

## 2023 华数杯全国大学生数学建模竞赛题目

(请先阅读“华数杯数学建模竞赛论文格式规范与提交说明”)

### B 题 不透明制品最优配色方案设计

日常生活中五彩缤纷的不透明有色制品是由着色剂染色而成。因此，不透明制品的配色对其外观美观度和市场竞争力起着重要作用。然而，传统的人工配色存在一定的局限性，如主观性强、效率低下等。因此，研究如何通过计算机方法来实现不透明制品的配色具有重要意义。

光通过物体传播有吸收、反射和透射三种方式。对于不透明制品来说，大部分光线会被其表面吸收或反射。吸收和反射的光线在经过透明度等校正后按波长分解成不同的颜色成分，形成光谱图。该光谱图通常由 400--700nm 波段的各色光组成。为简化计算，最终配色后的颜色的反射率以 20nm 为间隔的光谱数据来表示。对于不透明材料而言，吸收系数  $K$ /散射系数  $S$  的比值与反射率  $R$  之间存在一定关系，具体请参考文献【1】《计算机配色理论及算法的研究》中的 K-M 光学模型。

基于光学模型得到的颜色参数，可应用于色差的计算。通常，使用色差（不超过 1）来作为配色效果好坏的标准。色差计算方法参考文献【2】《基于 CIELAB 均匀颜色空间和聚类算法的混纺测色研究》中的 CIELAB 色彩空间的总色差计算方法。其中颜色参数  $L^*$ （明度）、 $a^*$ （红绿色度）和  $b^*$ （黄蓝色度）计算中出现的三刺激值 XYZ 的计算方法如下：

$$\begin{aligned} X &= k \int_{400}^{700} S(\lambda) \bar{x}(\lambda) R(\lambda) d(\lambda) \\ Y &= k \int_{400}^{700} S(\lambda) \bar{y}(\lambda) R(\lambda) d(\lambda) \\ Z &= k \int_{400}^{700} S(\lambda) \bar{z}(\lambda) R(\lambda) d(\lambda) \end{aligned}$$

其中， $S(\lambda)$  为光谱能量分布， $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$ ,  $\bar{z}(\lambda)$  为观察者光谱三刺激值， $S(\lambda)$  分别与  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$ ,  $\bar{z}(\lambda)$  相乘为固定值见附件 1。 $R(\lambda)$  为光谱反射率， $k$  值约为 0.1， $d(\lambda)$  为测量物体反射率波长间隔，本题  $d(\lambda)=20\text{nm}$ 。

不透明制品配色问题，就是基于光学模型，设计不透明制品的配色模型。相较于人工配色，节省大量人力、物力和财力，对减少能耗具有重要意义。

针对某一不透明制品，已知红、黄、蓝 3 种着色剂在不同浓度不同波长的 K/S 值以及基底材料在不同波长下的 K/S 值，见附件 2。其中，浓度=着色剂克重/基材重量。每个着色剂的吸收系数  $K$ /散射系数  $S$  的比值具有加和性，详见文献【1】《计算机配色理论及算法的研究》中的 K-M 单常数理论。现有 10 个目标样(二到三种着色剂混合制成)的  $R$  值，见附件 3。结果展示请保留 4 位小数。

请建立数学模型解决如下几个问题：

问题 1：请分别计算附件 2 中三种着色剂在不同波长下 K/S 与浓度的关系，并将关系式与拟合系数填写在表格中。

表 1 问题 1 相关结果数据

波长	红		黄		蓝	
	函数关系式	拟合系数	函数关系式	拟合系数	函数关系式	拟合系数
400nm						
420nm						
440nm						
.....						
700nm						

问题 2：请建立不透明制品配色的优化模型。在已知目标样的 R 值（附件 3）的前提下，基于光谱三刺激值加权表（附件 1）与着色剂 K/S 基础数据库（附件 2），运用优化模型配出与目标样的色差最为接近的 10 个不同配方，要求色差小于 1。

问题 3：在问题 2 的基础上，考虑成本控制和批量配色，改进配色模型。对 2kg 的基底材料进行配色，求出与目标样（附件 3）之间色差最为接近的 10 个不同配方，要求色差小于 1。色母粒单位克重价格见附件 4。

问题 4：在实际生产中，配色所需要的着色剂越少越好，基于此，在问题 3 的基础上，寻找附件 3 中前 5 个样本的最优的配色方案，要求每个样本配出 5 个不同的配方且色差小于 1。

提供的数据和资料：

- 1.附件 1（光谱三刺激值加权表）
- 2.附件 2（不同浓度不同波长的 K/S 值）
- 3.附件 3（10 个样品的 R 值）
- 4.附件 4（染料价格）
- 5.参考文献【1】 姜鹏飞. 计算机配色理论及算法的研究[D/OL]. 中原工学院, 2016
- 6.参考文献【2】 王林吉. 基于 CIELAB 均匀颜色空间和聚类算法的混纺测色研究[D]. 浙江理工大学, 2011.