1 问题假设

本文根据 Ad Hoc 网络中的区域划分和资源分配问题的一些要求，为了达到简化模型的目的，除问题中已给出的假设外，仅以可不作出以下假设

（1）本文考虑在指定区域 1000×1000 的范围内，假设均放置等大小的圆，并且使其在区域范围内对称（仅对无湖的情况考虑对称）。

（2）假设两圆相切不相交时不属于相邻的情况

（3）假设在一个节点有多个信道的情况下，多信道可以同时工作。

（4）假设转发也可以看作是一次接收和一次发射。

注：部分问题涉及到的假设，在相应问题中给出。

2 参数说明

R：一跳覆盖区圆的半径;

θ：相邻两圆公共面积所确定弦长对应的圆心角；

W：单个节点的发射功率；

h：单个节点的最大传输距离；

n：正方形区域内的节点总数；

M：整个网络通信中，数据包丢失的几率

3 问题分析

3.1 对于问题一的分析

(1) 对覆盖整个网络所用最少圆的问题分析，要考虑一个实际问题，即对称性。通过分析，必须保证网络的覆盖对称，这样才能保证所用的圆的数量最少。还要满足任意两个相交的圆的面积要大于 5%，通过后面的定量计算，使得任意一个圆都和周围的六个圆相交，才能符合。

(2) 对信道选择的理解为，任意两个相邻的圆均要拥有不同的频率，并且要选择最少的频率来填充。此问题类似于用最少的颜色来填充地图问题，属于离散数学方面的问题。

(3) 对于网络抗毁性的理解

随机抽掉一定比例的节点后，只考虑剩余的节点是否任意两个都可以通信，即为连通即可。故当任意一个节点周围均匀分布的所有节点都被抽掉时，网络会有一个节点无法与外界通信，这也就是网络抗毁性研究的临界情况。

3.2 对问题二的分析

由于半径是可变化的，可先考虑无湖情况下，采用什么样的一跳覆盖区可以使得全部圆半径之和最小。在此基础上，考虑有湖情况下，改进现有方案。

3.3 对问题三的分析

采用基于节点的划分方式，可以将实际问题抽象为，在 1000×1000 的正方形区域内，用半径为 75-100 的圆将节点全部覆盖（允许在没有节点的区域内不进行覆盖）。这样的模型要满足这样的条件，任意相交的两个圆的重叠部分的面积要大于其中的大圆面积的 5%，并且使得这样的所有大小不等的圆的半径之和最小。

3.4 对问题四的分析

基于问题三的模型，利用节点的划分方式以及概率的计算方法，进行定量的计算并比较。考虑节点移动的时候，其所覆盖的区域的半径也在变化（参考问题三的模型与算法），这样当其走出最大可能半径范围而又未进入其他覆盖区，则此时其发生通信中断。计算这个最大半径的值与问题三的模型进行比较，得出结

果。

3.5 对问题五的分析

本问题所要解决的目标是节能，并使第一个退出网络的节点的时间尽量长。则根据题设，半径越小，则越能节省能源，使得网络的周期延长。基于此思想，可以列出能量相等的公式，得出所要求的模型中圆的半径与题设中给的半径 100 的比值关系，这样就能确定最优答案。

电池的总能量是可看作固定常量，题中假设覆盖半径为 100 发送状态下的工作总时间是 400 个时间单位，可看作半径 100 时正常工作 400t 电池能量耗尽。现要求工作 1200t，则可以求出满足条件的临界覆盖半径。

3.6 对问题六的分析

对问题五中的网络通信质量进行定量的分析，就是讨论数据包在申请接收的过程中，丢失的几率。可以将网络划分为两种状态，即“忙”（接收和发射中）与“闲”（等待中）。这样，让数据包去询问节点，是否可以接收，若“忙”则等待十个时间单位，若“闲”则进行接收，数据包最多可以进行 4 次访问，此时若还是没有被接收，则数据包丢失。然后进行概率计算，从而求得，在整个网络通信中，数据包丢失的几率。

4 模型建立

4.1 问题一

所有一跳覆盖区均为半径 100 的圆，按相邻两圆的公共面积分以下两种情况分析。

（1）相邻两个圆的公共面积不小于 5%

1）所需最少圆个数的模型建立

由已知条件则可得到如下方程：

$$\frac{2(S_{扇}-S_{三角形})}{S_{圆}}=5\% \qquad 即\ 2*(\frac{\pi R^2\theta}{360}-R^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})=5\%$$

其中θ为公共面积所确定的弦长对应的圆心角，示意图见图 1。

化简得到：$\frac{\theta}{180}-\frac{\sin\theta}{\pi}=5\%$

使用牛顿迭代法计算：

令 $F(\theta)=\frac{\theta}{180}-\frac{\sin\theta}{\pi}-0.05$

$$\theta_{k+1}=\theta_k-\frac{F(\theta)}{F'(\theta)}=\theta_k-\frac{\pi\theta_k-180\sin\theta_k-0.05*180\pi}{\pi-180\cos\theta_k}$$

令$\theta_0=57.1^\circ$可求得θ_1，代入编程公式求得较为精确的θ_k值。经过 15 次迭代，使θ_k趋近θ的真值：

表 1 牛顿迭代法计算机模拟（一维）

θk	θk 加减项	θk+1
57.1	-0.378344475	57.47834447
57.47834447	-0.076949773	57.55529425

57.55529425	-0.004672622	57.55996687
57.55996687	-1.79893E-05	57.55998486
57.55998486	-2.67173E-10	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486

取$\theta = 57.56^\circ$，则以其中任意一个圆为中心时满足条件的与其相邻的圆的个数$n = 360/57.56 = 6.254$ 。故 n=6 即为足以满足 5%条件并且浪费一跳区面积最少的最优解。

若将此相邻的 6 圆的圆心做连线，则可得到的图形是一个规则的六边形。要覆盖整个 1000×1000 的正方形区域，可看作是用若干规则的六边形依次相接直至覆盖整个区域。

下面计算覆盖整个区域所需圆的个数：

纵向考虑：

六边形两横边距离的一半即为圆形一跳覆盖区的一层排列距离，其值为相邻两圆的圆心距乘以$\cos 30^\circ$，即

$$d = 2R\cos\frac{\theta}{2}\cos 30^\circ = 2*100*\cos 30^\circ*\cos 30^\circ = 150$$

此外在边缘区还可利用的纵向长度为$a = R\sin\frac{\theta}{2} = 100*\sin 30^\circ = 50$ 。纵向需覆盖的长度 1000=6*150+50+50 ，即 6 层圆加上两个边缘相交圆可利用的长度刚好可以覆盖整个区域，所以满足条件时的纵向所需的圆为 7 排。

横向考虑：

任取左边缘一个圆形一跳区，它与其上排圆的左交点设为 B，与其下排圆的左交点设为 C，则 B 与 C 的连线即为可利用的面积的左起始点，如图 2 所示，经计算可证明此直线刚好经过此边缘圆的圆心 D。简单证明如下：

由θ=60°，则 AB=AC=BC=d+a=150+50=200。ABC 为等边三角形，故过 A 点向 BC 做垂线交 BC 于D'，由对称特性，圆心也 D 必在此垂线上。

AD 为两圆的圆心距，则$AD = 2R\times\cos 30^\circ = 2\times 100\times\sqrt{3}/2 = 100\sqrt{3}$ 。而$AD' = AB\cdot\cos\frac{\theta}{2} = 200\times\cos 30^\circ = 100\sqrt{3}$ 。$AD = AD'$且D与D'都在θ角的平分线上，故D与D'重合。此问题即可简化为直接采用圆心距来计算求解。

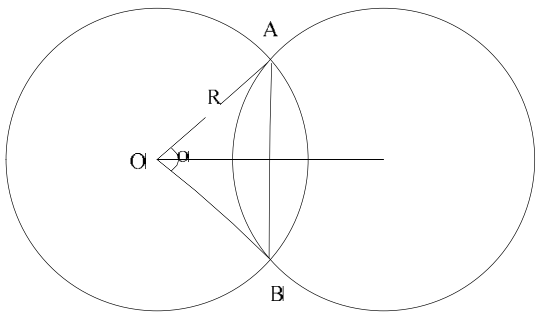

图 1　相邻两圆相交的情况分析

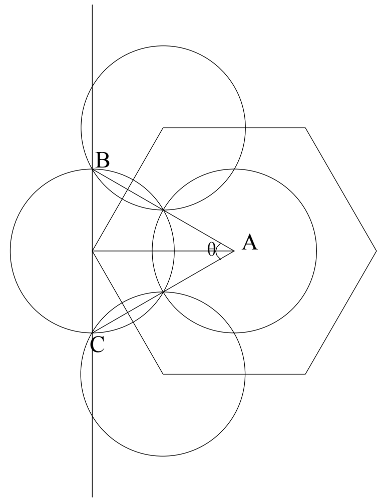

图 2　六边形表示法的横向边界情况

圆心距 $b = 2R\cos\dfrac{\theta}{2} = 2*100*\cos 30^{\circ} = 100\sqrt{3}$

横向所需的圆的层数为 $\dfrac{1000}{100\sqrt{3}} \approx 5.77$ ，故为能覆盖所有区域横向也为 6 层。

因此，可得到用六边形方式划分结果如图 3 所示，每个交点代表一个圆的圆心，用圆的形式画出如图 4 所示。

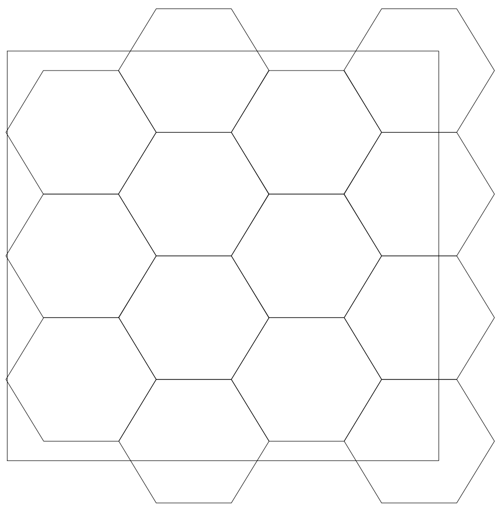

图 3　以六边形表示法覆盖所有区域

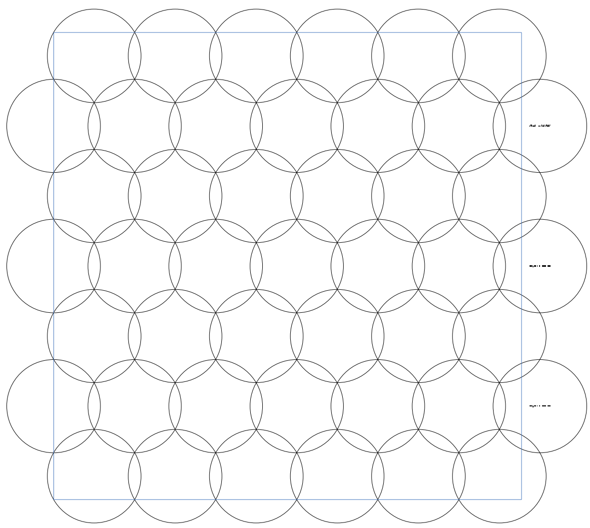

图 4　满足条件的区域划分

当一个圆只有部分在正方形区域内，也按一个计算，故满足条件所需的圆最少为 $7\times3+6\times4=45$ （个）。

2）所需圆的信道分配

由于处于方形一定范围内的圆同时与六个圆相邻，加上本身，最少需要三种信道，如图 5 所示。

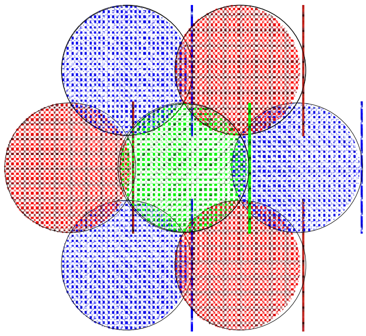

图 5　所需圆的信道分配

用改进的 Welch Powell 法对上图进行信道分配：
① 将第一个信道分配给第一个圆，并以离第一个圆最近的不相邻的圆的圆心，到第一个圆的圆心的距离为半径画圆，对圆心位于所画圆周上的圆分配同样的信道。
② 用第二个信道对尚未分配信道的圆重复 A)，用第三个、第四个……信道继续这种做法，直到所有的点全部分配信道为止。

从上面的结果可以看到，使用三个信道即能满足要求。如图 6：

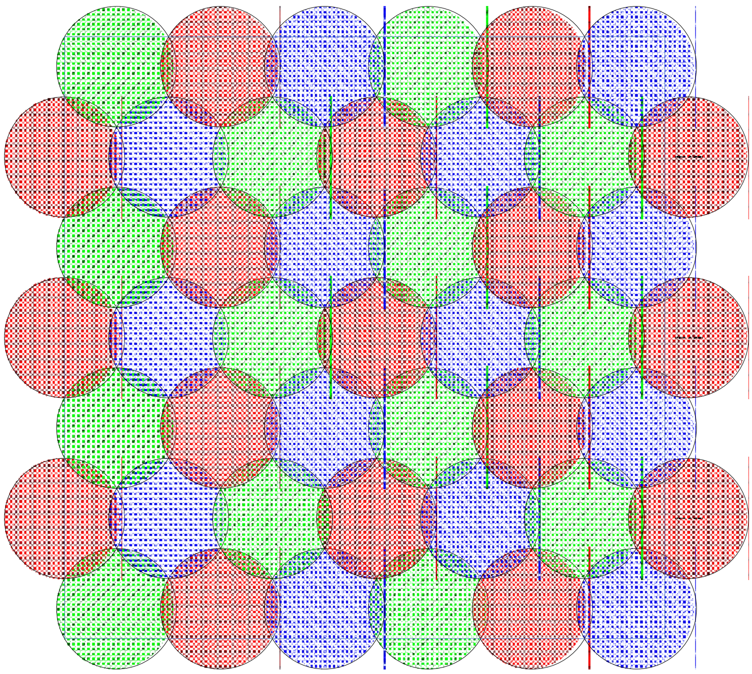

图 6　满足条件的圆的信道分配

3）网络的抗毁性

① 对此问题的注释与说明

首先，在此网络中任意一个圆内都相同的分布着 7 个节点，以每一个节点为中心，周围相邻最近的等距离的六个点，全部抽掉的时候，则圆心附近区域没有被覆盖，即网络瘫痪。

其次，边界的情况应特殊考虑，有些边界点周围相邻最近的等距离的点不是 6 个。如下图，存在周围有 3 个，4 个以及 5 个的情况。这样，在作此问题的时

候应全面考虑，方才周到。

再次，题目中，抽取的点数为总数的 2%，5%，10%，15%。通过计算，这样的比例抽取，不是整数，那么我们假定取小于此数的最大整数来计算。由于，问题的目的是要比较抽取不同比例后的抗毁性的问题的比较，基于此做出假设，并不影响问题的解决。

② 具体的做法如下：

公式：$\sum_{I=3}^{6} \frac{C_{N-I}^{M_J-I}}{C_N^{M_J}} \times K_I$ （J=1，2，3，4）

说明：第一， J 取 1，2，3，4 分别代表抽取节点为 2%，5%，10%，15%的情况

第二， $I \le M_J$ N=152

$M_1 = N \times 2\% \approx 3$ $M_2 = N \times 5\% \approx 7$

$M_3 = N \times 10\% \approx 15$ $M_4 = N \times 15\% \approx 22$

（I 是某点瘫痪时周边抽掉的点数，M_J 是随机抽取的点数）

第三，K_3=13 K_4=24 K_5=3 K_6=112

（K_J 分别代表抽取 3，4，5，6 个点后网络瘫痪，不同类型的点的个数）

具体计算：

a．当抽取的比例为 2%时，即 M_1=3

$$\frac{C_{152-3}^{3-3}}{C_{152}^{3}} \times 13 = 2.2656 \times 10^{-5} = 2.2656 \times 10^{-3}\%$$

b. 当抽取的比例为 5%时，即 M_2=7

$$\frac{C_{152-3}^{7-3}}{C_{152}^{7}} \times 13 + \frac{C_{152-4}^{7-4}}{C_{152}^{7}} \times 24 + \frac{C_{152-5}^{7-5}}{C_{152}^{7}} \times 3 + \frac{C_{152-6}^{7-6}}{C_{152}^{7}} = 0.004723 = 0.4723\%$$

c. 当抽取的比例为 10%时，即 M_3=15

$$\frac{C_{152-3}^{15-3}}{C_{152}^{15}} \times 13 + \frac{C_{152-4}^{15-4}}{C_{152}^{15}} \times 24 + \frac{C_{152-5}^{15-5}}{C_{152}^{15}} \times 3 + \frac{C_{152-6}^{15-6}}{C_{152}^{15}} = 0.01188 = 1.188\%$$

d. 当抽取的比例为 15%时，即 M_4=22

$$\frac{C_{152-3}^{22-3}}{C_{152}^{22}} \times 13 + \frac{C_{152-4}^{22-4}}{C_{152}^{22}} \times 24 + \frac{C_{152-5}^{22-5}}{C_{152}^{22}} \times 3 + \frac{C_{152-6}^{22-6}}{C_{152}^{22}} = 0.04378 = 4.378\%$$

③ 对比分析如下（见图 7)：

1．当取的点越少，抗毁性越好。

2．如下图，抗毁性的分布与抽点的数量的关系为指数关系。

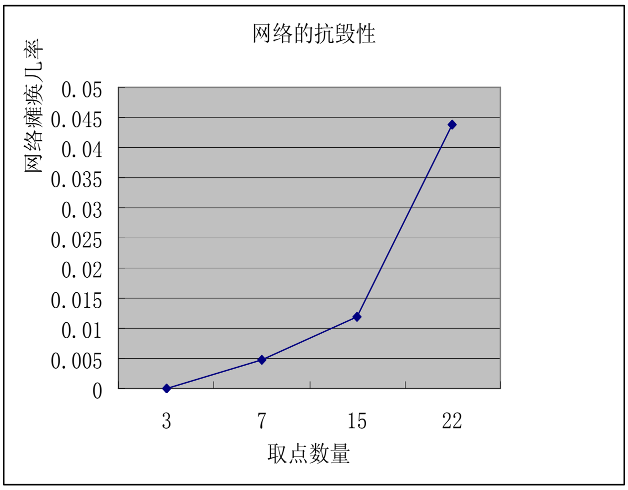

图 7　取点数量与网络瘫痪的关系

综上所述：由于抽点数量与网络瘫痪几率的比值近似可以看成指数分布，应尽量少抽取节点才能尽可能的保证网络不被摧毁

(2) 相邻两个圆的公共面积不小于 18%

1）所需最少圆的个数

假设两圆相切不相交时不属于相邻的情况。则采用如上方法计算得到 n=4，则考虑用四边形覆盖整个区域，横向纵向情况相同，只考虑一种即可。圆心距经计算为$100\sqrt{2}$ ，边缘可利用长度刚好为圆心距的一半$50\sqrt{2}$，而$\dfrac{1000}{50\sqrt{2}} \approx 14.14$ ，故横向纵向需要的圆形一跳区均为 7 排，则所需的最少圆的个数为$8 \times 8 = 64$（个）。设计结果如图 8 所示。

2）上述覆盖区域方法所需圆的信道分配

分配方法同上，可得到所需信道数为 2，具体分配如图 9 所示。

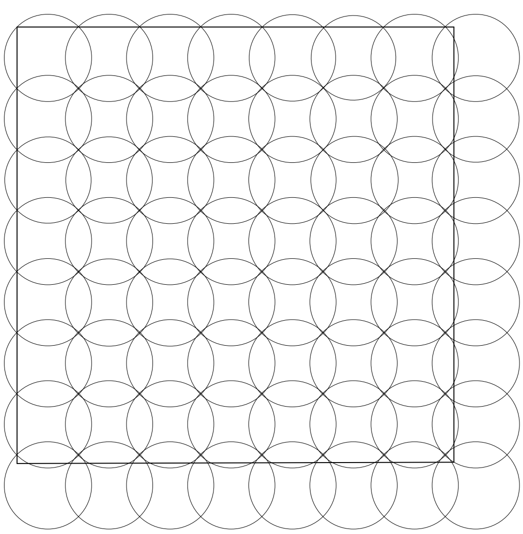

图 8　满足条件的区域划分

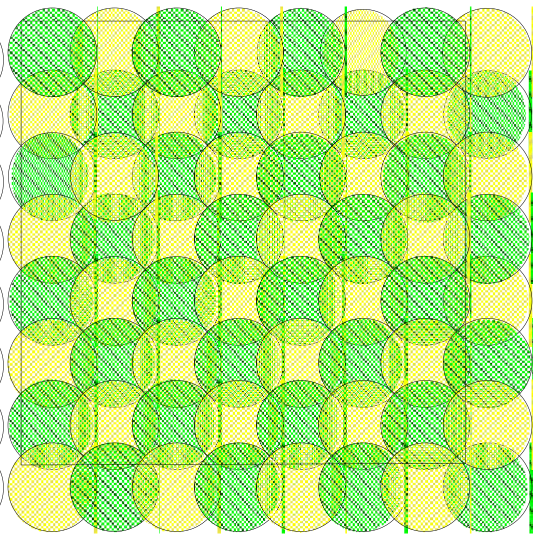

图 9　所需圆的信道分配

3）网络的抗毁性

同（1）题的抗毁性求法，应用上述公式，可求得抽掉节点百分比不同各种情况的抗毁性结果（见图 10）。

说明：

① 在上面的图中不难得到如下结果

A. 抽掉周围 2 个节点则网络瘫痪，这样的节点共有 4 个

B. 抽掉周围 3 个节点则网络瘫痪，这样的节点共有 32 个

C. 抽掉周围 3 个节点则网络瘫痪，这样的节点共有 20 个

D. 抽掉周围 3 个节点则网络瘫痪，这样的节点共有 24 个

E. 抽掉周围 3 个节点则网络瘫痪，这样的节点共有 96 个

这样，共有节点 176 个。(值得注意的是，与 1 问不同的是，这里有 56 个点在 1000×1000 正方形外面，考虑到所有正方形内的连通，所以算抗毁性是，将在外面的节点考虑到公式里面)

② 当分别抽掉 2%，5%，10%，15%节点时，得出的结果并非整数。同上一问假设相同，假定取小于此数的最大整数来计算，则分别为 3，8，17，26。

计算结果：

A. 当抽掉 2%时，网络瘫痪的几率为 0.0815%

B. 当抽掉 5%时，网络瘫痪的几率为 0.932%

C. 当抽掉 10%时，网络瘫痪的几率为 6.11%

D. 当抽掉 15%时，网络瘫痪的几率为 18.7%

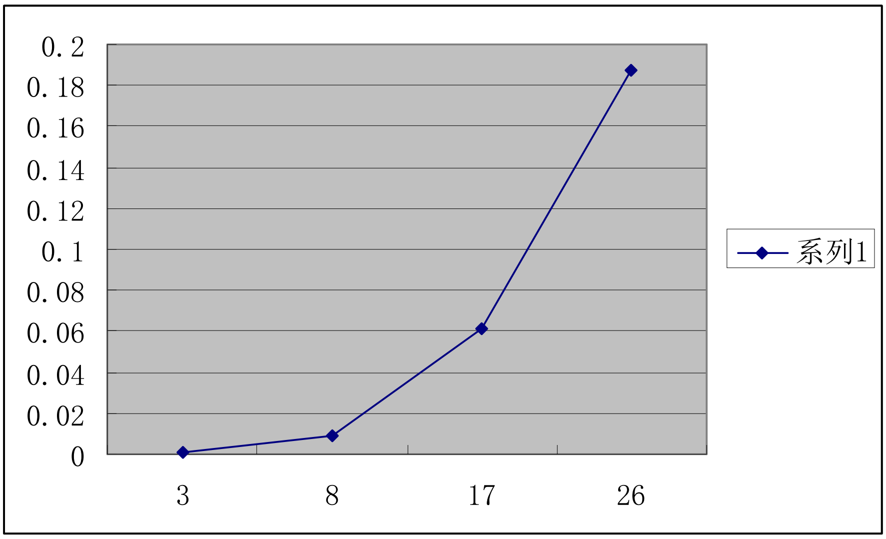

图 10　取点数量与网络瘫痪的关系

4.2 问题二

(1) 若先不考虑湖泊问题，一跳覆盖区圆形的半径在 75～100 间任意选择。则任意两个相邻的圆可分为以下几种情况：两圆半径相同且为最大值（R1=R2=100）；两圆半径相同且为最小值（R1=R2=75）；两圆半径不同取值为 75～100。按照问题一的排列方式（以正六边形为单位），每个圆与六个圆相邻，弧被等分为六份，每份对应一个公共弦，一个公共面积和一个 60° 的圆心角。其中设公共弦两端

点与圆心组成的三角形面积为单位有效面积（整个面积近似由单位有效面积组成，如下图 11）。

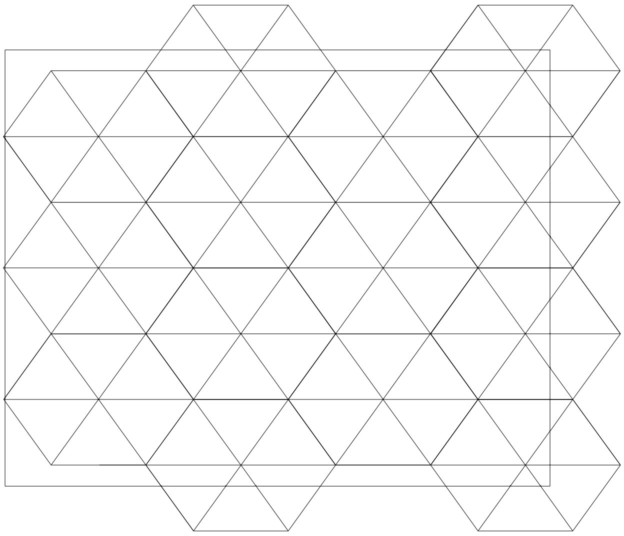

图 11　问题 2 示意图

当满足所求条件“全部圆半径之和为最小”时，两圆相交公共面积为 5%，两个单位有效面积与两半径和的比值为最大，即用单位面积填满正方形时所需的半径和最小。设相交两圆的两个单位面积之和为 S（当 R 不相等时两单位面积不等），左圆单位有效面积为 $S1$，右圆单位有效面积为 $S2$，公共弦长之半为 a，单位有效面积与两半径和的比值为 k， R_1 对应圆心角 θ， R_2 R2 对应圆心角 α。则

$$k = \frac{S}{R_1 + R_2} = \frac{S_1 + S_2}{R_1 + R_2}$$

假设变化过程为右圆半径由 100 减小到 75（过程 1），而后左圆半径同样由 100 减小到 75（过程 2），试推导 k 与半径减小的关系，得出 k 的最大值。由上式得出在过程一中 R_2 从 100 减小到 75，假设弦长 a 与 R_2 同级减小，则 $S1$ 与 R_2 同级减小， $S2$ 与 R_2^2 同级减小， R_1 不变，则 k 随 R_2 的减小而减小。同理， k 随 R_1 的减小而减小。通过以下三种情况讨论加以验证：

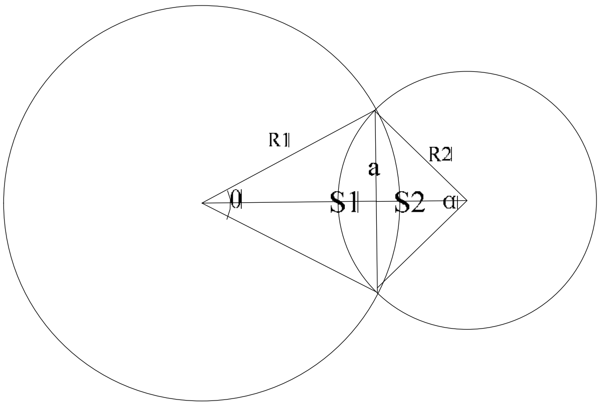

图 12　单位有效面积与两半径和的比值证明示意图

① 当 R1=R2=100 时，$\theta=\alpha=57.56°$，此时

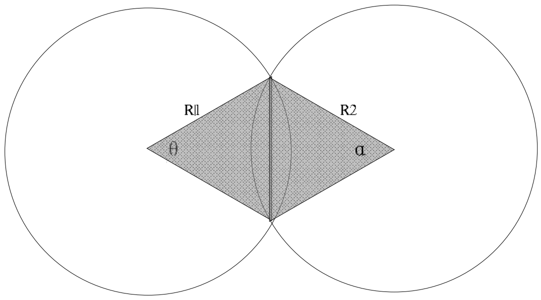

图 13 R1=R2=100 图示

$$S=\frac{\theta\pi R_1^2}{360}+\frac{\alpha\pi R_2^2}{360}-5\%\pi R_1^2=2697378\pi=8475.319$$

$$k=\frac{S}{R_1+R_2}=\frac{S}{2R_1}=42.3766$$

② 当 R1=100，R2=75 时，此时$\theta<60°$，$\alpha>60°$，得方程组：

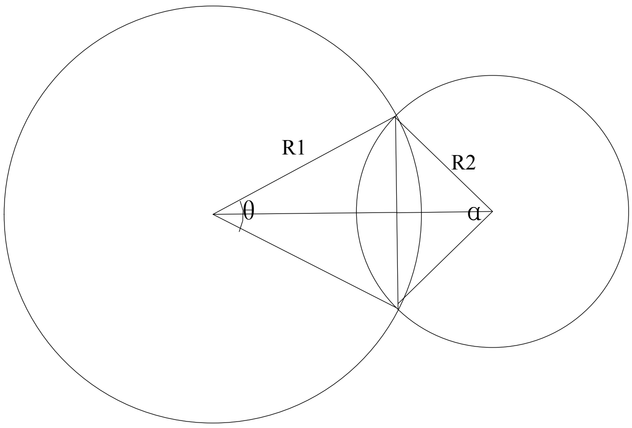

图 14 R1=100，R2=75 图示

$$\begin{cases} R_1\sin\frac{\theta}{2}=R_2\sin\frac{\alpha}{2} \\ 5\%\pi R_1^2=(\frac{\theta\pi R_1^2}{360}-\frac{1}{2}*2R_1\sin\frac{\theta}{2}R_1\cos\frac{\theta}{2})+(\frac{\alpha\pi R_2^2}{360}-\frac{1}{2}*2R_2\sin\frac{\alpha}{2}R_2\cos\frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

令

$$F_1(\theta,\alpha)=R_1\sin\frac{\theta}{2}-R_2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$F_2(\theta,\alpha)=(\frac{\theta\pi R_1^2}{360}-R_1\sin\frac{\theta}{2}R_1\cos\frac{\theta}{2})+(\frac{\alpha\pi R_2^2}{360}-R_2\sin\frac{\alpha}{2}R_2\cos\frac{\alpha}{2})-0.05\pi R_1^2$$

得非线性方程组

$$\begin{cases} F_1(\theta,\alpha)=0 \\ F_2(\theta,\alpha)=0 \end{cases}$$

求解上述方程组的牛顿迭代格式为

$$\begin{pmatrix} \theta_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \alpha_k \end{pmatrix} - \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha} \end{pmatrix}^{-1} \right|_{(\theta_k,\alpha_k)} \begin{pmatrix} F_1(\theta_k,\alpha_k) \\ F_2(\theta_k,\alpha_k) \end{pmatrix}$$

估计真值所在区间为θ_k（50，53），α_k（62，71），取初值θ_k=51，α_k=66，代入方程组通过十五次迭代编程计算。

表 2　牛顿迭代法计算机模拟（二维）

θk	αk	θk/2	αk/2	θk 加减项	αk 加减项	θk+1	αk+1
51	66	25.5	33	-0.8369	-0.0662177	51.8369	66.06622
51.8369	66.0662	25.9185	33.0331	-0.143823	0.51566736	51.980724	65.55055
51.9807	65.5506	25.9904	32.7753	0.0723577	0.00860988	51.908366	65.54194
51.9084	65.5419	25.9542	32.771	-0.000229	0.00504569	51.908595	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	7.897E-06	4.4716E-06	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	3.821E-12	6.3774E-11	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689

由表 2 解得的趋近真值为θ_k=51.908587，α_k=65.53689。

$$S=\frac{1}{2}R_1^2\sin\theta+\frac{1}{2}R_2^2\sin\alpha=6495.15393$$

$$k=\frac{S}{R_1+R_2}=\frac{S}{2R_1}=37.1152$$

③　当 R1=R2=75 时，θ=α=57.56°，此时

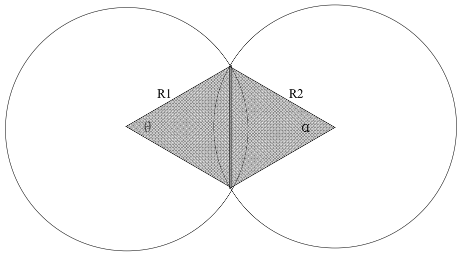

图 15　R1=R2=75 图示

$$S=\frac{\theta\pi R_1^2}{360}+\frac{\alpha\pi R_2^2}{360}-5\%\pi R_1^2=1517.5\pi=4767.367$$

$$k=\frac{S}{R_1+R_2}=\frac{S}{2R_1}=31.782$$

由上面证明得出，在不考虑边缘的情况下，当满足所求条件“全部圆半径之和为最小”时，两圆相交公共面积为 5%，两个单位有效面积与两半径和的比值为最大的“大圆相交”的分划方式成为首选。即 R=100 的大圆两两相交所的半径和最小，一大一小两圆相交次之，两小圆相交最大。

(2) 考虑湖泊存在时满足条件的区域分划

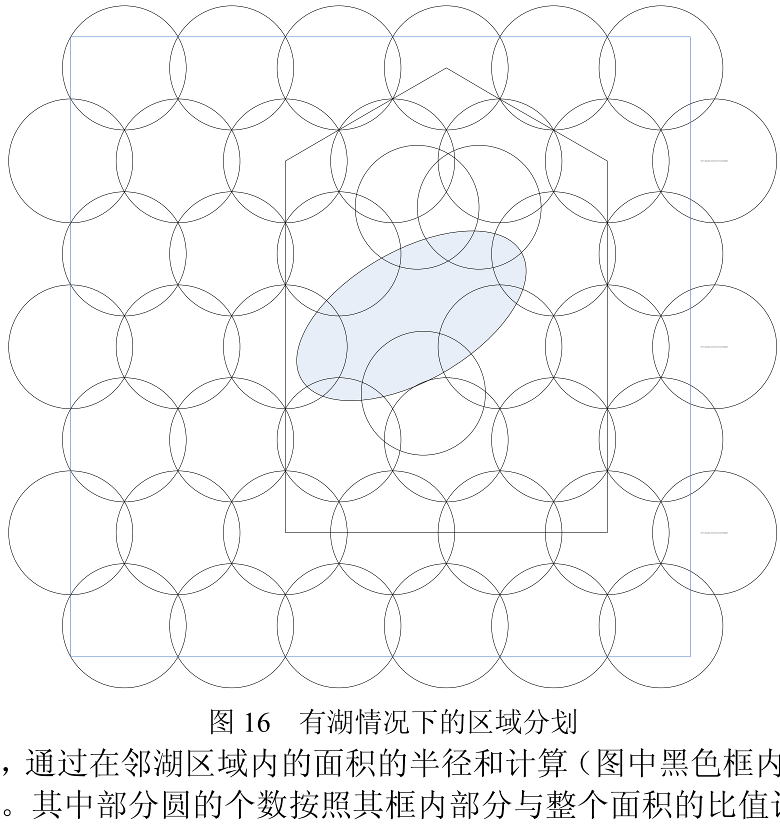

图 16　有湖情况下的区域分划

如上图，通过在邻湖区域内的面积的半径和计算（图中黑色框内的圆的个数×半径 100。其中部分圆的个数按照其框内部分与整个面积的比值计算）。当半径在 75～100 之间时，计算的半径为 100 时半径和最小。

(3) 信道分配方案

当如上图分布时，每个圆最多与 7 个圆相邻，则该单位最少需要分配 4 个信道。如下图

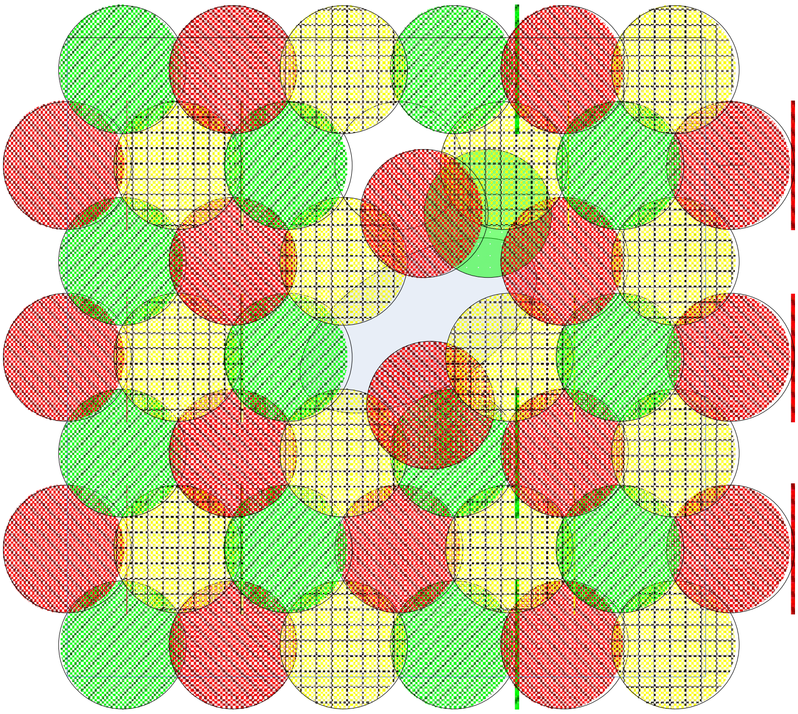

图 17　有湖情况下的最少信道分配

4.3 问题三

（1）当无湖存在条件下，在问题二中已证得，在不考虑边缘的情况下，R=100 的大圆两两相交所的半径和最小，一大一小两圆相交。本题首选以较大的半径划分区域。采用以下算法编程：

假设每个一跳覆盖区依然是以节点为圆心，计算覆盖后如还有没被覆盖的点，再取消圆心为节点的限制。

假设处于一条边缘上的点看成已被覆盖。

1)选择任意节点为起点（图中点 A_1），以 175.29497 为半径画圆（当两大圆相交面积为 5%时圆心距）。如果在圆的内部与圆的边缘距离 d_1 最小的点（图中点 B）和起点 A_1 的距离在 100～175.29497 之间，那么

2)以这个点 B_1 为新的圆心，175.29497 为半径再画圆

3)通过上一步的 A_1 点为圆心，100 为半径画圆，通过子程序 1 求得圆 B_1 半径 r_1（已知圆 A_1 半径和圆心距，相交面积为大圆面积的 5%），考察以 B_1 为圆心，半径为 100 的区域内若没有点与 B_1 点的距离在（r_1，100）之间，则以 r_1 为半径画圆。否则连接 B_1 点与圆内离 B_1 最远的点，并以此为半径画圆。

4)每个点设置一个二进制符号位和一个数据位（初值为 0），当节点在步骤 3 所画的圆内，第一位置 1。当节点（B_1）为圆心，数据位记录所在的较小的同心圆的半径。

5)重复此操作，直到第 n 次以 175.29497 为半径画圆后，没有节点在 100～175.29497 之间。

6)此时查找是否有节点的符号位为 0。如果有，通过查找第 n 次以 100～175.29497 为半径画圆时，是否还有点在圆内且符号位为 0。如没有，查找第 n-1 次直到第一次以 100～175.29497 为半径画圆的情况；如果有，查看圆的内部与圆的边缘距离 d_2 第二小的点 B_{n2} 和第 n 个起点 A_n 的距离是否在 100～175.29497 之间。如果在，通过子程序 1 求得圆 B_{n2} 半径 r_{n2}。以 B_{n2} 为圆心，半径为 100 的区域内若没有点与 B_{n2} 点的距离在（r_{n2}，100）之间，则以 r_{n2} 为半径画圆。否则连接 B_{n2} 点与圆内离 B_{n2} 最远的点，并以此为半径画圆。期间若出现下图情况，即当通过 A 点确定点 C 及 r_C，并以点 C 为圆心做圆时，若在半径 200 范围内有数据位不为零的点（即圆心），通过子程序 2（比较两圆半径大小，以大圆面积确定 5%面积，已知两圆半径，解得满足条件的圆心距 H），当圆心距 BC 在（H，r_C+r_B）之间，圆 C 与圆 B 相交但不满足相交面积为大圆面积的 5%，则分别以 A，B 为圆心，AC，H 为半径作弧。两弧相交于点 D。此时以点 D 为新的圆心，r_C 为半径做圆，则圆 D 与圆 A 和圆 B 相交的公共面积满足条件，且点 C 到点 D 的移动距离小于圆 C 半径的 1/3。新增节点 D，将 r_C 的值计入点 D 的数据位。

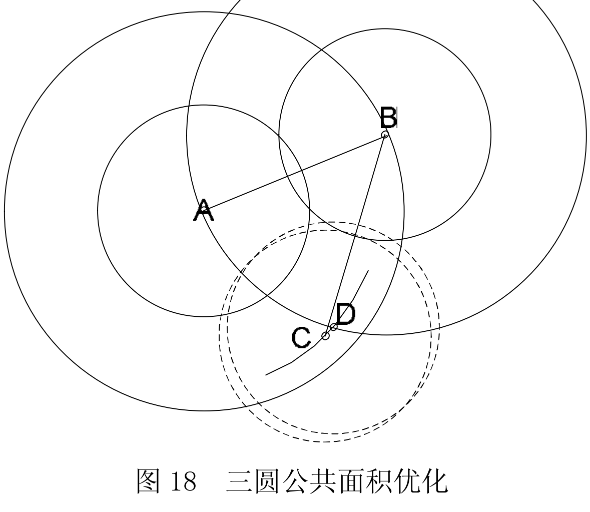

图 18　三圆公共面积优化

7)重复 6，直到没有节点的符号位为 0 或直到查看第一个起点 A_1 后仍有节点

的符号位为 0。当直到查看第一个起点 A_1 后仍有节点 A 的符号位为 0 时，以该点为圆心，（300-24.705= 275.295）为半径作圆（如图 19）。若无点在圆内，则该点不连通；若有点在圆内，找出与 A 点距离最近的节点 C，连接 AC，并以 C 点为圆心，100 为半径做圆,交 AC 于点 D。求 AC 上圆 E 半径=[AC-（100-24.705）]/2。以点 A 为起点在 AC 上找到点 E，并以 E 为圆心，AE 为半径做圆，则点 A 可连通。新增节点 E，将 AE 计入点节点 E 的数据位。

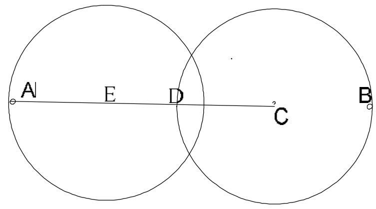

图 19　最远距离时的算法

注：（100-24.705）为公共部分面积中两段弧间的最大距离。

8)将所有节点的数据位相加，即为所有圆的半径和。

9)依次以 926 个点为起点，重复步骤 1～8，找出最小半径和及其区域分布方式。

子程序 1：已知圆 A_1 半径和圆心距，相交面积为大圆面积的 5%

子程序 2：比较两圆半径大小，以大圆面积确定 5%面积，已知两圆半径，解得满足条件的圆心距 H

（2）当有湖存在条件下，在运行上述程序之前，先将代入椭圆方程左端：

$$\frac{(x-550)^2}{205^2}+\frac{(y-550)^2}{105^2}=1$$

若结果小于 1,则该点在湖内，不予以考虑。剔除湖内点之后再运行 1～9 步程序。

区域连通的充分条件：运行程序后无未覆盖的节点

区域连通的必要条件：该节点与其距离最近的临节点之间的距离不大于 400-24.705=375.295

4.4 问题四

运动的方向角、速度是分别服从在[0，2π]、[0，2]上均匀分布的随机变量。

则　$E(\theta)=\pi$，$\sigma^2(\theta)=\frac{\pi^2}{3}$；$E(v)=1$，$\sigma^2(\theta)=\frac{1}{3}$。

$\varphi(\theta)=\frac{1}{2\pi}$，0＜θ＜2π；$\varphi(v)=\frac{1}{2}$，0＜v＜2；

400t/30t≈13.3，故 400 单位时间后前十个用户改变方向角和速度各 13 次。

前十个用户作折线运动，由于网络采用基于节点的划分方式，故随着用户的移动其周围的覆盖区也在发生变化。当其走出最大可能半径范围而又未进入其他覆盖区，则此时其发生通信中断。

其按平均值移动时，400t 后偏移量为 20。考虑改变方向角和速度最大的情

况，400t 后最大偏移量为

$$d=\sqrt{\left[(30\times6+10)\times\frac{3+\sqrt{3}}{3}\times\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]^2+\left[30\times\frac{3+\sqrt{3}}{3}(7-6\cos\frac{\pi}{\sqrt{3}})-10\times\frac{3+\sqrt{3}}{3}\times\cos\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]^2}$$

=33.09

即任意节点的偏移量的范围为 20～33.09，则 400 个时间单位后任一节点的可能位于以原初始位置为圆心，分别以 20、33.09 为半径的圆环内。

圆环面积可求：$S_{环}=\pi（R^2-r^2）=\pi\times\left(33.09^2-20^2\right)\approx2183.24$

以该节点初始位置为圆心，100 为半径画圆，找出在其范围内包含的所有问题三中确定的圆心点，圆心距可求，环形的内外环半径已知，则可求圆环与该圆心点所确定的圆的公共面积，计算圆内所有满足此条件的面积和 S_0，注意多圆相交面积不要重复计算。判断 $S_{环}-S_0$ 是否为 0，若为零则网络可正常工作，若大于零则部分网络将中断。

4.5 问题五

假设最大传输距离取极限情况即 h=2R，则单个节点的发射功率 $W=K_1h^3=K_1(2R)^3=8K_1R^3$，由于发射、接收、备用三种状态的功率之比为 11：10：1，故三种情况对应的功率分别为 W、10W/11、W/11。由题目所给数据可得节点总数为 n=926。

假设转发也可以看作是一次接收和一次发射，每个节点平均发射 25 次，则每个节点平均接收也是 25 次，以单个节点的能量情况为例计算：发射能量消耗 $E_{发}=W\times4\times25$，接收能量消耗 $E_{收}=\frac{10W}{11}\times4\times25$，备用时能量消耗 $E_{备}=(1200-4\times25\times2)\frac{W}{11}$。

假设在一个节点有多个信道的情况下，多信道可以同时工作。则实际消耗的总能量为 $E_1=（E_{发}+E_{收}+E_{备}）\times926=\frac{2870600}{11}\times8K_1\times R^3$。

由题设条件可知，当覆盖半径为 100 时，电池可工作的时间为 400t。且平均 1200t 时间内每个节点的发射次数为 25，则 400t 时间内每个节点的平均发射次数为 25/3。则按照上述方法可得：电池的总能量 $E_{总}=\frac{2870600}{33}\times8K_1\times100^3$。

实际工作中为使网络可以满足条件运行 1200t，则需要使 $E_1\le E_{总}$。

带入即得：$\frac{2870600}{11}\times8K_1\times R^3\le\frac{2870600}{33}\times8K_1\times100^3$

解得：$R\le69.34$

故为使其工作时间满足 1200t，则最大的覆盖半径应为 69。

区域划分方法可参照问题三中基于节点划分方法的编程思想。对组网方式可

以结合路由监测，动态监测每个节点的即时位置，随着节点的运动动态的改变组网方式，以提高网络的抗毁性。

4.6 问题六

（1）问题分析

对问题五中的网络通信质量进行定量的分析，就是讨论数据包在申请接收的过程中，丢失的几率。选取区域内任意一点，给出剩下的 N-1 个点对该点申请接受几率的数学公式，看其余点与所选点连线的几率。并将网络划分为两种状态，即“忙”（接收和发射中）与“闲”（等待中）。这样，让数据包去询问节点，是否可以接收，若“忙”则等待十个时间单位，若“闲”则进行接收，数据包最多可以进行 4 次访问，此时若还是没有被接收，则数据包丢失。然后进行概率计算，从而求得，在整个网络通信中，数据包丢失的几率。

（2）问题计算

公式如下：

$$M=\left\{\left[1-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]\times\frac{1}{6}\right\}^{4}$$

n=926 （网络区域内所有节点得数量）

M：整个网络通信中，数据包丢失的几率

应用泰勒展开公式：

$$\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\approx C_{n-1}^{0}-C_{n-1}^{1}\frac{1}{n-1}+C_{n-1}^{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{2}$$

近似计算 $M=4.8\times10^{-5}$

（3）通信质量评价

可以看出 M 的值相当小，百万分之四十八，数据包丢失几率很小，因此网络的通信质量相对较好，

5 模型结果的分析

通过上述的计算结果，可以看出基于圆覆盖全部面积方式的模型假设（即问题 1，2）可以较好的节省成本，但是网络抗毁性差，相邻两圆相交部分越大（即节点设置的越多），抗毁性越差。基于节点划分方式的模型假设（即问题三），可以较好的解决抗毁性差的问题。在后面的问题中，计算出了比较节能的区域划分方式，满足题设条件的圆半径为 69，并且该网络的建立，可以很好的解决通信质量问题。

6 模型的优缺点与改进方向

（1）基于圆覆盖全部面积的方式（即问题 1，2）

优　　点：技术要求不高，实际操作简单，易于实现，耗能相对较少，相对成本较低。

缺　　点：但是不能较高的抗毁性，网络寿命较短，出现信息不能传输到指定位置的几率大。

改进方法：可以在通信技术上进行改革，在能够保证较高的抗毁性的前提下，使得相邻圆重叠的面积尽量小，甚至可以相切，并保证所有圆的半径之和相对较小。这样可以最大限度的节省能量，减少服务的成本。但是有可能会增加维护的费用，具体操作还要在今后继续探索研究。

（2）基于节点划分方式（即问题 3，4，5，6）

优　　点：能保证较高的抗毁性，网络寿命较长，信息的传输接受能力强，较小的掉包率，通信质量高。

缺　　点：技术要求高，实际操作困难，不易于实现，耗能相对较多，相对成本较高。

改进方法：通过技术改革，简化实际操作，降低成本。

参考文献

[1]左孝凌,李为鑑,刘永才《离散数学》上海科学技术文献出版社 2003.6 P319
[2]唐焕文，秦学志《实用最优化方法》 大连理工大学出版社 2004.1
[3]李慶揚 《数值分析(第 4 版)》 清華大學出版社 2001.8.1