

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯” 全国研究生数学建模竞赛

学 校 电子科技大学

参赛队号 **10614002**

	1. 刘晓丹
队员姓名	2. 汪兴
	3. 张龙龙

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 空间飞行器主动段轨道估计与误差分析

摘 要

本文通过微分方程组数值解法计算观测卫星的三维位置，在此基础上利用双星逐点交汇思路得到空间飞行器的轨道及残差估计，并对存在的三轴指向误差进行估计，最后给出单星观测的模型及多星观测的展望。

根据给定的观测卫星简化运动方程，利用惯性坐标系下 09 号观测卫星的位置和速度初值，使用变步长 5 级 4 阶 Runge-Kutta 算法求解常微分方程组，计算出 09 号卫星的绕地运行轨迹和速度，同理可以计算 06 号卫星的运行参数。

在计算 0 号空间飞行器参数的过程中，利用立体几何知识，推导出坐标转换矩阵 T ，将观测坐标系转化为地球惯性坐标系。文中建立了 0 号飞行器的两个轨迹模型：双星定位中值估计模型与双星定位优化模型。根据 meadata_09_00 和 meadata_06_00 得到双星观测飞行器的方向向量，并依据 T 变换到惯性坐标系下，得到各个时刻下的两条异面直线，确立它们的公垂线段，用公垂线段的中点来建立空间飞行器轨道的中值估计模型，并给出此估计轨迹的位置半径作为置信区间；建立 $\vec{v}_r(t)$ 大小稳定、方向变化的模型及 $m(t)$ 单调递减的非负函数模型，根据飞行器主动段简化运动方程，以飞行器空间轨迹点到两条异面直线距离和最短来建立优化模型，对飞行器的速度及 $\vec{v}_r(t)$ 、 $m(t)$ 的模型参数进行循环降阶缩小区间算法优化，得到 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s 以及 250.0s 五个时刻空间飞行器轨迹的优化参数。其中 50.0s 时刻的三维坐标为 $(1.77381 \times 10^6, 8.16138 \times 10^6, 4.51670 \times 10^6)$ 。对比估计模型与优化模型求得的参数，给出 13 个采样点的估计残差。

将双星测量定位过程中的系统误差（三轴指向误差） $d\alpha, d\beta, d\theta$ 带入到 0 号空间飞行器的轨道计算中，在双星观测飞行器的两条方向向量异面直线之间

最短距离的最小寻优下，得到两颗卫星的系统误差 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 值。将求得的 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 值代入双星定位中值估计模型与双星定位优化模型中，此为考虑系统误差下的飞行器轨迹与残差估计。根据计算，09 号观测卫星的系统误差为 $d\alpha_9 = 0.00309$ ， $d\beta_9 = -0.00365$ ， $d\theta_9 = 0.00033$ ，06 号观测卫星的系统误差为 $d\alpha_6 = -0.00425$ ， $d\beta_6 = 0.00139$ ， $d\theta_6 = 0.00293$ ，并计算得到位置半径减小两个数量级的更为精确的 0 号空间飞行器轨迹。

09 号卫星对 01 号空间飞行器进行单星定位时，首先根据卫星坐标以及其与空间飞行器之间的方向向量，确定一条包含飞行器的直线，再根据飞行器主动段简化运动方程确定一条空间飞行器的估计轨道，以同一时刻空间飞行器的轨迹点与其对应的方向向量的距离最优，实现空间飞行器的定位。

本文结合立体几何原理建立了两个模型用以估计飞行器的轨迹及残差，其中双星定位优化模型采用了循环缩小区间的算法和随机跳跃法达到了多决策变量降阶的目的，并提出位置半径作为考虑系统误差下模型精度提高的判断标准。

关键词：逐点交汇法，轨道估计，位置半径，循环降阶优化，三轴指向误差

空间飞行器主动段轨道估计与误差分析

1. 问题重述

从近日来中日钓鱼岛的紧张局势可以看出，即便身处和平年代，仍需提高国防意识，时刻准备着为了保护自己的国家而战斗。为了维护国家安全，有些国家会发射特殊目的的空间飞行器，如弹道式导弹、侦察卫星等，对他国发射的具有敌意的空间飞行器实施监控并作出快速反应。

空间飞行器轨道一般可分为三段，依次为：靠火箭推进的主动段、在地球外层空间的惯性飞行段和再入大气层后的攻击段。其中主动段又可细分为若干子段：垂直上升段，程序拐弯段和重力斜飞段，而重力斜飞阶段的后半段是本文研究的主要运动段。根据变质量质点的动力学，文献给出了空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程以及不考虑质量时候的简化运动方程。在给定基础坐标系下的位置和速度初值情况下，可以利用常微分方程组数值解方法计算空间飞行器的运动轨迹。不同空间飞行器的 $\vec{r}_p(t)$ 和 $m(t)$ 的模型是不同的， $m(t)$ 一般而言应为严格单调递减的非负函数。

观测数据的观测误差主要包括随机误差和系统误差。本题假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声，可能产生于背景辐射干扰与信息处理等多个方面。系统误差也包括多种来源，如卫星定位误差、指向机构误差、图像校准误差、传感器安装误差等等。在本题框架内，假定只考虑与卫星平台相关的系统误差，即不同观测卫星的系统误差相互没有关联，同一观测卫星对于不同空间飞行器的系统误差是一样的。经由适当的简化模型，各种系统误差最终可以折合为观测坐标系的原点位置误差和三轴指向误差。根据工程经验，原点位置误差影响较小，而三轴指向误差影响较大，对三轴指向误差进行估计对于提高估计精度很有帮助，本题只考虑三轴指向误差。

本题以中低轨近圆轨道卫星为观测星座对假想的空间飞行器进行仿真观测，根据生成的仿真观测数据，对假想空间飞行器的轨道参数进行估计。要求研究以下相关问题：

- 1) 求解 09 号卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。
- 2) 根据 06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器形成了立体交叠观测，结合立体几何知识按照逐点交汇定位的思路，选取适当的 $\vec{r}_p(t)$ 和 $m(t)$ 的表示模型，给出 0 号空间飞行器的轨道估计，并绘制 0 号空间飞行器的三个位置 t - x 、 t - y 、 t - z 和三个速度 t - v_x 、 t - v_y 、 t - v_z 曲线示意图。
- 3) 若 06 和 09 号两颗观测卫星均有可能带有一定的系统误差，对系统误差进行正确的估计能够有效提高精度。利用上述的逐点交汇方法对系统误差进行估计，若不能估计误差，尝试使用其他的思路估计系统误差与轨道，除给出与第二问要求相同的结果外，还应分别给出两颗观测卫星的系统误差估计结果，共六个数值，分别是两颗卫星的 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 。
- 4) 对只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计，结果形式要求同第三问，注意参考第三问的系统误差估计结果。并进一步考虑在同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下联合进行系统误差估

计。

2. 问题分析

附件中给出了编号 00 到 027 的共计 28 颗观测卫星的在零时刻的位移及速度，且观测卫星的简化运动方程式已知。在知道初始值以及运动方程的情况下，可以利用常微分方程组进行数值求解 09 号卫星在任意时刻的三维坐标，06 号卫星同理。考虑到观测卫星在任意时刻的位置计算是估计的前提，为提高估算精度，没有使用会造成较大误差累加的欧拉公式求解，采用精度较高的高阶 Runge-Kutta 算法来计算卫星的三维坐标。

09 号和 06 号观测卫星对于空间飞行器的观测数据 α 和 β 值的时间点不一致，需要进行时间坐标点的匹配，多点 Lagrange 插值产生龙格振荡且观察插值节点趋势为多项式，因此选用三次样条插值。题目中存在两个坐标系，在计算时需要统一，因此需要将 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 观测坐标系下的坐标换算到 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 惯性坐标系下。由于误差的存在，惯性坐标系下，09 号卫星对 0 号飞行器以及 06 号卫星对 0 号飞行器观测形成的方向矢量应该是异面直线，而空间飞行器应该在异面直线的垂线上，认为垂线的中点坐标是空间飞行器的位置，就可以得到一条初步的估计轨道，此估计用位置半径作为置信区间。由于 $\vec{v}_r(t)$ 的方向一般应与飞行器的速度方向接近反向共线，其大小一般较为稳定。因此在计算中，只考虑 $\vec{v}_r(t)$ 的方向变化，而认为其值的大小为一个常数 A ，来建立飞行器速度 $\vec{v}_f(t)$ 的模型。由于质量的减小主要为燃料的消耗，而单位时间内燃料的消耗质量是相对稳定的，因此建立 $m(t)$ 的单调递减非负函数模型。对比双星中值定位初步估计模型，空间飞行器的实际轨迹点可能并不在公垂线上，而是在公垂线附近，即位置半径内，且使得两条异面直线的距离之和最小。通过循环缩小范围的优化降低决策变量的阶次，就可以得到 0 号空间飞行器的一条优化轨道。由两模型求得的估计轨道和优化轨道，实现对残差的估计。

逐点交汇法确定空间飞行器轨道时，两组 α, β 的测量值会存在一定的系统误差，这就会导致最终空间飞行器的定位误差。因此在分析系统误差时，将系统误差 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 代入到问题 2 的求解过程中，得到含有 6 个误差参数的异面直线之间距离，给定一个搜索区间，就可以得到该区间上的参数优值，根据参数优值修改搜索区间，不断迭代，最终可以确定系统的 6 个误差参数。将系统误差代入双星中值定位与优化定位模型里可以实现对飞行器精度提高的轨道和残差估计，体现为位置半径的缩小。

09 号观测卫星单星测量 01 号空间飞行器进行轨道估计，可以根据问题 2 计算 09 号卫星的轨迹。根据给定时刻卫星与空间飞行器之间的方向向量，可以确定一条包含飞行器轨迹点的直线。设定一个空间飞行器的初始 x_s 坐标，就可以确定空间飞行器的初始坐标 (x_s, y_s, z_s) ，根据问题 3 可以粗略估算出一条空间飞行器的轨迹。通过对粗略估算的轨迹上的点与包含空间飞行器的直线上的飞行器的坐标点的差值进行优化，可以得到优化后的空间飞行器的轨迹。

3. 模型假设

在问题求解过程中，考虑到实际情况与简化计算的需要，提出了相关的假设，如下所列：

- 1) 根据给定的资料，可知在重力斜飞阶段的后程卫星主要依靠二、三级火箭相继完成，因此在这期间就会存在抛弃二级火箭的过程，这个动作会导致火箭质量出现突变。因此，在计算过程中，忽略抛弃二级火箭带来的突变现象，而只把卫星质量考虑为严格的单调递减函数。
- 2) 地球是南北半径和东西半径不一致的椭球形，文中在绘制相关轨迹图时，为了简化计算，将地球近似为半径为 6400km 的球体。

4. 变量及符号说明

符号	符号意义	单位
G_m	地球引力常数	m^3 / s^2
t	时间	s
$\vec{r}(t)$	空间飞行器的位置矢量	
\vec{F}_e	飞行器所受的外力加速度之和	N
\vec{F}_T	表示火箭产生的推力	N
$m(t)$	瞬时质量	kg
$\dot{m}(t)$	质量的瞬时变化率	
$\ddot{\vec{r}}(t)$	$\vec{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数，即加速度	m / s^2

5. 模型建立及求解

5.1. 09 号观测卫星的三维位置计算

根据变质量质点的动力学，空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程如下：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (1)$$

其中向量 \vec{F}_e 表示飞行器所受的外力加速度之和, \vec{F}_r 表示火箭产生的推力加速度, $m(t)$ 为瞬时质量; $\dot{m}(t)$ 是质量变化率; $\vec{r}(t)$ 为空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量; $\ddot{\vec{r}}(t)$ 表示 $\vec{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数, 即加速度; G_m 为地球引力常数 (本题中地球引力常数取 $G_m = 3.986005 \times 10^{14} m^3 / s^2$), 为了更明确地表示推力加速度的方向, $\vec{v}_r(t)$ 取的是燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度的逆矢量。

方程 (1) 中如果只保留右侧第一项, 则可以表示观测卫星的简化运动方程:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (2)$$

根据数据 satinfo.txt, 可以得到 09 号卫星的初始位移为 $\vec{r}_0(t) = (2043922.166765, 8186504.631471, 4343461.714791)$, 初始速度为 $\dot{\vec{r}}_0(t) = (-5379.544693, -407.095342, 3516.052656)$, 根据这两个初值条件, 利用数值方法求解常微分方程, 可以得到相关的轨迹结果。公式 (1)、(2) 均为向量方程, 为了使计算过程简化, 考虑将矢量方程转化为标量方程。

5.1.1 矢量方程转化为标量方程

对公式 (2) 进行变形, 转换为微分格式, 如下

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (3)$$

其中 $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 根据 $\vec{r}(t)$ 的表达式, 可以将公式 (3) 矢量形式的微分方程转换为三组标量形式的微分方程, 如下

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} x \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} y \\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} z \end{cases} \quad (4)$$

微分方程组 (4) 不易解得解析解, 因此本文考虑使用数值微分方法进行三维坐标的求解。把二阶微分方程组降阶为一阶方程组, 得到的方程组中共有 6 个参数, 分别为 x, y, z, v_x, v_y, v_z 。通过求解相应的 x, y, z, v_x, v_y, v_z , 就可以确定 09 号卫星任意时刻的三维坐标。下面介绍应用数值方法求解卫星位置坐标和速度的过程。

5.1.2 微分方程组的数值求解

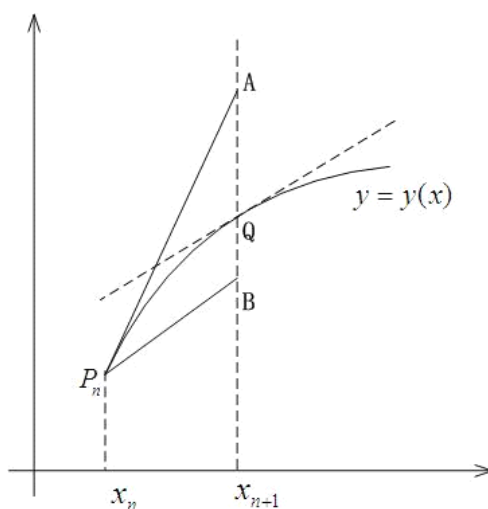


图 1 真实值与数值解的比较

如图 1 所示，所求点为曲线 $y = y(x)$ 上的 Q 点，而利用欧拉公式进行数值求解时，是利用直线 P_nA 和 P_nB 与 $x = x_{n+1}$ 交点 A 和 B 近似代替 Q 点。欧拉法的表达式为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

由上式知欧拉法为一阶精度。由于观测卫星在任意时刻的位置计算是估计的前提，因此每一步产生的误差都会对结果产生较大影响。由于利用欧拉公式求数值解时每一步都会产生误差，因此在求解微分方程时通常采用阶数较高的方法。

单从每一步看，步长越小，截断误差就越小，但随着步长的缩小，在一定求解范围内所要完成的步数就增加了。步数的增加不但引起计算量的增大，而且可能导致舍入误差的严重积累。因此同积分的数值计算一样，微分方程的数值解法也有个选择步长的问题。改善数值求解质量的方法通常为选择适当的步长、改进近似算法精度和采用变步长方法。综合这三种措施，本文采用变步长的 5 级 4 阶 Runge-Kutta 进行计算。

经典的定步长四阶 Runge-Kutta 公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2), \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases} \quad (5)$$

从节点 x_n 出发，先以 h 为步长求出一个近似值 $y_{n+1}^{(h)}$ 。由于公式的局部截断误差为 $O(h^5)$ ，故有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)} \approx O(h^5)$$

然后将步长折半，即取 $\frac{h}{2}$ 为步长从 x_n 跨两步到 x_{n+1} ，再求得一个近似值 $y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}$ ，

每跨一步的截断误差是 $O(\frac{h}{2})^5$ ，因此有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} \approx 2O(\frac{h}{2})^5$$

由上式看出步长折半后，误差减小了 $\frac{1}{16}$ 。即有

$$\frac{y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}} \approx \frac{1}{16}$$

对上式化简后得到

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} \approx \frac{1}{15} [y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} - y_{n+1}^{(h)}]$$

这样，可以通过检查步长，折半前后两次计算结果的偏差

$$\Delta = \left| y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} - y_{n+1}^{(h)} \right|$$

来判定所选的步长是否合适。对于给定的精度 ε ，如果 $\Delta > \varepsilon$ ，反复将步长折半进行计算，直至 $\Delta < \varepsilon$ 为止，这时取最终得到的 $y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}$ 作为结果^[1]。

5.1.3 09 号卫星的轨迹计算

根据 satinfo.txt 给定的数据作为初值条件，运用变步长 5 级 4 阶 Runge-Kutta 算法，得到 09 号卫星的三维坐标点。绘制 09 号卫星的轨迹如下所示：

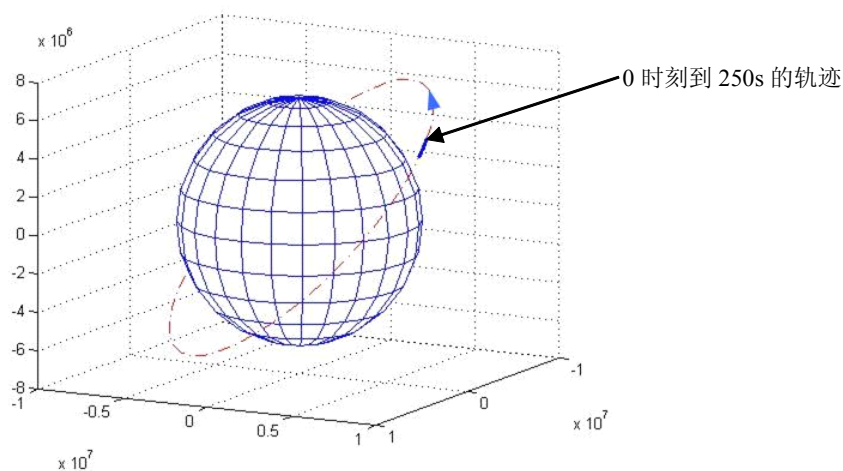


图 2 09 号卫星的轨迹图

图 2 中的虚线表示的是卫星绕地球的轨迹，箭头表示的是卫星的运行方向，黑色箭头所指加粗段为 0s 到 250s 的运行轨迹。其中，09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维坐标位置见下表所示（6 位有效数字）：

表 1 09 号观测卫星的三维坐标

时间 (s)	$x (\times 10^6 m)$	$y (\times 10^6 m)$	$z (\times 10^6 m)$
50.0	1.77381	8.16138	4.51670
100.0	1.50163	8.12676	4.68468
150.0	1.22770	8.08270	4.84722

200.0	0.952349	8.02925	5.00413
250.0	0.675894	7.96650	5.15524

5.2. 0 号空间飞行器轨道参数计算和残差估计

5.2.1 观测坐标系和惯性坐标系之间的转换

本题基础坐标系为随地心平移的坐标系，取地球中心 O_c 为原点，地球自转轴取为 z 轴，指向北极为正向， x 轴由 O_c 指向零时刻的 0 经度线，再按右手系确定 y 轴，建立直角坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 。地心 O_c 在绕日椭圆轨道上运动，所以理论上 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 系是非惯性系。但地球公转周期远大于空间飞行器的观测弧段时长，故本题在短时间内容认定该系为惯性坐标系，该基础坐标系不随地球旋转。

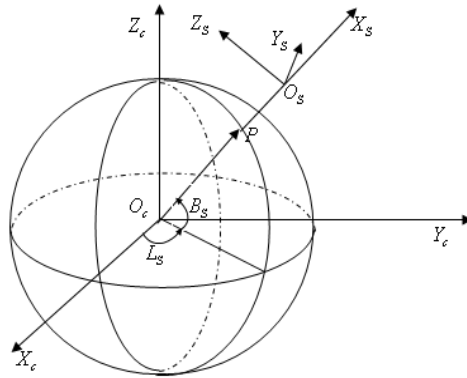


图 3 两个空间坐标系的对比

第二个坐标系是随卫星运动的观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ ，见图 3，原点取为卫星中心 O_s ， X_s 轴沿 $O_c O_s$ 连线，离开地球方向为正， Z_s 轴与 X_s 垂直指向正北， Y_s 轴按右手系确定。由于一般测量卫星的轨道都不会严格经过南北极上空，所以这种坐标系的定义是明确的。如此定义的观测坐标系也叫做 UEN 坐标系，因为三个坐标轴分别指向上（UP）、东（EAST）和北（NORTH）三个方向。

O_s 的坐标为 (x, y, z) ，在 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 观测坐标系下的坐标为 (x_s, y_s, z_s) ，则其在 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 坐标系下的坐标为 (x_c, y_c, z_c) ，根据观测坐标系在惯性坐标系下的投影关系，推导出如下变换公式：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (6)$$

称矩阵

$$T = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{bmatrix}$$

为转换矩阵。若将惯性坐标系换算到观测坐标系，则 $[x_c, y_c, z_c]^T$ 的表达式为

$$[x_c, y_c, z_c]^T = T^{-1}[x_s \quad y_s \quad z_s]^T。$$

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (7)$$

通过公式（6）、（7）就可以实现坐标在卫星观测坐标系和地球惯性坐标系之间的转换。

5.2.2 观测卫星对于空间飞行器观测数据的时间匹配

由于给定的数据 meadata_09_00 和 meadata_06_00 的时间点是不一致的，为了确定某时刻的空间飞行器的位置，需要将两组时间数据统一，本文取 09 号卫星的时间点作为全文的参考时间点，记为时间 t 。因此考虑利用插值法确定时间点 t 下的 09 号卫星和 06 号卫星与空间飞行器的位置关系，对 06 号卫星的数据进行插值，06 号卫星的 α 随时间的变化趋势以及 β 随时间的变化趋势见下图：

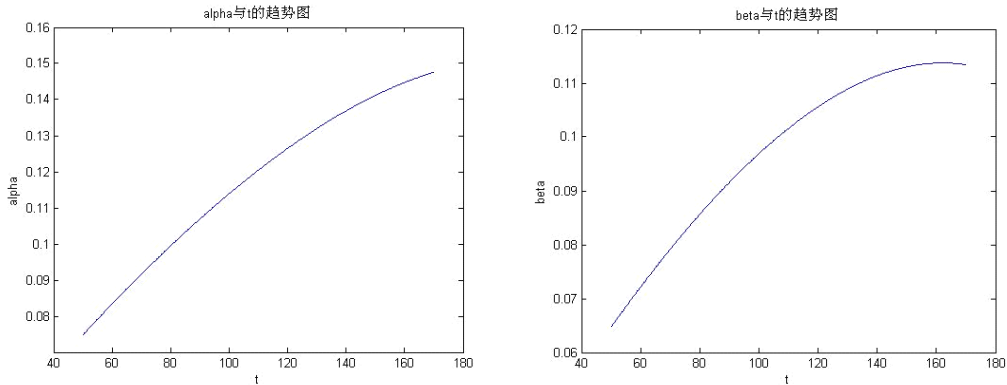


图 4 α 、 β 随时间变化趋势

由于 600 组数据的量较大，如果使用 Lagrange 插值的话，会出现最高次为 600

次的项，出现龙格震荡。且由图 4 可以看出变化趋势为多项式曲线，因此，使用三次样条插值法进行插值：

给定区间[a, b]上的一个分划：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

已知 $f(x_j) = y_j, (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ ，如果

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \dots\dots\dots \\ S_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

满足：(1) $S(x)$ 在 $[x_j, x_{j+1}]$ 上为三次多项式；(2) $S''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续；(3) $S(x_j) = y_j, (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ ，则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。如果有 n 个三次多项式，则共存在 $4n$ 个未知数，利用插值条件、连续性条件和边界条件，可以建立起 $4n$ 个方程，从而进行插值求解。

这样通过时间插值，可以得到在相同时刻，09 号观测卫星和 06 号观测卫星分别与 0 号空间飞行器的测量数据 (α, β) ，进而就可以对 0 号空间飞行器的轨道进行估计。

5.2.3 0 号空间飞行器轨道中值估计模型

已知 06 号卫星和 09 号卫星在观测坐标系中对 0 号空间飞行器的观测数据 meadata_09_00 和 meadata_06_00，为了方便处理此数据，将其转换为地球的惯性坐标系中卫星指向飞行器的方向向量。已知观测数据 (t, α, β) ，其中

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s}$$

在观测坐标下卫星观测的方向导数为

$$\vec{n}_c = (1, \alpha, \beta)$$

根据坐标系变换公式 (7) 将方向导数变换到惯性坐标系下

$$\vec{n}_{st} = T_t \times (1, \alpha_t, \beta_t)^T$$

$$\begin{bmatrix} n_{xt} \\ n_{yt} \\ n_{zt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} & \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} & \frac{z_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} \\ -\frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} & \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} & 0 \\ -\frac{x_t z_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} \sqrt{x_t^2 + y_t^2}} & -\frac{y_t z_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} \sqrt{x_t^2 + y_t^2}} & \frac{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_t \\ \beta_t \end{bmatrix} \quad (8)$$

同时根据 5.1 可求得任意时刻的 06 号卫星的坐标点 (x_{6t}, y_{6t}, z_{6t}) 和 09 号卫星

的坐标点 (x_{9t}, y_{9t}, z_{9t}) ，因此在时刻 t ，根据 06 和 09 卫星的坐标以及两个卫星分别指向空间飞行器的方向向量 $(n_{6xt}, n_{6yt}, n_{6zt})$ 和 $(n_{9xt}, n_{9yt}, n_{9zt})$ ，就可以确定两条在惯性坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 中的空间直线 L_{6t} 和 L_{9t} ，两条直线可表示为如下形式：

$$\begin{aligned} L_{6t} : \frac{x - x_{6t}}{n_{6xt}} &= \frac{y - y_{6t}}{n_{6yt}} = \frac{z - z_{6t}}{n_{6zt}} \\ L_{9t} : \frac{x - x_{9t}}{n_{9xt}} &= \frac{y - y_{9t}}{n_{9yt}} = \frac{z - z_{9t}}{n_{9zt}} \end{aligned} \quad (9)$$

在理想情况下，这两条直线应该交汇于一点，即该时刻下的空间飞行器轨迹点。但在实际情况中，由于观测存在的随机误差和测量精度的限制，两条空间直线必然为异面直线，即如图 5 所示，其中 Q_t 为轨迹点， l_t 为垂直于两条异面直线 L_{6t} 和 L_{9t} 的公垂线段，与 L_{6t} 和 L_{9t} 分别交于 C_t 点和 D_t 点，令 Q_t 与 L_{6t} 的距离为 $\overline{Q_t A_t}$ ，垂足为 A_t ， Q_t 与 L_{9t} 的距离为 $\overline{Q_t B_t}$ ，垂足为 B_t 。

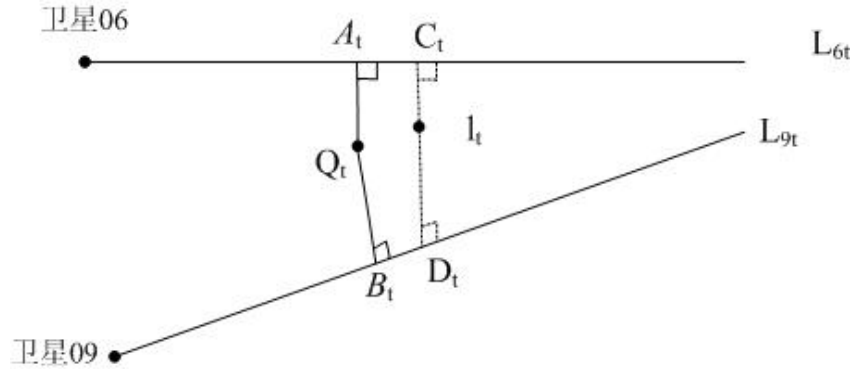


图 5 异面直线与轨迹点示意图

虽然两条直线无法交汇出理想情况下的轨迹点，但是该时刻飞行器轨迹点应该同时在两个直线附近，并且当飞行器轨迹点到两直线的距离和越近时，该点为飞行器轨迹点的概率越大。而根据立体几何知识，两异面直线的最短距离即为垂直于两条异面直线的公垂线段的长度，即 l_t 的长度。故飞行器轨迹点只要在 l_t 上，到两异面直线的距离和就最短，其为真实轨迹点概率最大。假定两条直线偏离真实轨道的方向和大小是随机的，因此选取垂线段 l_t 的中点作为飞行器轨迹点的估计值。

令垂线段 l_t 与 L_{6t} 的交点为 $C_t = (c_{xt}, c_{yt}, c_{zt})$ ，垂线段 l_t 与 L_{9t} 的交点为 $D_t = (d_{xt}, d_{yt}, d_{zt})$ ，则空间飞行器的位置坐标为：

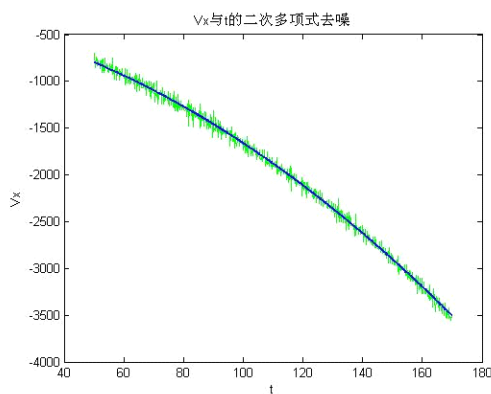
$$O_t = \frac{C_t + D_t}{2} = 0.5 \times (c_{xt} + d_{xt}, c_{yt} + d_{yt}, c_{zt} + d_{zt}) \quad (10)$$

O_t 与 O_{t+1} 之间的采样时间差 ∇t 为 0.2s，由于采样时间相对较短，本文假设在这段时间内，空间飞行器的运动轨迹为一段直线。依此，可以估算出一组速度值 $\vec{v}_t = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ ，如下所示：

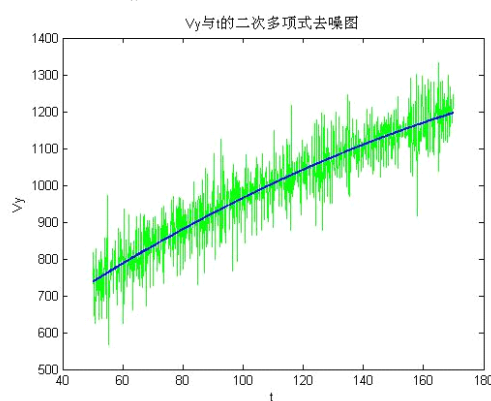
$$\vec{v}_t = \overrightarrow{O_t O_{t+1}} / \nabla t \quad (11)$$

其中 $\overrightarrow{O_t O_{t+1}}$ 为 O_t 指向 O_{t+1} 的向量。这组速度随时间变化曲线如图 6 中折线所示，发现曲线含有较多的噪点，因此首先对速度曲线进行去噪处理，本文采用的是回归去噪法。在保证回归系数的置信区间具有统计意义的前提下，本文采用二次多项式回归

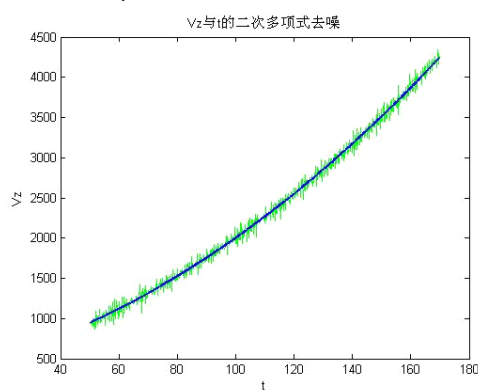
去噪。去噪之后的拟合曲线见下图 6 (a)、(b)、(c) 图中的曲线所示，根据回归拟合曲线，可以计算任意时刻的速度。



(a) $v_x(t)$ 与 t 的二次多项式去噪图



(b) $v_y(t)$ 与 t 的二次多项式去噪图



(c) $v_z(t)$ 与 t 的二次多项式去噪图

图 6 速度与时间的去噪图

图 (a) 中的去噪之后的曲线表达式为：

$$v_x(t) = -0.0752t^2 - 6.0745t - 304.6908$$

图 (b) 中的去噪之后的曲线表达式为：

$$v_y(t) = -0.0106t^2 + 6.1568t + 455.7301$$

图 (c) 中的去噪之后的曲线表达式为：

$$v_z(t) = 0.0921t^2 + 7.2342t + 355.4044$$

由此估计出时间点 t 下的飞行器的轨迹点和速度。

5.2.4 0 号空间飞行器的轨道优化模型

结合 5.2.3 所讲，考虑到实际随机误差情况，轨迹点 Q_t 不可能都在垂线段 I_t 上，同时飞行器轨迹点到两空间直线的距离和越近时，该点为飞行器轨迹点的概率就越大，于是本文以所有时刻飞行器轨迹点到两空间直线的距离和的求和最小作为目标函数，寻优得到不同时刻的飞行器轨迹点位置和速度，即

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_t (\overline{Q_t A_t} + \overline{Q_t B_t}) \\ & \text{s.t. } L_{6t} : \frac{x - x_{6t}}{n_{6xt}} = \frac{y - y_{6t}}{n_{6yt}} = \frac{z - z_{6t}}{n_{6zt}} \\ & \quad L_{9t} : \frac{x - x_{9t}}{n_{9xt}} = \frac{y - y_{9t}}{n_{9yt}} = \frac{z - z_{9t}}{n_{9zt}} \end{aligned} \quad (12)$$

在空间坐标系下， t 时刻的轨迹点为 $M_{t0}(x_{t0}, y_{t0}, z_{t0})$ ，观测卫星的轨迹点 $M_{t1}(x_{t1}, y_{t1}, z_{t1})$ ，观测的方向导数 $\vec{n}_t = (n_{xt}, n_{yt}, n_{zt})$ ，则卫星观测方向向量所在直线可以表示为

$$L_t : \frac{x - x_{t1}}{n_{xt}} = \frac{y - y_{t1}}{n_{yt}} = \frac{z - z_{t1}}{n_{zt}}$$

点 M_{t0} 到直线 L_t 的距离为

$$d_t = \frac{n_t \times \overrightarrow{M_{t0} M_{t1}}}{|n_t|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_{t0} - y_{t1} & z_{t0} - z_{t1} \\ n_{yt} & n_{zt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} z_{t0} - z_{t1} & x_{t0} - x_{t1} \\ n_{zt} & n_{xt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} x_{t0} - x_{t1} & y_{t0} - y_{t1} \\ n_{xt} & n_{yt} \end{vmatrix}}^2}{\sqrt{n_{xt}^2 + n_{yt}^2 + n_{zt}^2}} \quad (13)$$

于是，判定方程成为如下形式：

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_t (d_{6t} + d_{9t}) \\ & \text{s.t. } d_{6t} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_{t0} - y_{6t} & z_{t0} - z_{6t} \\ n_{6yt} & n_{6zt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} z_{t0} - z_{6t} & x_{t0} - x_{6t} \\ n_{6zt} & n_{6xt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} x_{t0} - x_{6t} & y_{t0} - y_{6t} \\ n_{6xt} & n_{6yt} \end{vmatrix}}^2}{\sqrt{n_{6xt}^2 + n_{6yt}^2 + n_{6zt}^2}} \\ & \quad d_{9t} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_{t0} - y_{9t} & z_{t0} - z_{9t} \\ n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} z_{t0} - z_{9t} & x_{t0} - x_{9t} \\ n_{9zt} & n_{9xt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} x_{t0} - x_{9t} & y_{t0} - y_{9t} \\ n_{9xt} & n_{9yt} \end{vmatrix}}^2}{\sqrt{n_{9xt}^2 + n_{9yt}^2 + n_{9zt}^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 d_{kt} 为 t 时刻飞行器轨迹点到 k 号观测卫星 t 时刻方向向量所在直线 L_{kt} 的距离, $k=6$ 或 9 。而 t 时刻飞行器的轨迹点 $M_{t0}(x_{t0}, y_{t0}, z_{t0})$ 可根据如下飞行器运动学方程 (1) 求得:

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_e + \vec{F}_r = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}$$

由于 $\vec{v}_r(t)$ 的方向一般应与飞行器的速度方向接近反向共线, 其大小一般较为稳定。因此在计算中, 只考虑 $\vec{v}_r(t)$ 的方向变化, 而认为其值的大小为一个常数 A , 即为火箭喷射速度。用飞行器速度 $\vec{v}_f(t)$ 的单位向量来表示其方向的变化, $\frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|}$ 。所以 $\vec{v}_r(t)$ 在计算过程中采用的模型为

$$\vec{v}_r(t) = A \cdot \frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|} \quad (15)$$

$m(t)$ 为严格单调递减的非负函数, 由于质量的减小主要为燃料的消耗, 而单位时间内燃料的消耗质量是相对稳定的, 因此选取简单的线性单减函数, 其衰减率为 k , 即单位时间的燃料消耗质量。则空间飞行器的质量表达式如下:

$$m(t) = m_0(t) - k \cdot (t - t_0) \quad (16)$$

$m_0(t)$ 为给定的时间段开始时刻的空间飞行器质量值。

根据如上讨论, 方程 (1) 的右边第二项可以化为

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_e + \vec{F}_r = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|} \frac{Ak}{m_0(t) - k(t - t_0)}$$

继续化简如下:

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_e + \vec{F}_r = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|} \frac{Ak/m_0(t)}{1 - k/m_0(t)(t - t_0)}$$

令式中 $Ak/m_0(t) = a$, $k/m_0(t) = b$ 。

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_e + \vec{F}_r = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|} \frac{a}{1 - b(t - t_0)} \quad (17)$$

根据 $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 可以将矢量换转为三个坐标轴上的标量, 其中,

$$\frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|} = \frac{dx(t)/dt \cdot \vec{i} + dy(t)/dt \cdot \vec{j} + dz(t)/dt \cdot \vec{k}}{|\vec{v}_f(t)|} \text{ 如下:}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_{ex} + F_{fx} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1-b(t-t_0)} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_{ey} + F_{fy} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} y(t) + \frac{dy(t)}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1-b(t-t_0)} \\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = F_{ez} + F_{fz} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} z(t) + \frac{dz(t)}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1-b(t-t_0)} \end{cases} \quad (18)$$

根据初始时刻的位置坐标 (x_0, y_0, z_0) ，速度 (v_x, v_y, v_z) ，可以得到微分方程组 (18) 的数值解。初始时刻位置坐标采用 5.2.3 轨道中值估计模型得到的初始时刻的位置坐标 $O_0(O_{x0}, O_{y0}, O_{z0})$ 。则最终得到优化模型下总方程：

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_t (d_{6t} + d_{9t}) \\ & s.t. \quad d_{6t} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_{t0} - y_{6t} & z_{t0} - z_{6t} \\ n_{6yt} & n_{6zt} \end{vmatrix}^2} + \sqrt{\begin{vmatrix} z_{t0} - z_{6t} & x_{t0} - x_{6t} \\ n_{6zt} & n_{6xt} \end{vmatrix}^2} + \sqrt{\begin{vmatrix} x_{t0} - x_{6t} & y_{t0} - y_{6t} \\ n_{6xt} & n_{6yt} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{n_{6xt}^2 + n_{6yt}^2 + n_{6zt}^2}} \\ & \quad d_{9t} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_{t0} - y_{9t} & z_{t0} - z_{9t} \\ n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}^2} + \sqrt{\begin{vmatrix} z_{t0} - z_{9t} & x_{t0} - x_{9t} \\ n_{9zt} & n_{9xt} \end{vmatrix}^2} + \sqrt{\begin{vmatrix} x_{t0} - x_{9t} & y_{t0} - y_{9t} \\ n_{9xt} & n_{9yt} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{n_{9xt}^2 + n_{9yt}^2 + n_{9zt}^2}} \quad (19) \\ & \frac{d^2 x_{t0}}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} x_{t0} + \frac{dx_{t0}}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1-b(t-t_0)} \\ & \frac{d^2 y_{t0}}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} y_{t0} + \frac{dy_{t0}}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1-b(t-t_0)} \\ & \frac{d^2 z_{t0}}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} z_{t0} + \frac{dz_{t0}}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1-b(t-t_0)} \\ & x_0 = O_{x0}, y_0 = O_{y0}, z_0 = O_{z0} \\ & a > 0, b \leq 0 \\ & v_x, v_y, v_z \end{aligned}$$

从方程中得有 5 个优化参数 a, b, v_x, v_y, v_z ，参数范围过大，而且参数变量多，直接的迭代很难求出全局最优解。故先用 5.2.3 轨道中值估计模型得到的初始速度作为微分方程的初始时刻速度，得到 a, b 的最优解，然后再此相对最优的五个参数下，进行循环降阶优化算法。循环降阶优化算法流程如下图所示：

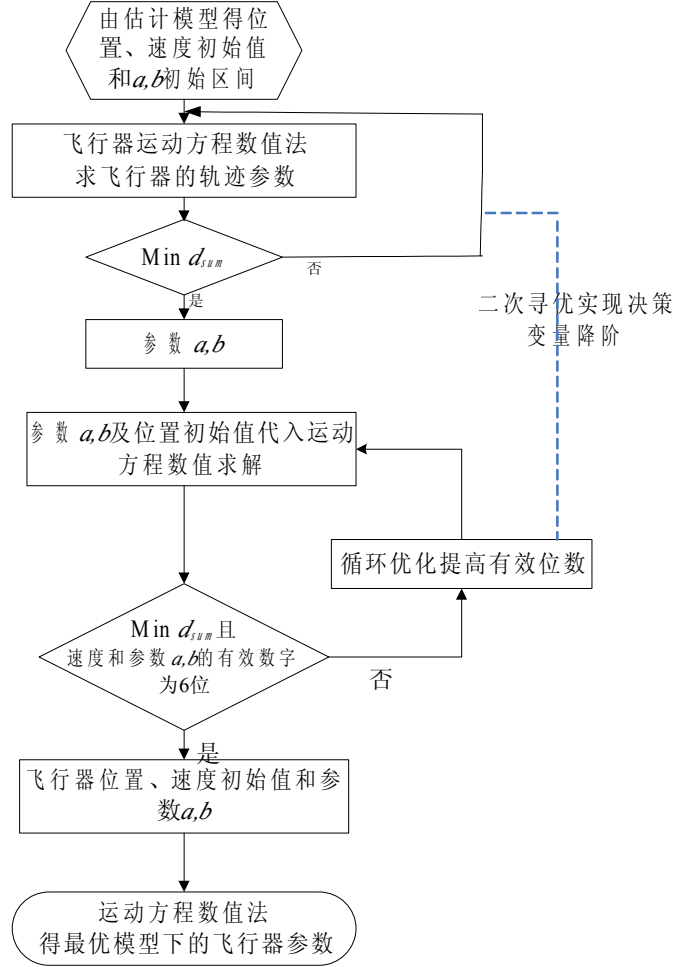


图 7 循环缩小区间降阶优化模型流程图

根据这个流程图以及空间飞行器的简化运动微分方程组，得到优化之后的空间飞行器的初始位置坐标为 $(-1.11214 \times 10^6, 6.20040 \times 10^6, 1.13322 \times 10^6)$ 、初始速度为 $(-0.795009 \times 10^3, 0.736339 \times 10^3, 0.945089 \times 10^3)$ 以及参数 a, b 。在这组条件下，根据公式 (6)，算得的距离之和为 $1.33670 \times 10^6 m$ ，每时刻点平均距离为 $2.22283 \times 10^3 m$ 。其中 $a = 21.6000, b = 3.50000 \times 10^{-3}$ ，计算得到火箭喷射速度 $A = 6.17143 \times 10^3 m/s$ ，将 a, b 的值带入到公式 (15)、(17) 中，可以得到 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的表示模型：

$$\vec{v}_r(t) = 6.17143 \times 10^3 \cdot \frac{\vec{v}_f(t)}{|\vec{v}_f(t)|} \quad (20)$$

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{0.0035}{1 - 0.0035(t - t_0)} \quad (21)$$

从 50.0s 到 170.0s 间隔 10s 进行采样，计算得到的 0 号空间飞行器的各个采样点的位置和速度见下表所示：

表 2 间隔 10s 的位置和速度采样结果

采样点 (s)	$x (\times 10^6 m)$	$y (\times 10^6 m)$	$z (\times 10^6 m)$	$v_x (\times 10^3 m/s)$	$v_y (\times 10^3 m/s)$	$v_z (\times 10^3 m/s)$
50.0	-1.11199	6.20027	1.13305	-0.792447	0.735387	0.941991
60.0	-1.12065	6.20788	1.14335	-0.940363	0.786415	1.12097
70.0	-1.13085	6.21599	1.15553	-1.10161	0.834471	1.31636
80.0	-1.14272	6.22456	1.16974	-1.27628	0.879620	1.52826
90.0	-1.15642	6.23357	1.18615	-1.46454	0.922009	1.75688
100.0	-1.17206	6.24299	1.20493	-1.66670	0.961850	2.00259
110.0	-1.18980	6.25280	1.22626	-1.88320	0.999411	2.26591
120.0	-1.20978	6.26297	1.25031	-2.11462	1.03501	2.54755
130.0	-1.23214	6.27349	1.27727	-2.36175	1.06902	2.84845
140.0	-1.25707	6.28435	1.30735	-2.62556	1.10184	3.16979
150.0	-1.28471	6.29553	1.34074	-2.90726	1.13391	3.51303
160.0	-1.31528	6.30703	1.37769	-3.20836	1.16575	3.87999
170.0	-1.34895	6.31884	1.41843	-3.53069	1.19789	4.27290

13 个时间点的残差估计见下表 3

表 3 残差估计值表

采样点 (s)	$x (m)$	$y (m)$	$z (m)$	$v_x (m/s)$	$v_y (m/s)$	$v_z (m/s)$
50.0	76.4623	126.261	12.1046	3.88678	-1.74638	-5.26804
60.0	-98.0486	36.020	104.595	-0.60055	-0.655736	0.106572
70.0	-135.941	40.0363	144.677	-3.38679	-0.421299	3.47851
80.0	-128.194	0.889663	151.989	-4.55634	-0.978213	4.94860
90.0	-106.691	-37.4230	133.121	-4.29074	-2.18140	4.73350
100.0	-124.636	-106.630	87.4606	-2.88958	-3.81826	3.19172
110.0	-119.062	-155.168	122.564	-0.789788	-5.61904	0.847592
120.0	-144.467	-215.030	170.473	1.41468	-7.26453	-1.58435
130.0	-201.756	-225.002	238.112	2.95082	-8.39097	-3.17234
140.0	-281.640	-292.652	320.887	2.84025	-8.59211	-2.73500
150.0	-371.835	-328.326	434.193	-0.133948	-7.41840	1.19903
160.0	-482.358	-390.209	546.388	-7.46980	-4.37323	10.4431
170.0	-517.805	-460.825	645.107	-21.0023	1.09420	27.2207
残差标准差	167.563	182.675	192.063	6.46600	3.32610	8.28770

位置半径的示意图见下图 8:

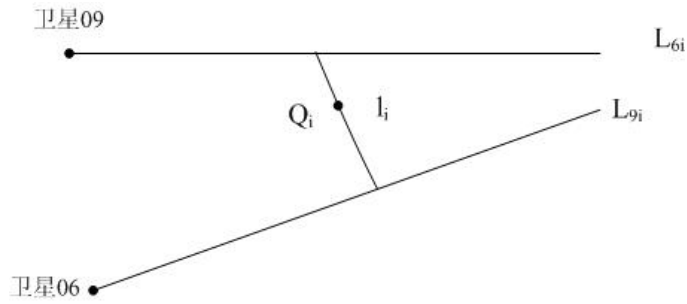


图 8 位置半径示意图

其中位置半径是指在公垂线段 l_i ，中点 Q_i 的取值变化范围。

本文认为空间飞行器的位置是公垂线的中点，而实际上垂直线段上的任意一点与公垂线段 l_i 的中点具有相同的概率值，这些点构成了置信区间，即位置半径。根据公垂线段的参数得出飞行器的位置半径信息。13 个采样点的 01 号空间飞行器的坐标 (x, y, z) 的位置半径见下表：

表 4 坐标位置半径

采样点 (s)	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$
50.0	675.509	446.169	834.004
60.0	669.409	463.453	822.123
70.0	663.883	480.318	811.330
80.0	647.483	488.155	787.709
90.0	644.837	505.239	781.233
100.0	631.964	513.273	762.796
110.0	632.803	531.455	761.294
120.0	621.503	538.467	745.606
130.0	610.146	544.061	730.299
140.0	603.822	552.841	721.449
150.0	595.450	558.447	710.601
160.0	584.321	559.989	696.923
170.0	578.331	564.704	689.835

根据估计模型对微分方程组进行数值求解，最终得到的 0 号飞行器的 $t-x, t-y, t-z$ 以及 $t-v_x, t-v_y, t-v_z$ 曲线示意图，见图 9 所示：

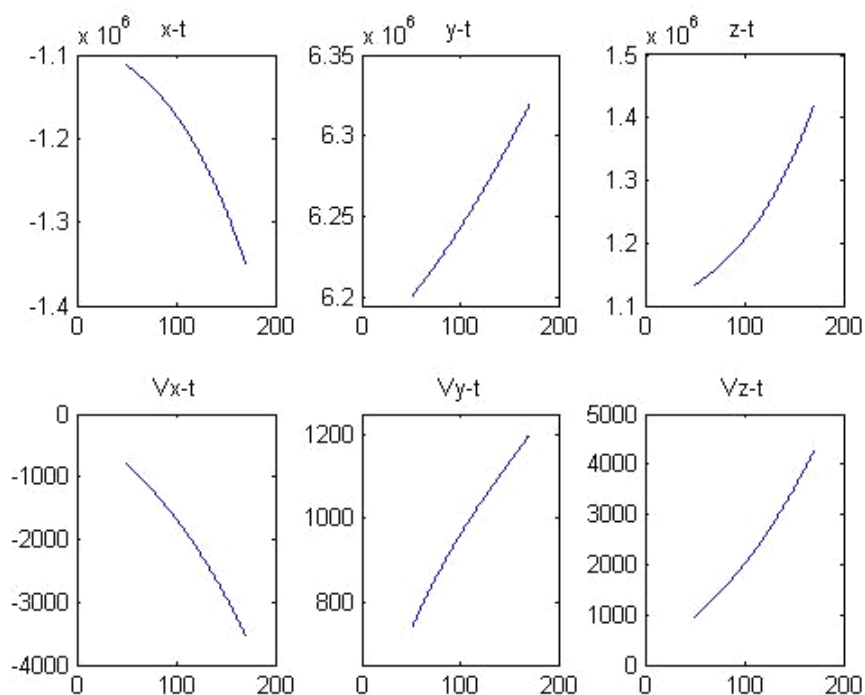


图 9 时间-位置和时间-速度的示意图

根据异面直线公垂线段的两个端点（图 5 中的 C_i, D_i 点），和利用优化模型得到的空间飞行器轨迹点绘制轨迹，如图所示：

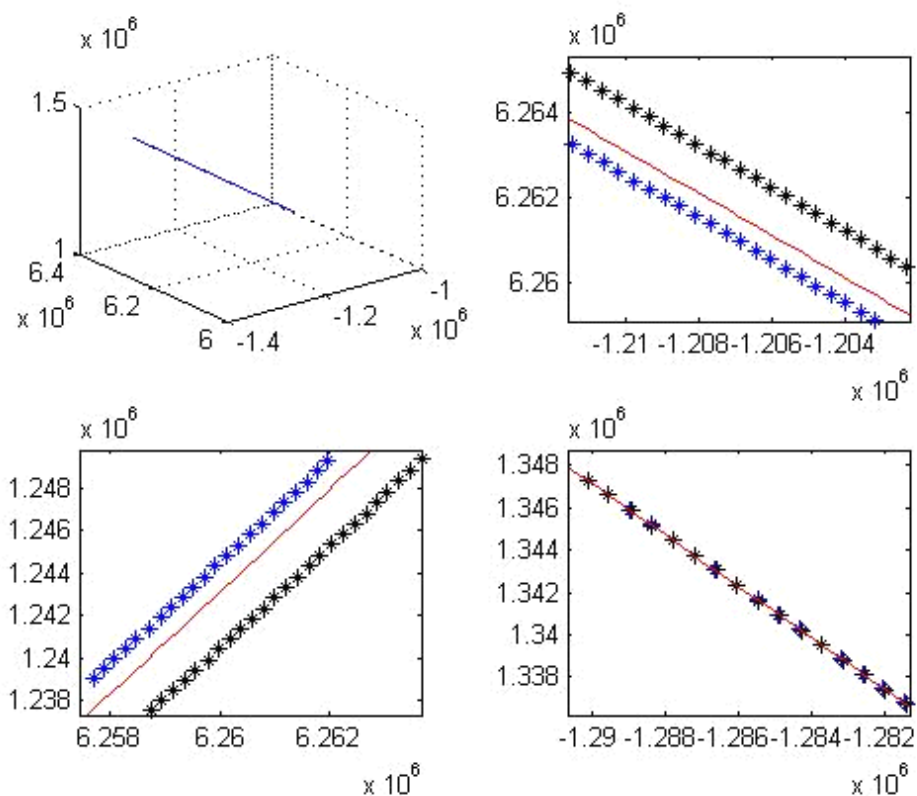


图 10 0 号飞行器优化轨迹图

图 10 中的星线轨迹为利用公垂线段两端点得到的轨迹，轨迹出现在这个区域内，都认为是合理的。曲线为利用优化模型得到的轨迹点。优化得到的轨迹位于两个端点形成的轨迹之间，由于距离较近，在空间图中重合，因此将图形分别向 $x-y, x-z, y-z$ 三个平面投影，并局部放大，得到图 10 中的轨迹对比图。从图中可以得到飞行器的优化轨迹，均在位置半径内，可见优化轨迹具有很好的置信度。

5.3. 考虑系统误差的 0 号空间飞行器轨道参数计算和残差估计

5.3.1 系统误差的求解

在不考虑随机误差的情况下，如果仅考虑系统误差，即三轴指向误差，那么公式 (8) 的计算结果应该为定值。因为系统误差是系统本身带有的，是恒定值，它对测量结果的影响是恒定的。

经由适当的简化模型，各种系统误差最终可以折合为观测坐标系的原点位置误差和三轴指向误差。根据工程经验，原点位置误差影响较小，而三轴指向误差影响较大，对三轴指向误差进行估计对于提高估计精度很有帮助，本文只考虑三轴指向误差。三轴指向误差在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差，具体可以用三个常值小量 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 来表示，分别表示第一观测量 α 的平移量、第二观测量 β 的平移量以及观测量在 $\alpha\beta$ 平面内的旋转量。 $\alpha\beta$ 平面的坐标示意图如下：

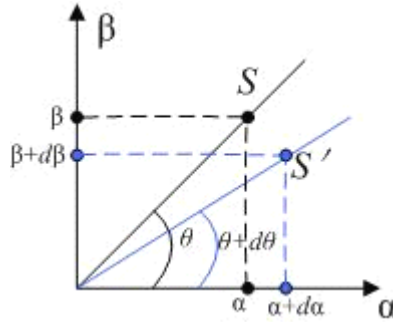


图 11 误差示意图

图 11 中点 S 表示的是准确值点，而点 S' 表示的是由于 $\alpha\beta$ 的平移误差以及旋转误差作用之后的实际点。正是由于三轴指向误差以及随机误差的存在，使得在 5.2 节中，得到的两条直线是异面关系，而不是交于一点的相交直线。将三轴指向误差代入到测量的 (α, β) 中，得到 $(r \cos(\theta + d\theta) + d\alpha, r \sin(\theta + d\theta) + d\beta)$ ，这个就是考虑了误差之后的测量数据，其中 (α, β) 的平移误差 $(d\alpha, d\beta)$ 是由于 θ 的旋转误差引起的。 r 为点 S 到 $\alpha\beta$ 平面原点的距离，旋转误差 $d\theta$ 不会影响 r 的大小，因此考虑误差前后 r 的大小保持不变。

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{\beta}{\alpha} & \alpha > 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} + \pi & \alpha < 0 \end{cases} \quad (22)$$

加进误差之后，则 06 号卫星观测 0 号空间飞行器的方向向量为 $(1, r_6 \cos(\theta_6 + d\theta_6) + d\alpha_6, r_6 \sin(\theta_6 + d\theta_6) + d\beta_6)$ ，而 09 号卫星观测 0 号空间飞行器的

方向向量为 09 号卫星观测 0 号空间飞行器的方向向量为 $(1, r_9 \cos(\theta_9 + d\theta_9) + d\alpha_9, r_9 \sin(\theta_9 + d\theta_9) + d\beta_9)$ 。同时两颗卫星在任意时刻的坐标是确定的，所以可以得到对应 t 时刻的两条异面直线：

$$L_{6t} : \frac{x - x_{6t}}{n_{6xt}} = \frac{y - y_{6t}}{n_{6yt}} = \frac{z - z_{6t}}{n_{6zt}}$$

$$L_{9t} : \frac{x - x_{9t}}{n_{9xt}} = \frac{y - y_{9t}}{n_{9yt}} = \frac{z - z_{9t}}{n_{9zt}}$$

假定只考虑系统误差，那么在去除系统误差后，两直线应该相交于一点即飞行器位置，但是实际情况下不可能去除所有误差，还是存在一定的随机误差和精度误差，所以本文以所有时刻两空间直线的最小距离的求和最小作为目标函数，寻优得到 06 号和 09 号卫星的系统误差 $d\alpha_6, d\beta_6, d\theta_6, d\alpha_9, d\beta_9, d\theta_9$ 。

根据两条异面直线方程，可求出 t 时刻两直线间的最短距离 d_{Lt} ：

$$d_{Lt} = \frac{\begin{vmatrix} x_{9t} - x_{6t} & y_{9t} - y_{6t} & z_{9t} - z_{6t} \\ n_{6xt} & n_{6yt} & n_{6zt} \\ n_{9xt} & n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_{6xt} & n_{6yt} \\ n_{9xt} & n_{9yt} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_{6yt} & n_{6zt} \\ n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_{6zt} & n_{6xt} \\ n_{9zt} & n_{9xt} \end{vmatrix}^2}} \quad (23)$$

则优化模型如下所示

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_t d_{Lt} \\ & d_{Lt} = \frac{\begin{vmatrix} x_{9t} - x_{6t} & y_{9t} - y_{6t} & z_{9t} - z_{6t} \\ n_{6xt} & n_{6yt} & n_{6zt} \\ n_{9xt} & n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_{6xt} & n_{6yt} \\ n_{9xt} & n_{9yt} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_{6yt} & n_{6zt} \\ n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_{6zt} & n_{6xt} \\ n_{9zt} & n_{9xt} \end{vmatrix}^2}} \\ & s.t. \quad -0.5 \leq d\alpha_6, d\beta_6, d\theta_6, d\alpha_9, d\beta_9, d\theta_9 \leq 0.5 \end{aligned} \quad (24)$$

虽然优化模型已经建立，但是 6 个参数变化过多，范围过大，很难得到最优值，因此先在大区间[-0.5 0.5]内实行随机跳跃法寻找相对最优值。根据给定的数据 meadata_09_00 和 meadata_06_00，各有 600 组数据，可以进行下述的优化求解。公式（24）的表达式中含有六个参数 $d\alpha_6, d\beta_6, d\theta_6, d\alpha_9, d\beta_9, d\theta_9$ ，这六个参数为 09 号卫星和 06 号卫星的系统误差，在实际情况中，这 6 个参数的取值都是非常小的，可以给定 6 个参数的搜索范围，依次进行搜索求取最优解，搜索算法流程图如下：

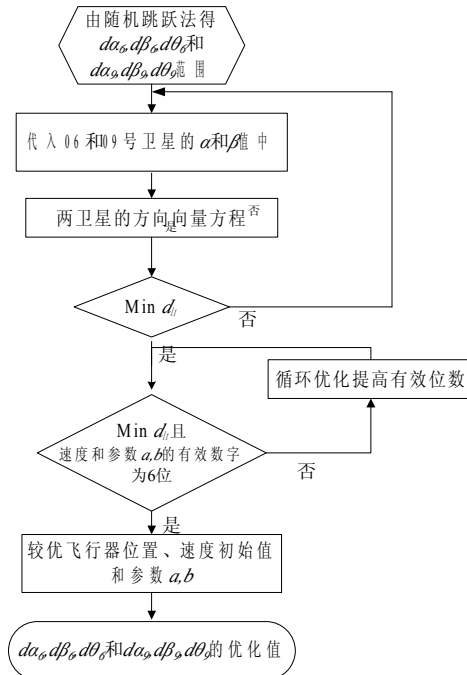


图 12 系统误差最优值搜索算法流程图

搜索得到最优值如下所示：

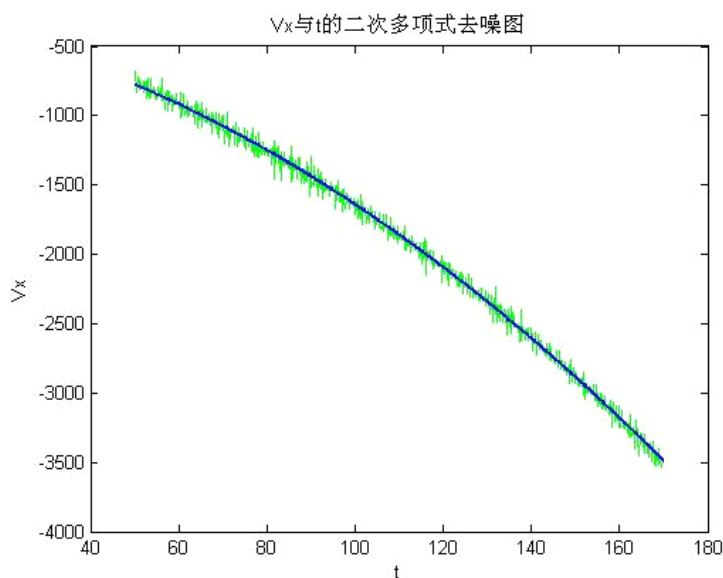
$$d\alpha_6 = -0.00425, d\beta_6 = 0.00139, d\theta_6 = 0.00293$$

$$d\alpha_9 = 0.00309, d\beta_9 = -0.00365, d\theta_9 = 0.00033$$

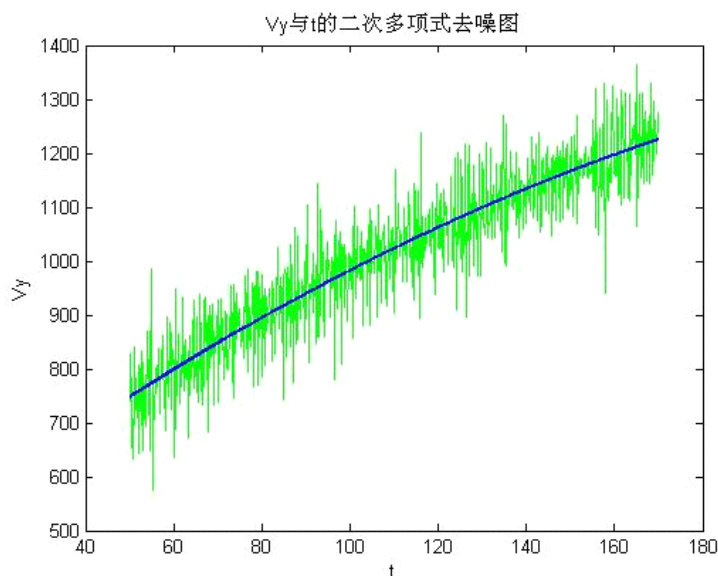
其中 $d\alpha$ 为无量纲量， $d\theta$ 的单位为 rad。

5.3.2 0 号空间飞行器的轨道计算和残差估计

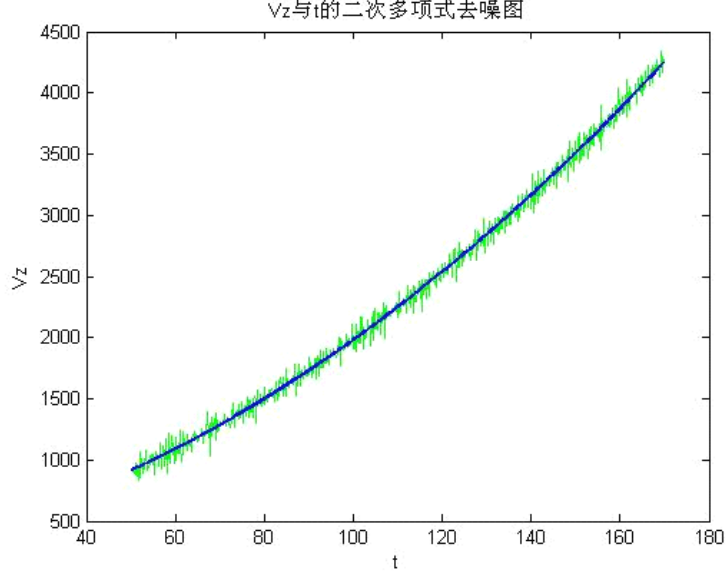
在已知系统误差情况下，对已知 06 号和 09 号卫星观测 0 号空间飞行器的方向向量进行误差修正，得到在 t 时刻去除系统误差的两条方向向量所在直线，之后基于 5.2 的中飞行器轨道中值估计模型计算得到各个时刻的空间飞行器轨迹点。依据飞行器轨迹点估算出一组速度与时间的速度值： $\vec{v}_i(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ ，曲线如下图所示，同样发现曲线含有较多的噪点，采用二次多项式回归去噪。去噪之后的拟合曲线见下图 13 (a)、(b)、(c) 图中的曲线所示，根据回归拟合曲线，可以计算任意时刻的速度。



(a) $v_x(t)$ 与 t 的二次多项式去噪图



(a) $v_y(t)$ 与 t 的二次多项式去噪图



(a) $v_z(t)$ 与 t 的二次多项式去噪图

图 13 考虑误差之后的速度去噪图

图 (a) 中的去噪之后的曲线表达式为:

$$v_x(t) = -0.0755t^2 - 6.06t - 282.233$$

图 (b) 中的去噪之后的曲线表达式为:

$$v_y(t) = -0.0103t^2 + 6.2472t + 460.762$$

图 (c) 中的去噪之后的曲线表达式为:

$$v_z(t) = 0.09321t^2 + 7.2847t + 318.772$$

依据流程图算法以及常微分方程式 (1), 可以得到优化之后的空间飞行器的初始位置坐标为 $(-1.11053 \times 10^6, 6.17886 \times 10^6, 1.12364 \times 10^6)$ 、初始速度为 $(-0.773659 \times 10^3, 0.738728 \times 10^3, 0.920605 \times 10^3)$ 以及参数 a, b 。在这组条件下, 根据公式 (6), 算得的距离之和为 $2.14110 \times 10^5 m$, 平均比例为 $356.850m$ 其中 $a = 21.7000, b = 3.60000 \times 10^{-3}$, 计算得到火箭喷射速度 $A = 6.02778 \times 10^3 m/s$, 将 a, b 的值带入到公式 (15)、(17) 中, 可以得到 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的表示模型:

$$\vec{v}_r(t) = 6.02778 \times 10^3 \cdot \frac{\vec{v}_r(t)}{|\vec{v}_r(t)|} \quad (25)$$

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{0.0036}{1 - 0.0036(t - t_0)} \quad (26)$$

从 50.0s 到 170.0s 间隔 10s 进行采样, 计算得到的 0 号空间飞行器的各个采样点的位置和速度见下表所示:

表 5 间隔 10s 的位置和速度采样结果

采样点 (s)	$x (\times 10^6 m)$	$y (\times 10^6 m)$	$z (\times 10^6 m)$	$v_x (\times 10^3 m/s)$	$v_y (\times 10^3 m/s)$	$v_z (\times 10^3 m/s)$
50.0	-1.12039	6.17873	1.13353	-0.771130	0.737732	0.917538
60.0	-1.12882	6.18638	1.13353	-0.917349	0.791410	1.09506
70.0	-1.13878	6.19455	1.14544	-1.07719	0.842486	1.28943
80.0	-1.15041	6.20322	1.15937	-1.25080	0.891029	1.50083
90.0	-1.16384	6.21236	1.17551	-1.43841	0.937193	1.72953
100.0	-1.17923	6.22196	1.19402	-1.64038	0.981208	1.97596
110.0	-1.19670	6.23198	1.21509	-1.85721	1.02336	2.24075
120.0	-1.21642	6.24242	1.23890	-2.08958	1.06401	2.52469
130.0	-1.23855	6.25326	1.26565	-2.33836	1.10355	2.82885
140.0	-1.26325	6.26449	1.29555	-2.60464	1.14244	3.15456
150.0	-1.29070	6.27611	1.32882	-2.88980	1.18118	3.50346
160.0	-1.32111	6.28811	1.36570	-3.19550	1.22035	3.87760
170.0	-1.35469	6.30052	1.40646	-3.52383	1.26059	4.27951

13 个时间点的残差估计见下表 6:

表 6 残差估计值表

采样点 (s)	$x (m)$	$y (m)$	$z (m)$	$v_x (m/s)$	$v_y (m/s)$	$v_z (m/s)$
50.0	77.3239	129.123	10.9629	2.83134	-9.71712	1.47321
60.0	-98.8034	-34.5163	155.771	0.251999	-7.21467	3.59978
70.0	-119.569	-87.5612	215.621	-0.855639	-5.26086	3.93706
80.0	-79.2062	-165.680	212.988	-0.627901	-3.78633	2.64978
90.0	-12.7537	-221.021	158.018	0.698946	-2.63640	0.0219996
100.0	22.6013	-282.329	54.0952	2.76504	-1.58295	-3.51334
110.0	86.2304	-293.497	14.3730	5.06462	-0.334045	-7.34657
120.0	118.095	-283.377	-24.0602	6.92285	1.45920	-10.6625
130.0	111.473	-186.044	-47.5314	7.46975	4.19877	-12.4084
140.0	68.5515	-105.940	-53.1390	5.60855	8.33907	-11.2549
150.0	-6.49771	52.5382	-15.8019	-0.0239793	14.3896	-5.54710
160.0	-133.892	235.807	43.7057	-11.1091	22.9212	6.75793
170.0	-229.844	467.673	126.441	-29.7142	34.5769	28.1748
残差标准差	109.288	228.167	96.7760	9.89820	12.8442	10.6742

13 个采样时间点的空间飞行器的位置坐标 x, y, z 的取值半径见下表 7 所示:

表 7 空间飞行器的位置坐标取值半径

采样点(s)	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$
50.0	1.44101	0.948290	1.78251
60.0	1.91878	1.32376	2.36105
70.0	3.58908	2.58787	4.39468
80.0	5.18276	3.89456	6.31746
90.0	0.285483	0.222960	0.346545
100.0	4.24894	3.44018	5.13865
110.0	5.22947	4.37857	6.30373
120.0	2.56464	2.21536	3.08284
130.0	0.146015	0.129819	0.175120
140.0	2.08834	1.90652	2.50013
150.0	2.05960	1.92613	2.46280
160.0	1.04710	1.00069	1.25138
170.0	0.479518	0.466920	0.573113

对比表 4 和表 7 的两组相同时间点的空间飞行器的位置半径，可以发现考虑系统误差之后，空间飞行器的位置半径衰减了 2 个数量级，极大提高了空间飞行器的定位精度。

根据对微分方程的优化数值求解，最终得到的 0 号飞行器的 $t-x$, $t-y$, $t-z$ 以及 $t-v_x$, $t-v_y$, $t-v_z$ 曲线示意图，见图 15 所示：

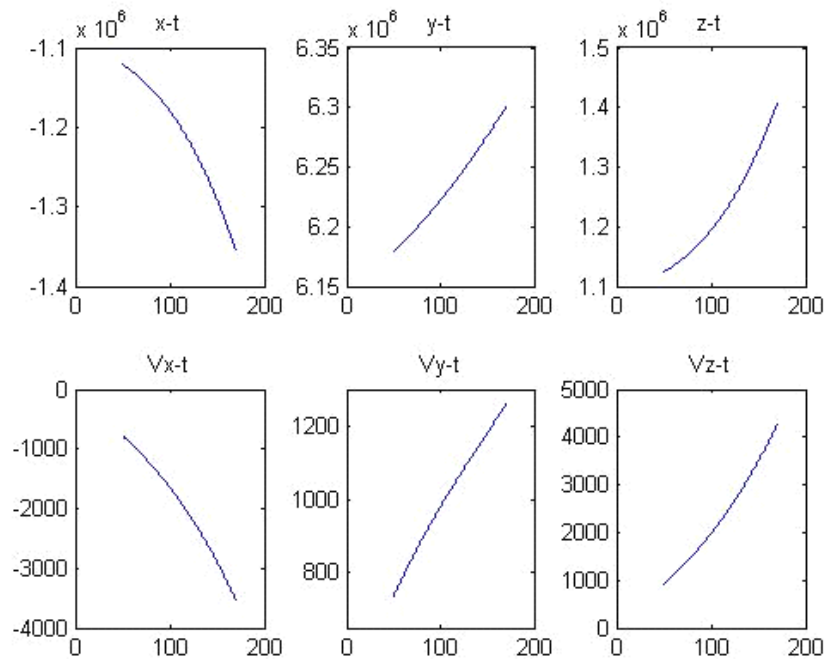


图 14 时间-位置和时间-速度的示意图

根据异面直线公垂线段的两个端点（图 5 中的 C_i , D_i 点），和利用优化模型得到的空间飞行器轨迹点绘制轨迹，如图所示：

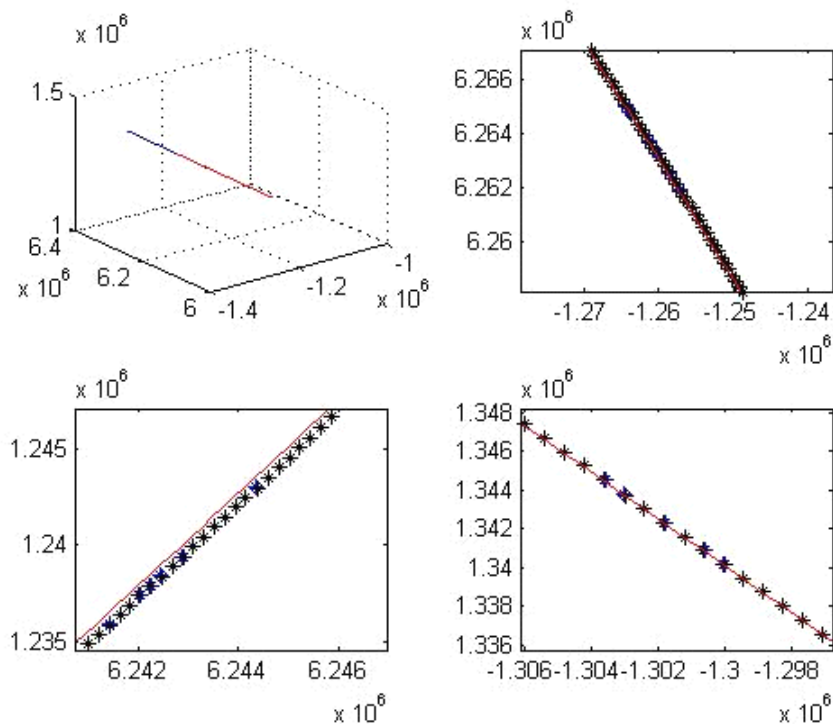


图 15 考虑系统误差之后的轨迹图

图 15 中的星线轨迹为利用公垂线段两端点得到的轨迹，曲线为利用优化模型得到的轨迹点。优化得到的轨迹位于两个端点形成的轨迹之间，由于距离较近，在空间图中重合，因此将图形分别向 $x-y$, $x-z$, $y-z$ 三个平面投影，并局部放大，得到图 15 中的轨迹对比图。与图 10 相比，考虑了系统误差之后，得到的轨迹的二维投影图也几乎重合，精度较高。

根据所测数据，得到的双星定位三维立体图见图 16：

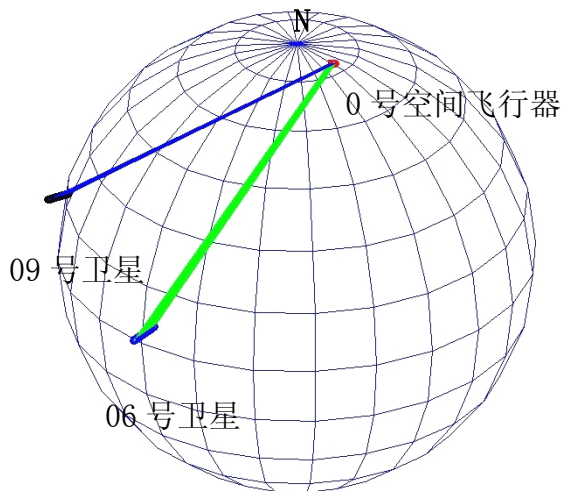


图 16 双星定位三维立体图

5.4. 单星估计 01 号空间飞行器轨道

根据数据 meadata_09_01, 利用 09 号单颗观测卫星和 01 号空间飞行器之间的测量数据, 估计 01 号飞行器的轨道。

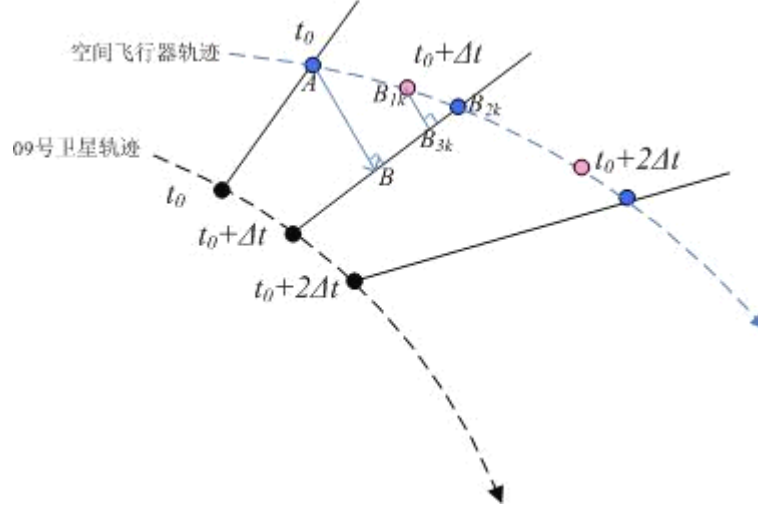


图 17 单星测量示意图

09 号卫星的运动轨迹可以利用 **5.1** 得到。确定卫星轨迹点确定之后, 根据 09-01 的数据可以确定由 09 号卫星指向 01 号空间飞行器的方向向量, 由此得到一条空间直线 BB_{2k} , 由于已消除系统误差, 则认为空间飞行器必在这条直线上。利用简化运动方程 (1) t_0 时刻 01 号空间飞行器的轨迹点为 A , $t_0 + \Delta t$ 时刻 01 号空间飞行器的轨迹点为 B_{2k} 。在本文中 $\Delta t = 0.2s$, 这期间空间飞行器转过的角度非常小, 由 A 点向 BB_{2k} 作垂线, 垂直 BB_{2k} 于点 B , 可以用 \overline{AB} 表示其转过的弧度。 $\frac{\overline{AB}}{\Delta t}$ 为 t_0 时刻的速度。在迭代优化过程中, 可预先取定一个 x 作为 A 点的 x 坐标初始值, 则点 A 的初始坐标就可以完全确定。

在空间坐标系下, t 时刻的轨迹点为 $M_{t0}(x_{t0}, y_{t0}, z_{t0})$, 9 号观测卫星的轨迹点 $M_{t9}(x_{t9}, y_{t9}, z_{t9})$, 观测的方向导数 $\vec{n}_t = (n_{xt9}, n_{yt9}, n_{zt9})$, 则卫星观测方向向量所在直线可以表示为

$$L_t: \frac{x - x_{t9}}{n_{xt9}} = \frac{y - y_{t9}}{n_{yt9}} = \frac{z - z_{t9}}{n_{zt9}}$$

点 M_{t0} 到直线 L_{9t} 的距离为

$$d_{9t} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_{t0} - y_{9t} & z_{t0} - z_{9t} \\ n_{9yt} & n_{9zt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} z_{t0} - z_{9t} & x_{t0} - x_{9t} \\ n_{9zt} & n_{9xt} \end{vmatrix}}^2 + \sqrt{\begin{vmatrix} x_{t0} - x_{9t} & y_{t0} - y_{9t} \\ n_{9xt} & n_{9yt} \end{vmatrix}}^2}{\sqrt{n_{9xt}^2 + n_{9yt}^2 + n_{9zt}^2}}$$

以对应时刻轨迹点到 9 号观测卫星方向所在直线的距离之和最小为优化目标,

搜寻最优的起始时间的轨迹坐标点 (x_0, y_0, z_0) 、速度 (v_x, v_y, v_z) 和 a 、 b 值。

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_t (d_{9t}) \\
 & d_{9t} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_{t0} - y_{9t} & z_{t0} - z_{9t} \\ n_{9yt} & n_{9zt} \end{matrix} \right|^2} + \sqrt{\left| \begin{matrix} z_{t0} - z_{9t} & x_{t0} - x_{9t} \\ n_{9zt} & n_{9xt} \end{matrix} \right|^2} + \sqrt{\left| \begin{matrix} x_{t0} - x_{9t} & y_{t0} - y_{9t} \\ n_{9xt} & n_{9yt} \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{n_{9xt}^2 + n_{9yt}^2 + n_{9zt}^2}} \quad (27) \\
 & \frac{d^2 x_{t0}}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} x_{t0} + \frac{dx_{t0}}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1 - b(t - t_0)} \\
 & \frac{d^2 y_{t0}}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} y_{t0} + \frac{dy_{t0}}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1 - b(t - t_0)} \\
 & \frac{d^2 z_{t0}}{dt^2} = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} z_{t0} + \frac{dz_{t0}}{dt} \frac{a}{|\vec{v}_f(t)| 1 - b(t - t_0)} \\
 & s.t. \quad a > 0, b \leq 0 \\
 & x_0, y_0, z_0, v_x, v_y, v_z
 \end{aligned}$$

上式中有 8 个变量值，虽然 y_0, z_0 可以根据 x_0 ，但是仍然有 6 个变量，且相对于前面双星定位， x_0, v_x, v_y, v_z 已无法搜索到相对优值，导致其搜索区间非常大，大大降低了最优值搜索效率。拟采用循环降阶优化，完成对参数值的优化。

在同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况，因为每个观测卫星系统误差认为恒定，故可以为空间飞行器分组，在每一组中，以两两方向导数所在的直线最短距离和最优为目标值，搜索到在每一组下的最优系统误差值。之后再各组内将同一个观测卫星最优误差值进行区间内二次搜索，以全部组的最短距离和的最优为目标值，搜索出该观测卫星的全局最优系统误差。

6. 模型评价

利用精度较高的变步长四阶五级 Runge-Kutta 数值方法求解常微分方程，确定了 09 号卫星的轨迹上的所有点的坐标，根据得到的数据绘制处卫星的轨迹图。

双星定位时，本文建立了两个模型：双星定位中值估计模型和双星定位优化模型，并分别用两个模型求解 0 号空间飞行器的轨迹。利用效果较好的优化模型，算得 13 个采样点的位置、速度以及残差估计。考虑系统误差之后，将系统误差参数代入到优化模型中，利用循环降阶优化，得到 09 号卫星和 06 号卫星的系统参数，且所得值非常小，符合系统误差的特点。将系统误差代入到优化模型的求解中，得到一个更加精确的轨迹。且优化模型得到的位置坐标和速度数据符合天文常识。通过对比系统误差前后的位置半径，发现考虑系统误差之后的残差估计减少了两个数量级，极大提高了空间飞行器的定位精度。

单星定位空间飞行器 01 时，通过参考双星定位的信息，给定一个初值以及迭代范围，就可以利用运动方程迭代，得到单星定位的最优值，由于时间所限，文中只

是详细阐述了单星定位的思想以及算法，并没有对最终结果进行计算。多颗观测卫星观测定位多个空间飞行器的工作，可以在下一步的工作中，对此展开讨论。

7. 参考文献

- [1] 萧树铁主编，大学数学第二版数学实验，北京，高等教育出版社，2006 年版，108-113；
- [2] 姜启源、谢金星、叶俊编，数学模型（第三版），北京，高等教育出版社，2003 年版；
- [3] 塔怀锁、吴翠兰，北京工业职业技术学院学报，2010 年 4 月，第 9 卷第 2 期；