参赛密码 ____________

（由组委会填写）

第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学　　校	河海大学
参赛队号	**10294001**
队员姓名	**1.**李逸驰
	2.高沁
	3.李海欣

参赛密码 ____________

（由组委会填写）

第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目　　　　轿运车装载和运输的数学建模

摘　　　要：

本文主要研究轿运车装载和运输的数学模型，属于**整数规划**问题，采用**LINGO** 软件求解。

针对问题一、二、三，从各类轿运车单层的装载方案出发，以各类装载方案出现次数作为控制变量，建立**两阶段优化**模型，一阶段优化轿运车总数量，二阶段优化使用成本，**并以一阶段轿运车最优总数量为等式约束**，得各类轿运车的使用数量和装载方案。问题一至少需 **18** 辆轿运车，其中 1-1 和 1-2 型分别为 **16** 辆和 **2** 辆，装载方案见表 6；问题二需 **15** 辆轿运车，其中 1-1 和 1-2 型分别为 **12** 辆和 **1** 辆，装载方案见表 8；问题三需 **30** 辆轿运车，其中 1-1 和 1-2 型分别为 **25** 辆和 **5** 辆，装载方案见表 10。

针对问题四，从各种路线各类轿运车单层的装载方案出发，建立三阶段优化模型，前两阶段优化模型同问题一、二、三中模型相同，将第二阶段得到的各类轿运车的使用数量作为第三阶段优化的等式约束，以行驶里程数最短作为第三阶段优化的目标函数，得到各类轿运车的使用数量、装载方案和行车路线。问题四所得轿运车使用数量为 **25** 辆，其中 1-1 型和 1-2 型分别为 **21** 和 **4** 辆，行驶里程数为 **6404**，装载方案和行车路线见表 12。

针对问题五，考虑到各类轿运车单层的装载方案过于庞大，建立**启发式-淘汰搜索**三阶段优化模型。为简化分析，从所有装载方案中选取 200 组剩余空间最小的方案，并取 100 组随机方案，作为装载方案代表。以轿运车使用数量最小为目标函数进行第一阶段优化，**更为简便的获得了一般可行解**，然后执行淘汰-搜索过程，**删除出现次数为 0 的装载方案(即淘汰过程)，并取随机方案补全 300 组装载方案代表(即搜索过程，尽可能增大寻优空间)，保证本次优化结果不劣于上次结果，在一般可行解的基础上不断优化改进，**直至多次启发-淘汰搜索后轿运车数量不再减少，可得轿运车最优可行解为 **113** 辆。第二阶段优化模型与问题四相同，轿运车装载方法为：1-1 型 **90** 辆，1-2 型 **18** 辆，2-2 型 **5** 辆。

前两阶段优化模型为不考虑线路情况下得到的轿用车使用量和装载情况，**本文假设第三阶段模型不考虑绕行情况，因而前两阶段的最优可行解实际上是第三阶段可行解的下限解，故本模型引入车辆松弛变量**。进而本文提出两种启发式方法，方法一首要目标在于最小化总轿运车数量，**即在车辆松弛变量尽可能小的条件下，最小化总行驶里程；考虑到连续优化问题更易于处理，方法二提出一种局部整数-分散连续的逐步优化方法。**首先，将线路 1 各型轿运车上下

层每列各种方案出现的次数设为**整型变量，其余均为连续变量**，求得线路 1 各型轿运车上下层每列的方案，线路 1 的装载方案在之后的连续化过程中保持恒定；接着**设定线路 *i* 装载方案次数为整型变量，线路 1……*i*-1 装载为恒定不变的整数，线路 *i*+1……6 装载方案为连续变量**；重复该过程，直到所有线路对应各种方案的出现次数全部固定。方法一所得轿运车的最优可行解为 114 辆，里程数为 38128，方法二所得轿运车的最优可行解为 116 辆，里程数为 32068。本文旨在车辆数最小，其次才是总里程，**因而在本题背景下，方法一的结果更优**，但方法二里程更少，最优可行解更易于获得，**因而方法二在实际的物流运输中也可以作为一种可选的方案。**

本问题的研究对降低运输成本和提高运输效率具有重要的意义。

关键词：整车运输； LINGO；两阶段优化；启发式-淘汰搜索；局部整数-分散连续

一、 问题重述

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。随着我国汽车工业的高速发展，整车物流量，特别是乘用车的整车物流量迅速增长。图 1、2、3 就是乘用车整车物流实施过程中的画面。

乘用车生产厂家根据全国客户的购车订单，向物流公司下达运输乘用车到全国各地的任务，物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批乘用车。为此，物流公司首先要从他们当时可以调用的“轿运车”中选择出若干辆轿运车，进而给出其中每一辆轿运车上乘用车的装载方案和目的地，以保证运输任务的完成。“轿运车”是通过公路来运输乘用车整车的专用运输车，根据型号的不同有单层和双层两种类型，由于单层轿运车实际中很少使用,本题仅考虑双层轿运车。双层轿运车又分为三种子型：上下层各装载 1 列乘用车，故记为 1-1 型（图 1）；下、上层分别装载 1、2 列，记为 1-2 型（图 2）；上、下层各装载 2 列，记为 2-2 型（图 3），每辆轿运车可以装载乘用车的最大数量在 6 到 27 辆之间。

在确保完成运输任务的前提下，物流公司追求降低运输成本。但由于轿运车、乘用车有多种规格等原因，当前很多物流公司在制定运输计划时主要依赖调度人员的经验，在面对复杂的运输任务时，往往效率低下，而且运输成本不尽理想。请你们为物流公司建立数学模型，给出通用算法和程序（评审时要查）。

装载具体要求如下：每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层。轿运车、乘用车规格（第五问见附件）如下：

乘用车型号	长度(米)	宽度(米)	高度(米)
Ⅰ	4.61	1.7	1.51
Ⅱ	3.615	1.605	1.394
Ⅲ	4.63	1.785	1.77

表 1 乘用车规格

轿运车类型	上下层长度(米)	上层宽度(米)	下层宽度(米)
1-1	19	2.7	2.7
1-2	24.3	3.5	2.7

表 2 轿运车规格

整车物流的运输成本计算较为繁杂，这里简化为：影响成本高低的首先是轿运车使用数量；其次，在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值，但物流公司 1-2 型轿运车拥有量小，为方便后续任务安排，每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；再次，在轿运车使用数量及型号均相同情况下，行驶里程短的成本低，注意因为该物流公司是全国性公司，在各地均会有整车物流业务，所以轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回。最后每次卸车成本几乎可以忽略。

请为物流公司安排以下五次运输，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方案、行车路线。（前三问目的地只有一个，可提供一个通用程序；后两问也要给出启发式算法的程序，优化模型则更佳）：

1．物流公司要运输Ⅰ车型的乘用车 100 辆及Ⅱ车型的乘用车 68 辆。

2．物流公司要运输Ⅱ车型的乘用车 72 辆及Ⅲ车型的乘用车 52 辆。

3．物流公司要运输Ⅰ车型的乘用车 156 辆、Ⅱ车型的乘用车 102 辆及Ⅲ车型的乘用车 39 辆。

4．物流公司要运输 166 辆Ⅰ车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆Ⅱ车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的，分别为 31、47 辆），具体路线见图 4，各段长度：OD=160，DC=76，DA=200，DB=120，BE=104，AE=60。

5．附件的表 1 给出了物流公司需要运输的乘用车类型（含序号)、尺寸大小、数量和目的地，附件的表 2 给出可以调用的轿运车类型（含序号)、数量和装载区域大小（表里数据是下层装载区域的长和宽, 1-1 型及 2-2 型轿运车上、下层装载区域相同；1-2 型轿运车上、下层装载区域长度相同，但上层比下层宽 0.8 米。此外 2-2 型轿运车因为层高较低，上、下层均不能装载高度超过 1.7 米的乘用车。

二、 问题分析

针对问题一、二、三，研究两种类型轿运车装载三种类型乘用车的最佳装载方案，直接考虑将乘用车装入轿运车较为繁琐，且不易获得最优解。因此，本文首先考虑两类轿运车上下层装载乘用车所有可能的方案，将轿运车上下层各种装载方案被采用的次数作为控制变量。进而，可以将该问题转化为线性整数规划[1-3]问题，可以利用 LINGO 软件进行求解。由于影响整车物流运输成本的首要因素是轿运车的使用数量，在轿运车使用数量相同的情况下，使用成本决定运输成本。根据这一特点，本文提出两阶段优化模型，第一阶段优化的目标函数为轿运车使用数量最小，将第一阶段得到的轿运车使用数量作为第二阶段优化的等式约束，第二阶段优化的目标函数为使用成本最小，得到各类轿运车的使用数量和装载方案。

针对问题四，研究两种类型轿运车装载三种类型乘用车的最佳装载方案和行车路线。首先，不考虑行车路线，采用两阶段优化模型进行装载，得到各型轿运车的使用量。针对行车路线优化，直接将同一地点的乘用车放入一批轿运车，然后调节剩余乘用车的装载方案，这一思路比较容易实现，但很难获得最优解。因此，本文考虑将轿运车按照行驶路线不同进行分类，轿运车行驶路线经过的所有地点均有卸车的可能性。以各条线路各类轿运车上下层的各种方案被采用的次数作为控制量，以行驶里程数最小作为目标函数，考虑上下层约束、1-1 和 1-2 型车数量约束、各地供需约束等，从而将问题转化为线性整数规划问题，可以利用 LINGO 软件进行求解。求解本问题的模型实际上是三阶段优化模型。

针对问题五，研究多种类型轿运车装载多种类型乘用车的最佳装载方案和行车路线，由于每种轿运车装载乘用车的情况有几万甚至几十万种(如表 16 所示)，将轿运车上下层各种装载方案被采用的次数作为控制量已经不切实际。对于这类求解规模极大的规划问题，主要有两种可行的思路，分别是智能算法和降维。智能算法能够求解大规模的规划问题，但由于本问题对乘用车和轿运车尺寸的限制条件较多，交叉和变异的实现较为困难，因而本文主要考虑降维方法进行求解。从所有装载方案中选取 200 组剩余空间最小方案，并取 100 组随机方案，构成 300 组装载方案作为装载方案代表，显然这 300 组装载方案不能完全反应总体的情况。因而，本模型采用一启发式优化算法，以轿运车使用数量最小为目标函数进行第一阶段优化，删除出现次数为 0 的装载方案，保留出现次数不为 0 的装载方案，并取随机方案补全 300 组装载方案代表，将上一次优化所得结果作为初值，再次进行优化计算。若某次启发之后，经过 10~15 次启发，所得结果不再减小，则认为所得结果即为最优解。将所得结果代入第二阶段优化模型，进行优化，得到各型轿运车使用量。

第三阶段优化的目标函数为行驶里程数最短，考虑到求解规模过于庞大，将轿运车数量作为等式约束很难获得最优解。因而本文考虑一下两种处理方法，第一种方法为在原先等式右边加一松弛变量，将等式约束转化为不等式约束，这种方法能够获得最接近轿运车总量的行车路线，但这种方法的求解时间仍然较长，寻优过程具有很强的随机性，不易获得最优解，且松弛变量需要多次调节。第二种方法为局部整数-分散连续的逐步优化方法，针对多种行车路线，保持一种行车路线的控制变量为整数，其余为连续实数。将得到的该种路线的控制变量保留，保持另一种行车路线的控制变量为整数，其余为连续实数，求得

下一种行车路线的控制变量。直至所有行车路线的控制变量均有取值。这种方法同样需要等式右边加一松弛变量，将等式约束转化为不等式约束。由于LINGO 有较强处理连续变量的能力，因而这种方法能够快速得到一种较好的可行解。方法二相比方法一具有更快的计算速度，但方法一相比方法二更接近真实解。

三、 模型假设

1、1-1 和 1-2 型轿运车上层力求对称，但不要求完全对称(所装乘用车长度基本相等即可)；

2、乘用车的装载只与乘用车的长、宽、高和轿运车的层长、层高有关，与其他因素无关；

3、不考虑轿运车超载和安全运输等方面问题；

4、第一~四问不考虑 2-2 型轿运车的装载情况，仅考虑 1-1 和 1-2 型车的装载情况；

5、问题五不考虑绕行线路。

四、 符号系统

序号	符号	符号说明
1	$\boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}} \in \mathrm{N}^{15\times3}$	1-1 型轿运车下层力争放满前提下所有可能乘用车的组合方案构成的矩阵
2	$\boldsymbol{N}_{11\mathrm{U}} \in \mathrm{N}^{5\times3}$	1-1 型轿运车上层力争放满前提下所有可能乘用车的组合方案构成的矩阵
3	$\boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}} \in \mathrm{N}^{21\times3}$	1-2 型轿运车下层力争放满前提下所有可能乘用车的组合方案构成的矩阵
4	$\boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}} \in \mathrm{N}^{6\times3}$	1-2 型轿运车上层每列力争放满前提下所有可能乘用车的组合方案构成的矩阵
5	$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}} \in \mathrm{N}^{15}$	1-1 型轿运车下层各种组合的出现次数构成的向量
6	$\boldsymbol{x}_{\mathrm{U}} \in \mathrm{N}^{5}$	1-1 型轿运车上层各种组合的出现次数构成的向量
7	$\boldsymbol{y}_{\mathrm{D}} \in \mathrm{N}^{15}$	1-2 型轿运车下层各种组合的出现次数构成的向量
8	$\boldsymbol{y}_{\mathrm{U}} \in \mathrm{N}^{6}$	1-2 型轿运车上层每列层各种组合的出现次数构成的向量
9	$P \in \mathrm{N}$	需要运输的 I 型乘用车的数量
10	$Q \in \mathrm{N}$	需要运输的 II 型乘用车的数量
11	$R \in \mathrm{N}$	需要运输的III型乘用车的数量
12	$C_{\mathrm{sum}} \in \mathrm{N}$	轿运车使用数量的总和
13	$C_{1-1} \in \mathrm{N}$	1-1 型轿运车的使用数量
14	$C_{1-2} \in \mathrm{N}$	1-2 型轿运车的使用数量

15	M	轿运车的行驶路线， $\mathrm{M} \in \{\mathrm{D,C,B,A,CB,CA}\}$
16	W	运输乘用车辆的目的地， $\mathrm{W} \in \{\mathrm{A,B,C,D}\}$
17	$\boldsymbol{x}_{\mathrm{DM}} \in \mathrm{N}^{15}$	1-1 型轿运车下层行驶路线为 M 各种组合的出现次数构成的向量
18	$\boldsymbol{x}_{\mathrm{UM}} \in \mathrm{N}^{5}$	1-1 型轿运车上层行驶路线为 M 各种组合的出现次数构成的向量
19	$\boldsymbol{y}_{\mathrm{DM}} \in \mathrm{N}^{15}$	1-2 型轿运车下层行驶路线为 M 各种组合的出现次数构成的向量
20	$\boldsymbol{y}_{\mathrm{UM}} \in \mathrm{N}^{6}$	1-2 型轿运车上层每列行驶路线为 M 各种组合的出现次数构成的向量
21	$P_{\mathrm{W}} \in \mathrm{N}$	目的地为 W 需要运输的 I 型乘用车的数量
22	$Q_{\mathrm{W}} \in \mathrm{N}$	目的地为 W 需要运输的 II 型乘用车的数量
23	$R_{\mathrm{W}} \in \mathrm{N}$	目的地为 W 需要运输的III型乘用车的数量
24	$S_{\mathrm{M}} \in \mathrm{R}$	线路 M 的行驶里程数
25	$S_{\mathrm{sum}} \in \mathrm{R}$	所有轿运车的行驶总里程数
26	$T_{\mathrm{M}} \in \mathrm{N}^{3}$	行驶路线为 M 的轿运车所装载的乘用车数量
27	$\mu \in \mathrm{N}$	松弛变量

五、 模型建立

5.1 问题一、二、三

5.1.1 两阶段优化模型

1-1 和 1-2 型轿运车的上、下两层装载区域可以等价看成长方形，各列乘用车纵向排列。1-1 型轿运车上下层各装载 1 列乘用车，1-2 型轿运车上下层各装载 1、2 列。由于高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1 和 1-2 型轿运车的下层，根据乘用车规格表中的数据，III型乘用车只能放在 1-1 和 1-2 型轿运车的下层。

以上、下两层力争装满为原则，得到 1-1 和 1-2 型轿运车装载Ⅰ、Ⅱ和III型乘用车所以装载可能的情况，如表 1、表 2、表 3 和表 4 所示。

表 1 1-1 型轿运车下层装载乘用车可能情况

序号	乘用车数量		
	Ⅰ型	Ⅱ型	III型
1	0	0	4
2	0	1	3
3	0	2	2
4	0	3	1
5	0	5	0
6	1	0	3
7	1	1	2
8	1	2	1
9	1	3	0
10	2	0	2
11	2	1	1
12	2	2	0
13	3	0	1
14	3	1	0
15	4	0	0

表 2 1-1 型轿运车上层装载乘用车可能情况

序号	乘用车数量		
	Ⅰ型	Ⅱ型	III型
1	0	5	0
2	1	3	0
3	2	2	0
4	3	1	0
5	4	0	0

表 3 1-2 型轿运车下层装载乘用车可能情况

序号	乘用车数量		
	Ⅰ型	Ⅱ型	III型
1	0	0	5
2	0	1	4
3	0	2	3

4	0	4	2
5	0	5	1
6	0	6	0
7	1	0	4
8	1	1	3
9	1	2	2
10	1	4	1
11	1	5	0
12	2	0	3
13	2	1	2
14	2	2	1
15	2	4	0
16	3	0	2
17	3	1	1
18	3	2	0
19	4	0	1
20	4	1	0
21	5	0	0

表 4 1-2 型轿运车上层每列装载乘用车可能情况

序号	乘用车数量		
	I 型	II 型	III型
1	0	6	0
2	1	5	0
3	2	4	0
4	3	2	0
5	4	1	0
6	5	0	0

将表 1、表 2、表 3 和表 4 中的数据放入矩阵 $\boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}},\boldsymbol{N}_{11,\mathrm{U}},\boldsymbol{N}_{112\mathrm{D}},\boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}$。1-1 和 1-2 型轿运车上下层每列各种情况出现的次数分别为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}}=\left[x_{\mathrm{D}1}\quad x_{\mathrm{D}2}\quad \cdots\quad x\right]$，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{U}}=\left[x_{\mathrm{U}1}\quad x_{\mathrm{U}2}\quad \cdots\quad x_{\mathrm{U}5}\right]$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{D}}=\left[y_{\mathrm{D}1}\quad y_{\mathrm{D}2}\quad \cdots\quad y_{\mathrm{D}15}\right]$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{U}}=\left[y_{\mathrm{U}1}\quad y_{\mathrm{U}2}\quad \cdots\quad y_{\mathrm{U}6}\right]$。

针对第 1-3 问，本模型为两阶段优化模型，第一阶段优化的目标函数为轿运车的使用数量最小，第二阶段优化的目标函数为使用成本最小[5]。通过第一阶段优化，得到轿运车的使用数量 C_{sum}，以轿运车使用数量为 C_{sum} 作为第二阶段优化的等式约束，在此基础上以使用成本最小为目标函数进行第二阶段优化。具体优化模型如下：

第一阶段优化模型：

$$\min\ C_{\mathrm{sum}}=\sum_{i=1}^{15}x_{\mathrm{D}i}+\sum_{i=1}^{21}y_{\mathrm{D}i} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{15} x_{\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{5} x_{\mathrm{U}i} \tag{2}$$

$$2 \times \sum_{i=1}^{21} y_{\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{6} y_{\mathrm{U}i} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}}(:,1) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,1) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}}(:,1) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,1) \ge P \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}}(:,2) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,2) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}}(:,2) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,2) \ge Q \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}}(:,3) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,3) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}}(:,3) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,3) = R \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{21} y_{\mathrm{D}i} \le 20\% \times \sum_{i=1}^{15} x_{\mathrm{D}i} \tag{7}$$

$$x_{\mathrm{D}i}, x_{\mathrm{U}i}, y_{\mathrm{D}i}, y_{\mathrm{U}i} \in \mathrm{N} \tag{8}$$

式(2)表示 1-1 型轿运车上下层出现的次数相等；式(2)表示 1-2 型轿运车上层出现次数是下层出现次数的 2 倍；式(4)~(5)表示轿运车装载的Ⅰ型和Ⅱ型乘用车数量不少于需要运输的Ⅰ型和Ⅱ型乘用车数量；式(6)表示轿运车装载的Ⅲ型乘用车数量等于需要运输的Ⅲ型乘用车数量；式(7)表示 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%。

值得注意的是，由于Ⅲ型乘用车只能装在 1-1 和 1-2 型下层，而下层力争装满，因而这里式(6)取为等式约束。事实上，如果轿运车装载的Ⅲ型乘用车数量大于所需的Ⅲ型乘用车数量，由于Ⅲ型乘用车长度大于Ⅰ型和Ⅱ型，剩余的空间同样可以装下Ⅰ型和Ⅱ型乘用车，因而式(6)可以取为等式约束或不等式约束对于本文模型而言是等价的。

优化后得到轿运车的使用数量C_{sum}，将此作为第二阶段优化的等式约束，第二阶段优化模型如下：

$$\min\ C_{1-2} = \sum_{i=1}^{21} y_{\mathrm{D}i} \tag{9}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{15} x_{\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{5} x_{\mathrm{U}i} \tag{10}$$

$$2 \times \sum_{i=1}^{21} y_{\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{6} y_{\mathrm{U}i} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}}(:,1) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,1) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}}(:,1) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,1) \ge P \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}}(:,2) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,2) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{D}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}}(:,2) + \boldsymbol{y}_{\mathrm{U}} \boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,2) \ge Q \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{N}_{11\mathrm{D}}(:,3)+\boldsymbol{x}_{\mathrm{U}}\boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,3)+\boldsymbol{y}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{N}_{12\mathrm{D}}(:,3)+\boldsymbol{y}_{\mathrm{U}}\boldsymbol{N}_{12\mathrm{U}}(:,3)=R \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{21} y_{\mathrm{D}i} \le 20\% \times \sum_{i=1}^{15} x_{\mathrm{D}i} \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_{\mathrm{D}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\mathrm{D}i} = C_{\mathrm{sum}} \tag{16}$$

$$x_{\mathrm{D}i}, x_{\mathrm{U}i}, y_{\mathrm{D}i}, y_{\mathrm{U}i} \in \mathrm{N} \tag{17}$$

式(9)表示 1-2 型轿运车的使用量最小，由于轿运车使用数量相同的情况下，运输成本取决于轿运车的使用成本，本问题仅考虑 1-1 和 1-2 型两种轿运车，且 1-2 型轿运车的使用成本高于 1-1 型轿运车，因而只要使 1-2 型轿运车的使用数量最小，即可保证整车物流的使用成本最小。式(10)~(15)同第一阶段优化的约束类似。式(16)表示轿运车的使用数量恒定。

优化后得到 1-1 和 1-2 型轿运车的使用量，即可保证整车物流的运输成本最低。

5.1.2 计算结果

利用 LINGO 软件[4]编写上述两阶段优化模型，并将所需乘用车数量代入，计算得到所需轿运车数量和组合情况，具体计算结果如下：

对于问题一，所需乘用车数量为 $P=100, Q=68, R=0$。

进行第一阶段优化，得到轿用车使用量为 $C_{\mathrm{sum}}=18$，代入第二阶段进行优化，得到 1-1 和 1-2 型轿用车使用量分别为 $C_{1-1}=16, C_{1-2}=2$。具体装载方案如表 5 所示。

表 5 问题 1 装载方案

	轿运车类型			
	1-1 型		1-2 型	
	下层	上层	下层	上层
装载方案	$x_{\mathrm{D15}}=16$	$x_{\mathrm{U1}}=9$ $x_{\mathrm{U5}}=7$	$y_{\mathrm{D6}}=1$ $y_{\mathrm{D15}}=1$	$y_{\mathrm{U1}}=1$ $y_{\mathrm{U3}}=3$

按照上述方案进行装载，实际装载情况如表 6 所示：

表 6 问题 1 实际装载方案

序号	轿运车类型	下层装载方案		上层装载方案	
		Ⅰ型	Ⅱ型	Ⅰ型	Ⅱ型
1	1-1	4	0	0	5
2	1-1	4	0	0	5
3	1-1	4	0	0	5
4	1-1	4	0	0	5
5	1-1	4	0	0	5
6	1-1	4	0	0	5
7	1-1	4	0	0	5
8	1-1	4	0	0	5

9	1-1	4	0	0	4
10	1-1	4	0	4	0
11	1-1	4	0	4	0
12	1-1	4	0	4	0
13	1-1	4	0	4	0
14	1-1	4	0	4	0
15	1-1	4	0	4	0
16	1-1	4	0	1	0
17	1-2	0	6	2	10
18	1-2	5	0	4	8

由表 6 可知，本模型得到的装载方案，仅有两辆 1-1 型轿运车未装满(序号为 9、16)，且所有轿运车的下层均装满，1-2 型轿运车上层也能满足对称，通过本模型得到的方案事实可行。

对于问题二，所需乘用车数量为$P=0,Q=72,R=52$。

进行第一阶段优化，得到轿用车使用量为$C_{\text{sum}}=13$，代入第二阶段进行优化，得到 1-1 和 1-2 型轿用车使用量分别为$C_{1-1}=12,C_{1-2}=1$。具体装载方案如表 7 所示。

表 7 问题 2 装载方案

	轿运车类型			
	1-1 型		1-2 型	
	下层	上层	下层	上层
装载方案	$x_{\text{D1}}=11$ $x_{\text{D6}}=1$	$x_{\text{U1}}=12$	$y_{\text{D1}}=1$	$y_{\text{U1}}=2$

按照上述方案进行装载，实际装载情况如表 8 所示：

表 8 问题 2 实际装载方案

序号	轿运车类型	下层装载方案		上层装载方案	
		II 型	III型	II 型	III型
1	1-1	0	4	5	0
2	1-1	0	4	5	0
3	1-1	0	4	5	0
4	1-1	0	4	5	0
5	1-1	0	4	5	0
6	1-1	0	4	5	0
7	1-1	0	4	5	0
8	1-1	0	4	5	0
9	1-1	0	4	5	0
10	1-1	0	4	5	0
11	1-1	0	4	5	0
12	1-1	1	3	4	0
13	1-2	0	5	12	0

由表 6 可知，本模型得到的装载方案，仅有一辆 1-1 型轿运车未装满(序号

为 12)，且所有轿运车的下层均装满，1-2 型轿运车上层能满足对称，通过本模型得到的方案实际可行。

对于问题三，所需乘用车数量为 $P=156, Q=102, R=39$。

进行第一阶段优化，得到轿用车使用量为 $C_{\text{sum}}=30$，代入第二阶段进行优化，得到 1-1 和 1-2 型轿用车使用量分别为 $C_{1-1}=25, C_{1-2}=5$。具体装载方案如表 9 所示。

表 9 问题 3 装载方案

	轿运车类型			
	1-1 型		1-2 型	
	下层	上层	下层	上层
装载方案	$x_{\text{D1}}=6$ $x_{\text{D3}}=1$ $x_{\text{D5}}=1$ $x_{\text{D12}}=1$ $x_{\text{D14}}=1$ $x_{\text{D15}}=15$	$x_{\text{U1}}=8$ $x_{\text{U5}}=17$	$y_{\text{D1}}=1$ $y_{\text{D4}}=4$	$y_{\text{U3}}=9$ $y_{\text{U6}}=1$

按照上述方案进行装载，实际装载情况如表 10 所示：

表 10 问题 3 实际装载方案

序号	轿运车类型	下层装载方案			上层装载方案		
		I 型	II 型	III型	I 型	II 型	III型
1	1-1	0	0	4	0	5	0
2	1-1	0	0	4	0	5	0
3	1-1	0	0	4	0	5	0
4	1-1	0	0	4	0	5	0
5	1-1	0	0	4	0	5	0
6	1-1	0	0	4	0	5	0
7	1-1	0	2	2	0	5	0
8	1-1	0	5	0	0	5	0
9	1-1	2	2	0	4	0	0
10	1-1	3	1	0	4	0	0
11	1-1	4	0	0	4	0	0
12	1-1	4	0	0	4	0	0
13	1-1	4	0	0	4	0	0
14	1-1	4	0	0	4	0	0
15	1-1	4	0	0	4	0	0
16	1-1	4	0	0	4	0	0
17	1-1	4	0	0	4	0	0
18	1-1	4	0	0	4	0	0
19	1-1	4	0	0	4	0	0
20	1-1	4	0	0	4	0	0
21	1-1	4	0	0	4	0	0

22	1-1	4	0	0	4	0	0
23	1-1	4	0	0	4	0	0
24	1-1	4	0	0	4	0	0
25	1-1	4	0	0	4	0	0
26	1-2	0	0	5	7	4	0
27	1-2	0	4	2	4	8	0
28	1-2	0	4	2	4	8	0
29	1-2	0	4	2	4	8	0
30	1-2	0	4	2	4	8	0

由表 10 可知，本模型得到的装载方案，全部轿运车均装满，且 1-2 型轿运车上层能满足对称，通过本模型得到的方案事实可行。

5.2 问题四

5.2.1 三阶段优化模型

针对问题 4，轿运车使用数量和使用成本最低的前提下，还需要考虑行驶里程最小。因而本模型为三阶段优化模型，前两阶段的优化模型与 5.1 相同，经过第二阶段优化，得到各种型号轿用车的使用量，将此作为等式约束，代入第三阶段优化模型。第三阶段优化模型的目标函数为行驶里程数最短，并且满足各种型号的轿用车使用量恒定。

物流公司从 O 地运输乘用车的目的地分别为 A、B、C 和 D 地，所有可能的行驶路线有以下 6 种：

1、路线 1：O-D，用下标 D 表示；

2、路线 2：O-D-C，用下标 C 表示；

3、路线 3：O-D-B，用下标 B 表示；

4、路线 4：O-D-B-A，用下标 A 表示；

5、路线 5：O-D-C-D-B，用下标 CB 表示；

6、路线 6：O-D-C-D-B-A，用下标 CA 表示。

对于线路 O-D-B-D-C 和路线 O-D-B-A-B-D-C，笔者认为线路 O-D-B-D-C 和线路 O-D-C-D-B 重复，路线 O-D-B-A-B-D-C 和线路 O-D-C-D-B-A 重复。当轿用车需要在 C 地和 B 地卸车时，对于线路 O-D-B-D-C 的行驶路程为 $S_{\mathrm{OD}}+2\cdot S_{\mathrm{DB}}+S_{\mathrm{DC}}$，而线路 O-D-C-D-B 的行驶路程为 $S_{\mathrm{OD}}+2\cdot S_{\mathrm{DC}}+S_{\mathrm{DB}}$，线路 O-D-C-D-B 的行驶路程较少，因而只需要考虑线路 O-D-C-D-B。同理对于路线 O-D-B-A-B-D-C 和线路 O-D-C-D-B-A 也只需要考虑线路 O-D-C-D-B-A。

设这 6 种路线，1-1 和 1-2 型轿运车上下层每列各种情况出现的次数分别为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{DM}}=\left[x_{\mathrm{DM1}}\quad x_{\mathrm{DM2}}\quad \cdots \quad x_{\mathrm{DM15}}\right]$，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{UM}}=\left[x_{\mathrm{UM1}}\quad x_{\mathrm{UM2}}\quad \cdots \quad x_{\mathrm{UM5}}\right]$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{DM}}=\left[y_{\mathrm{DM1}}\quad y_{\mathrm{DM2}}\quad \cdots \quad y_{\mathrm{DM15}}\right]$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{UM}}=\left[y_{\mathrm{UM1}}\quad y_{\mathrm{UM2}}\quad \cdots \quad y_{\mathrm{UM6}}\right]$。

式中，$\mathrm{M}\in\left\{\mathrm{D,C,B,A,CB,CA}\right\}$，D,C,B,A,CB,CA 分别表示 6 种路线。

第三阶段优化模型如下：

$$\min S_{\text{sum}} = S_{\text{D}} \times \left[\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DD}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DD}i} \right] + S_{\text{C}} \times \left[\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DC}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DC}i} \right] + \\ S_{\text{B}} \times \left[\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DB}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DB}i} \right] + S_{\text{A}} \times \left[\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DA}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DA}i} \right] + \\ S_{\text{CB}} \times \left[\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DCB}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DCB}i} \right] + S_{\text{CA}} \times \left[\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DCA}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DCA}i} \right] \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DM}i} = \sum_{i=1}^{5} x_{\text{UM}i} \tag{19}$$

$$2 \times \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DM}i} = \sum_{i=1}^{6} y_{\text{UM}i} \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_{\text{DD}i} + \sum_{i=1}^{15} x_{\text{DC}i} + \sum_{i=1}^{15} x_{\text{DB}i} + \sum_{i=1}^{15} x_{\text{DA}i} + \sum_{i=1}^{15} x_{\text{DCB}i} + \sum_{i=1}^{15} x_{\text{DCA}i} = C_{1-1} \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{21} y_{\text{DD}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DC}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DB}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DA}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DCB}i} + \sum_{i=1}^{21} y_{\text{DCA}i} = C_{1-2} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{D}} = \boldsymbol{x}_{\text{DD}} \boldsymbol{N}_{\text{11D}} + \boldsymbol{x}_{\text{UD}} \boldsymbol{N}_{\text{11U}} + \boldsymbol{y}_{\text{DD}} \boldsymbol{N}_{\text{12D}} + \boldsymbol{y}_{\text{UD}} \boldsymbol{N}_{\text{12U}} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{C}} = \boldsymbol{x}_{\text{DC}} \boldsymbol{N}_{\text{11D}} + \boldsymbol{x}_{\text{UC}} \boldsymbol{N}_{\text{11U}} + \boldsymbol{y}_{\text{DC}} \boldsymbol{N}_{\text{12D}} + \boldsymbol{y}_{\text{UC}} \boldsymbol{N}_{\text{12U}} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{B}} = \boldsymbol{x}_{\text{DB}} \boldsymbol{N}_{\text{11D}} + \boldsymbol{x}_{\text{UB}} \boldsymbol{N}_{\text{11U}} + \boldsymbol{y}_{\text{DB}} \boldsymbol{N}_{\text{12D}} + \boldsymbol{y}_{\text{UB}} \boldsymbol{N}_{\text{12U}} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{A}} = \boldsymbol{x}_{\text{DA}} \boldsymbol{N}_{\text{11D}} + \boldsymbol{x}_{\text{UA}} \boldsymbol{N}_{\text{11U}} + \boldsymbol{y}_{\text{DA}} \boldsymbol{N}_{\text{12D}} + \boldsymbol{y}_{\text{UA}} \boldsymbol{N}_{\text{12U}} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{CB}} = \boldsymbol{x}_{\text{DCB}} \boldsymbol{N}_{\text{11D}} + \boldsymbol{x}_{\text{UCB}} \boldsymbol{N}_{\text{11U}} + \boldsymbol{y}_{\text{DCB}} \boldsymbol{N}_{\text{12D}} + \boldsymbol{y}_{\text{UCB}} \boldsymbol{N}_{\text{12U}} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{CA}} = \boldsymbol{x}_{\text{DCA}} \boldsymbol{N}_{\text{11D}} + \boldsymbol{x}_{\text{UCA}} \boldsymbol{N}_{\text{11U}} + \boldsymbol{y}_{\text{DCA}} \boldsymbol{N}_{\text{12D}} + \boldsymbol{y}_{\text{UCA}} \boldsymbol{N}_{\text{12U}} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{T}_{A} + \boldsymbol{T}_{CA} \geq \begin{bmatrix} P_{\text{A}} & Q_{\text{A}} & R_{\text{A}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{C}} + \boldsymbol{T}_{\text{CB}} + \boldsymbol{T}_{\text{CA}} \geq \begin{bmatrix} P_{\text{C}} & Q_{\text{C}} & R_{\text{C}} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{T}_{B} + \boldsymbol{T}_{A} + \boldsymbol{T}_{CB} + \boldsymbol{T}_{CA} = \begin{bmatrix} P_{\text{A}} + P_{\text{B}} & Q_{\text{A}} + Q_{\text{B}} & R_{\text{A}} + R_{\text{B}} \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{T}_{D} + \boldsymbol{T}_{C} + \boldsymbol{T}_{B} + \boldsymbol{T}_{A} + \boldsymbol{T}_{CB} + \boldsymbol{T}_{CA} \geq \begin{bmatrix} P_{\text{A}} + P_{\text{B}} + P_{\text{C}} + P_{\text{D}} & Q_{\text{A}} + Q_{\text{B}} + Q_{\text{C}} + Q_{\text{D}} & R_{\text{A}} + R_{\text{B}} + R_{\text{C}} + R_{\text{D}} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{T}_{\text{C}} + \boldsymbol{T}_{\text{B}} + \boldsymbol{T}_{\text{A}} + \boldsymbol{T}_{\text{CB}} + \boldsymbol{T}_{\text{CA}} \geq \begin{bmatrix} P_{\text{A}} + P_{\text{B}} + P_{\text{C}} & Q_{\text{A}} + Q_{\text{B}} + Q_{\text{C}} & R_{\text{A}} + R_{\text{B}} + R_{\text{C}} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{T}_{C} + \boldsymbol{T}_{A} + \boldsymbol{T}_{CB} + \boldsymbol{T}_{CA} \geq \begin{bmatrix} P_{\text{A}} + P_{\text{C}} & Q_{\text{A}} + Q_{\text{C}} & R_{\text{A}} + R_{\text{C}} \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{DM}}\in\mathrm{N}^{15},\quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{UM}}\in\mathrm{N}^{5},\quad \boldsymbol{y}_{\mathrm{DM}}\in\mathrm{N}^{15},\quad \boldsymbol{y}_{\mathrm{UM}}\in\mathrm{N}^{6} \tag{35}$$

式(19)表示 1-1 型轿运车上下层各种情况出现的次数相等；式(20)表示 1-2 型轿运车上层出现次数是下层出现次数的 2 倍；式(21)和(22)表示 1-1 和 1-2 型轿用车数量为定值；式(29)表示经过 A 地的轿运车装载的各型乘用车不少于 A 地乘用车的需求量；式(30)表示经过 C 地的轿运车装载的各型乘用车不少于 C 地乘用车的需求量；式(31)表示，经过 B 地的轿运车装载的各型乘用车不少于 B 地和 A 地乘用车的需求量之和；式(32)表示经过 D 地的轿运车装载的各型乘用车不少于乘用车的总需求量；式(33)表示经过 B 地和 C 地的轿运车装载的各型乘用车不少于 A 地、B 地和 C 地乘用车的需求量之和；式(34)表示经过 C 地和 A 地的轿运车装载的各型乘用车不少于 C 地和 A 地乘用车的需求量之和。

值得注意的是，式(27)、(28)的存在具有一定必要性，如果没有式(28)则可能出现一下情况，轿运车在 A 地全部卸车后，继续行驶，到达 B 继续卸车，与实际情况不符。

本文模型亦可处理不能往返的情况，即不考虑线路 5 和 6，只要将模型中变量 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{DM}}=[x_{\mathrm{DM1}}\ \ x_{\mathrm{DM2}}\ \ \cdots\ \ x_{\mathrm{DM15}}]$，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{UM}}=[x_{\mathrm{UM1}}\ \ x_{\mathrm{UM2}}\ \ \cdots\ \ x_{\mathrm{UM5}}]$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{DM}}=[y_{\mathrm{DM1}}\ \ y_{\mathrm{DM2}}\ \ \cdots\ \ y_{\mathrm{DM15}}]$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{UM}}=[y_{\mathrm{UM1}}\ \ y_{\mathrm{UM2}}\ \ \cdots\ \ y_{\mathrm{UM6}}]$置为 0 即可，$\mathrm{M}\in\{\mathrm{CB},\mathrm{CA}\}$。事实上不考虑往返的模型的本文所提模型的一种特例。

5.2.2 计算结果

利用 5.1 节的两阶段优化模型，进行第一阶段优化，得到轿用车使用量为 $C_{\mathrm{sum}}=25$，代入第二阶段进行优化，得到 1-1 和 1-2 型轿用车使用量分别为 $C_{1-1}=21, C_{1-2}=4$，将此作为第三阶段优化的等式约束。

利用 LINGO 软件编写上述三阶段优化程序，将各地所需的各种类型乘用车需求量代入，优化得到各种行车路线所需的各种类型轿用车，以及轿用车的装载方案。

对于问题 4，A 地的乘用车需求量为 $P_{\mathrm{A}}=42, Q_{\mathrm{A}}=31, R_{A}=0$，B 地的乘用车需求量为 $P_{\mathrm{B}}=50, Q_{\mathrm{B}}=0, R_{\mathrm{B}}=0$，C 地的乘用车需求量为 $P_{\mathrm{C}}=33, Q_{\mathrm{C}}=47, R_{\mathrm{C}}=0$，D 地的乘用车需求量为 $P_{\mathrm{D}}=41, Q_{\mathrm{D}}=0, R_{\mathrm{D}}=0$。

进行第三阶段优化，得到各种路线对应轿运车的装载方案，总的行驶里程为 6404，如表 11 所示。

表 11 各种路线对应轿运车的装载方案

		轿运车类型			
		1-1 型		1-2 型	
		下层	上层	下层	上层
装载方案	线路 1	$x_{\mathrm{DD15}}=5$	$x_{\mathrm{UD5}}=5$	\	\
	线路 2	$x_{\mathrm{DC5}}=9$	$x_{\mathrm{UC3}}=1$ $x_{\mathrm{UC5}}=8$	\	\
	线路 3	$x_{\mathrm{DB15}}=6$	$x_{\mathrm{UB5}}=6$	\	\

	线路 4	$x_{\mathrm{DA15}}=1$	$x_{\mathrm{UA1}}=1$	$y_{\mathrm{DA15}}=4$	$y_{\mathrm{UA1}}=1$ $y_{\mathrm{UA3}}=1$ $y_{\mathrm{UA6}}=6$
	线路 5	\	\	\	\
	线路 6	\	\	\	\

按照上述方案进行装载，实际装载和行驶路线情况如表 12 所示：

表 12 问题 4 实际装载和行驶路线

序号	轿运车类型	下层装载方案		上层装载方案		行驶路线
		I 型	II 型	I 型	II 型	
1	1-1	4	0	4	0	O-D
2	1-1	4	0	4	0	O-D
3	1-1	4	0	4	0	O-D
4	1-1	4	0	4	0	O-D
5	1-1	4	0	4	0	O-D
6	1-1	0	5	2	2	O-D-C
7	1-1	0	5	4	0	O-D-C
8	1-1	0	5	4	0	O-D-C
9	1-1	0	5	4	0	O-D-C
10	1-1	0	5	4	0	O-D-C
11	1-1	0	5	4	0	O-D-C
12	1-1	0	5	4	0	O-D-C
13	1-1	0	5	4	0	O-D-C
14	1-1	0	5	4	0	O-D-C
15	1-1	4	0	4	0	O-D-B
16	1-1	4	0	4	0	O-D-B
17	1-1	4	0	4	0	O-D-B
18	1-1	4	0	4	0	O-D-B
19	1-1	4	0	4	0	O-D-B
20	1-1	4	0	4	0	O-D-B
21	1-1	4	0	0	5	O-D-B-A
22	1-2	2	4	2	10	O-D-B-A
23	1-2	2	4	10	0	O-D-B-A
24	1-2	2	4	10	0	O-D-B-A
25	1-2	2	4	10	0	O-D-B-A

各车在各地的卸车量如表 13 所示。

表 13 各地卸车量

序号	轿运车类型	行驶路线	卸车量							
			A 地		B 地		C 地		D 地	
			I 型	II 型	I 型	II 型	I 型	II 型	I 型	II 型
1	1-1	O-D	/	/	/	/	/	/	8	/
2	1-1	O-D	/	/	/	/	/	/	8	/
3	1-1	O-D	/	/	/	/	/	/	8	/

4	1-1	O-D	/	/	/	/	/	/	8	/
5	1-1	O-D	/	/	/	/	/	/	8	/
6	1-1	O-D-C	/	/	/	/	2	7	/	/
7	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
8	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
9	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
10	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
11	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
12	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
13	1-1	O-D-C	/	/	/	/	4	5	/	/
14	1-1	O-D-C	/	/	/	/	3	5	1	/
15	1-1	O-D-B	/	/	8	/	/	/	/	/
16	1-1	O-D-B	/	/	8	/	/	/	/	/
17	1-1	O-D-B	/	/	8	/	/	/	/	/
18	1-1	O-D-B	/	/	8	/	/	/	/	/
19	1-1	O-D-B	/	/	8	/	/	/	/	/
20	1-1	O-D-B	/	/	8	/	/	/	/	/
21	1-1	O-D-B-A	4	5	/	/	/	/	/	/
22	1-2	O-D-B-A	4	14	/	/	/	/	/	/
23	1-2	O-D-B-A	12	4	/	/	/	/	/	/
24	1-2	O-D-B-A	12	4	/	/	/	/	/	/
25	1-2	O-D-B-A	10	4	2	/	/	/	/	/
合计			42	31	50	/	33	47	41	/

经验证，本模型得到的装载方案，全部轿运车均装满，且 1-2 型轿运车上层能满足对称，在 A、B、C、D 地的卸车数量和类型能够满足题目要求，通过本模型得到的方案事实可行。

假设不考虑绕行，应用本文模型得到的最短里程数仍然是 6404，所得结果与考虑往返结果一致，验证了本文模型了适用性。

5.3 问题五

5.3.1 启发式-淘汰搜索三阶段优化模型

对于第五问，共有 10 种类型的轿运车和 45 种类型的乘用车，考虑到运输方案过于庞大，再使用第四问的三阶段优化模型已经不切实际。本文提出一种启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。

首先，对 10 种类型的轿运车进行聚类，以减少轿运车的种类。将轿运车 2 和 6 聚为 1 类，长度按照轿运车 6 的长度 18.2m 计算，将轿运车 7 和 8 聚为 1 类，长度按照 21m 计算。由此可以将 10 类轿运车减少为 8 类，所得轿运车种类如表 14 所示。

表 14 聚类后轿运车类型及参数

序号	类型	长度	拥有量	类型编号
1	十九位双桥双轮框架 2-2 型	19	5	9
2	十位单桥双轮框架 1-1 型	18.2	43	2 和 6
3	八位双桥边轮厢式 1-1 型	19	21	1

4	十位单桥双轮框架 1-1 型	21	20	7 和 8
5	十位双桥边轮厢式 1-1 型	22	15	4
6	十二位双桥双轮厢式 1-1 型	24.3	22	3
7	十七位双桥双轮框架 1-2 型	23.3	15	10
8	十九位双桥双轮框架 1-2 型	23.7	10	5

接着，以力求全面为原则，计算每种类型的轿运车的上下层装载轿运车所有可能的情况，对于能装载两列的情况，则考虑每列的装载情况。考虑装载情况时需要考虑限制条件，如表 15 所示。

表 15 轿运车装载限制条件

序号	长度	乘用车限制	
		上层	下层
1	19	高度低于 1.7，宽度低于 1.7	高度低于 1.7，宽度低于 1.7
2	18.2	高度低于 1.7	无限制
3	19	高度低于 1.7	无限制
4	21	高度低于 1.7	无限制
5	22	高度低于 1.7	无限制
6	24.3	高度低于 1.7	无限制
7	23.3	高度低于 1.7，宽度低于 1.7	无限制
8	23.7	高度低于 1.7，宽度低于 1.75	无限制

对于每类轿运车每层分别考虑装载 1、2、3、4、5 和 6 种不同类型乘用车的情况。以力求装满为前提，具体各种轿运车每层装载不同种类的乘用车出现的情况总数[6]如表 16 所示。

表 16 各种轿运车每层装载不同种类的乘用车出现次数

序号		乘用车种类数					
		1 种	2 种	3 种	4 种	5 种	6 种
1	下层	13	238	874	28	1	0
	上层	13	238	874	28	1	0
2	下层	45	2235	24597	51087	0	0
	上层	37	1525	14076	24190	0	0
3	下层	45	2559	34218	65102	2	0
	上层	37	1740	19193	27703	1	0
4	下层	45	2962	42575	32189	22517	0
	上层	37	1990	23269	16977	10130	0
5	下层	45	3038	47482	92180	168950	0
	上层	37	2047	26390	45036	70551	0
6	下层	45	3408	75186	160833	295828	3897
	上层	37	2299	41484	63411	87711	1384
7	下层	45	3268	63449	208777	483770	19
	上层	13	280	1641	248	13	3
8	下层	45	3348	68994	212244	462694	234
	上层	17	493	3904	875	107	28

由表 15 可知，各种轿运车每层装载不同种类的乘用车的解空间过于庞大，所有情况全部考虑不切实际。本模型采取如下措施解决该问题：对每种轿运车

上下层所有装载方案按照装满后剩余空间由小到大进行排序，各取前 200 组装载方案。考虑到单台轿运车每层剩余空间最小不能完全反映总体装载方案最佳，因而，另外对每种轿运车上下层，在剩余的装在方案中各随机取出 100 组不重复的装载方案，这 100 组装载方案与之前 200 组共同组成 300 组装载方案作为装载方案解空间的代表。

将这些装载方案的解空间代表放在 16 个 300×45 矩阵中。这些矩阵为 $\boldsymbol{N}_{1\mathrm{D}},\boldsymbol{N}_{2\mathrm{D}},\cdots,\boldsymbol{N}_{8\mathrm{D}},\boldsymbol{N}_{1\mathrm{U}},\boldsymbol{N}_{2\mathrm{U}},\cdots,\boldsymbol{N}_{8\mathrm{U}}$。各种装载方案出现次数用 1×300 的矩阵表示，为 $\boldsymbol{x}_{1\mathrm{D}},\boldsymbol{x}_{2\mathrm{D}},\cdots,\boldsymbol{x}_{8\mathrm{D}},\boldsymbol{x}_{1\mathrm{U}},\boldsymbol{x}_{2\mathrm{U}},\cdots,\boldsymbol{x}_{8\mathrm{U}}$。将这些数据代入第一阶段优化模型，以轿运车使用数量最小作为目标函数，考虑上下层约束、乘用车供需约束、1-2 和 1-1 型轿运车数量约束等。第一阶段优化模型仅考虑各类乘用车的总供应量，而不考虑目的地。

具体优化模型如下：

$$\min\ C_{\mathrm{sum}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}\tag{36}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i}=\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{U}i},\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i},\mathrm{mod}\left(\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i},2\right)=0\tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}=\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{U}i},\ j=2,3,\cdots,6\tag{38}$$

$$2\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}=\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{U}i},\ j=7,8\tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{D}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{U}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}}\geq\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & \cdots & P_{45}\end{bmatrix}\tag{40}$$

$$\sum_{j=7}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}\leq 20\%\cdot\sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}\tag{41}$$

$$x_{j\mathrm{D}i}\in\mathrm{N},x_{j\mathrm{U}i}\in\mathrm{N}\tag{42}$$

利用 LINGO 软件求解上述整数规划模型，得到该搜索空间下轿运车使用数量的最优解。

每种轿运车每层有 300 种乘用车装载方案，将求得的可行解中被采用的乘用车装载方案保留，删除没有采用的运载方案(即淘汰过程)。重新在总的运载方案空间随机搜索乘用车运载方案，加入已有运载方案中，被删除的运载方案并不是被永久删除，仍有可能再次被加入新的运载方案中(即搜索过程，目的在于不断增加搜索空间)。采用此策略生成新的运载方案解空间代表，重新代入第一阶段优化。同时，将 LINGO 软件求解的初值设为上步优化的结果，即在上步结果的基础寻找更优的可行解。

从理论上而言，当启发式-淘汰搜索空间足够大，寻优到的可行解也会逐渐逼近真实最优解，但实际上装载、运输方案过于庞大，搜索到全部解空间是不

切实际的，上述方法在有限的解空间获得满意的可行解，并且在可行解的基础上淘汰-搜索，不断优化，因而由上述方法得到的可行解易于实现，满足实际整车物流运输需求。

经过实际验证，当按照上述规则改变运载方案 10~15 次，所得的轿运车使用数量不再减少，则认为该优化模型已经找到最优解，终止寻优过程。

第二阶段优化模型以轿运车使用成本最小为目标函数，将第一阶段优化模型得到的轿运车总量作为该阶段优化的等式约束。优化模型同 5.1.1 的第二阶段优化模型类似，此处不再赘述。

上述两个阶段优化模型得到的结果作为第三阶段优化模型的约束，进行第三阶段优化。第三阶段优化的目标函数为行驶里程数最短，同时需要满足各个地点的乘用车供应需求。

将所有轿运车按照行驶路线分为以下 6 种路线：

1、线路 1：O-D，用下标 D 表示；

2、线路 2：O-D-B，用下标 B 表示；

3、线路 3：O-D-C，用下标 C 表示；

4、线路 4：O-D-B-E，用下标 E 表示；

5、线路 5：O-D-B-A，用下标 A 表示；

6、线路 6：O-D-B-A-E，用下标 AE 表示。

假设模型中线路不考虑绕行情况，且不考虑线路 O-D-B-E-A。当轿运车需要在 A 地和 E 地卸车时，线路 O-D-B-E-A 和 O-D-B-A-E 均能达到这一效果，且线路 O-D-B-A-E 的里程数小于线路 O-D-B-E-A，因而只考虑线路 O-D-B-A-E 是合理的。

设这 6 种路线，各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数分别为 $\boldsymbol{x}_{i\mathrm{DM}}=\left[x_{i\mathrm{DM1}} \quad x_{i\mathrm{DM2}} \quad \cdots \quad x_{i\mathrm{DM300}}\right]$，$\boldsymbol{x}_{i\mathrm{UM}}=\left[x_{i\mathrm{UM1}} \quad x_{i\mathrm{UM2}} \quad \cdots \quad x_{i\mathrm{UM300}}\right]$，$i=1,2,\cdots,8$，$M\in\{\mathrm{D,C,B,A,E,AE}\}$。

第三阶段优化模型如下：

$$
\begin{aligned}
\min S_{\mathrm{sum}}=\ & S_{\mathrm{D}}\times\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DD}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DD}i}\right]+S_{\mathrm{C}}\times\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DC}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DC}i}\right]+\\
& S_{\mathrm{B}}\times\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DB}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DB}i}\right]+S_{\mathrm{A}}\times\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DA}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DA}i}\right]+\\
& S_{\mathrm{E}}\times\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DE}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DE}i}\right]+S_{\mathrm{AE}}\times\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DAE}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DAE}i}\right]
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i}=\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{U}i},\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i},\mathrm{mod}\left(\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{D}i},2\right)=0 \tag{44}
$$

$$
\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}=\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{U}i},\ j=2,3,\cdots,6 \tag{45}
$$

$$
2\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i}=\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{U}i},\ j=7,8 \tag{46}
$$

$$\sum_{j=7}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i} \leq 20\% \cdot \sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{D}i} \tag{47}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DD}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DD}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DC}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DC}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DB}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DB}i}+$$
$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DA}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DA}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DE}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DE}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DAE}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DAE}i}=C_{\mathrm{sum}} \tag{48}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{D}}=\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{DD}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{UD}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}=\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{DC}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{UC}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}=\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{DB}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{UB}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}} \tag{51}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}=\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{DA}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{UA}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}=\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{DE}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{UE}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{AE}}=\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{DAE}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}}+\sum_{j=1}^{8}\boldsymbol{x}_{j\mathrm{UAE}}\boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}} \tag{54}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}} \geq \boldsymbol{P}_{\mathrm{C}} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{AE}} \geq \boldsymbol{P}_{\mathrm{E}} \tag{56}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} \geq \boldsymbol{P}_{\mathrm{A}} \tag{57}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{AE}} \geq \boldsymbol{P}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}} \tag{58}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{T}_{AE} \geq \boldsymbol{P}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}} \tag{59}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{T}_{AE} \geq \boldsymbol{P}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}} \tag{60}$$

$$x_{j\mathrm{DM}i} \in \mathrm{N}, x_{j\mathrm{UM}i} \in \mathrm{N} \tag{61}$$

式(55)~(60)为乘用车供需约束，表示经过该点的轿运车所运载的乘用车数量大于该点乘用车的需求量。

需要说明的是，式(48)原则上应为等式约束，由于前两阶段优化模型为不

考虑线路情况下得到的轿用车使用量和装载情况，**本文假设第三阶段模型不考虑绕行情况，因而前两阶段的最优可行解实际上是第三阶段可行解的下限解，故本模型引入松弛变量 μ，将等式约束(48)转化为如下不等式约束：**

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DD}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DD}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DC}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DC}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DB}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DB}i}+$$
$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DA}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DA}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DE}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DE}i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1\mathrm{DAE}i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{j\mathrm{DAE}i}\le C_{\mathrm{sum}}+\mu \tag{62}$$

式中：μ 为大于 0 的整数变量。

引入松弛变量简化分析后，本文提出以下两种求解方法：

方法一：

方法一的首要目标在于最小化总轿运车数量，**即在松弛变量 μ 尽可能小的条件下，最小化总行驶里程。**

方法二：

实际上，方法一中在松弛变量 μ 很小(例如 $\mu=1$)的情况下，可行的解空间非常有限，寻找最优里程更为困难，较难得到最优解，因而本文提出一种局部整数-分散连续的逐步优化方法。

考虑到相比于离散变量，连续变量的优化问题更易于求解[7]，本文的方法二考虑将离散变量连续化。首先，将线路 1 各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数设为整型变量，其余均为连续变量，求得线路 1 各型轿运车上下层每列的方案，线路 1 的装载方案在之后的连续化过程中保持恒定；接着设定线路 *i* 装载方案次数为整型变量，线路 1……*i*-1 装载为恒定不变的整数，线路 *i*+1……6 装载方案为连续变量；重复该过程，直到所有线路对应各种方案的出现次数全部固定。显然该方法各线路最终求得的装载方案均为整数，在松弛变量固定的情况下，该方法对应的装载方案所需的里程数是可以接受的可行解。

具体步骤如下：

STEP1：m=1；

STEP2：固定 $x_{j\mathrm{D}pi},x_{j\mathrm{U}pi}$ 的值保持不变，$p=1,2,\cdots,m-1$，保持前 m-1 种路线各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数不变；$x_{j\mathrm{D}mi}\in\mathrm{N},x_{j\mathrm{U}mi}\in\mathrm{N}$，第 m 条路线各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数设为整型变量；$x_{j\mathrm{D}qi}\in\mathrm{R},x_{j\mathrm{U}qi}\in\mathrm{R},q=m+1,\cdots 6$，后 6-m 条路线各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数设为连续变量；

STEP3：将上述变量代入第三阶段优化模型进行求解；

STEP4：IF *m*<6，则 $m=m+1$，转至 STEP2；ELSE 结束程序，输出结果。

5.3.2 计算结果

利用 LINGO 软件实现上述启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。第一、二阶段得到的最优解为搜索空间内的全局最优解，对于第三阶段优化模型，由于求解规模过于庞大，加上松弛变量后，仍然很难获得全局最优解，因此本模型通过第三阶段优化得到的结果是搜索空间内的局部最优解。

启发式优化过程中轿运车使用量最小值的变化过程如图 1 所示。通过第一阶段求解得到轿运车使用量的最优可行解为 113 辆，通过第二阶段优化求得 2-2、1-1 和 1-2 型轿运车数量分别为 10，90 和 18 辆。具体各种类型的使用量如表 17 所示。

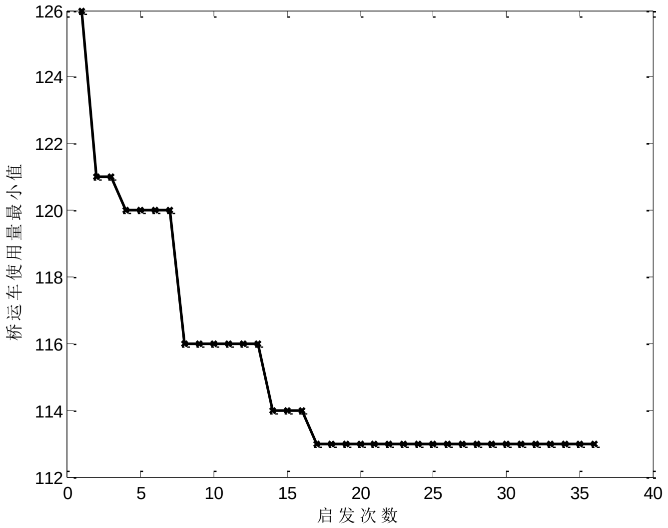

图 1 轿运车使用量最小值变化曲线

表 17 各种类型轿运车使用量

类型编号	类型	拥有量（辆）	使用量（辆）
1	八位双桥边轮厢式 1-1 型	21	21
2	十位双桥双轮厢式 1-1 型	18	13
3	十二位双桥双轮厢式 1-1 型	22	22
4	十位双桥边轮厢式 1-1 型	15	15
5	十九位双桥双轮框架 1-2 型	10	10
6	十位单桥双轮框架 1-1 型	25	0
7	十位单桥双轮框架 1-1 型	4	3
8	十位单桥双轮框架 1-1 型	16	16
9	十九位双桥双轮框架 2-2 型	5	5
10	十七位双桥双轮框架 1-2 型	15	8

采用两种方法求解第三阶段优化模型，方法一所得轿运车的最优可行解为 114 辆，里程数为 38128，方法二所得轿运车的最优可行解为 116 辆，里程数为 32068。

方法一所得各条线路中各种类型的轿运车数量如表 18 所示。方法二所得各条线路中各种类型的轿运车数量如表 19 所示。具体每辆轿运车的装载方案和行车路线见附录。

表 18 方法一所得各条线路中各种类型的轿运车数量

线路	轿运车类型编号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0
2	1	2	1	1	0	0	0	2	0	0
3	5	4	6	3	2	0	2	2	2	6
4	2	2	1	3	2	0	0	2	1	0
5	8	3	5	1	1	0	0	4	0	0
6	5	2	8	7	5	0	1	4	2	2

表 19 方法二所得各条线路中各种类型的轿运车数量

线路	轿运车类型编号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7	0	0	0	0	12	4	4	0	0
2	3	0	6	7	1	0	0	0	2	0
3	11	0	0	1	0	2	4	7	2	0
4	0	0	4	4	5	0	0	0	0	3
5	0	0	11	2	4	0	0	0	0	5
6	0	2	1	0	0	0	0	1	1	0

方法一、二比较：

(1) 方法一求得轿运车总数量要少于方法二，本题旨在求解最小数量，其次才是里程，**因而在本题的背景下方法一更优**；

(2) 相比于方法一，方法二求解的里程明显更少，因而当方法一、二的**轿运车总数量差别很小(或实际物流对数量的要求没有本题那么苛刻)，方法二更为合理；**

(3) 在计算效率、寻找最优可行解可靠性方面，**方法二将离散变量连续化的方法显然更易于得到满意的可行解**。

六、　模型分析

本文根据实际问题需要，提出三种模型——两阶段优化模型、三阶段优化模型和启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。

两阶段优化考虑轿运车的数量和装载方案，并未考虑具体行车路线，模型不够完善。针对考虑行车路线的情况，提出三阶段优化模型，模型更为完善。针对轿运车和乘用车种类和数量都很多的情况，轿运车装载方案的种类过于庞大，直接应用三阶段优化模型不切实际，因而本文提出一种启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。该模型从所有装载方案中选取 200 组剩余空间最小方案，并取 100 组随机方案，作为装载方案代表，进行优化，删除出现次数为 0 的装载方案，并取随机方案补全 300 组装载方案代表，将上一次优化所得结果作为初值重复计算，直至多次启发后轿运车数量不再减少，将此结果作为最优解。

三种模型具有不同的适用范围。两阶段优化模型适用于不考虑行车路线的情况，例如仅考虑点对点装载乘用车。三阶段能够处理考虑行车路线的情况，能够处理向多地运输乘用车的情况，能够得到各型轿运车的数量、装载方案和行车路线，但轿运车和乘用车的种类不能过多。启发式-淘汰搜索三阶段优化模型能够处理轿运车和乘用车种类和数量都很多的情况，能够得到各型轿运车的数量、装载方案和行车路线，该方法在有限的解空间获得满意的可行解，并且在可行解的基础上淘汰-搜索，不断优化，因而由上述方法得到的可行解易于实现，满足实际整车物流运输需求。

七、 模型推广

本模型为典型的线性整数规划模型，在许多典型的问题中都有广泛的应用背景。例如，背袋（或装载）问题、固定费用问题、和睦探险队问题（组合学的对集问题）、有效探险队问题（组合学的覆盖问题）、送货问题等。因此整数规划的应用范围也是极其广泛的。它不仅在工业和工程设计和科学研究方面有许多应用，而且在计算机设计、系统可靠性、编码和经济分析等方面也有新的应用。

本文提出的多阶段优化模型，对于求解需要考虑多个目标的综合性大型整数规划问题非常适用，在明确各种目标主次轻重的前提下，求解过程清晰明确，针对性强。

另外，在求解第五问的过程中，提出了初步聚类、人工干预启发等思想在求解其他同类问题时都具有很好的借鉴意义。

最后，该模型在诸多方面仍有待完善，如实际情况下，目的地之间的拓扑结构较题设更加复杂，需要引入图论等理论方法求解模型。

八、　结论

本文主要研究轿运车装载和运输的数学模型，属于整数规划问题，采用 LINGO 软件求解。

针对问题一、二、三，从各类轿运车单层的装载方案出发，以各类装载方案出现次数作为控制变量，建立两阶段优化模型，一阶段优化轿运车总数量，二阶段优化使用成本，并以一阶段轿运车最优总数量为等式约束，得各类轿运车的使用数量和装载方案。问题一至少需 18 辆轿运车，其中 1-1 和 1-2 型分别为 16 和 2 辆，装载方案见表 6；问题二需 15 辆轿运车，其中 1-1 和 1-2 型分别为 12 和 1 辆，装载方案见表 8；问题三需 30 辆轿运车，其中 1-1 和 1-2 型分别为 25 和 5 辆，装载方案见表 10。

针对问题四，从各种路线各类轿运车单层的装载方案出发，建立三阶段优化模型，前两阶段优化模型同问题一、二、三中模型相同，将第二阶段得到的各类轿运车的使用数量作为第三阶段优化的等式约束，以行驶里程数最短作为第三阶段优化的目标函数，得到各类轿运车的使用数量、装载方案和行车路线。问题四所得轿运车使用数量为 25 辆，其中 1-1 和 1-2 型分别为 21 和 4 辆，行驶里程数为 6404，装载方案和行车路线见表 12。

针对问题五，考虑到各类轿运车单层的装载方案量过于庞大，建立启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。为简化分析，从所有装载方案中选取 200 组剩余空间最小的方案，并取 100 组随机方案，作为装载方案代表。以轿运车使用数量最小为目标函数进行第一阶段优化，删除出现次数为 0 的装载方案(即淘汰过程)，并取随机方案补全 300 组装载方案代表(即搜索过程，尽可能增大寻优空间)，保证本次优化结果不劣于上次结果，直至多次启发-淘汰搜索后轿运车数量不再减少，可得轿运车最优可行解为 113 辆。第二阶段优化模型同问题四相同。第三阶段优化的目标函数为行驶里程数最短，将轿运车数量作为等式约束难以获得满意的可行解。为此，本文提出两种启发式方法，第一种方法在等式右边加上松弛变量，将等式约束转换为不等式约束，这种方法能够获得最接近轿运车总量的行车路线，但求解时间仍然较长。第二种方法为离散变量连续化方法，将部分离散变量连续化，分部求解得到所有离散变量，能够快速得到一组较好的可行解。方法一所得轿运车的最优可行解为 114 辆，里程数为 38128，方法二所得轿运车的最优可行解为 116 辆，里程数为 32068。

本文针对三种不同情况提出了三种不同优化模型——两阶段优化模型、三阶段优化模型和启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。两阶段优化模型适用于不考虑行车路线的情况；三阶段能够处理考虑行车路线的情况；启发式-淘汰搜索三阶段优化模型能够处理轿运车和乘用车种类和数量都很多，即轿运车装载方案极为庞大的情况，能够快速得到一组较好的可行解，能够满足整车物流运输的需要，具有一定实用价值。

本问题的研究对降低运输成本和提高运输效率具有重要的意义。

九、 参考文献

[1] 刘振宏，马邵汉，离散最优化算法，北京：科学出版社，2012。
[2] 聂义勇，贵刚，宋翔，整数规划基础，沈阳：东北大学出版社，2001。
[3] 孙小玲，李端，整数规划，北京：科学出版社，2010。
[4] 袁新生，邵大宏，郁时炼，LINGO 和 Excel 在数学建模中的应用，北京：科学出版社，2007。
[5] 靳志宏，计明军，物流实用优化技术，北京：中国物资出版社，2008。
[6] 黄雍检，陶冶，钱祖平，最优化方法——MATLAB 应用，北京：人民邮电出版社，2010。
[7] 李志刚，吴文传，张伯明，郭庆来，一种基于高斯罚函数的大规模无功优化离散变量处理方法，中国电机工程学报，33：68-76，2013。

附录

附录 1: 方法一所得轿运车转载方案(轿运车类似参照表 14 的第一列的 8 种分类方案)

线路	轿运车序号	轿运车类型	所装承运车类型	
			下层	上层
O-D	4	1-1	2，2，2，28	27，27，30，30，38
	4	1-1	3，16，16，20，30	27，27，30，30，38
	6	1-1	23，23，25，45，45	4,4,19,33,45
O-D-C	1	2-2	5，20，20，27，29	3,5,5,20,29
			5，20，20，27，29	5,5,5,27,30
	1	2-2	5，20，20，27，29	5,5,5,27,30
			5，7，20，20，20	5,29,40,40,40
	2	1-1	13，33，33，37	13,13,13,18
	2	1-1	13，33，33，37	8,9,9,45
	2	1-1	9，26，31，42	13,30,41,42
	2	1-1	26，26，31，31	2,22,36,40
	3	1-1	4，6，33，45	4,4,36,36
	3	1-1	4，6，33，45	4,4,36,36
	3	1-1	4，6，33，45	9,13,15,33
	3	1-1	21，21，25，25	10,15,19,34
	3	1-1	12，12，28，45	6,6,41,41
	4	1-1	22，37，37，38，38	10,14,20,38,39
	4	1-1	26，37，37，37，42	6,20,20,21,21
	4	1-1	26，37，37，37，42	3,16,16,20,30
	4	1-1	26，37，37，37，42	29,30,40,42,42
	4	1-1	26，37，37，37，42	27,29,38,38，38
	5	1-1	7，28，28，37，37	3,3,3,8,18
	5	1-1	7，28，28，37，37	16,35,38,38,39
	5	1-1	9，39，39，39，39	16,35,38,38,39
	6	1-1	3，11，24，24，45	15,33,33,33,36
	6	1-1	3，11，24，24，45	41,43,45,45,45
	6	1-1	3，11，24，24，45	13,15,19,19,35
	6	1-1	3，11，24，24，45	4,23,23,33,36
	6	1-1	9，25，25，25，25	4,4,19,36,41
	6	1-1	3，3，3，3，3	4,13,35,43,43
	7	1-2	6，6，35，45，45	5,5,8,8,20,40
				5,5,8,8,20,40
	7	1-2	6，6，35，45，45	29,29,29,30,40,40
				5,8,29,29,40,40
	7	1-2	11，18，31，35，43	8,20，20,29,29,40

				5,5,29,29,30,39
	7	1-2	6，6，6，6，23	5,5,5,8,8,40
				20,29,29,30,40,40
	7	1-2	6，6，6，6，23	14,14,14,34,34
				14,14,14,34,34
	7	1-2	9，9，9，9，21	18,18,34,34,39
				18,18,34,34,39
	8	1-2	6，18，25，25，25	5,5,5，8,8,39
				32,32,32，32,34
	8	1-2	2，21，21，21，23	32,32,32,34,35
				32,32,32,34,35
O-D-B	2	1-1	6，6，13，14	4,8,16,22
	2	1-1	1，1，31，31	14,21,21,42
	3	1-1	4，6，33，45	4,4,11,11
	4	1-1	21，25，36，44	5,21,38,38,39
	4	1-1	3，16，16，20，30	5,21,38,38,39
	5	1-1	8，8，8，22，39	3,3,3,8,18
	6	1-1	16，19，24，24，31	6,20,20,27,27,40
O-D-B-A	2	1-1	9，26，31，42	3,13,42,42
	2	1-1	9，26，31，42	3,13,42,42
	2	1-1	1，13，39，42	3,13,42,42
	3	1-1	2，6，26，36	4,4,36,36
	3	1-1	4，6，33，45	4,4,36,36
	3	1-1	4，6，33，45	4,4,11,36
	3	1-1	4，6，33，45	19,36,36,42
	3	1-1	4，6，33，45	4,9,28,36
	3	1-1	12，12，28，45	6,6,41,41
	3	1-1	15，42，42，45	6,6,41,41
	3	1-1	2，12，22，35	6,6,41,41
	4	1-1	8，8，14，37，37	5,7,7，10,42
	4	1-1	8，8，14，37，37	21,41,42,44
	4	1-1	17，24，24，24	27,27,30,30,38
	4	1-1	21，37，37，39	38,38,38,38,40
	5	1-1	3，3，38，38，42	7,16,16,30,45
	6	1-1	24，25，25，31，41	41,43,45,45,45
	6	1-1	19，19，19，22，22	13,23,28，28,33
	6	1-1	19，19，19，22，22	22,28,28,36,43
	6	1-1	23，23，25，45，45	4,13,35,43,43
	6	1-1	23，23，25，45，45	4,13,35,43,43
	8	1-2	6，6，11，28，41	3,3,5,20,29,29
				32,32,32,34,35
O-D-B-E	1	2-2	5，20，29，30，40	14,14,14,14
			5，20，29，30，40	18,18,18,18

	2	1-1	3，11，18，26	13,13,13,18
	2	1-1	26，26，31，31	13,13,13,18
	3	1-1	4，12，12，25	4,4,36，36
	3	1-1	31，31，43，43	4,28,42,42
	4	1-1	1，7，7，29，29	10,10，10,27,30
	4	1-1	1，7，7，29，29	3,16,16,20,30
	5	1-1	1，10，31，31，31	3,18,18,39,39
	5	1-1	3，3，12，27，38	3,5,6,45,45
	5	1-1	3，6，27，30，32	3,5,6,45,45
	6	1-1	6，9，24，24，32	6,43,43,45,45
	8	1-2	1，6，9，28，41	20,20,29,29,39,39
				5,5,5,7,7,16
	8	1-2	17，17，35，35，39	5,5,16,16,29,40
				32,32,32,34,35
O-D-B-A-E	1	2-2	5，5，20，39，40	14,18,18,18
			5，5，20，39，40	14,18,18,18
	1	2-2	18，18，18，27	5,5,5,27,40
			3，5，5，20，40	14,14,18,39
	2	1-1	9，26，31，42	13,13,13,18
	2	1-1	26，26，31，31	3,13,42,42
	3	1-1	4，12，26，33	6,13,43,45
	3	1-1	4，12，26，33	6,13,43,45
	3	1-1	4，12，26，33	6,13,43,45
	3	1-1	22，26，33，33	6,13,43,45
	3	1-1	4，4，36，36	3,18,19,43
	4	1-1	16，16，37，37，39	5,16,18,27,27
	4	1-1	10，28，28，44	14,28,35,44
	4	1-1	4，21，37，37，40	8,10,27,30,30
	4	1-1	17，24，24，24	27,29,38,38,38
	4	1-1	21，37，37，39，39	27,29,38,38,38
	5	1-1	7，28，28，37，37	7,8,16,16,18
	5	1-1	7，28，28，37，37	7,8,16,16,18
	5	1-1	1，10，31，31，31	7,8,16,16,18
	5	1-1	13，31，31，31，39	7,9,21,38,38
	5	1-1	13，31，31，31，39	9,10,10,13,16
	5	1-1	1，5，6，12，21	8,20,22,32,36
	5	1-1	7，15，25，37，37	8,8,36,38,39
	6	1-1	6，15，15，19，36	9,41,41,41,41
	6	1-1	2，2，13，13，41	6,15,28,35,43
	6	1-1	6，15，28，35，43	2,2,11,11,45
	6	1-1	23，23，25，45，45	15,33,33,33,36
	6	1-1	23，23，25，45，45	15,33,33,33,36
	6	1-1	23，23，25，45，45	4,4,33,35,43

	6	1-1	23，23，25，45，45	11,22,28,28,43
	6	1-1	6，17，25，25，28	9,9,28,43,43
	7	1-2	11，11，13，13，13	5,20,30,30,40,40
				3,3,18,34,34
	7	1-2	11，11，13，13，13	3,8,18,34,34
				14,14,14,18,34
	8	1-2	1，6，9，28，41	20,20,29,29,39,39
				5,5,5,7,7,16,
	8	1-2	6，6，11，28，41	32,32,32,34,35
				32,32,32,34,35
	8	1-2	6，6，11，28，41	32,32,32,34,35
				32,32,32,34,35
	8	1-2	6，6，11，28，41	32,32,32,34,35
				32,32,32,34,35
	8	1-2	2，9，15，26，31	32,32,32,34,35
				32,32,32,34,35

附录 2: 方法二所得轿运车的装载方案(轿运车类似参照表 14 的第一列的 8 种分类方案)

路线 1 下层

2 型轿用车 2 辆方案：2 号车 1 辆 5 号车 1 辆 25 号车 1 辆 26 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 24 号车 1 辆 34 号车 1 辆 42 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：14 号车 1 辆 22 号车 1 辆 37 号车 1 辆 43 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：2 号车 1 辆 13 号车 1 辆 30 号车 1 辆 31 号车 1 辆

2 型轿用车 2 辆方案：3 号车 1 辆 22 号车 1 辆 27 号车 1 辆 41 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：24 号车 1 辆 27 号车 3 辆

2 型轿用车 4 辆方案：6 号车 1 辆 9 号车 1 辆 26 号车 1 辆 31 号车 1 辆

3 型轿用车 2 辆方案：3 号车 1 辆 13 号车 1 辆 41 号车 1 辆 43 号车 1 辆

3 型轿用车 1 辆方案：29 号车 1 辆 37 号车 1 辆 39 号车 1 辆 44 号车 1 辆

3 型轿用车 1 辆方案：8 号车 1 辆 24 号车 1 辆 28 号车 1 辆 31 号车 1 辆

3 型轿用车 1 辆方案：16 号车 1 辆 19 号车 1 辆 34 号车 2 辆

3 型轿用车 2 辆方案：20 号车 1 辆 40 号车 4 辆

4 型轿用车 3 辆方案：6 号车 1 辆 30 号车 2 辆 31 号车 1 辆 37 号车 1 辆

4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 10 号车 1 辆 33 号车 1 辆 34 号车 1 辆

4 型轿用车 3 辆方案：1 号车 1 辆 5 号车 2 辆 31 号车 1 辆 32 号车 1 辆

4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 26 号车 1 辆 37 号车 2 辆 41 号车 1 辆

路线 1 上层

2 型轿用车 4 辆方案：3 号车 1 辆 18 号车 2 辆 33 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：8 号车 1 辆 16 号车 1 辆 27 号车 1 辆 43 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 13 号车 1 辆 33 号车 1 辆 38 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 5 号车 1 辆 15 号车 1 辆 22 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 8 号车 1 辆 13 号车 1 辆 35 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：8 号车 1 辆 23 号车 1 辆 27 号车 1 辆 42 号车 1 辆

2 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 7 号车 1 辆 35 号车 1 辆 42 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：8 号车 1 辆 13 号车 1 辆 14 号车 1 辆 35 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：20 号车 1 辆 23 号车 1 辆 34 号车 1 辆 45 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：9 号车 1 辆 23 号车 1 辆 45 号车 2 辆
3 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 32 号车 1 辆 45 号车 2 辆
3 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 13 号车 1 辆 32 号车 1 辆 33 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：2 号车 1 辆 4 号车 1 辆 39 号车 1 辆 45 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：4 号车 1 辆 21 号车 1 辆 23 号车 1 辆 35 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 20 号车 1 辆 38 号车 1 辆 39 号车 2 辆
4 型轿用车 2 辆方案：5 号车 1 辆 7 号车 2 辆 10 号车 1 辆 42 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 5 号车 1 辆 28 号车 1 辆 29 号车 2 辆
4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 29 号车 1 辆 35 号车 2 辆 38 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 9 号车 2 辆 45 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 5 号车 2 辆 27 号车 1 辆 32 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 14 号车 2 辆 20 号车 1 辆 34 号车 1 辆

路线 2 下层
1 型轿用车 2 辆方案：3 号车 2 辆 14 号车 1 辆 18 号车 1 辆
1 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 20 号车 1 辆 29 号车 1 辆 39 号车 1 辆
1 型轿用车 1 辆方案：3 号车 2 辆 14 号车 2 辆
3 型轿用车 1 辆方案：13 号车 1 辆 22 号车 1 辆 25 号车 1 辆 28 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：2 号车 1 辆 13 号车 1 辆 21 号车 1 辆 36 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：11 号车 1 辆 32 号车 1 辆 33 号车 1 辆 42 号车 1 辆
5 型轿用车 2 辆方案：13 号车 1 辆 31 号车 3 辆 39 号车 1 辆
5 型轿用车 1 辆方案：32 号车 1 辆 39 号车 4 辆
5 型轿用车 1 辆方案：13 号车 1 辆 16 号车 2 辆 29 号车 1 辆 35 号车 1 辆
5 型轿用车 1 辆方案：32 号车 1 辆 38 号车 4 辆
5 型轿用车 2 辆方案：11 号车 1 辆 25 号车 1 辆 37 号车 2 辆 42 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：16 号车 2 辆 23 号车 1 辆 24 号车 2 辆
6 型轿用车 2 辆方案：41 号车 1 辆 43 号车 1 辆 45 号车 3 辆
6 型轿用车 1 辆方案：33 号车 3 辆 41 号车 1 辆 45 号车 1 辆
6 型轿用车 2 辆方案：4 号车 1 辆 12 号车 2 辆 19 号车 1 辆 43 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：1 号车 1 辆 23 号车 1 辆 26 号车 1 辆 32 号车 2 辆

路线 2 上层
1 型轿用车 1 辆方案：8 号车 2 辆 14 号车 1 辆 27 号车 1 辆
1 型轿用车 1 辆方案：18 号车 3 辆 34 号车 1 辆
1 型轿用车 2 辆方案：5 号车 3 辆 27 号车 1 辆 30 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 28 号车 1 辆 42 号车 2 辆
3 型轿用车 2 辆方案：4 号车 1 辆 32 号车 1 辆 45 号车 2 辆
5 型轿用车 2 辆方案：6 号车 2 辆 27 号车 1 辆 38 号车 2 辆
5 型轿用车 1 辆方案：6 号车 2 辆 16 号车 1 辆 21 号车 1 辆 29 号车 1 辆
5 型轿用车 2 辆方案：6 号车 2 辆 13 号车 2 辆 20 号车 1 辆
5 型轿用车 2 辆方案：8 号车 1 辆 16 号车 2 辆 29 号车 1 辆 41 号车 1 辆

6 型轿用车 1 辆方案：15 号车 1 辆 33 号车 3 辆 36 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：22 号车 1 辆 28 号车 2 辆 36 号车 1 辆 43 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：4 号车 2 辆 33 号车 1 辆 35 号车 1 辆 43 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 15 号车 1 辆 23 号车 1 辆 45 号车 2 辆
6 型轿用车 2 辆方案：2 号车 1 辆 28 号车 2 辆 36 号车 1 辆 42 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：32 号车 3 辆 34 号车 1 辆 35 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：21 号车 2 辆 32 号车 2 辆 35 号车 1 辆

路线 3 下层
1 型轿用车 2 辆方案：18 号车 1 辆 34 号车 3 辆
1 型轿用车 2 辆方案：5 号车 1 辆 29 号车 3 辆 40 号车 1 辆
2 型轿用车 2 辆方案：3 号车 1 辆 9 号车 1 辆 18 号车 1 辆 34 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：9 号车 1 辆 11 号车 1 辆 19 号车 1 辆 45 号车 1 辆
3 型轿用车 3 辆方案：6 号车 1 辆 21 号车 1 辆 24 号车 1 辆 35 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：15 号车 1 辆 16 号车 1 辆 25 号车 1 辆 26 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：20 号车 1 辆 40 号车 4 辆
3 型轿用车 1 辆方案：11 号车 1 辆 33 号车 1 辆 34 号车 1 辆 42 号车 1 辆
3 型轿用车 1 辆方案：8 号车 1 辆 11 号车 1 辆 24 号车 1 辆 32 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：12 号车 1 辆 25 号车 1 辆 32 号车 1 辆 36 号车 1 辆
4 型轿用车 3 辆方案：8 号车 2 辆 14 号车 1 辆 37 号车 2 辆
4 型轿用车 3 辆方案：26 号车 1 辆 37 号车 3 辆 42 号车 1 辆
4 型轿用车 3 辆方案：21 号车 1 辆 37 号车 2 辆 39 号车 2 辆
4 型轿用车 2 辆方案：5 号车 1 辆 25 号车 1 辆 31 号车 2 辆 40 号车 1 辆
5 型轿用车 1 辆方案：13 号车 1 辆 25 号车 2 辆 40 号车 2 辆

路线 3 上层
1 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 20 号车 2 辆 27 号车 1 辆 29 号车 1 辆
1 型轿用车 2 辆方案：7 号车 1 辆 20 号车 4 辆
1 型轿用车 1 辆方案：18 号车 1 辆 34 号车 3 辆
2 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 18 号车 2 辆 33 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 13 号车 1 辆 36 号车 1 辆 38 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：3 号车 1 辆 15 号车 1 辆 33 号车 1 辆 45 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：8 号车 1 辆 19 号车 1 辆 23 号车 1 辆 36 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：6 号车 1 辆 28 号车 1 辆 45 号车 2 辆
3 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 36 号车 1 辆 45 号车 2 辆
3 型轿用车 2 辆方案：4 号车 1 辆 13 号车 1 辆 32 号车 1 辆 33 号车 1 辆
3 型轿用车 2 辆方案：4 号车 1 辆 9 号车 1 辆 11 号车 1 辆 28 号车 1 辆
4 型轿用车 2 辆方案：6 号车 1 辆 16 号车 1 辆 29 号车 1 辆 30 号车 2 辆
4 型轿用车 1 辆方案：20 号车 2 辆 36 号车 2 辆 38 号车 1 辆
4 型轿用车 2 辆方案：38 号车 4 辆 40 号车 1 辆
4 型轿用车 3 辆方案：6 号车 2 辆 29 号车 1 辆 30 号车 1 辆 40 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：20 号车 1 辆 21 号车 1 辆 30 号车 1 辆 39 号车 2 辆
4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 9 号车 2 辆 45 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 8 号车 1 辆 27 号车 1 辆 29 号车 2 辆

5 型轿用车 1 辆方案：8 号车 2 辆 13 号车 1 辆 19 号车 1 辆 20 号车 1 辆

路线 4 下层
5 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 26 号车 1 辆 36 号车 1 辆 37 号车 2 辆
5 型轿用车 3 辆方案：6 号车 2 辆 13 号车 1 辆 31 号车 1 辆 37 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：2 号车 1 辆 24 号车 1 辆 26 号车 2 辆 42 号车 1 辆
6 型轿用车 2 辆方案：23 号车 1 辆 25 号车 1 辆 26 号车 2 辆 43 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：13 号车 1 辆 25 号车 1 辆 28 号车 1 辆 41 号车 2 辆
7 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 9 号车 1 辆 22 号车 2 辆 41 号车 1 辆
7 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 26 号车 1 辆 36 号车 3 辆
7 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 19 号车 1 辆 23 号车 1 辆 31 号车 2 辆
8 型轿用车 1 辆方案：22 号车 1 辆 23 号车 1 辆 25 号车 2 辆 31 号车 1 辆
8 型轿用车 2 辆方案：17 号车 1 辆 31 号车 1 辆 36 号车 2 辆 41 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：1 号车 1 辆 2 号车 1 辆 9 号车 2 辆 45 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：4 号车 2 辆 6 号车 1 辆 15 号车 1 辆 16 号车 1 辆

路线 4 上层
5 型轿用车 1 辆方案：13 号车 2 辆 30 号车 2 辆 36 号车 1 辆
5 型轿用车 2 辆方案：6 号车 2 辆 27 号车 1 辆 38 号车 2 辆
5 型轿用车 1 辆方案：9 号车 2 辆 10 号车 1 辆 20 号车 1 辆 23 号车 1 辆
6 型轿用车 2 辆方案：4 号车 1 辆 19 号车 1 辆 28 号车 1 辆 45 号车 2 辆
6 型轿用车 1 辆方案：28 号车 2 辆 36 号车 1 辆 41 号车 1 辆 42 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 15 号车 1 辆 42 号车 2 辆 43 号车 1 辆
7 型轿用车 1 辆方案：29 号车 3 辆 30 号车 1 辆 40 号车 2 辆
7 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 18 号车 2 辆 34 号车 2 辆
7 型轿用车 1 辆方案：3 号车 3 辆 8 号车 1 辆 14 号车 1 辆
7 型轿用车 1 辆方案：14 号车 2 辆 27 号车 2 辆 39 号车 1 辆
7 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 7 号车 2 辆 18 号车 2 辆
7 型轿用车 1 辆方案：7 号车 1 辆 39 号车 4 辆
8 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 8 号车 1 辆 30 号车 3 辆
8 型轿用车 1 辆方案：20 号车 2 辆 27 号车 1 辆 29 号车 2 辆 39 号车 1 辆
8 型轿用车 2 辆方案：3 号车 1 辆 32 号车 1 辆 35 号车 2 辆 39 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 27 号车 2 辆 29 号车 2 辆 40 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：7 号车 1 辆 14 号车 2 辆 34 号车 2 辆
8 型轿用车 1 辆方案：5 号车 1 辆 16 号车 1 辆 20 号车 2 辆 30 号车 2 辆
8 型轿用车 1 辆方案：16 号车 2 辆 21 号车 1 辆 32 号车 1 辆 35 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 7 号车 1 辆 30 号车 2 辆 40 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：16 号车 1 辆 32 号车 2 辆 34 号车 1 辆 39 号车 1 辆

路线 5 下层
5 型轿用车 2 辆方案：11 号车 1 辆 38 号车 4 辆
6 型轿用车 3 辆方案：6 号车 1 辆 24 号车 2 辆 42 号车 2 辆
6 型轿用车 1 辆方案：1 号车 2 辆 17 号车 1 辆 36 号车 1 辆 43 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：17 号车 1 辆 22 号车 2 辆 24 号车 1 辆 45 号车 1 辆

6 型轿用车 1 辆方案：4 号车 2 辆 12 号车 1 辆 19 号车 1 辆 25 号车 1 辆
6 型轿用车 3 辆方案：4 号车 2 辆 12 号车 1 辆 23 号车 1 辆 28 号车 1 辆
6 型轿用车 2 辆方案：13 号车 1 辆 25 号车 1 辆 28 号车 1 辆 41 号车 2 辆
7 型轿用车 1 辆方案：1 号车 1 辆 11 号车 1 辆 13 号车 1 辆 19 号车 1 辆 39 号车 1 辆
7 型轿用车 1 辆方案：4 号车 1 辆 9 号车 2 辆 11 号车 1 辆 12 号车 1 辆
7 型轿用车 3 辆方案：10 号车 1 辆 11 号车 2 辆 13 号车 1 辆 43 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：6 号车 2 辆 11 号车 1 辆 28 号车 1 辆 41 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：1 号车 2 辆 6 号车 1 辆 33 号车 2 辆
8 型轿用车 1 辆方案：12 号车 1 辆 33 号车 1 辆 42 号车 1 辆 45 号车 2 辆
8 型轿用车 1 辆方案：15 号车 1 辆 25 号车 1 辆 44 号车 2 辆

路线 5 上层
5 型轿用车 1 辆方案：6 号车 2 辆 13 号车 2 辆 20 号车 1 辆
5 型轿用车 1 辆方案：4 号车 2 辆 5 号车 1 辆 10 号车 1 辆 13 号车 1 辆
6 型轿用车 2 辆方案：6 号车 1 辆 43 号车 2 辆 45 号车 2 辆
6 型轿用车 1 辆方案：15 号车 1 辆 33 号车 3 辆 36 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：22 号车 1 辆 28 号车 2 辆 36 号车 1 辆 43 号车 1 辆
6 型轿用车 3 辆方案：28 号车 1 辆 33 号车 1 辆 41 号车 1 辆 45 号车 2 辆
6 型轿用车 1 辆方案：9 号车 1 辆 13 号车 1 辆 43 号车 2 辆 45 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：4 号车 2 辆 15 号车 1 辆 28 号车 1 辆 36 号车 1 辆
6 型轿用车 2 辆方案：2 号车 1 辆 4 号车 1 辆 13 号车 2 辆 19 号车 1 辆
7 型轿用车 1 辆方案：7 号车 1 辆 14 号车 2 辆 18 号车 2 辆
7 型轿用车 2 辆方案：8 号车 1 辆 18 号车 4 辆
7 型轿用车 3 辆方案：3 号车 3 辆 8 号车 1 辆 14 号车 1 辆
7 型轿用车 2 辆方案：3 号车 1 辆 7 号车 2 辆 18 号车 2 辆
7 型轿用车 2 辆方案：5 号车 2 辆 20 号车 1 辆 29 号车 1 辆 39 号车 2 辆
8 型轿用车 3 辆方案：27 号车 1 辆 32 号车 3 辆 35 号车 1 辆
8 型轿用车 4 辆方案：16 号车 2 辆 21 号车 1 辆 32 号车 1 辆 35 号车 1 辆
8 型轿用车 1 辆方案：14 号车 1 辆 32 号车 2 辆 35 号车 2 辆

路线 6 下层
1 型轿用车 1 辆方案：7 号车 1 辆 8 号车 2 辆 18 号车 1 辆
1 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 5 号车 3 辆 20 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：10 号车 1 辆 42 号车 2 辆 45 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：6 号车 1 辆 13 号车 1 辆 23 号车 1 辆 30 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：5 号车 2 辆 10 号车 1 辆 11 号车 1 辆 17 号车 1 辆
6 型轿用车 1 辆方案：7 号车 1 辆 24 号车 1 辆 25 号车 2 辆 28 号车 1 辆

路线 6 上层
1 型轿用车 1 辆方案：7 号车 1 辆 20 号车 4 辆
1 型轿用车 1 辆方案：5 号车 3 辆 7 号车 1 辆 29 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：9 号车 1 辆 10 号车 1 辆 18 号车 1 辆 41 号车 1 辆
2 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 14 号车 1 辆 22 号车 1 辆 36 号车 1 辆
4 型轿用车 1 辆方案：15 号车 1 辆 38 号车 1 辆 44 号车 1 辆 45 号车 1 辆

6 型轿用车 1 辆方案：3 号车 1 辆 23 号车 1 辆 33 号车 2 辆 43 号车 1 辆

附录 3：问题五 LINGO 源程序：

```
MODEL:
SETS:
!U/U1..U2400/:XU;
!D/D1..D1600/:XD;
!U/U1..U1200/:XU;
!D/D1..D800/:XD;
U/U1..U2400/:XU;
D/D1..D2400/:XD;
T/T1..T8/:NUM;
TT/T1..T9/:TYPE1,TYPE2;
AA/A1..A45/:A;
LINK1(U,AA):MU;
LINK(D,AA):MD;
ENDSETS
DATA:
!MU=@OLE('D:\N_prob5_2p.XLS','MU');
!MD=@OLE('D:\N_prob5_2p.XLS','MD');
!TYPE1=1 301 601 901 1201 1501 1801 2101 2401;
!TYPE2=1 201 401 601 801 1001 1201 1401 1601;
TYPE1=1 301 601 901 1201 1501 1801 2101 2401;
TYPE2=1 301 601 901 1201 1501 1801 2101 2401;
MU=@OLE('D:\N_prob5_5ran100m100_5.xls','MU');
MD=@OLE('D:\N_prob5_5ran100m100_5.xls','MD');
@OLE('D:\RESULT.XLS','XU')=XU;
@OLE('D:\RESULT.XLS','XD')=XD;
A=@OLE('D:\52.XLS','A');
NUM=5 43 21 20 15 22 15 10 ;
ENDDATA
@FOR(U(I):@GIN(XU(I)));
@FOR(D(I):@GIN(XD(I)));
@SUM(T(I)|I#GE#2 #AND# I#LE#6:@SUM(U(J)|J#GE#TYPE1(I) #AND# J#LT#TYPE1(I+1):XU(J)))>=5*@SUM(T(I)|I#GE#7:@SUM(U(J)|J#GE#TYPE1(I) #AND# J#LT#TYPE1(I+1):XU(J)));
!@SUM(T(I)|I#GE#7:@SUM(U(J)|J#GE#TYPE2(I) #AND# J#LT#TYPE2(I+1):XD(J)))=20;
!@SUM(T(I)|I#GE#2 #AND# I#LE#6:@SUM(U(J)|J#GE#TYPE1(I) #AND# J#LT#TYPE1(I+1):XU(J)))>=100;
@SUM(U(J)|J#LT#TYPE1(2):XU(J))=2*NUM(1);
@FOR(T(I)|I#GE#2:@SUM(U(J)|J#GE#TYPE1(I) #AND# J#LT#TYPE1(I+1):XU(J))<=NUM(I));
@FOR(T(I)|I#LE#6:@SUM(U(J)|J#GE#TYPE1(I) #AND# J#LT#TYPE1(I+1):XU(J))=@SUM(D(L)|L#GE#TYPE2(I) #AND# L#LT#TYPE2(I+1):XD(L)));
@FOR(T(I)|I#GE#7:2*@SUM(U(J)|J#GE#TYPE1(I) #AND# J#LT#TYPE1(I+1):XU(J))=@SUM(D(L)|L#GE#TYPE2(I) #AND# L#LT#TYPE2(I+1):XD(L)));
```

```
@FOR(AA(I):@SUM(T(J):@SUM(U(L)|L#GE#TYPE1(J) #AND#
L#LT#TYPE1(J+1):MU(L,I)*XU(L)))+@SUM(T(J):@SUM(D(L)|L#GE#TYPE2(J) #AND#
L#LT#TYPE2(J+1):MD(L,I)*XD(L)))>=A(I));
MIN=@SUM(U(I)|I#GE#2:XU(I))+5;
```