全国第二届部分高校研究生数模竞赛

题 目 空中加油问题的递推模型与调度策略 （B 题）

摘　　要：

本文首先对空中加油问题进行了分析，提取了相关性质，在此基础上建立了问题的递推模型。根据该模型，文中提出了一种启发式搜索算法。该算法计算复杂度低，适用性好。对应于辅机是否可以多次起飞，该算法分为两子算法。对这两种不同情况下的具体问题，本文设计了相关的优化函数。所有算法都在计算机中运行，并得到了相应结果。

值得指出的是，本文提出的启发式搜索算法十分高效。对于问题 1 和问题 2，该算法所得解是最优调度策略。对于问题 3，问题 4，问题 5，该算法所得解逼近最优调度策略。

参赛队号 1002

参赛密码 ____________

（由组委会填写）

空中加油问题的递推模型与调度策略 （B 题）

摘要：本文首先对空中加油问题进行了分析,提取了相关性质，在此基础上建立了问题的递推模型。根据该模型，文中提出了一种启发式搜索算法。该算法计算复杂度低，适用性好。对应于辅机是否可以多次起飞，该算法分为两子算法。对这两种不同情况下的具体问题，本文设计了相关的优化函数。所有算法都在计算机中运行，并得到了相应结果。

值得指出的是，本文提出的启发式搜索算法十分高效。 对于问题 1 和问题 2，该算法所得解是最优调度策略。对于问题 3, 问题 4，问题 5，该算法所得解逼近最优调度策略。

1．问题描述

对飞机进行空中加油，可以大大提高其直航能力。为了简化问题，可作如下假设。设 A 为空军基地，基地有一架作战飞机（简称主机）和 n 架加油机（简称辅机）。主机与辅机的速度和单位时间的耗油量均相同且为常数，油箱装满油后的最大航程均为 L（公里）。辅机可以对主机加油，辅机之间也可以相互加油。今主机要执行某作战任务（如侦察或空投），所有飞机在完成自身的任务后均要求返回基地。

主机的最大作战半径（简称作战半径）是指主机在 n 架辅机的协助下所能飞到的（并安全返回）离基地 A 的最远距离。

假设设飞机垂直起飞、垂直降落、空中转向、在地面或空中加油的耗时均忽略不计，每架飞机只能上天一次，求取 r_n。

若每架辅机可以多次上天，辅机从机场上空降落及在地面检修、加油、再起飞到机场上空的时间相当于飞行 $L/12$ 的时间，飞机第一次起飞、转向、在空中加油的耗时仍忽略不计，讨论作战半径。

若另有两待建的空军基地 A_1, A_2，有 n 架辅机，主机从基地 A 起飞，向一给

定的方向飞行，必须在 A 降落，辅机可在任一基地待命，可多次起飞，且可在任一基地降落。讨论基地选址和作战半径。

设 $ABCD$ 为矩形，$AB=4L$，$AD=2L$，A,B,D 为三个空军基地，主机从 A 起飞，到 C 执行任务（执行任务时间仍忽略不计）再返回 A。假设辅机起飞、降落的基地可任意选择，要求按最快到达并返回和最少辅机架数两种情况给出的作战方案。

2．求解结果

在此，在计算机上运行文中提出的算法，得到结果如下。

为表述方便， 以长度 L 为单位长度。

2．1 问题 1 与问题 2

此时每架辅机只能飞行一次，该算法所求解为最优解。求解结果如下：

r1＝0.66667，

r2＝0.83333

r3=0.91667

r4=1

r5=1.0556

r6=1.1111

r7=1.1611

r8=1.2111

r9=1.2444

r10=1.2778

当 n＝20 时，作战半径首次达到 1.5， r20=1.5093.

可以证明，当 $n\to\infty$，$r(n)\to\infty$。（可证 n 小于 r_n 的某一对数，限于篇幅，略去此证明）

2．2 问题 3

该算法所求解为近似最优解，其值小于或等于最优作战半径。也即该解不一定最优，但离最优解很近。

r1=0.83333

r2=1

r3= 1.1

r4=1.1944

r5=1.2659

r6=1.2667

r7=1.3889

r8=1.3988

r9=1.4333

r10=1.4861

其中取到该值的调度策略对应于算法中的搜索路径。

当 n=20 时，所求作战半径为 r20＝1.828。

可以证明，当 $n \to \infty$， $r(n) \to \infty$。

2．3 问题 4

对于两基地选址问题，对于任意 n，A1 和 A2 应处于同一直线上。

当 n＝1 时，AA1＝47/36,　A1A2=33/36，初始状态时辅机停于 A1，最优半径为 109/36;

当 n＝2 时，AA1＝47/36,　A1A2=58/36，初始状态时辅机一架停于 A1，一架挺于 A2，最优半径为 67/18;

当 n＝3 时，AA1＝59/36,　A1A2=58/36，初始状态时辅机一架停于 A，一架停于 A1，一架停于 A2，最优半径为 73/18;

当 n＝4 时，AA1＝131/72,　A1A2=5/3，初始状态时辅机一架停于 A，两架停于 A1，一架停于 A2，最优半径为 161/36;

相应达到最优半径的调度方案对应于算法的搜索路径。

2．4 问题 5

飞机去矩形地图 D 处执行任务， 其最短路径为由 A 到 D 的直线，单程路径长度为$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$。这可由当$n\to\infty$时，$r(n)\to\infty$得证。

算法求得的最少飞机架数为 **46 架**， 飞行路径为$A\to B\to D\to B\to A$，初始状态是 **33 架辅机停于 B，13 架辅机停于 A**。其调度策略对应于算法中的搜索路径。

值得指出的是，算法先由$B\to D\to B$确定 B 处辅机架数，再由$A\to B$确定对于 A 处最少飞机架数。其中 r_{33}＝2。

3．辅机单次起飞的递推模型与启发式算法

记主机单向飞行中（不考虑主机返回），p 架辅机能把空中加满油的主机送达的最远距离为h_p。

性质 1： 对于 p 架辅机，存在某一调度策略，其能把空中加满油的主机送达h_p处，则必定找到另一调度策略，使得 p 架辅机能从h_p处把油量为零的主机接回基地 A 处。

事实上，这两种调度策略是对称的。由此也可得到该性质的证明。

记主机与 q－1 个辅机整体单向飞行中（不考虑主机返回），另 p 架辅机能把空中加满油的主机与空中加满油的 q 个辅机送达的最远距离为$H_p(q)$，事实上，此时主机与 q－1 个辅机整体中，每两个飞机间都没有区别。显然有$H_1(q)=h_q$。

性质 2： $H_1(q)=\dfrac{1}{q+2}$，对 q＝1，2，3，⋯

该性质是显而易见的。

性质 3： $H_p(q)=\max\limits_{i=0,1,\cdots,p-1}\left\{H_i(q+1)+H_{p-1-i}(1)+\theta\right\}$，其中 θ 为由 $H_i(q+1)$，$H_{p-1-i}(1)$ 决定的参数。其表示式为 $\theta=\dfrac{1+H_i(q+1)(q+1)+H_{p-1-i}(1)}{q+2}$。

性质 2 和性质 3 即为启发式算法的核心内容。

性质4： $r_n=\max\limits_{p=1,2,\cdots n-1}\{\dfrac{H_p(1)+H_{n-p}(1)+1}{2}\}$。

事实上，根据分析 $H_p(1)$，p＝1，2，3, …,性质可知，r_n 为关于 n 的凹函数，因此上式可简化为

$$r_n=\max_{p=1,2,\cdots n-1}\left\{\begin{cases}\dfrac{2H_{n/2}(1)+1}{2};n\text{偶}\\ \dfrac{H_{(n+1)/2}(1)+H_{(n-1)/2}(1)+1}{2};\ n\text{奇}\end{cases}\right\}$$

启发式算法设计思路就由上式而来。

4．辅机多次起飞的递推模型与启发式算法

辅机多次起飞的情形，其基本思路与辅机单次起飞一样，但其计算复杂度要大些。

记主机单向飞行中（不考虑主机返回），p 架辅机能把空中加满油的主机送达的最远距离为 h_p。

性质 5：对于 p 架辅机，存在某一调度策略，其能把空中加满油的主机送达 h_p 处，则必定找到另一调度策略，使得 p 架辅机能从 h_p 处把油量为零的主机接回基地 A 处。

事实上，这两种调度策略是对称的。由此也可得到该性质的证明。

记主机与 q－1 个辅机整体单向飞行中（不考虑主机返回），另 p 架辅机能把

空中加满油的主机与空中加满油的 q 个辅机送达的最远距离为 $H_p(q)$，事实上，此时主机与 q－1 个辅机整体中，每两个飞机间都没有区别。显然有 $H_1(q)=h_q$。

性质 6：　$H_1(q)=\dfrac{1}{q+2}$，对 q＝1，2，3，…

该性质是显而易见的。

性质 7：

$$H_p(q)=\max_{i=0,1,\cdots,p-1;\,j=0,1,\cdots,p-1}\left\{H_i(q+1)+H_{p-1-i+j}(1)+\theta \,\middle|\, \text{s.t. Que}[H_i(q+1),\ H_{p-1-i+j}(1)]{=}{=}\text{p}\right\}$$

其中 θ 为由 $H_i(q+1)$，$H_{p-1-i}(1)$ 决定的参数。其表示式为 $\theta=\dfrac{1+H_i(q+1)(q+1)+H_{p-1-i}(1)}{q+2}$。 $\text{Que}[H_i(q+1),\ H_{p-1-i+j}(1)]{=}{=}\text{p}$ 表示 $H_i(q+1)$ 与 $H_{p-1-i+j}(1)$ 结合后，其所需总飞机架数恰好为 p。

性质 6 和性质 7 即为启发式算法的核心内容。

性质 8：

$$r_n=\max_{p=1,2,\cdots n-1;\,j=0,1,2,\cdots n-1,}\left\{\frac{H_p(1)+H_{n-p+j}(1)+1}{2} \,\middle|\, \text{s.t. Que}[H_p(1),\ H_{n-p+j}(1)]{=}{=}\text{n}\right\}。$$

此时不能性质 8 不能做性质 4 式的简化，因为其复杂性更高。

启发式算法设计思路就由上式而来。

5．作战半径与两基地选址

先确定 A1 和 A2 应处于同一直线上,然后假定 A，A1,A2 上飞机数为分别为 n_1,n_2,n_3， 满足 $n_1+n_2+n_3=n$。对前面得到的 $H_i(1)$，r_j，$i,j=1,2,3,\cdots$，在这两条轴线上展开搜索。

其中 n_1,n_2,n_3 间满足一定的关系，利用此可降低搜索复杂性。

值得注意的是，当 n 较小时，计算机搜索需增加一些注意事项，这在程序中也有所体现。

6．矩形地图的最快到达与最少辅机架数

这可用类似的优化方法得到，对得到的$H_i(1)$，r_j，$i,j=1,2,3,\cdots$， 在这两条轴线上搜索。算法先由$B\to D\to B$对r_j搜索，确定 B 处辅机架数，再由$A\to B$对$H_i(1)$搜索，确定对于 A 处最少飞机架数。

7．总结

本文首先对空中加油问题进行了分析,提取了相关性质，在此基础上建立了问题的递推模型。根据该模型，文中提出了一种启发式搜索算法。受篇幅和时间的限制，一些性质的证明没有详细展开。设计算法前，所有算法中要用到的性质都经过了严格论证，而本文中并没有展开。。

该算法十分高效。 对于问题 1 和问题 2， 该算法所得解是最优调度策略。对于问题 3, 问题 4，问题 5，该算法所得解逼近最优调度策略。

参考文献

1 Pflieger CH. ， Models for the optimization of airre-fueling mission [R].AD-A262392,1993.

2． 张贤达，现代信号处理，北京，清华大学出版社，2004

3． 刘 勇,etal. 非数值并行算法(第二册)[M]. 北京: 科学出版社,1997.