

# 全国第四届研究生数学建模竞赛



题号     C    

题 目                     高速公路路面质量改进的分析                    

## 摘 要

本文主要讨论了改进高速公路路面质量的问题，利用聚类、回归分析等知识对各问题进行分析，建立模型求解得到所需结果，并对结果的合理性做出分析。

对问题一，考虑到混合料类型对四种指标的影响，将统计数据按混合料类型分类。对混合料类型相同的统计数据进行标准化，求出四指标之间的模糊相似矩阵，进行聚类分析，得出指标间的关联度。在判断出四种指标间存在数量关系的基础上，应用回归分析得到四种指标之间较精确的数量关系（部分混合料类型中对应的四种指标不存在数量关系或数量关系不明显）。

对问题二，鉴于问题一的讨论，将统计数据按混合料类型进行分类。根据相关系数分析影响因素对质量指标的影响，判断出影响四种质量指标最重要和比较重要的影响因素。并在此基础上对指标与影响因素进行了回归分析，得出相应的数学模型。据此得出要提高路面质量，应重点考虑油石比。

对问题三，对问题进行简化：假设矿料为大小不同配比一定的刚性小球，集料的压实即为刚性小球的重新排列。在理论分析中提出二球填充问题，并进行了简单的数学分析。而在实际模型中，考虑到直接求解较难，给出了基于贪心算法的算法具体步骤，据此算法最终可得到集料压实度的上界。

对问题四，根据题目要求，绘制不同沥青、石料质量对四种质量指标影响的分布图，以及不同厂家和产地对四种质量指标影响分布图。并据此判断其对质量指标的影响，得到了相应的观点。

对于问题五，探讨了影响高速公路路面质量的因素，提出一些合理化建议。

最后，本文对以上模型进行了相应的评价。

关键词：聚类分析；回归分析；单目标规划；贪心算法

参赛密码                       
(由组委会填写)

参赛队号           1053306          

参赛学校           中南大学

参赛队员姓名

李黎明、李轶、荆泉霖

---

---

## 1 问题提出

高速公路路面的寿命对降低高速公路的运行成本、保障运输安全有着极其重要的意义。我国高速公路的设计者和建设者为延长高速公路路面寿命做了大量的试验和调查研究，获得了一批宝贵的数据。

由于我国建设高速公路的历史不长，对高速公路路面寿命的客观规律的了解还不太全面、深入（例如不同地区的高速公路路面对抗水损害性能、高温性能、低温性能的要求是否可能不同？工程技术人员对一些现象的解释还不令人十分信服等等）。因此需要对现有的试验数据进行研究分析，从中寻找提高高速公路路面质量的改进方案以延长高速公路路面的寿命。

高速公路路面的施工工艺是以分别达到各自标准的沥青、矿粉、碎石（含细集料和粗集料，标准见附件）做原料，按一定的比例组成为混合料，经过充分拌和后，比较均匀地铺在已经造好的基层上、再经多次碾压路面以达到设计的压实度，最后经过一段时间让沥青路面降温就可以交付使用。在选料、拌和、摊铺、碾压成型这几道工序中，拌和、摊铺和降温是物理过程，只要按现有的工艺技术要求进行操作，它们对高速公路路面的质量影响不大；施工时外界的温度对沥青的融化和压实是有影响的，但专家们认为只要达到设计的压实度，它对高速公路路面的质量影响也不大。此外由于技术上的困难，这里也不考虑基层质量对路面质量的影响。

表格里是一批目前被认为对高速公路路面的质量有较大影响或有影响的因素的测试数据，对这批数据中所涉及的指标解释如下：

1.油石比。为混合料中沥青与集料（即矿粉、碎石）的质量比，被普遍认为是影响路面性能的关键指标。

2.筛孔通过率。即集料中能够通过直径大小不同的各种筛孔的各部分的质量占集料总质量的比例（显然筛孔直径越大则通过的混合料就越多），是反映集料粗细程度及大小搭配情况的指标。例如通过直径为 0.6mm 圆孔的集料部分占集料的百分比可能是 10.1%；通过直径为 4.75mm 圆孔的集料部分占集料的百分比可能是 43.9%；通过直径为 19mm 圆孔的集料部分占集料的百分比可能是 99%。

3.VV：空隙率。为混合料经碾压后达到设计压实状态时，其中空隙体积占总体积的百分比。

4.VMA：矿料间隙率。为混合料经碾压后达到设计压实状态时，混合料中“有效沥青(指进入路面的沥青，而非施工中使用的沥青原料的全体)体积+空隙体积”占总体积的百分比。

5.VFA：饱和度。等于 $(VMA-VV)/VMA$ ，单位是%，反映有效沥青体积占VMA 体积的百分率。

---

6.DP: 粉胶比。混合料中矿粉质量与沥青质量的比。

7.毛体积密度。为达到设计压实状态的试件的密度。

8.最大理论密度。为混合料理论上的最大密度,即如果不含任何空隙时混合料的密度。 $VV=100-\text{毛体积密度}/\text{最大理论密度}\times 100$ 。

9.%Gmm(最初)。混合料在最初压实状态的压实度。压实度=试件密度/最大理论密度 $\times 100$ 。压实状态分为最初压实状态、设计压实状态和最大压实状态。最初压实状态的压实度为经过少数几次碾压后的压实度。

10.%Gmm(最大)。混合料试件成型时达最大压实状态时的压实度。一般应达到或略超过设计压实度。

关于高速公路路面质量的试验指标有以下四种,解释如下:

1.TSR(%).冻融劈裂强度比,反映混合料抗水损害性能的指标,越大越好。

2.S0(%).浸水马歇尔稳定度比,反映混合料抗水损害性能的指标,越大越好。上述两种测试方法和测试指标经常同时采用,从数据看二者不完全一致。

3.车辙。动稳定度,为车辙试验中试件变形稳定时,荷载作用次数与变形深度的比值,单位是“次/mm”,反映混合料的抗车辙性能(高温性能),越大越好。

4.弯拉应变。为低温小梁弯曲试验时的破坏应变。反映混合料的低温变形能力,越大越好。

显然这批指标中有些是测量值,有的是计算值。

请你们对这批数据进行充分地分析、研究,以获取尽可能多的提高高速公路路面质量的有用信息(优先考虑以下问题,但可以部分换成或增加自选问题)。

一.描述高速公路路面质量的抗水损害性能、高温性能、低温性能的四个指标之间有没有数量关系?如果有数量关系,请建立它们之间的数学模型。

二.建立描述高速公路路面的抗水损害性能、高温性能、低温性能的四个质量指标和你们认为影响高速公路路面质量的最重要的和比较重要的因素之间比较精确的数学模型,你们选择这些因素的理由是什么?根据模型你们认为采用什么样的方案可以提高高速公路路面的质量。

三.若从理论上探讨集料的筛孔通过率与路面压实度的上界之间的数量关系,你们有何见解?

四.沥青、碎石质量对高速公路路面抗水损害性能、高温性能、低温性能究竟有没有影响,你们的观点是什么?根据是什么?不同厂家、不同产地的但型号相同、类型相同的沥青、碎石质量对高速公路路面抗水损害性能、高温性能、低温性能究竟有没有影响,你们的观点是什么?根据又是什么?

五.根据你们对数据分析的结果,现在测试高速公路路面质量的试验项目中是否有重要的遗漏?你们对高速公路建设部门有什么建议?

---

## 2 模型分析与求解

### 2.1 问题一

#### 2.1.1 问题一重述

通过对数据的分析，判断高速公路路面质量的抗水损害性能、高温性能、低温性能的四个指标之间有没有数量关系。如果有数量关系，建立它们之间的精确数学模型。

#### 2.1.2 问题一分析

在统计数据中混合料类型主要分为几大类，对混合料类型及公路路面质量指标相关分析的结果显示混合料类型对质量指标具有较大的影响（详见问题四），故将所有统计数据根据混合料类型进行分类，共分为 AC-13、AC-20、SMA-13、SMA-13S、Sup13、Sup20、Sup25 这七类。其它混合料类型只有少量数据，在此不予考虑。

在混合料类型固定的情况下，应用聚类分析法对各质量指标进行聚类分析，分析四种质量指标之间的相关性。在判断出四种指标间存在数量关系的基础上，考虑应用回归思想分析四种指标间较精确的数量关系。

#### 2.1.3 模型建立与求解

##### 2.1.3.1 聚类分析

为分析各质量指标之间是否存在数量关系，可以运用聚类分析法对各质量指标进行分析。其中首先使用公式  $x'_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  对数据进行标准化处理，以消除量纲

对分析结果的影响。然后利用因素、指标间的相关度构成矩阵，其中相关度由下列公式计算得出

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m |x_{ik} - \bar{x}_i| \cdot |x_{jk} - \bar{x}_j|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ik} - \bar{x}_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{jk} - \bar{x}_j)^2}}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ik}, \quad \bar{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{jk}。$$

式中  $x_{ik}$  表示因素（或指标）i 的第 k 个数据。

以混合料类型为 SMA-13S 的统计数据为例进行聚类分析

对 TSR ( $Y_1$ )、So ( $Y_2$ )、车辙 ( $Y_3$ )、弯拉应变 ( $Y_4$ ) 进行聚类分析。利用

SPSS 的分层聚类，得模糊相似矩阵：

$$R = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.388 & 0.122 & 0.434 \\ 0.388 & 1.000 & -0.097 & 0.316 \\ 0.122 & -0.097 & 1.000 & 0.156 \\ 0.434 & 0.316 & 0.156 & 1.000 \end{pmatrix}$$

取  $\lambda = 0.434$ ， $r_{14} = 0.434$ ，Y1 与 Y4 归并，对应等价类  $\{Y1, Y4\}$ ， $\{Y2\}$ ， $\{Y3\}$ ；

取  $\lambda = 0.388$ ， $r_{12} = 0.388$ ，Y1 与 Y2 归并，对应等价类  $\{Y1, Y4\}$ ， $\{Y2, Y3\}$ ；

取  $\lambda = 0.156$ ， $r_{34} = 0.156$ ，Y3 与 Y4 归并，对应等价类  $\{Y1, Y4, Y2, Y3\}$ ；

得到的聚类如图 1 所示

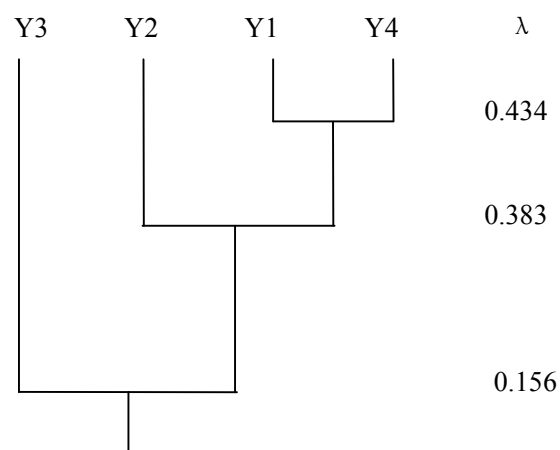


图 1 质量指标树状图

由聚类图及模糊相似矩阵可以看出：Y1与Y2、Y3、Y4的相关度都相对较大，即Y1与Y2、Y3、Y4存在一定的数量关系，可以尝试建立Y2与Y1、Y3、Y4的数学模型。

### 2.1.3.2模型建立

#### (1) 线性回归模型

根据聚类分析的结果，考虑建立多元线性回归模型：

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \alpha_3 Y_4$$

用 SPSS 软件对其进行求解，得回归结果如表 1 所列

表1 线性回归结果

	系 数	标准化后系 数	<i>T</i> 检验 值	方差膨胀因 子
常数项	45.248		2.063	0.056
Y2	0.322	0.290	1.313	0.208
Y3	0.001	0.209	0.987	0.338
Y4	0.002	0.375	1.688	0.111
$R^2$			0.301	
调整后 $R^2$			0.170	
<i>F</i> 检验 值			2.296	
<i>P</i>			0.117	

从表可以看出，线性回归结果拟合非常差，因此考虑建立多项式回归模型。

## (2) 多项式回归模型

在线性回归模型中加入二次项因子，建立多项式回归模型：

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \alpha_3 Y_4 + \alpha_4 Y_2^2 + \alpha_5 Y_3^2 + \alpha_6 Y_4^2$$

用 SPSS 软件对其进行求解，得回归结果为：

表2 多项式回归结果

	系数	标准化后系 数	<i>T</i> 检验 值	方差膨胀因 子
常数项	569.862		1.203	0.250
Y2	-8.523	-7.666	-0.824	0.425
Y3	-0.005	-1.905	-1.972	0.070
Y4	-0.055	-9.406	-5.556	0.000
$Y_2^2$	0.048	7.877	0.846	0.413
$Y_3^2$	4.60E-007	2.202	2.270	0.041
$Y_4^2$	8.15E-006	9.862	5.802	0.000
$R^2$			0.808	
调整后			0.719	

$R^2$	
$F$ 检验	9.103
值	
$P$	0.000

从表可以看出，回归结果总体拟合较线性回归模型有了很大改良，但仍不太理想。若考虑到交叉影响，在模型中加上二次交叉项，即设模型为：

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \alpha_3 Y_4 + \alpha_4 Y_2^2 + \alpha_5 Y_3^2 + \alpha_6 Y_4^2 + \alpha_1 Y_2 Y_3 + \alpha_2 Y_2 Y_4 + \alpha_3 Y_4 Y_3$$

用 SPSS 软件对其进行求解，得回归结果为：

表 3 交叉回归结果

	系数	标准化后系数	$T$ 检验值	方差膨胀因子
常数项	968.453		1.497	0.165
Y2	-14.600	-13.131	-1.138	0.282
Y3	-0.017	-6.178	-0.935	0.372
Y4	-0.109	-18.411	-2.246	0.049
$Y1^2$	0.072	11.775	1.071	0.310
$Y3^2$	5.19E-007	2.485	2.234	0.050
$Y4^2$	8.94E-006	10.812	4.635	0.001
$Y2*Y3$	7.06E-005	2.254	0.380	0.712
$Y2*Y4$	0.000	6.896	1.123	0.288
$Y3*Y4$	1.60E-006	2.260	0.832	0.425
$R^2$		0.831		
调整后		0.679		
$R^2$				
$F$ 检验		5.465		
值				
$P$		0.007		

此回归模型的拟合结果较好，但  $Y2 \times Y4$  项的系数为 0，同时考虑可能存在三项的交叉影响。因此对变量进行重新估计，在能更好消除多重共线性的情况下，最后得到回归模型为：



$$Y_1 = 860.361 - 13.612Y_2 - 0.009Y_3 - 0.066Y_4 - 0.072Y_2^2 + 4.97 \times 10^{-7} \times Y_3^2 \\ + 8.76 \times 10^{-6} Y_4^2 - 2.43 \times 10^{-6} \times Y_3Y_4 + 3.74 \times 10^{-8} \times Y_2Y_3Y_4$$

此时  $R^2 = 0.821$ ，调整后  $R^2 = 0.691$ ， $F=6.309$ ， $P=0.003$ 。则此回归模型总体结果较优。

由此可知：当混合料类型为 SMA-13S 时，TSR ( $Y_1$ )、So ( $Y_2$ )、车辙 ( $Y_3$ )、弯拉应变 ( $Y_4$ ) 四个指标之间有一定的数量关系。

同理可以对其它混合料类型进行分析，其中回归结果最优的是当混合料类型为 SMA-13 时。此时的回归模型及相关结果如下：

$$Y_1 = 2107.912 - 43.965Y_2 + 0.019Y_3 - 0.099Y_4 + 0.262Y_2^2 - 1.9 \times 10^{-6} \times Y_3^2 \\ + 2.45 \times 10^{-5} Y_4^2 - 0.001 \times 10^{-6} \times Y_2Y_4 + 7.07 \times 10^{-6} \times Y_3Y_4 - 7.1 \times 10^{-8} \times Y_2Y_3Y_4$$

$R^2 = 0.888$ ，调整后  $R^2 = 0.719$ ， $F=5.265$ ， $P=0.028$ 。

而在 SUP20、SUP13 等混合料类型中，四个指标之间的相关度非常小，则无法建立它们之间较好的数学模型，即当采用这些混合料类型时四个指标之间没有数量关系。

## 2.2 问题二

### 2.2.1 问题二重述

问题二要求建立四个质量指标与影响公路路面质量的最重要的及比较重要的两个因素之间的比较精确的数学模型。

### 2.2.2 模型建立与求解

根据问题二的阐述，将统计数据根据混合料类型分类，根据相关系数分析法对各因素与指标间的关联度进行分析。通过关联度的大小可以判断出对各指标影响最重要和比较重要的因素，其中与指标相关度最大的两个因素即为最重要及比较重要的因素。再应用回归思想，寻找描述高速公路路面的抗水损害性能、高温性能、低温性能的四个质量指标和影响高速公路路面质量的最重要的和比较重要的因素之间比较精确的数学模型。具体分析求解过程与问题一类似。

以混合料类型 SUP13 为例进行分析如下。

#### 2.2.2.1 影响因素关联度分析

根据混合料类型 SUP13 的统计数据，运用 SPSS 软件分析各因素与高速公路路面质量指标 TSR 的相关性，得到相关系数列表：

表4 TSR相关系数列表

因素 指标	油石 比 ( $X_1$ )	VV ( $X_2$ )	VM A ( $X_3$ )	VFA ( $X_4$ )	DP ( $X_5$ )	毛体 积密 度 ( $X_6$ )	最大 理论 密度 ( $X_7$ )	%Gm m (最初) ( $X_8$ )	%Gm m (最大) ( $X_9$ )
TSR(%) ( $Y_1$ )	-0.28 8	-0.47 0	0.13 0	0.32 6	-0.52 5	-0.41 9	-0.37 1	0.500	-0.312

由相关系数列表可知影响 TSR (%) 最重要的因素和比较重要的因素分别为毛体积密度 ( $X_5$ ) 与最初压实度 ( $X_8$ )。TSR 的数值是由冻融劈裂试验确定的。冻融劈裂试验是通过测定混合料试件在受到水损害前后劈裂破坏的强度比来评价沥青混合料水稳定性，当沥青与粉料配比适当时可以增加试件的弹性，以增强其 TSR 冻融劈裂强度比。统计数据及相关系数与此理论相符合。

---

#### 2.2.2.2 模型建立

对 TSR 进行回归分析：

1>线性回归

考虑线性回归模型：

$$Y_1 = a_1 + a_2 \times X_5 + a_3 \times X_8$$

运用 matlab, 调用 rstool 函数对指标 TSR 与 DP 与最初压实度进行线性拟合, 得到线性回归方程：

$$Y_1 = -83.9381 - 5.6656 \times X_5 + 2.0562 \times X_8$$

其中, 剩余标准差为 1.8863。

2>多项式回归

考虑多项式回归模型：

$$Y_1 = b_1 + b_2 \times X_5 + b_3 \times X_8 + b_4 \times X_5^2 + b_5 \times X_8^2$$

运用 matlab, 调用 rstool 函数对指标与毛体积密度与最初压实度进行多项式回归, 得到多项式方程为：

$$Y_1 = 1848.0 + 4.6X_5 - 42.9 \times X_8 - 4.1 \times X_5^2 + 0.3 \times X_8^2$$

其中, 剩余标准差为 2.0447。此多项式回归模型的拟合效果不如线性回归模型。

3>交叉项回归

考虑交叉项回归模型：

$$Y_1 = c_1 + c_2 \times X_5 + c_3 \times X_8 + c_4 \times X_5 \times X_8$$

根据统计数据, 运用 matlab, 调用 rstool 函数得到交叉多项式方程为：

$$Y_1 = -661.1415 + 407.9640 \times X_5 + 8.7766 \times X_8 - 4.8163 \times X_5 \times X_8$$

其中剩余标准差为 1.8653。

4>混合回归

考虑回归模型：

$$Y_1 = d_1 + d_2 \times X_5 + d_3 \times X_8 + d_4 \times X_5 \times X_8 + d_5 \times X_5^2 + d_6 \times X_8^2$$

运用 matlab, 调用 rstool 函数得到交叉多项式方程为：

$$Y_1=1451.1+426.2\times X_5-40.6\times X_8-5.1\times X_5\times X_8+1.9\times X_5^2+0.3\times X_8^2$$

其中剩余标准差为：2.0381。

综上所述，当使用含交叉项的多项式回归时，所得曲线与数据拟合的最好，故 TSR 质量指标与 DP 及最初压实度的关系为

$$Y_1=-661.1415+407.9640\times X_5+8.7766\times X_8-4.8163\times X_5\times X_8$$

其中  $Y_1$  为 TSR 质量指标， $X_5$  为毛体积密度， $X_8$  为最初压实度。

同理采用相关性分析和回归分析可得出其他三个指标最重要和比较重要因素及它们之间的数学模型：

a) 影响 So (%) 的最重要因素和比较重要因素分别为油石比和空隙率，它们之间的数学模型为

$$Y_2=-15.7952+5.5027\times X_1+18.8828\times X_2$$

其中  $Y_2$  为 So 浸水马歇尔稳定度比， $X_1$  为油石比， $X_2$  为空隙率。

b) 影响车辙动稳定度的最重要因素和比较重要因素分别为油石比和最大理论密度，它们之间的数学模型为

$$Y_3=-36591+1633\times X_1+437\times X_4$$

其中  $Y_3$  为车辙动稳定度， $X_1$  为油石比， $X_4$  为饱和度。

c) 影响弯拉应变的最重要因素和比较重要因素分别为油石比和最大理论密度，它们之间的数学模型为

$$Y_4=-33404+13336\times X_1-726\times X_7-1268\times X_1^2+496\times X_7^2$$

其中  $Y_4$  为弯拉应变， $X_1$  为油石比， $X_7$  为最大理论密度。

由此得出了四个质量指标与对其影响最重要和比较重要因素之间精确数学模型。

根据上述分析，当混合料类型为 SUP13 时，油石比对其中三种路面质量指标都有较大的影响，在一定范围内随着油石比的增加，三种路面质量指标均有一定程度的增加，即路面质量得到提高。因此为提高高速公路路面质量，首先应重点考虑油石比，同时应在适当范围内增大饱和度、毛体积密度、最初压实度、空隙率、最大理论密度（实际上就是考虑混合料的颗粒大小分布状况）。

## 2.3 问题三

### 2.3.1 问题三重述

问题三要求通过理论计算得出集料筛孔通过率与路面压实度上界之间的数量关系。

### 2.3.2 模型建立

根据对题目的理解,对现实问题进行简化,假定集料是由刚性矿石小球构成,对确定配比的集料进行压实相当于对集料刚性小球的重新排列。而对刚性小球进行重新排列使其所占体积最小即得到压实密度的上界。

#### 2.3.2.1 符号说明

$r_k$ , 筛孔半径, 单位: mm;

$S_k$ , 筛孔半径为  $r_k$  的过筛率, 单位: %;

$M$ , 集料总质量, 单位: kg;

$V$ , 压实后集料总体积,  $V = M/\rho$ , 单位:  $\text{m}^3$ ;

$\rho$ , 压实后集料密度, 单位:  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;

$V_{\text{球}}$ , 刚性矿石小球总体积, 单位:  $\text{m}^3$ ;

$\rho_{\text{理论}}$ , 理论最大密度 (集料质量与刚性小球总体积之比), 单位:  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;

$D_k$ , 集料中半径为  $r_k$  小球的质量百分比  $\begin{cases} D_1 = S_1 \\ D_k = S_k - S_{k-1}, k \geq 1 \end{cases}$ , 单位: %;

$d_k$ , 集料中半径为  $r_k$  小球的个数百分比,  $d_k = \frac{V_{\text{球}} \times D_k}{4\pi r_k^3 / 3}$ , 单位: %;

$m_k$ , 集料中半径为  $r_k$  小球的个数, 单位: 个;

$Y$ , 压实度  $Y = \frac{\rho}{\rho_{\text{理论}}} = \frac{M/V}{M/V_{\text{球}}} = \frac{V_{\text{球}}}{V}$ ;

$a$ , 沥青路长, 单位: m;

$b$ , 沥青路宽, 单位: m;

$h$ , 高速公路沥青路面厚度, 单位: m;

根据上述假设, 可知压实度上界为  $Y = \frac{\rho}{\rho_{\text{理论}}} = \frac{M/V}{M/V_{\text{球}}} = \frac{V_{\text{球}}}{V}$ , 故通过对压实

体积的计算可知压实度的上界, 即刚性小球重新排列所占空间最小时所得的体

积。

### 2.3.2.2 模型假设

- (1) 混合料中粗细不同集料均为密度一定的大小不等的均匀刚性小球, 这些小球在受压时不会变形或破碎;
- (2) 由混合料所铺的沥青路面是长方体形;
- (3) 所铺的沥青路面仅有混合料而不存在其它物质;
- (4) 混合料中集料小球的半径大小是离散的、有等级的, 即混合料中只存在半径分别等于各型号筛口半径的集料小球;

### 2.3.2.3 模型建立

目标函数:

根据上述假设, 可知压实度上界为  $Y = \frac{\rho}{\rho_{\text{理论}}} = \frac{M/V}{M/V_{\text{球}}} = \frac{V_{\text{球}}}{V}$ , 故通过对压实

体积的计算可知压实度的上界, 即刚性小球重新排列所占空间最小时所得的体积。

由此建立模型, 在三维空间中用刚性小球对  $a \times b$  长方体进行填充, 在经过优化配置后得到最小体积, 即使其填充高度  $h$  最小。在集料质量及配比已知的前提下, 可将此问题转化为单目标规划模型, 目标函数为:

$$\max G = \frac{\rho_{\text{试}}}{\rho_{\text{理论}}} = \frac{M/V_{\text{试}}}{M/V_{\text{球}}} = \frac{V_{\text{球}}}{V_{\text{试}}} = \frac{\sum_{k=0}^8 \left[ m_k \cdot \left( \frac{4}{3} \pi r_k^3 \right) \right]}{abh}$$

约束条件分析:

建立一个三维坐标系, 以长方体沥青路面的一个顶点为原点, 以经过该顶点的三条边所在直线分别为  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴。混合料的集料中存在  $k$  种半径分别为  $r_k$  的小球, 分别有  $m_k$  个。这些小球的空间坐标分别为  $(X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij})$  (其中  $i=0,1,\dots,12$ ,  $j=0,1,\dots, m_k$ )。则当利用这些小球来铺路时, 存在以下约束:

- (1) 小球与小球之间不会受压而变形, 即两小球之间的球心距大于等于两小球的半径和:

$$\sqrt{(x_{ki} - x_{lj})^2 + (y_{ki} - y_{lj})^2 + (z_{ki} - z_{lj})^2} \geq r_k + r_l$$

其中:  $k, l = 0, 1, \dots, 8$      $i = 0, 1, \dots, m_k$ ,     $j = 0, 1, \dots, m_l$

(2) 小球必须全部处在长方体内，即小球的坐标应满足如下关系：

$$\begin{cases} r_k \leq x_{ki} \leq a - r_k \\ r_k \leq y_{ki} \leq b - r_k \\ r_k \leq z_{ki} \leq h - r_k \end{cases}$$

由上述分析建立单目标规划模型如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & G = \frac{\sum_{k=0}^8 m_k \cdot \left( \frac{4}{3} \pi r_k \right)}{abh} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sqrt{(x_{ki} - x_{lj})^2 + (y_{ki} - y_{lj})^2 + (z_{ki} - z_{lj})^2} \geq r_k + r_l \\ \text{其中: } k, l = 0, 1, \dots, 8 \quad i = 0, 1, \dots, m_k, \quad j = 0, 1, \dots, m_l \\ x_{ki} \geq r_k \\ y_{ki} \geq r_k \\ z_{ki} \geq r_k \\ x_{ki} + r_k \leq a \\ y_{ki} + r_k \leq b \\ z_{ki} + r_k \leq h \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.3.3 模型求解

#### 2.3.3.1 理论分析（二球填充问题）：

有均匀的密度都为  $\rho$ 、半径分别为  $r, 2r$  的三种球，用于填充一个长宽高分别为  $a, b, c$  的长方体（其中  $c$  足够大），在填充过程中三种球个数分别为  $m_0, m_1$ 。压实度与上述问题相吻合，定义为填充小球的总体积与长方体体积的比值。将此问题转化为单目标规划模型，即使得压实度最大：

$$\max \quad G = \frac{V_{\text{球}}}{V} = \frac{\sum_{k=0}^1 \left[ m_k \cdot \left( \frac{4}{3} \pi r_k \right) \right]}{abh}$$

当小球的个数确定的情况下， $V_{\text{球}}$  是确定的。因此目标函数转化为通过确定小球的球心位置使  $h$  最小。

从而建立模型如下：

$$\begin{aligned} \min &= h \\ s.t. &\begin{cases} \sqrt{(x_{ki} - x_{lj})^2 + (y_{ki} - y_{lj})^2 + (z_{ki} - z_{lj})^2} \geq r_k + r_l & \text{其中: } k, l = 0, 1 \\ & i = 0, \dots, m_k, \quad j = 0, \dots, m_l \\ x_{ki} \geq r_k \\ y_{ki} \geq r_k \\ z_{ki} \geq r_k \\ x_{ki} + r_k \leq a \\ y_{ki} + r_k \leq b \\ z_{ki} + r_k \leq h \end{cases} \end{aligned}$$

其中， $x_{ki}, y_{ki}, z_{ki}$  表示半径为  $r_k$  的第  $i$  个小球的坐标

### 2.3.3.2 理论分析模型求解

当  $m_0$  或  $m_1$  取 0，长方体足够大时，则该问题就转变成了有名的“球体填充问题”，亦称“开普勒猜想”。经过数位数学大师的研究，得出了“球体填充问题”的最大填充密度为 0.77305。因此，如果直接分析足够大长方体内二球的填充问题是相当复杂的。为此，可以考虑分析一个小的长方体元内的二球填充问题，即分析一个小的长方体内少量的两种小球的填充问题。分别取初始数据如下：

$$1. \begin{cases} a = 4r \\ b = 9r \\ m_0 = 0 \\ m_1 = 3 \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} a = 4r \\ b = 9r \\ m_0 = 3 \\ m_1 = 2 \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} a = 4r \\ b = 9r \\ m_0 = 6 \\ m_1 = 2 \end{cases}$$

由 lingo 编程求得相应的最小的  $h$  值如下：

$$h_1 = 7.87297r, \quad h_2 = 5.78707r, \quad h_3 = 6.17923r$$

从而得到对应的压实度上界：

$$G_1 = 35.47\%; \quad G_2 = 38.2\%, \quad G_3 = 41.43\%$$

在二球填充问题中，随着小球个数与大球个数的比值的增加，压实度在逐渐增加。在此理论分析过程中，考虑的刚性小球个位数较少，且小球半径近似，与实际问题有少许差别，但并没有添加或删减约束条件，在对实际问题进行分析的时候，会虽然会存在部分误差，但是鉴于考虑数学意义上的压实度上界，可以应用理论分析模型进行考虑。故此理论分析方法是可应用于实际问题的，根据理论分析所运用的方法，可对配比固定的集料的压实度上界进行分析与计算，得到



压实度的上界，具体理论分析程序见附盘。

### 2.3.3.3 实际问题求解分析

根据上述理论分析，可以采用同样的方法分析实际模型中的理论压实度上界。但考虑到理论分析中求解时是运用 lingo 求解，而在实际模型中，长方体较大，球的种类和个数较多，lingo 无法求解。而且直接采用搜索面临循环次数巨大的问题。因此，可以考虑贪心算法。

所谓贪心法其实就是一种多步决策法，它建议通过一系列步骤来构造问题的解，每一步对目前构造的部分解做一个扩展，直到获得问题的完整解为止。贪心算法的技术核心是，所做的每一步选择都是“贪心选择”，即满足：①可行的：它必须满足问题的约束条件；②局部最优：它是当前步骤中所有可行选择中最佳的局部选择；③不可取消：选择一旦做出，在算法的后面步骤中无法改变；正是具有这些特征，贪心法希望通过一系列局部的贪心选择，能够产生一个整体问题的全局最优解<sup>[6]</sup>。

在小球的填充问题中，小球的填充方法就是确定球的种类和球心坐标( $X_i, Y_i, Z_i$ )。定义最佳填充位置和最大填充密度如下：

填充密度——当前填充的所有球的体积与球所占的最小长方体体积的比值。

最佳填充位置——当小球填充在某个位置时，已填充的所有球的填充密度最大，即达到压实度的理论上界。

在求解压实度的理论上界过程中，可以首先球的填充问题的具体贪心算法步骤如下：

Step1: 确定长方体的长  $a$ 、宽  $b$ ，球的种类  $k$ ，各种小球的个数  $n(j)$ 和球的总个数  $n$ 。确定  $i, j$  的初始值为 0，确定已填充的第  $j$  种小球个数  $w(j)$ 的初始值为 0，确定 ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) 的初始值为(0, 0, 0)。

Step 2:  $i=i+1, j=0, m=0$ 。

Step 3:  $j=j+1$ 。

Step 4: 填充第  $i$  个球，如果  $w(j)<n(j)$ ，选择第  $j$  种小球填充。否则返回 Step 3。

Step 5: 选择第  $j$  种小球填充长方体（当填充第一个球时，为了方便分析，填充最小的一个球，使其分别与坐标系中的 XY、YZ、XZ 三个平面相切，且所有球均填充在第一坐标空间）。在上述模型的约束条件下得到最佳填充位置( $X_i', Y_i', Z_i'$ )和最大填充密度  $\rho_i'$ 。当  $\rho_i'>\rho$  时， $\rho_i=\rho_i', (X_i, Y_i, Z_i)=(X_i', Y_i', Z_i')$ ， $m=j$ 。

---

Step7: 当  $j=k$  时,  $w(m)=w(m)+1$ 。否则返回 Step 3。

Step8: 将第  $m$  种小球作为第  $i$  个小球填充到长方体中。

Step9: 当  $i=n$  时, 停止搜索。否则返回 Step 2。

通过上述算法的程序实现, 可以求得实际模型中的每个小球的填充位置。从而可以得到理论压实度上界。

## 2.4 问题四

### 2.4.1 问题四重述

问题四要求对沥青及碎石的质量进行分析,进而得出这两个因素对路面质量指标的影响,并根据数据考察不同厂家、不同产地的但型号相同、类型相同的沥青、碎石质量对质量因素的影响,给出相应的观点。

### 2.4.2 模型建立与求解

#### 2.4.2.1 沥青种类对质量指标的影响

根据数据表格中沥青混合料类型与四质量指标的对应关系绘制相关图谱,由分布图可知:沥青种类对 TSR 有一定影响,16 号沥青使得 TSR 冻融劈裂强度比降低; So 浸水马歇尔稳定度也在一定程度上受沥青种类的影响,与 TSR 相似,16 号沥青削减浸水马歇尔稳定度比;根据车辙、弯拉应变与沥青种类相关图谱可知不同种类沥青对其强度影响较为严重,13~25 号沥青依次使得车辙稳定度及沥青种类降低。

根据对四个图谱的分析可知,沥青种类对公路路面质量抗水性能影响较小,而对高温低温性能影响较大,13~25 号沥青使得高低温性能依次降低。

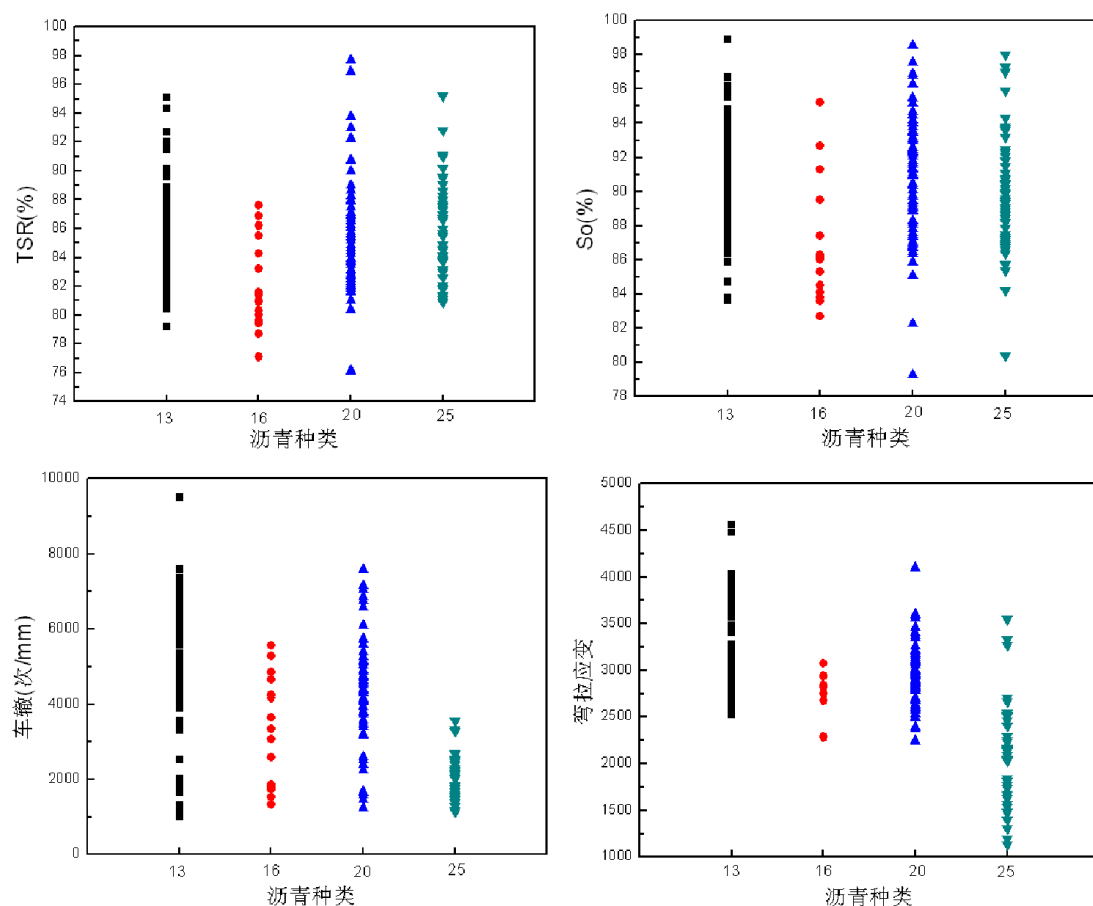


图 2 不同种类沥青对质量指标的影响

以下图谱为不同厂家 SBS 改性沥青对四种质量指标的影响。由图显示：由于厂家的不同，SBS 改性沥青的 TSR 变化较大，其中金陵 SBS 改性沥青的 TSR 最大，而壳牌 SBS 改性沥青的 TSR 最小；而其它三个指标也约有变化。总体看来，金陵 SBS 改性沥青优于其它三个厂家的 SBS 改性沥青。

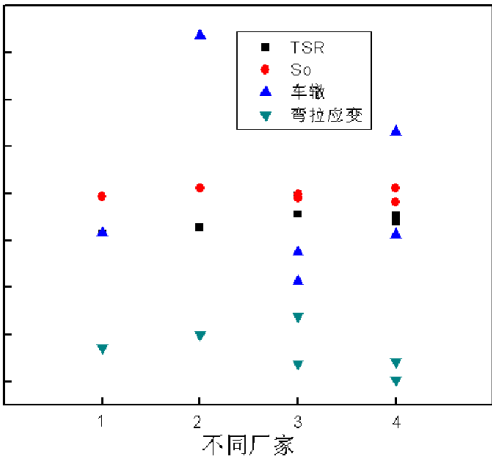


图 3 1-北京华联；2-金陵；3-壳牌；4-深圳路安特

根据不同厂家但型号类型相同沥青对四种质量指标的影响可以看出，不同厂家对 TSR、S0 及弯拉应变基本没有影响，而车辙动稳定度则随厂家的变化有少许波动，其中金陵厂家的沥青对车辙动稳定度有较大的提升。

2.4.2.2 碎石岩性对质量指标的影响

根据附件数据表格中碎石岩性与四质量指标的相关数据绘制图谱，由图 4 显示：1、6、9、10 类岩性碎石的 TSR 值相对较大；2、4、6、10 类岩性碎石的 S0 值偏高；2、4、6、10 类岩性碎石的车辙动稳定度较好；2、6、10 类岩性碎石的弯拉应变较大。总体分析得出 2、6、10 类岩性碎石（玄武岩（粗）和石灰岩（细）；石灰岩；玄武岩）的四个质量指标较优于其它类的岩性碎石。

图 5 为不同产地的玄武岩对四种质量指标的影响。由图显示：由于产地的不同，四种质量指标均有一定的变化，但对 TSR 及 S0 质量指标影响不大，只对车辙动稳定强度比及弯拉应变有一定影响。

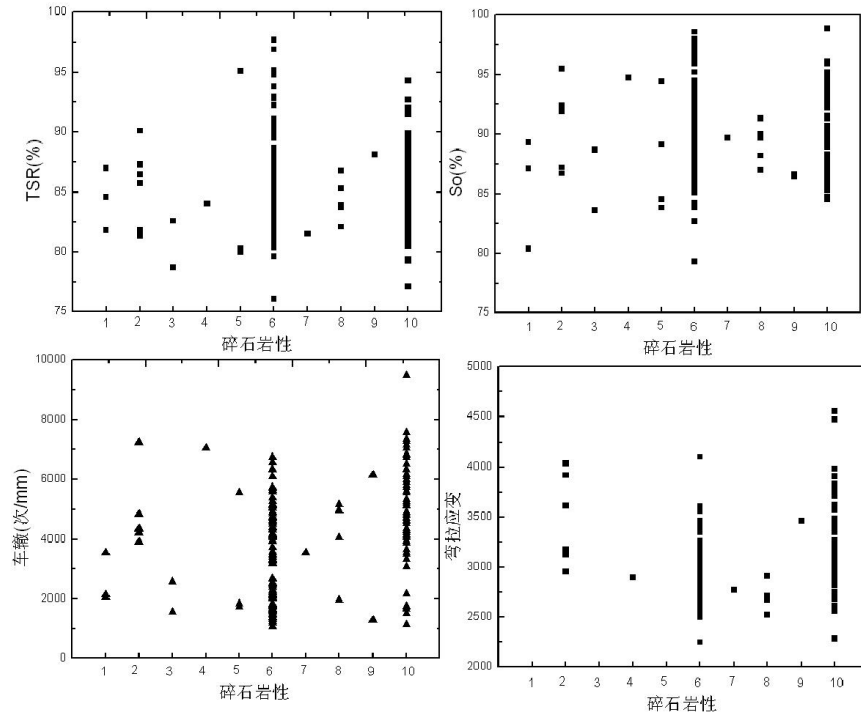


图 4 1-安山岩；2-玄武岩（粗）和石灰岩（细）；3-花岗岩；4-灰岩；  
5-砂岩；6-石灰岩；7-石灰岩和砂岩；8-石灰岩和玄武岩；  
9-石榴石；10-玄武岩

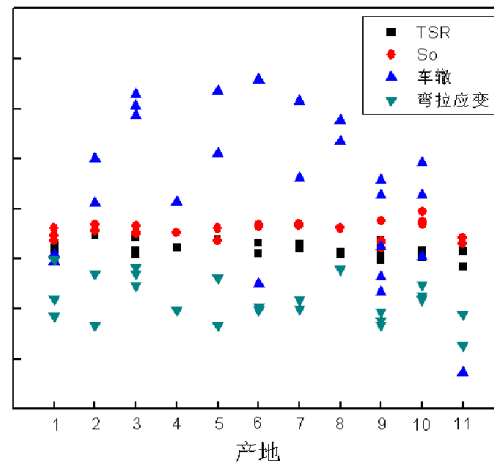


图 5 1-河南平顶山；2-河南桐柏；3-河南桐柏群得力；  
4-河南驻马店遂平县石料厂；5-溧阳江阳；6-玛尼罕；  
7-牦牛营子石料场；8-茅迪六合金石磊；9-桐柏；  
10-西平石料厂；11-镇江茅

---

## 2.5 问题五

沥青路面以其行车舒适、适应性强、养护维修方便等特点而被广泛采用。但我国目前高速公路建设经验不足，各地水文、气候条件等因素差异及高速公路特有的交通状况，影响了行车的舒适性甚至危及行车安全，所以有必要研究影响高速公路沥青路面质量的主要因素。

为保证现有测试高速公路路面质量的试验的完整性、有效性，建议考虑：

- a) 耐磨性能。现在交通工具日益增多，客运货运量急剧增加，公路使用时间长，经常由于磨损原因使交通事故发生率加大，应增加此项测试以完善现有的试验测试。
- b) 平整度。现今随着生活节奏的加大，汽车行驶速度加快，为保证司机及旅客的行驶舒适度及减少因路面平整度引起的翻车现象，应增加平整度测试试验。
- c) 地区差异。南北方差异大，在进行高速公路路面质量试验时应充分考虑地域差异，对特殊地区情况分别进行标准不同的测试。
- d) 抗老化指标。为保证公路使用周期的延长，减少不必要的基础工程重复建设费用，应对路面进行抗老化测试，以节省开支，增加公路拓展区域。

---

### 3模型评价

针对所建立的模型进行总结：

问题一：描述高速公路路面质量的抗水损害性能、高温性能、低温性能的四个指标之间有没有数量关系？如果有数量关系，请建立它们之间的数学模型。

针对问题一运用聚类分析的方法对四种质量指标进行分析，并进行一系列的线性、非线性回归，所得结果在沥青种类为SMA-13S时得到了较好的拟合，但在其他沥青种类下，所得相关性并不很好，需要进一步的分析与讨论，需要运用更多的函数类型进行回归分析。

问题二：建立描述高速公路路面的抗水损害性能、高温性能、低温性能的四个质量指标和你们认为影响高速公路路面质量的最重要的和比较重要的因素之间比较精确的数学模型，你们选择这些因素的理由是什么？根据模型你们认为采用什么样的方案可以提高高速公路路面的质量。

针对问题二运用了与问题一相类似的方法，对多种影响因素与质量指标进行聚类分析，进而获得对各个指标影响重要和比较重要的因素，并对其进行回归分析，得到标准残差和较小即拟合度高的回归方程，建立了精确的数学模型。根据回归方程就可得知提高公路路面质量的方案。

问题三：若从理论上探讨集料的筛孔通过率与路面压实度的上界之间的数量关系，你们有何见解？

针对问题三根据实际情况进行了一些假设简化，认为矿料为半径比例固定的刚性小球。应用理论分析，进行小规模试验计算，得到了压实度的上界。据此理论即可得出实际模型中配比固定的集料的压实度上界。直接求解此模型需大量的计算机运算，故考虑运用贪心算法，并给出了求解配比固定的集料的压实度上界的算法步骤。

问题四：沥青、碎石质量对高速公路路面抗水损害性能、高温性能、低温性能究竟有没有影响，你们的观点是什么？根据是什么？不同厂家、不同产地的但型号相同、类型相同的沥青、碎石质量对高速公路路面抗水损害性能、高温性能、低温性能究竟有没有影响，你们的观点是什么？根据又是什么？

针对问题四，绘制沥青、碎石质量与质量性能的分布图，并对图谱进行分析。得出不同厂家、不同产地但型号类型相同的沥青对四种性能指标的影响。

问题五：根据你们对数据分析的结果，现在测试高速公路路面质量的试验项目中是否有重要的遗漏？你们对高速公路建设部门有什么建议？

针对问题五对高速公路路面质量测试提出了一些建议，并进行了简要说明。

---

参考文献:

- 【1】 纪德云等人, 模糊聚类分析法[J], 沈阳大学学报, 2000.2: 73-79
- 【2】 成礼智等人, 数学建模的理论与实践[M], 长沙: 国防科技大学出版社, 1999
- 【3】 于玲等, 高速公路沥青路面典型病害及分析[J], 沈阳建筑工程学院学报, 2004.1: 36-38
- 【4】 吴元奇, 冯荣扬, 聚类分析计算方法的理论及结果比较[J], 湛江海洋大学学报, 2002.2: 57-63
- 【5】 徐玖平等, 运筹学(第二版)[M], 北京: 科学出版社, 2004
- 【6】 马 燕, 张根耀, 杜利锋, 网络最小生成树问题的贪心解法[J], 延安教育学院学报, 2006.12: 53-54
- 【7】 陈端兵, 黄文奇, 求解矩形 packing 问题的贪心算法[J], 计算机工程, 2007.2: 160-162