

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

| | |
|------|----------|
| 学 校 | 西北工业大学 |
| 参赛队号 | 10699008 |
| 队员姓名 | 1.段睿 |
| | 2.常晶 |
| | 3.闫西荡 |

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 吸波材料与微波暗室问题的数学建模

摘 要：

微波暗室提供了一个几乎没有反射的“自由空间”，是设备测试的良好平台。本文分别对尖劈形状吸波体和微波暗室吸波性能进行了分析建模，主要内容为：

问题一：针对二维空间首先根据几何光学原理，得到射向角余角为半尖劈角整数倍时反射次数与入射位置无关，由此定义了特征波线；利用任意波线反射过程与特征波线之间的关系，推导了其反射次数的解析解，建立了反射次数与射向角、入射位置及尖劈角的定量关系模型；进一步刻画了最终反射波线方向和反射波辐射强度与反射次数、反射率等参数的定量关系。通过对三维空间入射波线的分解，将二维反射模型扩展到三维，仿真结果验证了模型的正确性。

问题二：由于微波暗室各墙面之间相互辐射，组成了一个复杂系统，然而电磁波传播速度很快，该系统可以很快达到稳态。基于此，墙面各处均在稳定辐射能量，而且其辐射出射度恒定。利用微元分析

法做稳态分析，推导了六个墙面各微元辐射出射度之间的相互作用关系式，以及天线信号源位置与各墙面之间的影响机制，建立了各墙面微元辐射出射度耦合模型。求解该模型，得到六个墙面辐射出射度分布，利用余弦辐射特性，将诸墙面各处微元辐射至静区的功率积分求和，从而得到静区从墙面接收的总反射功率。

最后，根据导引仿真要求，计算了静区从诸墙面得到的反射信号功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 γ ，得到当 $\rho=0.5$ 时，视在天线在圆弧上的任何位置， γ 值均大于0.03，不能满足仿真技术要求；当 $\rho=0.05$ 时， γ 值均小于0.03，满足仿真要求。在上述两种反射率下， γ 值均在天线处于圆弧中间的位置时达到最小，此时的暗室吸波性能最好。

关键字：几何光学 余弦辐射体 微元分析法 辐射出射度

目 录

| | | |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| 1 | 问题的重述 | 4 |
| 1.1 | 研究背景 | 4 |
| 1.2 | 问题一：尖劈形状吸波体的性能分析 | 4 |
| 1.3 | 问题二：导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能研究 | 4 |
| 2 | 问题的分析 | 5 |
| 3 | 模型的假设及符号说明 | 6 |
| 3.1 | 模型假设 | 6 |
| 3.2 | 符号说明 | 7 |
| 4 | 入射波线在尖劈空缺间反射过程的数学模型 | 7 |
| 4.1 | 模型准备 | 7 |
| 4.2 | 二维反射模型 | 10 |
| 4.2.1 | 入射波线反射次数 | 10 |
| 4.2.2 | 反射次数模型验证 | 13 |
| 4.2.3 | 反射波线方向 | 14 |
| 4.2.4 | 反射波线辐射强度 | 14 |
| 4.3 | 三维模型的建立 | 15 |
| 5 | 微波暗室的性能研究 | 18 |
| 5.1 | 模型准备 | 18 |
| 5.1.1 | 模型假设 | 18 |
| 5.1.2 | 余弦散射体的性质 | 18 |
| 5.2 | 微元辐射出射度耦合模型 | 19 |
| 5.2.1 | 墙面微元之间的辐射出射度关系分析 | 19 |
| 5.2.2 | 天线与墙面微元辐射出射度的关系 | 20 |
| 5.2.3 | 墙面微元辐射出射度方程 | 21 |
| 5.3 | 静区接收功率的计算 | 22 |
| 5.3.1 | 反射功率计算 | 22 |
| 5.3.2 | 直射功率计算 | 22 |
| 5.4 | 暗室吸波效果分析 | 22 |
| 6 | 模型的扩展 | 24 |
| 7 | 模型的评价 | 24 |

1 问题的重述

1.1 研究背景

隐身技术的基础研究包括探索不同频段上吸波的机理，研制高效吸波的特殊材料，将吸波材料设计成合理的形状使之发挥最大效能。许多以电磁波，光波或声波的传播为信息载体的仪器设备，都需要功能与性能的测试，这些测试被放置在被称为“无回波暗室”的实验室中进行。

吸波材料一般制成平板形状和特殊形状两大类基本形状。定义反射率为反射波功率 P_r 与入射波功率 P_i 之比: $\rho = P_r/P_i$ ，显然 $\rho < 1$ 。平板形状吸波体的主要性能指标是电磁波从空间向材料表面垂直入射（入射角 $\theta_i = 0$ ）时的反射率 ρ ，其值越小，吸波性能越高。当入射角 $\theta_i \neq 0$ 时称为斜入射，斜入射时将出现反射、折射情况，此时反射率的理论计算较复杂。本题将反射率简化为满足余弦法则，即 $\rho(\alpha) = \rho \cos \alpha$ ，其中 α 为入射角大小，其中 ρ 为垂直入射反射率。

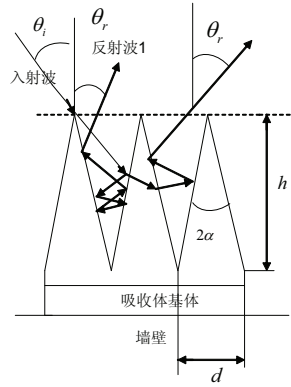


图 1 尖劈形吸波体吸波功能的示意图

图1示意了一条想象中的辐射线（实际上是在一个微小立体角内辐射）射入尖劈吸波体后，经过多次反射以及透射过尖劈后进入相邻尖劈空间形成反射的情况。 2α 为尖劈角， h 为尖劈的高， d 为尖劈的底部宽度。

1.2 问题一：尖劈形状吸波体的性能分析

设尖劈形状吸波体及其坐标系如图2所示，尖劈的长度沿 x 方向为无限长，其他尺寸记号同图1。由射向角 θ 和方位角 φ 确定入射波线的方向，只考虑波在两种不同介质界面处的反射，不考虑边缘处的绕射。假设尖劈材料的电性能参数各处均匀，垂直入射的反射率为 ρ ，斜入射时的反射率满足前述的余弦法则，设入射波线的辐射强度为1单位。试建立入射波线在一个尖劈几何空缺间反射过程，即分别刻画最终反射波线的方向，反射次数，反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系。

1.3 问题二：导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能研究

设暗室的宽 $B = 18$ ，高 $H = 14$ ，长 $L = 15$ ， $b = 1$ ，线阵列的圆弧半径 R ，单位均为米。所有墙面铺设同一规格的吸波体（上述数据均从吸波体的顶端平面算起）。图3所示暗室右端中心的 $s \times s$ 的小方块面积处是安置导引头的部位，称为“静区”。静区小方块的中心

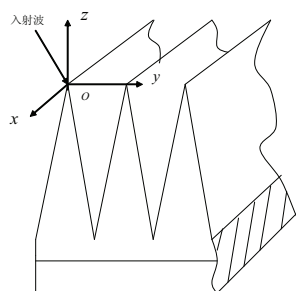


图 2 尖劈吸波体吸波示意

点与目标模拟阵列圆弧的圆心重合。根据导引仿真要求，静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 γ ，始终满足 $\gamma \leq 0.03$ 。设 $s = 0.3m$ 。

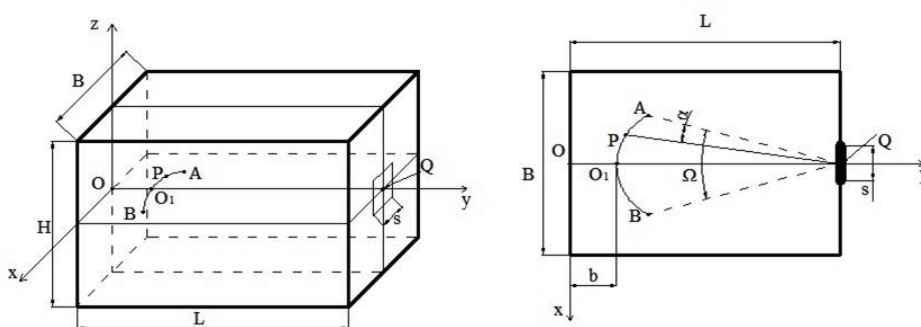


图 3 问题二的诸参数示意图

目标模拟器对导引头的视在目标运动从左端开始，以匀角速运动到右端，前后共4秒，视在天线中心轴线对准静区中心，中心轴线处的发射功率强度随时间线性增大，结束时比初始时增大了一倍。并假设：

- (1) 视在天线发射功率强度分布满足余弦辐射体；
- (2) 墙面为余弦反射体；
- (3) 不计入模拟器的天线及其安装支架，以及导引头本身对辐射的影响；

若暗室铺设平板形吸波材料，其垂直反射率 $\rho = 0.50$ 。试建立合适的数学模型，在上述假设下，根据提供的数据，通过对模型的分析与数值计算，判断这样的微波暗室能否满足仿真技术要求？在此弹目相对运动过程中，何时的 γ 值最小？

进一步，若暗室改为铺设尖劈形吸波材料，由于沿尖劈形吸波体各平面处的吸波效果不是常数，所以常用统计的方法求出其平均值，称此平均值为平均反射率。现设此平均反射率已经求出，为 $\rho = 0.05$ ，请你再次用模型进行计算，根据结果判断，这样的暗室是否满足仿真技术要求？何时的 γ 值最小？

2 问题的分析

入射波线在一个尖劈几何空缺间的反射过程非常复杂。在反射次数已知的条件下，反射波线的方向和反射波的辐射强度都可以由反射次数求得，所以问题1的关键在于反射次数的求解。首先考虑二维情况，在尖劈角一定时，任意入射角度和入射位置的波线射出

尖劈可能在以下两种情况下发生：一是其射出角小于等于半尖劈角，这时反射次数可以通过求解角度变化得到，二是其射出角虽然大于半尖劈角，但由于尖劈高度有限，波线射出尖劈，此时反射次数求解较困难。由于出射次数是离散值，所以存在波线入射角度、入射位置和尖劈角的临界关系，当其中某一变量在其临界位置变大或变小时，反射次数相差1，本问的关键即求解临界关系。在尖劈角一定时，当入射波线射向角的余角等于 m 倍的半尖劈角时(m 为整数)，其反射次数与入射位置无关，仅与 m 有关，且这些波线的向上射出尖劈路径与向下射入路径或者重合或者关于尖劈空缺中心线轴对称，称这些入射波线为特征波线。由于任意射向角均是介于两相邻特征波线射向角之间，所以利用特征波线可以建立上述的临界关系，从而得到反射次数的解析解。三维情况下，尖劈在 x 轴方向上无限延长，将入射线看做矢量，并分解为沿 x 方向的矢量和在 Oyz 平面内的矢量之和，则沿 x 方向的矢量不发生反射，而在 Oyz 平面内的矢量的反射过程与二维情况相同，所以反射次数可以直接由二维推广得到，但反射率应考虑 x 方向矢量的影响，所以辐射强度应做相应变化。

对于问题二，微波暗室静区接收到的反射波能量与直达能量之比对导引头仿真有重要影响，静区从信号源直接得到的微波功率容易求得，难点在于求解静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和。由于电磁波传播速度非常快，所以在每个目标模拟器位置处，暗室墙面的相互影响将瞬间达到稳态，即每个墙面微元辐射功率恒定。若每个墙面微元辐射功率可以求得，则静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和等于由所有墙面微元辐射至静区功率之和。本题转化为在稳态条件下，求解墙面微元辐射功率的问题。每个墙面微元接收来自其余墙面微元辐射的能量以及目标辐射的能量，并将部分能量按照余弦辐射规律辐射，根据能量守恒，每个墙面微元接收的功率应等于损耗功率与辐射功率之和。达到稳态时，墙面微元辐射的功率恒定且是未知量，在每个墙面微元处建立上述的能量守恒等式，则可以得到阶数与微元个数相等的线性方程组。求解该方程组，得到每个墙面微元在稳态时辐射的功率。利用余弦辐射特性，将诸墙面各处微元辐射至静区的功率积分求和，从而得到静区从墙面接收的总反射功率，最后计算静区从诸墙面得到的反射信号功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比。

3 模型的假设及符号说明

3.1 模型假设

假设1: 本文中反射率简化为满足余弦法则，即 $\rho(i) = \rho \cos(i)$ ，其中 i 为入射角大小， ρ 为垂直入射反射率。

假设2: 本文采用简单直观的几何光学模型来初步分析研究特殊吸波体和微波暗室的性能这两类问题。

假设3: 本文中只考虑在两种不同介质界面处的反射，不考虑透射及边缘处的绕射。理论上入射波有多次透射后进入相邻空间的反射，但能量已很小，工程上可以不计。

假设4: 在公式推导过程中仅考虑入射线的射向角 θ 大于半尖劈角的情况，小角度入射近似于垂直入射情况，在尖劈吸波体实际性能研究中意义不大，但在文中的模型的扩

展中给出了分析。

3.2 符号说明

表 1 符号说明表

| 符号 | 定义 |
|------------|---|
| i_n | 第 n 次反射的入射角, 入射波线与介质界面法线的夹角 |
| i'_n | 第 n 次反射的反射角, 反射波线与介质界面法线的夹角 |
| P_i | 入射波功率 |
| P_r | 反射波功率 |
| ρ | 电磁波垂直入射反射率, $\rho = \frac{P_r}{P_i} (\rho < 1)$ |
| $Oxyz$ | 尖劈形吸波体的三维坐标系, 如图2所示 |
| θ_i | 射向角, 坐标系 $Oxyz$ 的 z 轴正向与入射线负方向的夹角 |
| θ_r | 出射角, 坐标系 $Oxyz$ 的 z 轴正向与反射波正向的夹角 |
| φ | 方位角, 坐标系 $Oxyz$ 的 x 轴正向与射线在 xOy 平面上投影的夹角 |
| α | 半尖劈角, 如图1所示 |
| d | 尖劈的底部宽度, 如图1所示 |
| h | 尖劈的高度, 如图1所示 |
| R | 目标模拟器的圆弧半径 |
| β | 目标模拟器对导引头的总张角 |
| γ | 静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 |

4 入射波线在尖劈空缺间反射过程的数学模型

4.1 模型准备

定义 1 一条入射线射入两相邻尖劈空缺间, 定义这条射线与这两个相邻尖劈顶点的连线的交点为它的入射位置。示例如图8中的 P 点。

为了建立入射波线在尖劈吸波体几何空缺间反射过程的数学模型, 首先以引理的形式给出入射波线在尖劈空缺间反射的基本规律。

引理 1 入射线在尖劈空缺间多次反射过程, 入射角 i_1 依次递减尖劈角 2α 。

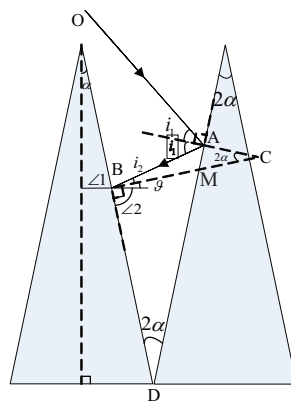


图 4 入射波的入射角变化示意图

证明：图4示意了一条想象中的辐射线射入尖劈吸波体，首次到达界面A点，一次反射后到达界面B点，A点和B点处界面法线相交与点C。 i_1 和 i_2 分别表示第一次反射和第二次反射的入射角。定义入射线在界面法线之上（入射线在尖劈顶端与法线之间）入射角为正，在界面法线之下（入射线在界面法线与尖劈底面之间）入射角为负。

由图可知相邻两尖劈之间的夹角 $\angle ADB = 2\alpha$ ，则由相似三角形原理得

$$\triangle ACM \sim \triangle BDM$$

因此

$$\angle ACB = \angle ADB = 2\alpha$$

则

$$i_2 = i_1 - \angle ACB = i_1 - 2\alpha$$

引理 2 当入射角为 $i = 2m\alpha$ 时 (其中 m 是大于等于零的整数)，入射线将沿原路返回，且反射次数为 $2m + 1$ 。

证明：根据引理1知，射入尖劈吸波体几何空缺间的入射线在每次反射后入射角减小 2α 。当入射角为 $i = 2m\alpha$ 时，经过 m 次反射，入射角变为零，即垂直入射。此次反射的入射线与反射线重合。然后这条辐射线将按原路线再经过 m 次反射从入射方向射出尖劈空缺间。可知整个过程入射线经过了 $2m + 1$ 次反射。示例如图8点划所示。

引理 3 当入射角为 $i = (2m + 1)\alpha$ 时 (其中 m 是大于等于零的整数)，入射过程与出射过程关于两相邻尖劈的中轴线对称，反射次数为 $2(m + 1)$ 。

证明：由图4可知，尖劈界面的法线 BC 与水平线间的夹角为 ϑ ，满足

$$\angle 2 + \vartheta = \angle 1 + \alpha = 90^\circ$$

则 $\vartheta = \alpha$ 。

同理根据引理1可知，经过 m 次反射后，第 $m + 1$ 次反射的入射角变为

$$(2m + 1)\alpha - 2m\alpha = \alpha$$

则 $m + 1$ 次反射的反射角也为 α ，即反射线将沿水平射出到达相邻尖劈。所以出射过程将与入射过程关于尖劈的中轴线对称，经过 $m + 1$ 次反射后射出尖劈空缺间。所以总的反射次数为 $2(m + 1)$ ，示例如图8虚线所示。

引理 4 假设同一点源发射的两条电磁波的入射线之间的夹角为 ϕ_i ，在尖劈空缺间经过相同次数反射后的射出线之间的夹角为 ϕ_o ，则有 $\phi_i = \phi_o$ 。

证明：如图5由同一点源发出的两条射线 \vec{OA} 和 \vec{OB} 之间的夹角为 ϕ_i ，经过一次反射后，两条辐射线反向延长线之间的夹角为 ϕ_i' 。图中 O' 为点源关于尖劈界面对称的虚源。由对称几何关系知

$$\phi_i = i_1 - i_2, \quad \phi_i' = i_1 - i_2$$

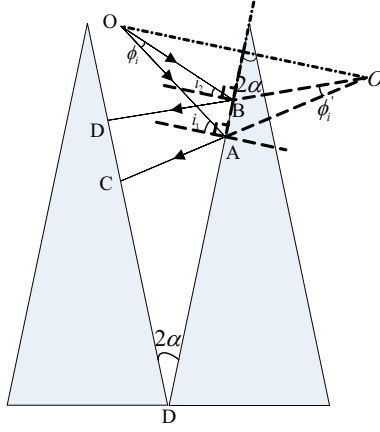


图 5 由同一点源发射的辐射线的入射关系

因此，可得 $\phi_i = \phi_i'$ 。在这里可将经过一次反射后的辐射线 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{CD} 看作由同一点源 O' （虚源）发射的两条射线，两条入射线的夹角为 ϕ_i' 。依次类推，若经过相同次数的反射，这两条反射线在射出时，夹角依然是 $i_1 - i_2$ ，则 $\phi_i = \phi_o$ ，即引理得证。

引理 5 平行入射的波束经过相同次数的反射，不发生能量会聚及发散，即波束间的间距保持不变。

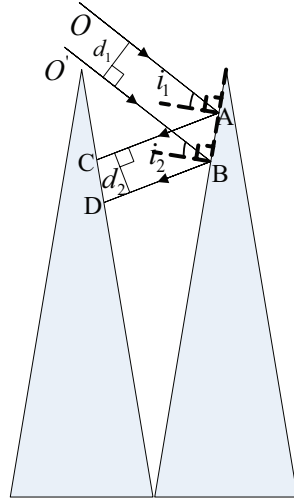


图 6 平行入射辐射线之间的关系

证明：图6示意了两条平行入射的电磁波 OA 和 $O'B$ 之间的关系，用 $|\cdot|$ 表示线段的长度，由几何关系知入射角满足 $i_1 = i_2$ 考虑到

$$d = |AB| \cdot \cos i$$

因此得到

$$d_1 = d_2 = |AB| \cdot \cos i_1$$

同理，当经过相同次数反射后，两条辐射线之间的距离仍保持不变。

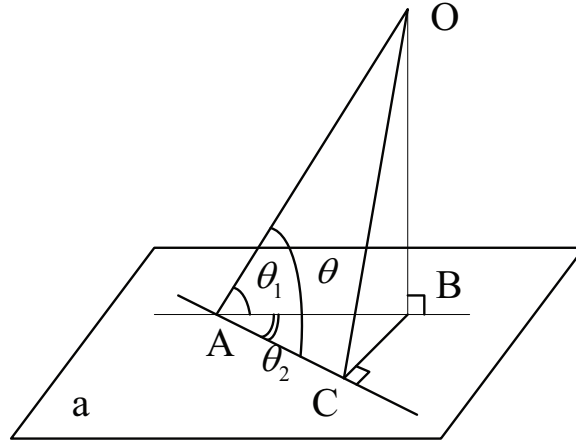


图 7 三余弦定理示意图

引理 6 如图 7 所示, 设 A 为面上一点, 过 A 的直线 AO 在 a 面上的投影为 AB , AC 为该面上的一条直线, 那么 $\angle OAC, \angle BAC, \angle OAB$ 三角的余弦关系为:

$$\cos \angle OAC = \cos \angle BAC \times \cos \angle OAB$$

称为三余弦定理。

定义 2 满足引理 2 和引理 3 的入射波线分别称为反向特征波线 and 对称特征波线, 两种波线统称为特征波线, 其入射角满足 $m\alpha (m \geq 0)$, 其反射次数为 $m + 1$ 。

4.2 二维反射模型

4.2.1 入射波线反射次数

如图 1, 本节只考虑当波线从左侧入射的情况, 从右侧入射的情况与左侧入射对称。

(1) 当射向角 θ_i 满足条件 $\theta_i \geq \frac{\pi}{2} - \alpha$, 此时入射到尖劈上的辐射线直接反射出尖劈, 反射次数为 1。

(2) 当射向角满足条件 $\theta_i < \alpha$, 某些入射位置的波线将在左侧尖劈面发生第一次反射, 不易求解, 且在实际研究中意义不大, 文中将在模型扩展中予以讨论。

(3) 当 $\alpha \leq \theta_i < \frac{\pi}{2} - \alpha$ 并且 $\alpha < \frac{\pi}{4}$ 时, 则该条波线的射向角必介于两条特征波线之间。为了表达方便, 使用波线第一次到达尖劈斜面时的入射角 i , 它与射向角有简单的换算关系如下

$$i_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_i - \alpha \quad (1)$$

此时可以找到 m 使得入射角 i_1 满足下式

$$m\alpha \leq i_1 \leq (m+1)\alpha \quad m \geq 0 \quad (2)$$

参照引理 2 和引理 3 可以看出, 当 m 为偶数时, 式 (2) 表示该条波线的射向角大于等于反向特征波线的射向角, 小于等于其对称特征波线的射向角; 当 m 为奇数时, 式 (2) 表示该条波线的射向角大于等于对称特征波线的射向角, 小于等于反向特征波线的射向角。由式 (2) 易得

$$m = \left\lfloor \frac{i_1}{\alpha} \right\rfloor \quad (3)$$

其中算子 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整。

定理 1 入射角为 i_1 的波线在尖劈内的反射次数等于其相邻的两条特征波线的反射次数之一，即入射角为 i_1 的辐射线在尖劈内的反射次数为 $m + 1$ 或 $m + 2$ ，其中 m 由式(3)给出。

证明：仅考虑 m 为偶数，当 m 为奇数时同理可证。

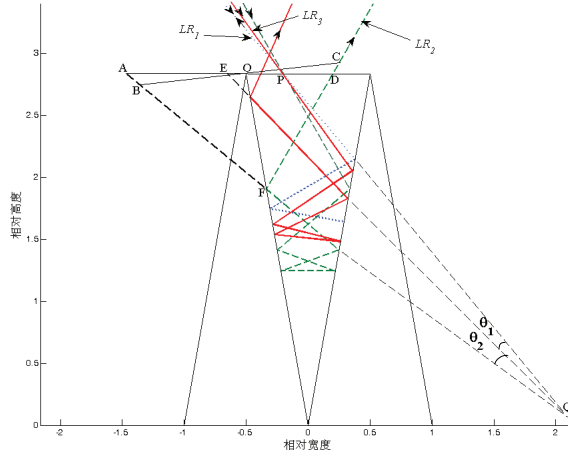


图 8 任意射向角的辐射线与其相邻特征辐射线反射示意图

图8 所示为三条不同射向角，但是同一入射位置的入射辐射线在尖劈中的传播过程，其中用点划线表示的入射线满足引理2的条件，为反向特征辐射线，记为 LR_1 ，其反射次数为 $m + 1$ 次；用虚线表示的入射线满足引理3的条件，为对称特征辐射线，记为 LR_2 ，其反射次数为 $m + 2$ 次；用实线表示的入射线，其射向角介于 LR_1 和 LR_2 之间，与 LR_1 的夹角为 θ_1 ，与 LR_2 的夹角为 θ_2 ，

$$\theta_1 = i_1 - m\alpha \quad (4)$$

$$\theta_2 = (m + 1)\alpha - i_1 \quad (5)$$

该条入射线记为 LR_3 。三条入射线入射时交于 P 点，由引理4，三条入射线若经历相同次数的反射，则三条入射线的反向延长线仍汇聚于一点。根据三条入射线从 P 点出射后的相对位置，看到 LR_1 位于 LR_3 上方，并且 LR_3 位于 LR_1 上方。经历相同次数的反射后，基于引理4，三条辐射线的相对位置保持不变，且夹角保持不变。

当 LR_3 和 LR_1 反射的次数相同且小于 $m + 1$ 次时， LR_1 在 LR_3 上方， LR_1 仍会继续反射，所以 LR_3 必会继续反射，则 LR_3 在尖劈内的反射次数大于等于 $m + 1$ 。同理可得 LR_3 在尖劈内的反射次数小于等于 $m + 2$ 。

证毕。

定理 2 当波线入射位置与入射角 i_1 满足

$$\frac{OP}{1-OP} \leq \frac{\sin(i_1 - m\alpha)}{\sin((m+1)\alpha - i_1)} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (6)$$

辐射线的反射次数为 $m+2$ 次，当辐射线入射位置满足

$$\frac{OP}{1-OP} > \frac{\sin(i_1 - m\alpha)}{\sin((m+1)\alpha - i_1)} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (7)$$

辐射线的反射次数为 $m+1$ 次。其中， OP 如图8所示。

证明：在此仅考虑 m 为偶数的情况，当 m 为奇数时同理可证。

如图8将 LR_1 的出射线反向延长，同时将 LR_2 在第 $m+1$ 次反射后的辐射波线段双向延长，再将 LR_3 在第 $m+1$ 次反射后的辐射线反向延长。则由引理4，三条延长线必相交于一点，记为 Q ，且 $\angle PQE = \theta_1$ ， $\angle EQF = \theta_2$ ， θ_1 、 θ_2 分别由式(4)和式(5)给出，将 LR_3 在第 $m+1$ 次反射后辐射线的延长线与 OP 的交点记为 E 。则确定 LR_3 反射次数的问题转化为判断 PE 与 PO 相对长短的问题。若 $PE \geq PO$ ，则 LR_3 反射的次数为 $m+2$ 次，否则 LR_3 的反射次数为 $m+1$ 次。该问题的临界条件为

$$PE = PO \quad (8)$$

求解过程如下：

过 O 点作线段 BOC 垂直于 OF ，交 FA 于 B ，交 FD 于 C 。则因为 OF 是 $\angle CFB$ 的角平分线，所以

$$OB = OC \quad (9)$$

在三角形 OCD 中，由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle ODC)}{OC} = \frac{\sin(\angle OCD)}{OD} \quad (10)$$

其中， $\angle ODC = \pi - (m+2)\alpha$ ， $\angle OCD = (m+1)\alpha$ ， α 为半锥角。

在三角形 OAB 中，由正弦定理得

$$\frac{\sin(\angle ABO)}{OA} = \frac{\sin(\angle BAO)}{OB} \quad (11)$$

其中， $\angle ABO = \pi - (m+1)\alpha$ ， $\angle BAO = m\alpha$ 。联立式(9)、(10)和(11)可得

$$OA = \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin(m\alpha)} OD \quad (12)$$

根据 LR_2 的对称性得 $OD = 1 - OP$ ，代入式(12)，得

$$OA = \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin(m\alpha)} (1 - OP) \quad (13)$$

在三角形 AQE 和三角形 EQP 中，根据正弦定理得

$$\frac{\sin \angle QAE}{QE} = \frac{\sin \theta_2}{AE} \quad (14)$$

$$\frac{\sin \angle QPE}{QE} = \frac{\sin \theta_1}{PE} \quad (15)$$

其中, $\angle QAE = m\alpha$, $\angle QAE = m\alpha$ 。联立式(14)和(15)得

$$\frac{PE}{AE} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \frac{\sin(m\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (16)$$

式(8)的临界条件等价于下式

$$\frac{PE}{AE} = \frac{PO}{OA} \quad (17)$$

联立式(15)、(16)和(17)得临界条件为

$$\frac{OP}{1-OP} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (18)$$

当 $\frac{PE}{AE} \geq \frac{PO}{OA}$, LR_3 的反射次数为 $m+2$ 次, 此时

$$\frac{OP}{1-OP} \leq \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (19)$$

当 $\frac{PE}{AE} \leq \frac{PO}{OA}$, LR_3 的反射次数为 $m+1$ 次, 此时

$$\frac{OP}{1-OP} > \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (20)$$

将 θ_1 和 θ_2 的表达式代入即可得式(6)和式(7)。

证毕。

4.2.2 反射次数模型验证

为验证上述定理的正确, 将反射次数模型求解的结果与仿真结果进行比较。假定尖劈半锥角 α 为 5° , 令射向角 θ_i 由 0° 变化至 90° , OP 由 0 变化至 1 (OD 长度为 1), 结果如图9和10所示, 图中灰度值代表反射次数的大小。模型仅考虑了 $\theta_i \geq \alpha$ 的情况, 所以图10中当 $\theta_i < \alpha$, 反射次数为无效值。

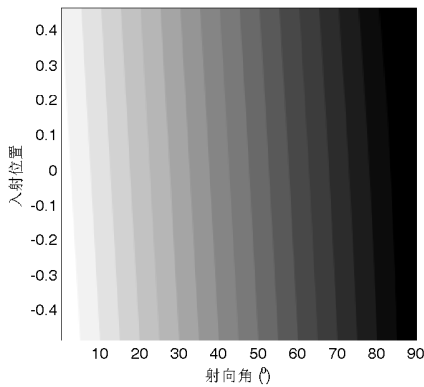


图 9 反射次数仿真结果

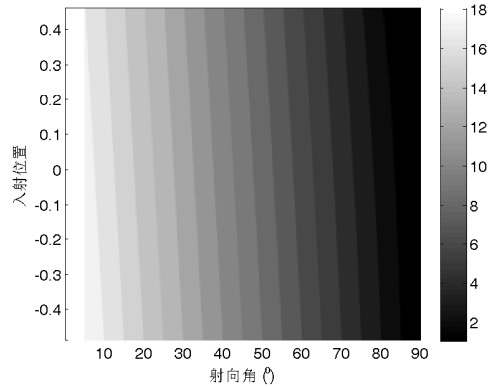


图 10 反射次数模型计算的结果

对比上图可以发现，反射次数的仿真结果和模型计算结果相同，这进一步验证了问题一模型的正确性。图中反射次数的分界线由式(18)给出，当 α 较小，入射角 i 较大时，该式可简化为

$$\frac{OP}{1-OP} \approx \frac{i-m\alpha}{(m+1)\alpha-i} \quad (21)$$

上式(21)是直线方程，表征了反射次数分界线几乎为直线的性质。

4.2.3 反射波线方向

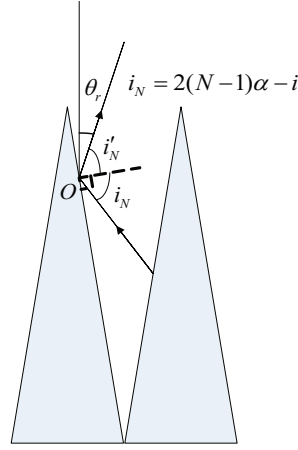


图 11 入射波的反射方向示意图

仅考虑 $\theta_i > \alpha$ 时的情况，由反射次数模型，给定射向角 θ_i ，第一次入射到尖劈面的入射角 i_1 由式(1)求得，则由式(19)和式(20)可以判定其反射次数，记为 N 。由引理1，该入射波线在第 N 次反射时，其入射角为 i_N ，大小为 $2(N-1)\alpha - i_1$ 。若 N 为偶数，则最后一次反射在第一次入射面的对称面，如图11，则由角度关系解得射出角 θ_r 满足

$$\theta_r = \pi - 2N\alpha - \theta_i \quad (22)$$

其中 θ_i 表示射入角。当 N 为奇数时，同理可求得射出角为

$$\theta_r = -(\pi - 2N\alpha - \theta_i) \quad (23)$$

假定射出角向右为正，向左为负，所以式(22)与式(23)符号相反。最后可求得出射角为

$$\theta_r = (-1)^N (\pi - 2N\alpha - \theta_i) \quad (24)$$

4.2.4 反射波线辐射强度

由引理1，第 n 次反射的入射角 i_n 为 $i_n = i_1 - 2(n-1)\alpha$ ，则第 n 次反射，反射波辐射强度 I_{rn} 与入射波辐射强度 I_{in} 之比 ρ_n 为

$$\rho_n = \frac{I_{rn}}{I_{in}} = \rho \cos(i_1 - 2(n-1)\alpha) \quad (25)$$

其中, ρ 为垂直入射反射率。由引理4, 易得第 n 次反射的入射波辐射强度与第 $n-1$ 次反射的反射波辐射强度相同, 即

$$I_{in} = I_{r(n-1)} \quad (26)$$

假设辐射线的反射次数为 N , 入射波线的辐射强度为1, 则出射波线辐射强度为

$$\begin{aligned} I_{rN} &= \rho_N I_{iN} = \rho_N I_{r(N-1)} = \rho_N \rho_{N-1} I_{i(N-1)} = \dots = \left(\prod_{n=1}^N \rho_n \right) I_{i1} \\ &= \left(\prod_{n=1}^N \rho \cos(i_1 - 2(n-1)\alpha) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

式中反射次数 N 由反射次数模型一节给出。

4.3 三维模型的建立

模型准备

入射波线在尖劈空缺间的三维反射模型可通过二维模型的扩展得到。首先用几何光学模型研究电磁波在三维空间的反射规律。

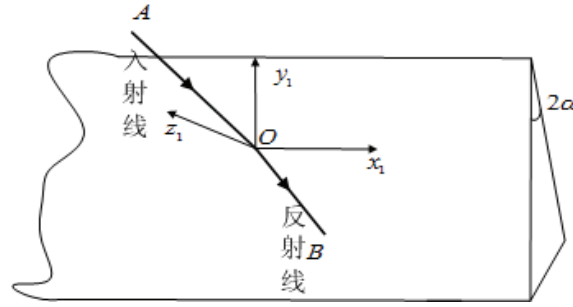


图 12 入射波线在三维空间的反射示意图

在尖劈斜面上建立坐标系 $Ox_1y_1z_1$, 如图12所示, 坐标原点建立在反射点 O , Ox_1 正向与图2中 x 轴正向相同; Oy_1 轴位于尖劈斜面且垂直于 Ox_1 , Oy_1 指向尖劈顶端为正, Oz_1 轴垂直于尖劈斜面, 三轴构成右手坐标系。假设一条辐射线 AO 射入尖劈 O 点, 然后沿 OB 反射出。

在此为了便于研究反射转换, 将图12沿着 x_1 轴正向看入的示意图画出, 如图13。

为了便于推导, 假设入射波线为向量 \vec{AO} , 反射波线为向量 \vec{OB} 。将向量 \vec{AO} 分解为平行于 Ox_1 轴的 \vec{FB} 和 y_1Oz_1 平面内的向量 \vec{EO} 。同理将向量 \vec{OB} 分解为与 Ox_1 轴平行的 \vec{FB} 和 y_1Oz_1 平面内的向量 \vec{OF} 。即存在如下关系:

$$\vec{AO} = \vec{AE} + \vec{EO}, \vec{OB} = \vec{OF} + \vec{FB} \quad (28)$$

假设向量 \vec{AO} 的长度为1, 向量 \vec{AO} 与 y_1Oz_1 平面的夹角为 ϑ , 向量 \vec{AO} 在 y_1Oz_1 平面的投影 \vec{EO} 与 z_1 轴正向的夹角为 $-\psi$ 。向量 \vec{OB} 与 y_1Oz_1 平面的夹角为 ϑ' , 向量 \vec{OB} 在 y_1Oz_1 平面的投影 \vec{OF} 与 z_1 轴正向的夹角为 ψ' ($90^\circ \geq \vartheta, \psi, \vartheta', \psi' \geq 0^\circ$)。根据反射原理知, $\vartheta = \vartheta'$, $\psi = \psi'$, 则根据几何关系, 向量 \vec{AO} 和 \vec{OB} 在坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 中可分别表示为:

$$\vec{AO} = (\sin \vartheta, \cos \vartheta \sin \psi, -\cos \vartheta \cos \psi) \quad (29)$$

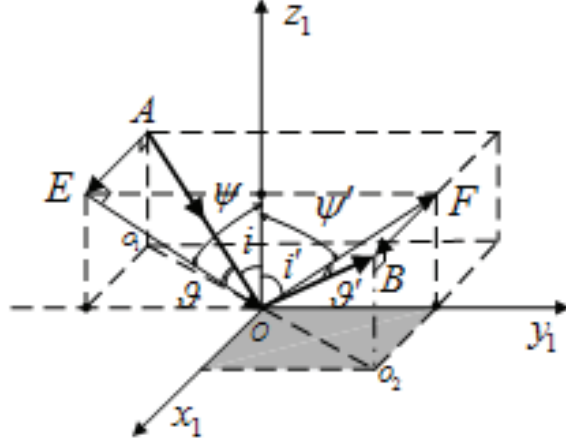


图 13 视角沿 x_1 轴方向的反射示意图

$$\overrightarrow{OB} = (\sin \vartheta, \cos \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta \cos \psi) \quad (30)$$

向量 \overrightarrow{AE} 、 \overrightarrow{EO} 、 \overrightarrow{FB} 和 \overrightarrow{OF} 在坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 中可分别表示为:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= (\sin \vartheta, 0, 0) \\ \overrightarrow{EO} &= (0, \cos \vartheta \sin \psi, -\cos \vartheta \cos \psi) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FB} &= (\sin \vartheta, 0, 0) \\ \overrightarrow{OF} &= (0, \cos \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta \cos \psi) \end{aligned} \quad (32)$$

假设在 y_1Oz_1 平面内的向量 \overrightarrow{EO} 一次反射后的反射线记作 $\overrightarrow{OE'}$ 。则由反射定律知反射线 $\overrightarrow{OE'}$ 与 z_1 轴正向的夹角等于 ψ ，且 $|\overrightarrow{EO}| = |\overrightarrow{OE'}| = \cos \vartheta$ ，故 $\overrightarrow{OE'}$ 可表示为:

$$\overrightarrow{OE'} = (0, \cos \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta \cos \psi) \quad (33)$$

根据式(31)、(32)和(33)可知向量 $\overrightarrow{OE'} = \overrightarrow{OF}$ ， E' 与 F 重合，即反射线向量 \overrightarrow{OB} 可由 \overrightarrow{FB} 与 $\overrightarrow{OE'}$ 合成。

综上可得，入射波线在三维空间的传播可分解为沿着 x_1 轴方向的直线传播和 y_1Oz_1 平面的反射。

入射波线反射次数

用单位矢量表示入射波线的传播方向，则射向角为 θ ，方位角为 φ ，的入射波线，其方向矢量为 $\mathbf{v} = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ 。将该矢量分解为平行于 x 轴方向的矢量 $\mathbf{v}_1 = (-\sin \theta \cos \varphi, 0)$ 和在 yo 平面的矢量 $\mathbf{v}_2 = (-\sin \theta \sin \varphi, 0, \cos \theta)$ 。 \mathbf{v} 在尖劈斜面的反射后的单位矢量可以看做 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 分别在尖劈斜面反射后叠加而成。 \mathbf{v}_1 始终平行于两尖劈，不发生反射，将沿直线传播； \mathbf{v}_2 将在尖劈空缺间发生反射，其反射特性与上述二维情况相同，所以只需确定 \mathbf{v}_2 的入射位置、入射角等参数，即可求得反射次数。入射波线与尖劈顶端平面的交点设为 P ，则 O 点与 P 点沿 Oy 轴方向的距离设为 OP_y ，则 OP_y 等价于二维情况 OP 的距离，确定了 \mathbf{v}_2 的入射位置。如图所示， \overrightarrow{AO} 表示矢量 \mathbf{v} ，其入射到尖劈面的

入射角为 i , \overrightarrow{EO} 即矢量 \mathbf{v}_2 入射角为 ψ_1 , \overrightarrow{AE} 表示矢量 \mathbf{v}_1 , 与 Ox 轴平行, \mathbf{v} 和 \mathbf{v}_2 的夹角设为 ϑ , 由三余弦定理得

$$\cos i_1 = \cos \psi_1 \cos \vartheta \quad (34)$$

在坐标系 $Ox'y'z'$ 内, 容易求得

$$\vartheta = \arccos \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \quad (35)$$

在坐标系 $Oxyz$ 内, \mathbf{v}_2 的射向角为

$$\theta_{i2} = \arctan \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta} \quad (36)$$

容易求得 \mathbf{v}_2 的入射角为

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \arctan \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta} \quad (37)$$

由定理2得, 反射次数由入射位置 OP_y 和 ψ_1 确定, 模型为:

$$m = \left\lfloor \frac{\psi_1}{\alpha} \right\rfloor \quad (38)$$

当光线入射位置满足

$$\frac{OP_y}{1 - OP_y} \leq \frac{\sin(\psi_1 - m\alpha)}{\sin((m+1)\alpha - \psi_1)} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (39)$$

光线的反射次数为 $m+2$ 次;

当光线入射位置满足

$$\frac{OP_y}{1 - OP_y} > \frac{\sin(\psi_1 - m\alpha)}{\sin((m+1)\alpha - \psi_1)} \frac{\sin((m+2)\alpha)}{\sin((m+1)\alpha)} \quad (40)$$

光线的反射次数为 $m+1$ 次。

反射波线方向

\mathbf{v}_1 经过最后一次反射后, 出射矢量为 \mathbf{v}_{r1} , 并且 $\mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_1$ 。 \mathbf{v}_2 经过最后一次反射后, 出射矢量为 \mathbf{v}_{r2} , 其长度与 \mathbf{v}_2 相同, 与 Oz 轴的夹角为 θ_{r2} 参考式(24)给出, 则

$$\theta_{r2} = (-1)^N (\pi - 2N\alpha - \theta_{i2}) \quad (41)$$

$$\mathbf{v}_{2r} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} (0, \sin \theta_{r2}, \cos \theta_{r2}) \quad (42)$$

其中 N 为反射次数。 θ_{i2} 为 \mathbf{v}_2 的射向角, 由式(36)给出。 \mathbf{v} 经过最后一次反射后, 出射矢量为 \mathbf{v}_r , 则由 $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r1} + \mathbf{v}_{r2}$,可得

$$\mathbf{v}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \sin \theta_{r2}, \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \cos \theta_{r2}) \quad (43)$$

该矢量即为反射波线的单位方向向量。

反射波辐射强度

\mathbf{v} 在尖劈斜面第 n 次反射的入射角可通过 \mathbf{v}_2 第 n 次反射的入射角 ψ_n ，由三余弦定理求解

$$\cos i_n = \cos \psi_n \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \quad (44)$$

由引理1易得

$$\cos i_n = \cos(\psi_1 - 2(n-1)\alpha) \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \quad (45)$$

参考式(27)的推导，可以得到反射波辐射强度 I_{rN} ：

$$\begin{aligned} I_{rN} &= \rho_N I_{iN} = \rho_N I_{r(N-1)} = \rho_N \rho_{N-1} I_{i(N-1)} = \dots = \left(\prod_{n=1}^N \rho_n \right) I_{i1} \\ &= (\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi})^N \left(\prod_{n=1}^N \rho \cos(\psi_1 - 2(n-1)\alpha) \right) \end{aligned} \quad (46)$$

其中， N 为入射波线在尖劈空缺间的反射次数， I_{rn} 为第 n 次反射的反射波辐射强度， I_{in} 为第 n 次反射的入射波辐射强度， ρ_n 为第 n 次反射的反射率。

5 微波暗室的性能研究

微波暗室内表面上各处均在发射能量，同时也在接收所有墙面上发射的能量，因而组成了一个复杂的稳态系统。在此条件下，墙面上各处均在稳定地辐射能量，即其辐射出射度恒定。所以，可以将该量作为刻画微波暗室系统的特征量。利用微元分析法，建立墙面上各处特征量之间相互作用的关系，及它们与天线的关系。利用余弦辐射特性，将诸墙面各处微元辐射至静区的功率积分求和，从而得到静区从墙面接收的总反射功率，最后计算静区从诸墙面得到的反射信号功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比。

5.1 模型准备

5.1.1 模型假设

- (1) 视在天线发射功率强度分布满足余弦辐射体，且仅向半空间辐射功率；
- (2) 不计入模拟器的天线及其安装支架，以及导引头本身对辐射的影响；
- (3) 天线功率的变化速度远小于暗室中场的衰减速度，暗室很快达到平衡状态。

5.1.2 余弦散射体的性质

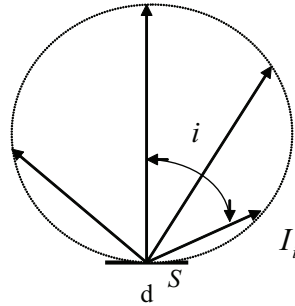


图 14 余弦散射体示意图

在如图14所示的余弦散射体中

$$I = I_0 \cos i, \quad -\frac{\pi}{2} \leq i \leq \frac{\pi}{2} \quad (47)$$

故

$$\Phi = \int I(i, \varphi) d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(i, \varphi) d\omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_0 \cos(i) \sin i di = \pi I_0 \quad (48)$$

即余弦散射体的总辐射功率等于其在主轴方向上辐射强度的 π 倍。

5.2 微元辐射出射度耦合模型

将暗室内表面除静区之外的部分平均划分为 N 个面元，其面积 dS 很小，可以认为在每个面元上的辐射出射度 M 是相等的。在每个面元上满足方程：

$$\Phi'_{is} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \Phi'_{ij} = \Phi'_i \quad (49)$$

其中 $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ， Φ'_{is} 是第 i 个面元从天线处接收到的功率中的有效辐射部分（即二次辐射功率）， Φ'_{ij} 是第 i 个面元从第 j 个面元处接收到的功率中的有效辐射部分， Φ'_i 是第 i 个面元的辐射功率。

5.2.1 墙面微元之间的辐射出射度关系分析

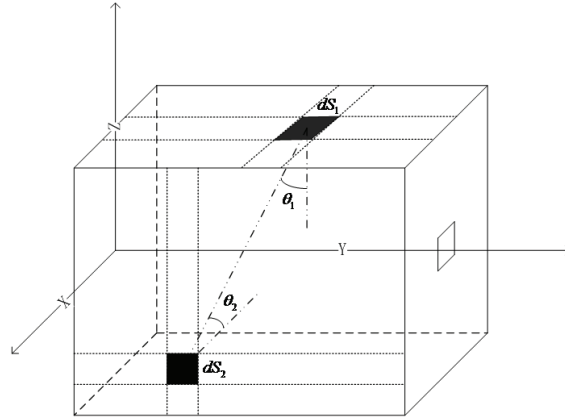


图 15 墙面面元之间的辐射出射度关系示意图

如图15，考虑面元 dS_2 对 dS_1 的影响。设 dS_2 的辐射出射度为 M_2 ， dS_1 的辐射出射度为 M_1 ， dS_2 在 dS_1 方向上的辐射强度为 I_{12} 。根据式48得

$$I_{12} = \frac{M_2 dS}{\pi} \cos \theta_2 \quad (50)$$

设两面元中心的距离为 r_{12} ，则 dS_2 的辐射功率在 dS_1 上产生的辐射照度为

$$E_{12} = \frac{I_{12} \cos \theta_1}{r_{12}^2} = \frac{M_2 dS \cos \theta_2 \cos \theta_1}{\pi r_{12}^2} \quad (51)$$

这部分功率引起的二次辐射功率为

$$\Phi'_{12} = E_{12} dS \rho \cos \theta_1 = \frac{M_2 dS \cos \theta_2 \cos \theta_1 dS \rho \cos \theta_1}{\pi r_{12}^2} \quad (52)$$

由此可得第*i*个面元 dS_i 从第*j*个面元 dS_j 接收到的功率的二次辐射部分为

$$\Phi'_{ij} = \lambda_{ij} M_j dS \quad (53)$$

其中

$$\lambda_{ij} = \frac{dS \cos \theta_{ij,j} \cos \theta_{ij,i} \rho \cos \theta_{ij,i}}{\pi r_{ij}^2} \quad (54)$$

式中, $\theta_{ij,j}$ 、 $\theta_{ij,i}$ 分别为 dS_i 和 dS_j 中心点连线与两者的法线方向的夹角。

5.2.2 天线与墙面微元辐射出射度的关系

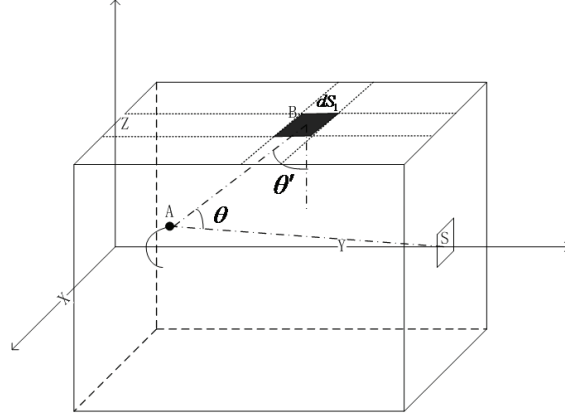


图 16 天线与面元辐射出射度的关系示意图

如图16, 其中A点为视在天线位置, S点为静区的中心点, B点为 dS_1 的中心, θ 为 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AS} 的夹角, θ' 为AB与 dS_1 的法线方向的夹角。结合48式知, 此时天线在指向 dS_1 方向上的辐射强度为

$$I_{1s} = \frac{\Phi_s}{\pi} \cos \theta \quad (55)$$

其中 Φ_s 为视在天线的辐射功率。设天线到 dS_1 的距离为 r_{1s} , 假设天线是无后向辐射的余弦辐射体, 则天线的辐射功率在 dS_1 上产生的辐射照度为

$$E_{1s} = I_{1s} \frac{\cos \theta'}{r_{1s}^2} = \begin{cases} \frac{\Phi_s \cos \theta \cos \theta'}{\pi r_{1s}^2} & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \theta \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad (56)$$

所引起的二次辐射功率为

$$\Phi'_{1s} = E_{1s} dS \rho \cos \theta' = \begin{cases} \frac{\Phi_s \cos \theta \cos \theta' dS \rho \cos \theta'}{\pi r_{1s}^2} & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \theta \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad (57)$$

故第*i*个面元从视在天线接收功率的二次辐射部分为

$$\Phi'_{is} = b_i dS \quad (58)$$

其中

$$b_i = \begin{cases} \frac{\Phi_s \cos \theta_{sS,si} \cos \theta_{si,i} \rho \cos \theta_{si,i}}{\pi r_{1s}^2} & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \theta \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad (59)$$

式中, $\theta_{sS,si}$ 为天线与静区连线和天线与 dS_i 中心连线的夹角, $\theta_{si,i}$ 为天线与 dS_i 中心连线和 dS_i 法线方向的夹角。

5.2.3 墙面微元辐射出射度方程

对于面元 i ，其辐射功率为

$$\Phi'_i = M_i dS \quad (60)$$

结合式(59)、(53)、(54)、(58)、(59)、(60)，可得

$$b_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} M_j = M_i \quad (61)$$

利用各微元中心点和视在天线的位置及辐射特性，可以求出所有的 b_i 和 λ_{ij} ，而各微元处的辐射出射度 M 是未知的。故利用 N 个微元可得到一个 N 元一次方程组：

$$\begin{cases} b_1 + \sum_{j=2}^N \lambda_{1j} M_j = M_1 \\ b_2 + \sum_{j=1, j \neq 2}^N \lambda_{2j} M_j = M_2 \\ \vdots \\ b_N + \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{Nj} M_j = M_N \end{cases} \quad (62)$$

即

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{b} \quad (63)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_{12} & \cdots & -\lambda_{1N} \\ -\lambda_{21} & 1 & \cdots & -\lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{N1} & -\lambda_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (64)$$

解此方程组即可以得到各面元的辐射出射度 $\mathbf{M} = [M_1 \ M_2 \ \cdots \ M_N]^T$ 。

针对题目中所给定的情况，用计算机可以计算出天线位于不同位置时暗室内表面的辐射出射度分布。 $\rho = 0.5$ ，视在天线位于最左端时其分布如图17：

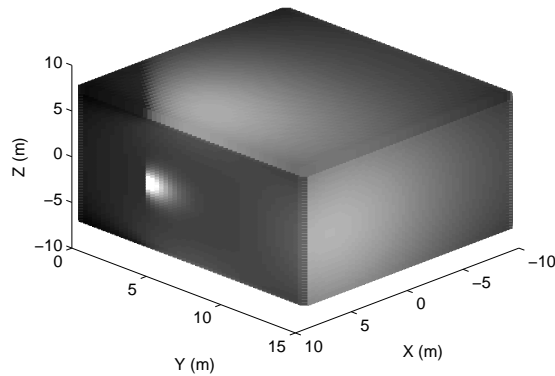


图 17 视在天线位于最左端时辐射出射度分布如图

图17中可以看到墙面上一小部分区域辐射出射度很大，这是因为信号源距离此区域很近，很大一部分功率照射在这块区域上，使得它的辐射出射度变大。信号源是余弦辐射体，使得其后的墙面上接收功率很小，出射度也很小，因此图中左侧有深色的影区。

5.3 静区接收功率的计算

5.3.1 反射功率计算

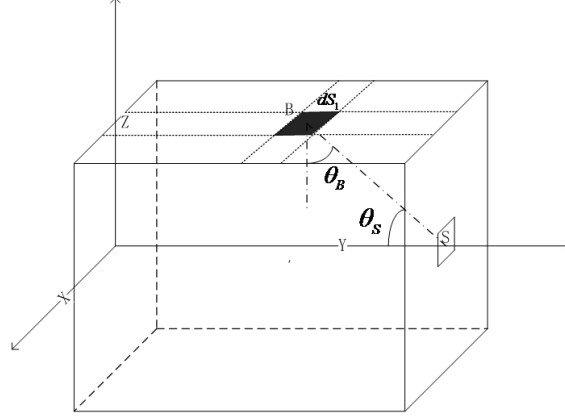


图 18 面元在静区方向上的辐射强度示意图

如图18， dS_1 的辐射能量为 $M_1 dS$ ，且 dS_1 为余弦辐射体，故其在静区方向上的辐射强度为

$$I_{1S} = \frac{M_1 dS}{\pi} \cos \theta_B \quad (65)$$

故由 dS_1 反射到静区的功率为

$$\Phi_1 = I_{1S} \frac{\cos \theta_S dS}{r_{1S}^2} = \frac{M_1 dS \cos \theta_B \cos \theta_S dS}{\pi r_{1S}^2} \quad (66)$$

其中 r_{1S} 为 dS_1 中心点到静区中心点的距离。同样可求得 dS_i 反射到静区的功率 Φ_i ，故总的反射功率为

$$\Phi_{refl} = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (67)$$

5.3.2 直射功率计算

类似以上的分析过程，可以得到

$$\Phi_{dire} = \int \int_{S'} [(\Phi_s \cos \theta_{sS'}) / (\pi r_{sS'}^2)] dS' \quad (68)$$

其中 dS' 为静区内微元积分区域 S' 为静区区域， Φ_s 为视在天线功率， $\theta_{sS'}$ 为天线与静区微元中心连线和静区微元法线方向的夹角， $r_{sS'}$ 为天线与静区中心的距离。

5.4 暗室吸波效果分析

静区接收的反射与直射功率之比为

$$\gamma = \frac{\Phi_{refl}}{\Phi_{dire}} \quad (69)$$

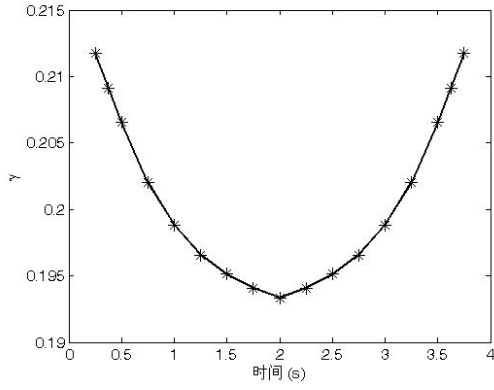


图 19 $\rho = 0.5$, γ 值随时间变化的曲线

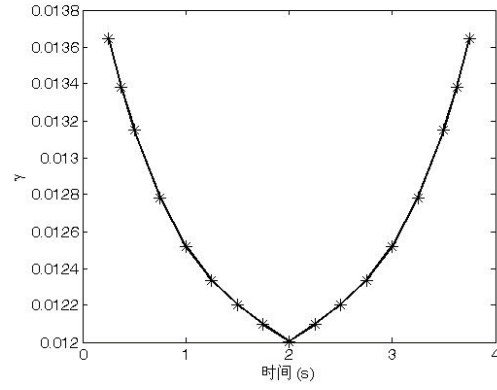


图 20 $\rho = 0.05$, γ 值随时间变化的曲线

$\rho = 0.5$ 与 $\rho = 0.05$ 时, 数值计算得到的 γ 值随时间变化的曲线分别为图19和20
通过图19和20, 可以得出

(1) $\rho = 0.5$ 时, 视在天线在圆弧上的任何位置, γ 值均大于0.03, 不能满足仿真技术要求。其最大值为0.2117, 最小值为0.1934; $\rho = 0.05$ 时, 视在天线在圆弧上的任何位置, γ 值均小于0.03, 能够满足仿真技术要求。其最大值为0.0136, 最小值为0.0120。

(2) 两种情况下 γ 均在 $t = 2s$, 即视在天线处于圆弧中间位置时达到最小。

为了分析此结果, 本文再给出 $\rho = 0.5$, 天线处于圆弧中间位置时墙面上各处的辐射出射度分布如图21所示:

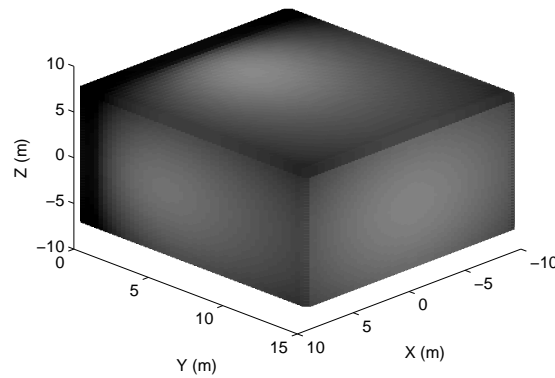


图 21 视在天线位于圆弧中心时辐射出射度分布图

比较图17和图21可以看出, 天线处于圆弧端点时静区附近的辐射出射度更大。一般情况下, 墙面上的照度与辐射出射度是正相关的, 出射度更大意味着辐射照度更大, 静区接收反射功率越大。同时天线越靠近圆弧端点, 它与静区中心连线和静区法线的夹角越大, 静区面对应的立体角更小, 直射功率越小。两个因素结合使得天线越靠近圆弧端点, γ 值越大。

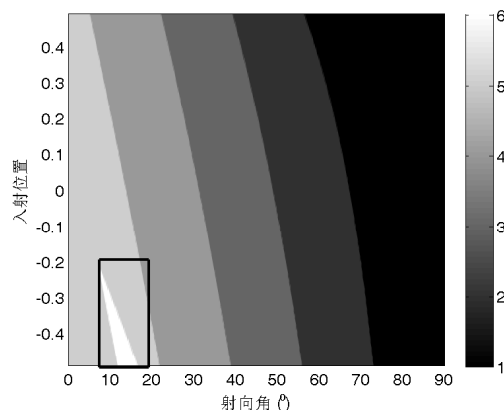


图 22 半尖劈角为 17° 反射次数随入射位置和射向角变化

6 模型的扩展

在问题一求解二维情况时，假设了辐射波线射向角 $\theta_i \geq \alpha$ ，这样从一侧入射的波线将首先在另一侧的尖劈斜面上发生反射。当 $\theta_i < \alpha$ ，以某些入射位置的波线将首先在同侧的尖劈上发生反射，在尖劈吸波体性能的实际研究中意义不大。图14给出了当半尖劈角为 17° 时，反射次数随入射位置和射向角变化的仿真结果。图中黑框中所示，在某些入射位置和射向角下，反射次数增加一次，这主要是波线首先在同侧尖劈上发生了反射。由于竞赛时间有限，没有给出这种情况下的解析解。

7 模型的评价

问题一中，引入特征波线，建立了任意入射波线的反射过程模型，得到反射次数与诸几何参数之间的解析关系，考虑了波线入射位置的影响，具有广泛的适用性。引入反射次数，求解得到了反射波线的方向和反射波辐射强度与已知反射率和诸几何参数的解析关系。本文仅给出了当入射线射向角大于等于半尖劈角的解析解，其余情况在模型的扩展中进行了讨论。

问题二中，基于稳态系统下，墙面微元辐射出射度恒定，建立了微元辐射出射度耦合模型，综合考虑墙面之间的影响，及天线对墙面的辐射。将静区接收反射信号能量的求解转化为各个微元对静区辐射能量的积分，易于求解。模型不足之处在于采用均匀网格划分，若要获得较高精度，网格数较多，计算量大，可以研究基于辐射出射度分布的自适应网格划分方法，以提高计算速度。

参考文献

- [1] 刘顺华等，电磁波屏蔽及吸波材料，北京：化学工业出版社，2007.8。
- [2] Bhag Singh Gurn, Huseyin R. Hiziroglu, Electromagnetic Field Theory Fundamentals, 周克定，张肃文等译，北京：机械工业出版社，2000。
- [3] 张以谟，应用光学，北京：机械工业出版社，1988。