

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校	上海交通大学
参赛队号	10248108
队员姓名	1. 张婕欣
	2. 顾 运
	3. 贾欣欣

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 机动目标的跟踪与反跟踪问题的数学建模

摘 要

本文主要针对机动目标跟踪中机动模型的建立，多目标数据关联以及跟踪-反跟踪等关键技术，进行问题分析以及模型求解。

针对第一问中单目标机动跟踪问题的求解，本文认为，其难点在于如何设计跟踪模型准确描述机动目标的所有运动特性。经过对目标运动状态的分析，本文中设计了三种跟踪模型，分别是扩展卡尔曼滤波（EKF）模型、强跟踪模型(STF)、Singer 模型，来对目标的运动进行机动判定和轨迹跟踪。结合三种方法得到目标的两段机动过程，即 U 型转弯机动和环形转弯机动，同时比较了三种方法对目标的位置、速度、加速度的估计。

针对第二问中多目标跟踪中的数据关联问题，本文首先采用 KMeans 算法实现初始航迹的分离，并基于 EKF 进行目标运动状态的预测与跟踪；对于每一时刻的量测值关联，本文采用当前估计状态值与历史估计状态值的距离作为关联判据，完成了题设中两个目标的数据关联。对于回波点迹缺失问题，本文引入了伪量测量进行处理，并在仿真数据上验证了该方法的可行性。

针对第三问中 Data3 的目标机动规律分析问题，本文首先根据量测数据的空间特性预测该目标的航迹近似于导弹的飞行轨迹。随后，对比了基于匀速与匀加速运动的 EKF 模型以及第一问中采用 STF 模型。由于目标初始运动状态变化频繁，因此 STF 模型的跟踪效果不佳。采用扩展卡尔曼滤波对于目标运动状态的分析，得到目标在前 50 个左右的量测周期内呈被动机动状态。

针对第四问总目标轨迹的实时预测，本文采用了基于滑动窗 n 次多项式拟合数学模型，通过对一段目标位置历史数据序列多项式拟合，计算出下一时刻的预测值，并根据新的测量值重新拟合，实现了实时预测。估计出了该目标的着落点的经度为 116.3450 度，纬度为 39.6407 度。本算法复杂度为 $O(n^3)$ 。

针对第五问中目标的逃逸与反逃逸问题，本文首先根据雷达的量测精度，得到目标处于量测门限内外的准确判决模型；为了解决逃逸问题，本文在目标的运行过程中引入了持续的主动强机动，通过仿真实验，证明了该策略能够针对问题二中所建立模型进行逃逸；对于反逃逸问题，本文认为，只有引入具备机动预测与交互的模型才能有效应对本文采用的逃逸方案。

目录

第 1 章	问题重述	4
第 2 章	问题假设和数据处理	5
2.1	模型的基本假设	5
2.2	坐标转换	5
2.2.1	雷达站极坐标到本地直角坐标的转换	5
2.2.2	雷达站本地直角坐标到地心直角坐标的转换	5
2.2.3	雷达站地心直角坐标到处理中心直角坐标的转换	6
第 3 章	机动目标的跟踪模型	7
3.1	跟踪原理	7
3.2	数据预处理	8
3.3	三种机动目标跟踪模型	9
3.3.1	扩展卡尔曼滤波器 (EKF)	9
3.3.2	强跟踪模型(STF)	11
3.3.3	Singer 模型	13
3.4	三种模型性机动判断和加速度统计	15
3.5	模型评价	19
第 4 章	多机动目标跟踪中数据关联	20
4.1	问题分析	20
4.2	模型建立	20
4.2.1	航迹分离	21
4.2.2	门限选择与杂波过滤	21
4.2.3	数据关联	22
4.3	航迹丢失处理	26
4.4	模型评价	29
第 5 章	空间目标的机动变化规律	30
5.1	问题分析	30
5.2	模型建立	30
5.3	目标机动分析	32
5.4	模型评价	33
第 6 章	目标轨迹的实时预测	34
6.1	问题分析	34
6.2	模型建立	34
6.3	模型评价	37
第 7 章	跟踪和反跟踪	38
7.1	问题分析	38
7.2	逃逸策略	38
7.3	模型评价	40
第 8 章	结论	41
参考文献	42

第1章 问题重述

目标跟踪是指根据传感器（如雷达等）所获得的对目标的测量信息，连续地对目标的运动状态进行估计，进而获取目标的运动态势及意图。机动目标跟踪的难点在于以下几个方面：(1)描述目标运动的模型难于准确建立。(2)传感器获得测量信息能力的测量方程难于完全准确反映真实目标的运动特征；(3)当存在多个机动目标时数据关联。对提供的 3 个 Data 进行分析处理，完成以下问题：

- 1) 根据附件中的 Data1.txt 数据，分析目标机动发生的时间范围，并统计目标加速度的大小和方向。建立对该目标的跟踪模型，并利用多个雷达的测量数据估计出目标的航迹。鼓励在线跟踪。
- 2) 附件中的 Data2.txt 数据对应两个目标的实际检飞考核的飞行包线（检飞：军队根据国家军标规则设定特定的飞行路线用于考核雷达的各项性能指标，因此包线是有实战意义的）。请完成各目标的数据关联，形成相应的航迹，并阐明你们所采用或制定的准则（鼓励创新）。如果用序贯实时的方法实现更具有意义。若出现雷达一段时间只有一个回波点迹的状况，怎样使得航迹不丢失？请给出处理结果。
- 3) 根据附件中 Data3.txt 的数据，分析空间目标的机动变化规律（目标加速度随时间变化）。若采用第 1 问的跟踪模型进行处理，结果会有哪些变化？
- 4) 请对第 3 问的目标轨迹进行实时预测，估计该目标的着落点的坐标，给出详细结果，并分析算法复杂度
- 5) Data2.txt 数据中的两个目标已被雷达锁定跟踪。在目标能够及时了解是否被跟踪，并已知雷达的测量精度为雷达波束宽度为 3° ，即在以雷达为锥顶，雷达与目标连线为轴，半顶角为 1.5° 的圆锥内的目标均能被探测到；雷达前后两次扫描时间间隔最小为 0.5s。为应对你们的跟踪模型，目标应该采用怎样的有利于逃逸的策略与方案？反之为了保持对目标的跟踪，跟踪策略又应该如何相应地变换？

第2章 问题假设和数据处理

2.1 模型的基本假设

本题中均不考虑地球的自转及其绕太阳的公转。地球半径取 6371393m。

2.2 坐标转换

Data1 包含 3 个雷达, 为了系统使误差最小, 将不同坐标系转换到同坐标系处理。考虑到测量误差基于雷达的极坐标给定, 选定 1 号雷达站为处理中心。下面将本地直角坐标系转换成地心直角坐标, 再由地心直角坐标转换为处理中心的极坐标[1]。

2.2.1 雷达站极坐标到本地直角坐标的转换

设目标在雷达站极坐标系中的坐标为 $(\rho, \theta, \varepsilon)$, 其中 ρ 为斜距, θ 为方位角, ε 为仰角。目标在雷达站直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) , 则转换公式为

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varepsilon \\ y = \rho \cos \theta \cos \varepsilon \\ z = \rho \sin \varepsilon \end{cases} \quad (2.1)$$

将 Data1.txt 中的数据通过这个公式进行变换, 得到了 3 个雷达站本地直角坐标系下的坐标。

2.2.2 雷达站本地直角坐标到地心直角坐标的转换

设目标在雷达站直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) , 在地心直角坐标系中的坐标为 x_e, y_e, z_e 。在这一转换中要进行坐标系旋转转换, 转换公式为

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

其中 M 为从雷达站地心直角坐标到处理中心直角坐标转换的旋转矩阵。

$$M = \begin{bmatrix} -\sin L & -\sin B \sin L & \cos B \cos L \\ \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \sin L \\ 0 & \cos B & \sin B \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ 为雷达站所在位置的地心坐标。其中,

$$\begin{cases} N = \frac{a}{1 - e^2 \sin^2(B)} \\ x_0 = (N + H) \cos(B) \cos(L) \\ y_0 = (N + H) \cos(B) \sin(L) \\ z_0 = ((1 - e^2) \times N + H) \sin(B) \end{cases} \quad (2.4)$$

L, B, H 为雷达站所在位置点的经纬度和海拔高度。 a, e^2 为常数, $a=6378245.0$, $e^2=0.006693421623$, 对不同的地点有不同的 a, e^2 , 对以上转换影响不是很大。以上计算所有的角度值均为弧度值, 如果不是则要进行转换。

表 2-1 三个雷达的地心坐标

雷达标号	经度(°)	纬度(°)	高度(m)	x_0	y_0	z_0
1	122.1	40.5	0	-2.58E+06	4.11E+06	4.12E+06
2	122.4	41.5	0	-2.56E+06	4.04E+06	4.20E+06
3	122.7	41.9	0	-2.61E+06	4.06E+06	4.15E+06

2.2.3 雷达站地心直角坐标到处理中心直角坐标的转换

选择 1 号雷达为处理中心。设目标在处理中心直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) ,

处理中心直角坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, 经纬度为 $B1$, $L1$, 高度为 0 。

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\sin L1 & -\sin B1 \sin L1 & \cos B1 \cos L1 \\ \cos L1 & -\sin B1 \sin L1 & \cos B1 \sin L1 \\ 0 & \cos B1 & \sin B1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_1^T \left(\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right) \quad (2.6)$$

最后将直角坐标 (x, y, z) 转换为极坐标 $(\rho, \theta, \varepsilon)$, 转换公式为:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta_1 &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \times \frac{180}{\pi} \\ \varepsilon_1 &= \arctg\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \times \frac{180}{\pi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$(\rho_1, \theta_1, \varepsilon_1)$ 即为目标点在 1 号雷达的极坐标系中的距离, 方位角, 俯仰角。

第3章 机动目标的跟踪模型

3.1 跟踪原理

对于机动目标跟踪技术的研究，主要涉及到以下几个方面：跟踪模型设计，状态估计算法设计和数据融合算法研究。这几个方面组成了机动目标跟踪算法的主要结构。图 3-1 给出了机动目标跟踪的基本原理图。

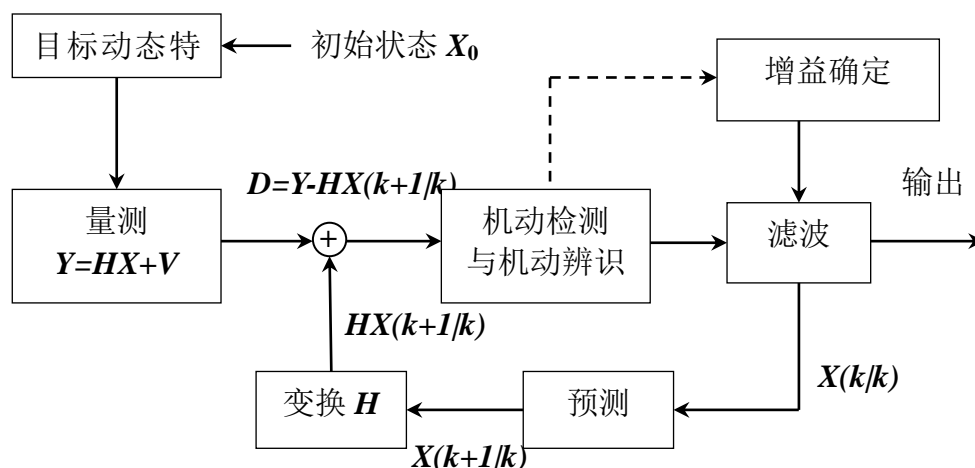


图 3-1 机动目标跟踪的基本原理图

运动目标的机动状态大部分不会持续很长的时间，仅仅在逃避敌方追踪等必要情况下启动，平时则处于运动相对平缓的非机动状态。“非机动-机动-非机动”是一般机动目标运动的常见过程。首先，利用原始观测数据对目标运动状态进行预测，在雷达 1 观测期间，目标发生 U 形转弯的机动，在雷达 2 和 3 观测期间，目标发生环形机动。

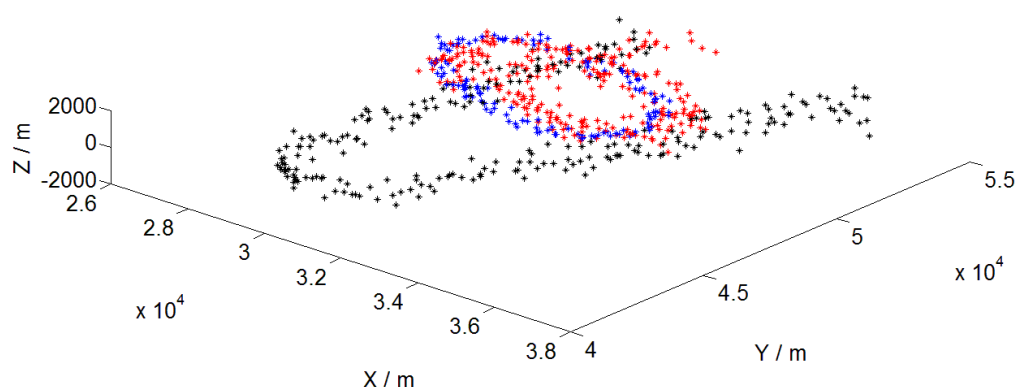


图 3-2 目标轨迹示意图

根据原始测量数据的速度和加速度统计，判断整个机动过程是变加速运动，在目标 U 型转弯和环形运动过程中， x 和 y 方向的速度都出现了大幅变化，相应的加速度也出现小幅跳变。而 U 形转弯的直线非机动过程段，做匀加速运动。

根据 Data1 的物理意义和统计规律，采用三种模型进行航及滤波。分别是扩展

卡尔曼滤波 (EKF) 模型、强跟踪模型(STF)、Singer 模型。分别分析其跟踪性能以及对机动目标跟踪时的局限性。

3.2 数据预处理

为了对比各种方法的性能指标，本文对数据做如下预处理。

(1) 使误差最小的坐标系转换。由于雷达的测量误差是基于雷达极坐标的误差，将误差通过坐标系变化是不合理的。所以本文将三个雷达的数据转换到统一的坐标系，即先将三个雷达的数据从各自雷达极坐标系转换到地心直角坐标系，再统一转换到雷达 1 的极坐标系。

(2) 1 和 2 雷达的检测间隔的盲点。针对于同一个跟踪目标，雷达 1 首先按照 1hz 的频率测量，在间隔 45s 之后，雷达 2 开始采样。由于在这个盲点里，目标出现了强机动，所以利用雷达 1 失联前的数据不能对轨迹进行预测。如果根据题目的先验信息，已知所有雷达跟踪的为同一个目标，可以根据雷达 1 末端和雷达 2 初始的数据做拟合，来模拟失联状态下目标的运动轨迹。本文中考虑到失联时间超过 10 个采样周期，做简单处理，不对检测盲点内的轨迹进行估计。

(3) 2 和 3 雷达数据的扩维融合。由数据可知，部分时刻出现了 2 和 3 雷达同时采样，因此在该时段本文将两个雷达以一个高维雷达的形式表示出来。令

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(k) \\ \mathbf{Z}_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_M(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(k) \\ \mathbf{H}_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_M(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(k) \\ \mathbf{W}_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_M(k) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

则扩维之后的总体量测方程更改为

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{H}(k) \mathbf{X}(k) + \mathbf{W}(k) \quad (3.2)$$

若每个传感器的维数为 s ，则 $\mathbf{Z}(k)$ 的维数为 sM 。

在不同传感器测量噪声不相关的情况下，有

$$\begin{cases} \text{cov}(\mathbf{W}_i(k), \mathbf{W}_j(k)) = \mathbf{R}_{ij}(k) = \begin{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} & i \neq j \\ \text{cov}(\mathbf{W}_i(k), \mathbf{W}_i(k)) = \mathbf{R}_{ii}(k) & () \end{cases} \quad (3.3)$$

$\mathbf{W}(k)$ 服从均值为零，方差为 $\mathbf{R}(k)$ 的高斯分布。

$$\mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{22}(k) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_{MM}(k) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

卡尔曼滤波的相应状态估计修正方程更改为：

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{-1}(k|k) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) + \mathbf{H}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{H}^T(k) \\ \mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k) \\ \hat{\mathbf{X}}(k|k) = \hat{\mathbf{X}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{Z}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{X}}(k|k-1)) \end{cases} \quad (3.5)$$

其中：

$$\mathbf{R}^{-1}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{-1}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{22}^{-1}(k) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_{MM}^{-1}(k) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

后续滤波处理可直接应用式 3.9 到 3.17 的标准卡尔曼滤波流程。

3.3 三种机动目标跟踪模型

3.3.1 扩展卡尔曼滤波器 (EKF)

卡尔曼滤波是一种高效率的递归滤波器(自回归滤波器)，它能够从一系列的不完全及包含噪声的测量中，估计动态系统的状态。卡尔曼滤波使用状态变量来描述系统，以上一时刻的状态估计值和量测值作为输入，输出本时刻的最优估计值。卡尔曼滤波使用了系统的一部分先验信息，因此可使状态估计更加准确。

卡尔曼滤波是最小均方差和最大后验概率两个意义下的最优估计器。它适用于有限观测间隔的非平稳问题，是适合于计算机计算的递推算法。假设目标系统的状态转移方程为：

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{V}(k) \quad (3.7)$$

其中， $\mathbf{X}(k)$ 为系统状态向量， $\mathbf{F}(k)$ 为系统转移矩阵， $\mathbf{V}(k)$ 为系统的过程噪声。 $\mathbf{V}(k)$ 服从均值为零，方差为 $\mathbf{Q}(k)$ 的高斯分布。量测方程为

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{W}(k) \quad (3.8)$$

其中， $\mathbf{Z}(k)$ 为测量向量， $\mathbf{H}(k)$ 为测量矩阵， $\mathbf{W}(k)$ 为测量噪声。 $\mathbf{W}(k)$ 服从均值为零， $\mathbf{R}(k)$ 方差为的高斯分布。

卡尔曼滤波器的基本形式为：

(1) 预测部分

首先根据目标模型的先验信息进行估计预测：

$$\hat{\mathbf{X}}(k|k-1) = \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{X}}(k-1|k-1) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{Q}(k) \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{P}(k|k-1)$ 为估计误差协方差。

(2) 修正部分

此时根据测量所得的数据对估计值进行修正：

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{Z}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{X}}(k|k-1) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{S}(k)^{-1} \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(k|k) = \hat{\mathbf{X}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\mathbf{d}(k) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{K}^T(k) \quad (3.15)$$

其中， $\mathbf{d}(k)$ 为残差， $\mathbf{S}(k)$ 为残差方差， $\mathbf{K}(k)$ 为滤波器增益。在另一些文献中，由于 $\mathbf{P}(k|k)$ 为对称正定矩阵，其逆必定存在。 $\mathbf{P}(k|k)$ 的递推公式也可以写成下面两种形式：

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{K}^T(k) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(k|k) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) + \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{H}(k) \quad (3.17)$$

利用矩阵求逆引理，可以得到卡尔曼滤波的信息形式。信息滤波器被证明精度是与卡尔曼滤波是完全一样的，而且其更适用于分布式结构的场合，传感器之间仅需传递信息阵和状态估计即可实现序贯融合。

卡尔曼滤波器的信息形式为[2]：

定义预测阶段的信息向量和信息矩阵为：

$$\hat{\mathbf{y}}(k|k-1) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1)\hat{\mathbf{X}}(k|k-1) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Y}(k|k-1) = \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) \quad (3.19)$$

定义信息增量和信息增量矩阵为：

$$\mathbf{i}(k) = \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{H}(k) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{Z}(k) \quad (3.21)$$

则更新方程可写为：

$$\hat{\mathbf{y}}(k|k) = \hat{\mathbf{y}}(k|k-1) + \mathbf{i}(k) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Y}(k|k) = \mathbf{Y}(k|k-1) + \mathbf{I}(k) \quad (3.23)$$

由于雷达的极坐标系的测量向量 $\mathbf{Z}(k)$ 与雷达直角坐标系的系统状态向量 $\mathbf{X}(k)$ 非线性，利用泰勒展开将非线性方程线性化，得到次优的扩展卡尔曼滤波器(EKF)。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}, \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}, \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{x}{1+x^2}, \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - z^2}} \quad (3.27)$$

由前文对目标飞行轨迹的判断，为了能够检测出机动，同时保持非机动状态良好的跟踪，本文采用匀加速（CA）模型：

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0.5T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ \dot{x}(k-1) \\ \ddot{x}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (3.28)$$

以雷达 1 中心为原点建立东北天坐标系，图 3-3 所示为 EKF 跟踪效果。在雷达 1 检测阶段，EKF 能够对 U 型轨迹的平稳飞行段和机动转弯段进行良好跟踪，在雷达 2 和 3 检测阶段，由于环形机动半径较小，且速度变化较快，EKF 的匀加速模型不能很好对目标进行跟踪，在转弯机动处产生较大误差。所以说，EKF 在进入稳态后对机动性应变能力较差。

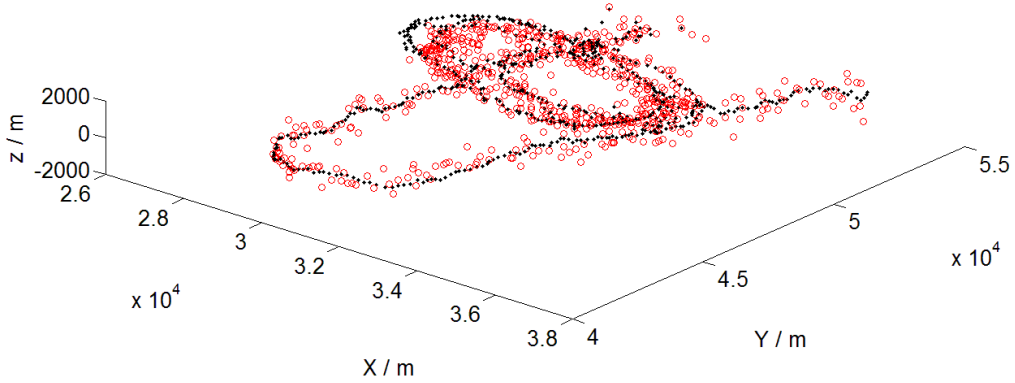


图 3-3 EKF 模型跟踪轨迹

3.3.2 强跟踪模型(STF)

从卡尔曼滤波的递推公式 3.13 和 3.15 中可以看到，协方差阵 $\mathbf{P}(k|k)$ 的计算与量测输入并无关系， $\mathbf{P}(k|k)$ 和 $\mathbf{K}(k)$ 是一个自递归收敛的过程，而当两者达到稳定值的时候， $\mathbf{P}(k|k)$ 和 $\mathbf{K}(k)$ 的值不再变化，卡尔曼滤波便进入了稳态，同时跟踪器便失去了应对系统状态量突变或系统模型变化的能力。强机动目标的运动模式瞬息万变，卡尔曼的这种缺陷对于强机动目标跟踪来说是无法接受的。

文献[13]提出了强跟踪滤波器(STF)。从效果上来看，STF 使滤波器“遗忘”过去的量测信息，误差协方差阵变大，同时导致相应的滤波增益变大，使滤波器恢复对突变情况的调节能力，提高了机动目标跟踪的适应性。

强跟踪滤波器引入一个时变的渐消因子 $\lambda(k)$ ，主要通过每一时刻的新息 $\mathbf{d}(k)$ 求得。该渐变因子定义为：

$$\lambda(k) = \begin{cases} \lambda_0 & \lambda_0 > 1 \\ 1 & \lambda_0 < 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\lambda_0 = \frac{\text{tr}[\mathbf{N}(k)]}{\text{tr}[\mathbf{M}(k)]} \quad (3.30)$$

其中各参数计算方法如下：

$$\mathbf{S}_0(k) = \begin{cases} \mathbf{d}(1)\mathbf{d}^T(1) & k = 1 \\ \frac{[\rho\mathbf{S}_0(k-1) + \mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)]}{1 + \rho} & k > 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{N}(k) = \mathbf{S}_0(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{H}^T(k) - \beta\mathbf{R}(k) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T(k)\mathbf{H}^T(k) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{Z}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{X}}(k|k-1) \quad (3.34)$$

式 3.31 中的 $0 < \rho \leq 1$ 称为遗忘因子，一般取值为 0.95。式 3.32 中的 β 为弱化因子，主要起到估计值平滑的作用，数值可凭经验选择。在每一轮滤波估计中，只需要将式 3.7 变化为：

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \lambda(k)\mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{Q}(k) \quad (3.35)$$

即为强跟踪滤波器的计算公式。以下画出了强跟踪滤波器算法流程图。

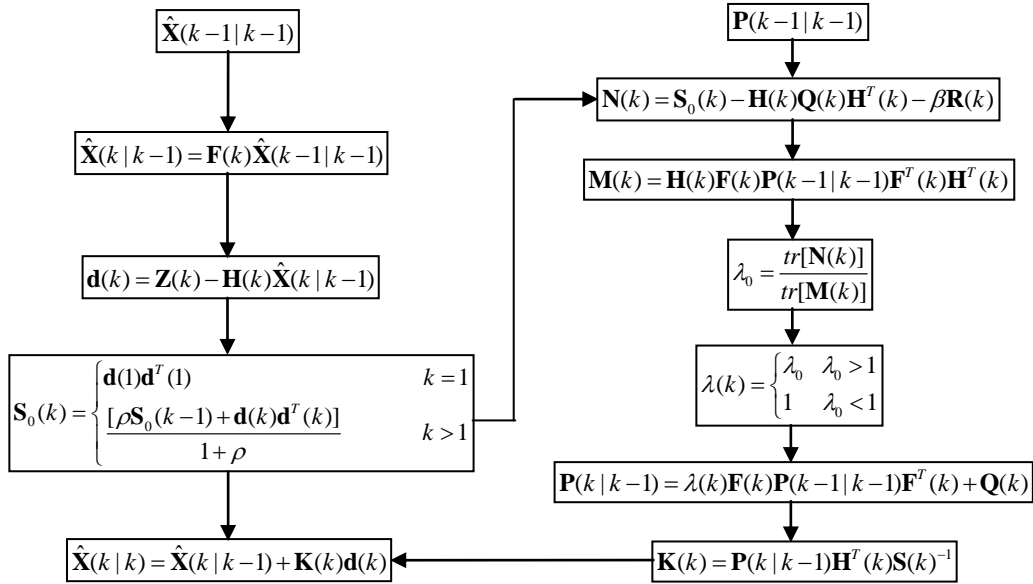


图 3-4 STF 滤波器算法流程图

本文取遗忘因子 ρ 设置为 0.95，弱化因子 β 设置为 0.1，以雷达 1 中心为原点建立东北天坐标系，图 3-5 所示为 STF 跟踪效果。由图可知 STF 全程都可以对目标进行良好跟踪，特别是在 U 型转弯机动，和环形转弯机动处，强跟踪滤波

器的响应速度更快，对机动的敏感性更强，能够迅速进行调整。

与之前的滤波器相比，强跟踪滤波器在系统模型不确定的情况下拥有较强的鲁棒性，并有较强的对于突变状态的反应和跟踪能力。在系统到达稳态时，仍然能够保持对缓变状态的与突变状态的跟踪能力。虽然目前强跟踪滤波器在实际应用中的普及度不高，但对于机动目标跟踪问题来说，强跟踪滤波器是一个比卡尔曼滤波更好的选择。

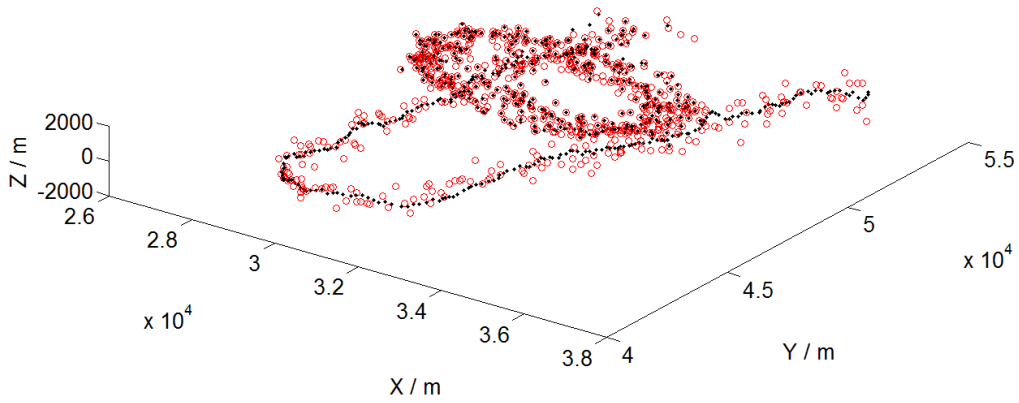


图 3-5 STF 模型跟踪轨迹

3.3.3 Singer 模型

Singer 模型是介于匀速和匀加速之间的模型。Singer 模型认为，机动模型是相关噪声模型，而不是通常认为的白噪声模型，他将目标的加速度定义为指数自相关的零均值随机模型。

$$R(\tau) = E[a(t)a(t+\tau)] = \sigma_m^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.36)$$

其中 σ_m^2 是目标的加速度方差； α 为机动频率，是机动时间常数 τ_m 的倒数，即 $\alpha = 1/\tau_m$ 。机动时间常数即机动的持续时间，飞机慢速转弯的时候机动时间常数约为 60s，逃避机动的持续时间约为 20s，而大气扰动一般为 1s，一般确切值需要通过实际测量得到。

Singer 模型对加速度的概率分布认为是零加速度到最大加速度 a_{\max} 之间的均匀分布。零加速度的概率为 P_0 ，等于最大加速度 a_{\max} 和 $-a_{\max}$ 概率均为 P_{\max} 。可得对应方差为：

$$\sigma_m^2 = \frac{a_{\max}^2}{3} (1 + 4P_{\max} - P_0) \quad (3.37)$$

对式 3.6 的 $R(\tau)$ 进行白化处理，对应采样周期 T 的离散时间动态方程为：

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{V}(k) \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & (\alpha T - 1 + e^{-\alpha T}) / \alpha^2 \\ 0 & 1 & (1 - e^{-\alpha T}) / \alpha \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ \dot{x}(k-1) \\ \ddot{x}(k-1) \end{bmatrix} + \mathbf{V}(k) \quad (3.39)$$

其中， $\mathbf{V}(k)$ 是具有协方差 \mathbf{Q} 的过程噪声，其精确数值如下：

$$\mathbf{Q} = 2\alpha\sigma_m^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{11} = \frac{1}{2\alpha^5} [1 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T + \frac{2\alpha^3 T^3}{3} - 2\alpha^2 T^2 - 4\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{12} = q_{21} = \frac{1}{2\alpha^4} [e^{-2\alpha T} + 1 - 2e^{-\alpha T} + 2\alpha T e^{-\alpha T} - 2\alpha T + \alpha^2 T^2] \\ q_{13} = q_{31} = \frac{1}{2\alpha^3} [1 - e^{-2\alpha T} - 2\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{22} = \frac{1}{2\alpha^3} [4e^{-\alpha T} - 3 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T] \\ q_{23} = q_{32} = \frac{1}{2\alpha^2} [e^{-2\alpha T} + 1 - 2e^{-\alpha T}] \\ q_{33} = \frac{1}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha T}] \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Singer模型与普通的运动学模型相比，存在两个特点：

- (1) 增加了关于加速度概率分布，最大加速度以及加速度自相关函数等先验信息。
- (2) 根据机动频率不同，模型的过程噪声方差和模型结构会发生改变。

在 **Singer** 模型中，机动频率表征目标的人为机动，加速度方差表征目标的随机机动。两者共同决定了过程噪声的方差 \mathbf{Q} 。

本文取 α 为机动频率为0.1，以雷达1中心为原点建立东北天坐标系，图3-6所示为 **Singer** 模型的跟踪效果。和 **STF** 类似，**Singer** 全程都能进行良好的跟踪。说明 **Singer** 跟踪滤波器的响应速度更快，对机动的敏感性更强，能够迅速进行调整。

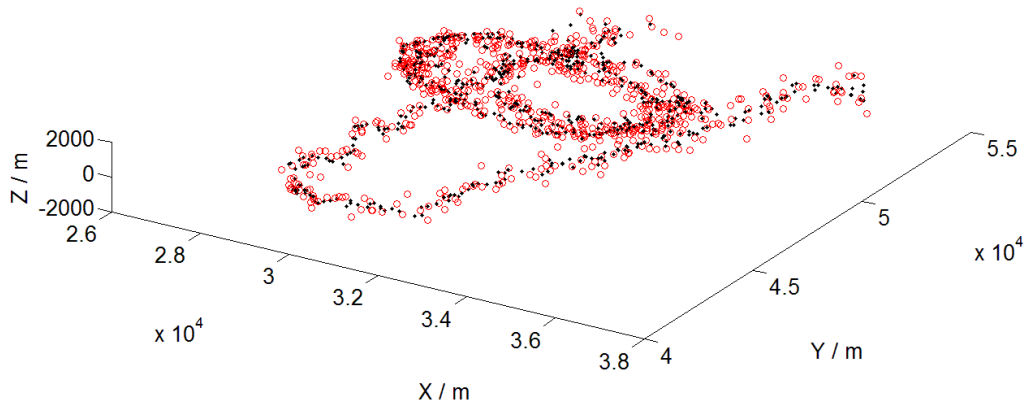


图 3-6 Singer 模型跟踪轨迹

3.4 三种模型性机动判断和加速度统计

本节利用三种模型对目标进行全程跟踪，分别画出 X、Y、Z 轴的位置、速度、加速度估计轨迹图。并对比三种模型的特点，对机动时刻进行判断。

由图 3-7 和图 3-8 分析可知，EKF 在环形转弯机动时，对位置的估计出现较大偏差，但是速度估计较好，波动范围很小，说明 EKF 在进入稳态后对机动性应变能力较差。STF 在环形转弯机动时，对位置的估计非常好，能非常紧密跟踪目标，甚至与和测量值完全重合，但是同时由于其易受噪声干扰，速度波动范围很大，甚至超出了测量值的波动范围。说明 STF 对机动的敏感性比 EKF 要强，而且由于其闭环特性，STF 受到先验信息误差的影响较小，其缺陷是容易受到噪声干扰的影响。Singer 模型的效果介于 EKF 和 STF 模型之间，Singer 对于位置估计比 EKF 效果好，不会出现较大波动，但是其对于机动的敏感性弱于 STF。由图 3-10 和图 3-11 分析可知，Y 轴的位置和速度情况和 X 轴情况相似，因此 EKF、STF 和 Singer 的性能分析类似，在此不再累述。

由图 3-13 和图 3-10、图 3-7 数据对比可知，目标在 Z 轴方向位移非常小，因此信号可看做纯测量误差，通过 Z 轴的加速度变化基本为 0，所以分析模型特性的时候主要采用 X 轴和 Y 轴的数据。本文利用 X 轴和 Y 轴的速度变化情况来判断机动发生的时间范围，图 3-8 和图 3-11 反应了 X 轴和 Y 轴的速度变化，从 36720s 左右，即运动开始 100s 左右进入机动状态，然后在 36790s 左右，即再经过 70s 左右结束机动状态，当雷达 1 信号消失时视为机动再次开始，后续机动状态一直持续到结束。从数据的分析，正好印证了本文最初的对轨迹的大致判断，即目标在 U 型转弯时进入机动状态，后续在环形转弯时持续机动状态。

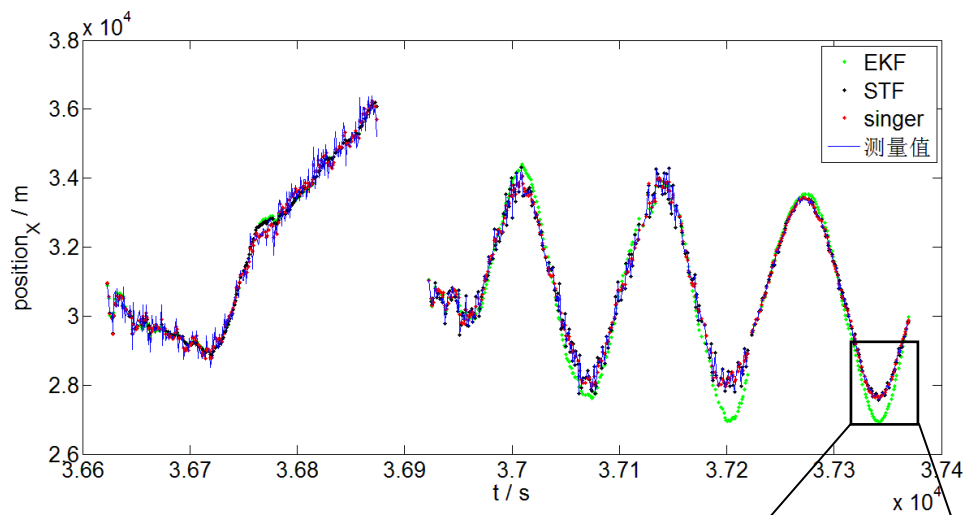


图 3-7 X 轴位置估计轨迹图

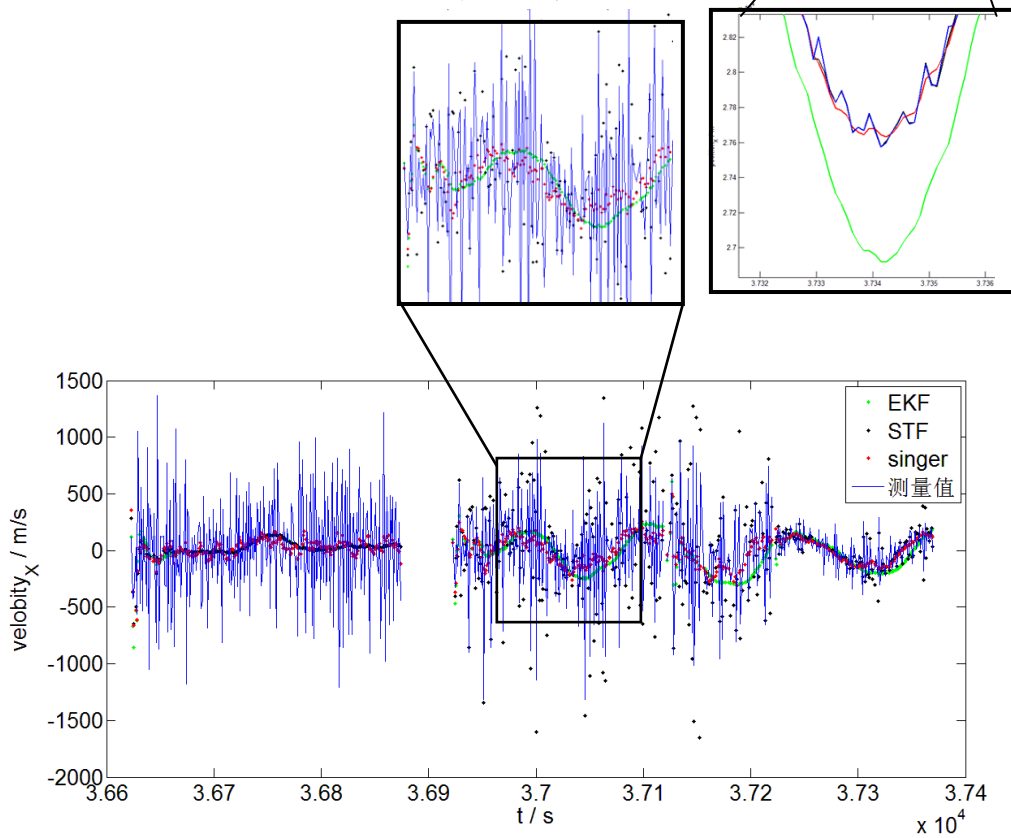


图 3-8 X 轴速度估计轨迹图

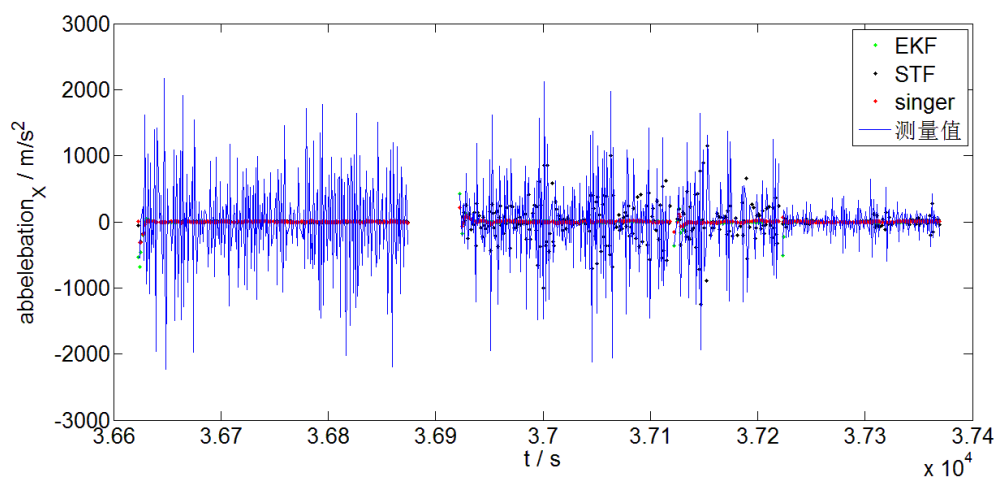


图 3-9 X 轴加速度估计轨迹图

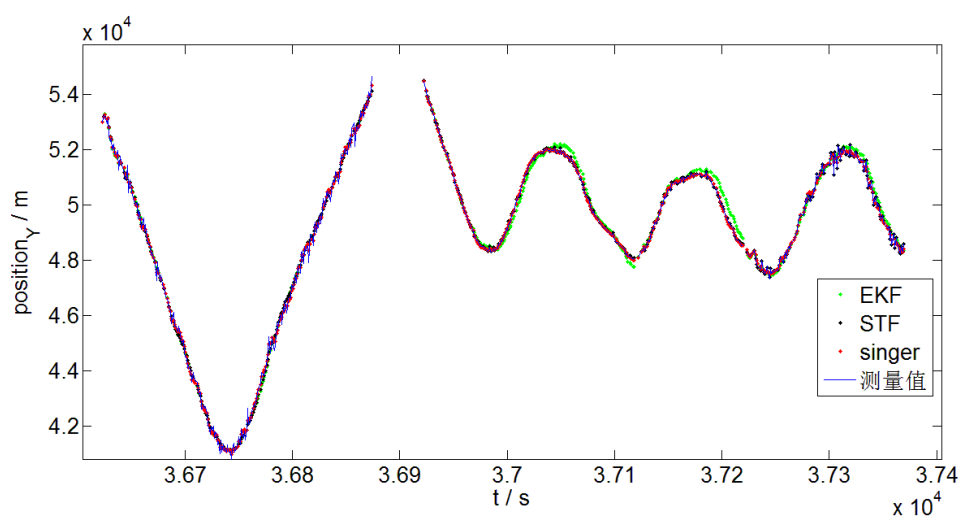


图 3-10 Y 轴位置估计轨迹图

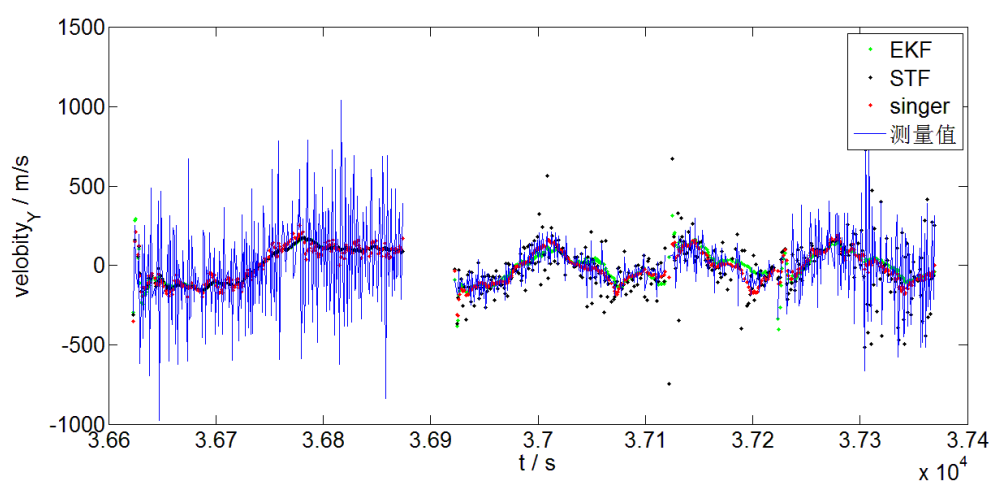


图 3-11 Y 轴速度估计轨迹图

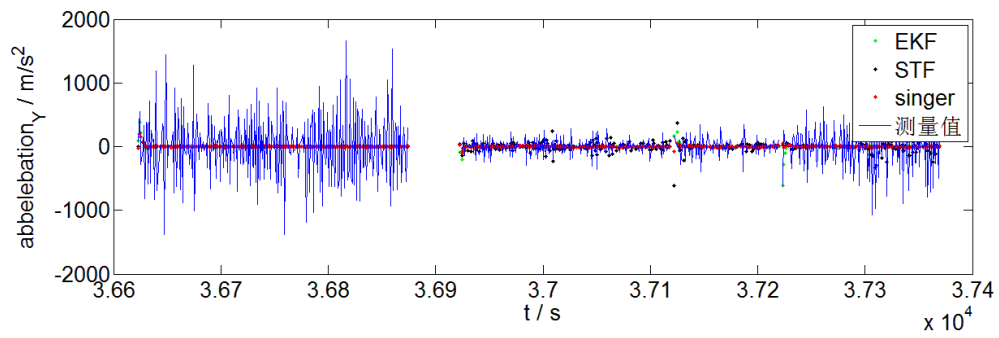


图 3-12 Y 轴加速度估计轨迹图

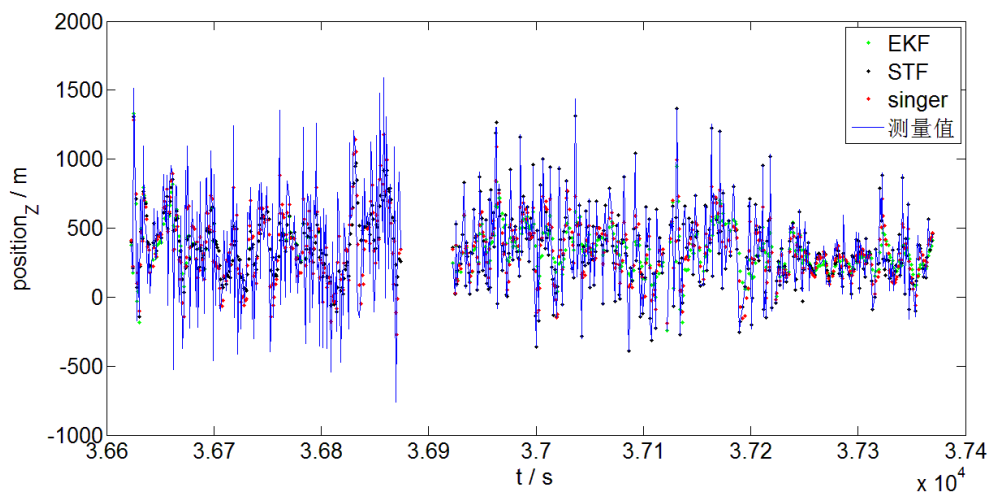


图 3-13 Z 轴位置估计轨迹图

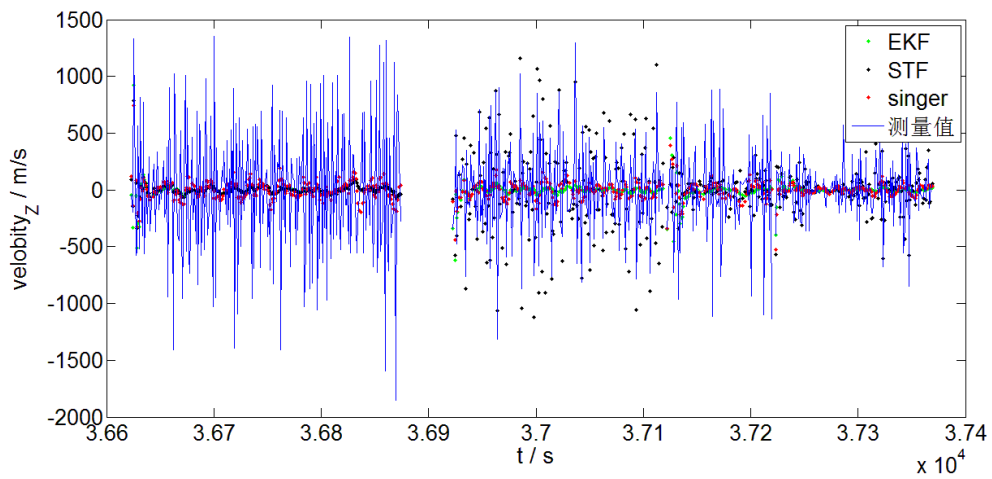


图 3-14 Z 轴速度估计轨迹图

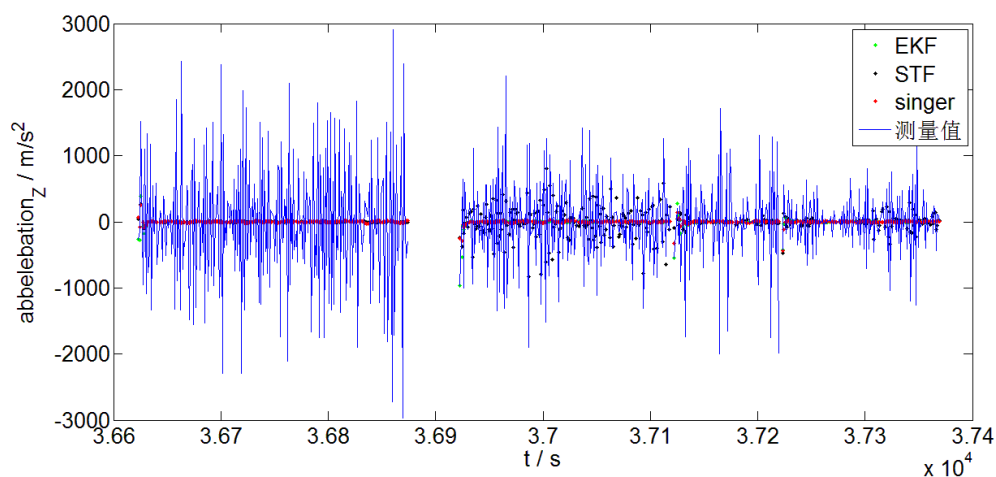


图 3-15 Z 轴加速度估计轨迹图

3.5 模型评价

针对 Data1 的单目标多元数据，本文采用了扩展卡尔曼滤波模型 (EKF)、强跟踪模型(STF)、Singer 模型进行跟踪。EKF 对于平稳状态跟踪效果很好，但是对于机动适应性较差。STF 在 EKF 的基础上引入遗忘因子和弱化因子以适应机动变化，这种模型对机动的敏感性很高，受到先验信息误差的影响较小，但是付出的代价是容易受到噪声干扰。Singer 模型则根据机动频率不同，模型的过程噪声方差和模型结构会发生改变，能够较好适应机动。

第4章 多机动目标跟踪中数据关联

4.1 问题分析

在机动目标的跟踪过程中，如果存在多个目标，则对于每一时刻的所检测的量测值进行相应的数据关联(Data Association)。所谓数据关联，即是在跟踪过程中，对新出现的目标需要进行检测，则应当在多个采样时刻之间，进行“量测-量测”的关联，从而为起始新航迹提供充分信息；对于已经存在的目标，为了维持目标航迹，需要进行“量测-航迹”关联，确定航迹更新的新量测数据，维持跟踪的持续性。数据关联的基本流程如图 4-1：

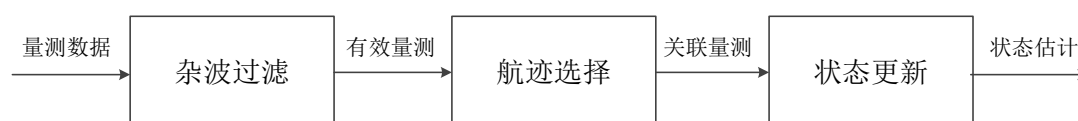


图 4-1 数据关联基本过程

1. 门限选择与杂波过滤：传感器的实际检测范围是极为有限的，此外，环境等实际因素的影响，传感器所捕获的数据往往会带有杂波信号，在关联与更新中引入杂波会严重影响状态更新。因此，需要首先对于判断量测数据是否在门限范围内，属于杂波并进行相应的处理。
2. 航迹选择：在杂波过滤完成后，量测量将与现有的航迹进行关联分析，并得到量测量与实际航迹的关联度。在实际的数据关联技术中，航迹选择往往与杂波过滤过程相结合，如 PDAF[4]与 JPDAF[5]。
3. 状态更新：基于航迹与量测量的关联度，对于相应的滤波模型进行更新，并对于下一个采样时刻的状态与量测进行预测，通常可以采用标准的 Kalman 滤波[4]等技术。

4.2 模型建立

根据第二题所述，Data2.txt 中给出的是对于两个目标实际检飞考核的飞行包线，要求本文进行相应的数据关联。基于极坐标与直角坐标的转换公式（2.1），本文可以得到飞行包线随时间变化状况如图 4-2

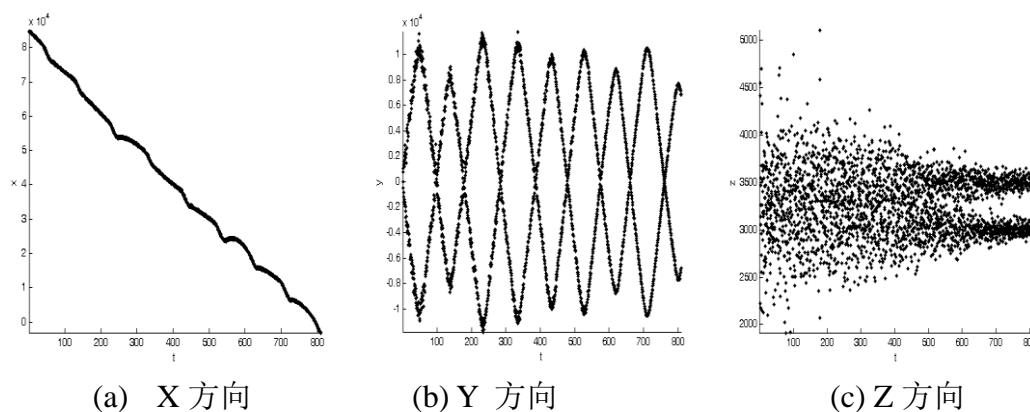


图 4-2 X,Y,Z 方向位移随时间变化

从上图中本文可以看到，两个目标在 x 方向的运动可以认为基本相同，而在 y 方向则呈交替上升下降，而在 z 方向，尽管在前期分布比较杂乱，但是随着时间的推移，逐渐分为比较明显的两个部分。因此，从各个维度的时间-位移曲线来看，两个目标的航迹区分是比较显著的。然而，这种分析是基于对已知数据全知的前提下进行的，根据题设要求，根据采样顺序，在任意时间 t ，对于相应的量测值，分析它与已知的两条航迹之间的关联度，并进行相应的模型更新。此外，本文需要看到的是，本题中的数据在 X 和 Y 维度上的分布是比较规律的，杂波较少，因此在后续的步骤中，本文可以采用简单的杂波处理方法进行相应的处理。

4.2.1 航迹分离

在进行航迹的数据关联之前，本文面对的第一个问题是，在起始阶段，本文很难根据少量量测值建立两个目标的航迹跟踪模型，并基于模型进行数据的关联。换言之，本文需要对于量测数据中在 $(0, t_{start})$ 区间的数据进行区分，即实现航迹起始的判断。本文中，本文直接采用 KMeans 算法[6]进行起始航迹的分解。

对于初始采集到的极坐标量测值 $(\rho_i, \theta_i, \varepsilon_i)$ ，其中 $i=1, \dots, N_{start}$ 。 N_{start} 为初始点选择数目，首先将其转换到 X - Y - Z 直角坐标中，得到 (x_i, y_i, z_i) ，随后利用 KMeans 算法将其聚为两类，距离函数选择普通的欧式距离。由于 KMeans 算法对于初始点选择较为敏感，因此，本文重复多次 KMeans，取较为稳定的结果作为航迹起始的依据。本文中，本文选取前 20 个量测值进行 KMeans 聚类，重复 10 次，其稳定结果如图 4-3。

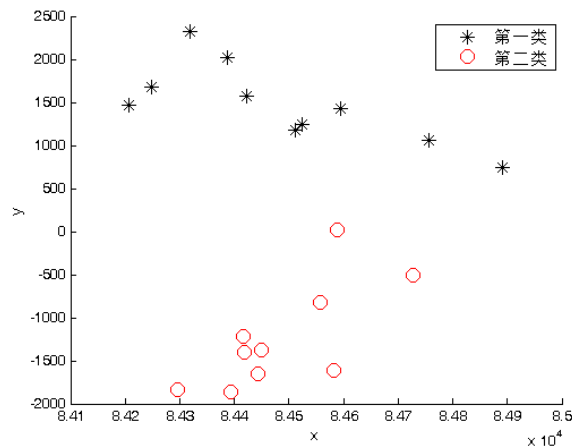


图 4-3 10 次 KMeans 重复后得到的初始航迹分离（X-Y 平面）

根据图 4-3 所示，经过 10 次重复的 KMeans 聚类过后，初始的 20 个量测值可以比较好的分离，此外，本文也观察了在 X - Z 和 Y - Z 平面内的情况，由于初始的 Z 值分布比较分散，因此聚类的效果不明显，这也是与图 4-2(c)中的结果是一致的。

在完成初始航迹的分离后，本文对其分别建立滤波与预测模型，其基本模型依然是扩展卡尔曼滤波（EKF），具体过程见第 3 章中的相关阐述。在完成基本模型的建立后，本文将根据数据关联的三个基本步骤进行下面的工作。

4.2.2 门限选择与杂波过滤

传统的航迹选择与关联技术，如 PDAF 与 JPDAF 都包含有门限选择与杂波的处理流程。其基本假设是传感器每个采样周期以预测量测值为中心，建立相应

的门限，捕获其中的量测值，而门限中的杂波的出现概率服从泊松分布，并且在门限内的位置分布服从均匀分布。因此，传统的方法大多用于处理门限内杂波数目较多的情况。根据模型建立部分对于第二问中 Data2.txt 数据的分析，本文可以看到，数据的分布比较均匀，因此，本文可以采用 PDAF[4]中的简单处理方式。

设在 k 时刻，传感器所捕获的量测数据为 $Z(k)$ ，第 i 个滤波模型的量测矩阵为 $H_i(k)$ 对于下一时刻的预测状态为 $X_{pre,i}(k)$ ，则首先得到相应的预测量测值（或者伪量测值）：

$$Z_{pre,i}(k) = H_i(k)X_{pre,i}(k) + V_i(k) \quad (4.1)$$

根据公式 (3.10)，可以得到第 $k-1$ 时刻滤波模型的量测协方差预测阵 $S_i(k)$ ，分别计算当前量测值与预测量测值之间的似然函数：

$$L_i(noise | Z_{pre,i}(k), Z(k)) = e^{-\frac{(Z_{pre,i}(k) - Z(k))^T S_i(k)^{-1} (Z_{pre,i}(k) - Z(k))}{\sigma^2}} \quad (4.2)$$

其中， σ 为预设的调节系数。本文分别得到目标 i 对于量测值 $Z(k)$ 的拒绝概率并与预设的门限值 η 进行比较，如果均超过门限值，则可以认为是杂波，这一量测值将被剔除。

4.2.3 数据关联

完成杂波过滤后，本文将进行相应的数据关联工作。事实上，在上一步的杂波处理过程中，本文已然完成了初步的数据关联，例如，当量测值的对于两个目标的拒绝概率相差悬殊时，可以初步认为，该量测值与拒绝概率较低的目标是强关联的。但是，当二者比较相近的时候，如何处理将成为问题，如图 4-4 所示：

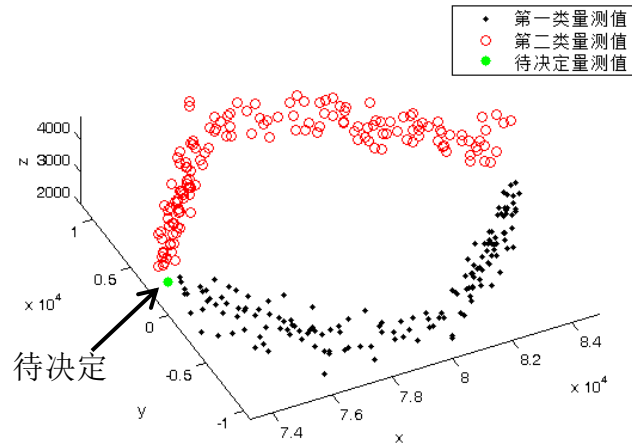


图 4-4 不确定点问题

类似于图 4-4 中待决定量测量，经过杂波检测后，都认为可能属于目标的量测，因此需要根据某种准则进行判断，本文采用了多种关联的思路对其进行分析：

- 基于时间窗内的 K -近邻策略：

该策略基于以下假设：在 k 时刻的量测量，如果属于目标 i ，则必与目标 i

所关联的最后 $k-s$ 个量测量强相关，这就弱化了 Kalman 滤波中对于马尔科夫过程的假设，使得 k 时刻与过去的 s 个时刻的量测量均相关。

基于以上假设，本文首先采用了一种无须考虑滤波结果，直接根据量测值进行判断的方法，其过程如下：

1. 对于第 k 个时刻的待决定量测量 $Z(k)$ ，首先将其根据量测方程将其转换为目标的位置坐标 $X(k)=(x(k), y(k), z(k))^T$ ；
2. 根据给定的时间窗大小 s ，取得已经完成数据关联的量测量 $Z_{ass}(j), j = k-s, \dots, k-1$ ，其中，目标 i 对应的量测量集合为 $\{Z_{ass,i}\}$ ，同样的将其转为位置坐标 $\{X_{ass,i}\}$ ；
3. 根据时间窗内的量测量，分别计算 $Z(k)$ 对于目标 i 的隶属度 c_i ：

$$c_i = \frac{\sum_{X(j) \in \{X_{ass,i}\}} K(X(k), X(j))}{\sum_{j=k-s}^{k-1} K(X(k), X(j))} \quad (4.3)$$

其中， $K(\cdot)$ 为用于平滑结果的核函数，一般可取高斯核；

4. $Z(k)$ 属于隶属度较大的目标。

该方法本质上是基于最近邻的选择，其部分关联结果如图 4-5。

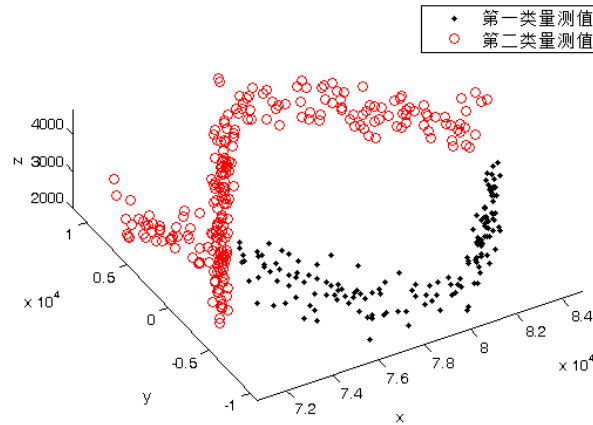


图 4-5 基于时间窗的 K 近邻

如图 4-5 所示，基于时间窗的 K 近邻算法在起始的数据关联性能较好，但是随着两条航迹的接近，待决定量测量的判断出现了误差，由于缺乏滤波器的校正，因此后续的数据关联出现了连续的错误。这也是题设中数据的特性所决定的。如果数据关联的对象间航迹距离较远，利用这种近邻算法是极为高效的。

● 基于当前量测值与估计量测值的距离：

这一算法本质上继承了杂波检测的过程。对于当前的待决定量测量 $Z(k)$ ，本文可以根据杂波的似然概率计算得到对于目标 i 的似然度 L ，实际上只需计算量测量之间的马氏距离即可：

$$d_i = (Z_{pre,i}(k) - Z(k))^T S_i(k)^{-1} (Z_{pre,i}(k) - Z(k)) \quad (4.4)$$

本文选取马氏距离较近的点进行数据关联，其部分结果如图 4-6 所示。

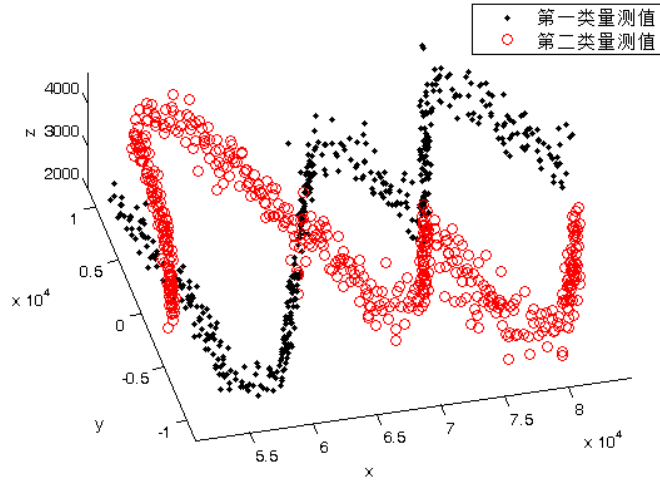


图 4-6 基于当前量测值与估计量测值的距离的数据关联

图 4-6 是本文选择的基于当前量测值与估计量测值的距离的数据关联后的结果。本文可以看到，基于这一距离的关联结果不够稳定，一部分轨迹能够正确地联合，一部分轨迹会产生错误，其本质上与量测数据本身的不稳定有关，特别是 Data2.txt 中俯仰角的有效范围与俯仰角的量测误差标准差接近，因此对于这一量测关联准则产生了比较大影响。

● 基于当前估计状态值与历史估计状态值的距离

考虑到滤波准确性以及量测误差的存在，因此，考虑将历史估计状态值与利用当前量测值直接转换得到的状态值进行比较，相比于前面直接采用量测值之间距离的方案，其优势在于滤波器产生的状态值较为平滑，相比于会进一步引入误差的预估量测值而言，具有更好的精度。

因此，对于 k 个时刻的待决定量测量 $Z(k)$ ，首先将其根据量测方程将其转换为目标的位置坐标 $X(k)=(x(k), y(k), z(k))^T$ ，取两个目标滤波器对于 k 时刻状态的估计值中的坐标 $X_i(k)$ ，直接计算其欧式距离，其最终跟踪轨迹如图 4-7 所示。

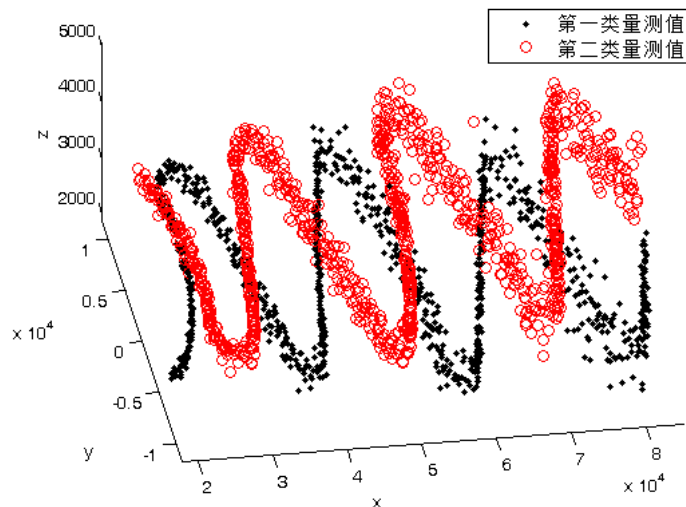


图 4-7 基于当前估计状态值与历史估计状态值距离的数据关联

通过图 4-7 可以看到，两个目标的航迹得到了很好的分离，量测值基本得到了正确的关联，稳定性较高，图 4-8 和图 4-9 展示了在 Y,Z 维度上随时间的区分情况：

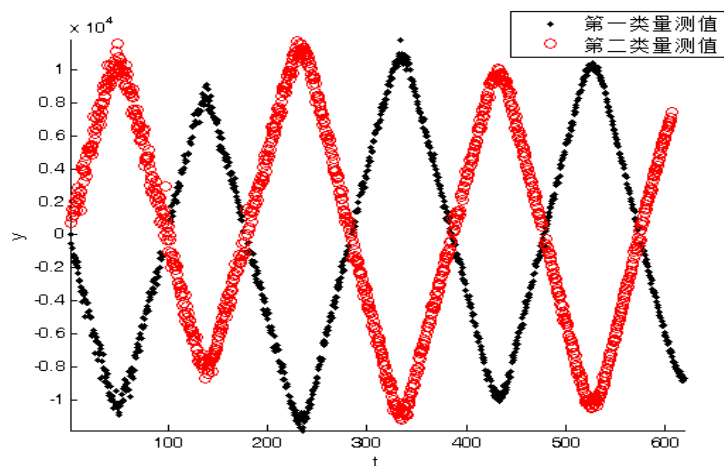


图 4-8 Y 方向上数据关联

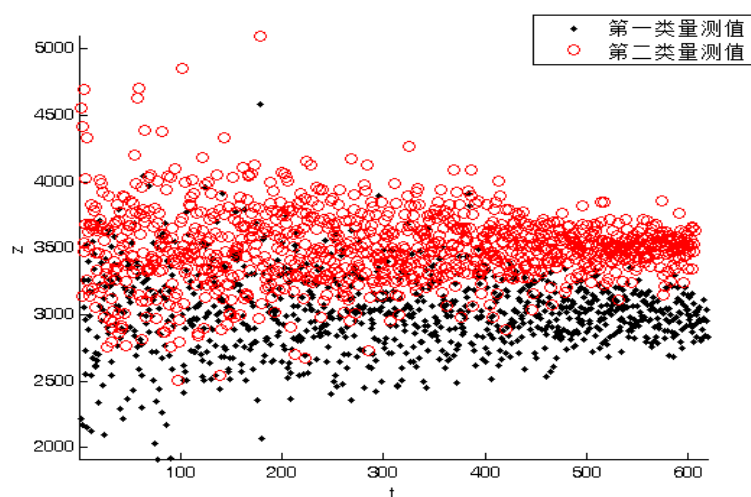


图 4-9 Z 方向上数据关联

通过观察图 4-8 以及图 4-9，本文可以看到，在 Y 方向和 Z 方向的区分度都十分明显，基本符合本文在数据分析时候的预测。由此，证明了本文算法的有效性。

对于单个目标的跟踪与预测过程，本文采用的扩展卡尔曼滤波，其具体步骤见第 3 章。下面本文给出对于目标 1 与目标 2 的跟踪效果：

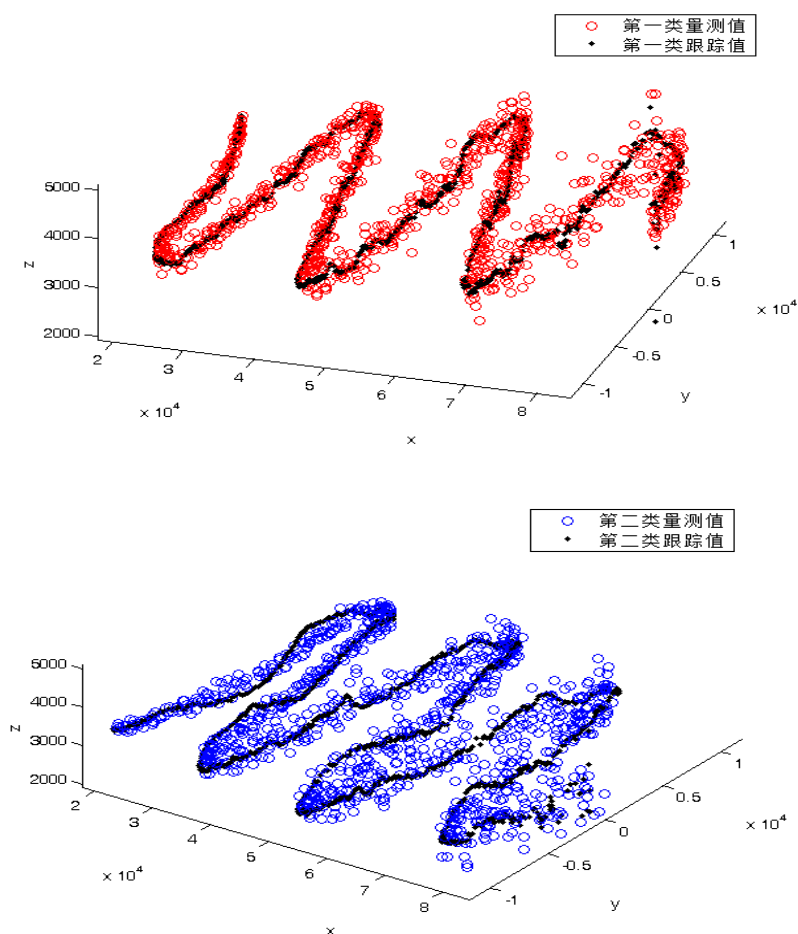


图 4-10 两个目标的量测与跟踪对比

根据图 4-10，本文实现了对于两个目标的实时跟踪过程。

4.3 航迹丢失处理

根据题设中的要求，本文需要进一步考虑雷达在一段时间只有一个回波点迹的状况。为了保证跟踪不丢失，本文可以引入伪量测量作为跟踪的依据。伪量测量的生成可以参考在杂波检测过程中量测量估计值的生成过程。在 k 时刻，通过目标 i 的滤波模型对于下一时刻的运动状态 $X(k+1)$ 进行预测得到 $X_{pre,i}(k+1)$ ，随后带入量测方程得到量测值 $Z_{pre,i}(k+1)$ ，以此来代替真实的量测值。

需要注意的是，基于以上的伪量测量可以在目标机动不明显的前提下实现比较好的航迹保留，但是对于明显的机动状态下，如果存在回波点迹的丢失，则会严重影响航迹跟踪。

下面本文分情况进行相应的讨论：

● 非机动的情况下：

本文根据已完成的航迹跟踪，可以得到原始数据中数据关联的真实情况，因此，本文将目标 2 的一段非机动时刻所对应量测值去除，时间间隔为 46 个扫描周期。此时，量测值的分布情况如图 4-11。

如果本文仍旧基于正常情况下的模型进行跟踪和预测，则很容易造成跟踪

失误，因此，在先前的模型上，本文引入了伪量测量的保留机制。在实时跟踪的过程中，在该扫描周期内没有关联到量测值，则此时估计量测量均需要保留，当目标在 m 个扫描周期内没有被关联到量测值时，则将之前保留的估计量测量作为伪量测量加入到真实量测值中，并更新 Kalman 滤波模型，从而实现“模拟”量测与跟踪；当目标与数据得到关联后，则情况当前，目标所有的伪量测值，这样避免历史数据对于量测过程造成影响。下面，本文将分别给出在量测缺失的情况下的目标关联与跟踪情况。

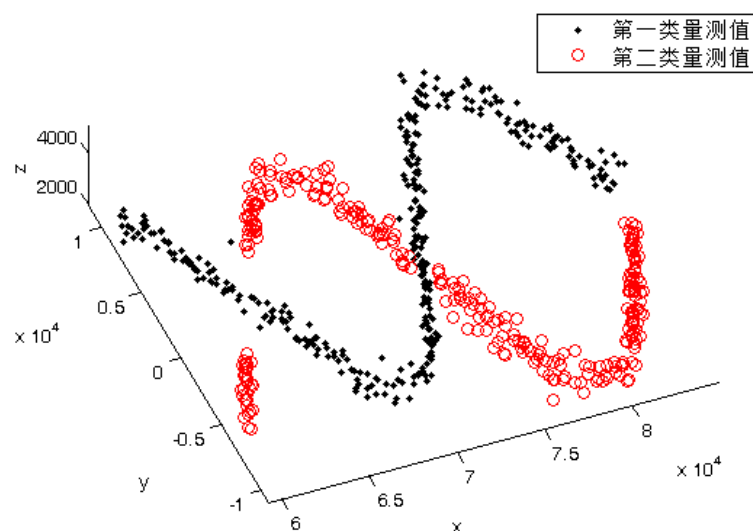


图 4-11 量测量丢失情况

由图 4-12 本文可以看到，尽管目标 2 在跟踪过程中长达 46 个扫描周期内没有捕获到量测值，当第 47 个周期到来后，目标 2 所对应的量测值仍旧能够很好地被关联。图 4-13 则呈现了在目标 2 的跟踪轨迹与量测值之间的对应关系。由于量测数据中俯仰角的误差较大，造成 Z 方向的剧烈震动。因此在没有真实量测值的情况下，伪量测量受上一时刻真实量测值的影响较大，从基于伪量测量的跟踪上看， X ， Y 方向上依旧能够保持较好的跟踪性能，而 Z 方向上较差，但是依然能够在数据恢复的时候实现跟踪的恢复。

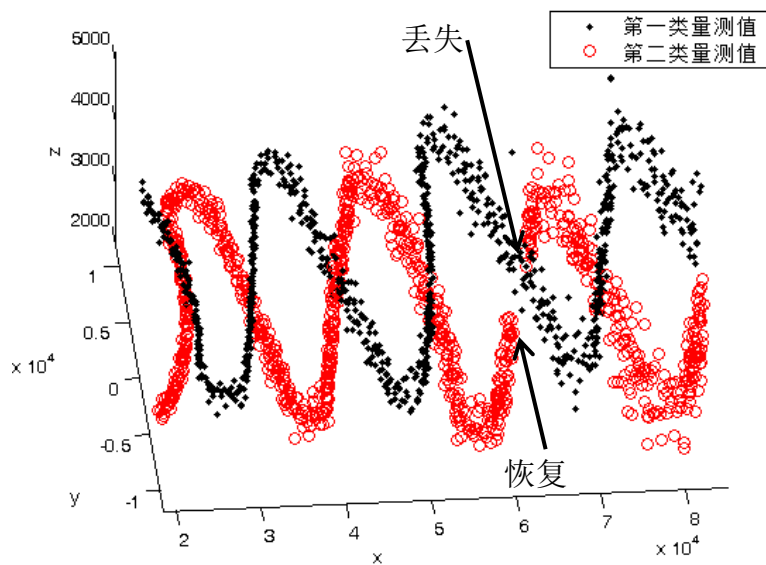


图 4-12 量测量丢失时的数据关联

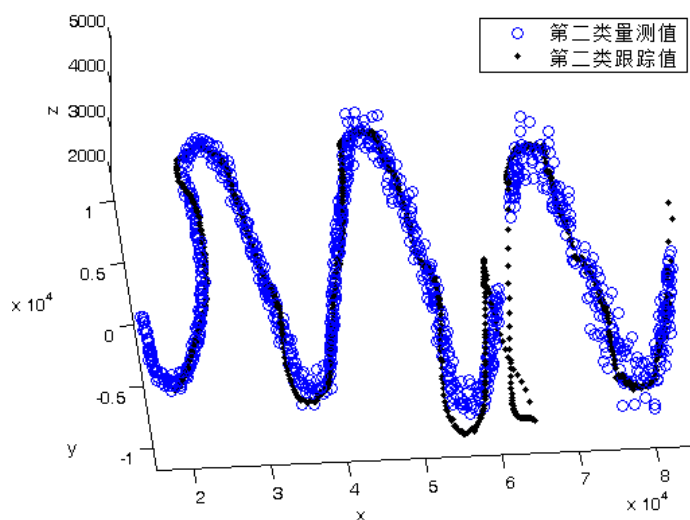


图 4-13 量测量丢失时的跟踪情况

● 机动的情况下：

针对机动情况下，本文将目标 1 的 45 个扫描周期内的量测数据剔除，其丢失情况如图 4-14。本文可以看到，目标 1 在机动处的量测量完全丢失，采用在非机动情况下的跟踪策略，则当量测值恢复的时候，根据杂波的检测，其真实量测值被当作杂波被完全过滤，从而导致跟踪丢失。图 4-15 呈现了在机动处丢失量测的时候，由于伪量测量是根据机动前的状态实现的模拟，因此随着时间的偏移，产生了较大的偏差。

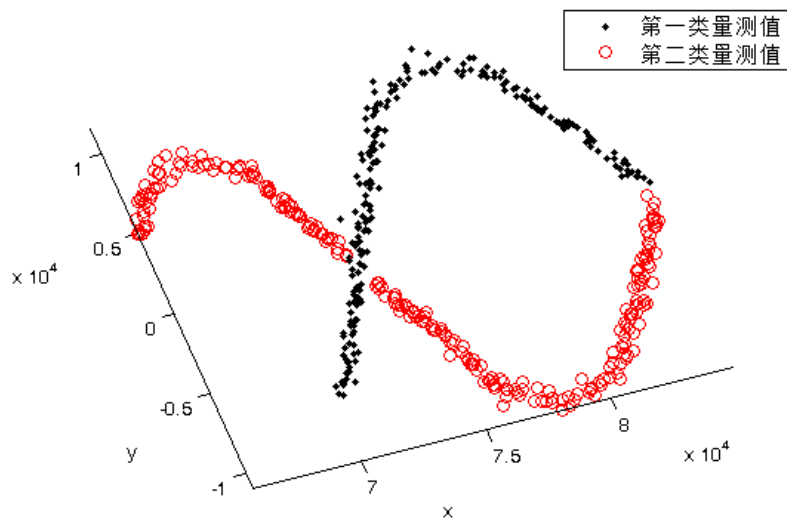


图 4-14 量测量丢失情况

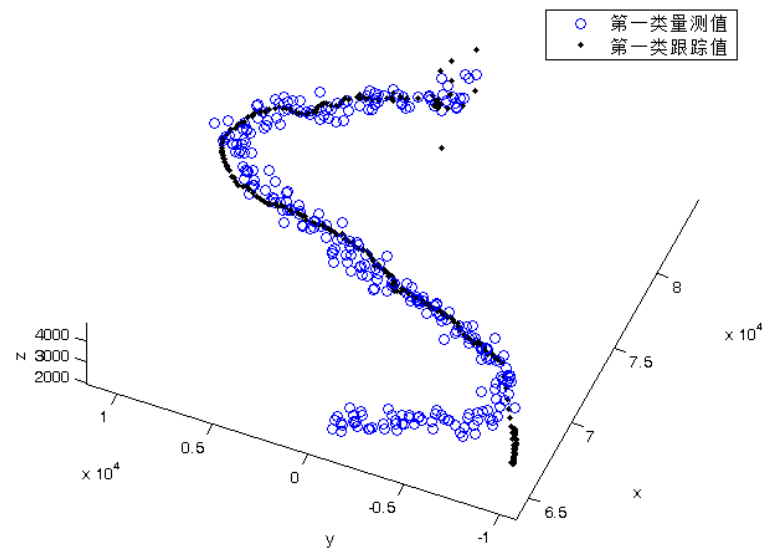


图 4-15 量测量丢失时的跟踪情况

4.4 模型评价

针对第二问中数据关联问题，本文首先采用 PDAF 对于量测数据预处理，去除杂波；对于每个时刻，采用基于当前估计状态值与历史估计状态值的距离作为关联准则，使得量测值与对应的目标航迹相关联，并采用 Kalman 滤波进行跟踪。根据 Data2.txt 中的数据本文进行了仿真实验，取得了较好的效果。

针对一段时间内只出现一个回波点迹的情况，本文引入伪量测量来模拟“量测-跟踪”过程。对于非机动时间内丢失的数据，依然能取得较好的跟踪；对于机动时间内丢失数据，受限于基本运动规律，无法实现跟踪。

第5章 空间目标的机动变化规律

5.1 问题分析

根据 Data3.txt 的数据, 该空间目标在雷达的东北天坐标系下的运动轨迹如图 5-1 所示。通过看图可以发现, 该目标处于空气稀薄的高空, 空气阻力与地球引力相比, 可以忽略不计, 因此认为该目标只受地球引力的作用[7]。如果把地球视为均质圆球体, 不考虑地球的自转及其绕太阳的公转, 那么该目标将按照椭圆弹道规律飞行。当目标再次进入大气层时, 把目标作为一个质量集中于质心的质点来研究, 此时目标受地球引力和空气阻力作用。

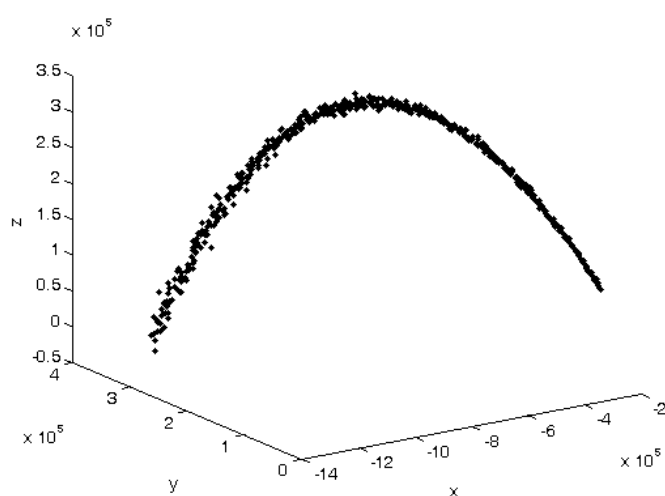


图 5-1 空间目标的运动轨迹

5.2 模型建立

首先, 基于第一问中采用的匀加速运动模型, 采用扩展卡尔曼滤波 (EKF) 以及强跟踪滤波 (STF) 对于已知的量测量进行跟踪; 此外, 本文还使用基于匀速运动模型的 EKF 的跟踪结果进行相应的对比。由本问的初始分析可知, 该目标的运动轨迹近似于导弹飞行轨迹, 因此, 在 X, Y 方向主要呈直线运动, 而在 Z 方向则主要是以受重力的匀减速运动。下面本文将根据以上三种模型分析在 $X-Y-Z$ 空间的运动轨迹跟踪情况。

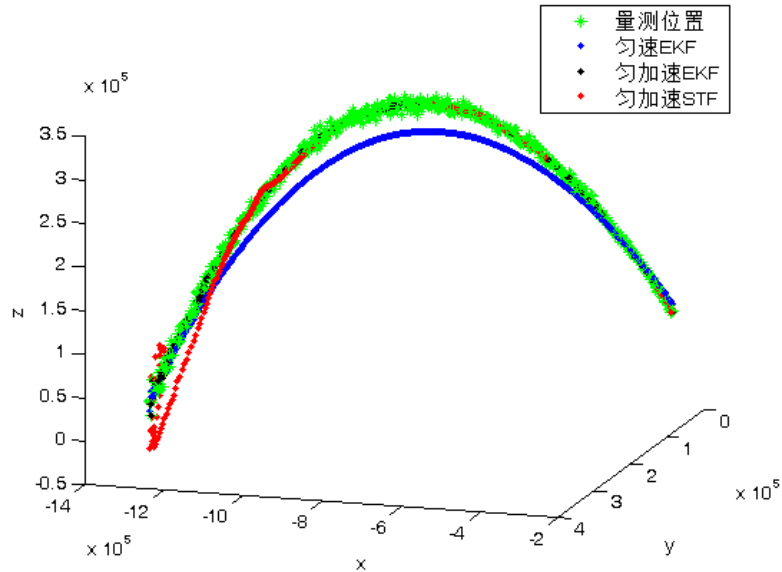


图 5-2 X-Y-Z 空间跟踪轨迹与实际量测

如图 5-2 所示，基于匀速 EKF 模型在目标上升与下落过程中对于实际运动过程的跟踪过程较好，而在靠近最高点附近的跟踪性能不佳，这是由于匀速模型本身缺陷所致；基于匀加速 EKF 模型对于整个运动过程的跟踪效果持续优异；而在第一问中性能较好的 STF 模型由于受到噪声影响较大，因此在初始阶段未能实现很好地跟踪，但是随着时间的推进，其跟踪效果与另外二者相近。图 5-3 展示了 Z 方向的跟踪情况。

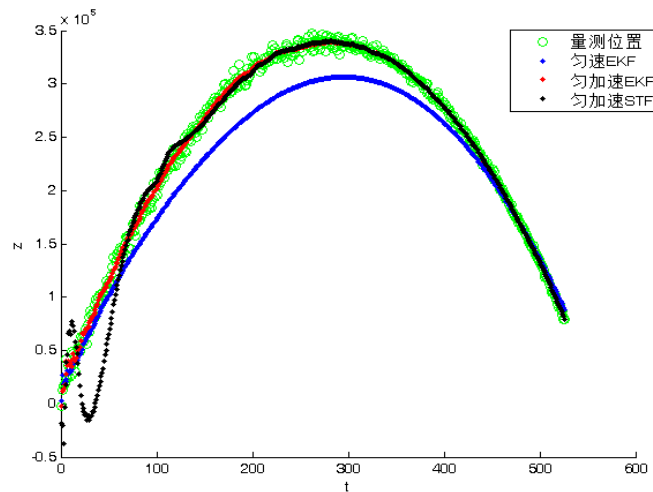


图 5-3 Z 方向跟踪轨迹与实际量测

图 5-3 展示的结果与图 5-2 类似，匀加速 EKF 效果最佳，匀速 EKF 在最高点附近偏差较大，而 STF 在初始阶段性能不佳，随着时间推移性能与 EKF 接近。如果具备目标轨迹近似于导弹飞行的先验信息，采用匀速 EKF 模型是最理想的。相比于全程的飞行轨迹，导弹的着陆位置更受关注，因此，对于后程拟合性能优秀的匀速 EKF 模型，尽管在最高点附近跟踪性能不佳，但是在最高点过后，能够以较小的代价进行估计（匀速模型的状态量数目为 6，匀加速为 9，在矩阵处理过程中，运算复杂度可以达到运动维数的 3 次方左右）。

5.3 目标机动分析

下面本文根据匀速 EKF 以及匀加速 EKF 滤波后得到的状态量分析目标的机动状况。

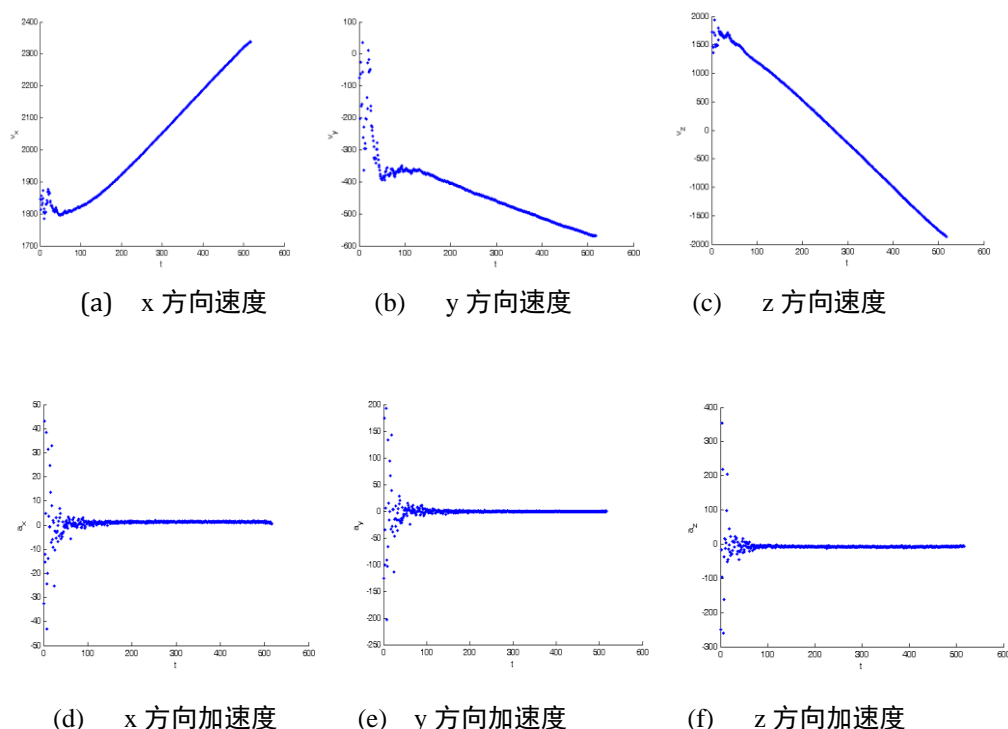


图 5-4 基于匀速 EKF, X,Y,Z 方向速度, 加速度示例

图 5-4 展示了基于匀速 EKF 模型对于目标速度以及加速度的估计曲线, 本文可以看到, X 方向呈匀加速运动, Y,Z 方向大致呈匀减速运动, 值得一提的是, Z 方向的加速度与重力加速度接近。值得一提的是, 在开始运动的时刻, 运动目标的速度与加速度均极不稳定, 这也与本文在问题的初步过程中对于目标轨迹时导弹飞行轨迹的猜想相符合。由于导弹在发射后的一段时间内, 运动的状态是极其不稳定的, 因此, 速度与加速度呈现了极度地震荡, 可以认为, 在这一段时间内目标进行着很强的机动, 但这种机动是被动的。其区间大致在开始运动的 50 秒内。这也可以解释为何 STF 模型在初始阶段会产生很大的偏差, 正是因为它受到历史数据的影响较大, 无法立刻适应稳定阶段的运动状态, 从而导致很大的跟踪偏差。基于匀加速 EKF 的估计曲线如图 5-5 所示。

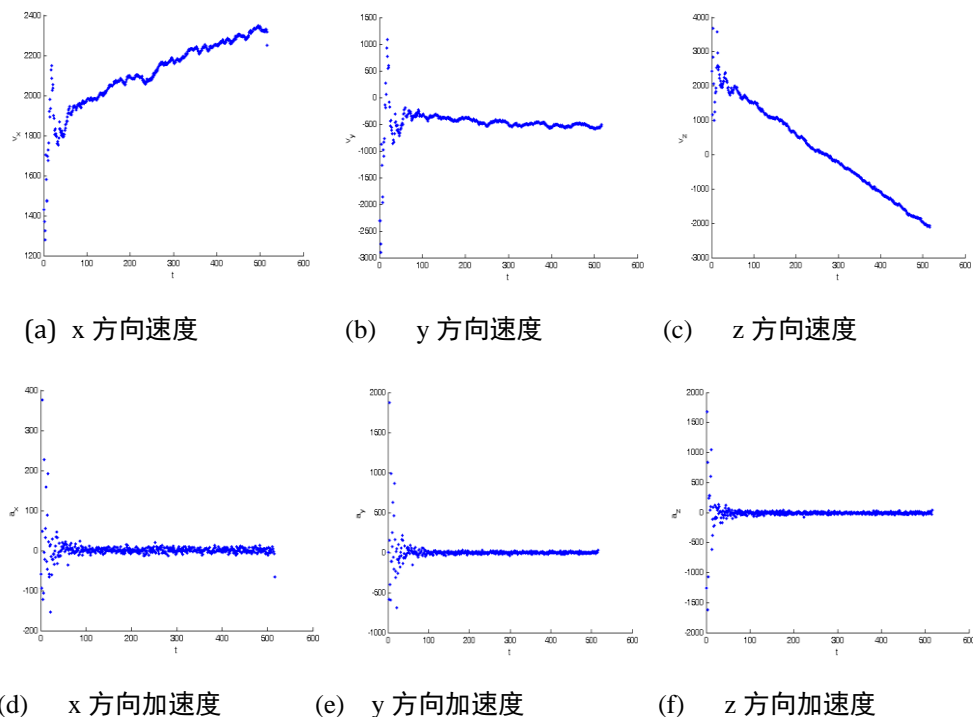


图 5-5 基于匀速 EKF, X,Y,Z 方向速度, 加速度示例

图 5-5 所呈现的结果与图 5-4 基本类似, 同样的, 在运动初始阶段加速度与速度的变化比较频繁, 随着时间的推移, 趋向于稳定。X 方向为匀加速, Y, Z 为匀加速。由于匀加速模型对于运动过程中的轻微变化相对于匀速运动更敏感, 因此在速度上存在着一定的波动。

5.4 模型评价

本问中本文主要针对 Data3.txt 中的数据进行轨迹跟踪以及机动分析。通过匀速 EKF, 匀加速 EKF 以及匀加速 STF 进行了跟踪, 结果发现, 在第一问中性能优异的 STF 在本问中效果不佳, 这与目标本身运动特性接近于导弹飞行轨迹有密切的关系。目标在量测的前 50 秒左右有非常明显的被动机动。

第6章 目标轨迹的实时预测

6.1 问题分析

本题中把地球视为均质圆球体，不考虑地球的自转及其绕太阳的公转，对运动目标的坐标建立在地心直角坐标系下。

实时预测模型有三类理论基础，即 Wiener 滤波理论方法，Kalman 滤波理论方法和最小二乘递推法。最小二乘法是经典的参数估计方法，在许多算法中起主导作用。限定记忆型最小二乘递推算法是记忆型最小二乘算法中的一种，是相对于增长记忆型和渐消记忆型算法而言的。由于增长记忆型要保存全部历史数据，对于不平稳序列，会对现实信息产生干扰和歪曲，同时随着时间的推移，计算量逐步增大，不利于实时预测。而渐消记忆型算法存在确定加权系数和遗忘因子的困难，采用限定记忆型算法正好克服上述缺陷，比较适合于惯性系统中的预测跟踪[8]。

实时建模预测的基本思想是认为未来时刻的值只与现在及此前的一段 k 个历史值有关，而与更远过去值没有内在联系，因为根据有限个数据 $y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, \dots, y_i$ ，采用递推算法，给出 y_{i+1} 的线性最小方差估计值 Z_{k+1} 作为预测值。这种算法最大的优点是无需大量成批的历史观测值，其模型参数可以根据新数据的陆续到来自行调整，这样即使是缓慢变化的非平稳过程（时变过程），也能做到随统计数据的变化而变化，预测动态模型，达到跟踪的目的，其模型是随过程变化而改变的自适应模型。

6.2 模型建立

本题本文选择了限定记忆型最小二乘递推算法，在选择预测模型时，采用多项式拟合模型，即采用多项式模型逼近数据序列，得到对目标轨迹的实时预测。

以时刻 i 为基准，取时刻 $i-k+1$ 到时刻 i 的 k 个数据，分别为 $(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}, z_{i-k+1}, t_{i-k+1}), (x_{i-k+2}, y_{i-k+2}, z_{i-k+2}, t_{i-k+2}), \dots, (x_i, y_i, z_i, t_i)$ ，在 x, y, z 三个方向上分别求 m ($m < k-1$) 次多项式 $P_x(t), P_y(t), P_z(t)$ ，使它在 t_j 点上取值尽量接近 x_j, y_j, z_j ($j = i-k+1, i-k+2, \dots, i$)。鉴于一般的抛物线为 2 次，所以在此选用二次多项式作为拟合函数，进而再选择高次多项式作为对比。

选择函数为 $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2, z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ ，用 k 组测量数据构成非线性方程组，根据最小二乘法原理，对方程求解。将时刻 $i+1$ 代入求得的函数即可得到 $i+1$ 的预测值。在目标的运动过程中，为了实时预测下一时刻的目标轨迹，需要不断更新最新的 k 个数据。所以当得到 $i+1$ 时刻的真实值后需要重新对该函数进行拟合，得到新的多项式，进而得到 $i+2$ 的预测值。

鉴于数据比较多，随机选择部分预测值和真实值如表 6-1。

表 6-1 真实值和预测值

时间 (秒)	真实 x 值 (米)	预测 x 值 (米)	真实 y 值 (米)	预测 y 值 (米)	真实 z 值 (米)	预测 z 值 (米)
14865	-1917179	-1919026	4715637	4716621	4309766	4311517
14866	-1921104	-1920477	4716964	4715075	4308512	4310108

14867	-1925786	-1922550	4718051	4714228	4308652	4308737
14868	-1923342	-1924867	4712573	4713509	4306296	4307564
14869	-1925738	-1926281	4710072	4711837	4307931	4306255
14870	-1931287	-1928056	4712577	4710221	4306112	4305439
14871	-1929155	-1930185	4707001	4709085	4306093	4304352
14872	-1932866	-1931971	4710471	4707530	4300844	4303478
14873	-1935325	-1934135	4706955	4706713	4303232	4302116
14874	-1934394	-1936217	4703272	4705461	4301346	4301173

根据前 k 个数据，求得的 $i+1$ 时刻的预测值与真实值相应的相对误差计算结果如表 6-2。

表 6-2 预测值与真实值的相对误差

时间	x 坐标误差	y 坐标误差	z 坐标误差
14865	0.10%	0.02%	0.04%
14866	0.03%	0.04%	0.04%
14867	0.17%	0.08%	0.00%
14868	0.08%	0.02%	0.03%
14869	0.03%	0.04%	0.04%
14870	0.17%	0.05%	0.02%
14871	0.05%	0.04%	0.04%
14872	0.05%	0.06%	0.06%
14873	0.06%	0.01%	0.03%
14874	0.09%	0.05%	0.00%
平均值	0.08%	0.04%	0.03%

通过观察预测值和实际测量值的相对误差，可以认为预测得非常准确，采用二次多项式拟合是合理的。

为了进行对比分析，使用五次多项式进行拟合，由于五次多项式对噪声更加明显，出现了过拟合，在某些位置根据滑动窗拟合的函数不能求得落地点。取同一段时间的预测值和测量值，计算五次多项式拟合的误差如表6-3。

表 6-3 五次多项式拟合时的相对误差

时间 (s)	x 坐标误差	y 坐标误差	z 坐标误差
14865	0.14%	0.05%	0.02%
14866	0.01%	0.02%	0.02%
14867	0.16%	0.05%	0.04%
14868	0.12%	0.06%	0.01%
14869	0.05%	0.07%	0.08%
14870	0.15%	0.02%	0.04%
14871	0.11%	0.08%	0.06%
14872	0.06%	0.05%	0.04%
14873	0.09%	0.00%	0.05%

14874	0.11%	0.06%	0.02%
平均值	0.10%	0.05%	0.04%

可以发现，五次多项式拟合的误差和二次多项式拟合的误差接近，所以可以证明用二次多项式拟合已经很精确了。

为了比较滑动窗的大小对预测结果的影响，分别取滑动窗口 k 为不同值，比较同一段数据（时间取 14865-14874）的平均相对误差。

表 6-4 不同滑动窗口 k 下的误差和 MSE

滑动窗口 k	x 坐标误差	y 坐标误差	z 坐标误差	平均相对误差	MSE
60	0.0762%	0.0409%	0.0308%	0.0493%	3012.43
70	0.0762%	0.0409%	0.0308%	0.0493%	2968.90
80	0.0826%	0.0420%	0.0294%	0.0513%	2937.81
90	0.0805%	0.0392%	0.0261%	0.0486%	2922.71
100	0.0791%	0.0402%	0.0335%	0.0509%	2868.51
150	0.0789%	0.0413%	0.0317%	0.0506%	2824.61
200	0.0787%	0.0399%	0.0381%	0.0522%	2646.41

通过比较不同滑动窗口 k 下的误差，可以发现滑动窗口越大，均方误差(MSE)越小，平均相对误差基本一致。

实时预测效果如下图所示，其中蓝色的点为实际测量值，红色的点为根据上一个窗口的数据拟合的函数所计算的预测值。最后部分是利用最后一次拟合时的函数计算出的目标轨迹。

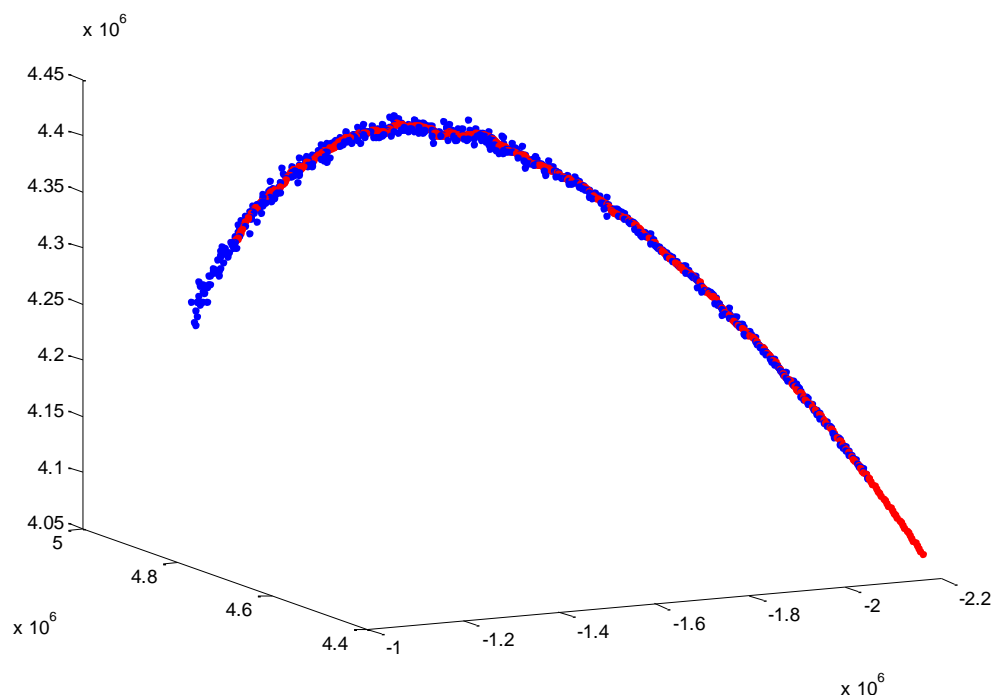


图 6-1 实时预测效果图

在估计该目标的着落点的坐标时，因为假设地球为标准球体，所以当目标与地心的距离为地球半径时，可以认为目标着落。此处地球半径取6371393m。

利用已知的目标每个时刻的位置信息，可以求得目标坐标与时刻 t 的函数，进而可以建立目标与地心距离关于时间 t 的函数，求解该函数值为地球半径的时间，可得 $t=15029.00s$ ，将时间 t 代入相应的拟合函数，可得落地点的地心坐标 (X,Y,Z) 为 $(-2.1773e+06,4.3968e+06,4.0648e+06)$ ，与地心距离6371400m，可以认为等于地球半径。

由于把地球假设为标准球体，那么经纬度分别为这个球体的方位角和俯仰角，计算公式如下：

$$\begin{aligned} L &= \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \\ B &= \arcsin \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

经过计算可以求得相应的经度 L 为116.3450，纬度 B 为39.6407。

在进行实时预测时，由于拟合出的系数是实时变化的，相应的预测出的目标轨迹也会随着新数据的获取而缓慢变化。当滑动窗口 k 取100时，可以得到428条预测的运动轨迹，相应的428个预测的落地点。计算它们落地点的平均值，结果为经度为116.7144，纬度为39.6373，对应坐标 $(-2.2050e+06, 4.3814e+06, 4.0642e+06)$ ，与利用全部数据计算出的数据接近。

算法复杂度：

对于 $n-1$ 次多项式的拟合，需要拟合的参数为 n 个，复杂度为 $O(n^3)$ 。所以当使用二次多项式进行拟合时，需要拟合3个参数。当使用五次多项式进行拟合时，需要拟合6个参数。所以使用五次多项式拟合复杂度会比二次多项式高很多。而通过之前的分析，可以知道用五次多项式拟合效果并不比使用二次多项式好，反而会对误差更敏感，形成过拟合。所以本题适合用二次多项式拟合。

6.3 模型评价

本题中利用了滑动窗多项式拟合数学模型。该模型用多项式拟合法处理一段目标位置历史数据序列，计算目标未来时刻位置，并随时刻推移不断更新目标数据，实现了实时预测，由结果可知，预测结果很理想，误差小且稳定，克服了一般拟合预测中误差随时间推移增大的缺点。

第7章 跟踪和反跟踪

7.1 问题分析

在第二问中，本文基于题设的飞行检飞包线进行了数据关联以及跟踪。而本问主要是针对第二问中的跟踪策略以及关联技术进行逃逸与反逃逸的处理。

分析本文在第二问中的关联策略，其中对于量测的判断主要包括杂波处理以及距离判断两步：

第一个是基于似然的杂波处理，由于第二问中并没有给出具体的雷达监测的范围精度，因此，本文人为地给定了一个似然函数并且根据门限值进行杂波的滤除，而本问中给出了相应的检测范围，因此可以建立更精确的模型用于选择量测量选取范围并衡量杂波；而具体的逃逸策略，考虑在 0.5 秒的扫描间隔内，通过目标机动，使之脱离量测范围，或者能够伪装成杂波；

第二个是基于当前估计状态值与历史估计状态值的距离进行的目标关联。这是在多目标数据关联问题中用于判别量测量具体归属的方式。如果只需要实现单目标的逃逸，则可以利用这一机制，即在两机靠近过程中，使得雷达对于目标的识别出现混淆，即误关联，最终实现逃逸。由于题设中要求目标均能实现逃逸，因此，不考虑这种方案。

在雷达机体性能不变的情况下，针对以上的逃逸策略，本文构想了相应的反逃逸措施，通过更精确地描述目标的机动特性，提高预测位置的准确度。

7.2 逃逸策略

首先，本文考虑通过局部强机动实现逃逸，由于题中给出了雷达的量测范围，因此可以对其进行分析，如图 7-1 所示：

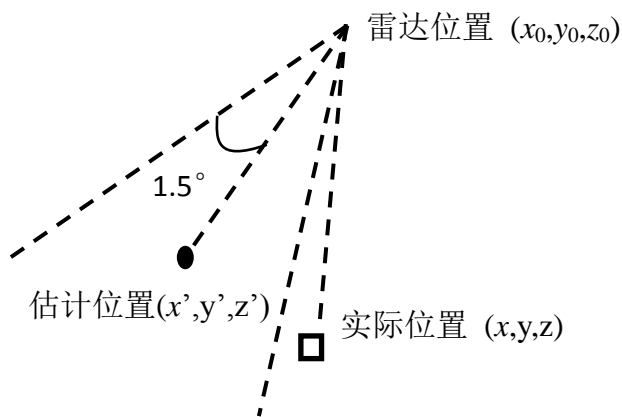


图 7-1 雷达检测范围图示

设雷达位置为 $O = (x_0, y_0, z_0)$ ，估计位置为 $X' = (x', y', z')$ ，实际位置为 $X = (x, y, z)$ 。为了实现位置脱离检测门限，本文需要保证实际位置不在以雷达为锥顶，雷达到估计位置的连线所形成的放射锥范围内，实际上，就是使得向量 OX ， OX' 的夹角大于 1.5° ，即：

$$\theta = \arccos \frac{OX \cdot (OX')^T}{\|OX\| \|OX'\|} > 1.5^\circ \quad (7.1)$$

如需满足以上条件，则要求对于目标的机动特性进行精心设计，以目标 2 为例，本文首先通过第 4 章中的滤波模型得到每一时刻的速度与加速度，例如在第 50 个时刻，其运动状态为：

$$\begin{aligned} X(50) &= (x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) \\ &= (81720.12, -105.61, -0.25, -7325.31, -189.10, 2.96, 3107.83, 8.34, -0.407) \end{aligned} \quad (7.2)$$

假设目标在这一时刻发生强机动，根据题设中给出的飞机机动性能，本文取 X, Y 方向的加速度各自提高 $5g$ ，取 $50m/s^2$ 。随后利用匀加速模型的转移矩阵对其进行迭代 20 次，迭代间隔为 0.6 秒，作为生成状态，最终基于以上生成状态得到相应的量测量添加到 1-50 个时刻之后。在每次进行滤波之前，执行以上的门限检查，如果夹角超过 1.5° ，则认为是杂波。基于扩展卡尔曼(EKF)滤波对其以上量测量可以发现，在 50 秒左右，由于状态发生明显变化，因此随后的跟踪偏差较大，如图 7-2 所示。

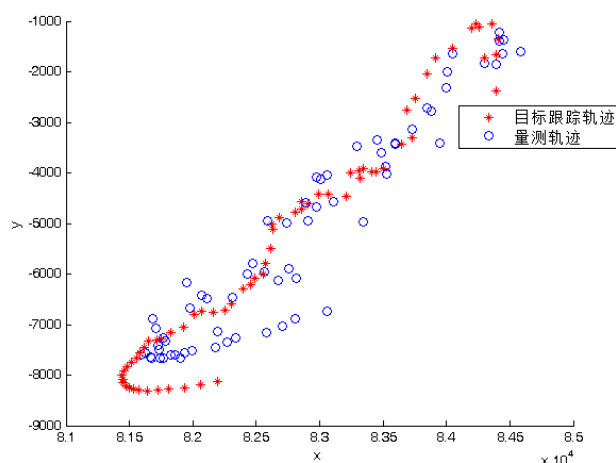


图 7-2 基于强机动量测量的跟踪结果 (EKF)

从图 7-2 可以看到，目标在持续强机动后，使得现有的滤波算法无法实现准确的跟踪，在第 51 个时刻，其对应的夹角达到了 2.1° ，如果基于第二问的杂波检测策略，可以认为是杂波或者在门限外而被滤除，在持续多个周期失去量测值后，将采用模拟“量测-跟踪”的策略增加伪量测量，显然会产生明显的误跟踪，从根本上实现了目标逃逸。

如果选用跟踪性能更为出色的强跟踪滤波(STF)模型进行跟踪，尽管在第 51 时刻，对应的夹角达到了 1.82° ，在实际中当然无法检测到；但是，如果在仿真中将其纳入量测，则如图 7-3 所示，其跟踪效果相对于 EKF 有很大的提高。

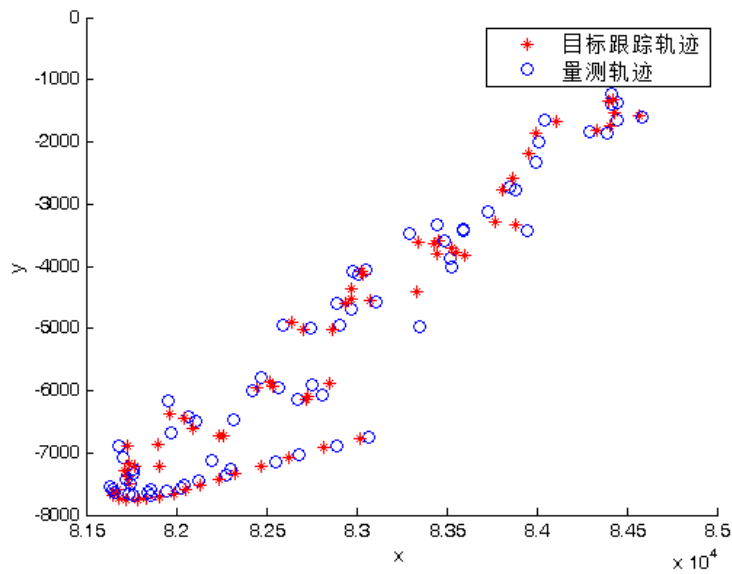


图 7-3 基于强机动量测量的跟踪结果（STF）

因此，本文需要考虑如何在可能发生强机动的时候，使得量测值不会被认为是杂波或者被排除在选择门限之外。其本质上，是在具备“跟踪目标随时可能产生强机动”的先验信息下，使得估计量测值能够向强机动点进行偏移。针对强跟踪模型中一些参数，特别是遗忘因子，弱化因子以及增益参数的门限值进行调整，可以使得对应的夹角到达 1.7° 左右，仍旧无法脱离量测极限 1.5° 。解决这一问题可能需要更强的交互式多模型算法，如[9]。

7.3 模型评价

针对本问中“逃逸-反逃逸”问题，本文首先建立了精确的门限内外判决模型，随后采用局部持续强机动的策略，最终在仿真数据上取得了较好的逃逸效果。对于反逃逸问题，本文认为，需要引入对于机动预测能力较强的交互式多模型算法。

第8章 结论

本文主要针对机动目标跟踪中机动模型的建立，多目标数据关联以及跟踪-反跟踪等关键技术，进行问题分析以及模型求解。

基于强跟踪模型（STF），本文实现了对于 Data1 数据的跟踪，并给出了目标的机动范围。基于用当前估计状态值与历史估计状态值的距离作为关联判据，完成了 Data2 中两个目标的数据关联。对于回波点迹缺失问题，本文引入了伪量测量进行处理，并在仿真数据上验证了该方法的可行性。对于 Data3 中目标机动规律分析问题，本文对比了基于匀速与匀加速运动的 EKF 模型以及第一问中采用 STF 模型，分析了其对于数据的适应性，并采用了基于滑动窗 n 次多项式拟合数学模型，预测了目标落地点位置。目标的逃逸与反逃逸问题，本文在目标的运行过程中引入了持续的主动强机动，通过仿真实验，证明了该策略能够针对问题二中所建立模型进行逃逸；对于反逃逸问题，本文认为，只有引入具备机动预测与交互的模型才能有效应对本文采用的逃逸方案。

本文中采用的强跟踪模型对于 Data1 的数据跟踪性能较好，但是对于 Data3 的适应性不佳，因此，需要考虑交互式多模型结合的方法，以此适应不同的情况。此外，本文对于反逃逸策略的指定尚有缺憾，这也是值得未来进行探究的问题。

参考文献

- [1]李锋,金宏斌,马建朝.多雷达数据处理中坐标转换的新方法,微计算机信息(测控自动化),2007年第23卷,第2-1期:303-305
- [2]周万幸,空间导弹目标的捕获和处理[M],北京,电子工业出版社,2013.
- [3]周东华,叶银忠.现代故障诊断与容错控制[M].北京,清华大学出版社.2000.
- [4]韩崇昭,朱洪艳,段战胜,等.多源信息融合.北京:清华大学出版社,2006.4
- [5]Fortmann T, Bar-Shalom Y, Scheffe M. Sonar Tracking of Multiple Targets Using Joint Probabilistic Data Association[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1983,8(3):173~184.
- [6]MacQueen, J. B. "Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations". Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1. University of California Press. pp. 281-297.
- [7]张毅,肖龙旭,王顺宏.弹道导弹弹道学[M],长沙:国防科技大学出版社,2005.
- [8]张尚剑,刘永智,用滑动窗多项式拟合法实时预测运动目标轨迹,光电工程,第30卷,第4期:24-28.
- [9]V. P. Jilkov, D. S. Angelova, TZ. A. Semerdjiev. Design and Comparison of Mode-Set Adaptive IMM Algorithms for Maneuvering Target Tracking [J]. IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS. 1999, 35(1): 343-350.