

所属类别	2021 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号

## 电动汽车无线充电优化匹配研究

### 摘 要

电动汽车的无线充电是一个涉及现场环境、充电效率、结构设计等多方面的复杂问题。由于生产电动汽车的厂家越来越多，不同厂家生产的电动汽车与充电设备的“互通互用”问题一直是阻碍电动汽车发展与推广的因素之一。因此，本文基于**基尔霍夫定律**和**诺伊曼公式**，对电动汽车无线充电系统进行建模，并使用 **Matlab** 软件利用**递归遍历算法**对模型进行求解，为无线充电系统的设计提供了理论依据，计算了系统中各参数对于传输效率的**动态影响**。

问题 1，利用因子分析思想，基于基尔霍夫定律和电磁学基本理论，引入 A 参数、电流电压传输函数、品质因子和耦合系数等概念，确定无线充电设备在受特定约束条件下的无线充电模型。并对模型进行分析，求解出传输效率的目标函数。利用 **matlab** 软件对无线充电传能模型进行积分和微分方程求解，得到所提供的十次无线充电试验的电能传输效率，分别为 **56.20%，54.88%，52.90%，50.79%，48.39%，47.05%，46.02%，43.65%，42.93%，41.97%**。

问题 2，在现实使用中，无线充电车载部分与地面部分的垂直距离可能为规定内的任意值。针对这一现象，在问题 1 的基础上引入了两线圈垂直距离作为进一步约束的条件。经过建模分析，发现线圈间距只对线圈的互感产生影响。利用**诺伊曼公式**和**电偶极子的赫兹矢量积分思想**，建立线圈间距对线圈互感影响的数学模型，对数学模型利用 **matlab** 进行非线性优化后与问题一得到的模型融合，得到了相应的加入两线圈距离影响的无线充电传能模型。针对第一次实验的条件进行求解，得出线圈距离为 100mm,150mm,200mm 和 250mm 时无线充电的传输效率分别为：**55.959%，54.012%，51.269%，47.609%**。对结果进行分析，得到不考虑额外条件在距离因素影响下电动汽车的无线充电传能效率会随着线圈距离的增加而降低的结论。

问题 3，与问题 2 类似，我们将发射频率和发射线圈电感视为变量，而将两线圈垂直距离视为定值。基于此 **x** 建立了针对无线充电传能效率的多约束单目标求解模型。本文采用了**递归遍历算法**对求解模型进行求解以求得最优解。根据求解结果可知，在所给发射频率和发射线圈电感调节范围内，当发射频率为 **100kHz**，匹配阻抗为 **200uH** 时该系统的无线充电传能效率达到最大值，为 **92.7698%**。

问题 4，在问题 3 基础上增加两线圈径向距离影响，经过建模分析，发现径向距离只对线圈的互感产生影响。利用**诺伊曼公式**和**电偶极子的赫兹矢量积分思想**，建立线圈径向距离对线圈互感影响的数学模型，对数学模型利用 **matlab** 进行非线性优化后与问题一得到的模型融合，得到了相应的加入两线圈距离影响的无线充电传能模型。使用**递归遍历算法**对模型进行计算，筛选符合传输效率满足要求的线圈径向距离。最终得到最高传输效率大于 80%时，线圈径向距离也就是偏离距离 **a** 最大值为 **30.68cm**。

**关键词：**无线充电 磁耦合谐振 基尔霍夫定律 诺伊曼公式 赫兹矢量积分 递归遍历

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

电动汽车因其自身的各种优点深受大众喜爱。在其走入千家万户的过程中，充电方式的问题暴露在大众面前并成为急需解决的问题。为了进行快速、安全、方便的充电，研发者通过对目前主流的无线充电方式的非车载部分进行优化，努力使无线充电设备从“专车专用”到能与不同厂家不同型号的电动汽车之间实现互联互通。

该问题具有如下特征以及要求：

- (1) 电动汽车的无线充电系统是由车载部分与非车载部分组成的。
- (2) 无线充电系统的车载部分等效为由一个 RLC 电路与负载组成，非车载部分等效为由另一个 RLC 电路以及电源组成。
- (3) 车载部分与非车载部分之间通过电感元件耦合产生的磁场来传输电能。
- (4) 假设电感元件相互之间的互感仅仅与距离相关。

### 1.2 求解问题

本文根据问题描述，建立相关的数学模型解决下述问题：

问题一：当发射和接收线圈垂直射影完全重合并且两线圈完全谐振下，建立数学模型以表述两线圈间发射频率、匹配阻抗与无线电能传输效率。根据所建数学模型计算所提供的无线充电实验的电能传输效率。

问题二：当电动汽车进行无线充电时受车型、地形等影响，两线圈距离无法保证固定值。所以在第一问所建模型的基础上，引入两线圈的距离条件，建立发射频率、匹配阻抗、两线圈距离与无线电能传输效率的数学模型。根据所建数学模型计算在引入距离条件后所提供的无线充电实验的电能传输效率并比较分析。

问题三：根据所建模型探究当距离固定时发射频率、匹配阻抗对传输效率的影响。并论证能否通过调整发射频率、匹配阻抗值使得传输效率达到最大，同时求出传输效率最大值。

问题四：受现实因素影响，电动汽车无线充电装置线圈之间的垂直射影很难完全重合。在第三问的基础上计算两线圈垂直距离  $h$  为 100mm 时，保证最高传输效率大于 80% 前提下两线圈 X 轴方向偏离距离  $a$  的最大值。

## 二、问题分析

为了研究两线圈之间的电能无线传输过程，我们需要建立线圈之间电磁学传递模型。在分析问题、建立模型之前，我们首先对一些电磁学的基本知识进行一定的介绍：

**(1)电磁感应：**在闭合电路中，当穿过电路的磁通量发生改变时，电路中就会生成感应电流。这种因为磁场改变而在电路中产生电流的现象称之为电磁感应。

**(2)磁耦合谐振：**通过在电磁感应无线充电电路中加装补偿装置，使两边线圈的谐振频率一致。当传输频率等于谐振频率时，线圈之间会产生磁耦合谐振效应，发射线圈和接收线圈的磁场相位被同步，耦合状态由松散状况转为强化状态。发射线圈产生的磁场可在接收线圈上产生最大的电流，借此可以完成远距离和高效率的无线电能传输。

**(3)基尔霍夫定律：**基尔霍夫定律是计算和分析电路的基础，包括基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。

基尔霍夫电流定律的基本表述为：所有进入某节点的电流的总和等于所有离开这节点的电流的总和。

基尔霍夫电压定律的基本表述为：沿着闭合回路所有元件两端的电势差（电压）的代数和等于零。

**(4)诺依曼公式：**通过对电偶极子产生磁场的积分来计算两元器件间互感值的公式，其具体表述为：

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{dl_1 dl_2}{|r_2 - r_1|} \quad (2.1)$$

## 2.1 问题一的分析

问题一给出了不同线圈间距时发射线圈和接收线圈的参数，要求建立发射频率、匹配阻抗与无线电能传输效率的数学模型。题目中已经给出电磁学等效电路图，需要根据此电路图建立两线圈之间电能传输的模型。基于基尔霍夫定律可以得出两线圈感应电流、电压的大小，引入品质因数和耦合系数的概念，将输入功率与输出功率用其感应电流、电压表示出来，然后将其比值转化为关于品质因数和耦合系数之间的关系，从而建立出输入功率与输出功率之比，也就是传输效率的数学模型。建立完成模型后分析其收到的约束条件，寻找算法进行计算得出结果。

## 2.2 问题二的分析

问题二在问题一的基础上加入了两线圈之间的距离对模型的影响。在无线充电系统中，改变两线圈之间的距离，随之而改变最大的是两线圈之间的互感。要解决此题，只需在问题一的模型上加入互感对距离的模型。由互感的定义和诺伊曼公式可以得出距离对互感影响的模型。对第一问的模型进行扩充，加入距离对互感的影响，分析其收到的新约束条件，寻找算法进行计算得出结果。

## 2.3 问题三的分析

问题三是建立在问题一所建立的电能传输模型基础上的最大值求解问题。只需找到其约束条件，然后采用递归遍历算法对离散化后的约束条件进行求解，即可得出无线传输效率的最大值。以及最大值出现时的发射频率和发射线圈电感。

## 2.4 问题四的分析

问题四基于问题三结论，找到传输效率最大时的发射频率和发射线圈电感，在这两个参数保持不变的基础上改变接收线圈圆心的偏移量  $a$ ，找到传输效率高于 80% 时，接收线圈圆心的最大偏移量  $a$ 。在无线充电系统中，改变接收线圈圆心的偏移量  $a$ ，随之改变最大的仍是两线圈之间的互感。由互感的定义和诺伊曼公式可以得出接收线圈圆心偏移量  $a$  对互感影响的模型。要解决此题，只需引入接收线圈圆心偏移量  $a$  对线圈互感的影响，对第一问模型进行扩充，基于第三问的结论，采用递归遍历算法对离散化后的约束条件进行求解，即可得出接收线圈圆心的最大偏移量  $a$ 。

### 三、模型假设

为了便于问题的研究，对题目中某些条件进行简化及合理的进行假设：

- 1.在此无线充电系统中，两线圈视为理想线圈，且工作时不受外界磁场干扰。
- 2.两线圈均视为由 10 匝圆形线圈构成，且每匝线圈的半径均为 35cm。
- 3.题目中的电源、电感、电容、电阻等均视为理想元器件，不随外界条件的变化而变化。
- 4.题目中的负载为纯阻性负载，其流过电压与电流的比值为接收装置电阻  $R_2$ 。
- 5.假设无线传输充电装置采用的线圈为平面螺旋线圈。

### 四、符号说明

考虑本文会出现大量的公式推导过程，为了叙述方便，现对本文常出现的部分符号进行统一说明，详见表 4.1。

表 4-1 符号说明表

符号	意义
$h$	两线圈间垂直距离
$a$	两线圈圆心间水平距离
$L_1$	发射线圈电感
$L_2$	接收线圈电感
$M_{12}$	发射线圈、接收线圈间的互感
$f$	发射频率
$R_i$	发射装置电阻
$R_L$	接收装置电阻
$r$	线圈半径
$N$	线圈匝数
$k_{12}$	两线圈间耦合系数
$\omega$	发射角频率
$Q_1$	发射电路品质因数

$Q_2$	接收电路品质因数
$V_1$	发射电路电压
$I_1$	发射电路电流
$V_2$	接收电路电压
$I_2$	接收电路电流
$j$	复数虚部标识
$\mu_0$	真空磁导率

（注：未列出符号以出现处介绍为准）

## 五、问题一

### 5.1 模型的建立

#### (1) 确定目标函数

建立如图 5.1 所示的无线充电系统等效电路，将发射线圈所在电路与接收线圈所在电路均等效为 RLC 电路与电源或者负载相连接。两部分电路之间通过线圈的谐振完成电能传输。

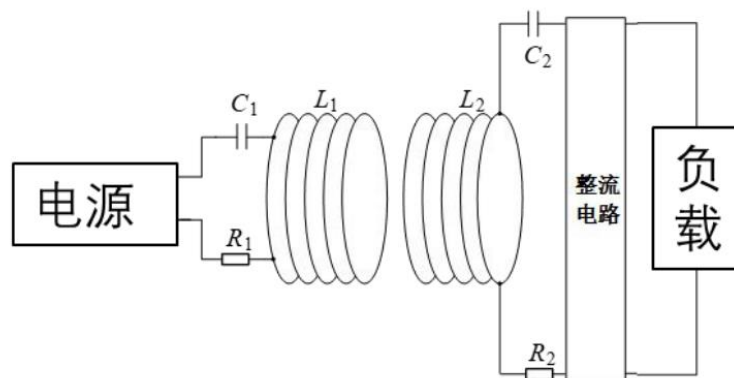


图 5.1 无线充电系统结构等效图

为了更直观的了解并解决问题，对图 5.1 进行简化构建其一维无线传能模型，该模型如下图 5.2。

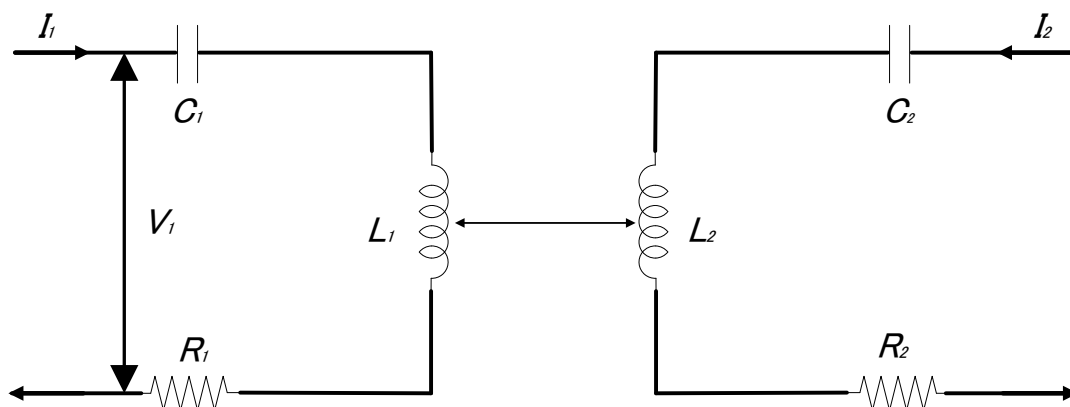


图 5.2 无线充电系统一维无线传能模型

从图 5.2 中，我们能更直观的看出该装置的传能方式，电感  $L_2$  通过电磁感应方式从电感  $L_1$  获得能量。图中的  $I$ 、 $V$ 、 $R$ 、 $L$ 、 $C$  分别表示着该电路的等效电流、等效电压、等效电阻、等效电感以及等效电容。

因为该题要建立的是无线充电系统的发射与接收线圈在完全谐振下的电能传输模型，所以需要考虑到电路的品质因子。电路的品质因子也可称之为品质因数是用于表示电路的共振频率相对一带宽的大小，品质因子越高则电路在谐振过程中能量损失速度越慢。电路的品质因子  $Q_i$  由式 (5.1) 确定。

$$Q_i = \omega L_i / R_i \quad (5.1)$$

根据已知条件，该系统的耦合系数可由式 (5.2) 确定，并且电源和发射线圈、接收线圈和负载以及两个 RLC 电路之间的能量传输损失可以忽略不计，均认为他们的耦合系数为 1。

$$k_{12} = M_{12} / \sqrt{L_1 / L_2} \quad (5.2)$$

根据无线传能模型，我们引入参数  $A$  建立输入与接收电路之间的信号关系，其信号关系表达方程为式 (5.3)：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

在本模型中，输入电路与接收电路具有近似对称的结构，且两线圈的耦合仅通过之间的互感，因此参数  $A$  可进一步表达为式 (5.4)：

$$\begin{cases} A_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{k_{12}} \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{j}{Q_1} \right) = A_{22} \\ A_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{-j\omega L_1}{k_{12}} \left[ k_{12}^2 - \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{j}{Q_1} \right)^2 \right] \\ A_{21} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{j\omega L_1 k_{12}} \end{cases} \quad (5.4)$$

上式 (5.4) 中： $\omega_0$  为电路谐振的角频率，表示为  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ ； $\omega_n$  为归一角频率也就是电路工作时的角频率与电路谐振角频率之比，表示为  $\omega_n = \omega/\omega_0$ 。

当将发射电路视为只由电源电压与等效阻抗所组成的简化电路时，该简化电路满足式 (5.5)。

$$\begin{cases} V_1 = (Z_1 + j\omega L_1) I_1 - j\omega M_{12} I_2 \\ 0 = (R_2 + j\omega L_2) I_2 - j\omega M_{12} I_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

在接收电路中，负载对振荡器的作用等效为反射阻抗  $Z_2$ ，由于负载  $Q$  值远远小于线圈  $Q$  值，因此有  $R_L \gg R_D + j\omega M_{12} I_2$ ，其中  $R_L$ ， $R_D$  分别为接收线圈与负载阻值，则反射阻抗  $Z_D$  可以简化为：

$$Z_2 \approx \omega M_{12}^2 / R_2 = k_{12}^2 Q_2 \omega L_1 \quad (5.6)$$

接收电路的响应对输入电路的影响可通过电路中电压传输与电流传输的关系来表达，为：

$$K_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{A_{11} V_2 + A_{12} (-I_2)} = \frac{1}{A_{11} + A_{12} / Z_2} \quad (5.7)$$

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{A_{21} V_2 + A_{22} (-I_2)} = \frac{-1}{A_{21} Z_2 + A_{22}} \quad (5.8)$$

式 (5.7) 与式 (5.8) 中： $K_V$  为电压传输函数， $K_I$  为电流传输函数。

本题中电能传输效率可由接收电路的负载输出功率与输入电路的输入功率比值来

表现，因此综合上述公式，电能传输效率  $\eta$  表示为式 (5.9)：

$$\eta = \left| \frac{V_2 I_2}{V_1 I_1} \right| = \left| \frac{V_2}{V_1} \right| \cdot \left| \frac{I_2}{I_1} \right| = |K_V| \cdot |K_I| = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (5.9)$$

由式 (5.9) 可以得出  $K_{12}, Q_1, Q_2$  都影响着传输效率  $\eta$ 。

由以上推导过程建立目标函数：

$$\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (5.10)$$

## (2) 确定约束条件

题目中电路的参数对效率的求取构成了约束条件。

$$\text{约束条件: } \begin{cases} L_{1i} = L_{1testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ L_{2i} = L_{2testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ M_i = M_{testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ h_i = h_{testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ f = 30 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

其中  $L_{1testi}, L_{2testi}, \mu_{testi}, h_{testi}$  分别为附件 1 中所对应的测量值。

## (3) 确定数学模型

$$\text{总体数学模型: } \begin{cases} \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \\ L_{1i} = L_{1testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ L_{2i} = L_{2testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ M_i = M_{testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ h_i = h_{testi}, i = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ f = 30 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

## 5.2 模型的求解

考虑到本模型应用了大量的电磁学知识，而且本模型需要考虑积分、微分方程解法等问题，综合考虑，本文选用 matlab 软件对此模型进行求解。



为求解此问题，我们采取直接利用结论公式进行计算的方式对模型进行计算，具体求解过程如下：

Step1: 将题目中已知的各个信息输入 matlab 软件中。

Step2: 将各个信息的单位制全部化为国际单位制方便计算。

Step3: 对结论公式中用到的各个中间变量（如耦合系数  $k_{12}$ ，发射电路品质因数  $Q_1$ ，接收电路品质因数  $Q_2$  等）进行计算，得出需要的变量值。

Step4: 将中间变量带入结论公式  $\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1}$  中，得出各个实验的效率。

Step5: 循环输出各个实验的效率，完成对问题的求解。

### 5.3 结果分析

通过对模型的求解，我们得到以下结论：

第 1 次实验的效率为： 56.196%

第 2 次实验的效率为： 54.878%

第 3 次实验的效率为： 52.896%

第 4 次实验的效率为： 50.782%

第 5 次实验的效率为： 48.391%

第 6 次实验的效率为： 47.053%

第 7 次实验的效率为： 46.022%

第 8 次实验的效率为： 43.648%

第 9 次实验的效率为： 42.929%

第 10 次实验的效率为： 41.962%

其中线圈间距与传输效率如图 5.3 所示。

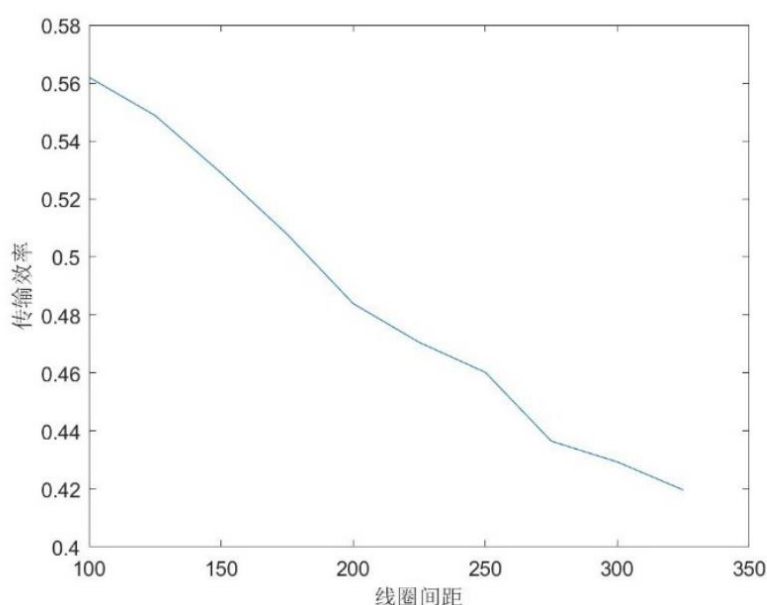


图 5.3 线圈间距与传输效率

通过对结果的分析，我们可以得到如下结论：

在电路保持不变、两线圈垂直投影完全重合、发射频率固定时，两线圈之间的传输效率随距离的增大而减小。原因是两线圈间的互感随距离的增大而减小，从而影响传输效率也随之减小。

## 六、问题二

### 6.1 模型的建立

#### (1) 确定目标函数

依据对模型的假设与电磁学基本知识, 在本小题中, 输入线圈和接收线圈相互平行且中心点处于同一轴线上, 建立如图 6.1 所示三轴坐标系。

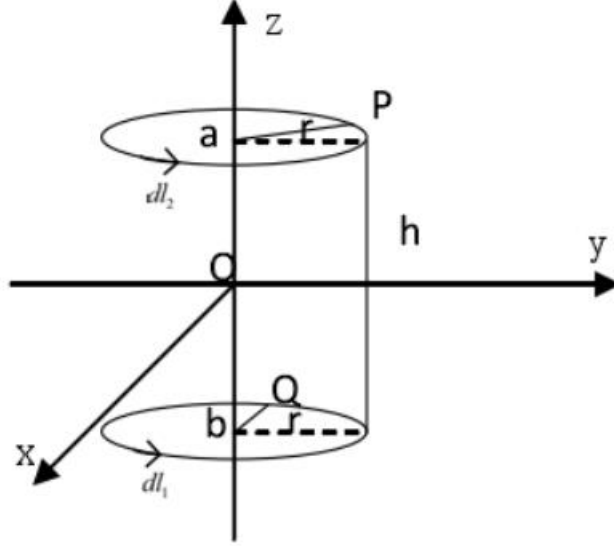


图 6.1 同轴线圈坐标图

此时两线圈的中心点分别为 $(0,0,z_1)$ 与 $(0,0,z_2)$ .两线圈中心点在轴线上的距离为 $h$ , 两线圈各自的电流分别表示为 $I_1, I_2$ 。若在该坐标系中的线圈上各取一点, 其坐标可分别表述为 $(r, \theta, z_1), (r, \varphi - \theta, z_2)$ , 此时所取的两点之间的距离可以如式 (6.1) 表示:

$$d = |r_2 - r_1| = [2r^2 - 2r^2 \cos(\varphi - \theta) + h^2]^{1/2} \quad (6.1)$$

此时, 两线圈之间的互感可以通过诺伊曼公式得到:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{dl_1 dl_2}{|r_2 - r_1|} \quad (6.2)$$

将上述两式结合, 可得此题输入线圈电路与接收线圈电路之间的互感计算公式:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\varphi - \theta) d\theta}{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\varphi - \theta) + h^2}} \quad (6.3)$$

根据式 (6.3), 可以计算出任意距离下的互感的大小。

由第一问模型得出效率公式 (5.10) 为

$$\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (5.10)$$

因此本题的目标函数如式 (6.4) 所示

$$\text{目标函数: } \begin{cases} M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\theta - \varphi) + h^2}} \\ \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \end{cases} \quad (6.4)$$

(2) 确定约束条件

题目中电路的参数对效率的求取构成了约束条件。

$$\text{约束条件: } \begin{cases} L_1 = 162.21 \\ L_2 = 163.6 \\ h_i = [100, 150, 200, 250] \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ f = 30 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

(3) 确定数学模型

$$\text{总体数学模型: } \begin{cases} M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\theta - \varphi) + h^2}} \\ \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \\ L_1 = 162.21 \\ L_2 = 163.6 \\ h_i = [100, 150, 200, 250] \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ f = 30 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

## 6.2 模型的求解

经过对模型的分析，我们发现线圈间距只对线圈的互感产生影响。

因此可以对每个距离（100mm、150mm、200mm、250mm）下的互感值进行计算，详细计算公式如下：

$$h_i = 50 + 50i \cdots \cdots (\text{其中 } i = 1, 2, 3, 4) \quad (6.7)$$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\theta - \varphi) + h^2}} \quad (6.8)$$

耦合系数 $k_{12}$ 的计算公式为：

$$k_{12}(i) = M_i / \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (6.9)$$

品质因数 $Q_1$ 和 $Q_D$ 的计算如下：

$$Q_1 = \omega \cdot L_1 / R_1 \quad (6.10)$$

$$Q_2 = \omega \cdot L_2 / (R_2 + R_L) \quad (6.11)$$

因此，效率 $\eta$ 为：

$$\eta_i = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2(i)Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2(i)Q_1} + \frac{k_{12}^2(i)Q_1^{-2}}{k_{12}^2(i)Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (6.12)$$

所以，我们采取先计算线圈的互感，再直接利用结论公式进行计算的方式对模型进行计算，具体求解过程如下：

Step1: 将题目中已知的各个信息输入 matlab 软件中。

Step2: 将各个信息的单位制全部化为国际单位制方便计算。

Step3: 计算积分  $\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\theta - \varphi) + h^2}}$ ，得出互感的值，并进行循

环，得出各个线圈间距对应的互感值。

Step4: 将计算互感与题目中给出的互感值进行比对，检验模型是否正确。并绘制不同线圈间距下。

Step5: 对结论公式中用到的各个中间变量（如耦合系数 $k_{12}$ ，发射电路品质因数 $Q_1$ ，接收电路品质因数 $Q_2$ 等）进行计算，得出需要的参数值。

Step6: 将互感值与中间变量带入结论公式  $\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1}$  中进行计算。

Step7: 循环输出各线圈间距对应的效率，完成对问题的求解。

6.3 结果分析

根据模型计算互感的方法绘制出了模型的理论建模值曲线，同时对比互感值的十次实验结果，发现：互感的建模值与实验值拟合效果较好，能够反映不同距离下互感的变化特征及互感值的大小。曲线如下图 6.2 所示。

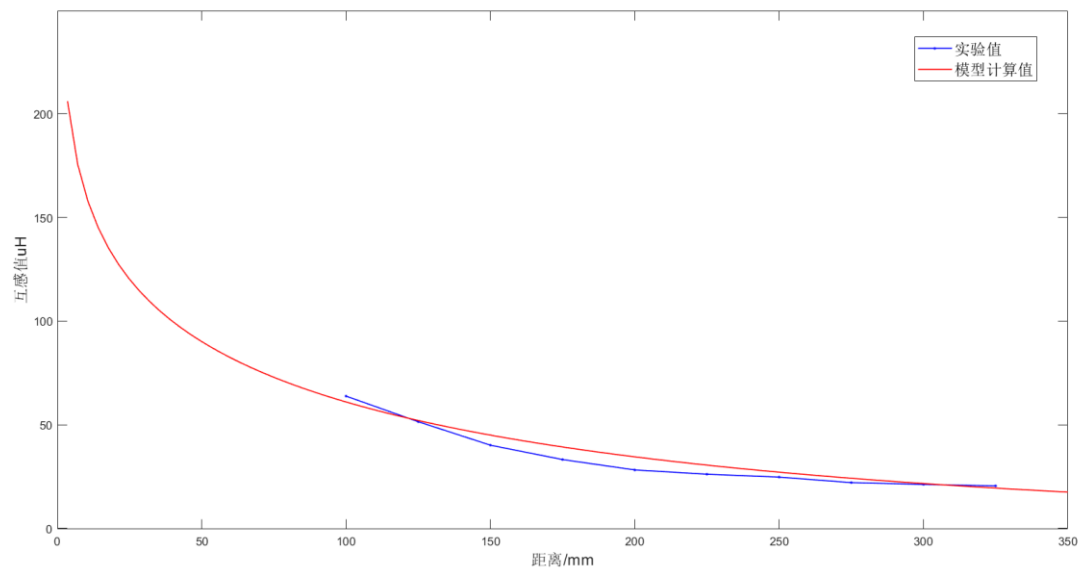


图 6.2 互感大小的实验值曲线与模型计算值曲线

根据模型进行求解，可以得到两线圈的距离 100mm 改为题目指定值时的无线充电的电能传输效率，其计算结果见下表 6.1。因此，在距离为 100 毫米时，其电能传输效率为 55.959%；在距离为 150 毫米时，其电能传输效率为 54.012%；在距离为 200 毫米时，其电能传输效率为 51.269%；在距离为 250 毫米时，其电能传输效率为 47.609%。根据模型计算结果，绘制出此情况下电能传输效率的变化趋势图，如下图 6.3 所示。

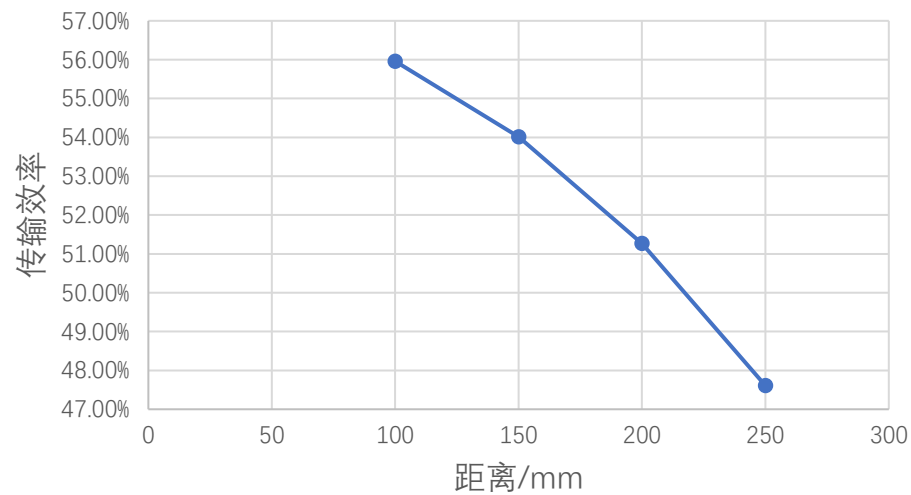


图 6.3 两线圈距离改为指定值时电能传输效率

表 6.1 不同距离下的电能传输效率

距离/mm	100	150	200	250
传输效率	55.959%	54.012%	51.269%	47.609%

## 七、问题三

### 7.1 模型的建立

#### (1) 确定目标函数

问题三是建立在问题一所建立的电能传输模型基础上的最大值求解问题。所以其目标函数与问题一相同，约束条件以及算法不同。

$$\text{目标函数: } \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (5.10)$$

#### (2) 确定约束条件

题目中电路的参数对效率的求取构成了约束条件。

$$\text{约束条件: } \begin{cases} 100 \leq L_1 \leq 200 \\ L_2 = 163.6 \\ h_i = 100 \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ 5 \leq f \leq 100 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

#### (3) 确定数学模型

$$\text{总体数学模型: } \begin{cases} \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \\ 100 \leq L_1 \leq 200 \\ L_2 = 163.6 \\ h_i = 100 \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ 5 \leq f \leq 100 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

### 7.2 模型的求解

经过对模型的分析，我们采用如下的方式进行求解：

对于发射频率在 5~100KHz，进行离散化后，离散为 951 个点，每个点的频率为：

$$f = 4.9 + i/10 \quad (\text{其中 } i=1, 2, \dots, 951) \quad (7.3)$$

对于匹配阻抗在 100~200uH，进行离散化后，离散为 1001 个点，每个点的电感为：

$$L_{ij} = 99.9 + j/10 \quad (\text{其中 } j=1, 2, \dots, 1001) \quad (7.4)$$

因此根据传输效率计算公式，可以得到一个 1001×951 的传输效率结果矩阵，矩阵的每一个值代表该频率和匹配阻抗下的传输效率。

最后求出矩阵中的最值就可以找到其最值的频率和匹配阻抗条件。

考虑到问题三是在问题一基础上求最优解，我们采用递归遍历算法对模型进行求解。

**Step1:** 将题目中已知的各个信息输入 **matlab** 软件中。

**Step2:** 将各个信息的单位制全部化为国际单位制方便计算。

**Step3:** 对结论公式中用到的各个中间变量（如耦合系数  $k_{12}$ ，发射电路品质因数  $Q_1$ ，接收电路品质因数  $Q_2$  等）使用遍历递归算法进行计算，得出需要的变量组。

**Step4:** 将中间变量组带入结论公式  $\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1}$  中，使用遍历递归算法进行计算，得出不同发射频率与发射线圈电感对应的效率。

**Step5:** 对所有效率去一个最大值，并计算其发射频率与发射线圈电感值，并绘制发射频率、发射线圈电感值与电能传输效率的曲线，完成对问题的求解。

### 7.3 结果分析

在第一次实验的情况下，通过改变发射频率和匹配阻抗可以提升无线充电传输效率，发射线圈电感的调节范围为 100~200uH，发射频率的调节范围为 5~100KHz，通过模型对不同电感值和不同频率值的矩阵组合进行划分、枚举遍历、计算等过程，可以得到在规定的电感和频率范围下无线充电传输效率的最大值。无线充电传输效率的最大值为 92.7698%，此时发射频率为 100Hz，匹配阻抗为 200uH。

同时，对不同电感值和不同频率值的矩阵组合的效率计算值进行绘图，X 坐标为发射频率，Y 坐标为匹配阻抗，Z 坐标表示传输效率。可以得到如下图 7.1~图 7.3 所示的传输效率曲面图，曲面图的任意一点代表该频率和匹配阻抗值下的传输效率。

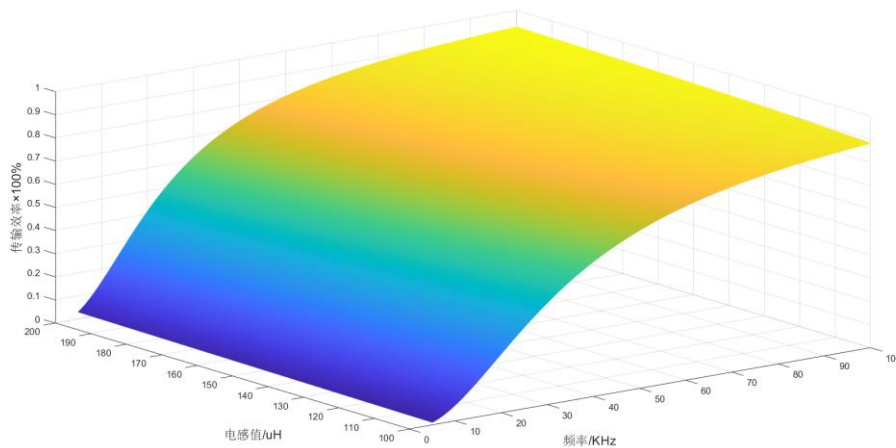


图 7.1 任意规定电感值和频率值下的传输效率



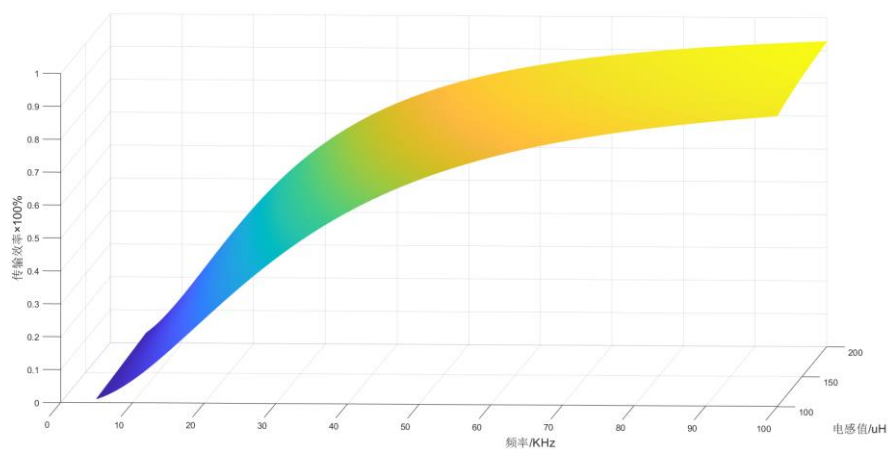


图 7.2 任意规定电感值和频率值下的传输效率

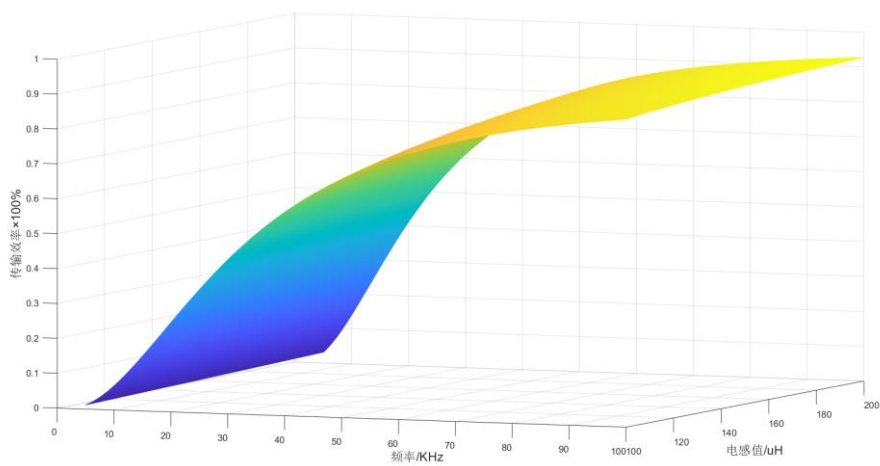


图 7.3 任意规定电感值和频率值下的传输效率

## 八、问题四

### 8.1 模型的建立

#### (1) 确定目标函数

受现实环境和实际操作影响，线圈对位过程中不止两线圈轴向距离会受到影响，其径向距离也会受到如操作、地形等因素的影响而发生偏移变化，这进一步加大了无线电能传输与分析的难度。其等效示意图如下图 8.1 所示。

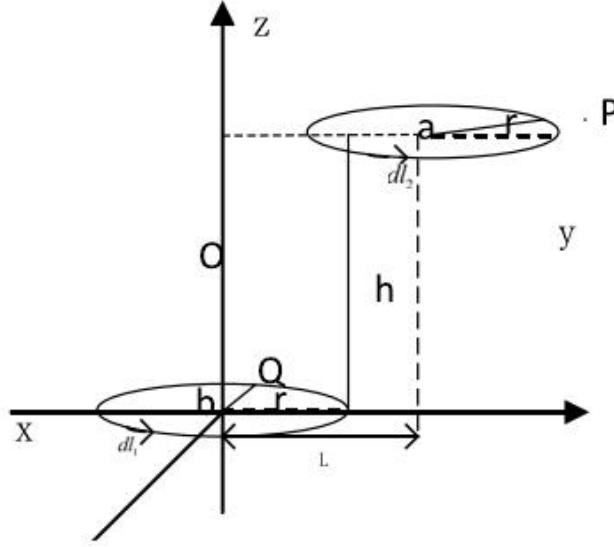


图 8.1 径向偏移时坐标图

在本题中将不再考虑轴向位移变化，只涉及径向位移变化，两线圈间的径向位移变化为  $L$ 。和第二题一样，在两个线圈上各自取一点，此时的两点坐标分别为  $(r \cos \theta, r \sin \theta, 0), (r \cos \varphi, r \sin \varphi + L, h)$ ，则两点之间的距离可以表示为：

$$\begin{cases} dl_1 = r(\cos \theta - \sin \theta) d\theta \\ dl_2 = r(\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \\ dl_1 dl_2 = r^2 \cos(\theta - \varphi) d\theta d\varphi \end{cases} \quad (8.1)$$

此时，再通过诺伊曼公式可以得到两线圈之间在径向间距影响下的互感：

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{r^2 (\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (L + r \sin \theta - r \sin \varphi)^2 + h^2}} \quad (8.2)$$

由第一问模型得出效率公式为：

$$\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (5.10)$$

所得出的第四问目标函数如下式 (8.3)：

$$\text{目标函数: } \begin{cases} M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{r^2 (\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (a + r \sin \theta - r \sin \varphi)^2 + h^2}} \\ \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \end{cases} \quad (8.3)$$

## (2) 确定约束条件

题目中电路的参数对效率的求取构成了约束条件。

$$\text{约束条件: } \begin{cases} L_1 = 200 \\ L_2 = 163.6 \\ h_i = 100 \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ f = 100 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a \geq 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

## (3) 确定数学模型

$$\text{总体数学模型: } \begin{cases} M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{r^2 (\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (a + r \sin \theta - r \sin \varphi)^2 + h^2}} \\ \eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1} \\ L_1 = 200 \\ L_2 = 163.6 \\ h_i = 100 \\ R_1 = 1.55 \\ R_2 = 432.24 \\ f = 100 \\ N = 10 \\ r = 35 \\ a \geq 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

## 8.2 模型的求解

问题四是对问题二、问题三的更进一步的分析。

经过对模型的分析,我们发现两线圈圆心间水平距离只对线圈的互感产生影响。且我们已经在模型三中证明,在  $100 \text{ kHz}$  和  $200 \mu\text{H}$  时传输效率达到最大,所以我们只需对  $100 \text{ kHz}$  和  $200 \mu\text{H}$  时的传输效率进行分析,通过改变此条件下的水平距离,得到对应的互感值,进而得到传输效率。从而求出在传输效率为 80% 以上时,两线圈圆心间水平距离的最大值。

对于偏移距离  $L$  在合理范围内进行离散化，每个点的互感值为：

$$M_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{r^2 (\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (L_k + r \sin \theta - r \sin \varphi)^2 + h^2}} \quad (k=1,2,3...) \quad (8.6)$$

耦合系数  $k_{12}$  的计算公式为：

$$k_{12}(k) = M_k / \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (8.7)$$

在此模型中： $k_{2d} = 1$

品质因数  $Q_1$  和  $Q_D$  的计算如下：

$$Q_1 = \omega \cdot L_1 / R_1 \quad (8.8)$$

$$Q_D = \omega \cdot L_2 / (R_2 + R_L) \quad (8.9)$$

因此，传输效率为：

$$\eta_k = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2(k) Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2(k) Q_1} + \frac{k_{12}^2(k) Q_1^{-2}}{k_{12}^2(k) Q_1 Q_2} \right)^{-1} \quad (8.10)$$

计算出偏移各个位置后的传输效率后绘制传输效率与位置得关系图，可以得到使传输效率大于 80% 的位置，该位置的偏移距离即为所求。

所以，我们采取在 100 kHz 和 200  $\mu H$  的条件下，对两线圈圆心间水平距离使用递归遍历算法对模型进行计算，具体求解过程如下：

**Step1:** 将题目中已知的各个信息（发射频率为 100 kHz，发射线圈电感为 200  $\mu H$ ）输入 matlab 软件中。

**Step2:** 将各个信息的单位制全部化为国际单位制方便计算。

**Step3:** 对结论公式中用到的各个中间变量（如耦合系数  $k_{12}$ ，发射电路品质因数  $Q_1$ ，接收电路品质因数  $Q_2$  等）进行计算，得出需要的变量值。

**Step4:** 计算积分  $\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos(\theta - \varphi) d\varphi}{\sqrt{r^2 (\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (L + r \sin \theta - r \sin \varphi)^2 + h^2}}$ ，使用递归遍历算法得出不同两线圈圆心间水平距离对应的互感的值。

**Step5:** 对不同两线圈圆心间水平距离对应的互感的值与不同两线圈圆心间水平距离进行绘图。

**Step6:** 将中间变量和互感值带入结论公式  $\eta = \left( 1 + \frac{2}{k_{12}^2 Q_1^2} + \frac{Q_2}{k_{12}^2 Q_1} + \frac{k_{12}^2 Q_1^{-2}}{k_{12}^2 Q_1 Q_2} \right)^{-1}$  中，使用遍历递归算法进行计算，得出不同水平距离对应的效率。

**Step7:** 在效率小于 80% 时，中止遍历递归算法，两线圈圆心间水平距离的最大值极为上一个遍历递归的数值，完成对问题的求解。

### 8.3 结果分析

根据建立的模型，分析了接收线圈圆心向 X 轴正方向偏离不同的距离后，其无线充电的传输效率的变化情况，同时根据题目要求的传输效率不低于 80%，计算出了保证该效率时所要求的最大偏离距离。模型分析和计算得知，保证该效率时的最大偏离距离为 30.68cm，当偏移距离小于 30.68cm 时，系统的传输效率大于 80%，当偏移距离大于 30.68cm 时，系统的传输效率小于 80%。

同时分析偏移距离与传输效率曲线（如下图 8.2 所示），可以得出传输效率的变化规律，传输效率随着偏移距离的增大会缓慢下降，在偏移距离达到线圈半径大小时，传输效率降为了 74%左右

其后传输效率急速下降；当偏移距离到达一定的值后，由于线圈异侧对应和两线圈电流反向的缘故，会出现传输效率先缓慢增大再缓慢减小的现象，在偏移距离达到线圈半径两倍大小左右时，传输效率到达了其异侧对应下的极值，约为 22%，最后随着距离的不断增大，传输效率趋于 0。

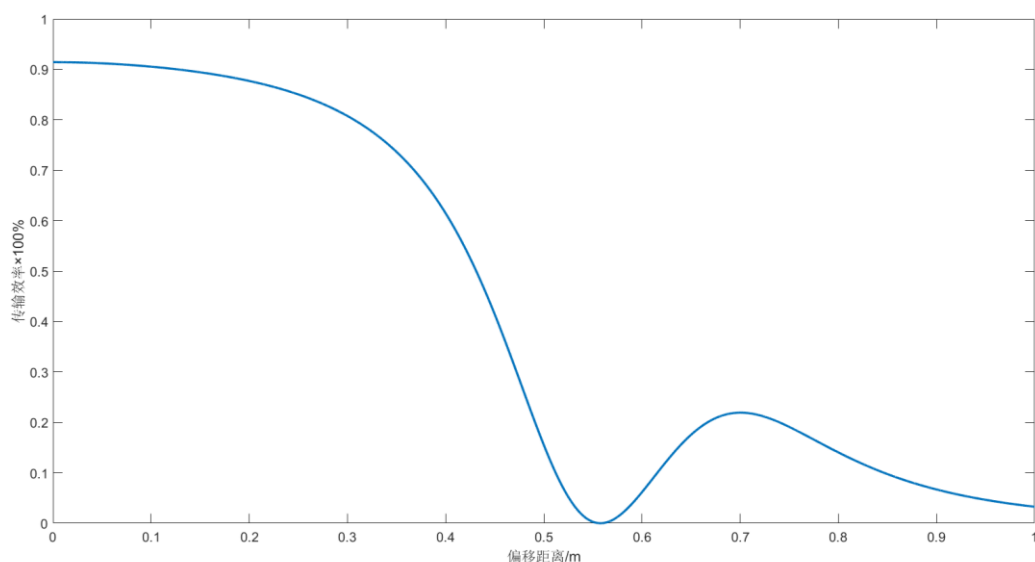


图 8.2 偏移距离与传输效率曲线

## 参考文献

- [1]张献.基于电磁—机械同步共振的无线电能传输与转换方法研究[D].河北工业大学,2012.
- [2]刘璐,徐桂芝,石凯凯,曹智阳.线圈偏移对无线电能传输效率的影响及优化[J].现代电子技术,2021,44(08):123-127.
- [3]李文华,马源鸿,王炳龙.电动汽车无线充电线圈错位及偏移影响研究[J].计算机仿真,2018,35(02):101-104+228.
- [4]陆洋锐.基于阻抗匹配效率优化的电动汽车无线电能传输的研究[D].江苏大学,2020.
- [5]王琦婷,魏业文,周健飞,李应智.感应耦合电能传输系统最佳工作点跟踪研究[J].工矿自动化,2019,45(12):54-59.
- [6]朱勇.电动汽车无线充电系统建模与电磁安全性研究[D].重庆大学,2016.
- [7]代朋,韩淑伦,周迪帆,郭艳群,蔡传兵.磁耦合谐振式超导无线输电频率特性[J/OL].上海大学学报(自然科学版), 2021-08-08:1-8.
- [8]杨瑞东,杨俊卿,孙博.非对称线圈谐振式无线充电系统的设计与研究[J].现代电子技术,2019,42(12):94-99.
- [9]傅文珍,张波,丘东元,王伟.自谐振线圈耦合式电能无线传输的最大效率分析与设计[J].中国电机工程学报,2009,29(18):21-26.
- [10]聂彬彬,聂丹凤.磁耦合谐振式无线电能传输方法研究[J].微处理机,2021,42(03):61-64.
- [11]范兴明,贾二炬,高琳琳,张伟杰,焦自权,张鑫.基于目标参数最优的磁耦合谐振式无线能量传输系统频率特性分析及仿真验证[J].上海交通大学学报,2020,54(04):430-440.
- [12]Koteiche Ali,Brenes Alexis,Malleron Kevin,Sou Gerard. Maximum power point of magnetoelectric transducer for wireless power transmission[J]. Smart Materials and Structures,2021,30(9).

## 附录

编程软件: Matlab

问题 1 程序

程序编号	1	文件名称	Question1.m
<pre> clc;clear; data = [100 162.21 163.6 63.83         125 161.46 163.04 51.49         150 161.36 163.15 40.17         175 161.75 162.87 33.24         200 161.79 162.96 28.24         225 161.59 163.15 26.17         250 161.53 163.25 24.78         275 161.35 162.72 22.12         300 162.61 163.74 21.25         325 161.39 163.26 20.53];  z = zeros(10,1); data = [data,z]; LT = data(:,2); LRL = data(:,3); M = data(:,4); f = 30; RT = 1.55; RRL = 432.24; RR = 1.55; RL = RRL-RR; CT = 0.1740; CRL = 0.1725;  % 单位转换 M = M / 1000000; f = f * 1000; CT = CT / 1000000; LT = LT / 1000000; LRL = LRL / 1000000; CRL = CRL / 1000000;  omega = f * 2 * pi;  % 循环法计算传输效率 for i = 1:10     k12(i) = M(i) / sqrt(LT(i)*LRL(i));     Q1(i) = omega * LT(i) / RT;     QD(i) = omega * LRL(i) / RRL;     mu(i) = 1/(1 + 2 / k12(i)^2 / Q1(i)^2 + QD(i) / k12(i)^2 / Q1(i) ... </pre>			
			<pre> % 定义实验数据矩阵 % 定义一个值为 0 的列 % 拼接矩阵 % 发射端 L1 的电感值数据 % 接收端 L2 的电感值数据 % 互感值数据 % 发射频率 % 发射端电阻 R1 % 接收端总电阻值 % 接收端 R2 的电阻值 % 接收端 RL 的电阻值 % 发射端电容 % 接收端电容  % 角频率 ω  % 耦合系数 % 发射端品质因数 % 接收端品质因数 </pre>

```

        + (k12(i)^2+Q1(i)^-2)/k12(i)^2/Q1(i)/QD(i)); % 计算传输效率
end

% 将传输效率数据保存至 data 矩阵
for i = 1:10
    data(i,5) = mu(i);
end

% 输出模型计算结果
mu = mu * 100;
mu = roundn(mu,-3);
for j = 1:10
    disp(['第',num2str(j),'次实验的效率为: ',num2str(mu(j)),'%'])
end

```

## 问题 2 程序

程序编号	2	文件名称	Question2.m
<pre> clc;clear; data = [100 162.21 163.6 63.83         125 161.46 163.04 51.49         150 161.36 163.15 40.17         175 161.75 162.87 33.24         200 161.79 162.96 28.24         225 161.59 163.15 26.17         250 161.53 163.25 24.78         275 161.35 162.72 22.12         300 162.61 163.74 21.25         325 161.39 163.26 20.53]; r = 350; h = 100; r = r / 1000; h = h / 1000; N=10; mu0 = 4 * pi * 10^-7;  % 定义和计算互感值模型函数 for i = 1:4     h(i) = (i*50+50)/1000;     f=@(x,y) r.^2.*cos(x-y)./...         sqrt(2.*r.^2-2.*r.^2.*cos(x-y)+h(i).^2);% 定义被积函数 f(x,y)     M1(i)=integral2(f,0,2*pi,0,2*pi);     M1(i)=mu0*M1(i)/4/pi;     M1(i)=N^2*M1(i)*1000000; </pre>			



```

end

% 绘制互感值的实验数据曲线
M = data(:,4);
h = data(:,1);
plot(h,M,'b.-');
hold on;

% 绘制模型计算的互感值曲线
for i = 1:100
    h=linspace(0,350,100);
    h(i) = 3.5*i/1000;
    f=@(x,y) r.^2.*cos(x-y)./sqrt(2.*r.^2-2.*r.^2.*cos(x-y)+h(i).^2);
    Ms(i)=integral2(f,0,2*pi,0,2*pi);
    Ms(i)=mu0*Ms(i)/4/pi;
    Ms(i)=N^2*Ms(i)*1000000;
end
h(100)=350;
plot(h,Ms,'r-');hold on;

LT = data(1,2); % 第一次实验发射端 L1 的电感值
LRL = data(1,3); % 第一次实验接收端 L2 的电感值
f = 30; % 发射频率
RL = 430.69; % 接收端 RL 的电阻值
RT = 1.55; % 发射端电阻 R1
RR = 1.55; % 接收端 R2 的电阻值
RRL = RR+RL; % 接收端总电阻值
CT = 0.17; % 发射端电容
CRL = 0.17; % 接收端电容

% 单位转换
f = f * 1000;
CT = CT / 1000000;
LT = LT / 1000000;
LRL = LRL / 1000000;
CRL = CRL / 1000000;

omega = f * 2 * pi; % 角频率  $\omega$ 

% 循环法计算传输效率
for i = 1:4
    M1(i) = M1(i) / 1000000;
    k12(i) = M1(i) / sqrt(LT*LRL); % 耦合系数
    Q1 = omega * LT / RT; % 发射端品质因数

```

```

QD = omega * LRL / RRL; % 接收端品质因数
mu(i) = 1/(1 + 2 / k12(i)^2 / Q1^2 + QD / k12(i)^2 / Q1 ...
        + (k12(i)^2+Q1^-2)/k12(i)^2/Q1/QD); % 传输效率
end

% 输出计算结果
mu = mu * 100;
mu = roundn(mu,-3);
for j = 1:4
    disp(['两个线圈距离 ',num2str(50+50*j),'mm 时效率为:
',num2str(mu(j)),'%'])
end

```

### 问题 3 程序

程序编号	3	文件名称	Question3.m
<pre> clc;clear; data = [100 162.21 163.6 63.83         125 161.46 163.04 51.49         150 161.36 163.15 40.17         175 161.75 162.87 33.24         200 161.79 162.96 28.24         225 161.59 163.15 26.17         250 161.53 163.25 24.78         275 161.35 162.72 22.12         300 162.61 163.74 21.25         325 161.39 163.26 20.53]; f = 30; M = data(1,4); RL = 430.69; RT = 1.55; RR = 1.55; RRL = RR+RL; LRL = 163.174; LT = data(1,2); CT = 0.17; CRL = 0.17;  % 单位转换 M = M / 1000000; f = f * 1000; CT = CT / 1000000; LT = LT / 1000000; </pre>			

```

LRL = LRL / 1000000;
CRL = CRL / 1000000;

omega = f * 2 * pi; % 角频率  $\omega$ 

% 数据划分、组合、遍历枚举、计算
for j = 1:1:951 % 外层循环划分频率范围[5,100]
    f(j) = 4.9 + j / 10;
    f(j) = f(j) * 1000;
    omega(j) = f(j) * 2 * pi;
    for i = 1:1:1001 % 内层循环划分匹配阻抗范围[100,200]
        LT(i) = 99.9 + i / 10;
        LT(i) = LT(i) / 1000000;
        k12(i) = M / sqrt(LT(i)*LRL); % 互感系数
        Q1(i,j) = omega(j) * LT(i) / RT; % 发射端品质因数
        QD(j) = omega(j) * LRL / RRL; % 接收端品质因数
        mu(i,j) = 1/(1 + 2 / k12(i)^2 / Q1(i,j)^2 + QD(j) / k12(i)^2 /
Q1(i,j) ...
        + (k12(i)^2+Q1(i,j)^-2)/k12(i)^2/Q1(i,j)/QD(j)); % 传输效率
    end
end

% 绘制频率范围与匹配阻抗范围组合的传输效率曲面图
X = 5:0.1:100;
Y = 100:0.1:200;
mesh(X,Y,mu);
max = max(max(mu)); % 传输效率最大值
[row,col] = find(max==mu); % 传输效率最大值所在的矩阵序号
LLL = (row-1)/10+100; % 传输效率最大时的匹配阻抗
Hz = (col-1)/10+5; % 传输效率最大时的频率

% 结果输出
disp(['效率最大为: ',num2str(max*100),' %'])
disp(['此时发射频率为: ',num2str(Hz),' Hz'])
disp(['此时匹配阻抗为: ',num2str(LLL),' uH'])

```

#### 问题 4 程序

程序编号	4	文件名称	Question4.m
<pre> clc;clear; data = [100 162.21 163.6 63.83 </pre>			

```

125 161.46 163.04 51.49
150 161.36 163.15 40.17
175 161.75 162.87 33.24
200 161.79 162.96 28.24
225 161.59 163.15 26.17
250 161.53 163.25 24.78
275 161.35 162.72 22.12
300 162.61 163.74 21.25
325 161.39 163.26 20.53];           % 定义实验数据矩阵
r = 350;                             % 线圈半径
h = 100;                             % 线圈间轴向高度
f = 100;                             % 发射频率
L1 = 200;                            % 发射端匹配阻抗
RL = 430.69;                         % 接收端 RL 的电阻值
RT = 1.55;                           % 发射端电阻 R1
RR = 1.55;                           % 接收端 R2 的电阻值
RRL = RR+RL;                         % 接收端总电阻值
LRL = 163.174;                      % 接收端电感
LT = data(1,2);                     % 第一次实验发射端 L1 的电感值
CT = 0.17;                          % 发射端电容
CRL = 0.17;                         % 接收端电容

% 单位转换
CT = CT / 1000000;
LT = LT / 1000000;
LRL = LRL / 1000000;
CRL = CRL / 1000000;
L1 = L1 / 1000000;
f = f * 1000;
r = r / 1000;
h = h / 1000;

omega = f * 2 * pi;                 % 角频率  $\omega$ 
N=10;                               % 线圈匝数
mu0 = 4 * pi * 10^-7;              % 真空磁导率

%对偏移距离划分、遍历计算，直至传输效率低于 0.8
for j = 1:10000
    a(j) = j/10/1000;
    f=@(x,y) r.^2.*cos(x-y)./sqrt(r.^2.*(cos(x)-cos(y)).^2+...
        (a(j)+r.*sin(x)-r.*sin(y)).^2+h.^2); % 定义被积函数 f(x,y)
    M1(j)=integral2(f,0,2*pi,0,2*pi);        % 对函数 f(x,y) 做定积分
    M1(j)=mu0*M1(j)/4/pi;
    M1(j)=N^2*M1(j)*1000000;

```

```

M1(j)=M1(j)/1000000; % 互感值
k12(j) = M1(j) / sqrt(LT*LRL); % 互感系数
Q1= omega * LT / RT; % 发射端品质因数
QD= omega * LRL / RRL; % 接收端品质因数
mu(j) = 1/(1 + 2 / k12(j)^2 / Q1^2 + QD / k12(j)^2 / Q1 ...
        + (k12(j)^2+Q1^-2)/k12(j)^2/Q1/QD); % 传输效率

% 判断传输效率低于 0.8 时遍历结束
if mu(j) < 0.8
    amax = a(j-1); % 偏移距离最大值
    break;
end
end
disp(['保证传输效率大于 80%,接收线圈圆心向 x 轴正方向最大偏离 :',...
    num2str(amax),'m']); % 输出最大偏离

% 继续划分计算, 绘制传输效率曲线
k=j; % 从断点继续开始计算
for j = k:10000
    a(j) = j/10/1000;
    f=@(x,y) r.^2.*cos(x-y)./sqrt(r.^2.*(cos(x)-cos(y)).^2+...
        (a(j)+r.*sin(x)-r.*sin(y)).^2+h.^2);
    M1(j)=integral2(f,0,2*pi,0,2*pi);
    M1(j)=mu0*M1(j)/4/pi;
    M1(j)=N^2*M1(j)*1000000;
    M1(j)=M1(j)/1000000;
    k12(j) = M1(j) / sqrt(LT*LRL);
    Q1= omega * LT / RT;
    QD= omega * LRL / RRL;
    mu(j) = 1/(1 + 2 / k12(j)^2 / Q1^2 + QD / k12(j)^2 / Q1 + ...
        (k12(j)^2+Q1^-2)/k12(j)^2/Q1/QD);
end
plot(a,mu,'LineWidth',2);

```