

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 特殊工件磨削加工的数学建模

摘 要:

针对圆曲线磨床加工复杂母线旋转体的加工方案问题,建立了以加工时间最短为目标函数的优化模型。

首先通过建立基座坐标系和工件坐标系,推导坐标变换关系,得到母线上切点运动与三个工作台运动间的解析关系,给出了三个工作台螺母副的位移随时间变化的函数,从而得到初始加工方案。其次通过自适应调整策略,对初始加工方案进行优化,使之满足所有的约束条件,最终得到三组步进电机的脉冲频率随时间变化的函数,以及向三组电机发送控制脉冲的时刻表。

根据步进电机转动角度的正负进行时间分段,所得结果为:问题 1 划分为两个时段,问题 2 划分为四个时段,问题 3 划分为两个时段,问题 4 划分为六个时段。

对计算结果进行误差分析,包括系统误差和加工原理误差。对系统误差进行了理论分析,对加工原理误差进行了计算机仿真试验,结果表明绝对误差的欧氏距离最大为 10^{-2}mm ,均值为 10^{-3}mm ,可见给出的加工方案精度较高。

针对问题 3 和问题 4 中砂轮表面磨损尽量均匀的要求,对前两问的模型进行改进,增加了描述磨削点运动的中间坐标系,使得磨削点能够按照某种要求在砂轮表面移动,从而避免了局部磨损的加大,仿真结果表明给出的加工方案达到了这一要求。

关键词: 加工方案 控制脉冲时刻表 脉冲分布 误差分析 坐标变换

参赛队号 90068005

队员姓名 任伟龙 徐青松 张高瑜

参赛密码 _____
(由组委会填写)

中山大学承办

一、问题重述

大型精密内外圆曲线磨床，可用来加工具有复杂母线旋转体的特殊工件，如导弹天线罩等。这些工件的特点为尺度大、精度要求高、母线为连续光滑等。精确的控制磨床各工作台相互配合运动，是达到工件加工精度要求，缩短加工时间的关键技术。

本文研究的问题是，根据旋转体工件的光滑母线方程 $y = f(x)$ ，给出一个合理的加工方案，在尽可能短的时间内完成磨削，并作加工误差分析。

需要解决的问题有：

问题 1：加工外表面母线为 $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件，采用圆柱型砂轮加工，给出一个加工方案；并对方案作误差分析。

问题 2：加工外表面母线为 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件，采用轮式砂轮加工，给出一个加工方案；并对方案作误差分析；

问题 3：在整个加工过程中，若砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点，随砂轮旋转形成一个圆周，那么砂轮在该圆周上的磨损会加大，从而影响加工质量。为此，应在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀。结合上述第 1 问题，提出一个修整策略，给出一个合理的加工方案，作相应的误差分析。

问题 4：结合上述第 2 问题，提出一个修整策略，给出使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案，作相应误差分析。

二、模型假设

1、砂轮的旋转轴线与底座导轨方向保持平行，且与工件工作箱的旋转主轴等高，即两旋转轴线位于同一水平面。

2、不考虑各组步进电机、变速器，功放伺服机构和精密丝杠--螺母副的各种误差；

3、认为控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级 (10^{-3} 秒)，所以问题解答中，与时间有关的结果精确到 ms 级；

4、三工作台的可移动范围足够大，能保证被加工工件的加工；

5、工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次磨削成形；

6、假设各磨削点线速度差距不大时，对加工精度造成的影响不大，因此为计算方便，固定工件工作箱主轴转动速度为每分钟 250 转。

三、符号及名词说明

电机 1：安装在中台上控制上台转动的步进电机；

电机 2：安装在下台上控制中台平移的电机；

电机 3：安装在基座上控制下台平移的电机；

$s_1(t)$ ： t 时刻电机 1 螺母副沿其丝杠运动的距离；

$s_2(t)$: t 时刻电机 2 螺母副沿其丝杠运动的距离;

$s_3(t)$: t 时刻电机 3 螺母副沿其丝杠运动的距离;

$(O-xy)$: 基座坐标系;

$(O_1-x_1y_1)$: 工件坐标系;

$(O_2-x_2y_2)$: 砂轮切点坐标系;

P : 工件与砂轮的接触点;

φ : 工件坐标系 x_1 轴至基座坐标系 x 轴的角度 (逆时针为正);

β : 砂轮切点坐标系 x_2 轴至基座坐标系 x 轴的角度 (逆时针为正);

a : 砂轮厚度;

d : 砂轮直径;

r : 轮式砂轮横截面的外端轮廓线半径。

四、问题分析

针对圆曲线磨床加工复杂母线旋转体的加工问题,建立了以加工时间最短为目标函数的优化模型,需要给出合理的加工方案。

完整的加工方案,包括如何确定加工基准,选择加工次序、砂轮尺寸,确定三组电机各时段应发脉冲数和这些脉冲在时段内的分布。

题目中,加工基准主要指定位基准。确定加工基准,即确定工件在机床中的位置,标定磨削开始前工件与基座间的方位。

由于加工一次成型,加工过程中工件与砂轮始终保持接触,所以加工次序的选择应指加工开始的母线端点选择。

砂轮几何尺寸包括砂轮的厚度 a 、直径 d 以及轮式砂轮横截面的外端轮廓半径 r 。根据相关文献^{[1][2]},砂轮厚度与工件尺寸、轮廓线曲率有关。而直径则与砂轮的转速以及工件在其转轴方向的移动速度有关。轮式砂轮横截面的外端轮廓半径 r 应小于工件母线凹陷部分曲率半径的最小值^{[3][4][5]}。

根据题中步进电机的工作原理和控制特性,电机主轴转动的步进角度区分正向与反向,故可按照某电机步进角度的正负来划分时段,以便于控制脉冲的正确发送。步进电机的控制方式有两种:即可输入适当个数脉冲控制步进电机的角位移量,又可通过控制某时段中的脉冲频率或脉冲的分布使电机主轴转动速度达到某种要求。因此可以通过两种方式对电机进行控制,即给定发送脉冲的时刻或给出脉冲频率随时间变化的函数。

加工方案的合理性,体现在满足加工几何误差和加工光滑性要求。为保证工作平台的稳定,要求频率变化不能剧烈,频率对时间的函数应当是连续的,不能出现跳跃。此外,为保证表面的加工质量,工件在其转轴方向的移动量还应满足每转动 100 转不超过 4mm 的要求。

加工方案的优劣,表现为加工时间的多少和加工精度是否符合要求。因此可将目标函数定义为时耗尽可能少,在满足合理性的条件下寻求最优。

加工误差包括系统误差和加工原理误差。对系统误差可进行理论分析，对加工原理误差可进行计算机仿真验证，得到“实际加工曲线”，与理论曲线进行抽样比较，从而评定模型的好坏。

模型的求解思路如下：

首先通过建立基座坐标系和工件坐标系，推导坐标变换关系，得到母线上切点运动与三个工作台运动间的解析关系，从而推出三个工作台螺母副的位移随时间变化的函数，进而得到初始加工方案。其次通过自适应调整策略，对初始加工方案进行优化，使之满足所有的约束条件，最终得到三组步进电机的脉冲频率随时间变化的函数，以及向三组电机发送控制脉冲的时刻表。

针对问题 3 和问题 4 中砂轮表面磨损尽量均匀的要求，对前两问的模型进行改进，增加了描述磨削点运动的中间坐标系，使得磨削点能够按照某种要求在砂轮表面移动，从而可以避免局部磨损的加大。

五、模型建立与求解

一、问题 1

1.1 模型建立

1.1.1 优化模型

定义目标函数为加工时间最短，并满足以下约束：

- (1) 各电机接受脉冲的频率随时间连续变化，不能出现间断点；
- (2) 控制脉冲的工作频率不大于 100Hz；
- (3) 工件每转动 100 转，工件与砂轮的切点在工件工作箱转轴方向的移动量不超过 4mm。

记某工件的总加工时长为 T （从预动后，磨削开始时记时）；三组电机频率与时间的函数分别为 $f_1(t)$ ， $f_2(t)$ ， $f_3(t)$ ；工件与砂轮的切点在工作箱转轴方向的速度为 $v(t)$ 。

在假设 6 的条件下， $v(t) \leq 4 \times \frac{250}{100} \times \frac{1}{60}$ ，因此建立优化模型如下：

$$\begin{aligned} & \min T \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_i(t + \Delta t) = f_i(t) \\ f_i(t) \leq 100 \\ v(t) \leq 1/6 \\ \frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta \end{cases}, \quad i=1,2,3 \end{aligned}$$

1.1.2 坐标系的建立

需要建立如下坐标系（如图 1 所示）：

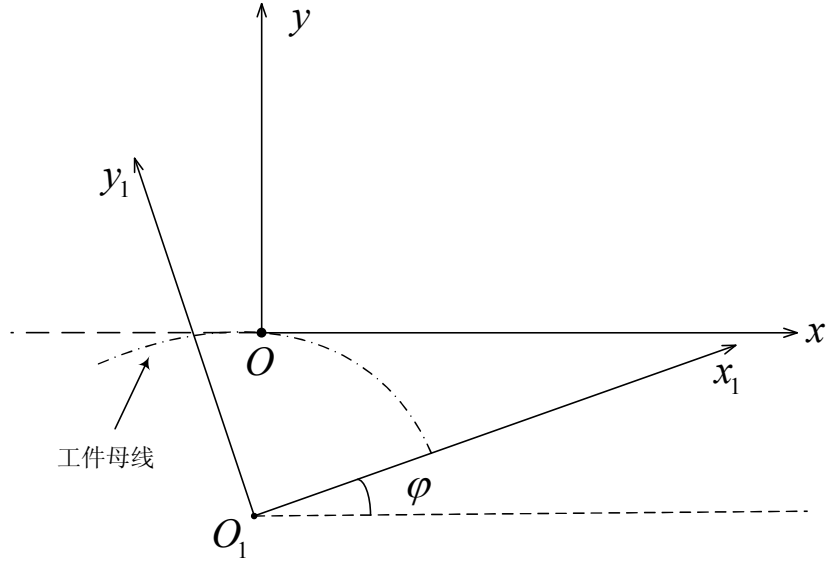


图 1 坐标系示意图

(1) 基座坐标系 ($O-xy$)

以砂轮前端中心为原点 O ，以下台运动方向为 x 轴，以中台平移运动方向为 y 轴。 x 轴方向与砂轮前端中心切线方向相同。

(2) 工件坐标系 ($O_1-x_1y_1$)

以上台转轴中心为原点 O_1 ，以工件工作箱转轴为 x_1 轴，以垂直于工作箱转轴方向为 y_1 轴。在工件坐标系中，工件上某点的坐标固定不变。

在工件坐标系中，问题 1 中母线的方程变为

$$y = Q_1(x) = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x - b)^2 + 0.45(600 - x - b), x \in [-b, 600 - b] \quad (1)$$

定义工件坐标系在基座坐标系中的坐标为 $(x_{O1}, y_{O1}, \varphi)$ ，其中 x_{O1} ， y_{O1} 是工件坐标系原点 O_1 在基座坐标系中的坐标。

在加工过程中某一时刻，工件与砂轮的接触点 P ，该点与基座坐标系原点 O 重合，在工件坐标系中是一个动点。 P 点在工件坐标系中的坐标记为 (x_{1P}, y_{1P}) ，该坐标随时间变化，即

$$\begin{cases} x_{1P} = x_{1P}(t) \\ y_{1P} = y_{1P}(t) \end{cases}$$

由曲线方程知 $y_{1P}(t) = Q_1(x_{1P}(t))$ 。在工件坐标系中曲线上 P 点的斜率也是时

间的函数，且

$$y_{1P}'(t) = Q_1'(x_{1P}(t)) \quad (2)$$

采用圆柱形砂轮时， P 点切线与基座坐标系 x 轴平行，则可得

$$\tan \varphi = -y_{1P}'(t) \quad (3)$$

记 P 点在基座坐标系中的坐标是 $(x_P, y_P)^T$ ，根据坐标变换关系，当两坐标轴夹角为 φ 时，有

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1P} \\ y_{1P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

显然 P 点在基座坐标系中的坐标 $(x_P \ y_P)^T = \mathbf{0}$ ，因此得到方程组

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1P}(t) \\ y_{1P}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O1}(t) \\ y_{O1}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

其中 $(x_{O1}(t) \ y_{O1}(t))^T$ 为工件坐标系原点 O_1 在基座坐标系中随时间变化的坐标。

工件坐标系在基座坐标系中的坐标为 $(x_{O1}, y_{O1}, \varphi)$ ，又根据各步进电机控制工作台运动的原理，各轴向的运动距离与该坐标有如下关系

$$\begin{pmatrix} x_{O1}(t) \\ y_{O1}(t) \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_3(t) \\ s_2(t) \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O1}^{(0)} \\ y_{O1}^{(0)} \\ \varphi^{(0)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 $(x_{O1}^{(0)} \ y_{O1}^{(0)} \ \varphi^{(0)})$ 为预运动后，工件坐标系在基座坐标系中的坐标，即初始状态， $\Delta \varphi$ 为 φ 的变化量， $s_2(t)$ 和 $s_3(t)$ 为螺母副 2、3 沿其丝杠运动的距离。

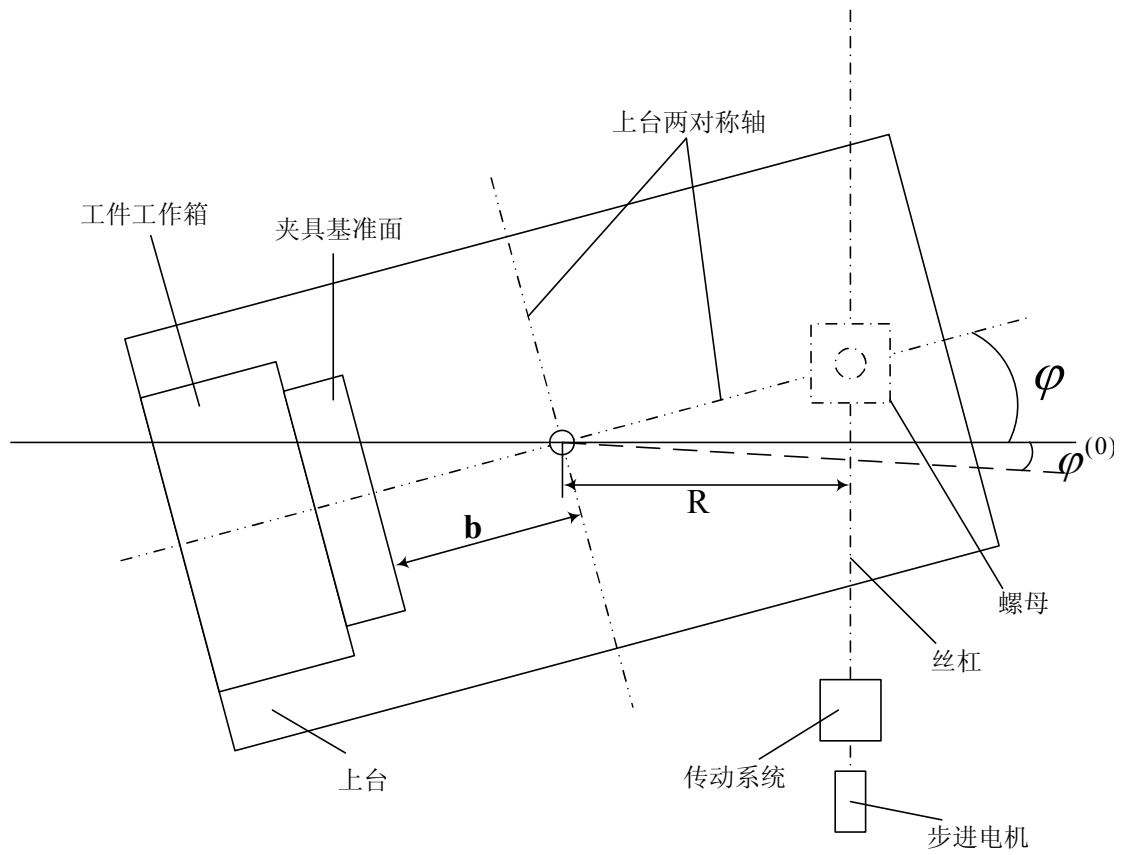


图 2 上台运动示意图

由图 2 所示的几何关系，可得

$$R \tan \varphi = s_1(t) + R \tan \varphi^{(0)} \quad (7)$$

联立上述(5)(6)(7)方程，得到各螺母副的运动方程与 P 点在工件坐标系中的坐标之间的动态关系：

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1P}(t) \\ y_{1P}(t) \\ y_{1P}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \tan \varphi^{(0)} \\ -y_{Q_1}^{(0)} \\ -x_{Q_1}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

1.2 模型求解

1.2.1 砂轮几何参数与加工基准的确定

根据本题中工件的几何形状和尺寸，参考相关文献^{[1][2]}，取砂轮厚度为 20mm。加工基准确定为工件在原图中母线方程 $x=0$ 的起点。

1.2.2 初始加工方案的生成

对问题 1 中的曲线求导数，可知该曲线为一凸曲线，可以使用圆柱型砂轮进行磨削。

螺母副位移量的增减由步进电机步进角度的方向决定，即步进角度为正向时位移量为正，步进角度为反向时位移量为负。当位移量由正变负时，需要改变电机诸绕组的通电顺序。为正确控制步进电机的转向，以螺母副位移量函数的单调性来划分时段，不同时段内诸绕组的通电顺序不同。

在优化模型中，先令 $v(t)=1/6$ ，即考察其第三个约束条件的边界上的点。

物理意义为，动点 P 在 x_1 轴方向以此最大速度移动，得到一个初始解（未必是可行解），然后再考察另外两个约束条件，对初始解进行修正。

若工件与砂轮的接触点 P 在工件坐标系中以最大速度移动，其坐标与时间的关系可表示如下（单位 毫米，秒）：

$$x_{1P}(t) = \int_0^t v(t)dt = 1/6t \quad (9)$$

$$y_{1P}(t) = Q(x_{1P}(t)) \quad (10)$$

P 点的斜率随时间的变化为：

$$y_{1P}'(t) = Q'(x_{1P}(t)) \quad (11)$$

由于各电机螺母副的运动从预动后开始计算，因此

$$(s_1(0) \quad s_2(0) \quad s_3(0))^T = \mathbf{0}。$$

将公式(9)(10)(11)带入公式(8)，通过 Matlab 的符号运算，整理得到三个与步进电机相连的螺母副随时间的运动方程，如公式(12)所示。

$$\begin{cases} s_1(t) = \frac{7}{180}t \\ s_2(t) = \frac{(13500000-9000t)(\frac{7}{54000}t - \frac{1}{60}) - 14580000 + 4050t + 21(600 - \frac{1}{6}t)^2}{\sqrt{2916810000 + 49t^2 - 12600t}} + 134.1480 \\ s_3(t) = \frac{13500000 - 9000t + (14580000 - 4050t - 21(600 - \frac{1}{6}t)^2)(\frac{7}{54000}t - \frac{1}{60})}{\sqrt{2916810000 + 49t^2 - 12600t}} - 247.7989 \end{cases} \quad (12)$$

由公式(8)知， $s_1(t)$ 与 $y_{1P}'(t)$ 存在线性关系，而根据曲线方程， $y_{1P}'(t)$ 与时间 $x_{1P}(t)$ 存在线性关系，又根据假设 $x_{1P}(t)$ 与时间是线性关系，因此 $s_1(t)$ 与时间为线性关系，这与公式(12)的结果相符。

下图为三组电机螺母副的运动方程，根据 $s_2(t)$ 单调性分为两个时间段。

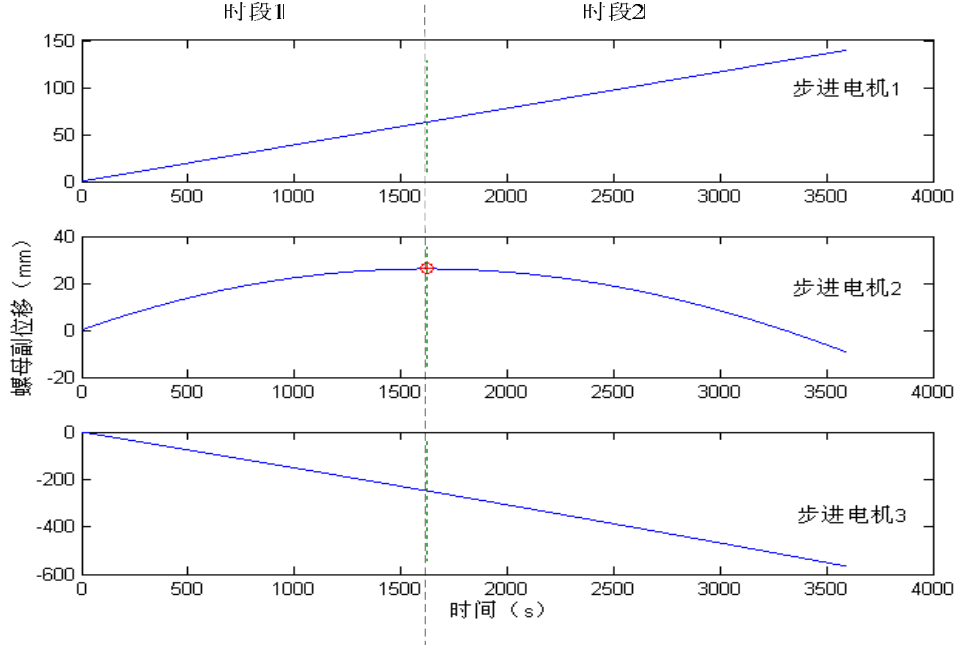


图 3 螺母副运动方程及分段结果示意

步进电机收到一个脉冲，则变速器转动 0.1° ，若变速器转动 360° ，则螺母副移动 12mm，可得一个脉冲使得螺母副移动 $1/300\text{mm}$ 。由此关系，将连续的螺母副运动方程离散化为各步进电机的脉冲发送时刻表，于是得到问题 1 的初始加工方案。

1.2.3 加工方案的检验与调整

对初始加工方案进行约束条件的检验。经验证，满足优化模型的前三个约束条件，只有个别点不满足第四个约束条件，即脉冲频率稳定性的要求，因此需要进行调整。调整策略的基本思想是以牺牲加工时间为代价来换取脉冲频率的稳定性，主要通过部分区间降低工件在其轴向上的移动速度来实现。具体步骤如下：

步骤 1：计算不满足脉冲频率稳定性约束的点所在区间，设为 $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ ；

步骤 2：适当降低工件在 Δt_i 区间内在其轴向上的移动速度，即将区间 Δt_i 做适当拉伸至 $\Delta t'_i = k_i \Delta t_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，其中 k_i 为拉伸系数；

步骤 3：计算 $\Delta t'_i$ 区间内各脉冲发送的时刻；

步骤 4：检验 $\Delta t'_i$ 区间内的脉冲频率是否满足稳定性要求，统计出不满足要求的点的个数及所用加工总时间；

步骤 5：若不满足要求的点的个数小于给定的阈值，则调整过程结束，输出调整后的加工方案；否则返回步骤 2，重新选择 k_i 进行计算。

针对本问题数据，给出了调整后的最优方案。

最小化时间 T_{\min} 为 3600s，各时间段的起始时刻与脉冲数如表 1 所示。由于

数据量过大，完整的发送脉冲时刻数据（精确到 ms）储存在附件的文本文件中（第一间附件文件夹），每个步进电机分别对应一个文件，表 2 为其中的部分数据。

表 1 时段划分与脉冲数目

时段号	起始时刻 (s)	结束时刻 (s)	脉冲数及其转角正负					
			电机 1		电机 2		电机 3	
时段 1	0	1623.283	18938	+	7839	+	74339	-
时段 2	1623.283	3600	23062	+	10684	-	95752	-

表 2 各电机脉冲发送时刻表（单位：ms）

电机 1	0	86	171	257	343	429	514	600	686
电机 2	0	104	208	311	415	519	623	727	831
电机 3	0	22	45	67	89	112	134	156	179

在螺母副运动方程的基础上（公式 12），得到三组步进电机脉冲的频率函数，见图 4（脉冲频率函数由 Matlab 符号运算得到，形式比较复杂，见附件 word 文档）。

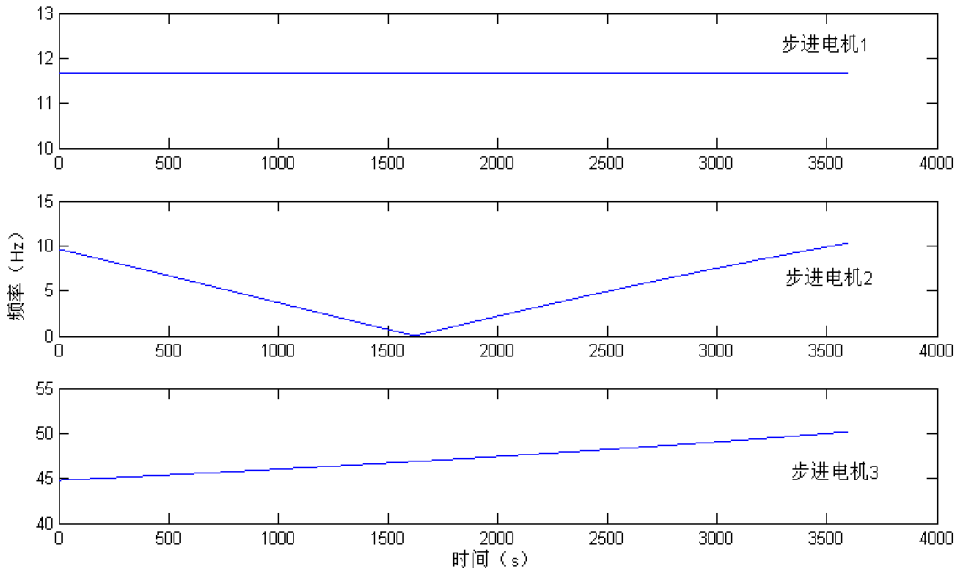


图 4 脉冲频率函数

1.3 误差分析

1.3.1 误差模型

提出的模型中，误差主要来源于两个方面，即系统误差和加工原理误差^{[2][3]}。系统误差包括基准位移误差和基准不符误差，产生原因如下：

- 1) 零件的定位基面的尺寸和形状误差；
- 2) 夹具定位元件误差；
- 3) 零件的定位基准与零件的设计基准不重合而引起的零件加工尺寸误差。

由公式(8)得到步进电机的控制方程：

$$\begin{pmatrix} x_{1P}(t) \\ y_{1P}(t) \\ y_{1P}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -R & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) + R \tan \varphi^{(0)} \\ s_2(t) + y_{Q_1}^{(0)} \\ s_3(t) + x_{Q_1}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

由于上述原因，产生初始定位误差为 $(\Delta\varphi^{(0)}, \Delta y_{Q_1}^{(0)}, \Delta x_{Q_1}^{(0)})^T$ 时，此时实际削磨曲线方程为

$$\begin{pmatrix} X_{1P}(t) \\ Y_{1P}(t) \\ Y_{1P}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -R & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) + R \tan(\varphi^{(0)} + \Delta\varphi^{(0)}) \\ s_2(t) + y_{Q_1}^{(0)} + \Delta y_{Q_1}^{(0)} \\ s_3(t) + x_{Q_1}^{(0)} + \Delta x_{Q_1}^{(0)} \end{pmatrix}$$

故产生的系统误差在 t 时刻的影响为

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1P}(t) \\ \Delta y_{1P}(t) \\ \Delta y_{1P}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -R & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \tan(\varphi^{(0)} + \Delta\varphi^{(0)}) - R \tan \varphi^{(0)} \\ \Delta y_{Q_1}^{(0)} \\ \Delta x_{Q_1}^{(0)} \end{pmatrix}$$

于是得到

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Delta x_{1P}(t)| \leq |\Delta y_{Q_1}^{(0)}| + |\Delta x_{Q_1}^{(0)}| \\ |\Delta y_{1P}(t)| \leq |\Delta y_{Q_1}^{(0)}| + |\Delta x_{Q_1}^{(0)}| \\ |\Delta y_{1P}'(t)| \leq R |\sec^2(\varphi^{(0)})| |\Delta\varphi^{(0)}| + R \left| \frac{\sin \xi}{\cos^3 \xi} \right| (\Delta\varphi^{(0)})^2 \end{array} \right.$$

加工原理误差产生原因如下：

电机的工作原理是，输入确切个数的脉冲控制电机主轴的角位移量，使螺母副移动一定距离。根据螺母副的运动方程求解脉冲分布过程中，对时间轴进行了离散与取舍，在这三组脉冲的作用下，产生的实际磨削曲线与理想曲线必然有误差。

根据脉冲发送时刻表（见附件）及公式(13)，利用计算机进行仿真试验，得到一条仿真曲线（见下图）。

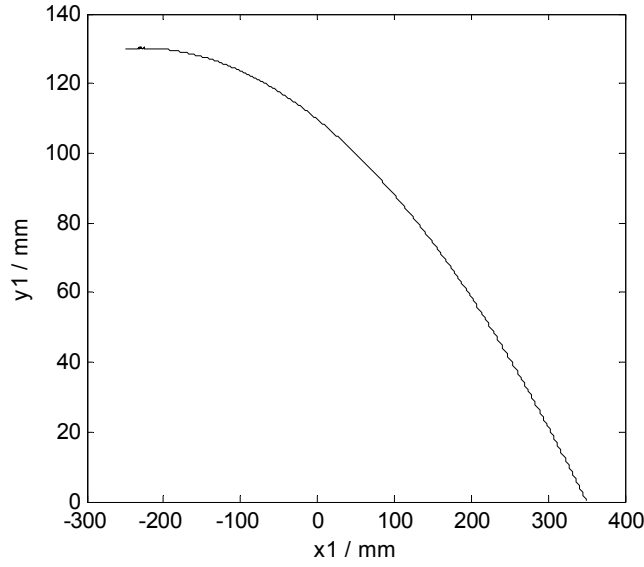


图 5 仿真曲线

1.3.2 误差评价

对理想曲线与实际曲线在相同时刻进行采样（均匀采样），得到数量相等的两组采样点，计算对应点的距离差（欧氏距离），这些距离差即可反映实际曲线的误差。从这些距离差中提取三个指标：均值 E 、方差 σ^2 及最大值 \max 。均值、方差可以反映误差的总体水平，最大值可以反映误差的局部水平，指标的计算方法如下：

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta S_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta S_i - E)^2$$

$$\max = \max \Delta S_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中， ΔS_i 为每个采样点与理论采样点的差值， N 为采样点的总数。

采样点的多少一般会对误差的均值和方差产生影响，显然采样点越多，误差评价越准确。为了使误差评价尽量精确，采样过程中动态的增加采样点（变步长采样），直到误差均值不再显著变化为止，以此时的采样数据作为评价误差的数据，最终采集了 14400 个数据点，经计算，得三个指标，方差、均值、最大值分别为：

$$\sigma_{\Delta S}^2 = 1.2656 \times 10^{-6} \text{ mm}^2, \quad E_{\Delta S} = 0.0031 \text{ mm}, \quad \max_{\Delta S} = 0.0071 \text{ mm}$$

由题中数据算得单个脉冲可使得螺母副移动 $1/300 \text{ mm}$ ，约为 0.0033 mm ，误差的均值及最大值与单个脉冲造成的位移量在同一数量级上，可见给出的加工方案是合理并且精确的。

二、问题 2

2.1 模型建立

这里仍采用问题 1 的坐标系与基本模型，只是由于母线方程不同，与动点 P 有关的 $\begin{pmatrix} x_{1P}(t) & y_{1P}(t) & y_{1P}'(t) \end{pmatrix}^T$ 有所变化。同样先假定动点 P 在 x_1 轴上的速度为一常数 v ，则

$$\begin{cases} x_{1P}(t) = vt \\ y_{1P}(t) = Q_2(x_{1P}(t)) \\ y_{1P}'(t) = Q_2'(x_{1P}(t)) \end{cases} \quad (14)$$

其中 Q_2 为问题 2 中的工件母线在工件坐标系中的方程，即：

$$y = Q_2(x) = 30e^{\frac{x+b}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x+b+25\pi)\right) + 130, \quad x \in [0, 600], \quad \text{斜率方程为}$$

$$y' = Q_2'(x) = \frac{3}{40}e^{\frac{x+b}{400}} \left\{ -\sin\left(\frac{1}{100}(x+b+25\pi)\right) + 4\cos\left(\frac{1}{100}(x+b+25\pi)\right) \right\}, \quad x \in [0, 600]。$$

2.2 模型求解

2.2.1 砂轮几何参数与加工基准的确定

与问题 1 同理，取砂轮厚度为 20mm。加工基准确定为工件在原题中母线方程 $x = 0$ 的起点。

在本问题中，母线中有凹弧的存在，并且砂轮换成了轮式，为了保证工件磨削后的光滑性，给出的加工方案需考虑砂轮横截面前端劣弧的曲率半径，该半径不能大于母线中凹弧处最小的曲率半径。曲率半径的计算公式为：

$$\rho = \frac{(1 + Q_2'^2)^{3/2}}{|Q_2''|}$$

经计算，母线凹弧处最小的曲率半径 ρ_{\min} 为 722.6584mm，则砂轮横截面劣弧的曲率半径可取为 700mm。

2.2.2 初始加工方案的生成

将公式(14)与公式(8)联立，仍采用 Matlab 的符号运算，解得各螺母副的运动方程：

$$\begin{cases} s_1(t) = -\frac{45}{2}\Phi + 47.7297 \\ s_2(t) = \frac{\left(\frac{t}{2} - 750\right)\Phi - 1200e^{-\frac{t}{2400}}\sin\left(\frac{t}{600} + \frac{\pi}{4}\right) + 5200}{\sqrt{1600 + 9\Phi^2}} + 188.6157 \\ s_3(t) = \frac{-\frac{20}{3}t + 10000 - \left(90e^{-\frac{t}{2400}}\sin\left(\frac{t}{600} + \frac{\pi}{4}\right) + 390\right)\Phi}{\sqrt{1600 + 9\Phi^2}} - 223.1357 \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\Phi = e^{-\frac{t}{2400}}\left(-\sin\left(\frac{t}{600} + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{t}{600} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ 。

仍然采用问题 1 中的时间分段原理，根据三电机控制螺母副的运动方程，对时间进行分段，电机 1 和电机 2 控制的螺母副的运动方程及分段结果如下图所示：

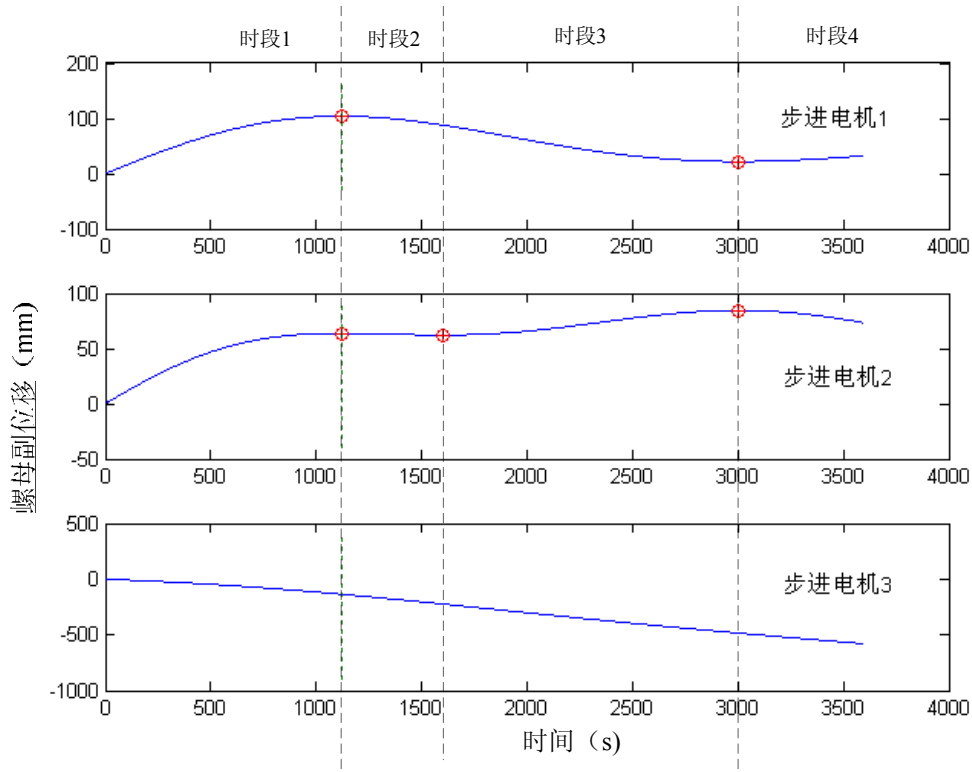


图 6 螺母副运动方程及分段结果示意

电机 3 的螺母副位移函数是单调递减的，而电机 1、2 的螺母副位移函数都是非单调的，因此根据电机 1、2 的单调性划分时段。将连续的螺母副运动方程离散化为各步进电机的脉冲发送时刻表，于是得到问题 1 的初始加工方案。

2.2.3 加工方案的检验与调整

按照问题 1 中提出的调整策略，针对本问题数据，给出调整后的最优方案。

最小化时间 T_{\min} 为 3600s，各时间段的起始时刻与脉冲数如表 3 所示。完整的发送脉冲时刻数据（精确到 ms）储存在附件的文本文件中（第二问附件文件

夹)，表 4 为其中的部分数据。

表 3 时段划分与脉冲数目

时段号	起始时刻 (s)	结束时刻 (s)	脉冲数及其转角正负					
			电机 1		电机 2		电机 3	
时段 1	0	1119.743	31252	+	19162	+	40553	+
时段 2	1119.743	1601.212	4814	-	497	-	26387	+
时段 3	1601.212	3004.699	19840	-	6699	+	78189	+
时段 4	3004.699	3600	3165	+	3387	-	28697	+

表 4 各电机脉冲发送时刻表（单位：ms）

电机 1	0	22	44	66	87	109	131	153	175
电机 2	0	30	60	90	121	151	181	211	241
电机 3	0	44	89	133	177	221	266	310	354

各时间段的脉冲频率函数见图 7（公式见附件），经检验，满足其它两个约束条件，因此为最优解，最小化时间 T_{\min} 为 3600s。

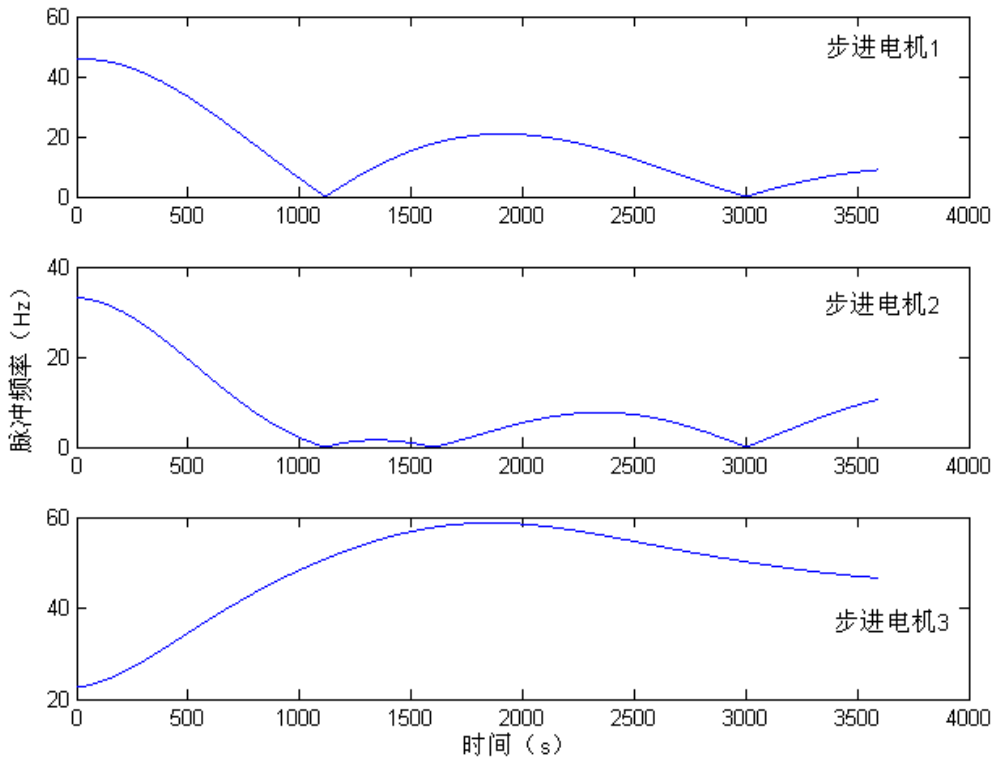


图 7 脉冲频率函数

2.3 误差分析

仍然采用问题一的误差分析方法，对仿真曲线与理论曲线进行变步长采样，经计算得方差、均值、最大值分别为：

$$\sigma_{\Delta S}^2 = 9.6766 \times 10^{-6} \text{mm}^2, \quad E_{\Delta S} = 0.0061 \text{mm}, \quad \max_{\Delta S} = 0.0152 \text{mm}$$

三、问题 3

3.1 模型建立

题目中要求在加工过程中，砂轮表面的磨损尽量均匀，理想状态为，在加工过程中，让磨削点随时间在砂轮表面上均匀分布。在问题 1 中建立的坐标系基础上，增加一个与砂轮切点有关的坐标系（如图 8 所示），用来描述砂轮磨削点的运动。

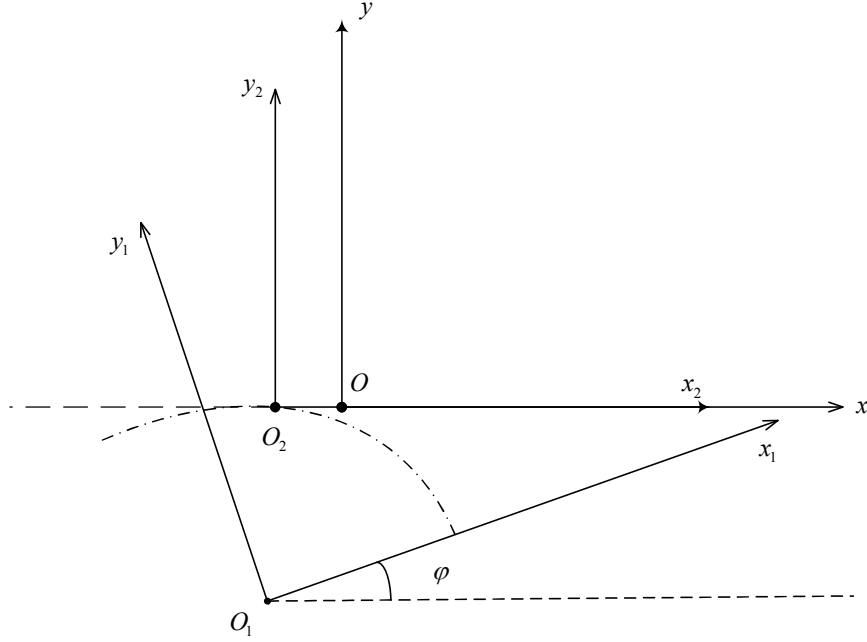


图 8 问题 3 坐标系

上图中，坐标系 $(O-xy)$ 、 $(O_1-x_1y_1)$ 和问题 1 中的定义相同，坐标系 $(O_2-x_2y_2)$ 为增加的切点坐标系， x_2 轴为砂轮上切点 P 的切线方向， y_2 轴与 x_2 轴垂直，与 y 轴平行。

假设 t 时刻， P 点在基座坐标系中的 x 坐标由方程 $x_p(t) = g(t)$ 描述（ $y_p(t) = 0$ ）。

由问题 1 中的模型知， P 点在坐标系 $(O_1-x_1y_1)$ 中的坐标为 (x_{1P}, y_{1P}) ，在坐标系 $(O_2-x_2y_2)$ 中的坐标为 (x_{2P}, y_{2P}) ，与问题 1 中的推导过程类似，可得：

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1P}(t) \\ y_{1P}(t) \\ y_{1P}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \tan \varphi^{(0)} \\ -y_{O_1}^{(0)} \\ g(t) - x_{O_1}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

公式(16)即为考虑砂轮磨削点变化时的数学模型。

3.2 模型求解

3.2.1 初始加工方案的生成

为达到磨损均匀的目的，可使砂轮的磨削点 O_2 随着加工过程在 x_2 轴方向上从一端匀速移动到另一端，根据砂轮厚度及加工总时长，可得 O_2 在基座坐标系中的运动方程如下：

$$g(t) = \frac{t}{180} - 10 \quad (17)$$

仍按照问题 1 的解题思路，由公式(16)(17)可推导出螺母副的运动方程，进而根据运动距离与脉冲的关系计算出脉冲的频率函数。

根据三螺母副的运动方程的单调性，对时间进行分段。运动方程及分段结果如下图所示：

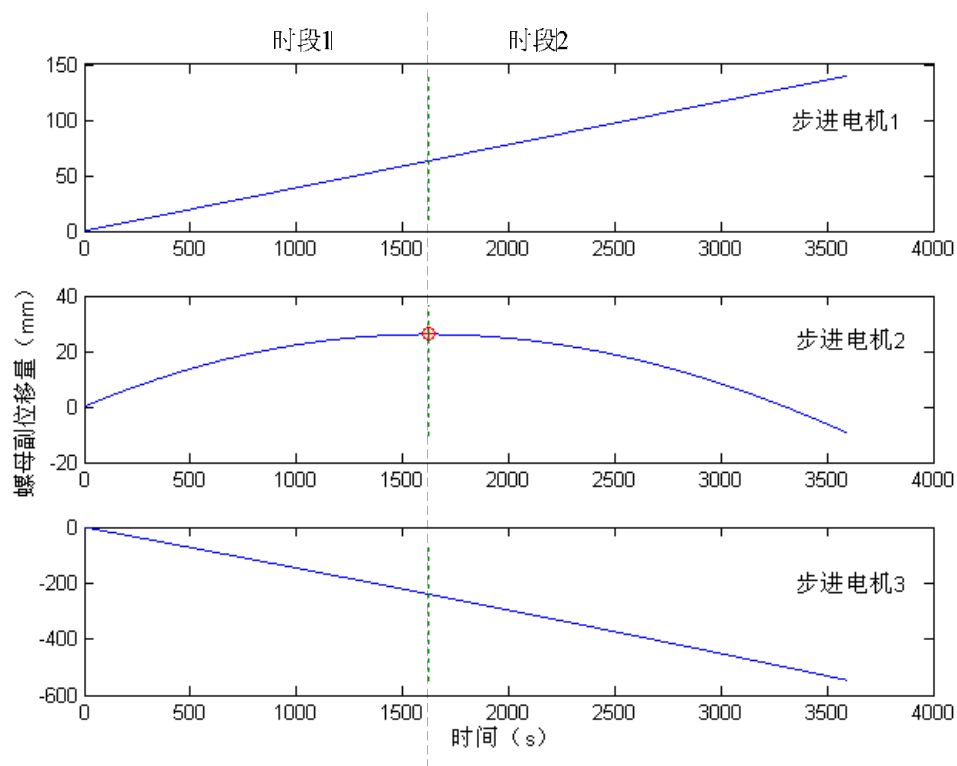


图 9 螺母副运动方程及分段结果示意

3.2.2 加工方案的检验与调整

按照问题 1 中提出的调整策略，针对本问题数据，给出调整后的最优方案。

最小化时间 T_{\min} 为 3600s，各时间段的起始时刻与脉冲数如表 5 所示。完整的发送脉冲时刻数据（精确到 ms）储存在附件的文本文件中（第三问附件文件夹），表 6 为其中的部分数据。

表 5 时段划分与脉冲数目

时段号	起始时刻 (s)	结束时刻 (s)	脉冲数及其转角正负					
			电机 1		电机 2		电机 3	
时段 1	0	1623.283	18938	+	7839	+	71634	-
时段 2	1623.283	3600	23062	+	10684	-	92457	-

表 6 各电机脉冲发送时刻表 (单位: ms)

电机 1	0	86	171	257	343	429	514	600	686
电机 2	0	104	208	311	415	519	623	727	831
电机 3	0	23	46	70	93	116	139	162	186

各时间段的脉冲频率函数见图 10 (公式见附件)。

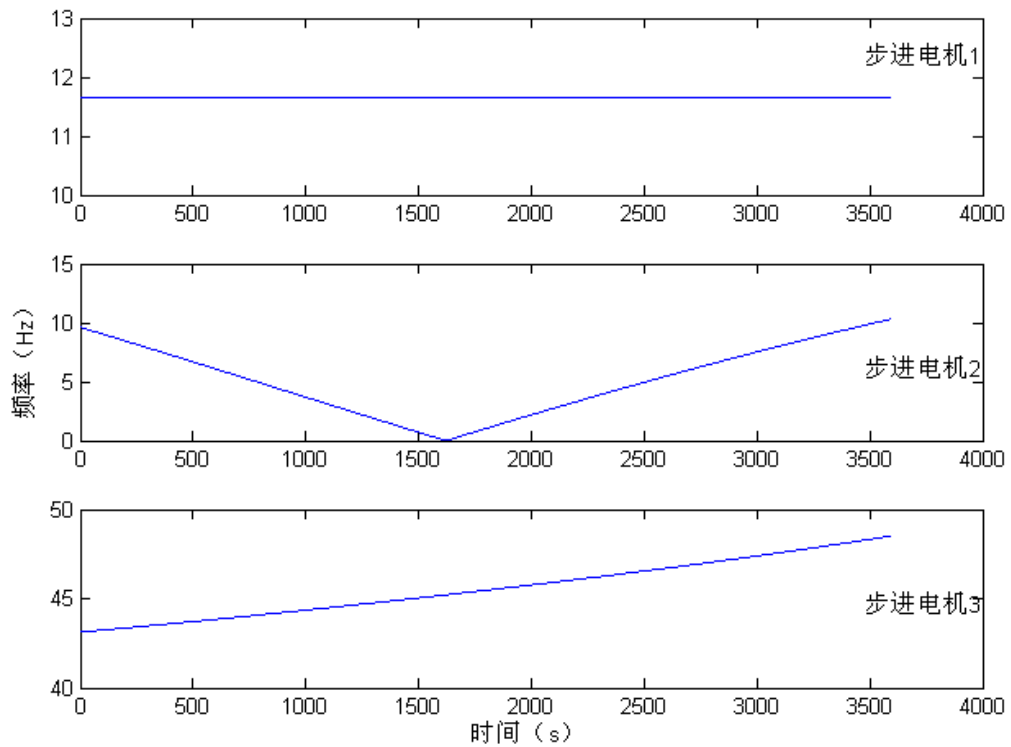


图 10 脉冲频率函数

3.3 误差分析

对仿真曲线与理论曲线进行变步长采样, 计算采样点的均值、方差、最大值, 结果为:

$$E_{\Delta S} = 0.0031mm \quad \sigma_{\Delta S}^2 = 1.2318 \times 10^{-6} mm^2 \quad \max_{\Delta S} = 0.0069mm$$

四、问题 4

4.1 模型建立

为便于描述问题及求解方法, 轮式砂轮的横截面 (通过砂轮转轴的截面) 的外端轮廓线参数采用问题 2 中给出的值。采用问题 3 的思路, 为使轮式砂轮表面

的磨损尽量均匀，就要描述砂轮上磨削点在该劣弧上的运动，因此，在问题二的模型基础上增加一个坐标系，如图 11 所示。

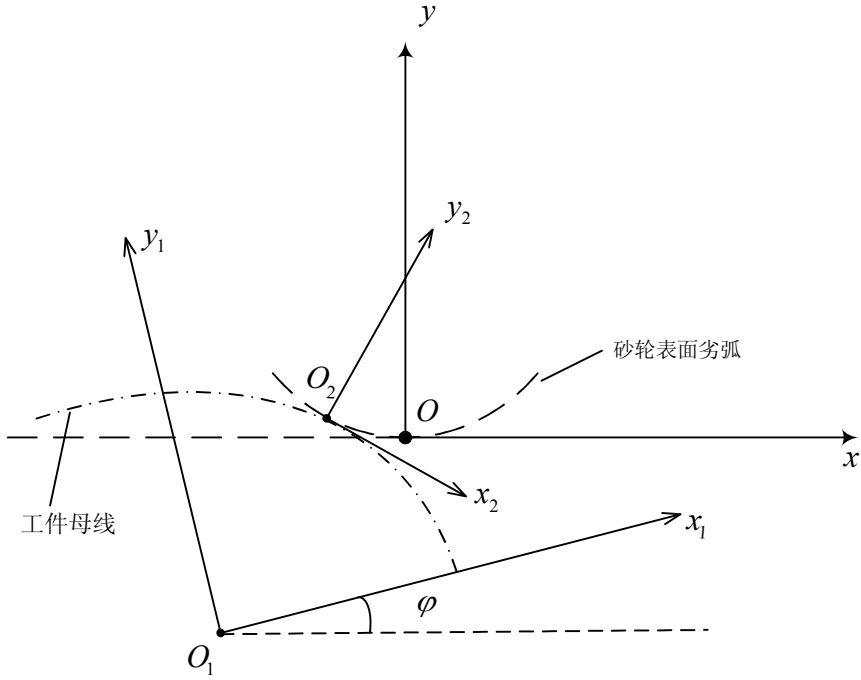


图 11 问题 4 坐标系

图 11 中，与问题 3 中类似，坐标系 $(O-xy)$ 为基座坐标系、 $(O_1-x_1y_1)$ 为工件坐标系， $(O_2-x_2y_2)$ 为增加的砂轮切点-切线坐标系，砂轮表面劣弧指砂轮横截面（通过砂轮转轴的截面）的外端轮廓线， x_2 轴为砂轮上切点 P 的切线方向， y_2 轴与 x_2 轴垂直，与其他坐标轴在同一平面上。砂轮上 O_2 点与母线上切点 P 重合。

由几何关系可知，坐标系 $(O-xy)$ 和 $(O_1-x_1y_1)$ 的角度关系完全由 $s_1(t)$ 决定。在 t 时刻，母线上 P 点的切线与砂轮上 O_2 点切线平行，即 P 点切线与 O_2x_2 轴平行， O_2x_2 轴至 O_1x_1 轴的角度记为 α （逆时针为正），则

$$\tan \alpha = -y_{1P}'(t) \quad (18)$$

Ox 轴至 O_2x_2 轴的角度记为 β （其随时间变化的函数记为 $\beta(t)$ ），则 Ox 轴至 O_1x_1 轴的角度为 $\alpha + \beta$ ，于是 $R \tan(\alpha + \beta) = R \tan(\alpha^{(0)} + \beta^{(0)}) + s_1(t)$ ，其中 $\alpha^{(0)}$ 和 $\beta^{(0)}$ 分别为预动后的 α 、 β 的值，即初始值，则

$$s_1(t) = R \tan(\alpha + \beta) - R \tan(\alpha^{(0)} + \beta^{(0)}) \quad (19)$$

P 点（即 O_2 点）在 $(O-xy)$ 坐标系中的坐标记为 $(x_p(t), y_p(t))$ ，在 $(O_1-x_1y_1)$ 坐标系中的坐标记为 $(x_{1p}(t), y_{1p}(t))$ ，在 $(O_2-x_2y_2)$ 坐标系中的坐标为 $(0,0)$ 。

O_1 点在 $(O_2-x_2y_2)$ 中的坐标记为 (x_{2O_1}, y_{2O_1}) ，则

$$\begin{pmatrix} x_{2O_1} \\ y_{2O_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p}(t) \\ y_{1p}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

O_1 点在 $(O-xy)$ 中的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_{O_1} \\ y_{O_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2O_1} \\ y_{2O_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O_2}(t) \\ y_{O_2}(t) \end{pmatrix} \quad (21)$$

又

$$\begin{pmatrix} x_{O_1} \\ y_{O_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{O_1}^{(0)} \\ y_{O_1}^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_3(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} \quad (22)$$

由公式(20)(21)(22)可解得

$$\begin{pmatrix} s_3(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p}(t) \\ y_{1p}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O_2}(t) - x_{O_1}^{(0)} \\ y_{O_2}(t) - y_{O_1}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

公式(19)(23)即为各螺母副的运动方程。

4.2 模型求解

4.2.1 初始加工方案的生成

按照问题 2 的思路求解。先假定磨削点在 x_1 轴以最快速度移动，得到

$$x_{1p}(t) = 1/6t \quad (24)$$

为了方便求解，并使得磨削点在砂轮上均匀分布，可设 O_2 点匀速率从砂轮一侧移动到另一侧，则可知

$$\beta(t) = \beta^{(0)} + \omega t \quad (25)$$

其中 ω 为角速率。 O_2 点在 $(O-xy)$ 中的运动方程为

$$\begin{cases} x = r \sin \beta \\ y = r(1 - \sin \beta) \end{cases} \quad (26)$$

其中 r 为砂轮横截面劣弧的曲率半径。

将公式(24)(25)(26)代表的已知条件带入公式(19)(23)，解得各螺母副的运动方程，进而解得各步进电机的脉冲发送时刻表，得到初始方案。

电机 3 的螺母副位移函数单调递减，而电机 1、2 的螺母副位移函数都是非单调的，因此根据螺母副 1、2 的位移函数的单调性划分时段。螺母副的运动方

程及分段结果如图 12 所示。

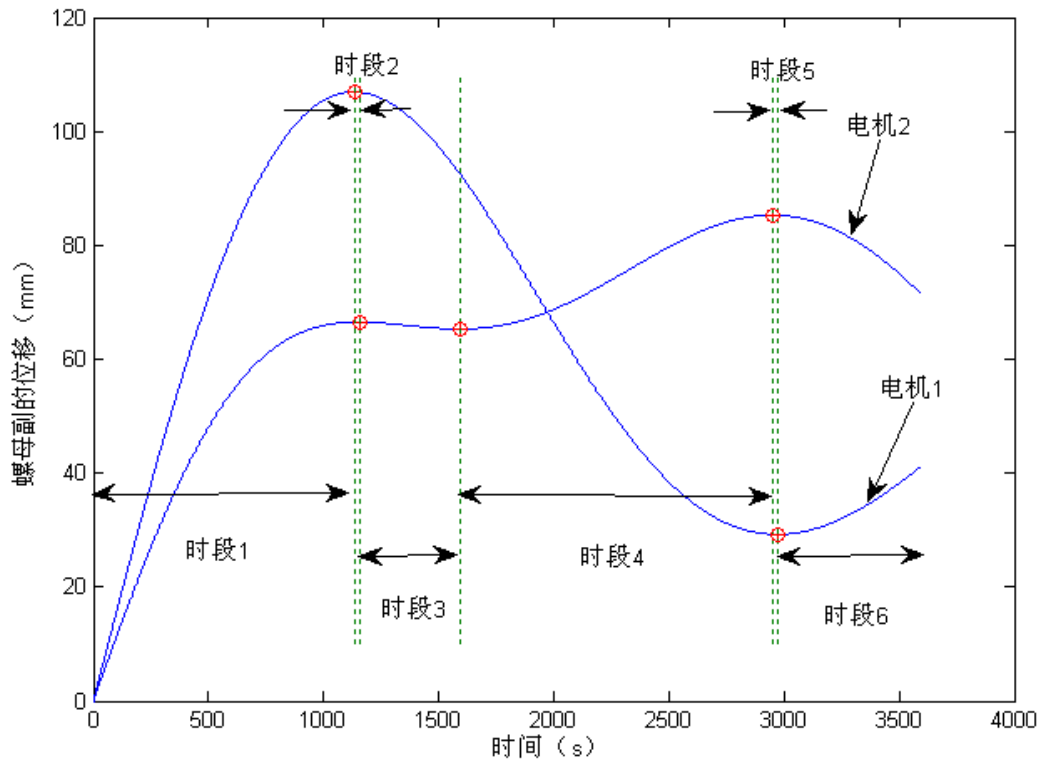


图 12 螺母副运动方程及分段结果示意

4.2.2 加工方案的检验与调整

按照问题 1 中提出的调整策略，针对本问题数据，给出调整后的最优方案。

最小化时间 T_{\min} 为 3600s，各时间段的起始时刻与脉冲数如表 7 所示。完整

的发送脉冲时刻数据（精确到 ms）储存在附件的文本文件中（第四问附件文件夹），表 8 为其中的部分数据。

表 7 时段划分与脉冲数目

时段号	起始时刻 (s)	结束时刻 (s)	脉冲数及其转角正负					
			电机 1		电机 2		电机 3	
时段 1	0	1623.283s	32076	+	19958	+	38805	-
时段 2	1134.635	1154.302	9	-	3	+	972	-
时段 3	1154.302	1592.500	4305	-	366	-	23254	
时段 4	1592.500	2950.822	18981	-	5991	+	73362	
时段 5	2950.822	2973.514	6	-	5	-	1103	
时段 6	2973.514	3600	3598	+	4176	-	29010	

表 8 各电机脉冲发送时刻表（单位：ms）

电机 1	0	21	43	64	86	107	128	150	171
电机 2	0	29	59	88	118	147	176	206	235
电机 3	0	50	100	150	200	250	300	350	400

各时间段的脉冲频率函数见图 13（公式见附件）。

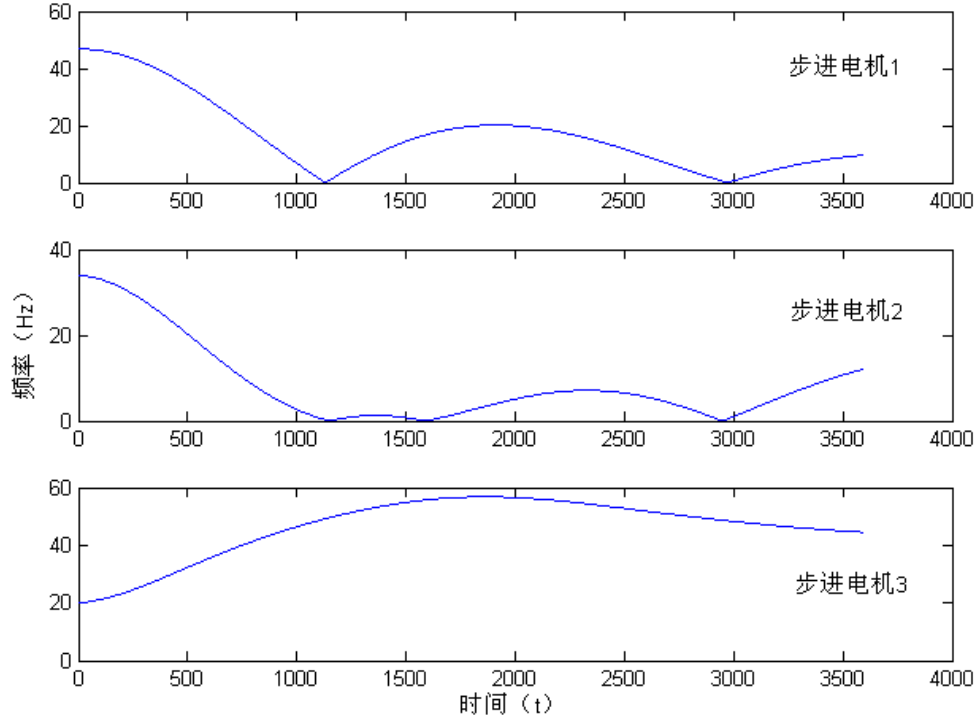


图 13 脉冲频率函数

4.3 误差分析

采用问题二的误差分析方法，对仿真曲线与理论曲线进行变步长采样，经计算得方差、均值、最大值分别为：

$$E_{\Delta S} = 0.0063mm \quad \sigma_{\Delta S}^2 = 9.6478 \times 10^{-6} mm^2 \quad \max_{\Delta S} = 0.0160mm$$

六、模型评价及推广

本文主要建立了圆曲线磨床加工复杂母线旋转体方案问题的优化模型，并对其求解。所建模型及算法优点在于：

- 1、利用切点运动与工作台运动的解析关系确定初始加工方案，精确的解析关系的建立使得该模型具有较高的精度。
- 2、通过自适应调整策略对初始加工方案进行优化，使之满足所有的约束条件。
- 3、在硬件条件允许的情况下，可以给出精确到任意数量级的可操作的加工方案，即各电机对应的脉冲发送时刻表。

4、通过仿真计算，求得理论与仿真结果绝对误差的欧氏距离最大为 10^{-2} mm，均值为 10^{-3} mm，可见给出的加工方案精度较高。

模型的缺点在于，忽略了可能引起误差的一些现实条件（比如各种仪器误差），因此，计算机仿真结果会与实际情况有偏差。

本文建立的模型及求解算法，适用于其他同类问题。

七、参考文献

- [1] 王家忠，外圆纵向智能磨削关键技术研究，吉林大学博士学位论文，2006。
- [2] 关玉祥，机械加工误差与控制，北京：机械工业出版社，1994。
- [3] 机械工业部标准化研究所，形状和位置公差原理及应用，北京：机械工业出版社，1983。
- [4] 吴荔铭，选择定位基准提高机械加工精度的方法，机械与电子，第 21 期：107-109，2007。
- [5] 王金宝等，快速点磨削砂轮关键技术的研究，工艺与检测，第 7 期：99-103，2008。
- [6] 沈志雄，金属切削机床，北京：机械工业出版社，2008。