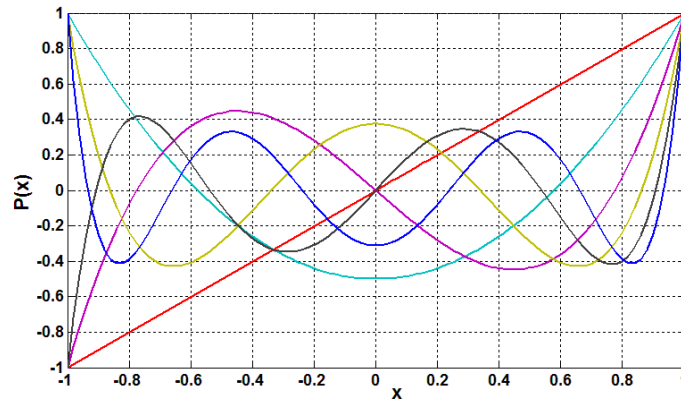


图 3.3 前 8 阶勒让德正交多项式

从图 3.3 中我们可以形象的看到 0~7 阶勒让德多项式基底, 其中 $x, y \in [-1, 1]$ 。至此, 我们已经确定了 BEM 的基底 $B_m[n] = P_m(x)$, 从 x 到 n 还需要一步归一化映射, 在我们的系统中, 基底的完整解析表达式为:

$$B_m[t] = P_m\left(\frac{2t \cdot f_s}{K} - 1\right), \quad t \in \left[0, \frac{K}{2f_s}\right] \quad (3.12b)$$

2.) 估计周期 K 的选取

在我们的通信系统中, 若只考虑数学意义 K 的取值范围可以很广: 由于测试数据有 20000 个, 数学上 $K \in [1, 20000]$ 都是有意义的。然而我们完成的是对一组真实信道数据的建模和估计, 因此在这里 K 的大致取值范围的确定要根据其物理意义进行。

在 3.1.2 的问题分析当中, 我们得知该组信道数据的测试环境下的多普勒频移 $f_d = 500\text{Hz}$ 。利用傅里叶分析我们也验证了这一点, 在 $f_s = 200\text{kHz}$ 的采样频率下, 由多普勒频移所产生的新的频率分量 (也即时间选择性衰落的频率分量) 的周期大致为 $\frac{1}{f_d} = 2\text{ms}$, 而这个周期内所包含的数据个数大约为 $\frac{f_s}{f_d} = 400$ 个数据样值。由于线性基底的系数 b_{lm} 表征的是一段时间内不变的分量, 这个周期也应该是时间选择性衰落信道低频主分量所代表的周期长度。

所以我们在这里规定 $K < 400$ 作为一个合理的限制条件来进行接下来两步骤的参数范围确定。由于 K 的选取关系到估计效率 η , 算法复杂度 $O_{BEM}(f(n))$ 和 $S_{BEM}(f(n))$, 因此我们将在下一小节中讨论与仿真 K 与其他参数间的相互影响。

3.) 单周期内样点个数 M 的选取

与 K 类似, M 同样决定着公式 3.5, 3.7, 3.8 当中所提到的三个主要指标。此外, 从 BEM 的基本展开式来看, M 更决定着使用基底的次数以及个数。因此 M 的选取要比 K 的选取有更多的限制条件。我们在这里仅仅考虑几个可能的 M 取值, 用来指导下一小节的仿真环节。

首先 $M=1$ 时, 基底退化为 $B_0[n] = P_0(x) = 1$, BEM 算法相应的退化成阶梯插值[2]或者称之为 LS 信道估计算法。其次 $M=2$ 时, 基底中增加了 $B_1[n] = P_1(x) = x$, 两个基底的组合结果一定是线性函数, 因此 BEM 算法退化成线性插值算法。接着选取 $M=3$ 时, BEM 算法应与抛物线插值的精度类似。之后, 由于篇幅有限, 我们仅选取 $M=4, 8$ 来进行研究。更高阶的 M 不在考虑范围之内, 这是因为在数值计算当中存在着龙格现象[9], 即用多项式对某光滑函数进行插值或逼近的时候, 并非阶数越高越好, 高阶的基函数容易在插值的两个端点处产生剧烈的震荡, 从而使得整体的计算误差变大。这是由于数值计算时的舍入误差造成的。

综上所述, 我们选取进行分析的 M 有 1, 2, 3, 4, 8。在这 5 个取值中, 我们格外关心 $M=4$ 的情况。这是因为 4 是 2 的幂次, 在硬件逻辑系统中 4 阶方阵的硬件实现会更容易一些。此外, 考虑到将来信道估计的算法会应用到一些实际载波调制系统中, 例如 OFDM, $M=4$ 的情况也更利于与 OFDM 这种应用了 IFFT 模块进行调制的系统更好的结合。因此我们主要研究 $M=4$ 时, 一些其他的参数选取究竟会对整个系统产生怎样的影响。而 $M=1, 2, 3$ 将作为对照组, 在效率 η 一定的情况下与 $M=4$ 进行对照。而 $M=8$ 不作为主要考虑的原因有二, 其一是由于龙格现象, 其二是由于计算复杂度的限制。其三是因为 K 的取值原因, 在接下来的仿

真中我们会看到 $M=8$ 的情况将会因为 K 的取值过早的超过 400（也即由多普勒频移估计出的 K 的取值上限）其 NMSE 会急剧下降。

4.) 采样点位置的选取

此 BEM 算法是在长度为 K 的信道响应中选取 M 个作为采样值，其余 $K-M$ 个作为估计值，从而减少训练序列的插入频率。这样，系统中第四个待定的参数选取即 $(n_0, n_1, \dots, n_{M-1}) \in [0, K-1]$ 的具体数值。

由于 K 与 M 值都会变化，因此具体数值的选取讨论起来对于实际系统的影响不大。我们在这里值分析左集中，右集中，均匀分散三种策略对于 NMSE 的影响。所谓左集中即 $(n_0, n_1, \dots, n_{M-1}) = (0, 1, \dots, M-1)$ ，所谓右集中即所有的采样点都集中在 $K-1$ 侧，而均匀分散则顾名思义是采样点均分分布在 K 个值之间。

综上所述，本节我们大致确定了系统仿真参数的取值范围：基底 $B_m[n]$ 采用勒让德多项式基底， $K < 400$ ， $M=1, 2, 3, 4, 8$ ，其中主要的性能分析集中在 $M=4$ 处。采样点位置选取有左集中，右集中，均匀分散三种。下一节我们将结合数值仿真，具体的分析系统模型。

●BEM 估计性能仿真分析：

在本小节中，我们采用拟合程度 NMSE 作为主要的性能指标，若 M 固定，我们选取 K 作为自变量（横轴）来研究最优取值。当进行不同 M 取值组之间的比较时，为了公平起见，我们以估计效率 η 作为控制变量法当中的自变量。而算法复杂度则作为一个辅助的评判标准，在最终评价时进行讨论。

1.) $M=4$ 时的 K 取值

在基底 $B_m[n]$ 固定， $M=4$ 的情形下，我们首先寻找 K 对于主性能指标 NMSE 的影响，采样点位置选取我们先假定是均匀分散的策略。也即：

$$[n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4] = \left[\left\lfloor \frac{K}{2M} \right\rfloor \ \left\lfloor \frac{3K}{2M} \right\rfloor \ \left\lfloor \frac{5K}{2M} \right\rfloor \ \left\lfloor \frac{7K}{2M} \right\rfloor \right] \quad (3.13)$$

首先，在线性坐标下，横坐标选取 $K \in [1, 800]$ ，纵坐标是 NMSE。

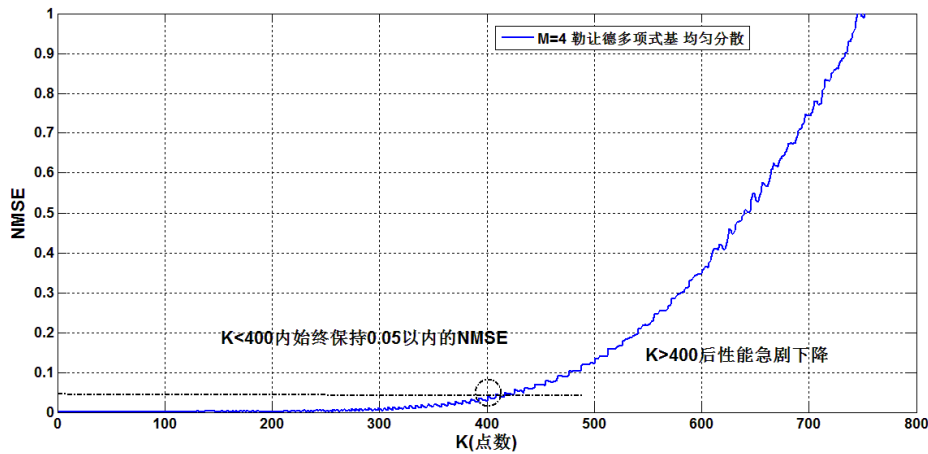


图 3.4 K 取值(点数)对于 NMSE 的影响-线性坐标

从图 3.4 中我们可以很明显的看到，当 $K > 400$ 之后，估计的误差(NMSE)将会急剧的增大，在 750 左右的时候甚至超过了 1。这验证了我们之前 $K < 400$ 估计会相对准确的猜想。为了更加细致的确定在 $K < 400$ 范围内，具体 K 的取值是如何影响 NMSE 的性能，以及 NMSE 的性能究竟会到怎样的数量级，我们采用散点图的形式，并且纵轴采用对数坐标系来进行观察。

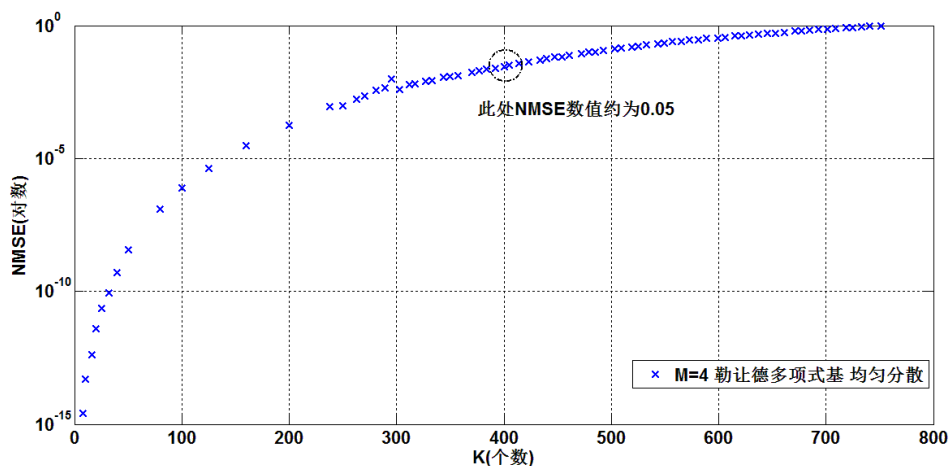


图 3.5 K 取值(个数)对于 NMSE 的影响-对数坐标

从图 3.5 中，选取一些合适的 K 点进行估计，并计算其 NMSE，我们可以看到 K 在取值比较小的时候，估计的准确度十分的高，在 $K=8$ (也即最左边第一个点)时，估计精度达到了 10^{-15} 。然而正如之前所说，NMSE 并非越高越好，在当前的仿真中， $M=4$ ，则无论 K 取值为多少，算法复杂度不变。因此 K 在这种情况下的取值只和效率 $\eta = \frac{K-M}{K}$ 有关。我们可以通过图 3.5 对精度和效率做一个权衡取舍。例如在 $K=8$ 处，虽然 NMSE 达到了 10^{-15} 但是效率只有 50%。而 $K=250$ 时，我们的仿真结果表明 NMSE 可以达到 9.5545×10^{-4} 精度，然而其效率更高达 98.44%，显然 $K=250$ 比 $K=8$ 更适合应用在实际的通信系统中，虽然后者的精度远远高于前者。

K 取值的另外一个考虑因素是和通信系统与计算机系统的兼容。在实际应用中，例如 OFDM 系统中，时域上一个 OFDM 符号的长度恰恰是其 FFT 长度（2 的幂次）加上一个循环前缀的长度。以 IEEE 802.11p 协议为例（此协议是专门描述车联网场景的通信协议），一个 OFDM 完整符号的长度为 80 的样值，其中 64 个样值符号，而 16 个样值是循环前缀。

综上所述， K 的选取有以下原则：1.) 应当选择 $K < \tilde{K}$ ，其中 \tilde{K} 可以理解成与一个与多普勒频移息息相关的量。在数据 1 场景中为 400。2.) K 的选值与 NMSE 和 η 相关，因此应该在要求的 NMSE 满足通信系统要求的前提下，尽可能找更大的 K 来提高效率。3.) K 的具体取值尽量保证与真实的通信系统可以更好的兼容，如 2 的幂次，或者与帧结构结合起来考虑等，这里不做过多介绍。

2.)不同 M 的性能对照

在上一小节中我们主要分析了 K 取值对于估计精确度的一些影响，本节我们关注一下 M 。 M 对于系统的影响要比 K 的影响更为复杂一些，它同时影响着 η ，算法复杂度，基底 $B_m[n]$ 以及最终的 NMSE。尤其是 M 对于基底的影响，由于我们采用的是勒让德多项式作为基底，高阶的多项式分量在计算中更容易被很小的舍入误差所影响。这一点无论是在数值计算上，还是在工程实现上都是应该考虑的指标。从图 3.6 和 3.7 的仿真中我们也可以看出，当 K 较大时， $M=8$ 的参照组数据将会出现很大的计算误差，从而使得数据无效（在计算这部分数据时程序已经频繁发出系数矩阵接近其奇异值的警告）。我们首先应用数据 1，以 K 为自变量，观察一下不同 M 的 NMSE 之间的关系，如图 3.6 所示：

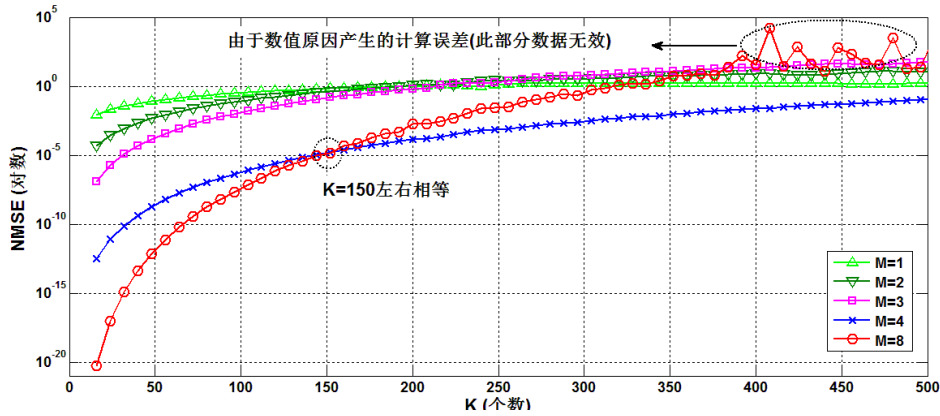


图 3.6 不同 M 值对于 NMSE 的影响趋势分析-对数坐标

从图 3.6 当中我们可以得到以下信息：

1.) M=1, 2, 3 三种情况都表现为 K 很小的时候能达到不错的 NMSE(仍远远小于 M=4, 8 的情形)。这可能是因为仅仅用 2 阶的自变量 x 不足以很好的表现信道的物理特性。

2.) M=1, 2, 3, 8 这四种情况的 NMSE 均比 M=4 的变坏得早。如果我们规定 5% 的 NMSE 为估计的有效限，M=1, 2, 3 均在 K=150 左右超过有效限，而 M=4, 8 此时的性能还很好。

3.) M=8 的情况在 K 比较小的时候(K<150)时会比 M=4 的情况好，然而在 K>150 之后会差于 M=4 的情况，这是由于 M=8 的基底当中自变量 x 的最高次数为 7 次，高次分量使得估计效果变差。

4.) M=4 的情况在所有对照组中拥有最好的性能，同时在 K=400 出它的 NMSE 达到 5% 估计有效限，这与前述的多普勒频移对于有效限处 K 取值的影响有关。

然而图 3.6 的比较是不公平的，抛开算法复杂度不谈，K 的取值还影响着估计效率 η ，因此更公平的比较应该在同等 η 的条件下进行。因此，我们对图 3.6 的数据组进行了坐标变换，以效率 η 作为自变量，NMSE 作为指标，在图 3.7 中重新对这几组不同 M 的取值情况进行分析：

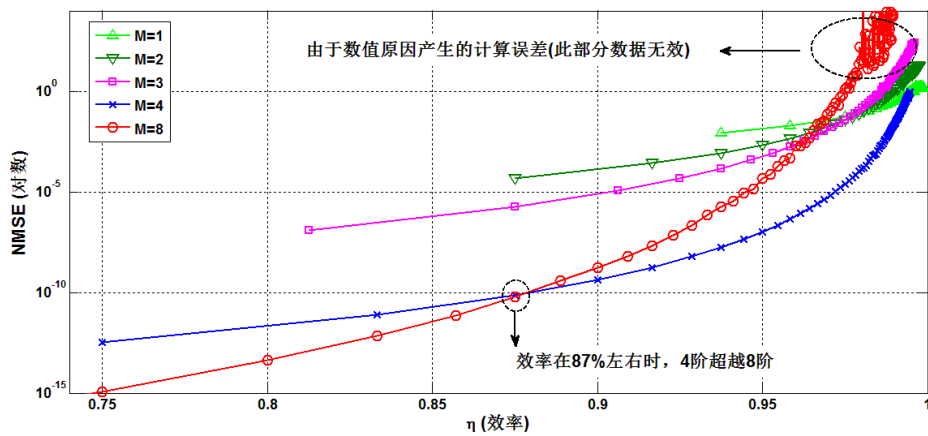


图 3.7 等效率下，不同 M 值对于 NMSE 的影响趋势分析-对数坐标

从图 3.7 我们可以发现，M=3 好于 M=2 好于 M=1 的情况，这与图 3.6 的结论一致。重要的是 M=4 和 M=8 的比较。在图 3.7 中我们发现当 $\eta \approx 87\%$ 时，M=4

与 $M=8$ 拥有同样的 NMSE，此后效率越高， $M=4$ 的优势越大。 $M=4$ 时，87% 的效率对应着 $K=31$ ，而 $M=8$ 时，87% 对应着 62，也即在 $K=31$ 左右 $M=4$ 便可以超越 $M=8$ 的性能，这比图 3.6 中的相交点 $K=150$ 来得还要早，且在此情况下 $NMSE=10^{-10}$ ，在一般的通信系统中，信道估计的 NMSE 远远不用达到如此高的精度，设计师们会用合适的精度来争取最大的效率 η ，因此从这一角度分析， $M=4$ 的情况更是远远好于 $M=8$ 。综上， $M=4$ 是针对于此问题最优的一个取值。

3.) 不同采样点位置的选取策略的性能对照

上一小节讨论了 $M=4$ 的优势，因此在接下来的分析中我们着重分析 $M=4$ 的情况。信道估计的问题是在 K 各个信道采样样值中选取 M 个点作为测试点，并用这 4 个测试点解算出一组参数（本文中即 \mathbf{b} ），之后利用结算处的参数向量以及基底函数对余下的 $K-M$ 个值进行计算和估计。因此在上述过程中，采样点的选取便是另一个不确定的因素。如图 3.8 所示，我们在这里分析均匀分散，左集中，右集中三种不同的采点策略，采样点由公式 3.13 决定。

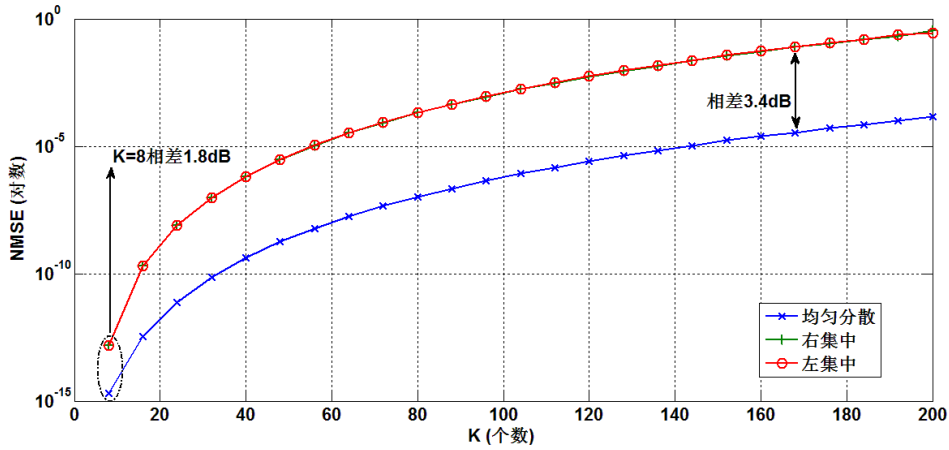


图 3.8 $M=4$ 时，不同取点策略于 NMSE 的影响趋势分析-对数坐标

在图 3.8 中，我们选取了 $K < 200$ 来进行观察。从图中我们可以看到均匀分散的做法会使得系统性能远远好于集中采点。尤其在 K 值变大时。这一结论符合估计与插值的基本规律。我们发现当 $K=8$ 时它们相差 1.8dB，而在 $K=160$ 左右时，相差 3.4dB。此外， $K=4$ 相当于将全部的样点用来计算系数，因此三条曲线将会一同收敛到 $K=4, NMSE \rightarrow 0$ 这样一个样点上。而图中传达的另一个信息是：左集中与右集中的性能几乎完全一样。这是由于勒让德基底的对称特性，我们从图 3.3 可以发现，勒让德基底的奇数次项是奇对称，偶数次项是偶对称，因此采样点集中在 $x=-1$ 区间或是 $x=1$ 区间是等效的。

综上所述我们得出结论分散分布的估计效果要好于两端集中，是否有更合理的采样点分布可以进一步提高估计精度我们在本文中并没有做更深入的研究。

4.) 结合算法复杂度的讨论

在 BEM 模型评价指标的小节中，我们曾经简短的讨论过这个估计算法的算法复杂度，其表达式如 3.7 和 3.8 所示。针对于时间复杂度，由于 $M \ll K$ ，因此时间复杂度中的第二项，也即 $(K - M) \times M$ 项针对于不同的 M 值是可以近似等于 KM 。在本例中有 20000 个数据样点，假如 $K=100$ ， $M=4$ ，那么 20000 个样点将被分为 200 个帧，在每个帧当中需要进行 L 次 M 元一次方程的求解，这一操作

的基本时间复杂度为 $O(LM^3)$ ，求解出基底系数后进行余下 $K-M$ 个值的估计需要进行 $K-M$ 次乘法和 M 次加法，于是这一环节的复杂度为 $O(KLM)$ ，整个过程需要 $\frac{20000}{K}$ 个这样的循环因此总的计算量为：

$$O_{LBEM} = \frac{20000}{K} (O(LM^3 + KLM)) = 20000 \times O\left(\frac{LM^3}{K} + LM\right) \quad (3.14)$$

由上式可见，在 $M \ll K$ 的情况下， K 值对于整体复杂度的影响会更大一些。因此我们在保证一定估计精度的前提下，尽可能的增加估计效率，也即增大 K 的值会同时降低整个算法的时间复杂度。

而整体的空间复杂度 $S_{LBEM} = S_{BEM}$ ，这是因为信道的估计是逐帧进行的，所需要的开销只是基底系数向量 \mathbf{b} ($1 \times M$)，代数后的信道参数向量 \mathbf{h} ($1 \times M$) 以及基底矩阵 ($M \times M$)。

然而在实际的通信系统当中，估计出 $\hat{h}_l[n]$ 仅仅是解调的第一步，如何有 $\hat{h}_l[n]$ 信息，结合接收到的数据向量 \mathbf{y} 解调出相应的发射信号 \mathbf{x} 才是更为重要的过程。为此我们将在第五章，也就是对实际通信系统建模的章节提出一个加速收敛的算法，该算法可以和上述 BEM 模型很好的结合，在不必解算出信道矩阵的情况下得出解调数据。具体过程将在第五章详述。

5.)时域估计效果

上述讨论主要集中在不同参数选取下 NMSE 的特性。这里我们给出三组估计参数，然后直观的从时域的角度来观察一下估计的效果：

表 3.2 三组拟合参数

M=4/勒让德/均匀	K	η	NMSE
第一组	100	96%	7.8e-7
第二组	200	98%	1.8e-4
第三组	300	98.7%	3.8e-3

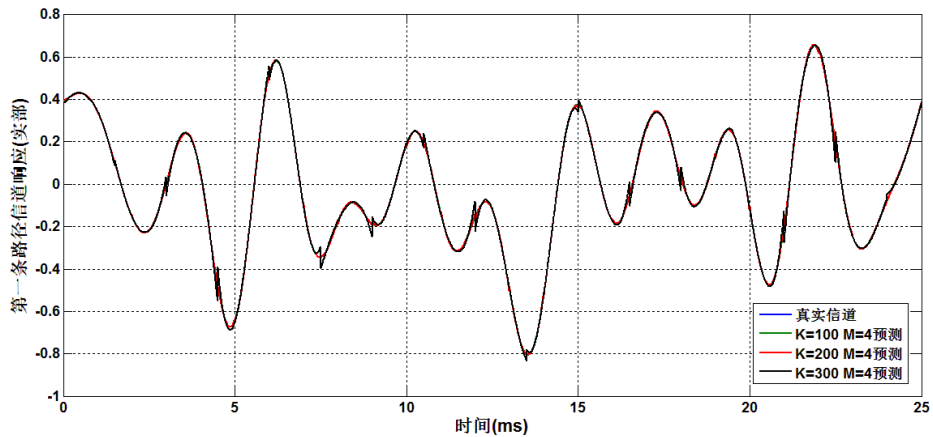


图 3.9 三组参数的拟合效果(整体)

从表 3.2 可以直观看出三种参数的 NMSE，第一组参数的拟合效果最好，基本完全重合，第二组性能一般，第三组拟合的 NMSE 可以接受，但是已经可以从

图中看出在估计的一些边缘点出现了一些跳变，这是由于 K 选取过大，多项式基在边缘处不能很好的估计数据的缘故。我们在下图中对上图的细节进行放大观察：

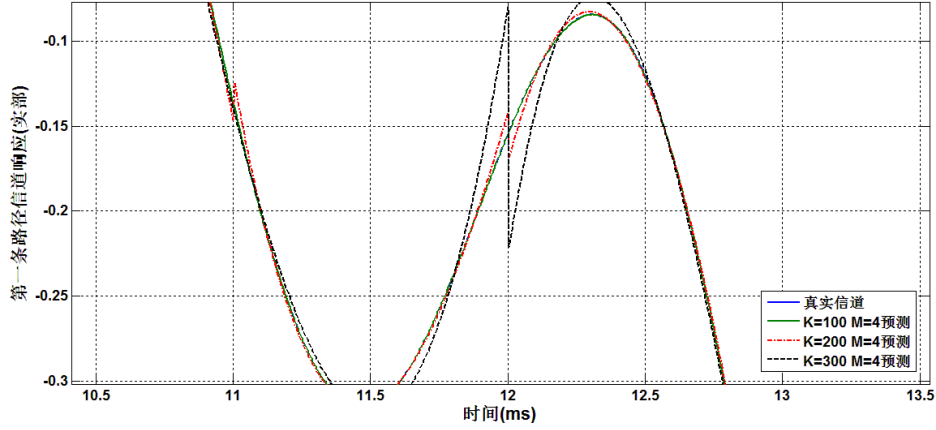


图 3.10 三组参数的拟合效果(细节)

在上图的细节观测中我们发现第二组数据实际上也存在着端点不连续的问题，这种现象是应是多项式基函数截断所引起的。

综上我们从时域的角度展示了三组参数下，利用我们的 **BEM** 算法对信道进行的估计。证明我们的 **BEM** 算法的有效性。

3.4 问题小结

本章主要针对题目中的问题一进行了相近的讨论以及分析。针对无线通信系统中快速时变信道的估计问题，我们采取了 **BEM** 算法对信道响应进行展开。在本章中我们首先逐一确定了模型中的四大未知量，即基底函数，基底阶数 M ，估计长度 K 以及采样点选取策略。并且以 $NMSE$ 作为主性能指标，兼顾估计效率 η ，算法复杂度 $O_{LBEM}(f(n))$ 和 $S_{LBEM}(f(n))$ 进行了详尽全面的理论分析和数值仿真分析。在接下来的一章中我们将对该 **BEM** 模型的鲁棒性进行进一步的探究。

四、BEM 估计算法对多普勒频移的鲁棒性分析

上一章中，我们利用在 $v=180\text{km/h}$, $f_c = 3\text{GHz}$, $f_s = 200\text{kHz}$ 条件下测试出的信道测试参数，对所提出的 BEM 算法进行了详尽的讨论。在本章中我们主要研究速度 v 对于 BEM 估计性能的影响。我们知道，速度 v 主要影响着多普勒频移 f_d ，而多普勒频移又影响着时间选择性衰落信道的低频主分量的频率。这个截止频率我们在周期 K 的选取中曾经讨论过， K 的最大有效取值将和这个频率密切相关，因此在这一章中，我们首先利用题目中给出的 $v=90, 270, 450 \text{ km/h}$ 三组数据大致猜想 f_d 对于系统性能的影响规律。之后，我们将对多径时变传输信道进行数学上的建模，并以此模型产生信道数据。由于自己产生的信道数据其相对多普勒频移（也即相对速度）可以自行设定，因此我们将利用这些数据验证之前对于 f_d 与系统性能之间关系的一系列猜想，也即 BEM 估计算法对于相对多普勒频移的鲁棒性分析。

4.1 问题意义——速度对于多普勒频移的影响规律

在问题 2 中，题目中给出的问题是探究相对运动速度 v 对于模型准确度 (NMSE) 的影响规律。在数学上可以直接将速度和 NMSE 进行关联，然而由于我们的测试数据是实际的信道中所测量的真实数据，因此我们首先要探明物理上速度影响 NMSE 的机制。由公式 3.2 可知，多普勒频移 f_d 是一个与速度紧密相关的量，而我们在扩展基分析的部分也有提到，二阶微分方程 3.9 中的 c_{tb} 也与 f_d 紧密相关。我们之所以能用勒让德多项式来代替理论上精确的扁长椭圆序列是因为在当前的条件下 $c_{tb} \ll 1$ ，从而 c_{tb}^2 是高阶小量。相应的，误差环节也应该是由此处产生。此外，从公式 3.10 中可见，影响模型精度的参数与 K , f_s 也有关系，我们在第三章确定了 K 的取值，并在第四章沿用这一组参数。这样一来，影响精度的环节就应该是 $\frac{f_d}{f_s}$ 这一项，它的物理意义显而易见，是相对多普勒频移。定义 $\mu \triangleq$

$\frac{f_d}{f_s}$ 为相对多普勒频移，在第三章的参数下， $\mu = 0.25\%$ 。

4.2 问题分析——影响规律的猜想及预测

从公式 3.10 来看，当 f_d 变大时，若其他条件不变，估计的精度理应下降。此外，由我们在数据预处理当中的傅里叶分析可以得到，时间选择衰落所产生的低频分量的主分量对于衰落的特性起着决定性的作用。而这个主分量的周期又限制着 K 的最大取值。 K 的最大取值在物理上有着很重要的意义，它可以表征该无线信道可以被预测的极限。因此，我们猜想相对多普勒频移对系统性能的第二个影响即对于模型可预测极限长度 \tilde{K} 上。

●猜想一：速度越高，同样的 K, M ，基底 $B_m[n]$ ，采样策略下，NMSE 会越差。

●猜想二：速度越高，算法可以预测的有效估计区域会窄。（定义 $K < \tilde{K}$ 或使得 $\text{NMSE} < 0.05$ 的最大 K 为有效估计区域）。

4.3 问题解决——速度影响规律的验证

在上一节中我们有两个猜想，问题 1,2 中给出的是 $v=90, 180, 270, 450\text{km/h}$ 情况下进行的 4 组信道测试数据。取 $M=4$ ，均匀分布采点策略，可以得到下图。

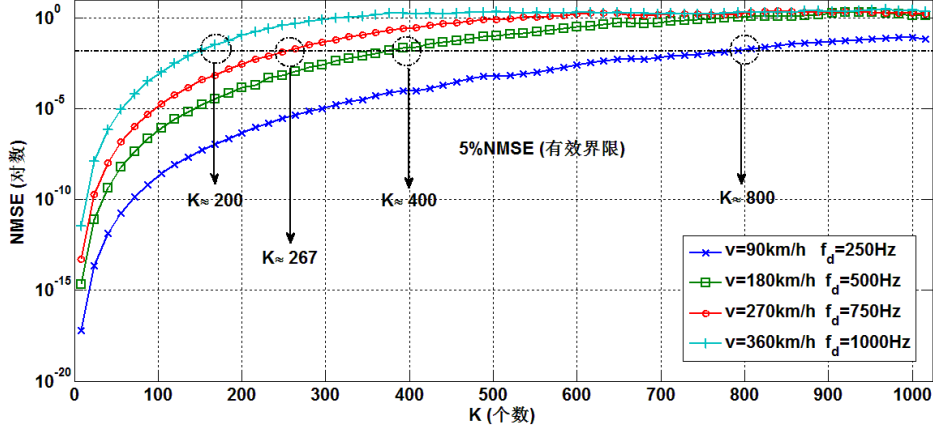


图 4.1 速度 v 对于 NMSE 影响分析-对数坐标

从图 4.1 中我们首先可以很快的验证猜想 1，同样的 K 值下，估计算法对低速度的信道数据估计要准确得多，要想达到同样的估计准确度，高速率下的数据要牺牲更多的效率 η 。对于猜想 2，我们首先需要对速度 v 进行一下基本的变换。根据多普勒频移公式，也即式 3.2，我们可以推算出四种情况下相应的 f_d 分别为 250, 500, 750, 1000Hz。由于采样频率 f_s 都为 200kHz，则由多普勒频移产生的信道时变衰落的低频主分量的周期应为 $\frac{1}{f_d}$ ，这周期对应着 $\frac{f_s}{f_d}$ 个采样点。也即使得 NMSE 达到 5% 估计有效限的 K 取值上限为：

$$\tilde{K}_v = \frac{f_s}{f_d} = \frac{1}{\mu}$$

用 \tilde{K}_{90} 表示速度为 90km/h 的取值上限，我们可以计算出 $\tilde{K}_{90} = 800$ ， $\tilde{K}_{180} = 400$ ， $\tilde{K}_{270} \approx 267$ ， $\tilde{K}_{360} = 200$ 。在图 4.1 中，我们可以很好的验证 \tilde{K}_v 的取值。

4.4 问题扩展——对多径时变信道的建模

●对多径时变信道建模的意义

在问题 4.3 中，我们利用题目中所给出的数据，即 $v=90, 180, 270, 450 \text{ km/h}$ 进行相互比较，初步验证了我们对于模型对于相对移动速度鲁棒性的关系。为了进一步验证这个想法，我们需要在更多不同的 v 下来验证。此外，在不同的载波频率下，是否速度是通过相对多普勒频移 μ 来影响系统这一猜想也需要验证。因此，我们根据题目中的问题 2 当中的第二个要求，对多径时变传输信道进行相应的建模，并以此模型产生更多的测试数据来进行分析研究。

●多径时变信道建模

从物理上讲，多径衰落信道之间是相互独立的（我们在数据预处理环节中已经验证了这一点），其幅度服从瑞利分布，相位服从均匀分布。[5]而多普勒频移的影响可以用 Clarke 模型进行很好的解释[8]，在此不再赘述。

对于经典的 Clarke 模型，若不考虑信道在频域上的特性影响，根据引文[5]可以知道，N 条路径所产生的瑞利衰落信道可以用 Clarke's 模型很好的逼近：

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N A_n \cdot \exp[j(\omega_d t \cdot \cos\alpha_n + \phi_n)] \quad (4.1)$$

式中 α_n 表示波形的相角， ϕ_n 表示第 n 条路径的初始相位（也即多径的延时信息），而 $\omega_d = 2\pi f_d$ 是系统的最大多普勒角频移， A_n 表示该条路径的增益倍数。然而正如[5]中所说，此模型并不适宜于对多条不相关的建模。此外，只有当N取值很大时，上述模型才会对信道有比较好的逼近。这些特点决定着经典的表达式适用于理论分析，而实用性欠佳。通过阅读文献，我们掌握并实现了一种在N取值很小的时候，也可以快速收敛，达到很好拟合效果的多径时变信道产生算法。具体而言，是首先对上式的参数进行一些变换：我们选取 $N = 4M$ ， $\phi_{n+M} = -\phi_n + (\frac{\pi}{2})$ ， $\phi_{n+2M} = -\phi_n$ ， $\phi_{n+3M} = \phi_n + (\frac{\pi}{2})$ ， $\alpha_n = \frac{2\pi n - \pi + \theta}{N}$ ，其中 θ 是 $[-\pi, \pi)$ 的一个均匀分布的随机变量。利用欧拉公式和相应的代数变换，4.1 式可以变换成如下形式：

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \left\{ \sum_{n=1}^M 2A_n \cos(\omega_d(t + \tau_n) \cdot \cos\alpha_n + \phi_n) + j \sum_{n=1}^M 2A_n \cos(\omega_d(t + \tau_n) \cdot \sin\alpha_n + \phi_n) \right\} \quad (4.2)$$

为了方便定义和研究该模型的统计特性，我们对其实部和虚部做了重新的定义：

$$Z(t) = Z_c(t) + jZ_s(t) \quad (4.3)$$

$$Z_c(t) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{n=1}^M A_n \cos(\omega_d(t + \tau_n) \cdot \cos\alpha_n + \phi_n) \quad (4.4)$$

$$Z_s(t) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{n=1}^M A_n \cos(\omega_d(t + \tau_n) \cdot \sin\alpha_n + \phi_n) \quad (4.5)$$

其中

$$\alpha_n = \frac{2\pi n - \pi + \theta}{4M}, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (4.6)$$

由式 4.3~4.6，我们可以模拟产生由 M 条路径的，多普勒频移可控的多径信道。其中每条路径的增益以及时延可以由参数 A_n 和 τ_n 来表征。我们将用最终信道响应的概率密度函数(PDF)进行模型的验证，来确保模型产生的信道参数的 PDF 服从瑞利分布：

$$f(z) = \frac{2z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \quad (4.7)$$

●多径时变信道模型验证仿真

由上一小节提出的模型，我们可以进行多径时变信道的建模，并利用不同多普勒频移的设置，来验证我们在 4.2 节中提出的两个猜想。为了更接近于真实的

通信系统，我们选取 3GPP LTE 协议中定义的一些典型场景[6]。由于篇幅关系，我们仅选取扩展城市模型 ETU(Extended Typical Urban model)来进行仿真分析。该场景有 9 条多径信道

表 4.1 扩展城市场景 ETU 多径信道参数

Excess tap delay [ns]	Relative power [dB]
0	-1.0
50	-1.0
120	-1.0
200	0.0
230	0.0
500	0.0
1600	-3.0
2300	-5.0
5000	-7.0

根据表 4.1，我们有 $\tau = [0, 50, 120, 200, 230, 500, 1600, 2300, 5000] * 10^{-9} s$ ，而 $A = 10^{-[-1, -1, -1, 0, 0, 0, -3, -5, -7] * 0.1}$ ， $v = 180 km/h$ ， $f_s = 3 GHz$ ，带入公式 4.3~4.6，便可以产生模拟的信道响应。仿真的幅度响应以及相位响应如下两图所示：

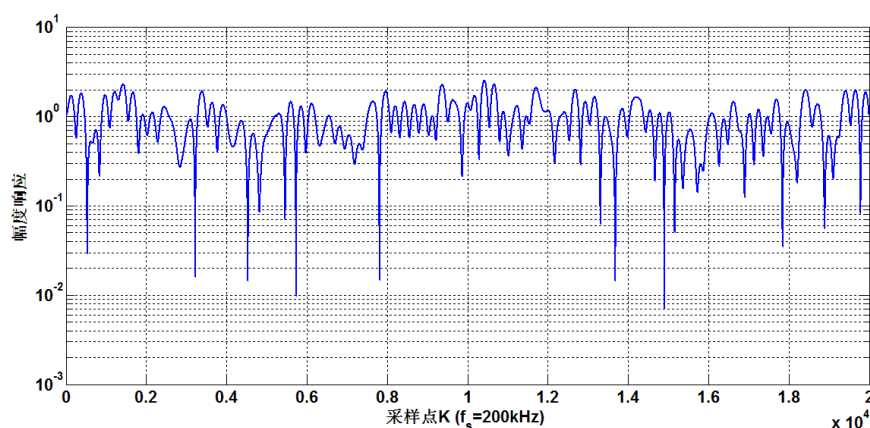


图 4.2 仿真产生瑞利信道的幅度响应 (对数坐标)

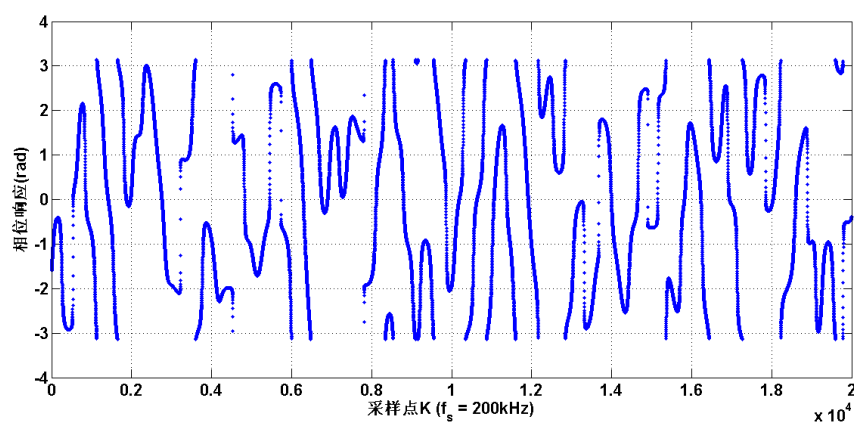


图 4.3 仿真产生瑞利信道的相位响应 (弧度)

从上边两图我们可以看到仿真产生的瑞利信道的幅度响应与相位响应，这与大部分参考资料上的特性都十分类似，然而，我们并不能仅仅凭借这两张图来确定模型的有效性。由于我们仿真产生的模型是用数据一当中的物理参数，因此假若信道模型准确，那么产生的模型理应有类似的数据特性。因此，我们首先从频域上分析。之前在数据预处理章节，我们曾经对数据一进行了 4000 点的傅里叶分析，发现其主低频分量集中在 DFT 横轴的 10 以内，（见图 3.2(b)），我们用同样的方法对以此相同参数产生的信道数据进行 4000 点的傅里叶分析，如下图所示：

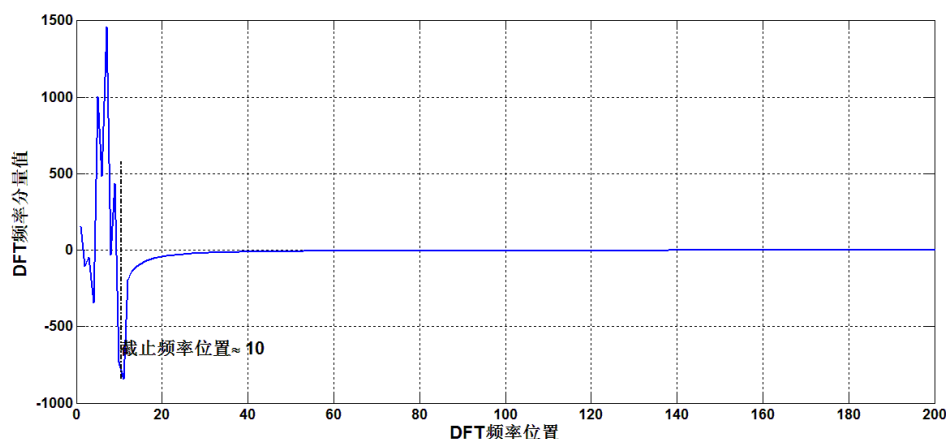


图 4.4 仿真产生瑞利信道的 DFT 分析

由上图可见，我们的多径信道模型产生的数据同样在横轴为 10 时有出现截止频率，因此与原始数据在频域特性上是吻合的，这进一步说明了我们模型的有效性。此外，为了验证模型中 ω_d 项的有效性，我们在其他参数不变的情况下分别取 $f_d = 500, 1000, 2000, 4000, 10000$ ，用这一组数据对模型的频域特性进行验证，如下图所示：

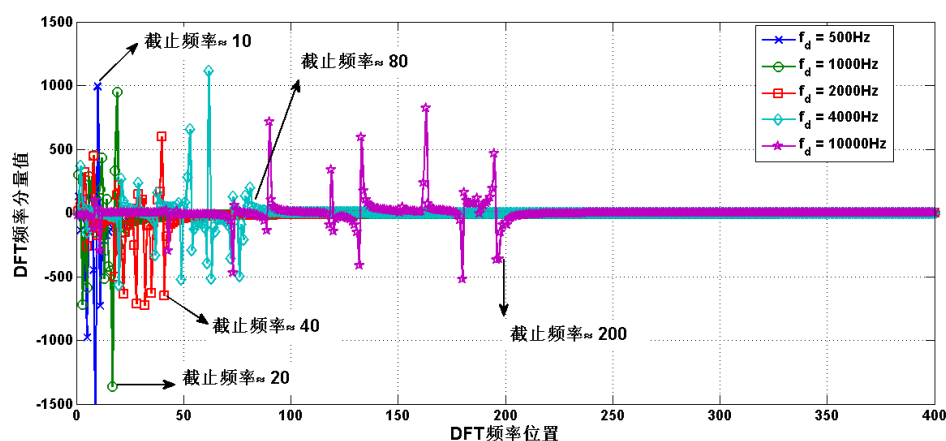


图 4.5 仿真产生不同 f_d 瑞利信道的 DFT 比较

由上图可见，截止频率出现的位置恰好和我们设置的参数一致，因此模型是有效而准确的。最后，我们将从信道响应的幅值分布特性角度来验证模型的有效性。具体做法如下：我们先将产生的 20000 个信道采样点的幅值进行统计处理，之后由这个统计数据估算出这 20000 个点的概率分布函数(PDF)，之后利用多项式插值法求解出了这个 PDF 的近似曲线。由于随机变量的概率密度函数(CDF)是

其 PDF 的导数,于是我们对插值法拟合出的多项式进行求导,得到拟合的 CDF。由于多径快速时变信道的幅值响应的 CDF 应该符合公式 4.7 所提到的瑞利分布函数,我们再利用公式 4.7 描出理论上的 CDF,将仿真产生数据推算出的 CDF 与理论值进行比较,从而验证模型的有效性。从下图中我们可以看出,上述算法产生的信道数据,其幅值响应的确是服从瑞利分布的。

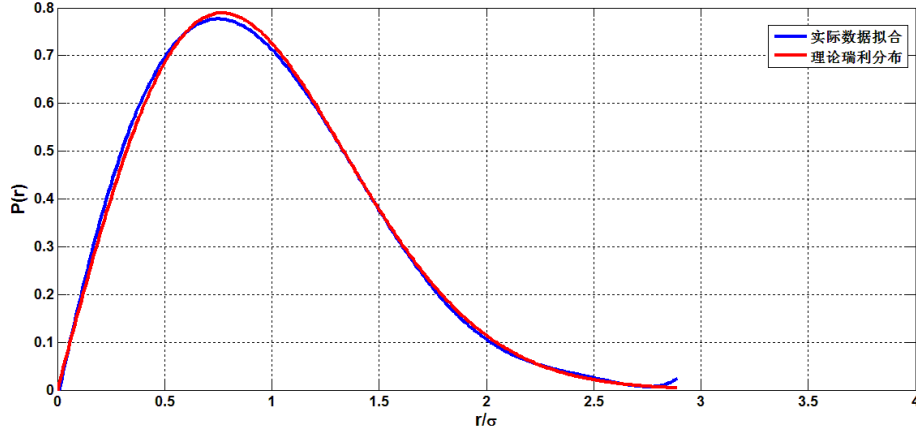


图 4.6 仿真产生瑞利信道的数据的 PDF 分析

综上所述,我们所提出的信道数据产生模型可以很好的模拟在特定的多普勒频移条件下,多径快速时变信道的特性。接下来我们将利用这个模型所产生的数据来验证第三章中提出的 BEM 信道估计算法在减少测试数据数量方面的效果,其次,利用不同的多普勒频移设置产生的信道参数来验证 4.2 中关于速度对 BEM 模型影响的两个重要猜想。

4.5 问题扩展——利用模拟信道数据验证 BEM 算法特性

在 4.4 中,我们利用数学变换后的 Clarke 模型可以对不同参数的多径信道进行模拟。由于在第三章中的分析都是基于 9 条分立路径的,因此我们在这一节首先验证我们的 BEM 模型是否适用于各分量叠加后的瑞利时间选择性衰落信道。与第三章所用的仿真方法类似,我们仍然以 K 作为自变量, NMSE 作为主要指标,利用与数据一相同的物理参数设置,我们可以得到 4.7 的仿真结果。

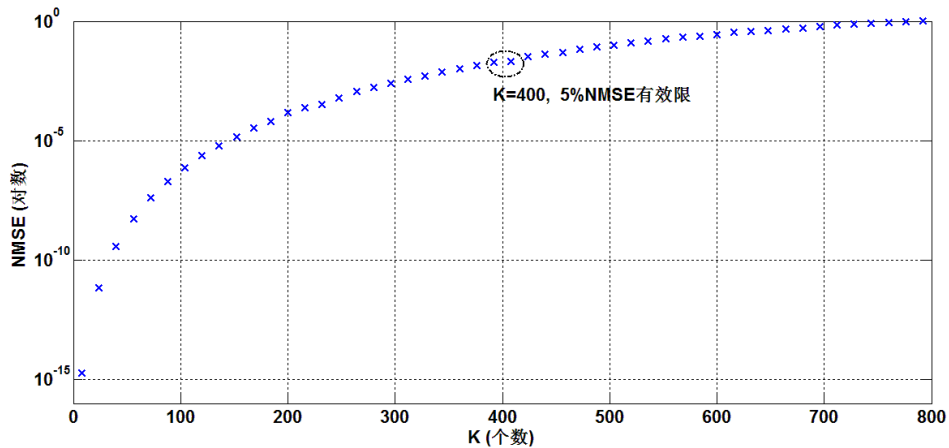


图 4.7 BEM 对仿真产生信道数据的估计 ($M=4$)

仿真结果表明，我们的 BEM 算法有效。也即在 $K < 400$ 的情况下，均可以以接近 99% 的效率来进行信道估计。从上图与图 3.5 的对比中我们也可以发现，用产生模拟信道数据的方法效果与利用真实信道数据进行仿真的效果相同，因此我们可以利用这个模拟产生信道数据的方式对 BEM 模型进行更充分的分析。

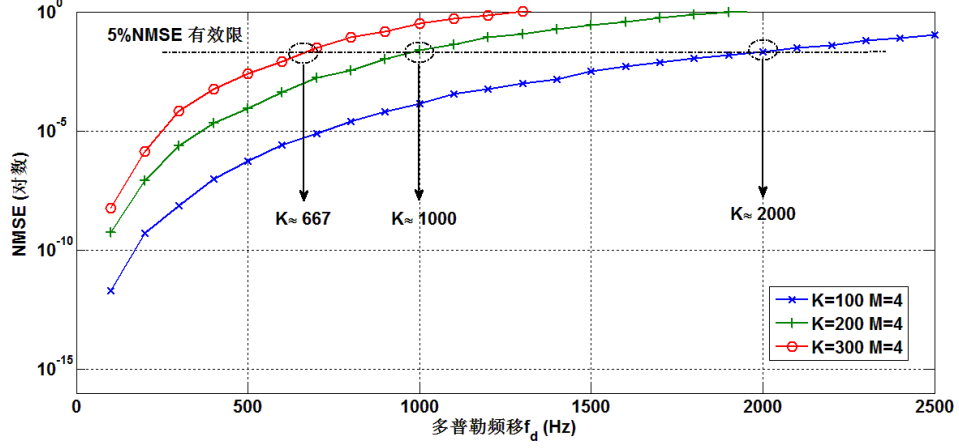


图 4.8 多普勒频移对于 NMSE 的影响

由于题目中只给出了四组不同速度下的信道参数，我们无法对多普勒频移 (或者说速度) 对于系统 NMSE 的影响进行更充分的分析。利用第四章提出的仿真信道模型，我们可以完成这一分析。选取多普勒频移 $f_d = [100:100:2500]$ ，在 3GHz 的载波频率下对应着速度 $v = [36:36:900] km/h$ 。在 $M=4$ 的情况下，我们选取三个 K 的不同取值，利用仿真信道模型产生 20000 个点的信道采样数据，之后用 BEM 进行估计。将 NMSE 与多普勒频移的对应关系在图 4.8 中展示了出来。显然，随着 f_d 的增大，NMSE 性能会变差，这验证了 4.2 中提出的猜想一。其次，从这张图上我们仍然可以看到 5%NMSE 有效限， \tilde{K}_v 值和 f_d 之间的对应关系。（如公式 4.1 中描述）。这里的具体表现为以固定的 K 插入训练序列时，通信系统所能容忍的最大多普勒频移 \tilde{f}_d 满足公式 4.1 所提供的关系。这对于实际通信系统的设计将更具有指导意义。

4.6 问题小结

综上，在第四章中我们主要用理论分析与数值仿真的方式对题目的问题 2 进行了详尽的解释与回答。结果表明，我们建立的信道模拟模型可以很好的模拟出多径时间选择性衰落信道。利用这个模型产生的信道数据，我们完善了之前提出的 BEM 算法的鲁棒性分析，猜想并验证了 5%NMSE 估计有效限与 \tilde{f}_d ， \tilde{K}_v 之间的关系。对进一步的实际通信系统设计具有理论上的指导意义。

五、基于 BEM 的基带通信系统

在一个通信系统中,我们最关心的是经过信道被衰落无线信号在接收端是否能被还原或解调出来。为了使信号能被解调,发射端在将信号送入信道前要进行数字调制、载波调制等以方便在接收端解调,信号在信道传输会因为多径传播、噪声干扰等信道不理想的缘由而衰落,接收端在接收滤波、解调的过程中要考虑这些衰落而从而更好的解调出原始信号。

信号在发射端被调制后,进过多径衰落信道传播至接收端,接收端用估计的信道参数还原出原始信号。我们在本章介绍信号调制、经多径衰落信道并在接收端解调的基本原理,并用 MATLAB 程序对该过程进行仿真。我们随机生成长度为 2×10^5 的二进制序列作为发射端的源信号,将其进行 QAM 调制并发送,根据问题 1 和问题 2 所建的模型估计的 BER 系数,由接收的信号估计发送端传出的源数据。将不同 SNR 下接收端估计的信号与原始信号对比,分别计算 BER,并就 BER 和 SNR 的关系进行分析。

在解调信号的过程中,若直接使用 LQSR 或阻尼 LQSR 算法解调数据,则每帧的解调估计都需要很多次迭代才能收敛,所以我们随后将信号解调方程做了预处理,使 LQSR 能够快速收敛,我们对预处理的原理和方法进行阐述和分析,并对预处理过的系统重新做了 BER 和 SNR 关系的分析。结果证明,经过预处理优化的算法在算法复杂度上,相对于没有预处理的系统这两方面均有显著提升。仿真结果显示,优化的算法可以在保证 BER 不恶化的情形下明显的加快解调速度,减少算法计算量。

5.1 多径衰落信道下的解调信号的基本原理

信号会因为信道不理想而使信号难以恢复甚至不能恢复,信道不理想的因素如信道的多径效应和加性高斯白噪声 (AGWN) 等。为了适应信道,信号需要进行调制。常用的如图 1.1 所示的 16QAM 调制,可以把 4 位二进制数按顺序转换为相应的复数 (如 0000 转换为 $-3+3j$)。我们设定 $\{x[n] | n = 0, 1, \dots, K\}$ 为二进制数据序列 $\{e_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$ 经 QAM 调制后的输出信号,即 $x[n]$ 是调制后的复数数据。

$x[n]$ 在传播中由于多径效应致使信号经不同信道在不同的时刻到达接收端,那么接收端接收到的信号为

$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} h_l[n]x[n-l] + \omega[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, K-1. \quad (5.1)$$

$x[n-l]$ 是 $x[n]$ 经信道 $h_l[n]$ 且延迟时间 l 的源信号。 $\omega[n]$ 是高斯白噪声。重写方程(5.1)为

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \quad (5.2)$$

其中 \mathcal{H} 为由集合 $\{h_l[n] | l = 0, 1, \dots, L-1, n = 0, 1, \dots, K-1\}$ 中元素构成的时域信道矩阵,大小为 $K \times K$, \mathcal{H} 的形式如下

$$\begin{bmatrix} h_0[0] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{L-1}[0] & h_{L-2}[0] & h_{L-3}[0] & \cdots & h_2[0] & h_1[0] \\ h_1[1] & h_0[1] & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{L-1}[1] & h_{L-2}[1] & \cdots & h_3[1] & h_2[1] \\ h_2[2] & h_1[2] & h_0[2] & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}[2] & \cdots & h_4[2] & h_3[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{L-1}[k-1] & h_{L-2}[k-1] & h_{L-3}[k-1] & h_{L-4}[k-1] & \cdots & h_1[k-1] & h_0[k-1] \end{bmatrix}$$

方程(5.2)中的 $\mathbf{y} = [y[0], y[1], \dots, y[K-1]]^T$, $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[K-1]]^T$,

$\boldsymbol{\omega} = [\omega[0], \omega[1], \dots, \omega[K-1]]^T$ 。

解调源信号 $\{x[n]\}$ 相当于求解方程组 (5.1) 或者 (5.2)。根据接收端接收信号 \mathbf{y} 和时域信道信道参数, 反解出 \mathbf{x} 或 $\{x[n]\}$ 即可得出复数形式的发射源信号。然后再根据 QMA 的映射关系, 即可还原出发送端发射的原始二进制信号。

5.2 基于 BEM 方法的多径衰落信道估计及 BER 和 SNR 关系分析

为了解调接收到的信号, 需要对信道参数进行估计。接收端相对于发送端高速运动时会导致快时变的信道, 那么解调信号就要频繁的估计信道参数。而用基扩展 (BEM) 方法可以模拟有多普勒效应的快时变信道, 从而减少信道参数直接估计次数。

根据 BEM 方法, 通过重新构造信道参数的表达形式, 并且重构信号多径传播方程 (5.1) 或者 (5.2), 仅需要 BEM 模型系数 $\{b_{lm}\}$ 和接收信号 \mathbf{y} 即可解调出。而 $\{b_{lm}\}$ 可由问题 1 和问题 2 中所建立的减少信道数据测试频度的模型计算给出。

根据 BEM 方法, 实际的信道参数 $h_l[n]$ 可以被估计为

$$\hat{h}_l[n] = \sum_{m=0}^{M-1} b_{lm} B_m[n], \quad l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.3)$$

$\hat{h}_l[n]$ 为实际信道参数 $h_l[n]$ 的估计量。 $\{B_m[n]\}$ 是所选定的基向量, 和前面问题 1 和问题 2 中选择的基是一致的。

将方程(5.3)代方程 (5.1) 可得

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} b_{lm} B_m[n] \hat{x}[n-l] + \omega[n] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} B_m[n] \sum_{l=0}^{L-1} b_{lm} \hat{x}[n-l] + \omega[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

$\hat{x}[n]$ 是接收端的解调出的信号 (复数), 即为 $x[n]$ 的估计量。根据[1]信道参数重构形式, 重写方程 (5.4) 为矩阵形式可得

$$\mathbf{y} = \sum_{m=0}^{M-1} P_m C_m \hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \quad (5.5)$$

P_m 是一个由 BEM 模型的基组成的对角矩阵，具有如下形式

$$P_m = \begin{bmatrix} B_m[0] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_m[1] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_m[K-1] \end{bmatrix}$$

C_m （如下）是一个由 BEM 模型系数组成的循环卷积矩阵

$$C_m = \begin{bmatrix} b_{0m} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{L-1m} & b_{L-2m} & b_{L-3m} & \cdots & b_{2m} & b_{1m} \\ b_{1m} & b_{0m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{L-1m} & b_{L-2m} & \cdots & b_{3m} & b_{2m} \\ b_{2m} & b_{1m} & b_{0m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{L-1m} & \cdots & b_{4m} & b_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{L-1m} & b_{L-2m} & b_{L-3m} & b_{L-4m} & \cdots & b_{1m} & b_{0m} \end{bmatrix}$$

C_m 可以通过一个对角矩阵 D_m 计算，即 $C_m = F^H D_m F$ ， $D_m(j, j) = (F[b_{0m}, b_{1m}, \dots, b_{L-1m}, 0, \dots, 0])(j)$ 。 F 是 K 维的离散傅里叶矩阵算子。而且有时域信道参数矩阵 \mathcal{H} 的 BEM 模型估计 $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{m=0}^{M-1} P_m C_m \quad (5.6)$$

虽然由 (5.6) 可以计算估计信道矩阵 $\hat{\mathcal{H}}$ 或由 (5.3) 算出信道参数 $\hat{h}_l[n]$ ，但是这对于解调出源信号 \mathbf{x} 的估计量 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是必须的，即我们可以求解线性系统 (5.5) 解出 $\hat{\mathbf{x}}$ 而不用求解 (5.6) 或 (5.3)。由 $\{b_{lm}\}$ 计算 D_m 的复杂度是 $O(MK \log K)$ ，用 LSQR 或者阻尼 LSQR 算法求解 $\hat{\mathbf{x}}$ 的复杂度是 $O((2i+1)MK \log K)$ ，其中 i 为算法迭代次数。

解调源信号需要求解方程 (5.5)，所以解调源信号可以归结为

$$\begin{aligned} \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \left\{ \left\| \sum_{m=0}^{M-1} P_m C_m \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y} \right\| \right\} \\ = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \{ \|\hat{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \} \end{aligned} \quad (5.7)$$

常用的逼近求解方法有求解发 (5.7) 的算法有：广义最小残量方法 (GMRES)、共轭梯度法 (CG)，最小二乘 QR 分解算法 (LSQR)，阻尼最小二乘 QR 分解算法 (阻尼 LSQR)。相对于其他方法，广义最小残量方法收敛速度很慢，需要很多次迭代才能达到较小的残留误差。最小二乘 QR 分解算法相当于共轭梯度法对

$\hat{\mathcal{H}}^H \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathcal{H}}^H \mathbf{y}$ 的求解，在第 i 次迭代中在 Krylov 空间中最小化 $\|\hat{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|$ 。

阻尼最小二乘 QR 分解相当于用最小二乘 QR 分解法求解

$$\begin{aligned}
& \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \{ \|\hat{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| + \sigma^2 \|\hat{\mathbf{x}}\| \} \\
& = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}} \\ \sigma^2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \right\} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

σ^2 是 Tikhovno 正则化参数。当 $\sigma^2 = 0$ 时，阻尼最小二乘 QR 算法还原为阻尼最小二乘 QR 分解法。LSQR 算法的迭代次数（收敛速度）取决于噪声水平 ω 和系数矩阵的特征值分布，GMRES 特征值集中分布在 $z=0$ 是算法收敛快，而 LSQR 算法在系数矩阵的特征值分布在 $z=1$ 时算法收敛快。由于 GMRES 算法收敛太慢，所以我们在求解(5.7)时使用 LSQR 算法。另外经过方程预处理的 LSQR 算法具有更快的收敛速度，我们在下一节中会分析其加速原理，并使用优化的 LSQR 算法求解系统，并分析 SNR 和 BER 关系。

求解源信号估计量 $\hat{\mathbf{x}}[n]$ 并转化为二进制序列 $\{\hat{e}_k\}$,与原始二进制发送数据序列 $\{e_k\}$ 相比较便可得到误比特率 BER。

信噪比（SNR）是指接收到信号和环境噪声的比率。SNR 通常可以由一比特信号能量与噪声功率之比($\frac{E_b}{N_0}$)或一个符号信号能量与噪声功率之比($\frac{E_s}{N_0}$)表征，其中 N_0 为噪声功率， E_b 为每个比特信号的能量， E_s 为每符号的能量。且这三者之间存在如下的关系。

$$\frac{E_s}{N_0}(\text{dB}) = \frac{E_b}{N_0}(\text{dB}) + 10 \log_{10} J \quad (5.9)$$

$$\frac{E_s}{N_0}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{T_{sym}}{T_{samp}} + SNR(\text{dB}) \quad (5.10)$$

公式(5.9)中 J 表示每个符号的比特数，公式(5.10)中 T_{sym} 表示符号周期，

而 T_{samp} 表示抽要周期。

我们用 MATLAB 代码仿真，随机产生的二进制长度为 2×10^5 二进制信号序列 $\{e_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$ ，先由 16QAM 对二进制信号进行数字调制，得到长度为 5×10^4 复数信号 $\{x[n]\}$ ，该复数信号经历多径衰落后在接收端被接收机采样为 $\{y[n]\}$ 的离散信号， $y[n]$ 是由多径效应下不同延时的源信号的叠加，而且还混有白噪声。我们用前面所建减少信道数据测试频度的模型估计信道参数，并由采样得到接收离散接收信号进行信号的解调。如图 5.1 所示，仿真系统采用数据文件 1 的信道采样数据，即接收机运动速度为 180km/h 下的信道采样，采用我们在第一问建立的减少信道估计次数的模型，估计出信道参数对应的基系数 $\{b_{lm}\}$ ，解调数据，恢复出的二进制序列与源信号对比的 BER 与 SNR 的关系，BER 在不同 SNR 下的仿真值如图 5.1 所示。

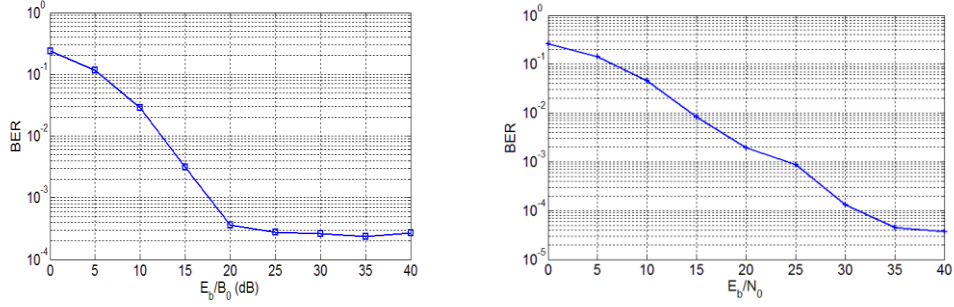


图 5.1 采用 16QAM 调制的多径衰落信道下 BER 与 SNR 关系

(终端移动速度 180km/h。左图仿真帧长 128，右图帧长 64)

根据图 5.1 的仿真结果，随着信噪比的增大，BER 逐渐减少。图 5.1 左右两图的仿真同样在 16QAM 调制下并且速度一样，但是图 5.1（左）的仿真显示， $\frac{E_b}{N_0}$ 在 0dB 到 20dB 之间，BER 显出随 SNR 增大而减少，然而 $\frac{E_b}{N_0}$ 大于 20dB 后，BER 基本位置不变。然而图 5.1（右）帧长 64 符号的却不同，虽然 128 帧长下仿真和 64 帧长下仿真的 BER 均在 $\frac{E_b}{N_0} = 20dB$ 减少到 10^{-3} 左右。但是 128 符号的帧长下 BER 不再随 SNR 增大而变化，但是 64 符号的帧长下，BER 随着信噪比在大于 20dB 的区间内增加而进一步减少。

上述现象的原因可以解释如下，BER 主要是因为白噪声和多径效应而致使解码过程出现错误而产生。SNR 非常低的时候，如仿真显示的 (0, 20) dB，噪声是影响解调的主要因素，所以 BER 会随噪声 SNR 的增大而显著减少。当信噪比增大到一定水平，例如图示的 20dB，由于每一帧的中大多的符号传播对应的信道信息是我们通过前面的模型估计出来的，并不能完全真是的描述实际信道信息，即 $\hat{\mathcal{H}}$ 是 \mathcal{H} 的估计而并不完全等于 \mathcal{H} 。所以当 SNR 提升到一定水平是，BER 会受限与信道估计的误差，从而不能进一步降低。图 5.1（左）（右）两图之所以有上述差异，是由于不论是 128 符号长的帧的所有信道信息还是 64 符号长的帧等信道信息都是由 4 个数据点估计的，所以估计 64 符号长的信道信息要不估计 128 符号长的信道信息更准确，致使帧长 64 下的 BER 能进一步减少至接近 10^{-5} 。而帧长 128 的情形下 BER 却不能继续减小，因为帧长 128 的信道信息估计相对差一些。可以注意到图 5.1（右）的 BER 在 35dB 之后也逐渐趋于平稳，这说明即使对 64 个符号的信号信息的估计也是由误差的。

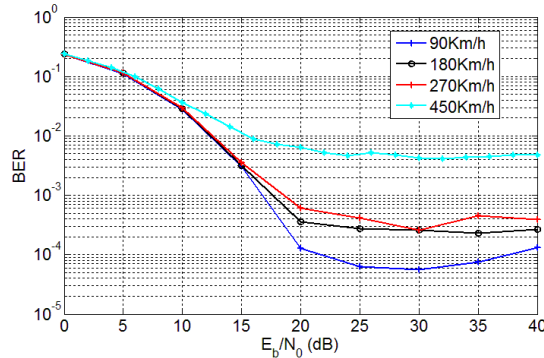


图 5.2 采用 16QAM 调制的多径衰落信道下 BER 与 SNR 关系（帧长 64）

图 5.2 是帧长度为 128 时采用 16QAM 不同速度下的 BER。我们分别仿真了运动速度为 90Km/h、180Km/h、270Km/h 和 450Km/h 多径信道下的 BER 与 SNR 的关系。首先，随着 SNR 的增大，该图显示了不同运动速度下 BER 相同的变化趋势，区别在于它们趋近的值不同。该图进一步验证了我们上边分析的结论，在 20dB 前提升信噪比能显著降低误比特率，明显提升系统的性能。四种不同的运动速度下，其 BER 均在 20dB 后趋于稳定而不再发生较大变换。另外，对比图 5-2 中不同速度的 BER，可以看出较小的运动速度下其对应的 BER 能在 20dB 后趋近于一个较小的误比特率。这说明，当信道估计周期确定时，运动速度越大则误比特率越高。

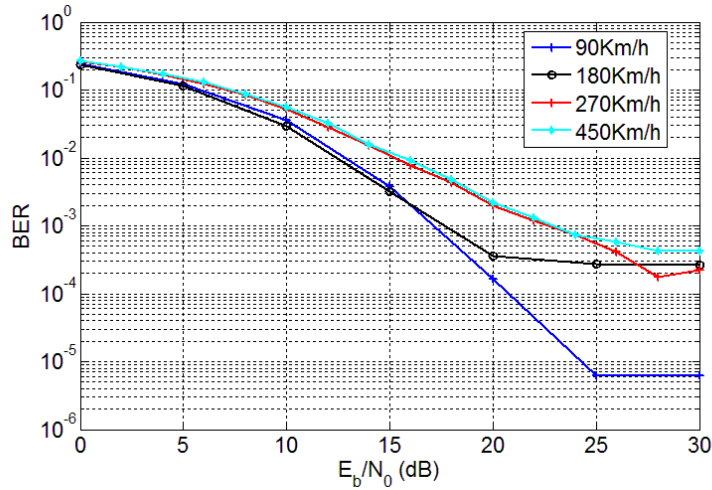


图 5.3 采用 16QAM 调制的多径衰落信道下 BER 与 SNR 关系（帧长 128）

图 5.3 采用 16QAM 调制且帧长 128 的仿真结果，与图 5.2 有着类似的趋势和结论。图 5.3 和图 5.2 中的仿真的唯一差别是采用的每帧的符号数目不同，分别是 128 和 64。可以看出在不同运动速度和不同帧长度下，BER 的变化趋势是类似的，即 BER 会在信噪比较小好时随着 $\frac{E_b}{N_0}$ 增大而显著减小，并在 20dB 左右开始趋于稳定，此后便稳定在一个特定 BER 值附近。对比图 5.3 和图 5.2 还可以发现，运动速度相同而帧长不同时，较小的帧长明显具有小的 BER。这种现象的原因类似于图 5.1 的分析中的一点：我们用常量个数（仿真中用的是 4 个数据）去估计多数个信号符号的信道传输参数，对图 5.3 而言是用 4 个点估计出 64 个符号的信道传输参数，对图 5.2 而言是用 4 个点估计 128 个符号的信道传输参数，所以对图 5.2 中仿真估计的信道误差会大于对图 5.3 中仿真估计的信道误差。因此，同样速度下且其他参数相同的情况下，固定参考符号数目，帧长度越大 BER 就会越大。

5.3 算法的优化

在 5.2 节中我们 SNR 和 BER 的关系做了仿真和研究，然而在求解系统(5.5)即求解源信号估计量 \hat{x} 的过程中，发现不论是 LSQR 还是阻尼 LSQR 都需要较多次迭代才能收敛。太大的迭代次数需要较大的运算量，对于实际系统而言运算量过大是不实际的。此外，LSQR 和阻尼 LSQR 都具有半收敛特性，即算法刚开始的几次迭代中每次迭代收敛幅度都很大，然后随着迭代次数的进一步变大，算法收敛变慢甚至停止收敛，在这种情况下如果继续迭代，只会放大系统噪声，并不

能取得更优的结果。如果在求解线性系统前，先针对系统方程做一些预处理，那么就能加速 LSQR 或 LSQR 的收敛速度，降低算法复杂度进而减少运算量[1]。

LSQR 算法的最优化迭代次数是和噪声大小以及时域信道参数矩阵的特征值分布直接相关的。噪声越大 LSQR 算法最优化迭代次数越大。时域信道参数矩阵的特征值分布越集中，LSQR 算法最优化迭代次数越小。

根据[1]，我们对方程（5.5）做预处理，以加速 LSQR 的收敛。引入 \mathbf{x}^p 和 D_m 使

$$\mathbf{x}^p = C_0 \hat{\mathbf{x}} \quad (5.7)$$

那么方程（5.5）可以变为

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m C_m \hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m C_m C_0^{-1} \mathbf{x}^p + \boldsymbol{\omega} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m F^H D_m^p F \mathbf{x}^p + \boldsymbol{\omega} \\ &= \widehat{\mathcal{H}}^p \mathbf{x}^p + \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中 $D_m^p = D_m D_0^{-1}$ ， $\widehat{\mathcal{H}}^p$ 是预处理后的时域信道参数矩阵，用 LSQR 求解方程（5.8）比求解（5.5）具有更快的收敛速度。因为没加预处理的算法和加了预处理的算法的复杂度是在同一个数量级的，但是计算量主要在 LSQR 对方程的求解上（复杂度为 $O((2i+1)MK \log K)$ ），所以 LSQR 较快的收敛能显著减少其在解调信号时的迭代次数，从而减少计算量。

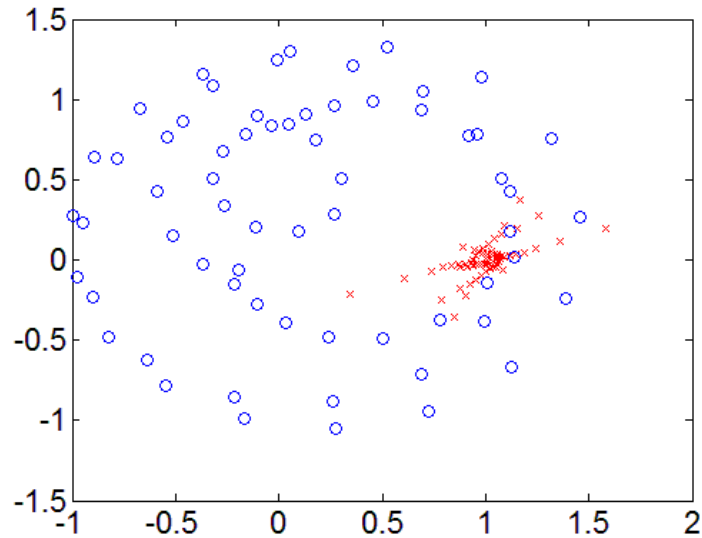


图 5.4 预处理前后的时域信道参数矩阵的特征值分布对比
（蓝色 ‘o’ 为没有预处理的分布，红色 ‘x’ 是有预处理的分布）

我们分别观察问题 1 和问题 2 中模型估计出的 $\hat{\mathcal{H}}$ 的特征值分布和 $\hat{\mathcal{H}}^p$ 的特征值分布情况，如图 5.4 所示，没有预处理的 $\hat{\mathcal{H}}$ 的特征值分布明显很零散，而预处理后的 $\hat{\mathcal{H}}^p$ 的特征值分布相对集中地分布在 $z = 1$ 附近。

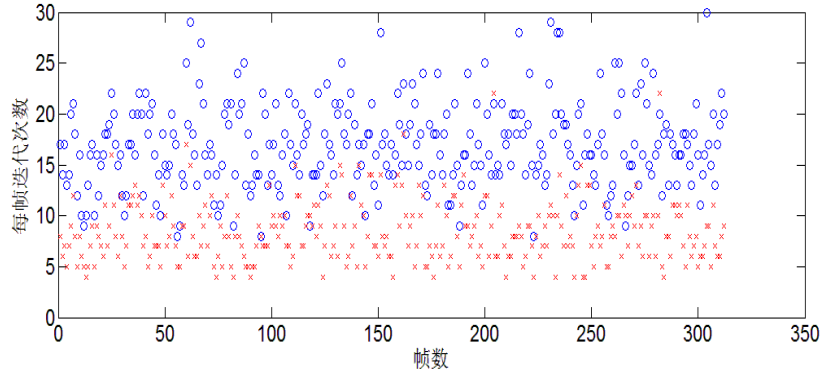


图 5.5 每帧迭代次数的（蓝色‘o’为没有预处理就解调原始信号，红色‘x’是进过预处理的情形）

解调信号时用 LSQR 算法的收敛速度取决于噪声和信道矩阵的特征值分布，通信信道的噪声不能控制，但是可以通过预理解调方程来加 LSQR 速系统的收敛速度，达到快速解调信号的目的。

我们将 20000 个原始数据分成 300 多段，使用在问题 1 中提出的模型估计信道参数，用估计的信道参数解调接收信号 \mathbf{y} 。系统的 SNR 设定为 30dBs。图 5.5 显示了解调过程中的迭代次数分布，蓝色的‘o’为没有预处理就解调原始信号是未经过解调模型预处理的迭代次数，红色‘x’是进过预处理的情形解调模型的迭代次数。可以看出未经过预处理的迭代次数大约是经过预处理的迭代次数的 2~3 倍。我们进一步仿真实解调这 20000 个离散信号的计算量，对比优化前后解调系统的算法复杂度，用计算量表示优化前后的差别。如图 5.6，蓝色线条是没有优化的累计计算量，绿色线条是优化系统的累计计算量，可以明显可得看出，随着帧数在时间上的增多，优化过的解调系统显著地减少了解调的计算量。

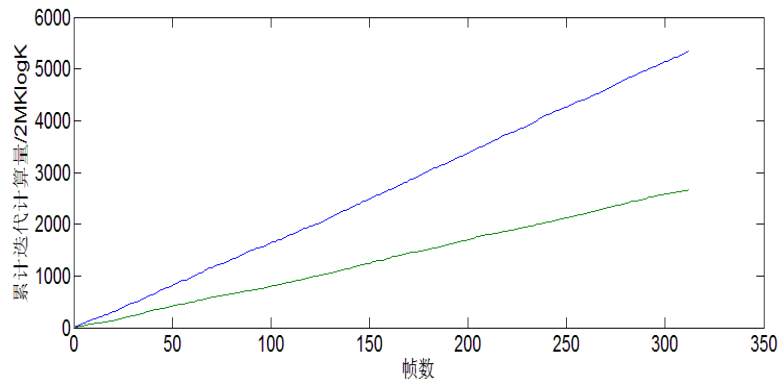


图 5.6 解调原始数据所需的累计迭代计算量

（蓝色线条是未经优化的累计计算量，绿色线条是优化系统的累计计算量）

理论上讲，多径衰落的信道响应服从瑞利分布。根据[13]，理论上的经 M-QAM 调制的信号经瑞利衰落信道后的 BER 为

$$P_e = \frac{M-1}{M \log_2 M} \left(1 - \sqrt{\frac{3\gamma \log_2 M / (M^2 - 1)}{3\gamma \log_2 M / (M^2 - 1) + 1}} \right) \quad (5.9)$$

公式 (5.9) 中 $\gamma = \frac{E_b}{N_0}$, M 为调制阶数。

我们用 MATLAB 仿真优化后的 LSQR 算法 (有预处理过程) 下 BER 与信噪比的关系。在 180km/h 和 90km/h 的速度下, 分别对理论的 BER 和仿真的 BER 进行对比分析。此外我们还分析了不同调制方式下对 BER 的影响。

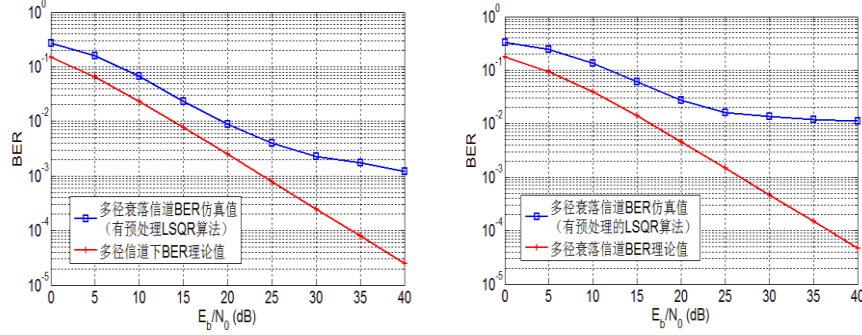


图 5.7 运动速度 180km/h 时多径衰落信道下 BER 的仿真值和理论值

(解调信号采用了有预处理过程的 LSQR, 左图采用 4QAM 调制, 右图采用 16QAM 调制)

图 5.7 显示了在 180km/h 的运动速度下, 4QAM 和 16QAM 的调制方式下理论以及仿真的 BER 和 SNR 的关系。可以看出调制阶数越高, 在同样信噪比水平下 BER 也越高, 即给定同样的信噪比则 16QAM 调制方式下的 BER 明显比 4QAM 调制方式下的 BER 更高。图 5.8 也验证了这一现象。这是因为阶数高的 QAM 调制方式下, 其星座图的相邻信号的位置的距离更近, 信号经信道衰落并受到干扰后就更容易和相邻信号混淆, 因而更容易导致解调信息错误。图 5.7 和图 5.8 都表明, 仿真的 BER 会比理论的 BER 稍大一些。

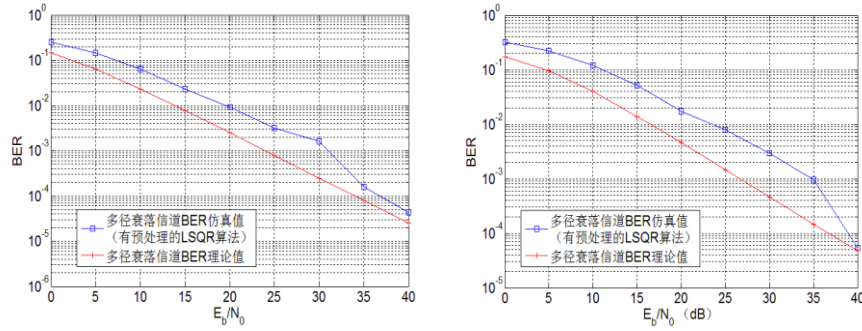


图 5.8 运动速度 90km/h 时多径衰落信道下 BER 的仿真值和理论值

(解调信号采用了有预处理过程的 LSQR, 左图采用 4QAM 调制, 右图采用 16QAM 调制)

对比图 5.7 和图 5.8 的仿真结果, 可以发现较高的运动速度会致使较高的 BER。特别当 E_b/N_0 较大时, 运动速度对通信系统影响越大, 这时 BER 就会增大很多。这验证了大的移动速度会造成较严重的信道选择性衰落, 要想保证较低的 BER, 就要增加信道估计频率或者减少估计周期。而我们在仿真中固定了估计周期, 所以同等条件下图 5.7 显示的 180km/h 仿真结果要比图 5.7 的 90km/h 仿真的 BER 要差。图 5.7 和图 5.8 的仿真结果也进一步验证了我们之前结论。

参考文献

- [1] Tomasz Hrycak, etc. Low Complexity Equalization for Doubly Selective Channels Modeled by a Basis Expansion. IEEE Trans. Signal Processing, 2010,58(11):5706-5719.
- [2] Saptarshi Das. Mathematical Methods for Wireless Channel Estimation and Equalization. Dissertation, University of Vienna, 2009.
- [3] 吴伟凌等, 移动通信原理 (第 2 版), 电子工业出版社, 2009.1.
- [4] 樊昌信等, 通信原理 (第 6 版), 国防工业出版社, 2013.8.
- [5] Yahong R. , etc. Improved Models for the Generation of Multiple Uncorrelated Rayleigh Fading Waveforms. IEEE Communications Letters, 2002,6(6):256-258.
- [6] 3rd Generation Partnership Project, Technical Specification, 36.101(3GPP TS 36.101), v8.0.0, 2007.12
- [7] Tang Z, Cannizzaro R C, Leus G, et al. Pilot-assisted time-varying channel estimation for OFDM systems[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2007, 55(5): 2226-2238.
- [8] Tse D, Viswanath P. Fundamentals of wireless communication[M]. Cambridge university press, 2005.
- [9] 肖筱南, 赵来军, 党林立. 现代数值计算方法[M]. 北京大学出版社, 2003.
- [10] Kelly, Susan E. "Gibbs Phenomenon for Wavelets." Applied and Computational Harmonic Analysis 3, 1995
- [11] T. Zemen and C. F. Mecklenbrauker. Time-variant channel equalization via discrete prolate spheroidal sequences. In Signals, Systems and Computers, 2003. Conference Record of the ThirtySeventh Asilomar Conference on, volume 2, pages 1288–1292, November 2003.
- [12] T. Zemen and C. F. Mecklenbrauker. Time-variant channel estimation using discrete prolate spheroidal sequences. Signal Processing, IEEE Transactions on, 53(9):3597–3607, September 2005.
- [13] Cho Y S, Kim J, Yang W Y, et al. MIMO-OFDM wireless communications with MATLAB[M]. John Wiley & Sons, 2010.