

参赛密码 \_\_\_\_\_

( 由组委会填写 )

# 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

海军航空工程学院  
学 校 海军工程大学

---

参赛队号 K0196

---

	1.陈晓楠
队员姓名	2.王海婷
	3.管若荷

---

参赛密码 \_\_\_\_\_

( 由组委会填写 )



## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目                      数控加工刀具优化控制的建模仿真

---

### 摘                      要：

数控系统的轨迹插补及速度控制功能的强弱、性能优劣直接关系到数控机床的运动控制性能，对数控机床的加工质量与加工效率具有直接影响。

本文针对数控机床的需求和特点，对插补方法、加工方案优化控制和转接处理等问题进行了推导和计算，主要工作和成果如下：

(1) 对传统的逐点比较插补法进行了改进；详细分析了  $S$  形曲线加减速规律的特点及其加减速规律的动力学特性，并给出具体计算公式，并对不同情况下的运动情况进行了具体的分析；提出了数控系统光滑转接控制算法，对其误差进行了仿真与分析，得到在当误差相等的情况下，转接角为  $135^\circ$  时比转接角

为  $90^\circ$  时可以达到更大的速度。

(2) 增加对曲线光滑转接控制算法和逐点比较圆弧插补法的推导计算；分析圆弧半径的变化对算法效率的影响；在不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度的前提下，对加工示例进行了计算，在保证效率最高耗时最短的前提下，得到最大速度为  $1.26\text{m/min}$ ，最大加速度为  $0.0752\text{m/s}^2$ ，总耗时为  $91.7090\text{s}$ 。

(3) 在考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度的前提下，重新推导  $S$  形曲线加减速规律，分析加减速规律的动力学特性，对加工示例进行了计算分析，得到最大速度为  $1.26\text{m/min}$ ，最大加速度为  $0.0778\text{m/s}^2$ ，总耗时为  $91.6532\text{s}$ 。

(4) 提出渐变加加速度的简化运动模型，采用长距离时间近似的方法，保证了加工的平稳性和加工效率的高效性。

本文主要的特色之处在于：

(1) 在进行插补时，与传统逐点比较插补法对比，边切割边判断，以确保插补点选择的正确性与精确性。

(2) 对不同条件下的  $S$  形曲线加减速控制方法进行详细地推导，全面地分析了不同运动情况下的参数条件。

(3) 提出了光滑转接控制算法，使转接处误差尽可能的缩小，并对角度、速度与误差的关系进行了仿真分析。

(4) 采用长距离时间近似的方法，提出渐变加加速度的简化运动模型，简化了计算，确保了加工的稳定性。

关键词：数控；优化控制；插补； $S$  形曲线；光滑转接

# 目 录

目 录.....	- 4 -
1 问题重述与分析.....	- 5 -
2 模型假设.....	- 6 -
3 符号定义.....	- 6 -
4 基于折线光滑转接的实时加工优化控制算法.....	- 7 -
4.1 问题分析.....	- 7 -
4.2 改进的逐点比较插补法.....	- 7 -
4.3 基于 S 型曲线的加减速控制方法 .....	- 9 -
4.4 光滑转接控制算法.....	- 13 -
4.5 误差分析.....	- 15 -
5 简化条件下的曲线实时加工优化控制算法.....	- 17 -
5.1 问题分析.....	- 17 -
5.2 改进逐点比较法圆弧插补.....	- 17 -
5.3 曲线光滑转接控制算法.....	- 18 -
5.4 圆弧半径的变化对算法效率的影响.....	- 19 -
5.5 对加工示例的检验.....	- 19 -
5.6 误差分析.....	- 21 -
6 实际条件下的曲线实时加工优化控制算法.....	- 22 -
6.1 问题分析.....	- 22 -
6.2 实际条件下的 S 型曲线的加减速控制方法 .....	- 22 -
6.3 对加工示例的检验.....	- 26 -
6.4 误差分析.....	- 28 -
7 提高机床运行平稳性的优化控制运动模型.....	- 28 -
7.1 问题分析.....	- 28 -
7.2 渐变加加速度的简化运动模型.....	- 28 -
7.3 误差分析.....	- 30 -
8 模型的评价.....	- 30 -
8.1 模型的优点.....	- 30 -
8.2 模型的不足.....	- 30 -
9 结 论.....	- 31 -
9.1 本文的总结.....	- 31 -
9.2 未来的展望.....	- 31 -
参考文献.....	- 33 -

# 1 问题重述与分析

随着计算机技术的高速发展，传统的制造业开始了根本性变革，各工业发达国家投入巨资，对现代制造技术进行研究开发，提出了全新的制造模式。在现代制造系统中，数控技术是关键技术，具有高精度、高效率、柔性自动化等特点，对制造业实现柔性自动化、集成化、智能化起着举足轻重的作用。

数控编程首先通过计算机组成的数控编程系统对读入的零件信息进行存储和译码等处理后通过输入装置将它们传输给加工控制系统，然后由数控系统对输入的指令进行信息处理和轨迹插补计算出数控机床各坐标轴方向上刀具运动的控制信息，进而通过机床驱动以及机床运动将刀具在各坐标轴方向上的运动合成为刀具实际加工轨迹和速度控制，加工出所需的工件。

加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，因此加工刀具的运动轨迹一般与工件几何形状之间肯定存在误差；每一机床都有对应的分辨率，加工刀具的运动方向受限制，并影响到加工刀具的速度、加速度；要求机床运动平稳，速度光滑、加速度连续等。

加工刀具运动的优化控制则是在数控机床所提供的精度、速度、加速度等限制条件下，寻求对机床刀具在各坐标轴方向上的运动进行合理控制，进而优化其加工效率。而对于一般曲线加工，加工控制算法就是在满足误差要求的条件下，通过插补的方法，找出若干小直线段组成加工刀具的运动轨迹，同时计算出刀具对应的运动速度、加速度。

在数控加工过程中，待加工零件的轮廓轨迹多种多样，很多加工场合零件加工程序都由多个程序段组成，每个程序段包含一段直线或者一段圆弧。插补是整个数控系统软件中一个极其重要的功能模块之一，其算法的选择将直接影响到系统的精度、速度及加工能力等。所谓插补，就是指数据密化的过程。在对数控系统输入有限坐标点（例如起点、终点）的情况下，计算机根据线段的特征（直线、圆弧、椭圆等），运用一定的算法，自动地在有限坐标点之间生成一系列的坐标数据，即所谓数据密化，从而自动地在多个坐标轴进行脉冲分配，完成整个线段的轨迹运行，以满足加工精度的要求<sup>[1]</sup>。

在深入研究数控加工优化控制的基础上，完成以下工作：

1、设加工型线为折线，在指定加工误差（指在加工型线的法线方向上加工型线与刀具实际轨迹的差值的最大值）的条件下，建立实时加工优化控制算法，当相邻两折线段夹角为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  时，讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化；

2、设加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；并应用所建立的模

型对下面的加工路径示例进行检验；

3、在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

4、结合前 3 问，分析  $S$  型曲线的加减速控制方法的优缺点，在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型（如刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等）。

## 2 模型假设

1. 假设刀具在插补过程中，只考虑刀具方向，刀具本身大小不计；
2. 假设刀具插补时按直线行进，在微观层面上不考虑加减速；
3. 假设  $S$  型曲线的速度问题在宏观上有效，微观上的插补只做误差分析；
4. 假设插补方案不影响计算  $S$  型曲线的速度问题计算时；
5. 渐变加加速度的增加斜率是由机床自身固有属性决定的，即不可以任意改变其大小。

## 3 符号定义

符号	定义
$T_i (i=1,2,\dots,7)$	$S$ 型曲线 7 个时间段
$V_{oi} (i=1,2,\dots,7)$	$S$ 型曲线 7 个时间段的末速度
$S_{oi} (i=1,2,\dots,7)$	$S$ 型曲线 7 个时间段的位移
$J$	加加速度
$A_m$	加速度最大值
$V_m$	速度最大值
$A_0$	瞬时启动加速度
$V_s$	起始速度和终止速度的最小值
$V_e$	起始速度和终止速度的最大值
$\theta$	转折点夹角

## 4 基于折线光滑转接的实时加工优化控制算法

### 4.1 问题分析

加工刀具运动的优化控制则是在数控机床所提供的精度、速度、加速度等限制条件下，寻求对机床刀具在各坐标轴方向上的运动进行合理控制，进而优化其加工效率。为了得到更好的实时加工得优化控制，本章主要讨论**基于S型曲线的加减速控制方法和光滑转接控制算法**。

由于数控机床对加工刀具在坐标轴方向的运动实行的是分别控制，加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，每一机床都有对应的分辨率，故加工刀具的运动方向受限制，并影响到加工刀具在三个坐标轴方向上的速度、加速度。这里只讨论二维情况下的刀具运动，刀具的真实路径是由  $X$  和  $Y$  两个方向而决定的。

加工型线是指设计的曲线或直线，而刀具实际轨迹只能是由一系列直线段组成，是加工型线的近似，有一定的误差。

在问题一中，设加工型线为折线，在指定加工误差的条件下，相邻两折线段夹角分别为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  时，讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化。目的在于在误差控制条件及其他要求条件下，使加工时间最短。

### 4.2 改进的逐点比较插补法

刀具实际轨迹只能是由一系列直线段组成，是加工型线的近似，有一定的误差。由于数控机床对加工刀具在坐标轴方向的运动实行的是分别控制，加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，每一机床都有对应的分辨率，任一直线段在水平面上对应的坐标增量记为  $\Delta x, \Delta y$ ，则  $\Delta x, \Delta y$  的长度一定都是分辨率的整数倍，故加工刀具的运动方向受限制，并影响到加工刀具在三个坐标轴方向上的速度、加速度。

数控加工是提前将加工路径、到达时间及对应的运动速度先统一算出后，刀头才开始加工，算法的计算量大小对加工优化的影响不是很大，因此这里重点是对加工轨迹优化及对应的速度控制。

为了更好的设计控制刀具的方案、提高精度，需要对其进行插补运算。

首先采用的方法是**逐点比较法插补**，见图 4.1。

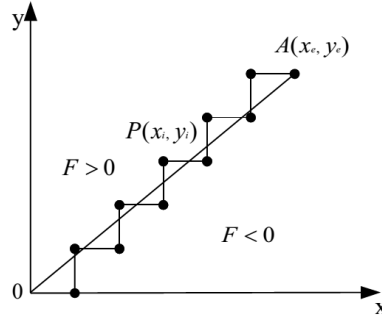


图 4.1 逐点比较法直线插补图

这里以逐点比较法的直线插补过程为例，每走一步要进行以下四个节拍，即判别、进给、运算、终点比较<sup>[2]</sup>：

- (1) 判别。根据偏差值确定刀具与直线的位置关系；
- (2) 进给。根据判别结果，决定  $X$  或  $Y$  移动一步，并计算是否超过指定加工误差；
- (3) 运算。计算出刀具移动的新偏差；
- (4) 终点比较。

偏差判别函数  $F_{ij}$  为

$$F_{ij} = x_e y_j - x_i y_e$$

由  $F_{ij}$  的数值（即偏差）就可以判别出  $P$  点与直线的相对位置。即：

当  $F_{ij} = 0$  时，点  $P(x_i, y_i)$  正好落在直线上；

当  $F_{ij} > 0$  时，点  $P(x_i, y_i)$  落在直线的上方；

当  $F_{ij} < 0$  时，点  $P(x_i, y_i)$  落在直线下方。

当刀具由当前点  $(x_i, y_i)$  向  $x$  方向前进一步，到达新加工点  $P(x_{i+1}, y_i)$  时，则

$$F_{i+1,j} = x_e y_j - x_{i+1} y_e = x_e y_j - x_i y_e - y_e = F_{ij} - y_e$$

当刀具由当前点  $(x_i, y_i)$  向  $y$  方向前进一步，到达新加工点  $P(x_i, y_{i+1})$  时，则

$$F_{i,j+1} = x_e y_{j+1} - x_i y_e = x_e y_j - x_i y_e + x_e = F_{ij} + x_e$$

逐点比较法插补精度较高，为一个脉冲当量，改进型的精度能提高到半个脉冲当量，对于本题目而言，逐点比较插补法选取的各个点不会超出误差  $\varepsilon = 1\mu m$  的范围。

问题一考虑的是两条直线所相接成的折线段问题，因此定义**逐点比较插补法**终点为折线交点最近的一个点，再以这个终点为起点，对另一条直线进行插补计算，从而得到**相邻两折线段**的插补计算方法<sup>[3]</sup>。

由于刀具行进的下一个点不一定是上下左右四个点，还可以是左上、右上、左下、右下，对判断行进方向的依据也加以优化。因此这里提出**改进的逐点比较**



插补法。

加加速度是分段定值是  $S$  型曲线控制的条件，为了保证相对平稳，需要考虑加加速度连续性，因此在保证精度的前提下，转折的次数越少越好<sup>[4]</sup>。

图 4.2 中的红色部分为改进后的路径。

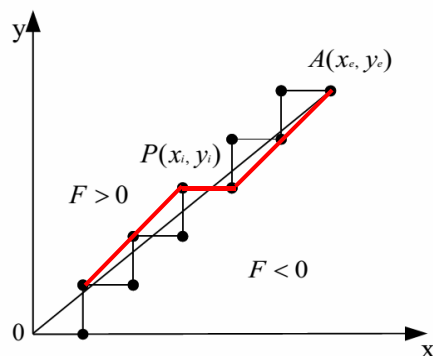


图 4.2 改进逐点比较法直线插补图

下面就改进的逐点比较插补法进行说明。

(1) 首先，根据逐点比较插补法计算路径，获得通过的所有点的集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。

(2) 从起始点起判断周围 8 个方向的 8 个点中属于集合  $V$  的点的个数。

(3) 若只有 1 个，则这个点作为刀具的下一个目标点。以此目标点为基准，判断周围 7 个方向的 7 个点中属于集合  $V$  的点的个数。

(4) 若有 2 个，则比较这两个点到直线的距离，选取距离小的作为刀具的下一个目标点。以此目标点为基准，判断周围 6 个方向的 6 个点中属于集合  $V$  的点的个数（另外 2 个点）。

(5) 以此类推，直到到达终点。

### 4.3 基于 $S$ 型曲线的加减速控制方法

加工型线是指设计的曲线或直线，根据问题一要求， $AO$  与  $OB$  是相邻两折线段，见图 4.3。

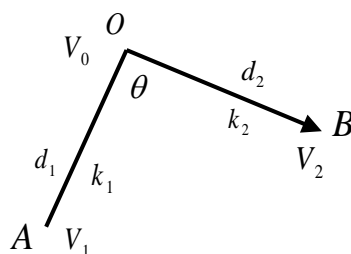


图 4.3 加工型线示意图

其中， $d_1$ 、 $d_2$  为前后两直线的长度， $k_1$ 、 $k_2$  为前后两直线的斜率， $\theta$  为折线交

点的角度。

接下来计算刀具运动路径上的运动速度的变化。

这里采用S型曲线的加减速控制方法作为单个坐标运动的控制方法，将加减速过程分为7个阶段，以保证速度光顺，加速度连续，在一定程度上增强机床运行的平稳性<sup>[5]</sup>。

图 4.4 为刀具沿着加工型曲线切割时所采用的S型曲线（或者S型曲线的一部分）。

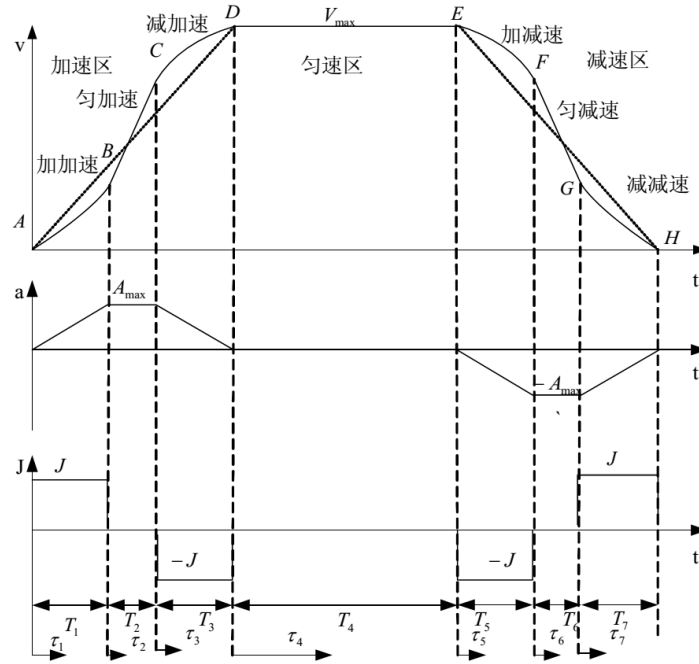


图 4.4 S 型曲线加减速运动描述

其中， $T_1$ 为加加速区时间， $T_2$ 为匀加速区时间， $T_3$ 为减加速区时间， $T_4$ 为匀速区时间， $T_5$ 为加减速区时间， $T_6$ 为匀减速区时间， $T_7$ 为减减速区时间。

$$S(t) = \begin{cases} V_s \tau + J \tau^3 / 6 & 0 \leq t < t_1 (\tau = t) \\ S_{01} + V_{01} \tau_2 + J T_1 \tau_2^2 / 2 & t_1 \leq t < t_2 (\tau_2 = t - t_1) \\ S_{02} + V_{02} \tau_3 + J T_1 \tau_3^2 / 2 - J \tau_3^3 / 6 & t_2 \leq t < t_3 (\tau_3 = t - t_2) \\ S_{03} + V_{03} \tau_4 & t_3 \leq t < t_4 (\tau_4 = t - t_3) \\ S_{04} + V_{04} \tau_5 - J \tau_5^3 / 6 & t_4 \leq t < t_5 (\tau_5 = t - t_4) \\ S_{05} + V_{05} \tau_6 - J T_5 \tau_6^2 / 2 & t_5 \leq t < t_6 (\tau_6 = t - t_5) \\ S_{06} + V_{06} \tau_7 - J T_5 \tau_7^2 / 2 + J \tau_7^3 / 6 & t_6 \leq t < t_7 (\tau_7 = t - t_6) \end{cases}$$

其中  $V_{01} = V_s + J T_1^2 / 2$ ， $V_{02} = V_{01} + J T_1 T_2$ ， $V_{03} = V_{02} + J T_1 T_3 - J T_3^2 / 2$ ， $V_{04} = V_{03}$ ， $V_{05} = V_{04} - J T_5^2 / 2$ ， $V_{06} = V_{05} - J T_5 T_6$ ， $V_{07} = V_{06} - T_5 T_7 J + J T_7^2 / 2$ 。

则位移  $S$  计算公式通用形式如下：

$$S_{01} = V_s T_1 + J T_1^3 / 6$$

$$\begin{aligned}
S_{02} &= S_{01} + V_{01}T_2 + JT_1T_2^2/2 \\
S_{03} &= S_{02} + V_{02}T_3 + JT_1T_3^2/2 - JT_3^3/6 \\
S_{04} &= S_{03} + V_{03}T_4 \\
S_{05} &= S_{04} + V_{04}T_5 - JT_5^3/6 \\
S_{06} &= S_{05} + V_{05}T_6 - JT_5T_6^2/2
\end{aligned}$$

下面对 S 型曲线加减速规律进行具体计算

如图 3 所示, 设起点速度为  $V_1$ , 终点速度为  $V_0$ , 直线段长度为  $d$ , 则在这个加工段内, 用 S 型加减速规律实现的加减速计算过程如下文。

令  $V_s = \min[V_1, V_0]$ ,  $V_e = \max[V_1, V_0]$ ,  $S = d$ , 加加速度为  $J$ , 最大加速度为  $A_{\max}$ 。

$$\text{令 } \Delta V = A_{\max}^2/J, \quad AV_1 = (V_{\max} + V_s)/2, \quad AV_2 = (V_{\max} + V_e)/2$$

若  $V_{\max} - V_s \geq \Delta V$ , 有匀加速区

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_3 = A_{\max}/J \\
T_2 &= (V_{\max} - V_s)/A_{\max} - A_{\max}/J
\end{aligned}$$

若  $V_{\max} - V_s < \Delta V$ , 无匀加速区

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_{\max} - V_s)/J}/2 \\
T_2 &= 0
\end{aligned}$$

若  $V_{\max} - V_e \geq \Delta V$ , 有匀减速区

$$\begin{aligned}
T_5 &= T_7 = A_{\max}/J \\
T_6 &= (V_{\max} - V_e)/A_{\max} - A_{\max}/J
\end{aligned}$$

若  $V_{\max} - V_e < \Delta V$ , 无匀减速区

$$\begin{aligned}
T_5 &= T_7 = \sqrt{(V_{\max} - V_e)/J}/2 \\
T_6 &= 0
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
S_1 &= AV_1 \times (T_1 + T_2 + T_3) \\
S_2 &= AV_2 \times (T_5 + T_6 + T_7) \\
T_4 &= (S - S_1 - S_2)/V_{\max}
\end{aligned}$$

在一个加工段内, 段内加减速可分为如下两种情况<sup>[6]</sup>:

- 1、 $T_4 \geq 0$ , 速度能达到  $V_{\max}$ ;
- 2、 $T_4 < 0$ , 速度不能达到  $V_{\max}$ , 又分为两种情况:
  - (1) 单边, 由于  $V_s < V_e$ , 单边包括只有加速区和同时有加速区和匀速区两种情况;

(2) 双边，有三种情况：

- a) 同时有加速区和减速区，但没有匀加速区和匀减速区；
- b) 同时有加速区和减速区，有匀加速区，但没有匀减速区；
- c) 有完整的加速区和减速区。

下面进行判断，若  $V_e - V_s \geq \Delta V$ ，则  $t = (V_e - V_s) / A_{\max} - A_{\max} / J$ ；若  $V_e - V_s < \Delta V$ ，则  $t = \sqrt{(V_e - V_s) / J}$ ，令  $S_t = (V_s + V_e)t / 2$ 。

(1) 若  $S \leq S_t$ ，则为单边情况，且无匀速区；

若  $V_e - V_s \geq \Delta V$ ，有匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = A_{\max} / J \\ T_2 &= (V_e - V_s) / A_{\max} - A_{\max} / J \\ T_4 &= T_5 = T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

若  $V_e - V_s < \Delta V$ ，无匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_e - V_s) / J} / 2 \\ T_2 &= T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

(2) 若  $S > S_t$

a) 若  $V_e = V_{\max}$ ，则为单边情况，有匀速区；

若  $V_e - V_s \geq \Delta V$ ，有匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = A_{\max} / J \\ T_2 &= (V_e - V_s) / A_{\max} - A_{\max} / J \\ T_4 &= \left( S - \frac{(V_s + V_e)(T_1 + T_2 + T_3)}{2} \right) / V_e \\ T_5 &= T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

若  $V_e - V_s < \Delta V$ ，无匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_e - V_s) / J} / 2 \\ T_4 &= \left( S - \frac{(V_s + V_e)(T_1 + T_3)}{2} \right) / V_e \\ T_2 &= T_5 = T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

b) 若  $V_e < V_{\max}$ ，则为双边情况。

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{(V_{\max} - V_s) / J}, \quad t_2 = \sqrt{(V_{\max} - V_e) / J} \\ t_3 &= (V_{\max} - V_s) / A_{\max} - A_{\max} / J \\ t_4 &= (V_{\max} - V_e) / A_{\max} - A_{\max} / J \end{aligned}$$

则

$$S_1 = AV_1 \times t_1 + AV_2 \times t_2$$

$$S_2 = AV_1 \times t_3 + AV_2 \times t_2$$

$$S_3 = AV_1 \times t_3 + AV_2 \times t_4$$

若  $S < S_1$ ，同时有加速区和减速区，但没有匀加速区和匀减速区。

令  $V_l = V_e$ ， $V_h = V_e + \Delta V$ ，用二分法求出所能达到的最大速度  $V_m$

$$T_1 = T_3 = \sqrt{(V_m - V_s)/J}$$

$$T_5 = T_7 = \sqrt{(V_m - V_e)/J}$$

$$T_4 = \left( S - 2 \times AV_1 \times \sqrt{(V_m - V_s)/J} - 2 \times AV_2 \times \sqrt{(V_m - V_e)/J} \right) / V_m$$

$$T_2 = T_6 = 0$$

若  $S < S_2$ ，同时有加速区和减速区，有匀加速区，但没有匀减速区。

令  $V_l = V_s + \Delta V$ ， $V_h = V_e + \Delta V$ ，用二分法求出所能达到的最大速度  $V_m$

$$T_1 = T_3 = A_{\max} / J$$

$$T_2 = (V_m - V_s - \Delta V) / A_{\max}$$

$$T_5 = T_7 = \sqrt{(V_m - V_e)/J} / 2$$

$$T_4 = \left( S - AV_1 \times ((V_m - V_s) / A_{\max} - A_{\max} / J) - AV_2 \times \sqrt{(V_m - V_e)/J} \right) / V_m$$

$$T_6 = 0$$

若  $S < S_3$ ，同时有加速区和减速区，有匀加速和匀减速区。

令  $V_l = V_s + \Delta V$ ， $V_h = V_e + \Delta V$ ，用二分法求出所能达到的最大速度  $V_m$

$$T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = A_{\max} / J$$

$$T_2 = (V_m - V_s - \Delta V) / A_{\max}$$

$$T_6 = (V_m - V_e - \Delta V) / A_{\max}$$

$$T_4 = \left( S - AV_1 \times ((V_m - V_s) / A_{\max} - A_{\max} / J) - AV_2 \times ((V_m - V_e) / A_{\max} - A_{\max} / J) \right) / V_m$$

若  $V_1 \leq V_0$ ， $T_1$  到  $T_7$  即为所求，反之  $T_1$  与  $T_5$  互换， $T_3$  与  $T_7$  互换， $T_2$  与  $T_6$  互换。

路程的分段运动情况相关数据均已得出，可以根据不同情况区分  $S$  型曲线的类型，进而得到最优的控制方案。

#### 4.4 光滑转接控制算法

在问题一中，加工型线为折线，由两条直线段所构成，其夹角为  $\theta$ ，如图 4.5 所示。

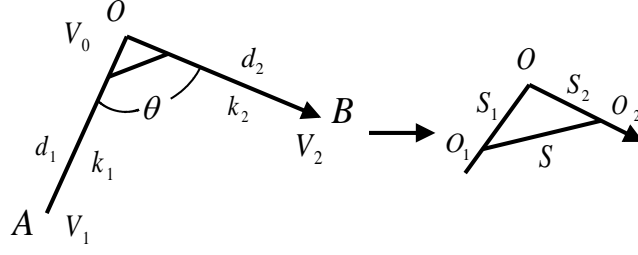


图 4.5 光滑转接示意图

$AO$ 段和 $OB$ 段理论上讲经过 $O$ 点转接，若不在 $AO$ 段减速到 $0$ ，而以速度 $V_0$ 转接，在转接过程中，经过 $S$ 时的速度视为匀速，速度大小为 $V_0$ ，且会使当前点 $O_1$ 与转节点 $O$ 的距离 $S_1$ 小于转接速度 $V_0$ 在一个插补周期 $T$ 内的位移 $S = V_0 T$ 。即如果继续在当前段插补下一步，下一插补点将超过终点 $O_2$ ，因此需在线段 $OB$ 上计算实际转节点 $O_2$  [7]。

设点 $O_1$ 的坐标为 $O_1(x_1, y_1)$ ， $O$ 的坐标为 $O(x_0, y_0)$ ， $O_2$ 的坐标为 $O_2(x_2, y_2)$ ， $B$ 的坐标为 $B(x_3, y_3)$ ，若 $OB$ 不是水平或者竖直线段，则转节点的横纵坐标应满足以下条件

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = S^2 \\ \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = k \\ (x_2 - x_0)(x_2 - x_3) < 0 \end{cases}$$

其中 $k$ 为 $OB$ 的斜率。

可以解得 $O_2$ 点的坐标。

特别的，若 $OB$ 为水平线段，则有

$$\begin{cases} y_2 = y_0 \\ x_2 = x_1 \pm \frac{S}{y_2 - y_1} \\ (x_2 - x_0)(x_2 - x_3) < 0 \end{cases}$$

若 $OB$ 为竖直线段，则有

$$\begin{cases} x_2 = x_0 \\ y_2 = y_1 \pm \frac{S}{x_2 - x_1} \\ (y_2 - y_0)(y_2 - y_3) < 0 \end{cases}$$

确定 $O_2(x_2, y_2)$ 后，以 $O_2$ 为直线段 $OB$ 的起点进行下一段直线插补。

下面分析 $\theta$ 分别为 $90^\circ$ 和 $135^\circ$ 时，折线交点对应的速递变化。

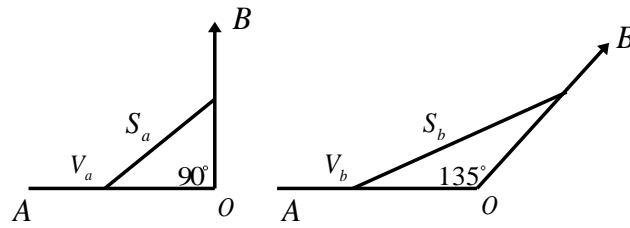


图 4.6 不同角度下光滑转接示意图

在经过  $AO$  时速度变化为  $S$  型曲线或  $S$  型曲线的一部分最终转接前的速度为  $V_a$  和  $V_b$ ，在等精度情况下（这里考虑偏离加工型线的程度作为精度评判的依据）， $S_b > S_a$ ，由于转接是在一个插补周期  $T$  内进行的，因此两者转接的时间相等，可以得出  $V_a < V_b$  [8]。

因此，当  $\theta$  分别为  $90^\circ$  时，通过转折点时速度的变化为：以  $S$  型曲线来减速直到速度为  $V_a$ ，再以  $V_a$  匀速行进一个插补周期  $T$  时间，再以  $S$  型曲线来加速。

当  $\theta$  分别为  $135^\circ$  时，通过转折点时速度的变化为：以  $S$  型曲线来减速直到速度为  $V_b$ ，再以  $V_b$  匀速行进一个插补周期  $T$  时间，再以  $S$  型曲线来加速。

根据  $V_a < V_b$ ，当  $\theta$  分别为  $135^\circ$  时刀具切割耗时更短。

#### 4.5 误差分析

对于实时加工控制的误差分为两种，分别是逐点比较的误差和光滑转接的误差。

##### 逐点比较插补法的误差分析

由于刀具的运动方向为竖直、水平、斜  $45^\circ$  三种情况，理想状况下直线段完全贴合这三种情况误差则最小，因此当直线的斜率为  $0$ ， $\pm 1$  或者不存在时误差最小，反之与之相差越大则误差越大 [9]。

##### 光滑转接控制算法的误差分析

在上述算法中，实际上牺牲了两段直线段的连接点  $O$  处的部分精度，该插补算法的主要理论误差在于两直线段的连接点  $O$  处的误差。如图 4.7 所示，假设相邻两直线段的夹角为  $\varphi$ ， $OO' = OO_2$ ，单位插补周期内所经过的位移为  $O_1O' = S$

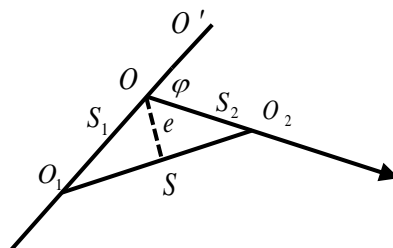


图 4.7 直线光滑转接控制路径示意图

根据正弦公式，三角形 $OO_1O_2$ 的面积为

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \sin \varphi$$

同时面积还可以表示为

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot S$$

所以

$$e = \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot \sin \varphi}{S}$$

根据余弦定理得

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos(\pi - \varphi)$$

即

$$S_2 = S_1 \cos(\pi - \varphi) + \sqrt{S_1^2 \cos^2(\pi - \varphi) - (S_1^2 - S^2)}$$

因此

$$e = \frac{S_1 \cdot \sin \varphi}{S} \left[ S_1 \cos(\pi - \varphi) + \sqrt{S_1^2 \cos^2(\pi - \varphi) - (S_1^2 - S^2)} \right]$$

在一个插补周期内进行转接，控制 $S_1/S$ 的不同进行不同角度的仿真，如图4.8所示。

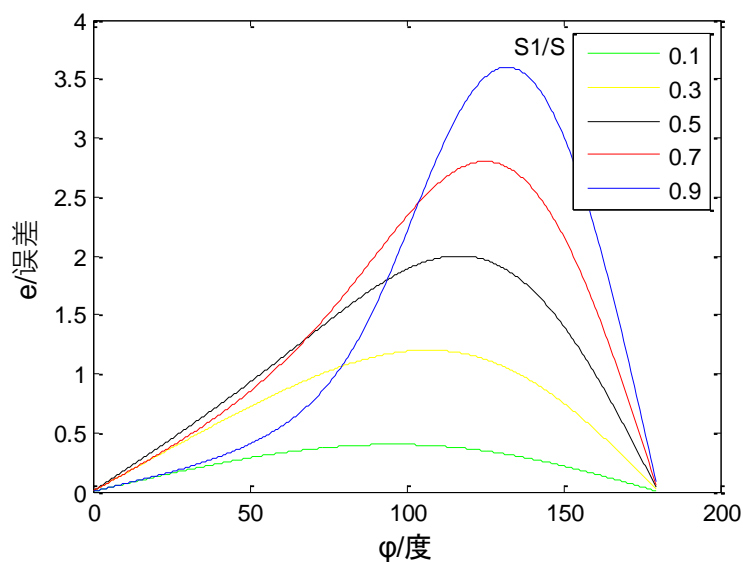


图 4.8 角度不同时的误差仿真图

随着 $\varphi$ 角度的增大，折线的夹角减小，可以看出，折线夹角越大则误差越小。



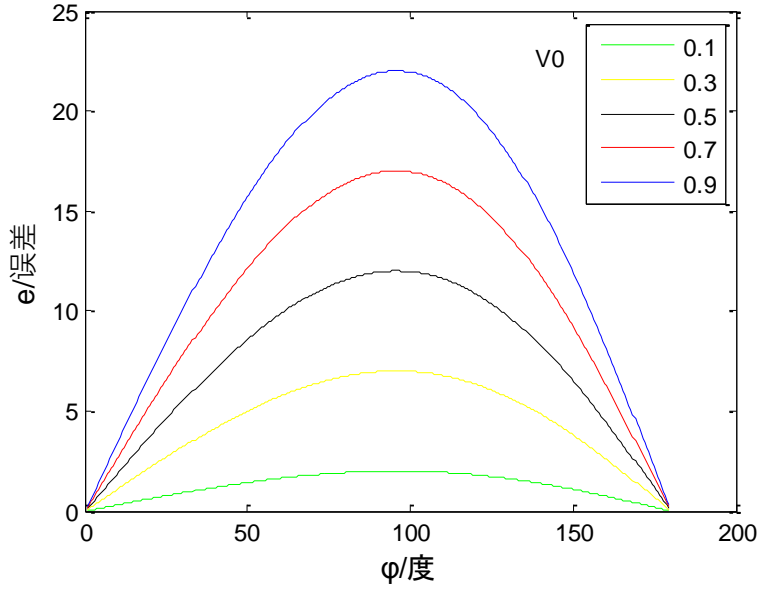


图 4.9 速度不同时的误差仿真图

如图 4.9 所示，对于不同速度，经过  $S$  距离耗费一个插补周期，速度越大， $S$  距离越长，因此误差  $e$  越大<sup>[10]</sup>。

通过上述的误差仿真也可以得出以下两点结论：

- 1) 当  $\theta$  分别为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  且  $S_l/S$  不变时， $\varphi$  值对应的  $90^\circ$  和  $45^\circ$ ，此时  $\theta$  为  $135^\circ$  时误差更小。
- 2) 当误差相等的情况下， $\theta$  为  $135^\circ$  时可以达到更大的速度。

## 5 简化条件下的曲线实时加工优化控制算法

### 5.1 问题分析

实时加工优化控制算法分为基于  $S$  型曲线的加减速控制方法和光滑转接控制算法。在本问题中，简化条件即不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度， $S$  型曲线加减速控制与 4.3 节一致。并对加工实例进行具体的计算与分析。

### 5.2 改进逐点比较法圆弧插补

逐点比较法的圆弧插补过程与直线插补过程大体相似。下面以第一象限圆弧为例导出其偏差计算公式<sup>[11]</sup>。

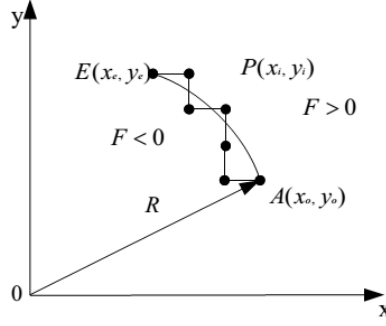


图 5.1 逐点比较法圆弧插补图

偏差判别函数  $F_{ij}$  为

$$F_{ij} = (x_i^2 - x_0^2) + (y_i^2 - y_0^2)$$

由  $F_{ij}$  的数值（即偏差）就可以判别出  $P$  点与圆弧的相对位置。即：

当  $F_{ij} = 0$  时，点  $P(x_i, y_i)$  正好落在圆弧上；

当  $F_{ij} > 0$  时，点  $P(x_i, y_i)$  落在圆弧的外侧；

当  $F_{ij} < 0$  时，点  $P(x_i, y_i)$  落在圆弧的内侧。

当刀具由当前点  $(x_i, y_i)$  向  $x$  负方向前进一步，到达新加工点  $P(x_{i+1}, y_i)$  时，  
则

$$F_{i+1,j} = (x_i - 1)^2 - x_0^2 + y_i^2 - y_0^2 = F_{ij} - 2x_i + 1$$

当刀具由当前点  $(x_i, y_i)$  向  $y$  方向前进一步，到达新加工点  $P(x_i, y_{i+1})$  时，则

$$F_{i,j+1} = x_i^2 - x_0^2 + (y_i + 1)^2 - y_0^2 = F_{ij} + 2y_i + 1$$

下面就改进的逐点比较圆弧插补法进行说明<sup>[12]</sup>。

(1) 首先，根据逐点比较圆弧插补法计算路径，获得通过的所有点的集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。

(2) 从起始点起判断周围 8 个方向的 8 个点中属于集合  $V$  的点的个数。

(3) 若只有 1 个，则这个点作为刀具的下一个目标点。以此目标点为基准，判断周围 7 个方向的 7 个点中属于集合  $V$  的点的个数。

(4) 若有 2 个，则比较这两个点到圆弧的法向距离，选取距离小的作为刀具的下一个目标点。以此目标点为基准，判断周围 6 个方向的 6 个点中属于集合  $V$  的点的个数（另外 2 个点）。

(5) 以此类推，直到到达终点。

### 5.3 曲线光滑转接控制算法

如图 5.2 所示，基于和 4.4 节中分析的同样的原因，需在圆弧上计算实际转接点  $O_2$ 。

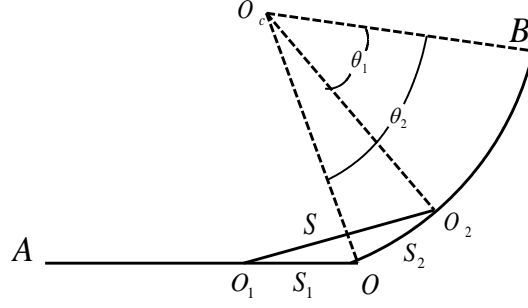


图 5.2 插补过程中当前段和圆弧段转接

设点  $O_1$  的坐标为  $O_1(x_1, y_1)$ ， $O$  的坐标为  $O(x_0, y_0)$ ， $O_2$  的坐标为  $O_2(x_2, y_2)$ ，。

转接点的横、纵坐标应满足以下条件

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = S^2 \\ (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 = R^2 \end{cases}$$

其中  $R$  为圆弧的半径，圆心  $O_c$  的坐标为  $(x_c, y_c)$ 。

解上面的二次方程组可得到  $O_2$  点坐标。由于是二次方程组求解，因此得到 2 组解，可根据  $O_2$  在圆弧上这一条件来确定唯一解。

确定  $O_2(x_2, y_2)$  后，以  $O_2$  为圆弧段的起点进行下一段圆弧插补<sup>[13]</sup>。

#### 5.4 圆弧半径的变化对算法效率的影响

下面以不同半径的圆弧为例，分析圆弧半径的变化对算法效率的影响

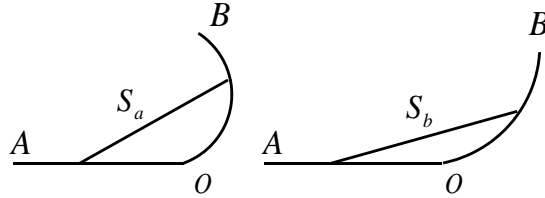


图 5.3 圆弧半径不同时转接示意图

这里设当半径变化时，圆弧在  $O$  点的切线与  $AO$  的夹角不变。

同理，在经过  $AO$  时速度变化为  $S$  型曲线或  $S$  型曲线的一部分最终转接前的速度设为  $V_a$  和  $V_b$ ，在等精度情况下（这里考虑偏离加工型线的程度作为精度评判的依据）， $S_b > S_a$ ，由于转接是在一个插补周期  $T$  内进行的，因此两者转接的时间相等，可以得出  $V_a < V_b$ 。

因此，当半径大时，曲率小，在相同条件下耗时更短，算法效率更高<sup>[14]</sup>。

#### 5.5 对加工示例的检验

对下面的问题中给出的加工路径示例进行检验。

为了得到最优的控制方案，在满足  $S$  型曲线的前提下，应使时间尽可能的缩

短，求得最短时间为

$$\min T = \sum_{i=1}^7 T_i$$

同样的，以节点 1 为起点，顺时针行进，由题意知，速度最大值  $V_m$  为  $1.26 \text{ m/min}$ ，加速度最大值  $A_{\max}$  为  $0.6 \text{ m/s}^2$ ，加加速度  $J$  为  $300 \text{ mm/s}^3$ ，由起始速度和终止速度的相等可知  $V_s = V_e = 0.13 \text{ m/s}$ ，总路程  $S$  为  $1.9371 \text{ m}$ ，经过节点 2 的速度大小不能超过  $0.19 \text{ m/s}$ 。

在求解上述问题时，需进行  $S$  型曲线的判别<sup>[15]</sup>：

- a) 同时有加速区和减速区，但没有匀加速区和匀减速区；
- b) 有完整的加速区和减速区。

由于起始与终止速度都为  $V_{se} = 0.13 \text{ m/s}$ ，当  $V_{\max} - V_{se} > A_{\max}^2 / J$  时，有完整的加速区和减速区，当  $V_{\max} - V_{se} \leq A_{\max}^2 / J$  时，没有匀加速区和匀减速区。

对于完整的  $S$  型曲线不同阶段的时间为

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = T_5 = T_7 = A_{\max} / J \\ T_2 &= (V_m - V_s - A_{\max}^2 / J) / A_{\max} \\ T_6 &= (V_m - V_e - A_{\max}^2 / J) / A_{\max} \\ T_4 &= (S - (V_m + V_{se}) \times ((V_m - V_{se}) / A_{\max} - A_{\max} / J)) / V_m \end{aligned}$$

对于不完整的  $S$  型曲线不同阶段的时间为

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_m - V_s) / J} \\ T_5 &= T_7 = \sqrt{(V_m - V_e) / J} \\ T_4 &= (S - 2 \times (V_m + V_{se}) \times \sqrt{(V_m - V_{se}) / J}) / V_m \\ T_2 &= T_6 = 0 \end{aligned}$$

则把加工路径优化控制的问题归结为一个约束问题，即求如下非线性规划问题的最优解

$$\begin{aligned} \min T &= \sum_{i=1}^7 T_i \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 0.13 \leq V_m \leq 1.26 \\ 0 < A_{\max} \leq 0.6 \\ V_{\text{sec}} \leq 0.19 \end{cases} \end{aligned}$$

其中， $V_{\text{sec}}$  是第一次经过节点 2 时的速度大小， $V_{\text{sec}}$  可以通过 4.3 节求得，根据  $V_m$  和  $A_{\max}$  的不同，第一次经过节点 2 时的速度可能会在  $S$  型曲线的前四段任意一段， $T_i (i=1, 2, \dots, 7)$  为  $S$  型曲线的 7 个阶段时间。

通过 MATLAB 进行编程计算，求得最大速度  $V_m$ 、最大加速度  $A_{\max}$  和总时间  $T$  分别为

$$\begin{cases} V_m = 1.26 \text{ m/min} \\ A_{\max} = 0.0752 \text{ m/s}^2 \\ T = 91.7090 \text{ s} \end{cases}$$

此时得到 7 个阶段的位置、时间和末速度为

表 5.1 加工示例优化控制的相关数据

$S_{01}$	$S_{02}$	$S_{03}$	$S_{04}$	$S_{05}$	$S_{06}$	$S_{07}$
0.0013	0.0013	0.0058	1.9106	1.9151	1.9151	1.9165
$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$
0.2506	0	0.2506	90.7068	0.2506	0	0.2506
$V_{01}$	$V_{02}$	$V_{03}$	$V_{04}$	$V_{05}$	$V_{06}$	$V_{07}$
0.0116	0.0116	0.0210	0.0210	0.0116	0.0116	0

对应的速度变化曲线见图 5.4

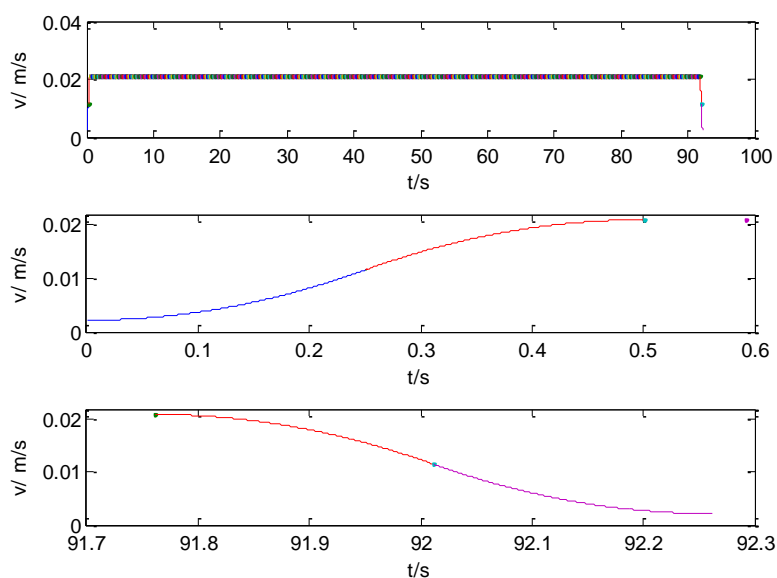


图 5.4 加工示例的速度变化曲线图

图 5.4 中，第一幅为总的 S 型曲线，第二幅为加速阶段的放大图，第三幅为减速阶段的速度放大图。

## 5.6 误差分析

### 逐点比较插补法的误差分析

逐点比较插补法的误差对于折线和曲线相接的情况而言，直线部分与第 4.5

节一致，圆弧部分的插补和直线部分实际上都是在走短线，只是两种方式插补过程中的步进距离和速度有差异，到终点的精确度都是一样的<sup>[16]</sup>。

### 光滑转接控制算法的误差分析

针对圆弧插补的误差分析和第 4.5 节一致，转接示意图见图 5.4

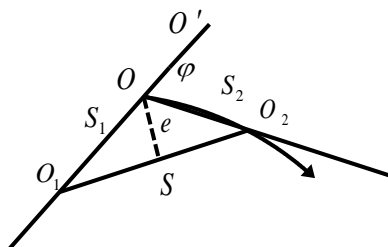


图 5.4 曲线光滑转接控制路径示意图

可以将曲率变化看做  $\varphi$  的角度变化，其他条件不变的情况下，曲率越大  $\varphi$  越大，可以得出一致的结论<sup>[17]</sup>：

- 1) 半径越小，曲率越大，则误差越小。
- 2) 对于不同速度，经过  $S$  距离耗费一个插补周期，速度越大， $S$  距离越长，因此误差  $e$  越大。

## 6 实际条件下的曲线实时加工优化控制算法

### 6.1 问题分析

本问题是在在第 2 问基础上，实际条件即考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，完善第五章中的实时加工优化控制算法，对加工路径示进行检验。需要对  $S$  型曲线的推导进行相应的调整，并与第 5.5 节的结果进行比较。

### 6.2 实际条件下的 S 型曲线的加减速控制方法

由于存在瞬时启动加速度及瞬时启动速度，原模型需要进行相应的完善，对于新的  $S$  型曲线的加减速运动描述见图 6.1。

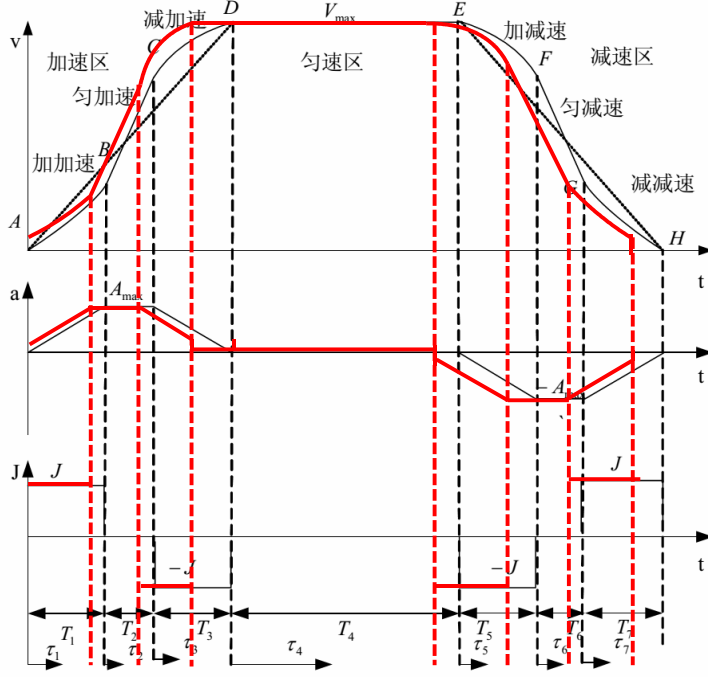


图 6.1 改进 S 型曲线加减速运动描述

其中，红色的为考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度后的 S 型曲线， $T_1$  为加加速区时间， $T_2$  为匀加速区时间， $T_3$  为减加速区时间， $T_4$  为匀速区时间， $T_5$  为加减速区时间， $T_6$  为匀减速区时间， $T_7$  为减减速区时间。

在第 4.3 节中的 S 型曲线控制方法中已经考虑了起点速度和终点速度不为 0 的情况，这里主要针对瞬时启动加速度的问题进行控制算法的修正。

$$S(t) = \begin{cases} V_s \tau + A_0 \tau^2 / 2 + J \tau^3 / 6 & 0 \leq t < t_1 (\tau_1 = t) \\ S_{01} + V_{01} \tau_2 + (A_0 + J T_1) \tau_2^2 / 2 & t_1 \leq t < t_2 (\tau_2 = t - t_1) \\ S_{02} + V_{02} \tau_3 + (A_0 + J T_1) \tau_3^2 / 2 - J \tau_3^3 / 6 & t_2 \leq t < t_3 (\tau_3 = t - t_2) \\ S_{03} + V_{03} \tau_4 & t_3 \leq t < t_4 (\tau_4 = t - t_3) \\ S_{04} + V_{04} \tau_5 - A_0 T_5^2 / 2 - J \tau_5^3 / 6 & t_4 \leq t < t_5 (\tau_5 = t - t_4) \\ S_{05} + V_{05} \tau_6 - (A_0 + J T_5) \tau_6^2 / 2 & t_5 \leq t < t_6 (\tau_6 = t - t_5) \\ S_{06} + V_{06} \tau_7 - (A_0 + J T_5) \tau_7^2 / 2 + J \tau_7^3 / 6 & t_6 \leq t < t_7 (\tau_7 = t - t_6) \end{cases}$$

与 4.3 节中的 S 型曲线控制方法相比，位移  $S$  计算公式通用形式不变，主要不同在于 7 个时间段的各节点速度变为

$$\begin{aligned} V_{01} &= V_s + A_0 T_1 + J T_1^2 / 2 \\ V_{02} &= V_{01} + (A_0 + J T_1) T_2 \\ V_{03} &= V_{02} + (A_0 + J T_1) T_3 - J T_3^2 / 2 \\ V_{04} &= V_{03} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{05} &= V_{04} - A_0 T_5 - J T_5^2 / 2 \\
V_{06} &= V_{05} - (A_0 + J T_5) T_6 \\
V_{07} &= V_{06} - (A_0 + J T_5) T_7 + J T_7^2 / 2
\end{aligned}$$

其中  $A_0$  为瞬时启动加速度。

同样的，设起点速度为  $V_1$ ，终点速度为  $V_0$ ，直线段长度为  $d$ ，则在这个加工段内，用  $S$  型加减速规律实现的加减速计算过程如下文<sup>[18]</sup>。

令  $V_s = \min[V_1, V_0]$ ， $V_e = \max[V_1, V_0]$ ， $S = d$ ，加加速度为  $J$ ，最大加速度为  $A_{\max}$ 。

$$\text{令 } \Delta V = (A_{\max}^2 - A_0^2) / J, \quad AV_1 = (V_{\max} + V_s) / 2, \quad AV_2 = (V_{\max} + V_e) / 2$$

若  $V_{\max} - V_s \geq \Delta V$ ，有匀加速区

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_3 = (A_{\max} - A_0) / J \\
T_2 &= (V_{\max} - V_s) / A_{\max} - (A_{\max} - A_0) / J
\end{aligned}$$

若  $V_{\max} - V_s < \Delta V$ ，无匀加速区

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_{\max} - V_s) / J} / 2 \\
T_2 &= 0
\end{aligned}$$

若  $V_{\max} - V_e \geq \Delta V$ ，有匀减速区

$$\begin{aligned}
T_5 &= T_7 = (A_{\max} - A_0) / J \\
T_6 &= (V_{\max} - V_e) / A_{\max} - (A_{\max} - A_0) / J
\end{aligned}$$

若  $V_{\max} - V_e < \Delta V$ ，无匀减速区

$$\begin{aligned}
T_5 &= T_7 = \sqrt{(V_{\max} - V_e) / J} / 2 \\
T_6 &= 0
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
S_1 &= AV_1 \times (T_1 + T_2 + T_3) \\
S_2 &= AV_2 \times (T_5 + T_6 + T_7) \\
T_4 &= (S - S_1 - S_2) / V_{\max}
\end{aligned}$$

在一个加工段内，段内加减速可分为如下两种情况<sup>[19]</sup>：

- 1、 $T_4 \geq 0$ ，速度能达到  $V_{\max}$ ；
- 2、 $T_4 < 0$ ，速度不能达到  $V_{\max}$ ，又分为两种情况：
  - (1) 单边，由于  $V_s < V_e$ ，单边包括只有加速区和同时有加速区和匀速区两种情况；
  - (2) 双边，有三种情况：
    - a) 同时有加速区和减速区，但没有匀加速区和匀减速区；



b) 同时有加速区和减速区，有匀加速区，但没有匀减速区；

c) 有完整的加速区和减速区。

下面进行判断，若  $V_e - V_s \geq \Delta V$ ，则  $t = (V_e - V_s)/A_{\max} + (A_{\max} - A_0)/J$ ；若  $V_e - V_s < \Delta V$ ，则  $t = \sqrt{(V_e - V_s)/J}$ ，令  $S_t = (V_s + V_e)t/2$ 。

(1) 若  $S \leq S_t$ ，则为单边情况，且无匀速区；

若  $V_e - V_s \geq \Delta V$ ，有匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = (A_{\max} - A_0)/J \\ T_2 &= (V_e - V_s)/A_{\max} - (A_{\max} - A_0)/J \\ T_4 &= T_5 = T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

若  $V_e - V_s < \Delta V$ ，无匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_e - V_s)/J}/2 \\ T_2 &= T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

(2) 若  $S > S_t$

a) 若  $V_e = V_{\max}$ ，则为单边情况，有匀速区；

若  $V_e - V_s \geq \Delta V$ ，有匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = (A_{\max} - A_0)/J \\ T_2 &= (V_e - V_s)/A_{\max} - (A_{\max} - A_0)/J \\ T_4 &= \left( S - \frac{(V_s + V_e)(T_1 + T_2 + T_3)}{2} \right) / V_e \\ T_5 &= T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

若  $V_e - V_s < \Delta V$ ，无匀加速区

$$\begin{aligned} T_1 &= T_3 = \sqrt{(V_e - V_s)/J}/2 \\ T_4 &= \left( S - \frac{(V_s + V_e)(T_1 + T_3)}{2} \right) / V_e \\ T_2 &= T_5 = T_6 = T_7 = 0 \end{aligned}$$

b) 若  $V_e < V_{\max}$ ，则为双边情况。

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{(V_{\max} - V_s)/J}, \quad t_2 = \sqrt{(V_{\max} - V_e)/J} \\ t_3 &= (V_{\max} - V_s)/A_{\max} - (A_{\max} - A_0)/J \\ t_4 &= (V_{\max} - V_e)/A_{\max} - (A_{\max} - A_0)/J \end{aligned}$$

则

$$S_1 = AV_1 \times t_1 + AV_2 \times t_2$$

$$S_2 = AV_1 \times t_3 + AV_2 \times t_2$$

$$S_3 = AV_1 \times t_3 + AV_2 \times t_4$$

若  $S < S_1$ ，同时有加速区和减速区，但没有匀加速区和匀减速区。

令  $V_l = V_e$ ， $V_h = V_e + \Delta V$ ，用二分法求出所能达到的最大速度  $V_m$

$$T_1 = T_3 = \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + 4J(V_m - V_s)}}{2J}$$

$$T_5 = T_7 = \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + 4J(V_m - V_e)}}{2J}$$

$$T_4 = \left( S - 2 \times AV_1 \times \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + 4J(V_m - V_s)}}{2J} - 2 \times AV_2 \times \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + 4J(V_m - V_e)}}{2J} \right) / V_m$$

$$T_2 = T_6 = 0$$

若  $S < S_2$ ，同时有加速区和减速区，有匀加速区，但没有匀减速区。

令  $V_l = V_s + \Delta V$ ， $V_h = V_e + \Delta V$ ，用二分法求出所能达到的最大速度  $V_m$

$$T_1 = T_3 = (A_{\max} - A_0) / J$$

$$T_2 = (V_m - V_s - \Delta V) / A_{\max}$$

$$T_5 = T_7 = \sqrt{(V_m - V_e) / J} / 2$$

$$T_4 = \left( S - AV_1 \times ((V_m - V_s) / A_{\max} - (A_{\max} - A_0) / J) - AV_2 \times \sqrt{(V_m - V_e) / J} \right) / V_m$$

$$T_6 = 0$$

若  $S < S_3$ ，同时有加速区和减速区，有匀加速和匀减速区。

令  $V_l = V_s + \Delta V$ ， $V_h = V_e + \Delta V$ ，用二分法求出所能达到的最大速度  $V_m$

$$T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = (A_{\max} - A_0) / J$$

$$T_2 = (V_m - V_s - \Delta V) / A_{\max}$$

$$T_6 = (V_m - V_e - \Delta V) / A_{\max}$$

$$T_4 = \left( S - AV_1 \times ((V_m - V_s) / A_{\max} - (A_{\max} - A_0) / J) - AV_2 \times ((V_m - V_e) / A_{\max} - (A_{\max} - A_0) / J) \right) / V_m$$

若  $V_l \leq V_0$ ， $T_1$  到  $T_7$  即为所求，反之  $T_1$  与  $T_5$  互换， $T_3$  与  $T_7$  互换， $T_2$  与  $T_6$  互换。

可以根据不同情况区分  $S$  型曲线的类型，进而得到最优的控制方案。

### 6.3 对加工示例的检验

考虑存在瞬时启动加速度及瞬时启动速度后，对加工实例的操作方案也随之有一定的变化。

为了得到最优的控制方案，在满足  $S$  型曲线的前提下，应使时间尽可能的缩短。由题意知，速度最大值  $V_m$  为  $1.26 \text{ m/min}$ ，加速度最大值  $A_{\max}$  为  $0.6 \text{ m/s}^2$ ，加

加速度  $J$  为  $300\text{ mm/s}^3$ ，由起始速度和终止速度的相等可知  $V_s = V_e = 0.13\text{ m/s}$ ，总路程  $S$  为  $1.9371\text{ m}$ ，经过节点 2 的速度大小不能超过  $0.19\text{ m/s}$ 。

同样的，需要判断有没有匀加速区和匀减速区，加速区和减速区是否完整。

由于起始与终止速度都为  $V_{se} = 0.13\text{ m/s}$ ，当  $V_{\max} - V_{se} > A_{\max}^2/J$  时，有完整的加速区和减速区，当  $V_{\max} - V_{se} \leq A_{\max}^2/J$  时，没有匀加速区和匀减速区<sup>[20]</sup>。

判断  $S$  型曲线完整与不完整导致  $T_i (i=1, 2, \dots, 7)$  的不同。

把加工路径优化控制的问题归结为一个约束问题，即求如下非线性规划问题的最优解

$$\begin{aligned} \min T &= \sum_{i=1}^7 T_i \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 0.13 \leq V_m \leq 1.26 \\ 0.02 < A_{\max} \leq 0.6 \\ V_{\text{sec}} \leq 0.19 \end{cases} \end{aligned}$$

其中， $V_{\text{sec}}$  是第一次经过节点 2 时的速度大小， $V_{\text{sec}}$  可以通过 4.3 节求得，根据  $V_m$  和  $A_{\max}$  的不同，第一次经过节点 2 时的速度可能会在  $S$  型曲线的前四段任意一段， $T_i (i=1, 2, \dots, 7)$  为  $S$  型曲线的 7 个阶段时间。

通过 MATLAB 进行编程计算，求得最大速度  $V_m$ 、最大加速度  $A_{\max}$  和总时间  $T$  分别为

$$\begin{cases} V_m = 1.26 \text{ m/min} \\ A_{\max} = 0.0778 \text{ m/s}^2 \\ T = 91.6532 \text{ s} \end{cases}$$

此时得到 7 个阶段的位置、时间和末速度为

表 6.1 加工示例优化控制的相关数据

$S_{01}$	$S_{02}$	$S_{03}$	$S_{04}$	$S_{05}$	$S_{06}$	$S_{07}$
0.0015	0.0015	0.0060	1.9106	1.9151	1.9151	1.9165
$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$
0.2194	0	0.2194	90.7754	0.2194	0	0.2194
$V_{01}$	$V_{02}$	$V_{03}$	$V_{04}$	$V_{05}$	$V_{06}$	$V_{07}$
0.0138	0.0138	0.0254	0.0254	0.0138	0.0138	0

对应的速度变化曲线见图 6.2

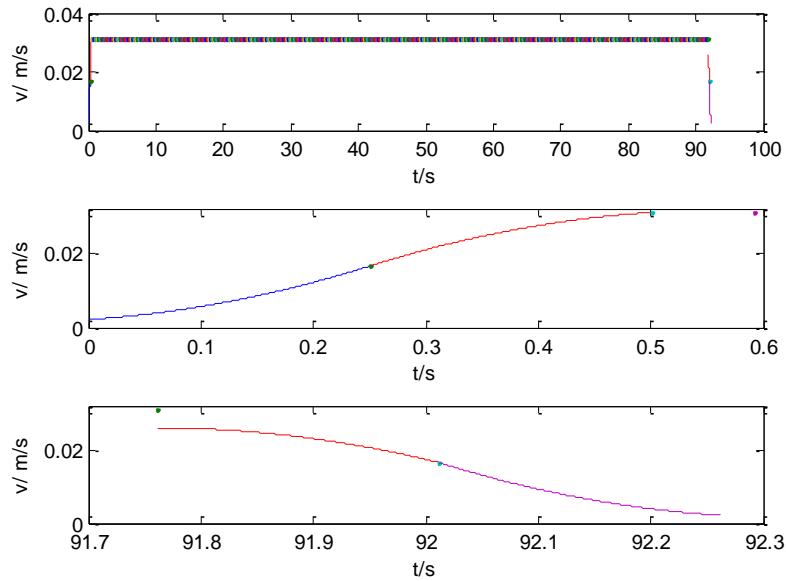


图 6.2 加工示例的速度变化曲线图

图 6.2 中，第一幅为总的  $S$  型曲线，第二幅为加速阶段的放大图，第三幅为减速阶段的速度放大图。

## 6.4 误差分析

在本章中，逐点比较插补法的误差和光滑转接控制算法的误差与 5.6 节一致，但是由于考虑了瞬时启动加速度及瞬时启动速度，计算时经过了一定的化简，这就造成了一定的误差，例如二分法求解速度等。

# 7 提高机床运行平稳性的优化控制运动模型

## 7.1 问题分析

为了提高机床运行的平稳性，在问题三的  $S$  型曲线加减速控制算法的基础上进行相应的改进，使得刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化。

由于加加速度分段定值是  $S$  型曲线控制的条件，这里考虑将加加速度的突变改为渐变，从而使其满足连续变化。

## 7.2 渐变加加速度的简化运动模型

如图 7.1 所示，将前文中不连续的加速度进行处理，使加加速度在很短的时间  $\Delta T$  内可以迅速达到最大值  $J$ 。

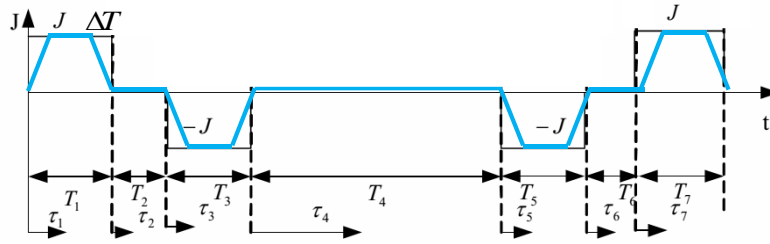


图 7.1 加加速度的连续处理

为简化计算，并和问题三中的结论相比较，若设定变速的几个阶段 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ 和 $T_5$ 、 $T_6$ 、 $T_7$ 仍不变，这就导致最大速度 $V'_m$ 不能达到问题三中的最大速度 $V_m$ ，但是总路程一定，这就需要增加 $T_4$ 来完成加工<sup>[21]</sup>。

理论上，加加速度增加或减少的越缓慢则机床运行平稳性越好，但这就造成了速度提升的较慢。

这里定义当采用渐变加加速度时，速度的最大值为 $V_b$ 。

由于最大速度和最大加速度有限制，但是路程可以任意，因此，下面将分 2 种情形进行考虑<sup>[22]</sup>：

1. 加工路径足够长，此时 $T_4$ 段时间远大于其他时间段。

此时总耗费时间以 $T_4$ 时间为主，此时匀速段速度将达到速度的最大值 $V_{\max}$ ，此时增加 $T_1$ 、 $T_3$ 、 $T_5$ 、 $T_7$ 可以使 $V_b = V_{\max}$ ，时间增加量相对于 $T_4$ 可以忽略不计。

因此，在加工路径足够长时，采用渐变加加速度可以增加机床的平稳性，同时效率也较高。

2. 加工路径较短，此时 $T_4$ 段时间远与其他时间段差距不大。

此时，若仍增长 $T_1$ 、 $T_3$ 、 $T_5$ 、 $T_7$ 使得匀速段速度最大，那么所耗费的时间将增大，导致效率不高。

若 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ 和 $T_5$ 、 $T_6$ 、 $T_7$ 不变，则存在 $J_1 \in (0, J)$ ，使得在加加速度不连续的条件下的匀速段速度 $V_m$ 大小和 $V_b$ 大小相等<sup>[23]</sup>，见图 7.2。

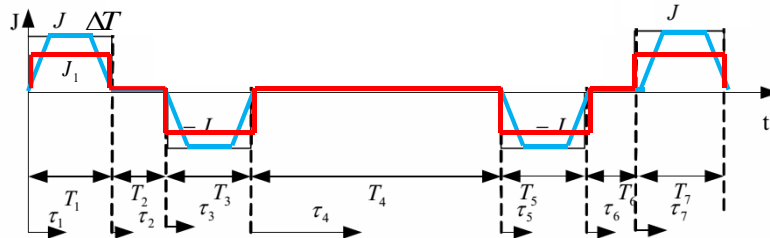


图 7.2 加加速度的连续处理

这里根据假设，加加速度的增加斜率是确定的，是机床加工的固有属性，因此在现实状况下测得时间段不变的情况下匀速段所达到的最大速度 $V_b$ ，从而求出

对应的加加速度  $J_1$ 。

下面将增大  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$  和  $T_5$ 、 $T_6$ 、 $T_7$  时间段来使匀速段速度达到  $V_m$ ，将  $J_1$  带入模型三的优化控制算法，从而得出对应的各时间段时长  $T_1'$ 、 $T_2'$ 、 $T_3'$ 、 $T_5'$ 、 $T_6'$ 、 $T_7'$ ，将这些时长作为渐变加加速度控制机床的参数装定即可<sup>[24]</sup>。

此时，增加的时间在可接受范围内，同时保证了机床加工的平稳性

### 7.3 误差分析

由于将渐变的加加速度近似于以更低的加加速度为最大加加速度，且增大变速时间来作为渐变加加速度的装定时间，这会导致一定的误差，误差的大小与加工路径有关，路径越小，误差越大。然而，当路径较短时加工时间也短，此时加工效率的影响不大<sup>[25]</sup>。

因此，此近似算法可以在保证平稳性和加工效率的前提下，简化渐变加加速度的计算。

## 8 模型的评价

### 8.1 模型的优点

本文实现了对数控加工刀具的优化控制，相对于传统的数控加工有以下优点：

1. 对传统的逐点比较插补法进行了改进，在一定程度上提高了精度，简化了计算。
2. 详细分析了  $S$  形曲线加减速规律的特点及其加减速规律的动力学特性，并给出具体计算公式，并进行了详细的分析与讨论。
3. 提出了数控系统轨迹段光滑转接插补过程控制算法并对其进行误差分析。通过仿真对插补转接过程中速度进行动态特性分析，从理论上证明了算法的有效性。
4. 提出了机床运行平稳性的优化控制运动的近似算法，可以在保证平稳性和加工效率的前提下，简化渐变加加速度的计算。

### 8.2 模型的不足

1. 改进的插补方法以简化计算为前提，选点采用简单的距离比较方法，算法不够优化。
2. 光滑转接控制算法只计算了转接一次的情况，若转节点夹角非常小，误差仍然比较大。
3. 对加工实例进行计算时采用了二分法求解速度，简化了计算过程，但是

也存在一定的误差。

4. 对加加速度渐变进行了近似处理，在加工距离短的情况下误差较大。

## 9 结 论

### 9.1 本文的总结

本文就数控机床加工优化控制等相关问题进行研究，并完成了以下内容：

改进了传统的逐点比较插补法，分析了  $S$  形曲线加减速控制过程，并给出具体计算公式，提出了数控系统光滑转接控制算法并对其误差进行了仿真与分析，得到在当误差相等的情况下，转接角为  $135^\circ$  时比转接角为  $90^\circ$  时可以达到更大的速度。

在不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度的前提下，对加工示例进行了计算，在保证效率最高耗时最短的前提下，得到最大速度为  $1.26m/min$ ，最大加速度为  $0.0752m/s^2$ ，总耗时为  $91.7090s$ 。

在考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度的前提下，重新推导  $S$  形曲线加减速规律，分析加减速规律的动力学特性，对加工示例进行了计算分析，得到最大速度为  $1.26m/min$ ，最大加速度为  $0.0778m/s^2$ ，总耗时为  $91.6532s$ 。

提出渐变加速度的简化运动模型，采用长距离时间近似的方法，保证了加工的平稳性和加工效率的高效性。

### 9.2 未来的展望

高速高精度运动控制是高速数控的核心技术和研究热点之一。本文结合加工示例的控制特点和需求，对轨迹插补与平稳变速控制开展了部分研究，提出了不同情况下的实时加工控制算法，由于能力与时间的限制，不少方面尚有待进一步完善和深入。

1. 需进一步深入研究微小线段的高速、高精度插补技术，并使之实用化。
2. 对于文中提出的改进逐点比较插补法可以与数字积分插补结合，将更有效的减小误差。
3. 可以对光滑转接控制算法进行一定的改进，控制转折角度，多次转接以减小误差，增加转折速度。
4. 对  $S$  型曲线进行计算时，为了简化计算，采用了二分法等近似计算方法，为了减小误差可以考虑更好的推导方案。
5. 以渐变加速度运动时进行了  $S$  型曲线近似处理，误差较大，可以进行更详细的推导来代替近似处理。
6. 一直以来，刀具半径补偿算法都是在二维条件下给出的，因此如何实现

三维加工条件下的刀具半径补偿算法将是一个需要研究的目标,而且也将有一个充分的研究空间。



## 参考文献

- [1] 张远. 高速雕刻机数控插补技术的研究[D].南京航空航天大学,2008.
- [2] 叶佩青,赵慎良. 微小直线段的连续插补控制算法研究[J]. 中国机械工程,2004,15:38-40.
- [3] 赵国勇,赵玉刚,赵庆志. 数控运动中加加速度连续的加减速方法[J]. 计算机集成制造系统,2011,02:316-320.
- [4] 张振华. 数控系统加减速算法及定位技术研究[D].大连理工大学,2007.
- [5] 许良元,桂贵生,彭丹丹. 加速度连续可变的加减速控制规律研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2005,03:15-16.
- [6] 董为民,高贯斌,孙东明,迟毅林. 插补算法的误差及实时性研究[J]. 机械制造与自动化,2006,06:18-20.
- [7] 何莹. 高速加工插补算法的动力学行为分析与评价[D].华中科技大学,2005.
- [8] 穆记锁. 高性能插补算法的研究与运动控制程序库的实现[D].暨南大学,2006.
- [9] 孟书云. 空间自由曲线的快速高精度插补算法[D].南京航空航天大学,2003.
- [10] 叶伟,王小椿. 一种连续小线段高速插补算法[J]. 南京理工大学学报(自然科学版),2008,04:443-448.
- [11] 李凯灿. 自由曲线曲面插补算法研究及仿真[D].电子科技大学,2011.
- [12] 朱彦君. 基于张量分解的缺失数据插补算法的研究[D].杭州电子科技大学,2014.
- [13] 张志强,王太勇,胡世广,赵丽,张志伟,吴振勇. 复杂空间参数曲线加工的插补算法[J]. 天津大学学报,2006,11:1331-1335.
- [14] 尹霞. 数控机床插补算法改进研究[D].西华大学,2009.
- [15] 张春伟. 自适应进给速度参数曲线插补算法研究[D].合肥工业大学,2009.
- [16] 郑金兴,张铭钧. 梯形速度控制变插补周期的实时插补算法研究[J]. 机床与液压,2007,01:77-80+133.
- [17] 周海安,赵玉刚,吕晓倩. 空间曲线插补算法的研究[J]. 机床与液压,2007,10:94-95+142.
- [18] 田林. 连续小线段前瞻插补算法的设计与实现[D].哈尔滨工业大学,2012.
- [19] 杨帆,廖知,肖贝,杜四平. 改进插补算法在数控雕刻系统中的应用[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2011,02:27-31.
- [20] 赵爽. 数控机床中微小线段连续插补算法研究[D].哈尔滨工业大学,2008.
- [21] 任参. 数控系统软件安全与插补算法研究[D].华南理工大学,2010.

- [22]李莉,冯志永. 数控系统中圆弧插补算法的改进和实现[J]. 组合机床与自动化加工技术,2009,07:61-65.
- [23]杨林,张承瑞. 基于时间分割的前加减速快速插补算法[J]. 制造技术与机床,2008,09:93-96.
- [24]王峰. 一种新型插补算法的研究与开发[D].华北工学院,2001.
- [25]张丹凤. 数控系统插补算法研究及设计[D].东北大学,2009.