

所属类别	2022 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号
研究生		CM2205097

## 基于遗传算法的环形振荡器优化设计

### 摘要

数字芯片是高端制造业的核心基石，随着工艺尺寸的不断缩小，数字芯片的优化设计变得尤为要。本文主要以数字芯片中环形振荡器面积最小、功耗最小以及功耗最小时芯片上能够安放环形振荡器的最大数量为优化目标，建立一系列目标规划模型，基于遗传算法进行反相器尺寸的设计和求解最优个数，进而使得环形振荡器能够高效运行。

针对问题一，查阅相关文献资料，建立了计算环形振荡器频率的数学模型，然后根据各指标相关参数，利用 MATLAB 软件，求得 10 种不同设计方案下环形振荡器的输出频率分别为 15.4611、3.8653、0.9663、4.7629、1.1907、0.2977、3.4868、0.8717、0.3874 和 0.0687 MHz。

针对问题二，在问题一计算分析的基础上，建立了以环形振荡器最小面积为目标函数的单目标非线性规划模型，然后结合问题一中的数学模型和各指标的参数值确定约束条件，采用遗传算法，在约束条件下进行了环形振荡器面积全局最小寻优，最终求解得出：当环形振荡器的输出频率为 10MHz，反相器个数为 51，反相器中的 PMOS 晶体管的栅宽  $W_p$  为  $0.1477\mu m$ ，栅长  $L$  为  $0.06\mu m$ ，晶体管 NMOS 管的栅宽  $W_n$  为  $0.1200\mu m$ ，栅长为  $0.06\mu m$  时，才能使环形振荡器所需的面积达到最小，且最小面积为  $7.4868\mu m^2$ 。

针对问题三，与问题二的建模思路相类似，仍旧采用单目标非线性规划模型，以环形振荡器运行所需的最小功耗为目标函数，各指标的参数值和问题一二中的参数模型为非线性约束条件，建立数学模型。同样采用遗传算法，对环形振荡器所需功耗进行全局最小寻优，最终计算得出环形振荡器的最小功耗为 15.1261 W，此时反相器的个数为 3，PMOS 晶体管的栅宽  $W_p$  为  $0.12\mu m$ ，栅长  $L$  为  $0.7429\mu m$ ，NMOS 晶体管的栅宽  $W_n$  为  $0.12\mu m$ ，栅长为  $0.7429\mu m$ 。

针对问题四，既要满足环形振荡器功耗最小，又要满足芯片上能够安放更多的环形振荡器。因此，在前述模型的基础上，建立了带非线性约束条件的多目标非线性规划模型，采用遗传算法进行全局寻优。考虑到安放环形振荡器时的尺寸关系问题，本文进行了两种不同安放方法的建模和计算。对于情形一，环形振荡器所需的最小功耗  $P_1$  为 6.264 W，此时求得的环形振荡器数量正好为最大值  $N_{\max 1}=15$ ，所对应的晶体管的尺寸  $W_p=11.3854\mu m$ 、 $W_n=5.6966\mu m$ 、 $L=32.4774\mu m$  及反相器个数  $n=5$ 。对于情形二，求解得到环形振荡器所需的最小功耗值  $P_2$  为 22.132 W，环形振荡器数量最大为  $N_{\max 2}=15$ 。比较结果发现，情形一是最为有效的优化方案。综上所述，当输出频率为 2 MHz 时，晶体管的尺寸为  $W_p=11.3854\mu m$ 、 $W_n=5.6966\mu m$ 、 $L=32.4774\mu m$  及反相器个数  $n=5$  时，环形振荡器达到最小功耗 6.264 W，芯片上最多能够安放 15 块环形振荡器。

**关键词：**单目标非线性规划；多目标非线性规划；遗传算法；全局寻优

## 一、问题的提出

### 1.1 背景资料

芯片是指内含集成电路的硅片，在我们日常生活中的手机、电脑、电视、家用电器等领域都会使用到，是高端制造业的核心基石。芯片的制造工艺非常复杂，要经历上千道工序经过复杂工艺加工制造。尤其是数字芯片，随着工艺尺寸的不断缩小，数字芯片的优化设计变得尤为要。而环形振荡器是数字时钟芯片中的一种重要的结构，其设计中有三个重要的指标需要考虑：速度、面积和功耗。速度、面积、功耗是互相牵制的，在相同的制造工艺（制程）以及相同的电路条件下，一般来说，速度越快，晶体管尺寸越小，功耗也越高，反之亦然。

### 1.2 需要解决的问题

基于上述背景，本文需要建立数学模型解决以下问题：

1. 根据题目资料中已给出的环形振荡器的频率公式、反相器工作时的电流公式以及反相器负载电容与下一级反相器的栅极面积关系，建立数学模型，求解 10 中不同设计方案下的环形振荡器的输出频率。
2. 参考题目所给环形振荡器的版图，当环形振荡器的输出频率  $f$  为  $10\text{MHz}$ ，反相器个数为 51 时，求出使得环形振荡器所需面积达到最小时 NMOS 和 PMOS 的  $W$  和  $L$  的尺寸大小。
3. 对环形振荡器重新进行设计，当环形振荡器的输出频率  $f$  为  $5\text{MHz}$  时，反相器个数和晶体管的  $W$  及  $L$  尺寸为多少时，才能使得环形振荡器所需功耗最小。
4. 芯片在流片时一般会选择多项目晶圆（MPW），即多个芯片在同一张晶圆上拼版制作。现有 7 块芯片，其中 6 块芯片面积固定，剩余一块芯片面积待定。在问题 3 的基础上，当振荡器输出频率为  $2\text{KHz}$  时，如何设计环形振荡器的尺寸，才能在满足功耗最小的前提下力求在第 7 个芯片位置上安放更多的环形振荡器。

## 二、问题的分析

### 2.1 问题一的分析

该问题中，需要根据题目所给条件求解出 10 种不同设计方案下的环形振荡器的输出频率。根据已知条件，若想求得环形振荡器频率，则需要建立一个单级反相器延迟时间的数学模型，分别在反相器个数、MOS 晶体管的尺寸以及电压的不同设计方案下，计算出其对应的延迟时间  $t_{pd}$ ，进而才能够求解得出各个设计方案下环形振荡器的输出频率。

根据反相器的工作原理，对于延迟时间的计算可以分为反相器对负载电容充电耗用的上升沿时间和放电耗用的下降沿时间两段进行计算，然后通过查阅相关文献资料，建立求解延迟时间  $t_{pd}$  的数学模型，并联立频率、负载电容等已知计算公式，最终可以求解出环形振荡器的输出频率  $f$  与 MOS 晶体管的宽度  $W$ 、长度  $L$ 、电压  $V$  以及反相器个数  $n$  之间的数学关系式。最后可以利用 MATLAB 软件，将题目中已给出的各指标数值代入，计算得到 10 种不同设计方案下环形振荡器的输出频率。

## 2.2 问题二的分析

由于环形振荡器是由一系列反相器子部件构成，因此，要求环形振荡器所需的最小面积，可以将其简化为分析单个反相器面积最小化问题。对于单个反相器所需面积最小问题，需要结合问题一的模型，将给定的输出频率与反相器个数代入问题一求出的模型中，并根据题中所给的指标列出约束条件，然后以单级反相器面积最小化为目标函数，构建变量之间的数学关系，建立非线性单目标规划模型，从而进行求解。

## 2.3 问题三的分析

该问题中，当环形振荡器的输出频率  $f$  为  $5MHz$  时，需要求解出一个最优的反相器个数和晶体管的尺寸设计组合，从而使得环形振荡器的功耗最小。环形振荡器的功耗通常由静态功耗和动态功耗两部分组成，但是在理想情况下，其静态功耗可以忽略不计。因此，只需要考虑动态功耗即可。环形振荡器的动态功耗又可以分为开关功耗和短路功耗，因此，要使得环形振荡器的功耗最小，就需要考虑开关功耗和短路功耗的综合效果。分别对开关功耗和短路功耗进行分析计算，可以得到环形振荡器的总功耗等于开关功耗与短路功耗的总和，由此可以建立目标函数为最小功耗的非线性规划模型。然后根据题目中所给的各个指标的参数值，PMOS 和 NMOS 晶体管  $W$  及  $L$  和反相器个数等为约束条件，建立优化模型，然后利用遗传算法进行最优解的计算。

## 2.4 问题四的分析

该问题中，利用七个芯片制作一张晶圆，已知其余六个芯片的面积，需要求解第七个芯片的面积，并且在该芯片上设计环形振荡器的尺寸，在追求功耗最小的前提下，尽量安放更多环形振荡器。首先将其余的六块芯片按照拼版示意图的方式拼接在一起，求得此时第七块芯片的最大长宽；然后分别考虑了充分利用芯片面积和不充分利用芯片面积的情况，由于不充分利用芯片面积的情况更加合理与接近实际情况，因此选用不充分利用芯片面积的情况安装环形振荡器；进而在该面积大小的芯片上建立功耗最小与振荡器个数最多的双目标非线性规划方程；最后将题目中所给各个指标的参数值代入到规划模型中，利用遗传算法求解模型的最优解。

## 三、模型假设

1. 假设反相器中的 MOS 管对负载电容  $C_L$  充放电的整个过程都处于饱和工作状态。
2. 假设在理想情况下，反相器的静态电流为 0。
3. 假设 7 块芯片的排版恰好与题目中所给出的排版示意图一致
4. 假设芯片上安放的均为尺寸大小相等的环形振荡器。

## 四、符号说明

$C_L$	反相器的负载电容
$n$	反相器个数
$f$	环形振荡器的输出频率

$W_p$	PMOS 晶体管的栅极宽度
$W_n$	NMOS 晶体管的栅极宽度
$L$	MOS 晶体管的栅极长度
$t_{pd}$	单级反相器的延迟时间
$T_r$	反相器的负载电容充电过程所需时间
$T_f$	反相器的负载电容放电过程所需时间
$I_{dp}$	反相器对负载电容 $C_L$ 的充电电流
$I_{dn}$	反相器对负载电容 $C_L$ 的放电电流
$V_{gs}$	晶体管的栅源电压
$V_{th}$	阈值电压
$V_{dd}$	电源电压
$S$	单个反相器面积
$P$	环形振荡器功耗
$N$	芯片上能够安放环形振荡器的个数
$l_{\max}$	第 7 块芯片最大长度
$w_{\max}$	第 7 块芯片最大宽度

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一模型的建立与求解

环形振荡器作为芯片中的一种重要结构，其设计的主要目标是使得其功耗最小。而在设计环形振荡器时，电路运行的时钟频率、电路的物理实现需要占用硅片的面积以及电路运行所消耗的能量三者之间存在紧密的联系。因此，若要设计出最有效的数字集成电路，就需要对这三个指标之间的影响关系进行深入的数学模型分析。

#### 5.1.1 模型的建立

依据附录 1 所给的参考资料可知，环形振荡器是由三个反相器或更多奇数个反相器输出端和输入端首尾相接构成的环状电路。反相器作为集成电路中的基本逻辑单元，是由一个具有一定宽度和长度的 PMOS 管和 NMOS 管串联而成，其中 PMOS 和 NMOS 之间的区域部分称为栅极。环形振荡器中的每一级反相器都有一个负载电容  $C_L$ ，该负载电容的大小与下一级反相器的栅极面积成正比。且由于该负载电容的存在，使得每一级反相器的输入和输出之间存在时间的延迟，由于是奇数个反相器，因此也会产生奇数

级的时延，其产生的负反馈使得电路产生振荡。反相器具体组成结构如图 1 所示：

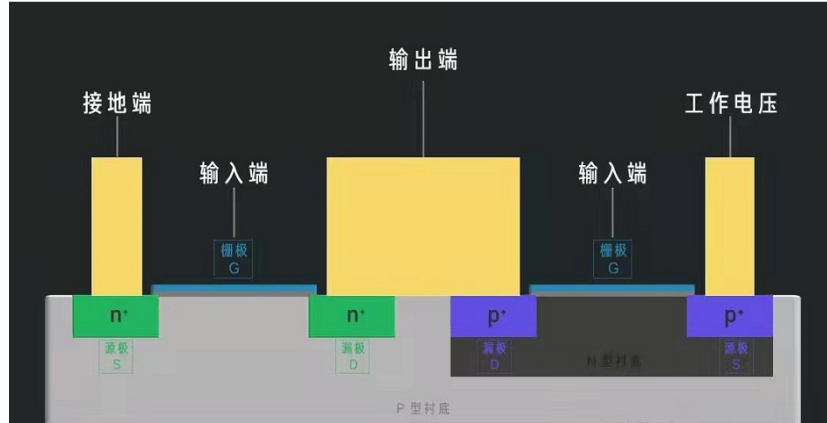


图 1 反相器电路组成结构图

由上述分析可知，在不同的反相器个数、PMOS 管和 NMOS 管的宽度和长度以及不电压下，环形振荡器的输出频率是不同的。该问题中，题目给出了 10 种不同设计方案下的反相器个数、MOS 晶体管的宽长比以及电源电压，需要求解出每种设计方案下环形振荡器的输出频率。

依题意可得，反相器的负载电容  $C_L$  与下一级栅极面积之间的关系为：

$$\frac{C_L}{S_{\text{栅}}}=3.137 \quad (1)$$

其中，

$$S_{\text{栅}}=(W_p+W_n).L \quad (2)$$

环形振荡器的频率为：

$$f=1/(2n \times t_{pd}) \quad (3)$$

其中  $n$  为反相器个数， $t_{pd}$  为单级反相器的延迟时间。由于  $n$  已知，因此，若想求得  $f$ ，则需要计算出  $t_{pd}$ 。

环形振荡器中的反相器的传播延时是由 NMOS 管和 PMOS 管上的等效电阻  $M_1$  和  $M_2$  对负载电容  $C_L$  充电和放电所消耗的时间决定的，如图 2 所示，反相器对电容进行充电放电的时延可以分为上升沿时间和下降沿时间来分析。

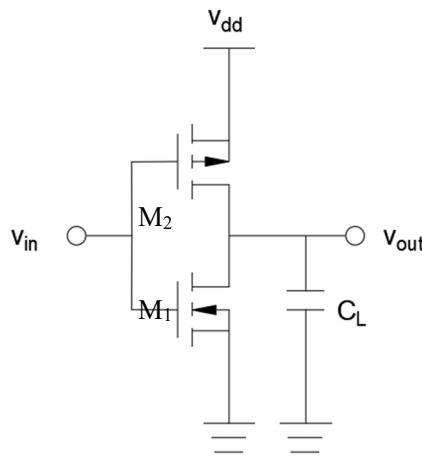


图 2 反相器晶体管电路示意图

假设反相器中的 MOS 管对电容充放电的整个过程都处于饱和工作状态，定义  $T_r$  为

电容  $C_L$  的充电过程所需时间，即电容从  $0V$  充电至  $v_{out}$  所用的时间； $T_f$  为电容  $C_L$  的放电过程所需时间，即电容从  $v_{out}$  所放电至  $0V$  所用的时间；

#### 1、上升沿时间

由于电容充放电的整个过程都处于饱和工作状态，则反相器对负载电容  $C_L$  的充电电流近似为恒流，反相器工作时的饱和电流为：

$$I_{dp} = \frac{1}{2} K_p \frac{W_p}{L} (V_{gs} - V_{thp})^2 \quad (4)$$

其中， $V_{gs}$  为栅源电压， $V_{thp}$  为 PMOS 管的阈值电压， $\frac{W_p}{L}$  为 PMOS 晶体管的宽长比。

则此时电压为：

$$v_{out} = \int_0^{v_{out}} dv = \frac{1}{C_L} \int_0^{T_r} I_{dp} dt = \frac{I_{dp} t}{C_L} \quad (5)$$

将 (4) 代入 (5) 中，求解得出：

$$t = \frac{2LC_L \cdot v_{out}}{K_p W_p (V_{gs} - V_{thp})^2}$$

假设输出电压  $v_{out} = v_{dd}$  时的充电时间为  $T_r = t$ ，则上升沿时间为：

$$T_r = t = \frac{2LC_L \cdot v_{out}}{K_p W_p (V_{gs} - V_{thp})^2} \quad (6)$$

#### 2、下降沿时间

同理可得，可以推导得出反相器对负载电容  $C_L$  的放电时的饱和电流为：

$$I_{dn} = \frac{1}{2} K_n \frac{W_n}{L} (V_{gs} - V_{thn})^2 \quad (7)$$

其中  $V_{gs}$  为栅源电压， $V_{thn}$  为 NMOS 晶体管阈值电压， $\frac{W_n}{L}$  为 PMOS 晶体管的宽长比。

则此时电压为：

$$v_{out} = \int_0^{v_{out}} dv = \frac{1}{C_L} \int_0^{T_f} I_{dn} dt = \frac{I_{dn} t}{C_L} \quad (8)$$

将 (7) 代入 (8) 中，求解得出：

$$t = \frac{2LC_L \cdot v_{out}}{K_n W_n (V_{gs} - V_{thn})^2}$$

假设输出电压  $v_{out} = v_{dd}$  时的放电时间为  $T_f = t$ ，则下降沿时间为：

$$T_f = \frac{2LC_L \cdot v_{out}}{K_n W_n (V_{gs} - V_{thn})^2} \quad (9)$$

综上所述，单级反相器的延迟时间则为：

$$t_{pd} = \frac{T_r + T_f}{2} \quad (10)$$

联立上式求解得出环形振荡器的输出频率  $f$  的计算公式如下所示：

$$f = \frac{K_p W_p (V_{gs} - V_{thp})^2 \times K_n W_n (V_{gs} - V_{thn})^2}{6.274n(W_p + W_n)L^2 v_{out} \times (K_p W_p (V_{gs} - V_{thp})^2 + K_n W_n (V_{gs} - V_{thn})^2)} \quad (11)$$

### 5.1.2 模型的求解

由题目可知  $V_{thp} = 0.398V$ ,  $V_{thn} = 0.42V$ ,  $K_p = 68.7134\mu A/V^2$ ,  $K_n = 111.6634\mu A/V^2$ , 在上述模型的基础上, 将模型中各指标的数值代入公式 (11), 利用 MATLAB 软件, 求解得出十种不同设计方案下环形振荡器的输出频率如下表所示:

表 1 不同设计方案下环形振荡器的输出频率结果表

序号	反相器个数	PMOS 宽长比	NMOS 宽长比	电源电压/V	输出频率/MHz
1	11	400n/100n	200n/100n	1.2	15.4611
2	11	800n/200n	400n/200n	1.2	3.8653
3	11	1.6u/0.4u	0.8u/0.4u	1.2	0.9663
4	31	200n/100n	400n/100n	1.2	4.7629
5	31	400n/200n	800n/200n	1.2	1.1907
6	31	0.8u/0.4u	1.6u/0.4u	1.2	0.2977
7	51	500n/100n	500n/100n	1.2	3.4868
8	51	1000n/200n	1000n/200n	1.2	0.8717
9	51	1.8u/0.3u	1.8u/0.3u	1.2	0.3874
10	99	2u/0.5u	1u/0.5u	1.2	0.0687

## 5.2 问题二模型的建立与求解

由于环形振荡器是由一系列反相器子部件构成, 因此, 要求环形振荡器所需的最小面积, 可以将其简化为分析单个反相器面积最小化问题。对于单个反相器所需面积最小问题, 需要结合问题一的模型, 将给定的输出频率  $f$  与反相器个数  $n$  代入问题一求出的模型中, 并根据题中所给的指标列出约束条件, 然后以单级反相器面积最小化为目标函数, 构建变量之间的数学关系, 建立非线性单目标规划模型, 从而进行求解。

### 5.2.1 模型的建立

#### 1. 建立目标函数

该题中, 在已给出环形振荡器的输出频率和反相器的个数的约束条件下, 要建立一个使得环形振荡器的所需面积最小化的目标函数, 其中, 反相器中 PMOS 和 NMOS 的  $W$  和  $L$  的尺寸为未知参数。

依据附录 1 提供的环形振荡器相关资料, 画出了单个反相器版图的栅极面积示意图, 如下图所示:

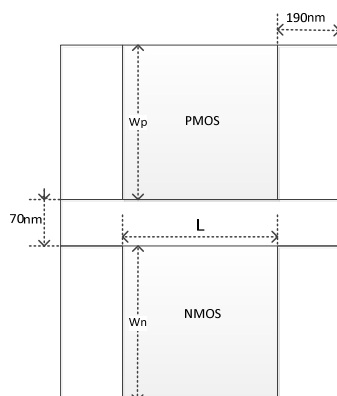


图 3 反相器栅极面积简化示意图

由图 3 可以看出，反相器上半部分为 PMOS 管，其栅长为  $L$ ，栅宽为  $W_p$ ，下半部分为 NMOS 管，其栅长与 PMOS 管的栅长一致，均为  $L$ ，栅宽为  $W_n$ 。单个反相器的总面积为 PMOS 和 NMOS 两部分组成的面积与 PMOS 和 NMOS 之间的间隔面积的总和。

PMOS 和 NMOS 的面积分别由两部分组成：

①栅极覆盖的沟道面积：

$$S_{\text{沟道}} = (W_p + W_n) \times L.$$

②栅极两侧的源漏面积：

$$S_{\text{源漏}} = 2 \times 0.19 \mu m \times (W_p + W_n).$$

PMOS 与 NMOS 之间的间隔面积  $S$  为：

$$S_{\text{间隔}} = 0.07 \times (L + 2 \times 0.19 \mu m).$$

综上所述，单个反相器的总面积即为：

$$S_{\text{总}} = S_{\text{沟道}} + S_{\text{源漏}} + S_{\text{间隔}} = (W_p + W_n)L + 0.38(W_p + W_n) + 0.07L + 0.0266.$$

由此，可以建立以下目标函数：

$$\min S_{\text{总}} = (W_p + W_n)L + 0.38(W_p + W_n) + 0.07L + 0.0266 \quad (12)$$

## 2. 确定约束条件

依题意可得：

$$\begin{cases} f = 10 \text{ MHz} \\ n = 51 \\ v_{\text{out}} = 1.2 \text{ V} \\ V_{\text{gs}} = V_{\text{dd}} = 1.2 \text{ V} \\ V_{\text{thp}} = 0.398 \text{ V} \\ V_{\text{thn}} = 0.42 \text{ V} \\ K_p = 68.7134 \mu A / V^2 \\ K_n = 111.6634 \mu A / V^2 \end{cases} \quad (13)$$

将上述各指标的参数值代入公式 (11) 中，即可确定化简出该优化模型的约束条件。

$$\text{约束条件: } s.t. \begin{cases} \frac{13981.8127 W_p W_n}{383.9688 (W_p + W_n) L^2 \cdot (67.9360 W_n + 44.1967 W_p)} = 10 \\ 0.12 \mu m \leq W_p \leq 100 \mu m \\ 0.12 \mu m \leq W_n \leq 100 \mu m \\ 0.06 \mu m \leq L \leq 100 \mu m \end{cases} \quad (14)$$

## 5.2.2 模型的求解

对于上述模型的求解，本文主要采用遗传算法进行最优解的计算。

### 1. 遗传算法的基本原理

#### (1) 概述

遗传算法 (Genetic Algorithm, GA) 起源于对生物系统所进行的计算机模拟研究，由美国的 J.Holland 教授于 1975 年在他的专著《自然界和人工系统的适应性》中首先提出的。它是模仿自然界生物进化机制发展起来的随机全局搜索和优化的算法，借鉴了达尔



文的进化论和孟德尔的遗传学说。其本质是一种高效、并行、全局搜索的方法，能在搜索过程中自动获取和积累有关搜索空间的知识，并自适应地控制搜索过程以求得最佳解。

遗传算法模拟自然选择和自然遗传过程中发生的繁殖、交叉和基因突变现象，在每次迭代中都保留一组候选解，并按某种指标从解群中选取较优的个体，利用遗传算子（选择、交叉和变异）对这些个体进行组合，产生新一代的候选解，重复此过程，直到满足某种收敛指标为止。

遗传算法通常会被应用到很多问题中，比如寻路问题囚犯困境、动作问题、生产调度等等。遗传算法中每一条染色体，对应着遗传算法的一个解决方案，一般会用适应性函数来衡量这个解决方案的优劣。所以从一个基因组到其解的适应度形成一个映射。因此，可以把遗传算法的过程看作是一个在多元函数里面求最优解的过程。

(2) 具体操作步骤：

a) 初始化

选择一个群体，即选择一个串货个体的集合  $b_i$ ， $i=1,2,\dots,n$ 。这个初始的群体也就是问题假设解的集合。一般取  $n=30\sim 160$ ，通常以随机方法产生串或个体的集合  $b_i$ ， $i=1,2,\dots,n$ 。问题的最优解将通过这些初始假设解进化而求出。

b) 选择

根据适者生存原则选择下一代的个体。在选择时，以适应度为选择原则。适应度准则体现了适者生存，不适应者淘汰的自然法则。

给出目标函数  $f$ ，则  $f(b_i)$  称为个体  $b_i$  的适应度。则计算个体在下一代中的期望生存数目为：

$$P\{\text{选中 } b_i\} = \frac{f(b_i)}{\sum_{j=1}^n f(b_j)} \cdot n$$

由此可以看出，适应度较高的个体，繁殖下一代的数目较多。适应度较小的个体，繁殖下一代的数目较少；甚至被淘汰。这样，就产生了对环境适应能力较强的后代。对于问题求解角度来讲，就是选择出和最优解较接近的中间解。

c) 交叉

对于选中用于繁殖下一代的个体，随机的选择两个个体的相同位置，按交叉概率  $P$  在选中的位置实行交换。这个过程反映了随机信息交换；目的在于产生新的基因组合，也即产生新的个体。交叉时，可实行单点交叉和多点交叉。例如有个体  $S_1=100101$ ， $S_2=010111$ ，选择它们的左边 3 位进行交叉操作，则有  $S_1=010101$ ， $S_2=100111$ 。一般而言，交叉概率  $P$  取值为  $0.4\sim 0.99$ 。

d) 变异

根据生物遗传中基因变异的原理，以变异概率  $P_m$  对某些个体的某些位执行变异。在变异时，对执行变异的串的对应为求反，即把 1 变为 0，把 0 变为 1。变异概率  $P_m$  与生物变异极小的情况一致。所以  $P_m$  的取值较小，一般取  $0.0001\sim 0.1$ 。例如有个体  $S=101011$ ，对其第 1,4 位置的基因进行变异，则有  $S'=001111$ 。单靠变异不能再求解中得到好处，但是，它能保证算法过程不会产生无法进化的单一群体。因为在所有的个体一样时，交叉时无法产生新的个体的，这时只能靠变异产生新的个体。也就是说，变异增加了全局优化的特质。

e) 全局最优收敛

当最优个体的适应度达到给定的阈值，或者最优个体的适应度和群体适应度不再上升时，则算法的迭代过程收敛、算法结束。否则，用经过选择、交叉、变异所得到的新

一代群体取代上一代群体，并返回到第 2 步即选择操作处继续循环执行。

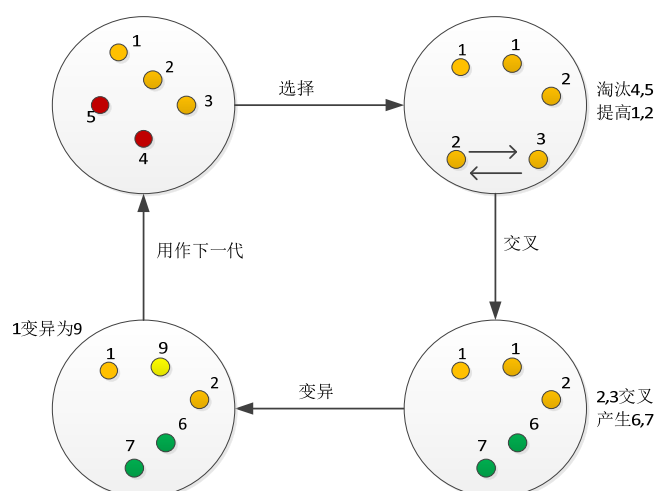


图 4 遗传算法的执行过程

## 2. 求解过程

由于该模型属于非线性单目标带非线性约束模型，模型求解过程中利用 MATLAB 内置 GA 工具箱中的 Genetic Algorithm 求解。

具体求解步骤为：

### (1)适应度计算

结合上述遗传算法的基本分析，该题直接将目标函数值作为个体的适应度。

### (2)种群初始化

通过随机生成的方式创建一个种群，该题选择初始种群个数为 100，采用二进制将一个解编码为基因型，后将二进制型的基因编码为十进制型。

### (3)交叉率

该算法中交叉率太小会导致不能有效更新种群，而太大又容易破坏已有的有利模式，随机性增大，容易错失最优个体。因此，通过查阅相关资料发现，交叉率范围一般为 0.4-0.99，为了计算结果更接近准确值，该题选取交叉率为 0.8。

### (4)迭代次数

在最优解的求解过程中，迭代次数太小，算法不容易收敛，种群不成熟。若次数太大，算法已熟练，继续进化就没有意义，浪费资源。因此，对于该问题的求解，设置迭代次数为 500。

### (5)寻优次数

由于遗传算法初始给定的群体是随机产生的，每次随机产生的个体距离最佳个体的距离不一样，需要的搜索路径和时间不一样，因此遗传算法每次得到的结果必然不是绝对的，只能是更优或者次优。因此，该题设置 100 次寻优，令其尽可能得到最优值。

### (6)遍历目标值

在 (5) 的基础上，设置 100 次寻优求解后得到 100 个反相器面积较优值，遍历寻找 100 个较优值中面积的最小值，再根据面积最小值寻找得到其对应的  $W_p$ ， $W_n$  和  $L$  的值。

## 3. 求解结果分析

利用 MATLAB 软件运行 2 中的步骤，将 100 个寻优周期内得到的单个反相器面积较优值以及较优面积对应的  $W_p$ ， $W_n$  和  $L$  值各绘制成了如下曲线图。

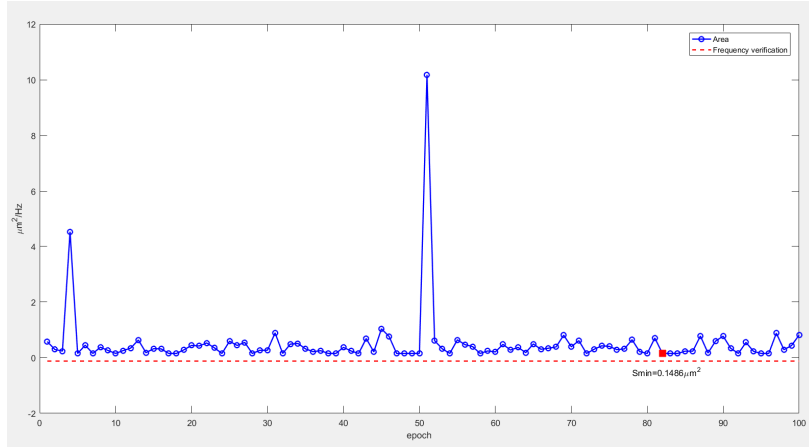


图 5 反相器面积较优值结果图

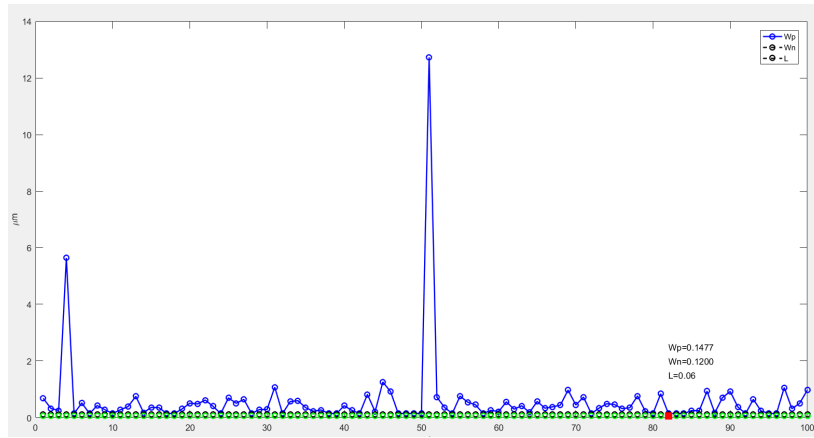


图 6 最小功耗对应  $W_p$ 、 $W_n$  和  $L$  值曲线图

图 5 中的红色虚线是频率验证曲线，该曲线是为了验证求解结果的准确性。将图 6 中求解得出反相器最小面积时所对应的晶体管的  $W_p$ 、 $W_n$  和  $L$  值分别代入频率计算公式（11）中，然后与题目条件所给定的频率值求差以获得该差值与 0 的接近程度。依据模型的建立过程，该差值应当尽可能的接近 0 值。

依图可知，该红色虚线与 X 轴较为接近。由此可知，利用遗传算法求解所得结果的准确性较高。蓝色曲线为面积较优值曲线，从该条曲线可知，遗传算法虽每次计算结果不同，但其在某一小范围内波动，循环 100 个周期可以得出面积的最小值  $\min S_{\text{总}}$ ，图中红点位置即为面积最小值点  $\min S_{\text{总}} = 0.1468 \mu\text{m}^2$ 。由图 5 还可知，面积最小值点其实不止这一点，多点可以说明所求得的最小值  $\min S_{\text{总}}$  即为所需寻求的最小值可信度较高。

图 6 中的红、黑、绿曲线分别为根据面积较优值对应的  $W_p$ 、 $W_n$  和  $L$  绘制的曲线，红点位置即为最优点位置所对应的最优值，其结果分别为  $W_p = 0.1477 \mu\text{m}$ ， $W_n = 0.1200 \mu\text{m}$  和  $L = 0.06 \mu\text{m}$ 。

综上所述，当环形振荡器的输出频率  $f$  为  $10\text{MHz}$ ，反相器个数  $n$  为 51，反相器中的 PMOS 晶体管的栅宽  $W_p$  为  $0.1477 \mu\text{m}$ ，栅长  $L$  为  $0.06 \mu\text{m}$ ，晶体管 NMOS 管的栅宽  $W_n$  为  $0.1200 \mu\text{m}$ ，栅长为  $0.06 \mu\text{m}$  时，才能使环形振荡器所需的面积达到最小，且最小面积为  $\min S = 0.1468 \times 51 = 7.4868 \mu\text{m}^2$ 。

### 5.3 问题三模型的建立与求解

由于环形振荡器是由三个或多个反相器串联组成，因此，要使得环形振荡器的总功耗最小，就需要考虑单个反相器所需功耗的最小值，然后用单个反相器所需的最小功耗乘以反相器个数即为环形振荡器的最小所需功耗。

反相器的功耗主要由静态功耗与动态功耗两部分组成。但是在理想情况下，反相器的静态电流为零，主要是因为 PMOS 和 NMOS 晶体管在稳态工作状况下决不会同时导通。因此，对于 CMOS 反相器的功耗只需考虑动态功耗即可。动态功耗又可以分为开关功耗（也称为电容充放电功耗）和短路功耗。开关功耗的产生主要是在开关的过程中，输出负载电容交替的充电和放电不可避免的消耗功率，对负载电容充电和放电过程分析，计算出环形振荡器的开关功耗；短路功耗是由于在开关过程中，存在短路电流分量，对该过程分析计算出短路功耗，进而得到单个反相器的总功耗计算公式，最后根据 PMOS 和 NMOS 晶体管 W 及 L 和反相器个数等约束条件，建立目标函数为环形振荡器最小功耗的非线性规划模型。

### 5.3.1 模型的建立

#### 1. 开关功耗计算

开关功耗的损失是由于电源对负载电容的充放电所造成的。在充电过程中，负载电容的电压从 0 升至  $v_{dd}$ ，此时负载电容从电源电压中吸取了一部分能量。该能量可分为以热量的形式消耗在 PMOS 晶体管中和存放在负载电容中。在放电过程中，负载电容的电压从  $v_{dd}$  降至 0，此时存放在负载电容的能量以热量的形式消耗在 NMOS 晶体管中。

假设该环形振荡器的输入和输出电压波形都具有周期性，因此 PMOS 和 NMOS 晶体管在一个周期内的平均功耗可用积分表示为：

$$P_{\text{开}} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt$$

由于在负载电容充电和放电的转换过程中，PMOS 和 NMOS 晶体管在各自的半个周期内都有电流通过，所有可以采用计算输出负载电容充电和放电所需要的能量方法计算开关功耗，积分表示如下：

$$P_{\text{开}} = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} v_{\text{out}} (-C_L \frac{dv_{\text{out}}}{dt}) dt + \int_{T/2}^T (v_{dd} - v_{\text{out}}) (C_L \frac{dv_{\text{out}}}{dt}) dt \right]$$

对定积分求解可得：

$$P_{\text{开}} = \frac{1}{T} \left[ (-C_L \frac{v_{\text{out}}^2}{2}) \Big|_0^{T/2} + (v_{dd} v_{\text{out}} C_L - \frac{1}{2} C_L v_{\text{out}}^2) \Big|_{T/2}^T \right]$$

$$P_{\text{开}} = \frac{1}{T} C_L v_{dd}^2$$

又因为  $f = 1/T$ ，所以功耗表达式为：

$$P_{\text{开}} = C_L v_{dd}^2 f$$

由于前文  $C_L = 3.137 S_{\text{栅}}$  以及已知环形振荡器的输出频率  $f = 5 \text{MHz}$  和电源电压  $v_{dd} = 1.2 \text{V}$ ，故开关功耗的最终表达式为：

$$P_{\text{开}} = 3.137(W_p + W_n)L \times 1.2^2 \times 5 = 22.586(W_p + W_n)L \quad (15)$$

#### 2. 短路功耗计算

假设输入电压的波形如图 7 所示，其具有相同的上升与下降时间。短路功耗是由于有限上升与下降时间的输入电压可以控制 CMOS 反相器，致使 PMOS 和 NMOS 晶体管中有一段时间是同步导通的，由此就产生了一条短路电流，如图 8 所示。如果负载电容较小或者是输入电压的上升和下降时间较长，这条短路电流就会较为明显。

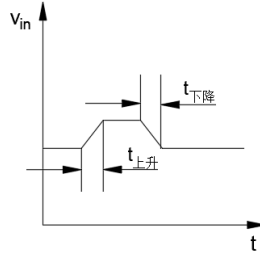


图 7 输入电压波形图

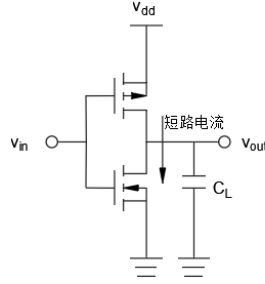


图 8 含有短路电流的反相器电路结构图

由于输入电压的上升与下降时间相等，所以在上升和下降转换的期间，短路电流强度可以看作是不变的。如果使用上升和下降时间（ $t_{上升} = t_{下降} = \tau$ ）的输入电压来驱动反相器，就能够得到平均的短路电流，表示如下：

$$I_{短} = \frac{\tau f}{24V_{dd}} \left[ K_p (V_{dd} - 2V_{thp})^3 + K_n (V_{dd} - 2V_{thn})^3 \right]$$

因此，可得短路功耗为：

$$P_{短} = \frac{\tau f}{24} \left[ K_p (V_{dd} - 2V_{thp})^3 + K_n (V_{dd} - 2V_{thn})^3 \right] \quad (16)$$

综上所述，单个反相器总的功耗应该表示为两部分之和：

$$P_{总} = P_{开} + P_{短}$$

取  $\tau = 0.5s$ ，并且将已知条件代入上式，求得最终总的功耗表示为：

$$\begin{aligned} P_{总} &= 22.586(W_p + W_n)L + \frac{5MHz}{48} \left[ 68.7134(1.2 - 2 \times 0.398)^3 + 111.6634(1.2 - 2 \times 0.42)^3 \right] \\ &= 22.586(W_p + W_n)L + 1.0147 \end{aligned}$$

所以，环形振荡器运行所需的功耗为：

$$P = n \times [22.586(W_p + W_n)L + 1.0147] \quad (17)$$

根据问题一中关于输出频率的公式（11），由此可以逆向推导出以反相器个数  $n$  和 PMOS 和 NMOS 晶体管的  $W$  及  $L$  尺寸等四个因素，对于输出频率的等式约束条件为：

$$f = 5MHz = \frac{13981.8127W_p W_n}{7.5288n(W_p + W_n)L^2 \cdot (67.9360W_n + 44.1967W_p)}$$

依题意可建立非线性规划模型如下：

$$\min P = 22.586n(W_p + W_n)L + 1.0147n \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& \text{约束条件: } s.t. \left\{ \begin{aligned} & 5\text{MHz} = \frac{13981.8127W_pW_n}{7.5288n(W_p + W_n)L^2 \cdot (67.9360W_n + 44.1967W_p)} \\ & 120\text{nm} \leq W_p \leq 100\mu\text{m} \\ & 120\text{nm} \leq W_n \leq 100\mu\text{m} \\ & 60\text{nm} \leq L \leq 100\mu\text{m} \\ & n \geq 3 \text{ 且为奇数} \end{aligned} \right. \quad (19)
\end{aligned}$$

### 5.3.2 模型的求解

对于上述模型的求解过程和步骤与问题二类似，都为带非线性约束的非线性规划模型，不同之处只在于增加了一个未知变量 $n$ ，为此，仍采用遗传算法来求解模型的最优值，求解模型步骤与问题二相似。利用 MATLAB 软件，采用遗传算法的求解原理和步骤，对符合目标函数的最小功耗值进行搜寻。在问题二中，寻优周期设置为 100，为了防止在 100 个周期内所得的最优值与实际的最优值出现较大偏差，该题将寻优周期设置为 150 个周期，将这 150 个周期内所得的单个环形振荡器功耗较优值以及较优功耗对应的 $W_p$ ， $W_n$ 和 $L$ ， $n$ 值分别绘制成曲线图。如下所示：

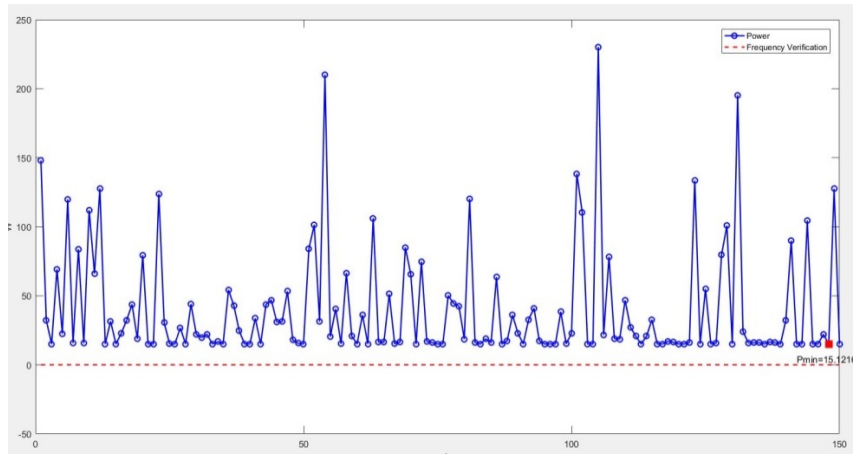


图 9 功耗较优曲线图

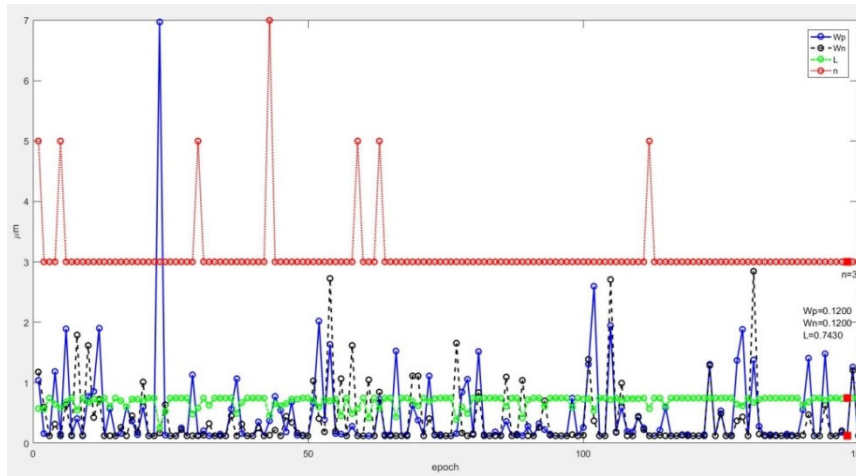


图 10 最小功耗对应 $W_p$ 、 $W_n$ 、 $L$ 和 $n$ 值曲线图

如图 9 所示，红色虚线是频率验证曲线，利用计算所得出的 $W_p$ 、 $W_n$ 和 $L$ 代入频率计

算公式 (11) 中, 得出的结果与条件所给定频率求差并获得该差值与 0 的接近程度。参照问题二的分析, 该差值也应当尽可能的接近 0 值。由图可知, 该红色虚线与 X 轴十分接近, 基本与 X 轴重合, 为此可知求解所得结果的准确性非常高。蓝色曲线为功耗较优值曲线, 红点为功耗最低点位置, 功耗最低为  $\min P_{\text{总}} = 15.1216 W$ 。可以看出, 除去极少数的异常值, 功耗值一直在小范围的波动。且虽获得功耗最优值的周期较长, 但是在 100 个周期内有较多个点的值与最优点的值十分接近, 这也说明 100 个周期内已经能够达到最优要求, 设置 100 个寻优周期具有可行性。图 10 中, 蓝线代表  $W_p$ , 黑线代表  $W_n$ , 绿线代表  $L$ , 红线代表  $n$ , 红点位置即为最小功耗对应的  $W_p$ 、 $W_n$ 、 $L$ 、 $n$ 。依图可知, 最终求解得出环形振荡器运行所需的最小功耗为  $15.1261 W$ , 此时反相器的个数为 3, 且反相器的 PMOS 晶体管的栅宽  $W_p$  为  $0.12\mu m$ , 栅长  $L$  为  $0.7429\mu m$ , 晶体管 NMOS 管的栅宽  $W_n$  为  $0.12\mu m$ , 栅长为  $0.7429\mu m$ 。

## 5.4 问题四模型的建立与求解

### 5.4.1 模型的建立

在数字集成电路中, 芯片在流片时一般会选择在同一张晶圆进行多芯片的拼版制作, 以此共同承担流片费用。现已知晶圆的尺寸, 需要在该晶圆上拼接 7 块芯片进行制作, 已知其中 6 块芯片的面积, 第 7 块芯片的面积待定, 当环形振荡器的输出频率为  $2 KHz$  时, 需要给定环形振荡器的尺寸, 使得环形振荡器的功耗最小的前提下在第 7 块芯片上放置更多的环形振荡器。对于该问题, 需要在给定的约束条件下, 对于上述模型进行优化, 建立功耗最小化和环形振荡器个数最大化的多目标规划模型。

一般的目标规划问题, 通常使用线性规划模型进行最优解的计算, 但是线性规划只能解决一组线性约束条件下, 一个目标的最大或最小值问题。在实际决策中, 衡量方案优劣要考虑多个目标, 这些目标中, 有主要的, 也有次要的; 有最大值的, 也有最小值的, 有定量的, 也有定性的; 有相互补充的, 也有相互对立的。对于上述较为复杂的优化目标, 就需要建立多个目标函数, 进行多目标规划, 从而在同时满足多目标的条件下, 寻求最优解。其函数表达式为:

对于多目标规划问题, 可以将其数学模型写为如下形式:

$$Z = F(X) = \begin{bmatrix} \max(\min) f_1(x) \\ \max(\min) f_2(x) \\ \vdots \\ \max(\min) f_k(x) \end{bmatrix}$$

$$s.t. \phi(X) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{bmatrix} \leq G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

式中:  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  为决策变量向量。缩写形式为:

$$\begin{aligned} \max(\min) Z &= F(X) \\ s.t. \phi(X) &\leq G \\ Z &= F(X) \end{aligned}$$

若有  $n$  个决策变量,  $k$  个目标函数,  $m$  个约束方程, 则:

$Z = F(X)$  表示  $k$  维函数变量,  $\phi(X)$  表示  $m$  维向量函数,  $G$  表示  $m$  维常数向量。

在该问题中, 本文建立的是双目标规划模型: 环形振荡器功耗最小化目标函数和环形振荡器个数最大化目标函数。

本文假设芯片中所组成的每一个环形振荡器的反相器个数和晶体管的尺寸大小都相等。

### 1. 环形振荡器所需功耗最小化目标函数

该题中, 对于功耗最小化目标函数的建模思路与问题三是相类似的。基于问题三的分析, 单个 CMOS 反相器所需要的总功耗由开关功耗和短路功耗两部分组成, 因此, 单个环形振荡器工作时所需要的总功耗为:

$$P_{\text{总}} = P_{\text{开}} + P_{\text{短}}$$

$$= 22.586(W_p + W_n)L + \frac{\tau f}{24} [K_p(v_{dd} - 2V_{thp})^3 + K_n(v_{dd} - 2V_{thn})^3]$$

将各指标参数代入上述模型中, 化简可得:

$$P_{\text{总}} = 22.586(W_p + W_n)L + 0.0017$$

假设芯片中所组成的每个环形振荡器的尺寸和大小都是相同的, 则要使得所有的环形振荡器所需的总功耗最小, 只需要满足单个环形振荡器所需的功耗最小化即可

由此, 可以建立功耗最小化目标函数模型为:

$$\min P = 22.586n(W_p + W_n)L + 0.0017n$$

### 2. 环形振荡器个数最大化目标函数

要在芯片上安放尽可能多的环形振荡器, 则需求解出第 7 块芯片的尺寸范围。现假设 7 块芯片的排版规则恰好与题目中所给出的排版示意图一致, 则根据已知条件可以求解得出第 7 块芯片的最大尺寸范围为:

$$\begin{cases} l_{\max} = 4 - (1.05 + 0.88 + 0.08 \times 2) = 1.91\text{mm} \\ w_{\max} = 3 - (1.096 + 1.5 + 0.08 \times 2) = 0.244\text{mm} \end{cases}$$

假设芯片上拼接的环形振荡器的反相器个数和晶体管的尺寸大小都相等, 因此, 求得芯片上能够安放的最大环形振荡器个数, 只需求解出单个环形振荡器的尺寸大小, 然后与芯片的尺寸进行比较计算, 求出芯片上能够安放环形振荡器的最多个数。

对于单个环形振荡器来说, 其尺寸的大小与反相器的个数  $n$ , 单个反相器中晶体管的  $L$  和  $W$  有关。因此, 对于芯片上能够安放的环形振荡器的个数可以有两种求解方法。

#### (1) 充分利用芯片面积

为了充分利用芯片的面积, 尽可能的使得芯片上安放更多数量的振荡器, 则可以用芯片的最大总面积比单个振荡器的面积并向下取整, 即为芯片上能够安放的最大环形振荡器的个数。即目标函数表示为:

$$\max N = \left\lfloor \frac{l_{\max} \cdot w_{\max}}{n \cdot S} \right\rfloor$$

其中,  $l_{\max}$  为芯片的最大长度值,  $w_{\max}$  为最大宽度值,  $n$  为单个环形振荡器所含有的反相器个数,  $S$  为单个环形振荡器的总面积。

该种求解方法是假设在芯片的边界处振荡器也刚好能够安放进去, 不存在多出或者



少的部分。但是在实际情况中，这种情况只是偶然事件，与大多实际情况并不相符，并不合理。因此，该题可以选择第二种未充分利用芯片面积计算方法进行环形振荡器安放个数的求解更为合理。

## (2) 未充分利用芯片面积

在实际情况中，在芯片上生产安放振荡器个数时，可能存在芯片边界处要安放的振荡器尺寸与芯片上剩余未安放振荡器部分的尺寸不匹配的情况，此时可能会造成芯片利用不充分，存在剩余未安放面积的情况。此时，就可以通过芯片的最大长度和最大宽度值为限制条件，对芯片上能够安放的振荡器最多个数进行计算。

由于环形振荡器的长度和宽度尺寸之间的大小关系未知，不确定在两种不同的情况下计算出能够安放环形振荡器最大个数的值是否相同，因此，该题分别对两种不同的情况进行建模计算，然后判断结果是否相同，若不相同，则对于二者再进行比较，择优选择。

综上所述，目标函数可以表示为：

$$\max N = \left\lfloor \frac{l_{\max}}{n(0.38 + L)} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{w_{\max}}{n(W_p + W_n + 0.07)} \right\rfloor \quad (20)$$

或：

$$\max N = \left\lfloor \frac{l_{\max}}{n(W_p + W_n + 0.07)} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{w_{\max}}{n(0.38 + L)} \right\rfloor \quad (21)$$

即该问题的多目标规划模型为：

### ①情形一：

$$Z = F(X) = \begin{cases} \min P = 22.586n(W_p + W_n)L + 0.0017n \\ \max N = \left\lfloor \frac{l_{\max}}{n(0.38 + L)} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{w_{\max}}{n(W_p + W_n + 0.07)} \right\rfloor \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{约束条件为: } s.t. \begin{cases} 0.002\text{MHz} = \frac{13981.8127W_p W_n}{7.5288n(W_p + W_n)L^2 \cdot (67.9360W_n + 44.1967W_p)} \\ 120\text{nm} \leq W_p \leq 100\text{um} \\ 120\text{nm} \leq W_n \leq 100\text{um} \\ 60\text{nm} \leq L \leq 100\text{um} \\ 0 < n(0.38 + L) \leq l_{\max} \\ 0 < n(W_p + W_n + 0.07) \leq w_{\max} \\ n \geq 3 \text{ 且为奇数} \end{cases} \quad (23)$$

### ②情形二：

$$Z = F(X) = \begin{cases} \min P = 22.586n(W_p + W_n)L + 0.0017n \\ \max N = \left\lfloor \frac{l_{\max}}{n(W_p + W_n + 0.07)} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{w_{\max}}{n(0.38 + L)} \right\rfloor \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{约束条件为: } s.t. \left\{ \begin{array}{l} 0.002MHz = \frac{13981.8127W_p W_n}{7.5288n(W_p + W_n)L^2 \cdot (67.9360W_n + 44.1967W_p)} \\ 120nm \leq W_p \leq 100um \\ 120nm \leq W_L \leq 100um \\ 60nm \leq L \leq 100um \\ 0 < n(W_p + W_n + 0.07) \leq l_{\max} \\ 0 < n(0.38 + L) \leq w_{\max} \\ n \geq 3 \text{ 且为奇数} \end{array} \right. \quad (25)$$

### 5.4.2 模型的求解

上述模型在前面模型的基础上，由单目标规划模型变为了多目标规划模型。多目标规划模型的求解与单目标规划模型不同的是，它不能只顾一个目标函数的最优，而不顾其他的目标函数。多目标规划需要做出复合选择：

(1) 目标函数的选择

(2) 决策变量的选择

衡量某一个方案的好坏无法用一个指标来衡量，需要多个目标进行比较，这些目标有时不是很协调，甚至是对立的。

由图 11 所示（假设要求  $f_1$  和  $f_2$  都达到最大）：1 和 2 比较，1 的  $f_2$  指标大于 2 的  $f_2$  指标，但 2 的  $f_1$  指标大于 1 的  $f_1$  指标，于是二者的较优性无法比较，即无法确定这两个方案的优劣。而在各个方案之间，显然，4 比 1 号，3 比 2 好，5 比 4 好，7 比 3 好……而对于方案 5、6、7 之间则无法比较优劣性，且没有比他们更好的其他方案，所以他们被称为多目标规划问题的非劣解，而其他的解被称为劣解。当目标函数处于冲突状态时，就不会存在使所有目标函数同时达到最大或最小值的最优解，此时只能寻求非劣解。对于多目标规划问题的非劣解，常常需要将多目标规划问题转化为单目标规划问题去处理。

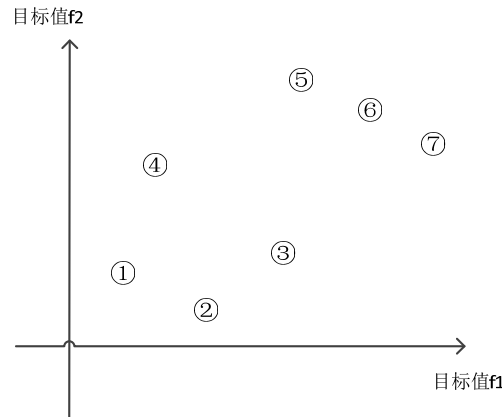


图 11 多目标规划模型的非劣解分布图

模型分两类，两类模型都属于带非线性约束的多目标非线性规划模型，求解依旧可以采用遗传算法求解。与前面不同的是，多目标非线性规划模型利用 MATLAB 工具箱中的 ga 求解器无法求解多目标规划模型，因此这里使用 gamultiobj 求解器求解。求解参数设置与前面基本一致。

对于情形一：

依旧设置 100 个寻优周期，绘制单个环形振荡器总功耗  $P_1$  较优值曲线图、环形振荡器个数  $N_{\max 1}$  曲线图和对应的  $w_p$ 、 $w_n$ 、 $L$ 、 $n$  曲线图。如图 12、13、14 所示：

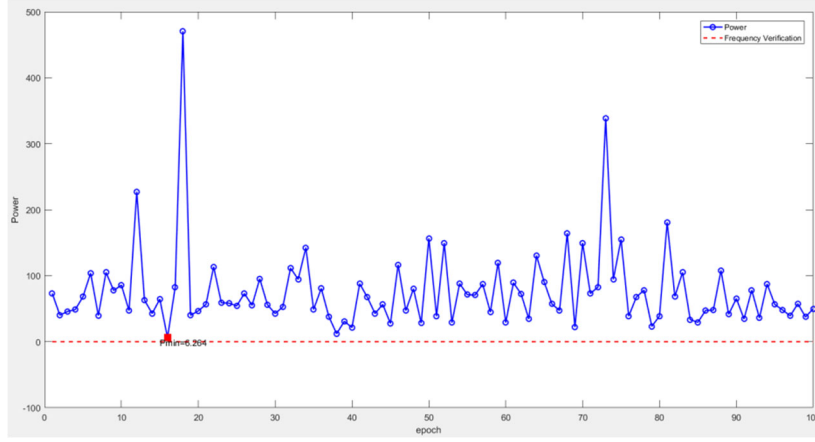


图12 功耗较优值曲线

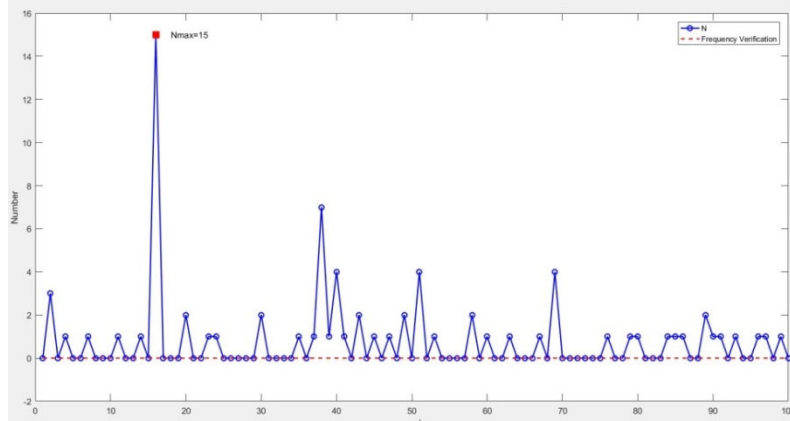


图13 环形振荡器数量曲线

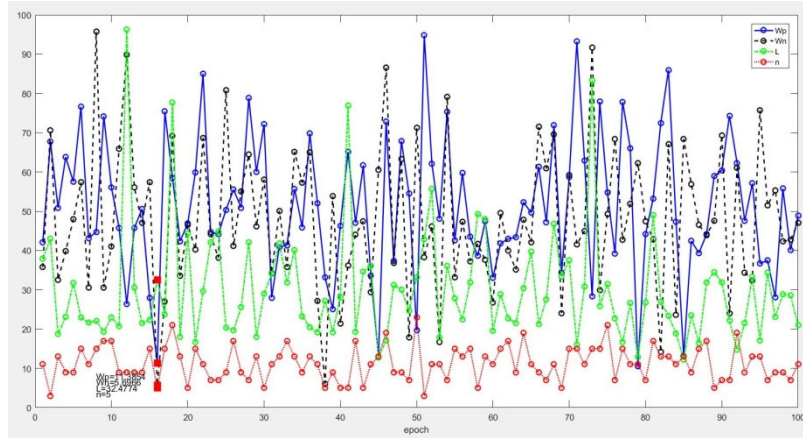


图14  $w_p$ 、 $w_n$ 、 $L$  和  $n$  值曲线

从图 12 可以看出，频率验证曲线基本与 x 轴线重合，证明结果的可靠性较高。功率最小为主要判断依据，环形振荡器数量为次要判断依据。根据计算结果可知,功率最小值  $P_1 = 6.264 W$ , 对应的环形振荡器数量正好为最大值  $N_{\max 1} = 15$ ，所对应的  $w_p = 11.3854 \mu m$ 、 $w_n = 5.6966 \mu m$ 、 $L = 32.4774 \mu m$  及  $n = 5$ 。

对于情形二：

绘制单个环形振荡器总功耗  $P$  较优值曲线图、环形振荡器个数  $N$  曲线图和对应的  $W_p$ 、 $W_n$ 、 $L$ 、 $n$  曲线图。如图 15、16、17 所示：

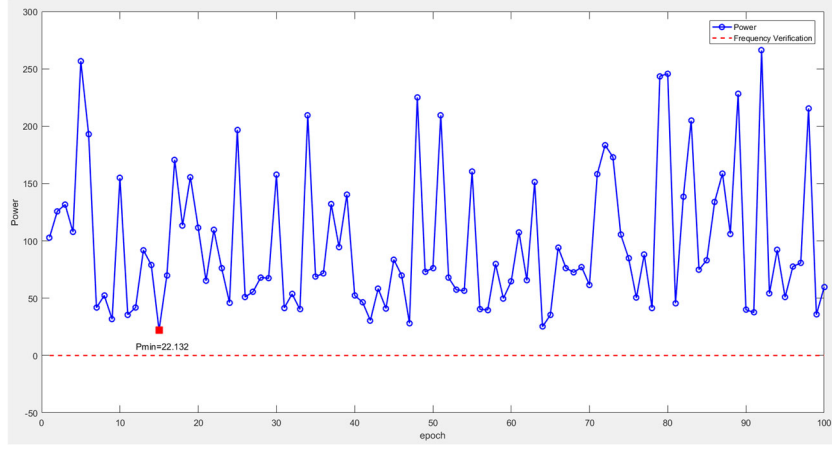


图15 功耗较优值曲线

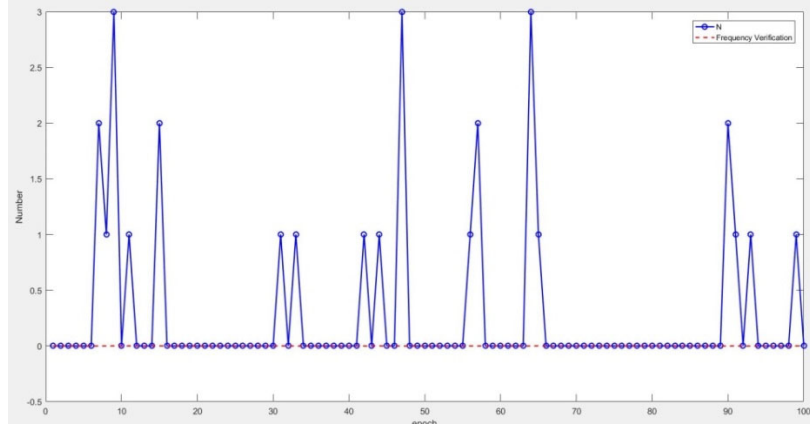


图16 环形振荡器数量曲线

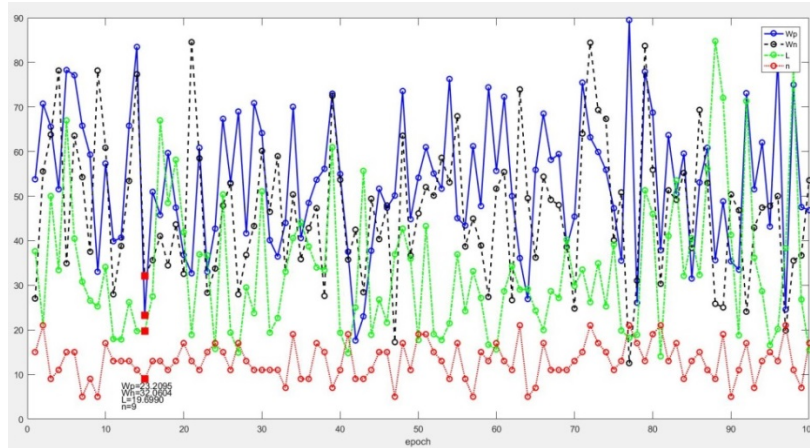


图17  $W_p$ 、 $W_n$ 、 $L$  和  $n$  值曲线

由上述求解结果可知，情形二中环形振荡器的最低功耗为  $P_2 = 22.132 W$ ，环形振荡器数量最大为  $N_{\max 2} = 3$ 。将该求解结果与情形一相比，可以发现，情形二中环形振荡器的最低功耗大于情形一的最低功耗，安放的环形振荡器的个数小于情形一中安放的环形振荡器个数。

综上所述, 相比于情形二, 情形一的模型较优。因此, 当输出频率为  $2\text{ MHz}$  时, 晶体管的尺寸为  $W_p = 11.3854\text{ }\mu\text{m}$ 、 $W_n = 5.6966\text{ }\mu\text{m}$ 、 $L = 32.4774\text{ }\mu\text{m}$  及反相器个数  $n = 5$  时, 环形振荡器达到最小功耗  $6.264\text{ W}$ , 芯片上最多能够安放 15 块环形振荡器。

## 六、模型的评价

### 6.1 模型的优点

1. 模型的建立基于 CMOS 环形振荡器原理的基础上, 以严谨的理论作为支撑, 使得模型具有较高的准确性与可靠性。
2. 通过严谨的理论分析, 对模型的结构进一步优化, 使得模型结构简单, 通俗易懂。
3. 模型综合考虑了多种因素的影响, 具有较好的适应性。

### 6.2 模型的缺点

1. 模型的建立与 CMOS 环形振荡器的实际工作情况存在一定误差。
2. 问题四芯片中的环形振荡器可能存在尺寸规格不同的情况, 需要进一步讨论分析。

## 参考文献

- [1] 汪东旭, 孙艺. 一种频率稳定的改进型 CMOS 环形振荡器, 微电子学, 第 29 卷第 5 期:67-70, 1999.
- [2] 拉贝艾 (Rabaey, J.M), 数字集成电路—电路、系统与设计 (第二版), 北京: 电子工业, 2004.
- [3] Clara\_D, COMS 反相器的传输延时,  
[https://blog.csdn.net/clara\\_d/article/details/120799530](https://blog.csdn.net/clara_d/article/details/120799530), 2022 年 8 月 5 日.
- [4] 康松默, CMOS 数字集成电路—分析与设计 (第四版), 北京: 电子工业, 2015.
- [5] Blanche117, 数学建模—多目标规划模型 (智能优化算法 NSGA-II),  
<https://mbd.baidu.com/ma/s/lyccl2qq>, 2022 年 8 月 6 日.
- [6] 颜雪松, 伍庆华, 胡成玉, 遗传算法及其应用, 武汉: 中国地质大学, 2018.
- [7] 刘兰明, 多目标规划的理论方法及其应用研究, 上海: 上海交通大学, 2014.
- [8] 张可, 代雪峰, 张海涛. 一种低功耗频率稳定的 CMOS 环形振荡器设计, 微处理机, 第 38 期第 5 卷: 23-26, 2017.

## 附 录

### 附录 1：问题一的 matlab 程序

```
clc
clear all
%% 第一题
% 已知参数
L = [0.1 0.2 0.4 0.1 0.2 0.4 0.1 0.2 0.3 0.5];
Wp = [0.4 0.8 1.6 0.2 0.4 0.8 0.5 1 1.8 2];
Wn = [0.2 0.4 0.8 0.4 0.8 1.6 0.5 1 1.8 1];
n = [11 11 11 31 31 31 51 51 51 99];
Vgs = 1.2;
Vdd = 1.2;
Kp = 68.7134*10^(-6);
Kn = 111.6634*10^(-6);
Vpth = 0.398;
Vnth = 0.42;
for i=1:10
    Li = L(1,i);
    Wpi = Wp(1,i);
    Wni = Wn(1,i);
    ni = n(1,i);
    S = Li*Wpi+Li*Wni;
    C = 3.137*10^(-12)*S;
    Tr = 2*Vdd*C/(Kp*(Wpi/Li)*(Vgs-Vpth)^2);
    Tf = 2*Vdd*C/(Kn*(Wni/Li)*(Vgs-Vnth)^2);
    Tpd = (Tr+Tf)/2;
    f(1,i) = (1/(2*ni*Tpd))/10^6
end
```

### 附录 2：问题二的 matlab 程序

```
%% 非线性规划
% 目标函数
% x(1)是Wp x(2)是Wn x(3)是L
function f = fitness1(x)
f = x(1)*x(3)+x(2)*x(3)+0.38*x(1)+0.38*x(2)+0.07*x(3)+0.0266;
end
%% 非线性约束条件
function [C,Ceq] = fun2(x)
C = [];
Ceq
=1/(2*51*(3.7644/(69.7134*(1.2-0.398)^2)*x(3)^2+3.7644*x(2)*x(3)^2/(69.7134*(1.2-0.398)^2)*(x(1)^(-1))+3.7644*x(3)^2/(111.6634*(1.2-0.42)^2)+3.7644*x(1)*x(3)^2/(111.6634*(1.2-0.42)^2)*(x(2)^(-1))))-1
```

```

0;

%% 求解程序
clc
clear all
fun = @fitness1;
options = gaoptimset('PopulationSize',100,'CrossoverFraction',0.8,'Generations',500);
nvars = 3;
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb=[0.12;0.12;0.06];
ub=[100;100;100];
nonlcon = @fun2;
filename = 'zycs.xlsx';
% [x_best,fval]=ga(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
for i = 1:100    [x_best(i,:),fval(i,:)] = ga(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
end
xlswrite(filename,fval,'A1:A100')
xlswrite(filename,x_best,1,'B1:D100')
%% 绘图程序
clc
clear all

%% 数据处理
filename = 'zycs.xlsx';
i=1:100;
data = xlsread(filename,'A1:A100');
S = (data)';
data2 = xlsread(filename,'B1:D100');
for j=1:100
    x(1) = data2(j,1);
    x(2) = data2(j,2);
    x(3) = data2(j,3);
%Fpreval(:,j)=(13981.8127*x(1)*x(2)/(383.9688*(x(1)+x(2))*(x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1))))/51-
10;
    Fpreval(:,j) =
1/(2*51*(3.7644/(69.7134*(1.2-0.398)^2)*x(3)^2+3.7644*x(2)*x(3)^2/(69.7134*(1.2-0.398)^2)*(x(1)^(-1
)))+...3.7644*x(3)^2/(111.6634*(1.2-0.42)^2)+3.7644*x(1)*x(3)^2/(111.6634*(1.2-0.42)^2)*(x(2)^(-1))))-1
0;
end
%% 寻找最优位置
Smin = -max(-S);

```



```

[row,col]=find(Smin==S);
%% 绘图
% 绘制S曲线
figure(1)
plot(i,S,'b-o',i,Freval,'r--','LineWidth',1.5)
hold on
plot(col,Smin,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
xlabel('epoch')
ylabel('\mum^2/Hz')
text(78,-0.5,'Smin=0.1486\mum^2')
legend('Area','Frequency verification')
hold off
% 绘制Wp、Wn、L曲线
Wp = (data2(:,1));
Wn = (data2(:,2));
L = (data2(:,3));
figure(2)
plot(i,Wp,'b-o',i,Wn,'k--o',i,L,'g-o','LineWidth',1.5)
Wpb = data2(col,1);
Wnb = data2(col,2);
Lb = data2(col,3);
hold on
plot(col,Wpb,col,Wnb,col,Lb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
text(82,2.5,'Wp=0.1477')
text(82,2,'Wn=0.1200')
text(82,1.5,'L=0.06')
legend('Wp','Wn','L')
xlabel('epoch')
ylabel('\mum')
hold off

```

### 附录 3：问题三的 matlab 程序

```

%% 目标函数
function f = fitness2(x)
f = (22.586*(x(1)+x(2))*x(3)+1.0147)*x(4);
%%非线性约束条件
function [C,Ceq]=fun4(x)
C=[];
Ceq =
[13981.8127*x(1)*x(2)/(7.5288*x(4)*(x(1)+x(2))*(x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1)))-5;rem(x(4),2)-1];
%% 求解程序
clc

```

```

clear all
fun = @fitness2;
options = gaoptimset('PopulationSize',100,'CrossoverFraction',0.8,'Generations',500);
nvars = 4;
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb=[0.12;0.12;0.06;3];
ub=[100;100;100;+inf];
nonlcon = @fun4;
% [x_best,fval]=ga(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
for i=1:150
    [x_best(i,:),fval(i,:)] = ga(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
end
filename = 'hsb3.xlsx';
xlswrite(filename,fval,'A1:A150');
xlswrite(filename,x_best,'B1:E150')
rn = xlsread(filename,'E1:E150');
nn = round(rn);
xlswrite(filename,nn,'E1:E150')
%% 绘图程序
clc
clear all
%% 数据处理
filename = 'hsb3.xlsx';
data = xlsread(filename,'A1:A150');
P = (data);
data2 = xlsread(filename,'B1:E150');
i = 1:150;
for j=1:150
    x(1)=data2(j,1);
    x(2)=data2(j,2);
    x(3)=data2(j,3);
    x(4)=data2(j,4);
    Freval(:,j) =
13981.8127*x(1)*x(2)/(7.5288*x(4)*(x(1)+x(2))*(x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1)))-5;
end
%% 寻找最优位置
Pmin = -max(-P);
[row,col]=find(Pmin==P);
%% 绘图
% 绘制P、Freval曲线
figure(1)

```

```

plot(i,P,'b-o',i,Freval,'r--','LineWidth',1.5)
hold on
plot(col,Pmin,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
text(142,4,'Pmin=15.1216')
xlabel('epoch')
ylabel('W')
legend('Power','Frequency Verification')
hold off
% 绘制Wp、Wn、L、n曲线
Wp = (data2(:,1))';
Wn = (data2(:,2))';
L = (data2(:,3))';
n = (data2(:,4))';
figure(2)
plot(i,Wp,'b-o',i,Wn,'k--o',i,L,'g-o',i,n,'r:o','LineWidth',1.5)
Wpb = data2(col,1);
Wnb = data2(col,2);
Lb = data2(col,3);
nb = data2(col,4);
hold on
plot(col,Wpb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col,Wnb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col,Lb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col,nb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
xlabel('epoch')
ylabel('\mu')
text(140,2.2,'Wp=0.1200')
text(140,2,'Wn=0.1200')
text(140,1.8,'L=0.7430')
text(147,2.8,'n=3')
legend('Wp','Wn','L','n')
hold off

```

#### 附录 4：问题四的 matlab 程序

##### 情形一程序

%% 目标函数

```

function f=fitness3(x)
f(1)=(22.586*(x(1)+x(2))*x(3)+0.0017)*x(4);
f(2)=ceil(-(880/(x(4)*(0.38+x(3))))*(244/(x(4)*(x(1)+x(2)+0.07))));
end

```

```

%% 非线性约束条件
function [C,Ceq]=fun6(x)
C=[-(x(4)*(0.38+x(3)))+(x(4)*(0.38+x(3)))-880;-(x(4)*(x(1)+x(2)+0.07));(x(4)*(x(1)+x(2)+0.07))-224];
Ceq =
[13981.8127*x(1)*x(2)/(7.5288*x(4)*(x(1)+x(2))*(x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1)))-0.002;rem(x(4),2)-1];

%% 模型求解
clc
clear all
fun = @fitness3;
options =
gaoptimset('ParetoFraction',0.3,'PopulationSize',100,'Generations',500,'StallGenLimit',500,'TolFun',1e-10);
nvars = 4;
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb=[0.12;0.12;0.06;3];
ub=[100;100;100;+inf];
nonlcon = @fun6;
% [x_best,fval] = gamultiobj(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
for i=1:100
    [x_best(i,:),fval(i,:)] = gamultiobj(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
end
filename = 'hsb4.xlsx';
xlswrite(filename,fval,'A1:B100');
xlswrite(filename,x_best,'C1:F100')
rn = xlsread(filename,'F1:F100');
nn = round(rn);
xlswrite(filename,nn,'F1:F100')

%% 绘图
clc
clear all
%% 数据处理
filename = 'hsb4.xlsx';
data = xlsread(filename,'A1:A100');
P = (data)';
data1 = xlsread(filename,'B1:B100');
N = ((-data1))';
data2 = xlsread(filename,'C1:F100')
i = 1:100;
for j=1:100

```

```

x(1)=data2(j,1);
x(2)=data2(j,2);
x(3)=data2(j,3);
x(4)=data2(j,4);
Fpreval(:,j) =
13981.8127*x(1)*x(2)/(7.5288*x(4)*(x(1)+x(2))*(x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1)))-0.002;
end
%% 寻找最优位置
Pmin = -max(-P);
[row1,col1]=find(Pmin==P);
Nmax = max(N)
[row2,col2]=find(Nmax==N);
%% 绘图
% 绘制P曲线
figure(1)
plot(i,P,'b-o',i,Fpreval,'r--','LineWidth',1.5)
hold on
plot(col1,Pmin,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
text(15,-0.8,'Pmin=6.264*10^4')
xlabel('epoch')
ylabel('Power')
legend('Power','Frequency Verification')
hold off
%% 绘制N曲线
figure(2)
plot(i,N,'b-o',i,Fpreval,'r--','LineWidth',1.5)
hold on
plot(col2,Nmax,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
text(18,15,'Nmax=15')
xlabel('epoch')
ylabel('Number')
legend('N','Frequency Verification')
hold off
%% 绘制Wp,Wn,L,n曲线
Wp = (data2(:,1))';
Wn = (data2(:,2))';
L = (data2(:,3))';
n = (data2(:,4))';
figure(3)
plot(i,Wp,'b-o',i,Wn,'k-o',i,L,'g-o',i,n,'r-o','LineWidth',1.5)
Wpb = data2(col1,1);
Wnb = data2(col1,2);
Lb = data2(col1,3);
nb = data2(col1,4);

```

```

hold on
plot(col1,Wpb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col1,Wnb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col1,Lb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col1,nb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
xlabel('epoch')
text(8,8,'Wp=11.3854')
text(8,6.5,'Wn=5.6966')
text(8,5,'L=32.4774')
text(8,3.5,'n=5')
legend('Wp','Wn','L','n')
hold off

```

## 情形二程序

```

%% 目标函数
function f=fitness4(x)
f(1)=(22.586*(x(1)+x(2))*x(3)+0.0017)*x(4);
f(2)=ceil(-(880/(x(4)*(x(1)+x(2)+0.07)))*(244/(x(4)*(0.38+x(3))))));
%% 非线性约束条件
function [C,Ceq]=fun7(x)
C=[-(x(4)*(0.38+x(3)))+(x(4)*(0.38+x(3)))-224;-(x(4)*(x(1)+x(2)+0.07));(x(4)*(x(1)+x(2)+0.07))-880];
Ceq =
[13981.8127*x(1)*x(2)/(7.5288*x(4)*(x(1)+x(2))*x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1))-0.002;rem(x(4),2)-1];

%% 模型求解
clc
clear all
fun = @fitness3;
options =
gaoptimset('ParetoFraction',0.3,'PopulationSize',100,'Generations',500,'StallGenLimit',500,'TolFun',1e-10);
nvars = 4;
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
lb=[0.12;0.12;0.06;3];
ub=[100;100;100;+inf];
nonlcon = @fun6;
% [x_best,fval] = gamultiobj(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
for i=1:100
    [x_best(i,:),fval(i,:)] = gamultiobj(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)

```

```

end
filename = 'hsb5.xlsx';
xlswrite(filename,fval,'A1:B100');
xlswrite(filename,x_best,'C1:F100')
rn = xlsread(filename,'F1:F100');
nn = round(rn);
xlswrite(filename,nn,'F1:F100')

%% 绘图
clc
clear all
%% 数据处理
filename = 'hsb5.xlsx';
data = xlsread(filename,'A1:A100');s
P = (data)';
data1 = xlsread(filename,'B1:B100');
N = ((-data1))';
data2 = xlsread(filename,'C1:F100')
i = 1:100;
for j=1:100
    x(1)=data2(j,1);
    x(2)=data2(j,2);
    x(3)=data2(j,3);
    x(4)=data2(j,4);
    Freval(:,j) =
13981.8127*x(1)*x(2)/(7.5288*x(4)*(x(1)+x(2))*(x(3))^2*(67.9360*x(2)+44.1967*x(1)))-0.002;
end
%% 寻找最优位置
Pmin = -max(-P);
[row1,col1]=find(Pmin==P);
Nmax = max(N)
[row2,col2]=find(Nmax==N);
%% 绘图
% 绘制P曲线
figure(1)
plot(i,P,'b-o',i,Freval,'r--','LineWidth',1.5)
hold on
plot(col1,Pmin,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,0,0])
text(12,0.4,'Pmin=2.2132*10^5')
xlabel('epoch')
ylabel('Power')
legend('Power','Frequency Verification')
hold off
%% 绘制N曲线

```

```

figure(2)
plot(i,N,'b-o',i,Freval,'r--','LineWidth',1.5)
hold on
xlabel('epoch')
ylabel('Number')
legend('N','Frequency Verification')
hold off
%% 绘制Wp,Wn,L,n曲线
Wp = (data2(:,1));
Wn = (data2(:,2));
L = (data2(:,3));
n = (data2(:,4));
figure(3)
plot(i,Wp,'b-o',i,Wn,'k--o',i,L,'g-o',i,n,'r:o','LineWidth',1.5)
Wpb = data2(col1,1);
Wnb = data2(col1,2);
Lb = data2(col1,3);
nb = data2(col1,4);
hold on
plot(col1,Wpb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col1,Wnb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col1,Lb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
hold on
plot(col1,nb,'gs','MarkerSize',10,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor',[1,.0,0])
xlabel('epoch')
text(12,7.5,'Wp=23.2095')
text(12,6,'Wn=32.0604')
text(12,4.5,'L=19.6990')
text(12,3,'n=9')
legend('Wp','Wn','L','n')
hold off

```