

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

学 校 华北电力大学

参赛队号 10054013

队员姓名 1. 于 钊

 2. 陈鹏伟

 3. 崔 岩



第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目 数控机床加工优化控制

摘 要：

为了实现加工刀具运动的优化控制，本文对数控机床加工优化控制问题进行了研究。首先，基于矢量转接模型，分别建立了折线与直线圆弧段加工优化控制模型；其次，考虑到瞬时启动速度与瞬时启动加速度的存在，对矢量转接模型进行了修正并构建了优化控制修正模型；最后，为了协调加工稳定性与加工效率，借鉴正弦曲线微积分特性，建立了基于正弦函数加减速法的加工优化控制模型。

针对问题一，采用最小偏差插补法作为直线段加工方法，并在矢量转接模型的基础上，分别对折线无误差加工、指定误差加工方式分别进行了分析与建模。在讨论直线段运动阶段划分的前提下，设计了折线加工的通用控制算法流程。以 90° 与 135° 折线作为算例，分析了各坐标轴速度变化情况。在转接数上对指定误差优化控制模型进行了改进，将转接数由二次转接推广到了多次转接，建立了多转接加工优化控制模型。

针对问题二，基于圆弧段构成、进给速度、误差限制分析了圆弧段加工的合理方式，并建立了相应的圆弧段加工优化控制模型。考虑到直线圆弧段相切与不相切两种工况，基于指定误差折线加工优化控制模型，进行了直线圆弧段的加工优化控制建模。通过给定的圆角正方形示例对模型及设计算法进行了合理性验证，比较了分别采用 S 型加工曲线与非 S 型加工曲线的加工效率（用时 86.2779s 与 84.5036s），结果显示 S 型加工曲线效率稍差。

针对问题三，考虑到瞬时启动速度与瞬时启动加速度，对矢量转接模型进行了修正，并将其应用于折线与圆弧段加工优化控制模型中。圆角正方形示例验证结果表明，此时加工效率得到提高（用时 81.9055s）。

针对问题四，借鉴正弦曲线微积分特性，提出了基于正弦函数的加减速方法，该方法具有更为统一的构造形式，并保证了加加速度变化的连续性 & 速度变化的平缓性。基于该加减速方法，以直线段加工为例建立了加工优化控制模型，通过约束加速时间或限制加加速度幅值，可协调加工稳定性与加工效率。

关键词：数控车床；矢量转接；正弦函数；S 型曲线

一、问题重述

1.1 问题背景

数控加工技术目的在于根据所给定的加工路径提前进行规划，保证速度的平滑过渡，避免因启动和停止时速度变化太大引起失步、震荡、超程现象，减少对机床的伤害冲击。目前，正朝着高速高效高精度方向发展，高速加工要求机床各运动轴都能够在极短的时间内达到高速运行状态并实现高速准停，研究开发数控加工刀具运动满足高速、高精度要求的、有效柔性加减速控制方法，已成为现代高性能数控系统研究的重点^[1]。

基于计算机的数控系统的工作原理是：首先通过计算机组成的数控编程系统对读入的零件信息进行存储和译码等处理后通过输入装置将它们传输给加工控制系统，然后由数控系统对输入的指令进行信息处理和轨迹插补计算出数控机床各坐标轴方向上刀具运动的控制信息^[2]。

上述环节的难点在于数控机床对加工刀具在三个坐标轴方向的运动，实行的是分别控制，但显然它们之间必须相互协调；加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，因此加工刀具的运动轨迹一般与工件几何形状之间肯定存在误差；每一机床都有对应的分辨率，上述任一直线段对应的坐标增量记为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ，则 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的长度一定都是分辨率的整数倍，故加工刀具的运动方向受限制，并影响到加工刀具在三个坐标轴方向上的速度、加速度；要求机床运动平稳，速度光滑、加速度连续等^[3]。

加工刀具运动的优化控制则是在数控机床所提供的精度、速度、加速度等限制条件下，寻求对机床刀具在各坐标轴方向上的运动进行合理控制，进而优化其加工效率^[4]。类似方程式赛车，有经验的车手可根据赛道特点及赛车的性能（如速度、加速度等）对赛车的行进路线及过程进行优化。而对于一般曲线加工，加工控制算法就是在满足误差要求的条件下，通过插补的方法，找出若干小直线段组成加工刀具的运动轨迹，同时计算出刀具对应的运动速度、加速度。

目前，数控加工对单个坐标运动的控制方法有多种，其中较有代表性的是基于 S 型曲线的加减速控制方法^[5]。其特点是将加减速过程分为 7 个阶段（每一阶段对应的加加速度为常量）：加加速段、匀加速段、减加速段、匀减速段、加减速段、匀减速段、减减速段，从而渐变地控制各段的加速度使机床运动速度按 S 型曲线形式平滑变化，以保证速度光滑，加速度连续，在一定程度上增强机床运行的平稳性。此外，在实际运动过程中电机启动时允许有一个瞬时启动加速度 a_0 ，即认为加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度 a_0 ，或瞬间从 a_0 下降到 0，速度也有类似功能，这样整个加速过程及速度的变化规律有一些改变^[6]。

1.2 问题提出

假设不考虑刀具尺寸大小及刀具磨损，加工刀具抽象为一点。希望同学们在深入研究数控加工优化控制的基础上，完成以下工作：

问题一：设加工型线为折线，在指定加工误差的条件下，建立实时加工优化控制算法，当相邻两折线段夹角为 90° 和 135° 时，讨论通过折线交点时对各坐标运动速度的变化；

问题二：设加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

问题三：在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

问题四：结合前 3 问，分析 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型（如刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等）。

二、问题分析

本文研究的是工件数控加工控制算法，属于非线性优化问题，涉及立体几何、牛顿力学等内容。

问题一，针对加工型线为折线的加工优化控制问题。影响折线加工效率与精度的因素主要有两方面：1) 直线段加工效率与精度；2) 转折点转接效率与精度。前者受直线插补算法影响，后者受转接轨迹设计影响且为主要因素。在无误差要求情况下，加工的实际路径必须完全与加工型线一致，当且仅当通过转折处的进给速度降至足够低时才能保证零误差（加工算法误差）。在有允许误差存在的情况下，实际加工路径可以不经过转折点，进给速度约束有所提升，则有效减少加工时间。在该加工轨迹下，实际加工路径转折点处是由若干段过渡直线段组成，且过渡直线段越多，每次进给速度的偏转角度就越小，偏转时车床能够承受的进给速度就越大，从而减少了转接通过时间，但会导致车床机械损耗及加工成本相应增加。因此在指定加工误差的范围内，优化算法必须能够根据折线夹角的大小选择最优的控制方法，尽量少使用过渡直线段^[7]。

问题二，针对加工型线为直线圆弧段的加工优化控制问题。影响直线圆弧段加工效率与精度的因素主要有两方面：1) 直线段与圆弧段转接效率与精度；2) 圆弧段加工效率与精度。对于前者，与问题一有相承接的关系，而后者则受圆弧段半径、圆心角及分段数的影响，是制约直线圆弧段加工效率与精度的重要因素。理论上，当圆弧段所含分接直线段数目越多，则其对转接进给速度的限制则越低，而相应的会增加对机床的机械损耗。因此，在指定加工误差与转接次数限制内，需要建立相应的加工优化控制模型，以实现加工效率与精度的优化目标^[8]。

问题三，针对实际加工时存在瞬时启动加速度与瞬时启动速度的加工优化控制问题。实际运动过程中电机启动时允许有一个瞬时启动加速度 a_0 ，即认为加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度 a_0 ，或瞬间从 a_0 下降到 0，速度也有类似功能。因此，在机床运动轨迹与运动参数可以依托瞬时启动加速度与瞬时启

动速度产生更为特殊与灵活的优化设计，从而需要将其纳入问题一与问题二建立的优化控制模型中，使之更为贴近实际工况。

问题四，S 型曲线加工方法在理论上能够提高工件加工过程的平稳性，从而利于避免因启动和停止时速度变化太大引起失步、震荡、超程现象，但同时也会一定程度上降低算法的加工效率。因此需要建立相应的协调控制模型以平衡两者，或在精度与效率的共同约束下，使速度与加速度变化更为平稳，尤其是在电机启动与停止时刻。

三、模型假设及符号说明

3.1 模型假设

- 假设 1：微线段各顶点转接速率不变，即不考虑速率突变。
- 假设 2：忽略直线段自身因插补加工而导致的误差，即认为直线段加工误差相较于折线与圆弧段加工误差，可以忽略。
- 假设 3：刀头各进给方向最大允许加速度相同，受车床耐受力限制。

3.2 符号说明

表 1 部分符号说明

符号	符号说明
ΔT	插补周期
A_{\max}	机床所能承受的最大加速度
$V_{\text{Seg_max}}$	转接点最大进给速度
ε	指定加工误差
α	折线或直线段与圆弧段夹角
γ	圆弧段弧心角
v_{Limit}	转接点处速度限值
v_{\max}	最大进给速度
R	圆弧段相应半径

四、模型 I：折线加工优化控制模型

4.1 折线加工建模

4.1.1 直线最小偏差插补法

直线段加工是折线加工的基础，选用最小偏差插补法^[9]进行直线段加工。

以二维坐标系为例，设 x_e / y_e 为直线段在 xy 坐标轴的分量比。为获得插补最小偏差，对进给方向做如下的规定：

- 1) 当 $x_e \geq y_e$ 时，向 x 方向或对角线方向（ 45° 方向）中偏差小的方向进给；
- 2) 当 $x_e \leq y_e$ 时，向 y 方向或对角线方向中偏差小的方向进给。

以 $y = kx (0 < k < 1)$ 为例，由于 $x_e / y_e = 1/k$ 且 $0 < k < 1$ ，则插补方向为 x 轴方向或对角线方向中偏差小的方向进给，方向记为 $+\Delta x$ 、 $(+\Delta x, +\Delta y)$ 。如下图所示， $O(x_i, y_i)$ 为插补起始点， A 是在 $+\Delta x$ 方向上单步插补后的点， B 是 x 方向上单步插补后对应的实际轨迹上的点， C 是在 $(+\Delta x, +\Delta y)$ 方向上单步插补后的点，具体如图 1 所示。

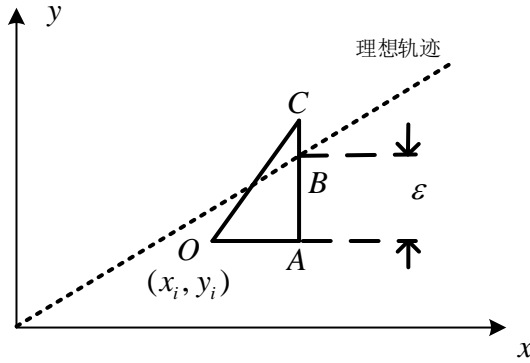


图 1 最小偏差法插补原理示意

则单步偏差函数为：

$$F(\Delta x) = y_A - y_B = y_i - k(x_i + 1) = (x_e y_i - y_e x_i - y_e) / x_e \quad (1)$$

$$F(\Delta x, \Delta y) = y_C - y_B = y_i + 1 - k(x_i + 1) = (x_e y_i - y_e x_i - y_e - x_e) / x_e \quad (2)$$

由于计算时只关注偏差函数的符号，与数值大小无关，因此，可保留分子部分作为判别式

$$f = F(\Delta x) + F(\Delta x, \Delta y) = 2F + x_e - y_e \quad (3)$$

式中， $F = x_e y_i - y_e x_i$

由图可知 $F(\Delta x) < 0$ ， $F(\Delta x, \Delta y) > 0$ ，通过判别函数的符号即可以选择进给方向。

- 1) 若 $f > 0$ ，则 $|F(\Delta x)| < |F(\Delta x, \Delta y)|$ ，故进给 Δx ；
- 2) 若 $f \leq 0$ ，则 $|F(\Delta x)| \geq |F(\Delta x, \Delta y)|$ ，故进给 $\Delta x, \Delta y$ 。

此分析方法同样适用于其他象限的分析，可在插补过程中的保证偏差最小。

4.1.2 直线段运动阶段划分

对长度 L 直线段加工方法进一步讨论，以 7 阶段 S 型加工曲线加工过程为例，设起始速度与末端速度均为 v_0 ，加加速度 J_{const} ，最大加速度 a_{max} ，如图 2 所示^{[10][11]}。

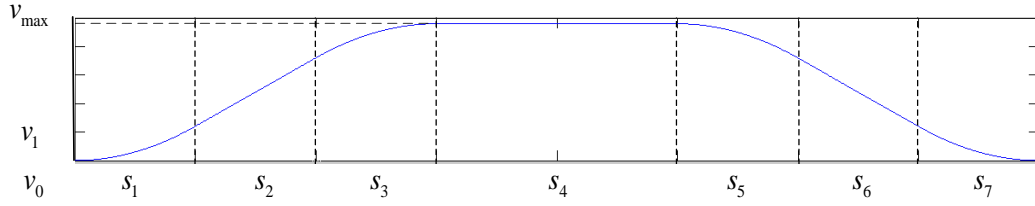


图 2-7 阶段 S 型曲线加工分段示意

则图中，

$$s_1 = s_7 = v_0 \frac{a_{\max}}{J_{\text{const}}} + \frac{a_{\max}^3}{6J_{\text{const}}^2} \quad (4)$$

$$s_2 = s_6 = \frac{a_{\max}(V_{\max} - 2)}{2J_{\text{const}}} - \frac{a_{\max}^3}{2J_{\text{const}}^2} + \frac{v_0 V_{\max}}{a_{\max}} + \frac{(V_{\max} - \frac{a_{\max}^2}{J_{\text{const}}})^2}{2a_{\max}} \quad (5)$$

$$s_3 = s_5 = \frac{v_{\max} + v_0}{2} \left(\frac{a_{\max}}{J_{\text{const}}} + \frac{V_{\max}}{a_{\max}} \right) - s_1 - s_2 \quad (6)$$

当 $L < 2s_1$ ，可仅选用加加速与减减速 2 个过程； $L < 2s_1 + 2s_2$ 可选用加加速、匀加速、匀减速与减减速 4 个过程； $L < 2s_1 + 2s_2 + 2s_3$ 可选用加加速、匀加速、减加速、加减速、匀减速与减减速 6 个过程；否则选择完整 7 个过程。

4.1.3 矢量转接模型

对于连续微线段，最大进给速度受相邻线段的夹角限制，对于曲线则受制于曲线的曲率，常因设计者考虑的因素不同而有较大差异。对于折线加工，需要考虑速度约束条件，即具体的空间点上允许的最大进给速度。J.Hu 等设计了矢量转接模型^[12]，为目前最广泛应用的微线段转接方法。设定转接前后到头进给速率不变，以机床所能承受的最大加速度在插补周期范围内所允许的最大速度变化量给出连续微线段各顶点处的进给速度满足^[13]

$$2V_{\text{Seg}} \cos(\alpha/2) \leq A_{\max} \Delta T \quad (8)$$

则最大进给速度

$$V_{\text{Seg_max}} = \frac{A_{\max} \Delta T}{2 \cos(\alpha/2)} \quad (9)$$

式中， ΔT 为插补周期， α 为空间两直线的夹角， A_{\max} 为机床所能承受的最大加速度，若取 $\Delta T = 1\text{ms}$ ， $A_{\max} = 0.6\text{m/s}^2$ ，则插补周期内最大速度变化量产生的位移为

$$\Delta S = \frac{1}{2} A_{\max} \Delta T^2 = 3 \times 10^{-4} \text{mm} \quad (10)$$

ΔS 一般小于机床控制分辨率，因此，可对该位移偏移在优化控制中予以忽略。

4.1.4 无加工误差控制建模

当顶点进给速度满足式（1）所述速度约束条件时，即

$$V_{Seg-O} \leq V_{Seg-max} = \frac{A_{max} \Delta T}{2 \cos(\alpha/2)} \quad (11)$$

折线加工可以实现无算法误差加工（机床本身加工误差仍存在），为了示意方便，且以 xy 二维坐标系统为例，具体如图 3 所示。

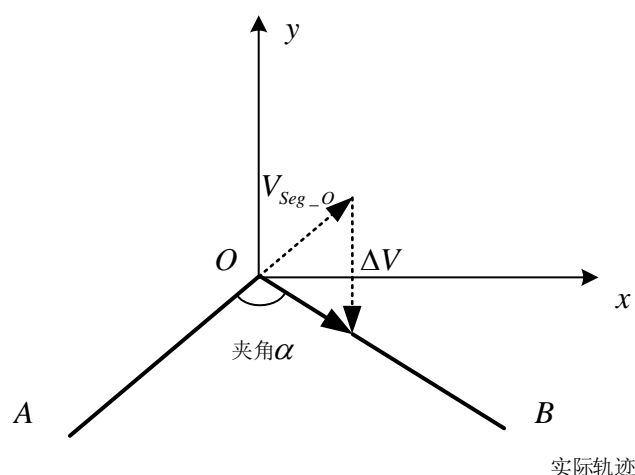


图 3 无算法误差加工轨迹示意

对某折线进行加工， $AO = L_1$ ， $OB = L_2$ ，若仅考虑匀加速、匀速及匀减速过程，且加速度大小为恒定值，当 L_1, L_2 足够大时，刀头进给速率示意如图 4 所示。

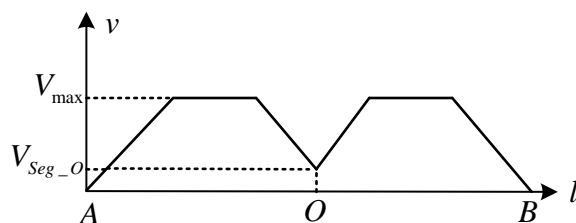


图 4 无算法误差加工刀头速率变化示意

可以发现，在插补周期一定时，机床所能承受的最大加速度是限制无误差（算法误差）转折控制算法效率的关键因素，该控制方式效率较低但具有较高精度。

4.1.5 指定加工误差控制建模

在指定加工误差的条件下，以若干暂态过渡线段代替直接转接方式，能够保证转接的刀头进给速率，既而能在加工误差要求范围内，尽可能提高整个工件的加工速率。为了简化分析与加工方便的需要，选择 2 次转接，即以一微线段作为暂态过渡，如图 5 所示。

$$t_4 = \frac{d}{v_{Seg}} \left(\frac{1}{\tan \theta_1} + \frac{1}{\tan \theta_2} \right) \quad (17)$$

5) L_2 匀加速过程

$$t_5 = \frac{v_{max} - v_{Seg}}{A_{max}} \quad (18)$$

6) L_2 匀速过程

$$t_6 = \frac{s_6}{v_{max}} \quad (19)$$

$$s_6 = L_2 - \frac{v_{max}^2}{2A_{max}} - \frac{v_{max}^2 - v_{Seg}^2}{2A_{max}} - \frac{d}{\sin \theta_2} \quad (20)$$

7) L_2 匀速过程

$$t_7 = \frac{v_{max}}{A_{max}} \quad (21)$$

考虑到转接点的速度限制，建立其以下约束条件：

$$\begin{cases} 2v_{Seg} \sin \frac{\theta_1}{2} \leq A_{max} T \\ 2v_{Seg} \sin \frac{\theta_2}{2} \leq A_{max} T \\ \theta_1 + \theta_2 = \pi - \alpha \\ v_{Seg} < v_{Limit} \end{cases} \quad (22)$$

式中， v_{Limit} 转接点处速度限值。

v_{Seg} 表示的前进方向的合速度，各坐标轴速度变化需要根据轨迹前进方向分解至各坐标轴，设刀具起始点坐标记为 $A_0(x_0, y_0, z_0)$ ，转接点坐标 $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ，终点坐标 $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ，可得初始方向矢量与转接后方向矢量分别为

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{cases} \quad (23)$$

转接角度为

$$\cos \theta = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (24)$$

设转接前刀头速度矢量为 $\vec{v}_{Seg} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ ，转接后刀头为 $\vec{v}'_{Seg} = (v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z})$ ，则由式 (25) 与式 (26)

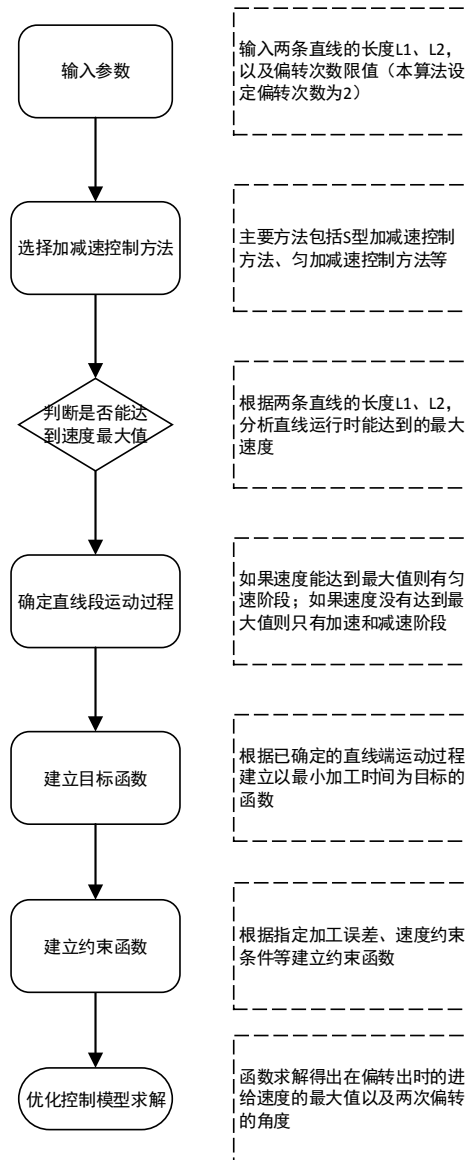
$$\begin{cases} v_{seg} = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} \\ \frac{v_{1x}}{a_x} = \frac{v_{1y}}{a_y} = \frac{v_{1z}}{a_z} \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} v_{seg} = \sqrt{v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + v_{1z}'^2} \\ \frac{v_{1x}'}{b_x} = \frac{v_{1y}'}{b_y} = \frac{v_{1z}'}{b_z} \end{cases} \quad (26)$$

可以求得转接前后各坐标变化情况，并同样适用于多次转接情况的分析计算。

4.1.6 折线加工控制算法流程设计

根据前述建立的两次转接加工优化控制数学模型，建立起加工控制算法，具体流程如图 6 所示。



需要指出，上述折线加工参数设计过程中未涉及到空间位置参数，而仅同过几何参数，因此在实际加工中，还需将求解出的各段设计速度及进给距离转换至 xyz 坐标系，具体可参考式 (23) 至式 (26)。

4.2 模型求解与改进

4.2.1 模型求解

取刀具插补周期 $\Delta T = 10ms$ ，最大进给速度 $V_{\max} = 0.1m/s$ ，最大加速度 $a_{\max} = 0.6m/s^2$ ，指定加工误差 $\varepsilon = 1\mu m$ ，设两条直线段的长度分别为 $L_1 = 0.1m$ ， $L_2 = 0.1m$ 。

1) 无误差控制与制定加工误差控制对比

取夹角为 90° ，其速率变换情况如图 7 所示。

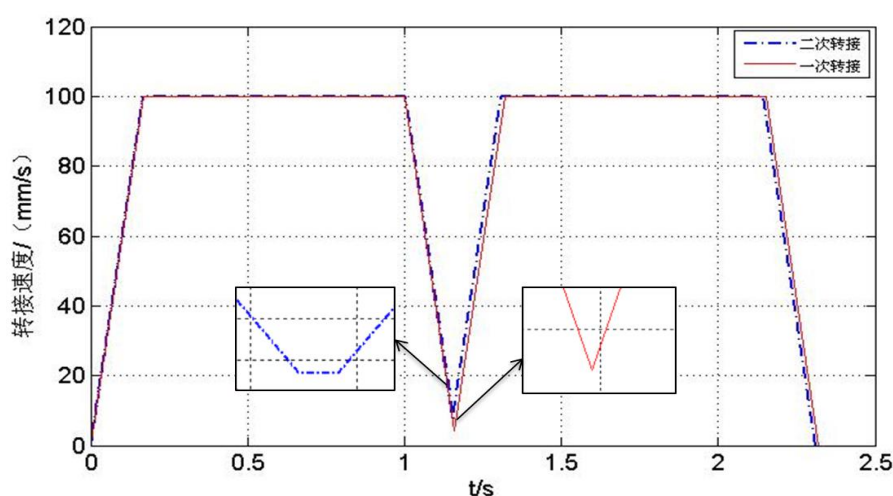


图 7 无误差控制与指定加工误差控制效率对比

2) 90° 与 135° 夹角对进给速度影响对比

分别取折线夹角为 90° 与 135° ，其控制算法加工效率如图 8 所示。

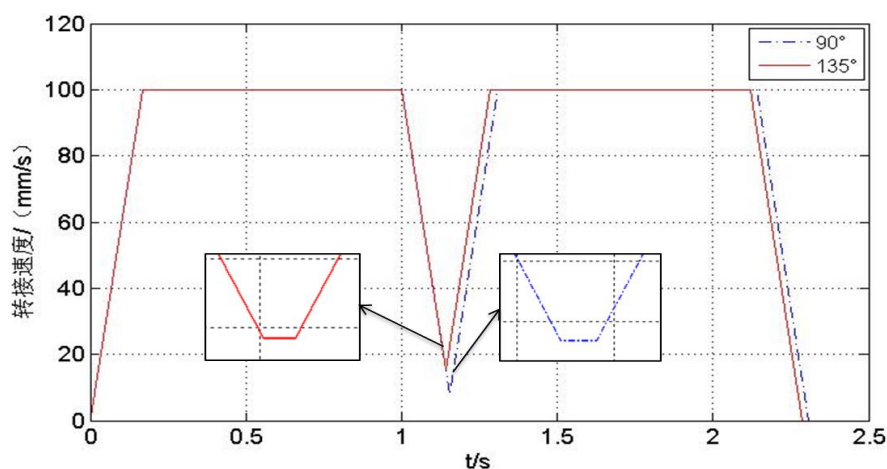


图 8 90° 与 135° 转接指定加工误差控制效率对比

90° 折线路径：设各点坐标依次为： $A(0,0,0)$ ， $O(100,0,0)$ ， $D(100,100,0)$ ，

由优化目标函数求解结果可知，此时转接进给速率 $v_{seg} = 7.767 \text{ mm/s}$ ，对应两次转接过程 $\theta_1 = 44.99^\circ$ ， $\theta_2 = 45.01^\circ$ 。由坐标转换公式可求两次转接前后的坐标速度，具体如表 2 所示。

表 2 90° 折线转接前后各坐标轴速度变化

坐标轴 (mm/s)	转接前	一次转接后	二次转接后
x 轴向	7.767	5.491	0
y 轴向	0	5.493	7.767
z 轴向	0	0	0

135° 折线路径：设各点坐标依次为： $A(0,0,0)$ ， $O(100,0,0)$ ， $D(170.711,70.711,0)$ ，由优化目标函数求解结果可知，此时转接进给速率 $v_{seg} = 17.267 \text{ mm/s}$ ，对应两次转接过程 $\theta_1 = 22.51^\circ$ ， $\theta_2 = 22.49^\circ$ 。由坐标转换公式可求两次转接前后的坐标速度，具体如表 3 所示。

表 3 135° 折线转接前后各坐标轴速度变化

坐标轴 (mm/s)	转接前	一次转接后	二次转接后
x 轴向	17.267	15.951	12.209
y 轴向	0	6.611	12.209
z 轴向	0	0	0

4.2.2 模型改进

上述指定加工误差控制算法中，为了简化分析，仅选取了 2 次转接，但实际加工时对转接次数限值往往可能大于 2，且转接次数对加工控制方法效率的影响也不可忽视，因此，需要对指定加工误差控制模型予以进一步讨论与改进。

假设一次折现加工过程中转接次数为 m ，由于转接前后进给速率不变，则每次转接进给距离相等为 h ，转接轨迹如图 9 所示

4.3 小结

本节首先采用最小偏差法作为直线段插补加工方法，然后在矢量转接模型的基础上，以最小加工时间为目标函数，分别对折线无误差加工、指定误差加工分别进行了建模。在讨论直线段运动阶段划分的前提下，设计了折线加工的通用控制算法流程。以 90° 与 135° 折线作为算例，分析了各坐标轴速度变化情况，验证了模型的合理性。最后对指定误差控制模型进行了转接数上的延伸，将转接数由两次转接推广到了多次，增强了折线加工优化控制模型的合理性与实用性。

五、模型 II：直线圆弧段加工优化控制模型

5.1 圆弧加工建模

5.1.1 圆弧构成分析

设圆弧的弧度为 γ 、圆弧的半径为 R 。圆弧是由 n 段长度很短的直线段逼近而成的，直线段长度分别为 l_1, l_2, \dots, l_n ，每段直线段对应的圆心角为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ，每个直线段与圆弧的误差为 ε_i

$$\varepsilon_i = R(1 - \cos(\theta_i / 2)), i = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

根据加工误差指定要求，直线段对应的最大误差要小于误差极限值 ε_{\max} ，即

$$\max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} \leq \varepsilon_{\max} \quad (34)$$

要使工件的精度越高，则需要 $\max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 最小，由于 ε_i 是随 θ_i 单调递增的，且

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \alpha \quad (35)$$

所以当且仅当

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta = \gamma / n \quad (36)$$

$\max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 可以取到最小值，则每个直线段对应长度

$$l = 2R \sin(\theta / 2) \quad (37)$$

圆弧进给轨迹具体如图 10 所示。

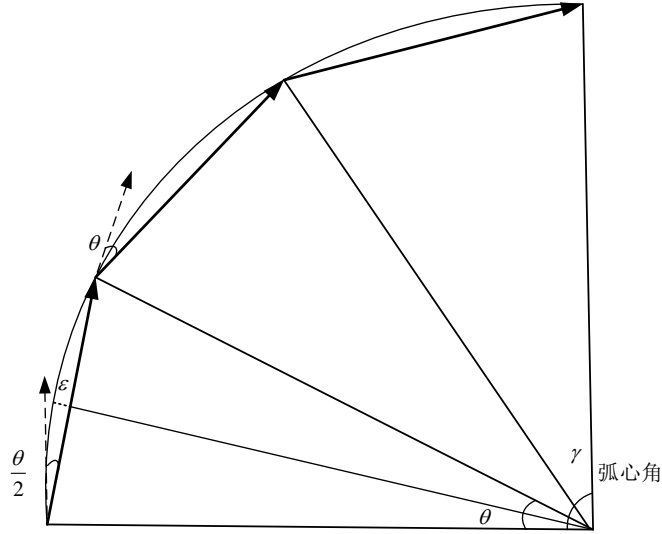


图 10 圆弧进给轨迹示意

5.1.2 进给速度分析

考虑到圆弧上各直线段长度较短，假设每个直线段内速度恒定不变，分别设通过第 i 段直线段的进给速度为 v_i ($i=1,2,\dots,n$)，则通过该直线段集的总时间 T_Σ 为

$$T_\Sigma = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} \dots + \frac{l}{v_n} \quad (38)$$

当且仅当 $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v_{\max}$ 时有最小值，每两段直线段的交点处的速度受到偏转角度的限制，即

$$2v_i \sin \frac{\theta}{2} \leq A_{\max} \Delta T \quad (39)$$

则

$$T_\Sigma \leq T_{\Sigma \min} = 2nl \sin(\frac{\theta}{2}) / (A_{\max} \Delta T) \quad (40)$$

5.1.3 误差限制分析

在弧长、半径一定时， n 决定了每段直线段的长度 l

$$l = 2R \sin(\frac{\gamma}{2n}) \quad (41)$$

则圆弧加工的最小时间可改述为

$$T_{\Sigma \min} = 4nR \sin^2(\frac{\lambda}{2n}) / (A_{\max} \Delta T) \quad (42)$$

由于对工件有最大误差 ε_{\max} 的限制要求，图 5 中所示的实际误差 ε 必需满足以下误差约束条件

$$\varepsilon = R(1 - \cos(\frac{\gamma}{2n})) \leq \varepsilon_{\max} \quad (43)$$

因此，在 $\varepsilon_{\max}, R, \gamma$ 一定时，由式 (43) 可以得到分段数 n 的约束，式 (42) 是 n 的单调函数，随着 n 的增大而减小，式 (43) 仅决定了 n 的下限， n 的取值应尽可能小，则式 (39) 可重新表述为

$$\begin{cases} R[1 - \cos(\frac{\gamma}{2n_{\max}})] \leq \varepsilon_{\max} \\ R[1 - \cos(\frac{\gamma}{2n_{\max} - 2})] \geq \varepsilon_{\max} \\ n \leq n_{\max} \end{cases} \quad (44)$$

当 $\varepsilon_{\max}, \gamma$ 一定时，改变 R ，相应的圆弧加工时间变化如图 11 所示。

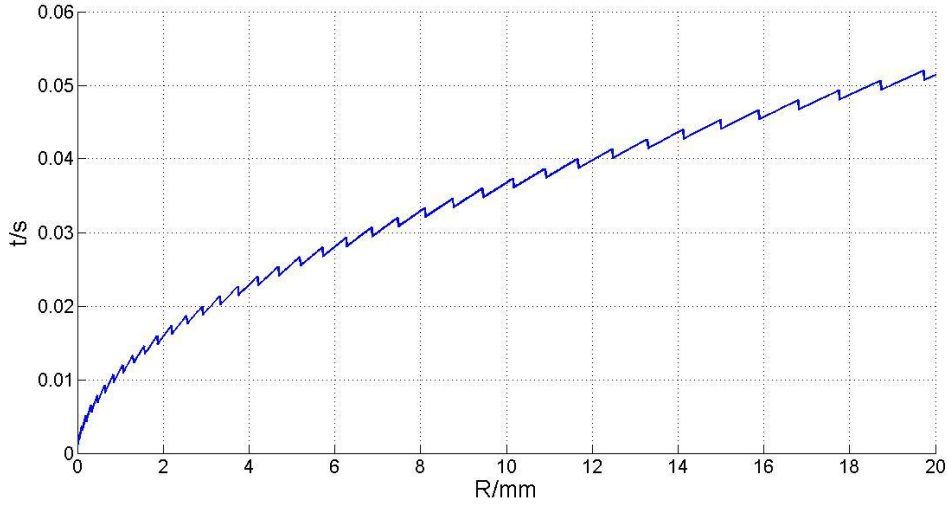


图 11 不同圆弧半径下同一精度约束加工时间变化情况

由图 9 可以看出，当 $\varepsilon_{\max}, \gamma$ 一定时，随着圆弧半径的增加，其加工时间也随之增加，并局部伴有振荡现象，这是由于在给定精度约束情况下，分段数 n 为整数非连续性变化导致。

5.2 直线圆弧段合成建模

5.2.1 相切情况建模

在加工直线段与圆弧段相切时，由式 (12) 及 (44) 可以得到相切情况下的数学优化模型，其目标函数为

$$\min T = \sum_{i=1}^{M+1} t_i \quad (45)$$

式中， M 表示加工过程中按加速、匀速、减速划分的阶段数，若 N 取 3，则表示折线加工可划分为 3 个阶段，依次为加速、匀速与减速段，若 N 取 7，

则表示折线加工可划分为 7 个阶段，依次为加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段。设置原则为直线段 L 上尽可能按最大进给速度加工，以 N 取 7 为例，即 L 足够大能按最大速度划分为 7 阶段（实际加工需要按照长度进行阶段筛选），则相应阶段耗时如下

1) L 加加速段用时：

$$t_1 = \frac{a_{\max}}{J_{\text{const}}} \quad (46)$$

式中， v_{\max} 为机床最大允许进给速度。

2) L 匀加速段用时：

$$t_2 = \frac{(V_{\max} - J_{\text{const}} t_1^2)}{a_{\max}} \quad (47)$$

3) L 减加速段用时：

$$t_3 = \frac{a_{\max}}{J_{\text{const}}} \quad (48)$$

则阶段 1 至阶段 3 进给路径长度为

$$s_{1-3} = \frac{v_{\max}}{2} (t_1 + t_2 + t_3) \quad (49)$$

4) L 匀速段用时：

$$t_4 = \frac{L - s_{1-3} - s_{5-7}}{v_{\max}} \quad (50)$$

5) L 加减速段用时：

$$t_5 = \frac{a_{\max}}{J_{\text{const}}} \quad (51)$$

6) L 匀减速段用时：

$$t_6 = \frac{(V_{\max} - J_{\text{const}} t_4^2 - v_{\text{Seg}})}{a_{\max}} \quad (52)$$

7) L 减减速段用时

$$t_7 = \frac{a_{\max}}{J_{\text{const}}} \quad (53)$$

则阶段 5 至阶段 7 进给路径长度为

$$s_{5-7} = \frac{v_{\max} + v_{\text{Seg}}}{2} (t_5 + t_6 + t_7) \quad (54)$$

8) 圆弧段用时

$$t_5 = 2nR \sin \frac{\gamma}{2n} / v_{Seg} \quad (55)$$

由速度约束与精度限制构成的约束条件为

$$\begin{cases} 2v_{Seg} \sin \frac{\gamma}{2n} \leq A_{\max} \Delta T \\ R[1 - \cos(\frac{\lambda}{2n_{\max}})] \leq \varepsilon_{\max} \\ R[1 - \cos(\frac{\lambda}{2n_{\max} - 2})] \geq \varepsilon_{\max} \\ n \leq n_{\max} \\ v_{Seg} < v_{Limit} \end{cases} \quad (56)$$

5.2.2 不相切情况建模

当圆弧段与直线段不相切且夹角为 δ 时，直线段转至圆弧段过程中，若在指定误差范围内，选择2次转接，则其运行轨迹示意如图12所示。

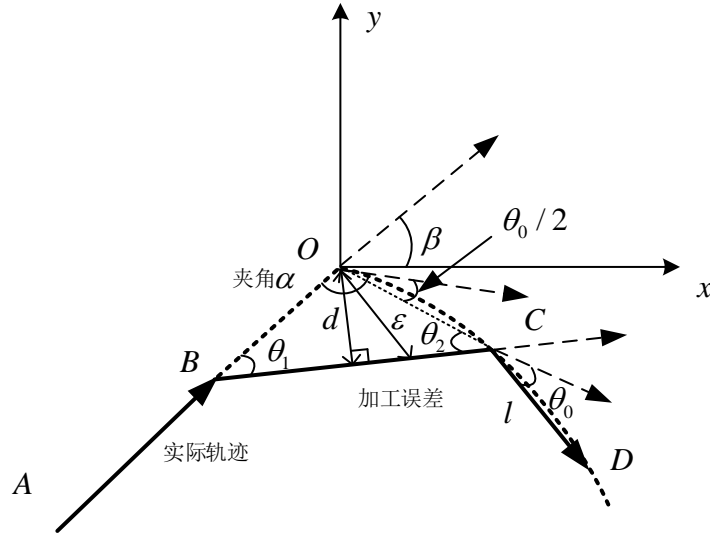


图12 不相切控制轨迹示意

如图12所示，直线段与圆弧段夹角为 α ，圆弧上转接点设置为原微线段末端，圆弧段对应半径为 R ，则各微线段长度 l 为

$$l = 2R \sin(\frac{\gamma}{2n}) \quad (57)$$

各微线段转折角度 θ_0 为

$$\theta_0 = \frac{\gamma}{n} \quad (58)$$

则 B, C 处的进给速度约束条件（转接前后速率不变）为

$$\begin{cases} 2v_{Seg} \sin \frac{\theta_1}{2} \leq A_{\max} T \\ 2v_{Seg} \sin \frac{\theta_2 + \theta_0}{2} \leq A_{\max} T \\ \theta_1 + \theta_2 = \pi - \alpha + \frac{\theta_0}{2} \end{cases} \quad (59)$$

由圆弧加工误差约束及折线加工误差约束可以确立出满足加工精度要求分段数 n 与圆弧分段长度 l 。

$$\begin{cases} R[1 - \cos(\frac{\lambda}{2n_{\max}})] \leq \varepsilon_{\max} \\ R[1 - \cos(\frac{\lambda}{2n_{\max} - 2})] \geq \varepsilon_{\max} \\ \frac{l \sin \theta_2}{\cos \theta_1} \leq \varepsilon_{\max} \\ n \leq n_{\max} \end{cases} \quad (60)$$

当圆弧分段长度 l 确立后，直线段与圆弧段之间的转接路径长度及忽略的理想路径可以表示为

$$L_{BC} = l \cos \theta_2 + l \frac{\sin \theta_2}{\tan \theta_1} \quad (61)$$

$$L_{BO} = l \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (62)$$

类似式（45）直线段与圆弧段建立不相切情况下的控制优化模型目标函数

$$\min T = \sum_{i=1}^{M+2} t_i \quad (63)$$

若取 $M = 7$ ，则 4) 中 L 匀速段用时出现变化

$$t_4 = \frac{L - s_{1-3} - s_{5-7} - L_{BO}}{v_{\max}} \quad (64)$$

与直线段圆弧段相切情况相比，额外添加了 BC 转接段加工耗时

$$t_8 = \frac{L_{BC}}{v_{Seg}} \quad (65)$$

圆弧段加工耗时修正为

$$t_9 = \frac{2(n-1)R \sin(\frac{\gamma}{2n})}{V_{Seg}} \quad (66)$$

从而上述各式构成了不相切情况下优化控制模型。

5.3 算例验证

5.3.1 工件特性分析

如图 13 所示，为一个圆角矩形切割路径的示意图，路径的四个角是半径为 0.5 的整圆的 1/4 圆弧。矩形外围大小是：41×41（单位：cm²）。

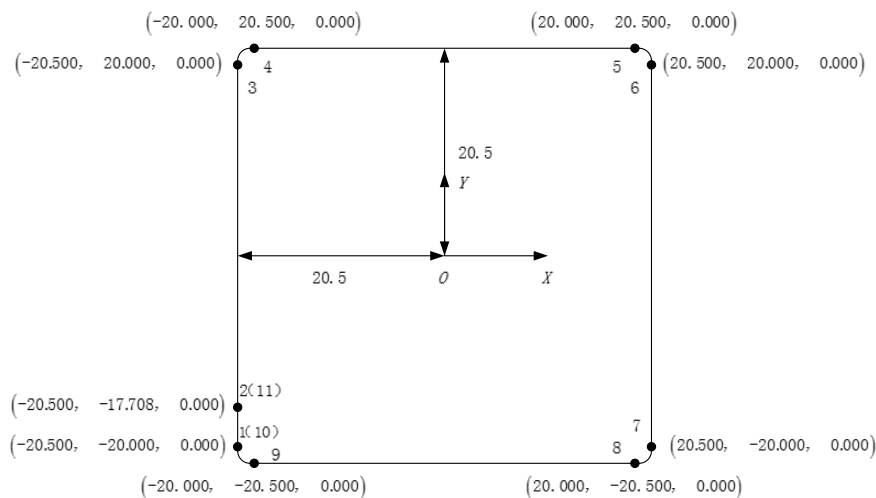


图 13 加工路径节点示例

在不考虑瞬时启动速度 V_0 和瞬时启动加速度 a_0 的理想情况下，从坐标为 (-20.500, -20.000, 0.000) 的节点 1 位置开始下刀，该点处的瞬时速度为 0；从节点 1 到节点 2 (-20.500, -17.708, 0.000) 的过程中，要求最大速度为 0.19。从节点 2 (-20.500, -17.708, 0.000) 出发，顺时针加工，回到该点(-20.500, -17.708, 0.000)（记为节点 11），期间要求最大速度为 1.26，节点 11 处的终止速度为 0。

表 4 圆角矩形切割路径加工中速度要求

路径节点	节点坐标(X、Y、Z)	用户设定的最大频率 F	最大频率 F 转换后对应的速度
1	(-20.500,-20.000,0.000)	0	0
2	(-20.500,-17.708,0.000)	4029	0.19
3	(-20.500,20.000,0.000)	26865	1.26
4	(-20.000,20.500,0.000)	26865	1.26
5	(20.000,20.500,0.000)	26865	1.26
6	(20.500,20.000,0.000)	26865	1.26
7	(20.500,-20.000,0.000)	26865	1.26

8	(20.000,-20.500,0.000)	26865	1.26
9	(-20.000,-20.500,0.000)	26865	1.26
10	(-20.500,-20.000,0.000)	26865	1.26
11	(-20.500,-17.708,0.000)	0	0

表中最大频率指的是控制脉冲的最大频率，本题可以不予考虑，对应的速度指的是刀具的运动速度，单位是 m/min

运动过程中，机床对于速度、加速度、加加速度等的限制条件如下：

- 进给速度 V 范围 $[V_{\min}, V_{\max}]$: $[0.13, 6]$ 单位 m/min
- 加速度 a 范围 $[A_{\min}, A_{\max}]$: $[0.02, 0.6]$ 单位 m/s^2
- 加加速度 J_{const} : 300 单位 mm/s^3
- 瞬时启动速度 V_0 : $V_0 = 0.13$ 单位 m/min
- 瞬时启动加速度 a_0 : $a_0 = 0.02$ 单位 m/s^2
- 误差 $\varepsilon = 1\mu\text{m}$
- 分辨率: $1/1280\text{mm}$

5.3.2 加工示例验证

1) 匀加减速加工模式

不考虑瞬时启动速度与瞬时加速度影响，采用匀加速-匀速-匀减速运动模式，设定 $\Delta T = 1\text{ms}$ ，将上述参数代入到所建立的加工控制优化算法后，可得到如表 5 所示各段加工设计结果。

表 5 加工路径示例优化控制结果-匀加减速加工模式

过程	运动状态	行进距离 (m)	时间 (s)	速度变换范围 (m/min)
节点 1 到节点 2	匀加速、匀速	0.02292	7.2352	0.000-0.190
节点 2 到节点 3	匀加速	0.02150	0.0297	0.190-1.260
	匀速	0.35540	16.9200	1.260
	匀减速	0.00017	0.0095	1.260-0.918
节点 3 到节点 4	匀速	0.00785	0.5130	0.918
节点 4 到节点 5	匀加速	0.00017	0.0095	0.918-1.260
	匀速	0.39966	19.0300	1.260
	匀减速	0.00017	0.0095	1.260-0.918
节点 5 到节点 6	匀速	0.00785	0.5130	0.918

节点 6 到节点 7	匀加速	0.00017	0.0095	0.918-1.260
	匀速	0.39966	19.0300	1.260
	匀减速	0.00017	0.0095	1.260-0.918
节点 7 到节点 8	匀速	0.00785	0.5130	0.918
节点 8 到节点 9	匀加速	0.00017	0.0095	0.918-1.260
	匀速	0.39966	19.0300	1.260
	匀减速	0.00017	0.0095	1.260-0.918
节点 9 到节点 10	匀速	0.00785	0.5130	0.918
节点 10 到节点 11	匀加速、匀速、匀减速	0.02292	1.1102	0.918-1.260-0.000

具体加工过程如下：

A) 节点 1-节点 2

刀头从节点 1 开始以等效加速度匀加速运行到节点 2，进给速度以最大加速度 $0.6m/s^2$ 由 0 增加到 $0.19m/min$ ，然后以 $0.19m/min$ 运动到节点 2，行进距离为 $0.02292m$ ，经历时间为 $7.2352s$ 。

B) 节点 2-节点 3

刀头依次经历匀加速运动、匀速运动和匀减速运动，首先进给速度以最大加速大 $0.6m/s^2$ 快速增加到最大速度要求 $1.26m/min$ ，该过程经历时间为 $0.0297s$ ，行进距离为 $0.0215m$ 。通过算法计算，当刀头到达节点 3 时，进给速度要减小到 $0.918m/min$ ，因此刀头需要以最大的减速度匀减速到节点 3，该过程经历时间为 $0.0095s$ ，行进距离为 $0.00017m$ 。因此，从节点 2 运动到节点 3 的过程中匀速运动的距离为 $0.35541m$ ，经历时间为 $16.92s$ 。

C) 节点 3-节点 4

刀头以速度 $0.918m/min$ 从节点 3 进入圆弧加工阶段，速度保持不变，行进距离为 $0.00785m$ ，经历时间 $0.513s$ 后到达节点 4。

D) 节点 4-节点 5

刀头从节点 4 运动到节点 5 的过程中会经历匀加速运动、匀速运动和匀减速运动，首先进给速度以最大加速 $0.6m/s^2$ 快速增加到最大速度要求 $1.26m/min$ ，该过程经历时间为 $0.0095s$ ，行进距离为 $0.00017m$ 。当刀头到达节点 5 时，进给速度要减小到 $0.918m/min$ ，因此刀头需要以最大的减速度匀减速到节点 5，该过程经历时间为 $0.0095s$ ，行进距离为 $0.00017m$ 。因此，从节点 4 运动到节点 5 的过程中匀速运动的距离为 $0.39966m$ ，经历时间为 $19.03s$ 。

E) 节点 5-节点 9

此后刀头从节点 5 运动到节点 6 的过程、从节点 7 运动到节点 8 的过程、

从节点 9 运动到节点 10 的过程重复从节点 3 运动到节点 4 的过程; 刀头从节点 6 运动到节点 7 的过程、从节点 8 运动到节点 9 的过程复从节点 4 运动到节点 5 的过程。

F) 节点 9-节点 10

刀头最后以初速度 $0.918m/min$ 从节点 10 运动到节点 11 静止, 首先进给速度以最大加速 $0.6m/s^2$ 快速增加到最大速度 $1.26m/min$, 然后以最大速度运动, 最后以最大加速 $0.6m/s^2$ 减速为 0, 停止在节点 11 处, 行进距离为 $0.02292m$, 经历时间为 $1.1102s$ 。

以上过程就是优化控制算法对每个运动状态的计算结果, 最后得到该示例所示的工件的加工时间为 $84.5036s$ 。

2) S 曲线加工模式

采用 S 曲线加工模式, 可得到如表 6 所示各节点速率计算结果。

表 6 加工路径示例优化控制结果-S 曲线加工模式

过程	S 型阶段	行进距离 (m)	时间 (s)	速度 (m/min)
节点 1 到节点 2	1, 3	0.00033	0.2055	0.000-0.190
	4	0.02259	7.1352	0.190
节点 2 到节点 3	1, 3	0.00589	0.4876	0.190-1.260
	4	0.36619	17.4376	1.260
	5, 7	0.00500	0.2757	1.260-0.918
节点 3 到节点 4	4	0.00785	0.5130	0.918
节点 4 到节点 5	1, 3	0.00500	0.2757	0.918-1.260
	4	0.39000	18.5714	1.260
	5, 7	0.00500	0.2757	1.260-0.918
节点 5 到节点 6	4	0.00785	0.5130	0.918
节点 6 到节点 7	1, 3	0.00500	0.2757	0.918-1.260
	4	0.39000	18.5714	1.260
	5, 7	0.00500	0.2757	1.260-0.918
节点 7 到节点 8	4	0.00785	0.5130	0.918
节点 8 到节点 9	1, 3	0.00500	0.2757	0.918-1.260
	4	0.39000	18.5714	1.260
	5, 7	0.00500	0.2757	1.260-0.918
节点 9 到节点 10	4	0.00785	0.5130	0.918
节点 10 到节点 11	1 与 3	0.00500	0.2757	0.918-1.260
	4	0.01236	0.5886	1.260
	5 与 7	0.00556	0.4516	1.260-0.000

具体加工过程如下:

A) 节点 1-节点 2

经历 S 型曲线的 1、3、4 三个阶段，开始以 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经历 S 型曲线的 1、3 阶段，进给速度由 0 增加到 $0.19m/min$ ，行进距离为 $0.00033m$ ，经历时间为 $0.2055s$ 。然后以速度 $0.19m/min$ 运动到节点 2，行进距离为 $0.02259m$ ，经历时间为 $7.1352s$ 。

B) 节点 2-节点 3

刀头从节点 2 运动到节点 3 的过程中会经历 S 型曲线的 1、3、4、5、7 五个阶段，首先进给速度以 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经过 S 型曲线的 1、3 阶段到最大速度要求 $1.26m/min$ ，该过程经历时间为 $0.4876s$ ，行进距离为 $0.00589m$ 。通过算法计算，当刀头到达节点 3 时，进给速度要减小到 $0.918m/min$ ，因此刀头经历 S 型曲线的 5、7 阶段到达节点 3，该过程经历时间为 $0.2757s$ ，行进距离为 $0.00500m$ 。因此，从节点 2 运动到节点 3 的过程中匀速运动的距离为 $0.36619m$ ，经历时间为 $17.4376s$ 。

C) 节点 3-节点 4

刀头从节点 3 运动到节点 4 的过程中会经历 S 型曲线的第 4 阶段，以速度 $0.918m/min$ 从节点 3 进入圆弧加工阶段，速度保持不变，行进距离为 $0.00785m$ ，经历时间 $0.5130s$ 后到达节点 4。

D) 节点 4-节点 5

刀头从节点 4 运动到节点 5 的过程中会经历 S 型曲线的 1、3、4、5、7 五个阶段，首先进给速度以 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经过 S 型曲线的 1、3 阶段到最大速度要求 $1.26m/min$ ，该过程经历时间为 $0.2757s$ ，行进距离为 $0.00500m$ 。当刀头到达节点 5 时，进给速度要减小到 $0.918m/min$ ，因此刀头经历 S 型曲线的 5、7 阶段到达节点 5，该过程经历时间为 $0.2757s$ ，行进距离为 $0.00500m$ 。因此，从节点 4 运动到节点 5 的过程中匀速运动的距离为 $0.39900m$ ，经历时间为 $18.5714s$ 。

D) 节点 5-节点 10

此后刀头从节点 5 运动到节点 6 的过程、从节点 7 运动到节点 8 的过程、从节点 9 运动到节点 10 的过程重复从节点 3 运动到节点 4 的过程；刀头从节点 6 运动到节点 7 的过程、从节点 8 运动到节点 9 的过程复从节点 4 运动到节点 5 的过程。

E) 节点 5-节点 10

刀头从节点 10 运动到节点 11 静止的过程中会经历 S 型曲线的 1、3、4、5、7 五个阶段，首先进给速度以 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经过 S 型曲线的 1、3 阶段到最大速度要求 $1.26m/min$ ，该过程经历时间为 $0.2757s$ ，行进距离为 $0.00500m$ 。当刀头到达节点 11 时，进给速度要减小到 0，因此刀头经历 S 型曲线的 5、7 阶段到达节点 5，该过程经历时间为 $0.4516s$ ，行进距离为 $0.00556m$ 。因此，从节点 10 运动到节点 11 的过程中匀速运动的距离为 $0.01236m$ ，经历时间为 $0.5886s$ 。

具体速率变化、加速度变化及加加速度变化分别如图 14 至图 16 所示，即

直线圆弧段优化控制算法对每个运动状态的计算结果，最后得到该示例所示的工件的加工时间为86.2779s。

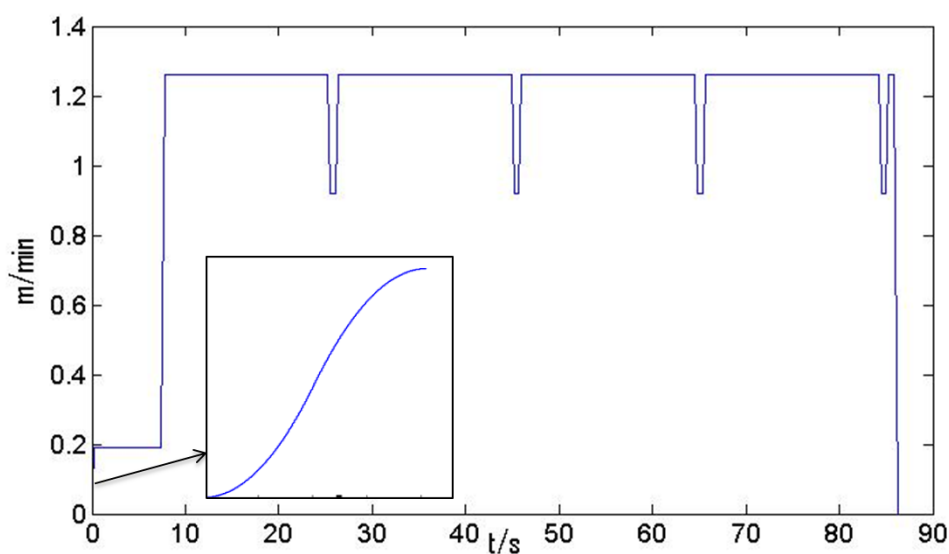


图 14 S 曲线加工模式速率变化曲线

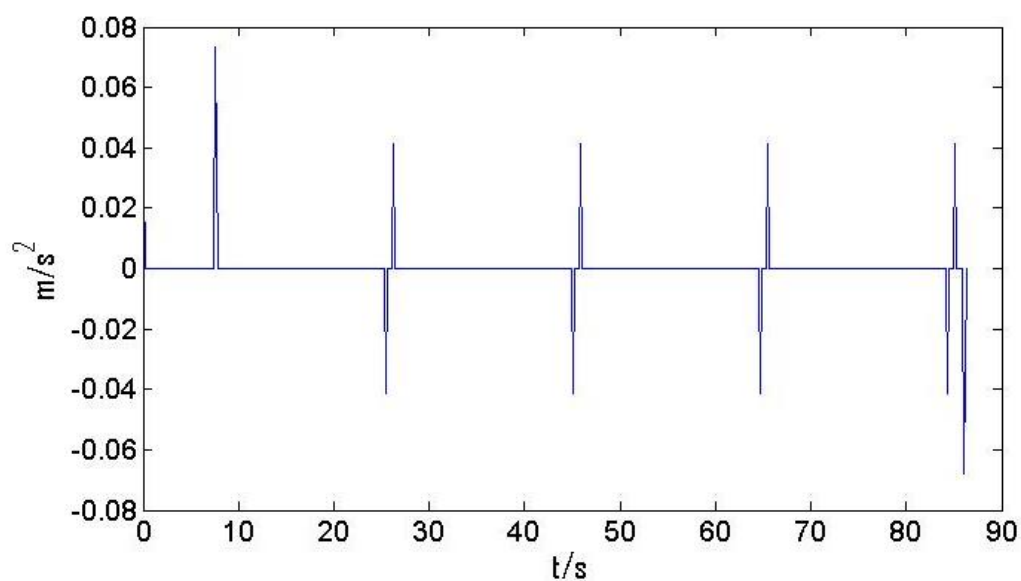


图 15 S 曲线加工模式加速度变化曲线

5.4 小结

本节首先从圆弧段构成、进给速度、误差限制三个方面分析、证明与设计了圆弧段加工的合理方式，并建立了相应的圆弧段加工优化控制模型。然后考虑到直线段与圆弧段夹角不同的情况，分别从相切与不相切两种工况，并基于上节所提指定加工误差折线加工优化控制模型，进行了直线圆弧段的加工控制建模。最后，通过给定的圆角正四边形对模型及设计算法进行了合理性验证，并比较了直线段分别采用 S 型加工曲线与非 S 型加工曲线在效率上的差异^[14]。

六、模型Ⅲ：考虑瞬时启动速度的优化控制修正模型

6.1 瞬时启动速度修正建模

6.1.1 瞬时启动速度影响分析

实际运动过程中电机启动时允许有一个瞬时启动加速度 a_0 ，即认为加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度 a_0 ，或瞬间从 a_0 下降到 0，速度也有类似功能。因此，各坐标轴在启动瞬间可以提供方向一定的初始瞬时启动速度矢量 V_0 ，其分布如图 16 所示，仅为各坐标轴正方向象限^{[15][16]}。

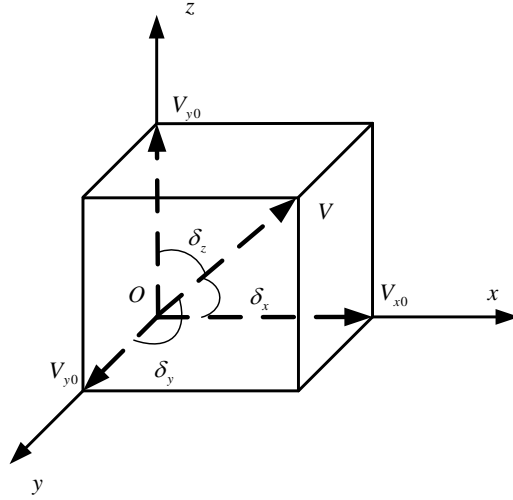


图 16 瞬时启动速度正象限分布

$$V = f(\delta_1, \delta_2, \delta_3)V_0$$

$$= V_0 \left(\frac{1}{\cos \delta_1} + \frac{1}{\cos \delta_2} + \frac{1}{\cos \delta_3} \right) \in [V_0, \sqrt{3}V_0] \quad (67)$$

由式(67)，各坐标轴电机所能提供的合初瞬时启动速度与启动合方向有关，则式(8)矢量转接模型可以表述为

$$2V_{Seg} \cos(\alpha/2) \leq A_{\max} \Delta T + f(\delta_1, \delta_2, \delta_3)V_0 \quad (68)$$

即转接最大进给速度 V_{Seg_max} 更新为

$$V_{Seg_max} = \frac{A_{\max} \Delta T + f(\delta_1, \delta_2, \delta_3)V_0}{2\cos(\alpha/2)} \quad (69)$$

6.1.2 折线段加工模型修正

假设转接前后进给速率不变，则折线加工优化目标与 4.1.3 节所述目标函数一致，仅转折点处速度约束条件需要修正，即添加启动引起的额外速度变化量。

$$\begin{cases} 2v_{Seg} \sin \frac{\theta_1}{2} \leq A_{\max} \Delta T + f(\delta_{B1}, \delta_{B2}, \delta_{B3})V_0 \\ 2v_{Seg} \sin \frac{\theta_2}{2} \leq A_{\max} \Delta T + f(\delta_{C1}, \delta_{C2}, \delta_{C3})V_0 \\ \theta_1 + \theta_2 = \pi - \alpha \\ v_{Seg} < v_{Limit} \\ \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \cos \delta_{B1} \cos \delta_{C1} + \cos \delta_{B2} \cos \delta_{C2} + \cos \delta_{B3} \cos \delta_{C3} \end{cases} \quad (70)$$

需要指出，折线两直线段 L_1 与 L_2 处于同一平面，则 $(\delta_{B1}, \delta_{B2}, \delta_{B3})$ 与 $(\delta_{C1}, \delta_{C2}, \delta_{C3})$ 中必有相应值相等，且由平面所处位置决定。从而，根据 4.1.3 节所述目标函数与式 (70) 即可完成对折线加工的优化控制。

6.1.3 圆弧段加工模型修正

对于圆弧段的加工，5.1.1 节已证明在分段数 n 一定的情况下，各直线分段相等长情况下，即每次转接角度相等时，具有最小加工误差，则其约束条件可以修正为

$$\begin{cases} 2v_{Seg} \sin \frac{\gamma}{2n} \leq A_{\max} \Delta T + V_{\min} \\ R[1 - \cos(\frac{\lambda}{2n_{\max}})] \leq \varepsilon_{\max} \\ R[1 - \cos(\frac{\lambda}{2n_{\max} - 2})] \geq \varepsilon_{\max} \\ n \leq n_{\max} \\ v_{Seg} < v_{Limit} \end{cases} \quad (71)$$

其中，

$$V_{\min} = \min\{f(\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3})V_0 \mid i = 1, 2, \dots, n\} \quad (72)$$

圆弧各分线段处于同一平面，则 $(\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3})$ 中必有相应值保持恒定，且由平面所处位置决定，且相邻转接点间满足

$$\cos \frac{\gamma}{n} = \cos \delta_{i,1} \cos \delta_{i+1,1} + \cos \delta_{i,2} \cos \delta_{i+1,2} + \cos \delta_{i,3} \cos \delta_{i+1,3} \quad (73)$$

当 $\gamma \geq \pi/2$ ，则 V_{\min} 必等于 V_0 。

6.2 算例验证

考虑了实际情况下瞬时启动加速度 a_0 和瞬时启动速度 V_0 对加工过程的影响。因此在实际加工过程中，从坐标为 $(-20.500, -20.000, 0.000)$ 的节点 1 位置开始下刀，该点处的瞬时速度为 0.13；顺时针加工，回到该点 $(-20.500, -17.708, 0.000)$ ，节点 11 处的终止速度为 0.13。此外，当刀头运动到直线段和圆弧段的切点处，也会存在一个于进给速度方向垂直的瞬时启动速度 V_0 ，该瞬时启动速度被用于算法中对最大转接速度的约束条件。

除了上述实际情况的修正以外，其他条件与问题二中的示例完全相同，使用改进的加工优化控制算法进行计算。根据指定误差和圆弧角度，可求得 $n = 40$ 是满足误差约束的最小直线段数，每段直线段的长度 $l = 0.000196m$ ，因此该圆弧的总长度可以近似为 $0.00785m$ 。根据上述考虑瞬时启动速度的优化控制修正模型，整个过程每个阶段的加工设计参数计算如表 7 所示。

表 7 考虑瞬时启动速度的优化控制加工结果

过程	S 型阶段	行进距离	经历时间	速度范围 (m/min)
节点 1-节点 2	1	0.00102	0.0079	0.130-0.140
	3	0.00979	0.0745	0.140-0.190
	4	0.01211	3.8245	0.190
节点 2-节点 3	1, 3	0.00589	0.4876	0.190-1.260
	4	0.37119	17.6757	1.260
节点 3-节点 4	4	0.00785	0.3738	1.260
节点 4-节点 5	4	0.4	19.0476	1.260
节点 5-节点 6	4	0.00785	0.3738	1.260
节点 6-节点 7	4	0.4	19.0476	1.260
节点 7-节点 8	4	0.00785	0.3738	1.260
节点 8-节点 9	4	0.4	19.0476	1.260
节点 9-节点 10	4	0.00785	0.3738	1.260
节点 10-节点 11	4	0.01770	0.8430	1.260
	5	0.00522	0.3543	1.260-0.130

A) 节点 1-节点 2

刀头从节点 1 运动到节点 2 的过程中要经历 S 型曲线的 1、3、4 阶段，首先以瞬时启动速度 $0.13m/min$ 、瞬时启动加速度 $0.02m/s^2$ 、 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经历 S 型曲线的第 1 阶段，行进距离为 $0.00102m$ ，经历时间 $0.0079s$ 后速度达到 $0.140m/min$ 。然后经历 S 型曲线的第 3 阶段，行进距离为 $0.00979m$ ，经历时间 $0.0745s$ 后达到该段要求的最大速度 $0.190m/min$ ，此后一直以该速度运动到节点 2，行进距离为 $0.01211m$ ，经历时间为 $3.8245s$ 。

B) 节点 2-节点 3

刀头经历 S 型曲线的 1、3、4 阶段，首先以 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经历 S 型曲线的第 1 和第 3 阶段，行进距离为 $0.00589m$ ，经历时间 $0.4876s$ 后速度达到要求的最大值 $1.260m/min$ 。然后以该速度一直运动到节点 3，行进距离为 $0.37119m$ ，经历时间为 $17.6757s$ 。

C) 节点 3-节点 10

由于瞬时启动速度的存在，所以在加工圆弧时刀头不需要减速，能够以最大速度 $1.260m/min$ 加工圆弧。因此，从节点 3 开始到节点 10，刀头都可以保持要求的最大速度。

D) 节点 10-节点 11

最后刀头从节点 10 运动到节点 11 的过程中要经历 S 型曲线的第 4 和第 5 阶段, 首先以最大速度 $1.260m/min$ 经历 S 型曲线的第 4 阶段, 行进 $0.01770m$, 经历时间为 $0.8430s$, 然后以 $J_{const} = 300mm/s^3$ 经历 S 型曲线的第 5 阶段, 行进距离为 $0.00522m$, 经历时间为 $0.3543s$, 速度减小到 $0.13m/min$, 刀头可以瞬时停止。

以上过程为考虑瞬时启动速度的加工控制修正模型对每个运动状态的计算结果, 最后得到加工示例路径的加工时间为 $81.9055s$ 。

6.3 小结

由于实际加工过程中存在瞬时启动加速度与瞬时启动速度, 对矢量转接模型进行了瞬时启动速度的修正, 并将其应用至折线与圆弧段加工优化控制模型中。最后, 通过给定的圆角正四边形对修正模型及设计算法进行了验证, 在直线段采用 S 型加工曲线的情况下, 考虑瞬时启动速度的修正模型对加工效率有一定的提高。

七、模型 IV：基于正弦曲线加减速法的加工优化控制

7.1 S 型加减速法改进

7.1.1 S 型加减速法优缺点分析

本文前节建立的加工优化控制算法中均使用了基于 S 型曲线的加减速控制方法。问题一中在矢量转接模型的基础上使用 S 型曲线对直线加工阶段进行了划分; 问题二中分别使用基于 S 型曲线的加减速控制方法和匀加减速控制方法对加工示例进行了验证, 通过计算结果的对比可以看出基于 S 型曲线的加减速控制方式加工时间较慢, 但速度曲线平滑; 问题三中针对实际情况下存在的瞬时启动加速度和瞬时启动速度, 对问题二中的模型进行修正, 然后再次使用示例进行验证, 通过验证结果可以看出基于 S 型曲线的加减速控制方法可以处理微小速度变化情况, 使加工过程流畅自然。因此, 根据前三问中的模型算法可以总结得出基于 S 型曲线的加减速控制方法具有以下优缺点。

S 型加减速法优点:

- 1) 加工过程中速度的变化曲线光滑, 机床的运行平稳性高, 对机床的机械损耗也就相对较低, 利于延长机床的使用寿命。
- 2) 由于加速度不能突变, 因此机床对工件的作用力不会突变, 使工件的加工表面光滑平整, 在机床同样加工精度限制下, 基于 S 型曲线加减速控制方式具有更高的加工精度。

S 型加减速法缺点:

- 1) 由于其加速度不能突变, 速度变化较为缓慢, 一定程度上增加了加工时间, 降低了加工效率。
- 2) 基于 S 型曲线的加减速控制算法表达式为分段表达式, 方程的形式难以确

定，不易于建立通用参数设计模型。

3) 运动参数加工优化控制模型中，可能会产生无理方程，而难以求解。

7.1.2 正弦曲线加减速法

针对 S 型曲线的加减速控制算法表达式为分段表达式，方程形式难以统一与确定这一问题，并由此导致加速度变化曲线连续但并不光滑这一现象。当加速度曲线非连续变化时，会使得机电产生一定的振荡与超程，因此，为了进一步提高加工平稳性，对加加速度也应要求连续。考虑到正弦曲线具有光滑变化特性，且其微分或积分变换依然为连续函数，借用这一特征，建立起如下基于正弦曲线的加减速控制算法，加加速度在 $[0, t]$ 内变化如图 17 所示。

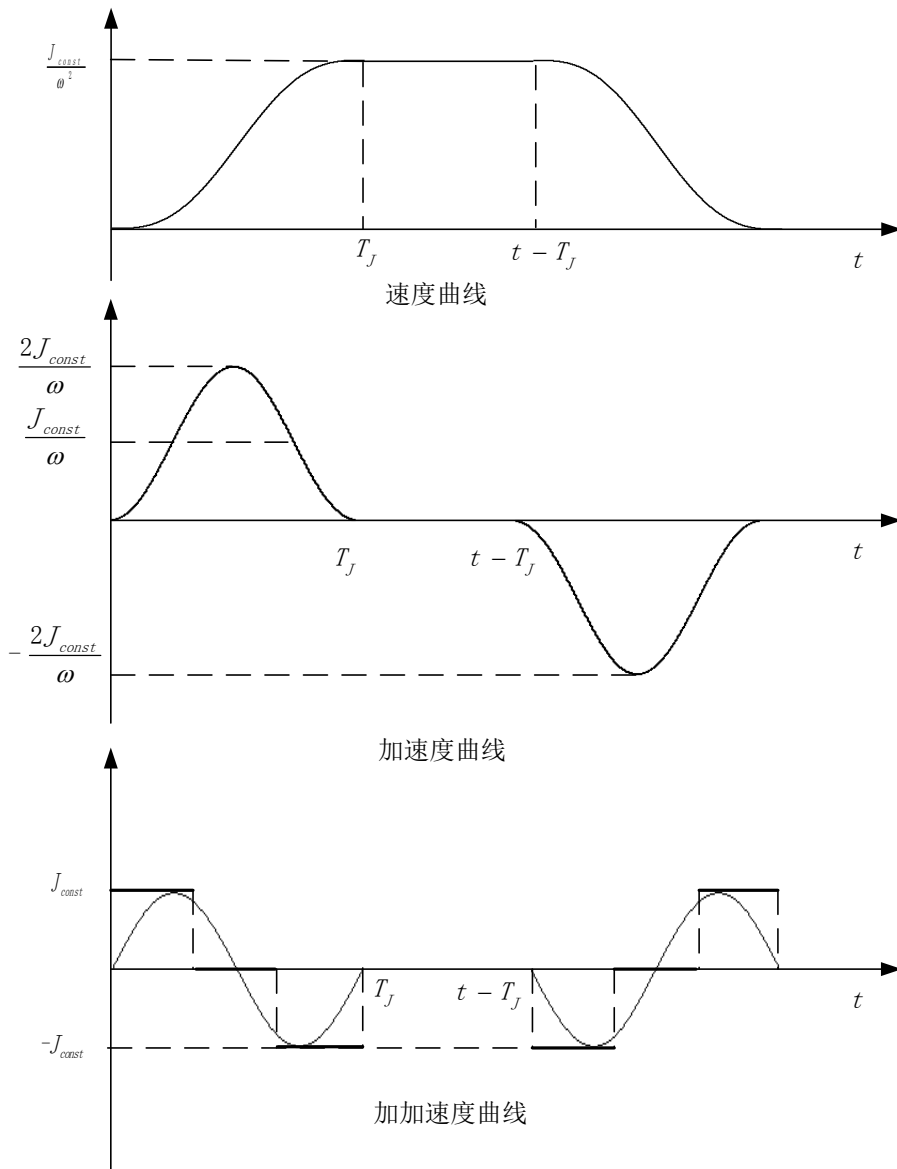


图 17 基于正弦曲线的加减速方法

设加速时间段与减速时间段均为 T_J ，则在 $[0, T_J]$ 内，加加速度曲线设为

$$J(t) = J_{const} \sin \omega t \quad (74)$$

式中, $\omega = 2\pi / T_j$, 则加速度可以表示为

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_0^t J(t)dt = \int_0^t J_{const} \sin \omega t dt \\ &= \frac{J_{const}}{\omega} (1 - \cos \omega t) \\ &= \frac{J_{const} T_j}{2\pi} (1 - \cos \omega t) \end{aligned} \quad (75)$$

设初速度为 v_0 , 则速度可以表示为

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t)dt = v_0 + \int_0^t \frac{J_{const}}{\omega} (1 - \cos \omega t) dt \\ &= v_0 + \frac{J_{const}}{\omega} t - \frac{J_{const}}{\omega^2} \sin \omega t \end{aligned} \quad (76)$$

且

$$\begin{aligned} s(t) &= v_0 + \int_0^t a(t)dt = v_0 + \int_0^t \frac{J_{const}}{\omega} (1 - \cos \omega t) dt \\ &= \int_0^t (v_0 + \frac{J_{const}}{\omega} t - \frac{J_{const}}{\omega^2} \sin \omega t) dt \\ &= v_0 t + \frac{J_{const}}{2\omega} t^2 + \frac{J_{const}}{\omega^3} (\cos \omega t - 1) \end{aligned} \quad (77)$$

从而, 可以得到以下约束关系

$$v(T_j) = v_{\max} = v_0 + \frac{J_{const} T_j^2}{2\pi} \quad (78)$$

$$s(T_j) = v_0 T_j + \frac{J_{const} T_j^2}{2\omega} = v_0 T_j + \frac{J_{const} T_j^3}{4\pi} \quad (79)$$

则式 (75) 可以重写为

$$a(t) = \frac{v_{\max} - v_0}{T_j} (1 - \cos \frac{2\pi}{T_j} t) \quad (80)$$

可以发现, T_j 越大, 则 $a(t)$ 曲线越平缓, 对机床的冲击作用则越小, 即 J_{const} 越小, J_{const} 表征了运动过程中的平稳性。对于减速时间段, $J(t) = -J_{const} \sin \omega t$, 且满足 $J(t - T_j) = 0$ 与 $J(t) = 0$, 与上式类似。至此, 由式 (74) 至式 (79) 完整地建立了基于正弦曲线的加减速法。

7.2 基于正弦曲线加减速法的优化控制算法

为了便于分析, 以长 L 的直线段加工为例, 加工长度足够分为三个阶段, 设起始速度与停止速度分别为 v_0, v_1 , 最大进给速度 v_{\max} , 则目标函数可以表示为

$$\min T = T_{j0} + T_{j1} + \frac{L - v_0 T_{j0} - v_1 T_{j1} - J_{const} T_{j0}^3 / 4\pi - J_{const} T_{j1}^3 / 4\pi}{v_{\max}} \quad (80)$$

其约束条件为

$$\begin{cases} v_{\max} = v_0 + \frac{J_{const0} T_{j0}^2}{2\pi} \\ v_{\max} = v_1 + \frac{J_{const1} T_{j1}^2}{2\pi} \\ J_{const0} \leq J_{Limit} \\ J_{const1} \leq J_{Limit} \end{cases} \quad (81)$$

从而可以完成在指定平稳性情况下（ J_{Limit} ）直线段加工时间最小的优化，并可用于直线圆弧段、折线段等加工型线的加工优化控制。

上述模型亦可表述成，在指定加工时间内（ T_{Limit} ）完成，获得最大平稳性的优化，其平稳性优化模型如下

$$\min J = \max\{J_{const0}, J_{const1}\} \quad (82)$$

其约束条件为

$$\begin{cases} v_{\max} = v_0 + \frac{J_{const0} T_{j0}^2}{2\pi} \\ v_{\max} = v_1 + \frac{J_{const1} T_{j1}^2}{2\pi} \\ T_{j0} + T_{j1} + \frac{L - v_0 T_{j0} - v_1 T_{j1} - J_{const} T_{j0}^3 / 4\pi - J_{const} T_{j1}^3 / 4\pi}{v_{\max}} \leq T_{Limit} \end{cases} \quad (83)$$

八、模型评价

模型 I，在矢量转接模型的基础上，分别对折线无误差加工、指定误差加工方式分别进行了约束条件分析与建模。在转接数上对指定误差优化控制模型进行了改进，将转接数由 2 次转接推广到了多次转接，建立了多转接加工优化控制模型，使得指定误差优化控制模型适用性得到进一步增强。

模型 II，首先从圆弧段构成、进给速度、误差限制三个方面出发，建立了适用于圆弧段加工优化控制模型。考虑到直线圆弧段相切与不相切两种工况，基于指定误差折线加工优化控制模型以及 S 型曲线加减速法，进行了直线圆弧段的加工优化控制建模。

模型 III，在矢量转接模型基础上进行了瞬时启动速度与瞬时启动加速度的修正，并将其应用至折线与圆弧段加工优化控制模型中。算例验证结果表明，所提出的修正模型具有更好的加工效率。

模型IV, 借鉴正弦函数微积分特性, 提出了一种基于正弦曲线的加减速法, 该方法能够保证加加速度变化的连续性与速度变化的平缓性, 且基于正弦曲线加减速法建立的直线段优化控制模型能够平衡加工平稳性与加工效率, 所构造的协调优化模型, 简单且易于实现。

参考文献

- [1] 赵巍. 数控系统的插补算法及加减速控制算法研究[D]. 天津: 天津大学, 2004.
- [2] Jun Hu, Lingjian Xiao, Yuhan Wang, etc. An optional feedrate and solution algorithm for a high-speed machine of small line block with look-ahead[J]. international Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006, 28(9-10):930-935.
- [3] 陈绪兵, 熊蔡华, 熊有伦. S 曲线加减速模式下的加工轨迹效率评价[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2008, 36:1-4.
- [4] 石川, 赵彤, 叶佩青,等. 数控系统 S 曲线加减速规划研究[J]. 中国机械工程, 2007, 18:1421-1425.
- [5] 何均, 游有鹏, 陈浩,等. S 形加减速的嵌套式前瞻快速算法[J]. 航空学报, 2010, 31:842-851.
- [6] 朱明, 游有鹏, 何均. S 形加减速算法前瞻处理研究[J]. 小型微型计算机系统, 2011, 32(10):2140-2144.
- [7] 朱晓春, 屈波, 孙来业,等. S 曲线加减速控制方法研究[J]. 中国制造业信息化, 2006, 35:38-40.
- [8] 郭新贵, 李从心. S 曲线加减速算法研究[J]. 机床与液压, 2002:60-62.
- [9] 周胜德, 梁宏斌, 乔宇. 基于 NURBS 曲线插补的五段 S 曲线加减速控制方法研究[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2011:37-41.
- [10] 罗钧, 汪俊, 刘学明,等. 基于 S 型加减速的自适应前瞻 NURBS 曲线插补算法[J]. 计算机集成制造系统, 2013, 19(01):55-60.
- [11] 岳磊, 赵国勇, 刘晨希,等. 基于 S 曲线加减速的 NURBS 插补控制方法研究[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2015.
- [12] 付云忠, 王永章, 富宏亚,等. 多轴联动线性插补及其“S 加减速”规划算法[J]. 制造技术与机床, 2001, (9):9-11.
- [13] 王宇晗, 肖凌剑, 曾水生,等. 小线段高速加工速度衔接数学模型[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38:901-904.
- [14] 曹宇男, 王田苗, 陈友东,等. 插补前 S 加减速在 CNC 前瞻中的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33:594-599.
- [15] 钱钰博, 焦黎. 数控加工过程仿真的控制系统优化及应用[J]. 机械设计与制造, 2008:148-150.
- [16] 刘鹏飞, 杨孟兴, 宋科, 段晓妮. ‘S’ 型加减速曲线在机器人轨迹插补算法中的应用研究[J]. 制造业自动化, 2012, 34(10):4-11