

# 全国第八届研究生数学建模竞赛



## 题 目 小麦发育后期茎秆抗倒性的数学模型

### 摘 要：

本文围绕小麦抗倒伏问题，首先从生活常识的角度出发，结合文中及查阅的相关数据，综合运用数据预处理、数据加工处理、相关性分析、数据拟合、数理方程、微分方程等模型与方法，说明了文中给出的抗倒伏计算公式的优缺点，对已有的模型进行了修正，运用建立的模型，计算了六种小麦的倒伏指数，发现与试验结论基本吻合，并从生活常识的角度对模型的合理性进行了论证。其次，在考虑麦穗自重的前提下，进行力矩分析，运用最小势能原理进行理论推导，建立茎秆抗倒伏模型，并从数值计算和图形分析两个方面对模型的合理性进行了论证。

本文的亮点在于：第一，对文中提出的抗倒伏指数计算模型进行了改进，并从数据分析和生活常识两个方面对其合理性进行了论证。第二，我们建立的倒伏指数计算公式对六种小麦的倒伏性的分析与文中提供的数据基本一致。第三，在考虑麦穗重量的前提下，重新推导了麦秆挠度曲线公式，并从数值计算和图形分析两个角度对挠度曲线公式的合理性进行了论证，所得结论与生活常识相一致。

针对问题 1，在对文中给出的抗倒伏指数模型进行分析的基础上，发现该模型既有合理的一面也有不足，此外文中所给的抗倒伏指数概念不符合生活常识需修改为倒伏指数。基于生活常识并结合文中给出的抗倒伏模型，在进行理论推导的基础上，建立了小麦倒伏指数的通用表达式。利用文中提供的数据在对机械强度与茎秆粗度、茎秆总长度、茎秆重心高度、单穗重量以及单穗重量与茎秆重心高度进行相关性分析的基础上，分别建立矮抗 58、周麦 18、新麦 208 三个品种小麦的倒伏指数计算模型。最后根据计算模型对矮 58、联丰 85、TM、周麦 18、国信 1 号、智 9998 倒伏指数进行计算，并对倒伏指数大小进行排序，发现所得结论与试验结论基本一致，进一步验证模型的合理性。

针对问题 2，根据论文中提供的数据和参考资料中的数据，对矮抗 58、国信 1 号、智 9998、周麦 22 四个品种的倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重、粗度的相关性进行分析，给出了倒伏指数与株高、穗长等因素之间的相关强度。在对小麦株型结构进行两两因素间的相关性分析中，发现壁厚、穗重、鲜重、粗度四因素之间的正相关性高达 0.9，而壁厚、穗重、鲜重、粗度与穗长成中等正相关，与节间长的正负相关性由不同品种决定。从倒伏指数公式和数据分析两个方面对国信 1 号和智 9998 倒伏的原因进行了定量的分析，得出了国信 1 号和智 9998 易倒伏的原因是

这两个小麦品种的茎秆的重心高度较高且壁厚较薄。

针对问题 3, 采用两种方法进行建模求解, 一是和矮抗 58 的外部形态特征进行类比, 主要是由于矮抗 58 具有很强的抗倒伏性, 高产, 而且具有较高的经济系数, 是比较理想的株形结构; 二是采用通用建模方法, 分别建立了穗长、壁厚等外形特征与穗重的关系模型, 并进行求解, 两种方法计算结果的一致性验证了模型的有效性。

针对问题 4, 对茎秆抗倒伏因素进行了研究, 分析麦穗自重是影响麦秆倒伏的重要因素, 在建立模型时需考虑。在进行力矩分析的基础上, 结合物理学中的胡克定律, 运用最小势能原理, 建立了在麦穗自重及自重和风载的共同作用下茎秆抗倒伏的微分方程模型。最后, 利用题中的数据对模型合理性进行检验, 所得结论与生活常识相符。

针对问题 5, 利用类比的方法对 2007 年蜡熟期部分缺失的数据进行了补充, 将三个品种小麦的数据分别代入茎秆抗倒伏的微分方程模型。对三个品种小麦抗倒伏风速和风级的极限进行计算, 并根据计算的结果绘制了不同品种小麦挠度与高度的关系曲线。

**关键词:** 倒伏指数 机械强度 相关系数 数据拟合 挠度曲线

# 目 录

1 问题重述	5
2 模型假设	5
3 符号说明	6
4 问题分析	7
4.1 问题 1 分析	7
4.2 问题 2 分析	7
4.3 问题 3 分析	7
4.4 问题 4 分析	7
4.5 问题 5 分析	7
4.6 问题 6 分析	7
5 模型的建立及求解	8
5.1 问题 1 模型及求解	8
5.1.1 理论分析	8
5.1.2 问题 1 模型的建立	8
5.1.2.1 矮抗 58 模型的建立	8
5.1.2.2 周麦 18 模型的建立	11
5.1.2.3 新麦 208 模型的建立	12
5.1.2.4 倒伏指数公式合理性论证	13
5.2 问题 2 模型及求解	14
5.2.1 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究	14
5.2.1.1 矮抗 58 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究	15
5.2.1.2 国信 1 号倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究	16
5.2.1.3 智 9998 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究	16
5.2.1.4 周麦 22 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究	17
5.2.1.5 小麦倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性综合分析	17
5.2.2 茎秆性状的各个因素之间相关性分析	18
5.2.2.1 矮抗 58 茎秆性状的各个因素之间相关性研究	18
5.2.2.2 周麦 22 茎秆性状的各个因素之间相关性研究	19
5.2.2.3 平安茎秆性状的各个因素之间相关性研究	19
5.2.2.4 茎秆性状的各个因素之间相关性综合分析	20
5.2.3 倒伏原因分析	20
5.3 问题 3 模型及求解	21
5.3.1 方法 1——类比法求解	21
5.3.1.1 类比法求解思路	21
5.3.1.2 类比法求解	22
5.3.2 方法 2——通用建模方法	23
5.3.2.1 建模思想	23
5.3.2.2 模型建立	23
5.3.2.3 模型求解	24
5.4 茎秆抗倒伏的数学模型	25
5.4.1 模型建立的思路	25
5.4.2 模型的建立	25

5.4.2.1 相关概念的定义.....	25
5.4.2.2 挠度曲线模型建立.....	25
5.4.2.3 曲线模型合理性分析.....	27
5.4.2.4 风载倒伏模型建立.....	29
5.5 茎秆抗倒伏公式的应用.....	30
5.6 模型的评价及应用分析.....	32
5.6.1 模型的总结及分析.....	32
5.6.2 试验方案的制定及合理性检验.....	33
6 模型的改进.....	34
6.1 有雨水时的挠度曲线模型.....	34
6.2 光合作用对小麦中有机物形成的影响.....	34
6.3 小麦经济系数模型.....	35
6.4 小麦优劣综合评价模型.....	35
7 模型的评价.....	36
参考文献.....	37

## 1 问题重述

小麦高产、超高产的研究始终是小麦育种家关注的热点问题。随着产量的增加，小麦的单茎穗重不断增加。但穗重的增加同时使茎秆的负荷增大，导致容易倒伏。倒伏不但造成小麦减产，而且影响小麦的籽粒品质。因此要实现小麦高产优质的跨越，就必须解决或尽量减少小麦的倒伏问题。

小麦倒伏从形式上可分为“根倒”和“茎倒”，一般都发生在小麦发育后期。“根倒”主要与小麦种植区域的土壤品种与结构特性有关，本题不做讨论。“茎倒”是高产小麦倒伏的主要形式，尤其是发生时间较早的“茎倒”，往往造成大幅度的减产。“茎倒”的原因是茎秆与穗的自重和风载作用的迭加超过了小麦茎秆的承受能力。

对于倒伏问题的研究方法较多，常见的方法之一就是针对不同的产量，寻找小麦抗倒伏能力最佳的茎秆性状（包括株高、茎长、各节间长、各节茎外径、壁厚、茎秆自重、穗长、穗重等）。各方面的专家通过分析影响小麦倒伏的各种因素，目前已经得到了一些结果，但是对抗倒伏能力最佳的茎秆性状还没有定论。通过物理力学类比研究小麦抗倒伏性可以对影响小麦倒伏的因素进行定性的分析，值得我们进行探讨。但方法缺乏相关试验参考数据，只能在作较多假设下先进行粗略研究，为进一步试验提供根据。

如何依据物理学的方法并在数据不完善的情况下，找出影响小麦倒伏的显著性因素是本文研究的重点。本文需要完成以下几个问题。

1、依据有些论文中判断茎秆抗倒性的抗倒伏指数公式：

$$\text{茎秆抗倒伏指数} = \text{茎秆鲜重} \times \text{茎秆重心高度} / \text{茎秆机械强度}$$

对提供的数据，建立各品种小麦的茎秆抗倒指数公式。对于缺乏有关参数的年份，可进行合理的假设，如通过已知数据求茎秆机械强度与茎秆粗厚的关系。

2、研究抗倒伏指数与茎秆外部形态特征之间的关系。即给出抗倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等茎秆性状在最易引起倒伏期的相关性指标。判断小麦茎秆性状的各个因素之间是否有相关性？并对 2008 年国信 1 号与智 9998 品种的小麦都发生倒伏，其他品种没有发生倒伏的原因给出判断。

3、探讨单穗重分别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时小麦的理想株型结构。

4、将茎秆按刚/弹性材料处理，研究小麦茎秆在麦穗自重和风载作用下应力的基本规律，引用、修改附件三文献中力学公式或自己另行推导，建立小麦茎秆抗倒伏的数学模型。

5、应用 4 问中力学模型中的抗弯刚度 EI，麦穗自重下和风载作用下的公式对 2007 年腊熟期各品种数据进行计算，有些参数可依据需要作某些假设。因腊熟期小麦叶片、叶鞘多已脱落，可设风力仅对单穗穗头起作用，暂时忽略风力对小麦茎秆作用。试计算在 2007 年数据中腊熟期各品种的抗倒伏风速（取小数后两位）。

6、总结所建模型及分析结果，提出值得考虑的问题。同时为 2012 年制定完整的试验方案及数据分析方法。并给小麦育种家在育种实践中提出合理的建议。

## 2 模型假设

1、数据材料中，当某类数据不全或部分丢失时，认为通过类比的方法，得到的数据是合理有效的。

2、小麦的最大挠度是指麦秆顶端的挠度。

3、在有关小麦茎秆方面的建模时，假设小麦茎秆每一节是一个均匀圆柱体，圆柱体截面为同心圆环；

4、当茎秆两形态参量之间的相关系数大于 0.8 时，近似认为两者之间成线性相关，当研究某一参量与多个参量相关性时，认为后者的相关性彼此独立；

5、对某一参量建模时，虽然不同品种小麦的数据不同，但对于同一参量，认为不同品种的小麦总体差异不大，模型类型一致，只需修改相关的系数即可。

### 3 符号说明

符 号	定 义
$N$	小麦的节数
$J$	机械强度
$R_j$	小麦第 $j$ 个品种的倒伏指数
$M_{sum}$	茎秆鲜重
$m_i$	穗下第 $i$ 节鲜重
$m_f$	单穗鲜重
$L_i$	穗下第 $i$ 节长度
$L_f$	穗长
$D_i$	穗下第 $i$ 节粗度
$d_i$	穗下第 $i$ 节壁厚
$H_{inc}$	含穗重心高度
$H_{unc}$	不含穗重心高度
$k_{Dd}$	平均粗度与壁厚的比例关系
$\rho$	相关系数
$K$	曲率
$\nu$	挠度
$EI$	抗弯刚度
$F_w$	风载应力
$E$	势能
$v_w$	风速
$I$	风强等级
$G$	总体评价指标

## 4 问题分析

小麦的倒伏问题一直是影响小麦增产的主要因素，对小麦的抗倒伏性研究一直都是育种专家研究的重点和难点。目前，国内外许多专家对小麦的抗倒伏性研究做了大量卓有成效的工作，从多方面对小麦的抗倒伏性研究提出了很多评价方法，这些评价方法可以概括为以下六个方面。一是人工创造条件诱导倒伏现象，调查田间倒伏株率，二是风洞试验，三是抗倒性的力学测定，四是作物抗倒性的形态学测定，五是作物抗倒性的解剖学研究方法，六是作物抗倒性的化学研究方法。

上述六个研究方法，都可以对小麦抗倒伏性进行研究，但多数都是基于定性的分析，而后通过试验来进行检验，在实际操作时费时长、费用大且数据不完全，不利于对小麦的抗倒伏性问题进行定量的计算和分析每个因素对抗倒伏影响重要性。目前，对于小麦抗倒伏问题研究的定量分析的方法主要是用抗倒伏指数来进行描述。

本文正是基于此研究背景，对小麦的抗倒伏性问题进行定量分析研究，找出影响小麦的抗倒伏因素，以及小麦自身外部形态特征和风等外界因素对小麦抗倒伏性的重要性，即每个影响因素对小麦抗倒伏性影响的显著性。

### 4.1 问题 1 分析

对于问题一，首先根据查阅的资料分析了影响小麦抗倒伏的因素，采用数据拟合的方法对题中所给模型的合理行进行了的论证，通过数据分析找出影响抗倒伏的主要因素，并根据分析情况决定是否需要对已有的抗倒伏指数模型进行修正。

### 4.2 问题 2 分析

该问题实际上是对问题一的深入，通过问题一模型的研究，进一步找出抗倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等指标之间的关系，并判断小麦茎秆性状的各个因素之间的相关性，采用的方法是数据拟合和假设检验等，最后利用问题一模型和数据拟合的结论，找出 2008 年国信 1 号与智 9998 品种的小麦都发生倒伏及其他品种没有发生倒伏的原因。

### 4.3 问题 3 分析

问题 3 是在一、二两问的基础上，运用模型和数据拟合的函数，分别求出单穗重分别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时小麦的株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重等指标。

### 4.4 问题 4 分析

本文的前三问是在不考虑风等外界因素的作用下，对小麦的抗倒伏性进行研究。第 4 问是在考虑外界因素下对小麦抗倒伏问题的深入。对于第四问，需在考虑麦穗自重的前提下，进行力矩分析，运用最小势能原理建立小麦茎秆抗倒伏的数学模型。

### 4.5 问题 5 分析

第 5 问是在第四问基础上的特例分析，即将 2007 年腊熟期的矮抗 58、新麦 208、周麦 18 三个品种数据带入第四问建立的小麦茎秆抗倒伏的数学模型，计算各自的抗倒伏风速，对于模型中缺少的部分数据，可采用不同年份类比的方式给出。

### 4.6 问题 6 分析

第六问是对前五问建立模型的总结和综合运用，通过总结查找处模型的优缺点及需改进的方面。在查阅相关资料的基础上，结合文中建立的模型，制定 2012 年的试验方案并给出数据处理的方法，最后运用模型分析的结论提出合理性的建议。

## 5 模型的建立及求解

### 5.1 问题 1 模型及求解

#### 5.1.1 理论分析

通过查阅相关文献并结合题中所给的数据,分析得出影响小麦倒伏的因素有:株高、穗长、各节间长、节间长度比、壁厚、穗重、茎秆鲜重、茎秆重心高度、机械强度等因素,对上述因素及相关数据进行分析、整理,利用题中所给的抗倒伏指数计算公式对小麦的抗倒伏问题进行定量计算,依题意抗倒伏指数的三个计算指标分别是茎秆鲜重、茎秆重心高度和机械强度,三个指标的试验测定方法如下。茎秆鲜重(带穗、叶和鞘的完整地上部单茎鲜重,用精度为 0.01g 的电子天平称量),茎秆重心高度(茎秆基部到该茎秆平衡支点的距离,用精度为 0.01m 的直尺进行测量),机械强度(采用拉力法,取基部第二茎节间(去叶鞘)、两端放于高 50 cm、间隔 5 cm 的支撑木架凹槽内,在其中部挂一弹簧秤,向下缓慢用力拉称,使茎秆折断所用的力加上弹簧秤的重量即为该茎节的抗折力。当基部第二茎节间长度<5cm 时,把它换算成 5cm 长的茎秆机械强度)。

对于问题 1 我们首先将抗倒伏指数的计算公式和物理学中稳度的计算公式进行类比,说明抗倒伏指数公式有其合理性的一面,尔后对题中抗倒伏指数计算公式的相关指标的进行了数据拟合并进行了相关性分析,最后根据各个小麦品种对题中的模型进行适当修改。

#### 5.1.2 问题 1 模型的建立

由于文中并未给出小麦的抗倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、壁厚、穗重、茎秆鲜重、茎秆重心高度、机械强度等因素之间的数据关系,无法直接采用数据拟合的方法建立小麦的抗倒伏指数计算模型。通过将抗倒伏指数和物理学中稳度进行比较可以说明抗倒伏公式合理性的一面。物理学中对于稳度的概念是物体的稳度等于物体的重心高度 $\times$ 物体的重量/物体所围面积,而抗倒伏指数的计算公式是茎秆鲜重 $\times$ 茎秆重心高度/茎秆机械强度,两者都可以作为衡量物体稳定性能的指标。通过对稳度和抗倒伏指数计算公式进行分析可以看出两者的分子部分基本相同,都是刻画麦秆偏离中心轴线时产生的重力力矩,而重力力矩是引起小麦倒伏的关键因素。分子的含义相似,说明抗倒伏指数计算公式分子部分是合理的,但分母部分合理性需要进行论证。

依据生活常识,我们可知小麦茎秆鲜重越重、茎秆高度越高,小麦越容易倒伏,这也说明了题中抗倒伏指数计算公式分子选取的合理性;小麦的粗度越粗、壁厚越厚,小麦的抗倒伏能力越强,本文正是基于这一思想对小麦的抗倒伏性进行研究。此外,题中给出的小麦抗倒伏指数这一指标对小麦的抗倒伏性描述不合理,小麦茎秆鲜重越重,抗倒伏指数越大,依生活常识小麦易倒,应是一个成本性指标。因此本文在后续的研究中将小麦的抗倒伏指数计算公式更名为小麦的倒伏指数计算公式。倒伏指数可用来衡量小麦倒伏情况,倒伏指数越大,小麦的越易倒伏,反之倒伏指数越小,小麦的越不易倒伏,可见该指标是成本性指标。

##### 5.1.2.1 矮抗 58 模型的建立

本文依据题中所给的 2007 年矮抗 58 数据进行了相关性分析,相关系数计算结果如下所示,其中  $\bar{\rho}$  表示平均相关系数,  $\rho_i$  表示与第  $i$  节的相关系数。

$$\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (1)$$

其中,分子为两因素的协方差,分母为两因素的标准差乘积。而实际上只有小麦各



因素的样本数据，因此分子与分母分别由样本协方差和样本标准差的乘积替换。

表 1 矮抗 58 机械强度与茎秆粗度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\bar{\rho}$	0.9054	0.7299	0.7641	0.7697
$\rho_2$	0.7257	0.6148	0.5777	-0.3775
$\rho_3$	0.8029	0.8463	0.7942	0.6359
$\rho_4$	0.8041	0.6732	0.7388	0.7641
$\rho_5$	0.7366	0.5310	0.3881	0.8080

表 2 矮抗 58 机械强度与茎秆总长度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\bar{\rho}$	0.4075	-0.1115	-0.3707	0.2661
$\rho_2$	0.3984	0.0011	-0.1459	-0.2869
$\rho_3$	-0.2665	-0.0945	-0.1953	-0.2987
$\rho_4$	-0.1154	-0.0892	0.0534	-0.1446
$\rho_5$	-0.0670	-0.2032	-0.57290	-0.0472

表 3 矮抗 58 机械强度与茎秆重心高度、单穗重量的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\rho_{\text{重心高度}}$	0.1290	0.4031	0.4461	-0.2546
$\rho_{\text{单穗重量}}$	0.8524	0.4581	0.7378	0.8010

通过对相关系数结果进行分析，可以得出如下结论：

- 1、机械强度与茎秆粗度的相关性较高，在蜡熟期相关系数为 **0.9054**；
- 2、机械强度与茎秆总长度（或平均节长度）不相关；
- 3、机械强度与茎秆重心高度不相关；
- 4、机械强度与单穗重量相关性较高，在蜡熟期相关系数为 **0.8524**；

所得的结论与查阅的试验资料、生活常识以及物理学的相关理论均相符，说明所得的结论是科学、合理的。通过日常生活知识可知，小麦的茎秆鲜重主要由茎秆粗度及单穗重量决定，小麦的茎秆粗度越粗、单穗重量越重，小麦的茎秆鲜重越重。通过上述结论可以看出，小麦的机械强度与小麦茎秆鲜重之间存在相关性，通过 2011 年数据进行计算得到相关系数为 0.7727，题中所给的抗倒伏指数的计算公式对于矮抗 58 这个品种的小麦不合适，需进行修正。

基于表 1 中的数据和结论 1 可知：

原文抗倒伏指数公式中的分母——机械强度是由麦秆的物理测试得出，它与麦秆的秆重相关，而后者又与公式中的分子——茎秆鲜重（包括麦秆的秆重）相关。可知原公式分子分母相关，这是不合理的。因此，需要找到一个既能刻画麦秆的机械强度，又与茎秆鲜重相关较小的参量来替换机械强度。

而机械强度与茎秆粗度的正相关性较高，甚至在蜡熟期相关系数为 0.9054，接近于

1; 那么, 机械强度与茎秆粗度基本成线性关系, 即  $J \propto D$ 。

因此, 机械强度可以由麦秆的茎秆粗度近似表示。另外, 茎秆粗度与茎秆鲜重相关性很弱, 倒伏指数中的参量机械强度完全可由茎秆粗度的函数替代, 就避免了机械强度的不合理一面。下面推导麦秆倒伏指数公式的分母部分。

由于麦秆是空心杆, 具有一定的壁厚。以此, 近似认为麦秆是空心圆柱体。其麦秆截面图如图 1 所示。

采用补偿法计算倒伏指数:

原理, 在空心圆柱内加入麦秆实体物质, 形成实心圆柱麦秆, 求出实心圆柱的机械强度值 (由茎秆粗度函数近似表达):  $J_1 \approx k \cdot D$ 。

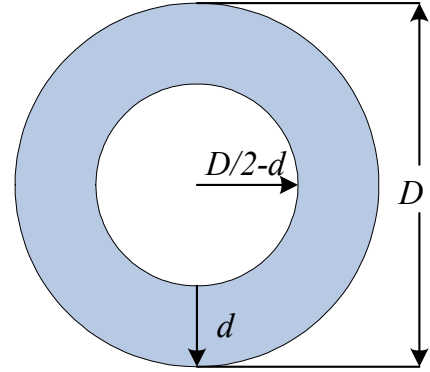


图 1 麦秆截面图

其中,  $J_1$  为总的近似机械强度,  $k$  为机械强度系数。相应的, 填补空心部分的近似机械强度  $J_2$  为:

$$J_2 \approx f(d) \cdot (D - 2 \cdot d) \quad (2)$$

其中,  $f(d)$  是填补空心部分圆柱的近似机械强度系数。

那么, 空心麦秆的实际近似机械强度  $J$  为

$$\begin{aligned} J &= J_1 - J_2 = k \cdot D - f(d) \cdot (D - 2d) \\ &= (k - f(d)) \cdot D + 2f(d) \cdot d \\ &= (k - f(d)) \cdot (D + \frac{2f(d)}{k - f(d)} \cdot d) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{令: } k_j = (k - f(d)), \quad k_{Dd} = \frac{2f(d)}{k - f(d)}$$

则倒伏指数计算公式为:

$$R = \frac{M_{sum} \cdot H_{inc}}{k_j \cdot (D + k_{Dd} \cdot d) + c} \quad (4)$$

其中:

$$M_{sum} = m_f + \sum_{i=1}^N m_i \quad (5)$$

$$H_{inc} = \frac{m_f \cdot (\frac{L_f}{2} + \sum_{i=1}^N L_i) + (\sum_{i=1}^N M_i) \cdot H_{unc}}{M_{sum}} \quad (6)$$

$k_j$  与  $c$  是常数, 不同的小麦品种各不相同, 一般与小麦的细胞壁、小麦组织的柔韧性、小麦的木质化程度、维管束鞘厚度等因素有关, 可由  $(D + k_{Dd} \cdot d)$  与  $J$  进行线性拟合

确定。

根据本文提供的数据进行相关性分析，检验文中提出的模型合理性并根据矮抗 58 数据分析结果求出模型中相应系数，给出矮抗 58 倒伏指数的计算模型。

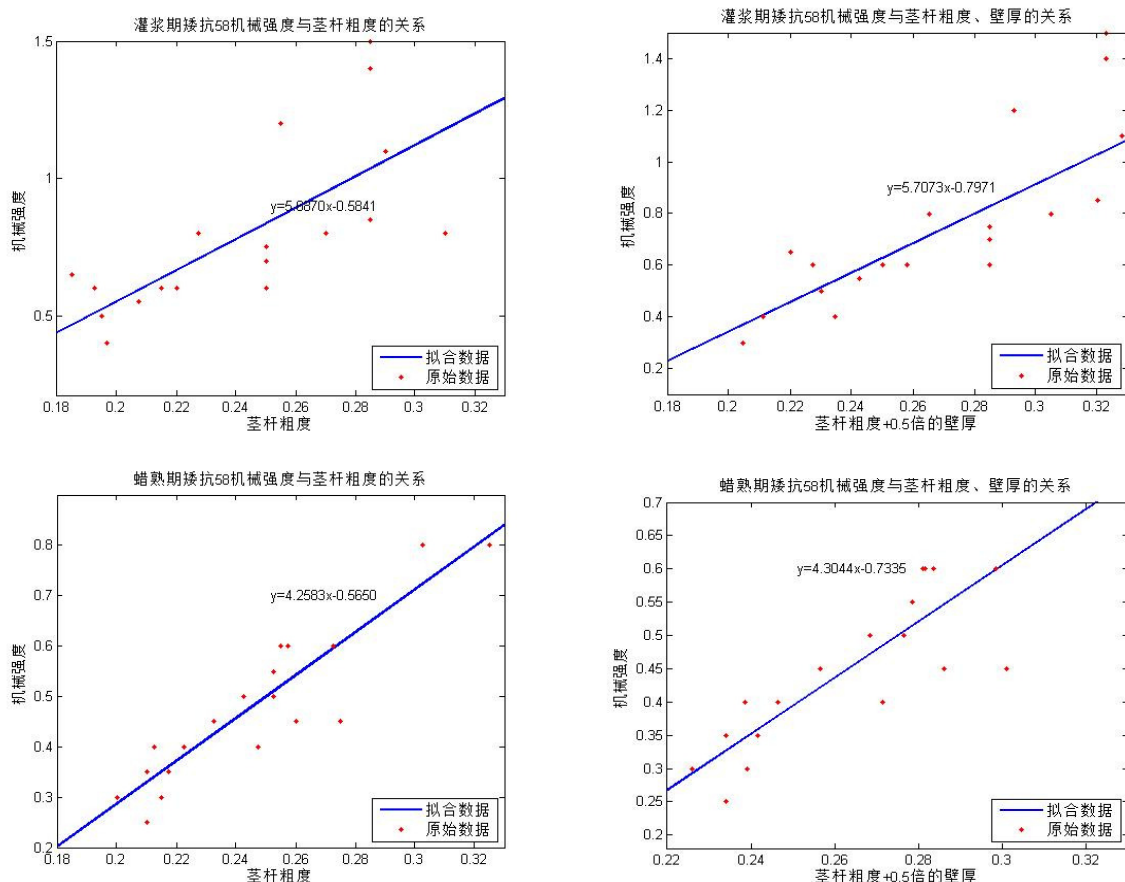


图 2 矮抗 58 机械强度和茎秆粗度相关性分析

对矮抗 58 数据中机械强度和茎秆粗度在灌浆期和蜡熟期的相关性进行研究，通过分析可知，机械强度与茎秆粗度正相关。在经过多次尝试之后，发现不论是灌浆期还是蜡熟期机械强度与茎秆粗度+0.5 倍壁厚正相关，且相关系数最高，达到 0.9057。

由于机械强度与茎秆粗度+0.5 倍壁厚相关系数高，因此，本文基于最小二乘法原则，通过数据线性拟合，得出了机械强度与茎秆粗度+0.5 倍壁厚的函数关系，其表达式为：

$$J = 4.1285(\bar{D} + 0.5\bar{d}) - 0.6607 \quad (7)$$

式中： $\bar{D}$ ——矮抗 58 小麦的平均粗度；

$\bar{d}$ ——矮抗 58 小麦的平均壁厚。

综上所述可知，矮抗 58 小麦的倒伏指数计算公式为：

$$R_{\text{矮抗58}} = \frac{M_{\text{sum}} \cdot H_{\text{inc}}}{4.1285(\bar{D} + 0.5\bar{d}) - 0.6607} \quad (8)$$

### 5.1.2.2 周麦 18 模型的建立

依据题中所给的 07 年周麦 18 数据进行了相关性分析，相关系数计算结果如下所示。

表 4 周麦 18 机械强度与茎秆粗度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\bar{\rho}$	0.5519	0.8619	0.8131	-0.4026
$\rho_2$	0.1298	0.8229	0.1933	-0.4051
$\rho_3$	0.6283	0.8932	0.7318	-0.0635
$\rho_4$	0.7678	0.7986	0.7504	-0.1180
$\rho_5$	0.5802	0.8229	0.8841	-0.6794

表 5 周麦 18 机械强度与茎秆总长度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\bar{\rho}$	-0.3455	0.7491	0.5527	-0.5225
$\rho_2$	0.0246	0.2481	-0.0399	-0.2385
$\rho_3$	0.5153	0.7327	0.7485	0.0421
$\rho_4$	0.2500	0.6748	0.5487	-0.0208
$\rho_5$	0.6735	0.5702	0.3989	-0.5845

表 6 周麦 18 机械强度与茎秆重心高度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\rho_{\text{重心高度}}$	0.3799	0.6730	0.7402	-0.6212
$\rho_{\text{单穗重量}}$	0.6307	0.9035	0.9266	-0.4379

通过对周麦 18 的相关数据进行相关性分析, 所得的结论和矮抗 58 大体相同, 在对周麦 18 数据中机械强度和茎秆粗度在灌浆期和蜡熟期的相关性进行研究, 发现机械强度与茎秆粗度正相关, 但相关系数不高。在经过多次尝试之后, 发现不论是灌浆期还是蜡熟期机械强度与茎秆粗度+20 倍壁厚的平方正相关, 且相关系数最高, 达到 0.6106。

那么周麦 18 的机械强度近似表达式为:

$$J_{\text{周麦18}} = 3.0892(\bar{D} + 20\bar{d}^2) - 0.2418 \quad (9)$$

式中:  $\bar{D}$ 、 $\bar{d}$  含义同上。

综上所述可知, 周麦 18 小麦的倒伏指数计算公式为:

$$R_{\text{周麦18}} = \frac{M_{\text{sum}} \cdot H_{\text{inc}}}{3.0892(\bar{D} + 20\bar{d}^2) - 0.2418} \quad (10)$$

### 5.1.2.3 新麦 208 模型的建立

依据题中所给的 07 年新麦 208 数据进行了相关性分析, 相关系数计算结果如下所示。

表 7 新麦 208 机械强度与茎秆粗度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\bar{\rho}$	-0.1579	0.6247	0.7767	0.2009
$\rho_2$	-0.2716	0.2957	0.6907	0.6315
$\rho_3$	-0.1548	0.7167	0.8031	0.2158
$\rho_4$	0.1893	0.6151	0.7422	-0.2752
$\rho_5$	-0.0838	0.6108	0.5534	-0.4940

表 8 新麦 208 机械强度与茎秆总长度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\bar{\rho}$	-0.4150	0.0328	0.6633	-0.2083
$\rho_2$	-0.1790	0.3703	0.4549	0.0244
$\rho_3$	-0.2818	0.1106	0.4522	-0.0389
$\rho_4$	-0.1796	-0.1828	0.7040	-0.5760
$\rho_5$	0.0452	-0.2386	-0.1898	-0.8891

表 9 新麦 208 机械强度与茎秆重心高度的相关系数

	蜡熟期	乳熟期	灌浆期	开花期
$\rho_{\text{重心高度}}$	0.4063	0.0914	0.4969	-0.0475
$\rho_{\text{单穗重量}}$	0.7223	0.7247	0.7924	0.0270

通过对新麦 208 的相关数据进行相关性分析, 所得的结论和矮抗 58 及周麦 18 也基本相同, 在对新麦 208 数据中机械强度和茎秆粗度在生长周期内的相关性进行研究, 发现机械强度与茎秆粗度正相关, 相关系数较高, 达到 0.6484。在经过多次尝试之后, 发现生长周期内机械强度与茎秆粗度+任意倍壁厚的相关系数都没有机械强度与茎秆粗度的相关系数高, 因此, 认为机械强度与茎秆粗度的相关系数是最高的。

虽然机械强度与茎秆粗度的相关系数不是很高, 但是生长周期内壁厚变化不大。因此, 通过数据线性拟合, 得出了机械强度与茎秆粗度的函数关系, 其表达式为:

$$J_{\text{新麦208}} = 3.2713\bar{D} - 0.1231 \quad (11)$$

式中:  $\bar{D}$ 、 $\bar{d}$  含义同上。

综上所述可知, 新麦 208 小麦的倒伏指数计算公式为:

$$R_{\text{新麦208}} = \frac{M_{\text{sum}} \cdot H_{\text{inc}}}{3.2713\bar{D} - 0.1231} \quad (12)$$

为使上述计算公式表示一致, 将上式改写为:

$$R_{\text{新麦208}} = \frac{M_{\text{sum}} \cdot H_{\text{inc}}}{3.2713(\bar{D} - 0^* \times d) - 0.1231} \quad (13)$$

#### 5.1.2.4 倒伏指数公式合理性论证

本文的倒伏指数公式是对题中抗倒伏指数公式在概念上的替换, 用倒伏指数更便于对小麦的倒伏问题进行描述, 倒伏指数越大, 小麦越易倒, 反之亦然。为了验证倒伏指数公式的正确性, 以 2008 年数据材料中的实验结论: 抗倒性从强到弱排序为: 矮 58 > 联丰 85 > TM > 周 18 > 国信 = 智 9998, 来进行倒伏指数公式验证。

由于 2008 年的实验数据没有机械强度数值, 因此就不能进行  $(D + k_{Dd} \cdot d)$  与  $J$  进行一次线性拟合, 而确定  $k_j$  与  $c$ 。这里采用的是小麦倒伏指数通用公式计算。

根据 2007 年的矮抗 58 的实验数据线性拟合可得： $k_j = 4.1285$ ， $c = -0.6607$ 。

现确定  $d$  的系数值  $k_{Dd} = \frac{2f(d)}{k-f(d)}$  的函数关系式。

由于  $d \ll 1$ ，因此  $f(d) \approx a + b \cdot d$  高次去掉。以 2007 年的数据拟合可得  $f(d) \approx 1.7d$ 。

又由于  $k \gg f(d)$ ，所以  $k_{Dd} = \frac{2f(d)}{k-f(d)} = \frac{2 \times 1.7d}{k} \approx d$ （其中  $k \approx (3 \sim 4)$ ）。

由此可得倒伏指数公式：

$$R = \frac{M_{sum} \cdot H_{inc}}{4.1285 \cdot (D + d^2) - 0.6607} \quad (14)$$

其中：

$$M_{sum} = m_f + \sum_{i=1}^N m_i \quad (15)$$

$$H_{inc} = \frac{m_f \cdot (\frac{L_f}{2} + \sum_{i=1}^N L_i) + (\sum_{i=1}^N M_i) \cdot H_{unc}}{M_{sum}} \quad (16)$$

将 08 年数据带入倒伏指数计算公式，可得各品种倒伏指数，其具体值如下表所示。

表 10 各品种小麦倒伏指数表

	矮抗 58	智 9998	国信 1 号	周麦 18	联丰 85	TM
倒伏指数	66.8030	100.0670	103.3335	82.1432	74.6087	87.0742

通过对表 10 的数据进行分析，可以得出各品种的抗倒伏能力。根据倒伏指数的概念，则各品种抗倒性强弱顺序依次是：

矮抗 58 > 联丰 85 > 周麦 18 > TM > 智 9998 > 国信 1 号

将通过倒伏指数公式得出的各品种抗倒性强弱顺序与 2008 年数据说明 doc 文档中的实验结论：抗倒性从强到弱排序为：矮 58 > 联丰 85 > TM > 周麦 18 > 国信 = 智 9998 进行分析比较，可以明显看出通过推到的公式计算的结果和实验结果大致相同，造成 TM 与周麦 18 之间顺序相反的原因可能是 08 年数据中所用的数据是茎秆的干重。此外，结论国信与智 9998 之间倒伏指数差别不大，进一步说明了所建立的倒伏指数计算公式的合理性。

## 5.2 问题 2 模型及求解

问题 2 是在问题 1 研究的基础上，利用问题 1 的所建立的模型结合题中所给的数据进行相关性分析。

### 5.2.1 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究

由于时间及数据的限制，本文以矮抗 58、国信 1 号、智 9998、周麦 22 为例，对倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性进行分析。此外，为处理问题的方便，本文对相关系数进了分类，结果如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} |\rho| \leq 0.2, \text{ 不相关, 记为 } 0 \\ 0.2 < |\rho| \leq 0.4, \text{ 弱相关, 记为 } \pm 1 \\ 0.4 < |\rho| \leq 0.8, \text{ 中等相关, 记为 } \pm 2 \\ 0.8 < |\rho| \leq 1, \text{ 强相关, 记为 } \pm 3 \end{array} \right.$$

#### 5.2.1.1 矮抗 58 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究

矮抗 58 的倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等因素相关性分析结果如下：

表 11 2008 年矮抗 58 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数

属 性	相关系数	属 性	相关系数
株 高	0.8514	第四节长度	0.5006
穗 长	-0.0117	第五节长度	0.2248
节间长度比（第一节/第二节）	0.1085	第一节粗度	-0.0656
节间长度比（第二节/第三节）	0.4405	第二节粗度	-0.1541
节间长度比（第三节/第四节）	-0.2477	第三节粗度	-0.3876
节间长度比（第四节/第五节）	-0.3805	第四节粗度	-0.1395
第一节长度	0.5525	第五节粗度	-0.0467
第二节长度	0.4392	平均粗度	-0.2931
第三节长度	-0.1686		

表 12 2011 年矮抗 58 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数

属 性	相关系数	属 性	相关系数
株 高	0.5515	第五节粗度	0.2778
穗 长	0.2770	平均粗度	-0.0424
节间长度比（第一节/第二节）	-0.2806	穗 重	0.1615
节间长度比（第二节/第三节）	-0.1469	第一节壁厚	-0.1208
节间长度比（第三节/第四节）	0.2027	第二节壁厚	0.0941
节间长度比（第四节/第五节）	-0.6418	第三节壁厚	-0.1793
第一节长度	-0.0431	第四节壁厚	-0.2783
第二节长度	0.4502	第五节壁厚	-0.1801
第三节长度	0.2505	平均壁厚	-0.1765
第四节长度	0.2028	第一节鲜重	-0.0157
第五节长度	0.6524	第二节鲜重	0.1166
平均节间长度	0.5053	第三节鲜重	0.1092
第一节粗度	-0.3300	第四节鲜重	0.2005
第二节粗度	-0.0514	第五节鲜重	0.6016
第三节粗度	-0.0706	平均鲜重	0.2441
第四节粗度	-0.1263		

由于题中对 2008 年穗重、壁厚、鲜重的数据没有给出，本文没有对 2008 年倒伏指数与穗重、壁厚、鲜重的相关性进行分析。通过对表 11、12 中的数据进行分析，可以得到如下结论：

- 1、倒伏指数与株高正强相关，而且是所有相关系数中最为相关的因素，相关系数

最高为 **0.8514**;

- 2、倒伏指数与穗重、穗长的相关性很低，可以认为倒伏指数与穗重不相关;
- 3、倒伏指数与节间长度比、壁厚、粗度负弱相关;
- 4、倒伏指数与节间长、鲜重正弱相关，但与第五节鲜重的相关性较高，相关系数为 **0.6016**;

#### 5.2.1.2 国信 1 号倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究

国信 1 号倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等因素相关性分析结果如下:

表 13 2008 年国信 1 号倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数

属 性	相关系数	属 性	相关系数
株 高	0.8677	第四节长度	0.2892
穗 长	-0.0286	第五节长度	0.0424
节间长度比（第一节/第二节）	0.6355	第一节粗度	-0.0048
节间长度比（第二节/第三节）	-0.4632	第二节粗度	-0.1458
节间长度比（第三节/第四节）	0.2732	第三节粗度	-0.1635
节间长度比（第四节/第五节）	0.0032	第四节粗度	-0.5002
第一节长度	0.7313	第五节粗度	-0.0279
第二节长度	0.1940	平均粗度	-0.3858
第三节长度	0.6258		

对 2008 年国信 1 号倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数的数据进行分析，可以得到如下结论:

- 1、倒伏指数与株高正强相关，是所有相关系数中最为相关的因素，相关系数最高为 **0.8677**;
- 2、倒伏指数与穗长不相关;
- 3、倒伏指数与各节间长度比相关，且变化较大，与节间长度比（第一节/第二节）相关系数为 **0.6355**，与节间长度比（第二节/第三节）相关系数为 **-0.4632**;
- 4、倒伏指数与节间长正中等相关，相关系数最高为 **0.7313**;
- 5、倒伏指数与粗度负弱相关。

#### 5.2.1.3 智 9998 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究

智 9998 倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等因素相关性分析结果如下:

表 14 2008 年智 9998 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数

属 性	相关系数	属 性	相关系数
株 高	0.4825	第四节长度	0.2201
穗 长	0.1168	第五节长度	0.1385
节间长度比（第一节/第二节）	0.2090	第一节粗度	-0.3471
节间长度比（第二节/第三节）	0.1396	第二节粗度	-0.3398
节间长度比（第三节/第四节）	-0.1948	第三节粗度	-0.3810
节间长度比（第四节/第五节）	-0.1311	第四节粗度	-0.3435
第一节长度	0.4270	第五节粗度	-0.3118
第二节长度	0.1697	平均粗度	-0.7263
第三节长度	-0.0658		

对 2008 年智 9998 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数的数据进行分析，可以



得到如下结论：

1、倒伏指数与株高正中等相关，是所有相关系数中最为相关的因素，相关系数最高为 **0.4825**；

2、倒伏指数与穗长的相关性较低，可近似认为不相关；

3、倒伏指数与各节间长度比相关较低，也可认为不相关；

4、倒伏指数与节间长正弱相关；

5、倒伏指数与平均粗度成负中等相关。

#### 5.2.1.4 周麦 22 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性研究

周麦 22 倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等因素相关性分析结果如下：

表 15 2011 年周麦 22 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数

属 性	相关系数	属 性	相关系数
株 高	0.6290	第五节粗度	0.0831
穗 长	0.4842	平均粗度	0.3412
节间长度比（第一节/第二节）	0.4857	穗 重	0.4242
节间长度比（第二节/第三节）	0.1521	第一节壁厚	-0.0574
节间长度比（第三节/第四节）	-0.0412	第二节壁厚	0.1538
节间长度比（第四节/第五节）	-0.0577	第三节壁厚	-0.3506
第一节长度	-0.0511	第四节壁厚	-0.1603
第二节长度	0.6487	第五节壁厚	-0.5319
第三节长度	0.5840	平均壁厚	-0.3161
第四节长度	0.5189	第一节鲜重	0.1905
第五节长度	0.3654	第二节鲜重	0.3523
第一节粗度	0.3237	第三节鲜重	0.4696
第二节粗度	0.3542	第四节鲜重	0.4160
第三节粗度	0.3074	第五节鲜重	0.5372
第四节粗度	0.5052	鲜 重	0.4530

对 2011 年周麦 22 倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关系数的数据进行分析，可以得到如下结论：

1、倒伏指数与株高的正中等相关，是所有相关系数中最为相关的因素，相关系数最高为 **0.6290**；

2、倒伏指数与穗长、鲜重、节间长、粗度正中等相关，相关系数在 **0.4-0.5** 之间；

3、倒伏指数与节间长度比（第一节/第二节）正中等相关，与其余各节间长度比相关较低，认为不相关；

4、倒伏指数与壁厚负弱相关。

#### 5.2.1.5 小麦倒伏指数与茎秆外部形态特征的相关性综合分析

对矮抗 58、国信 1 号、智 9998、周麦 22 四个小麦品种，倒伏指数与株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重、粗度等因素相关性结果及各个品种小麦相关性分析的结论，进行综合分析可得图 3：

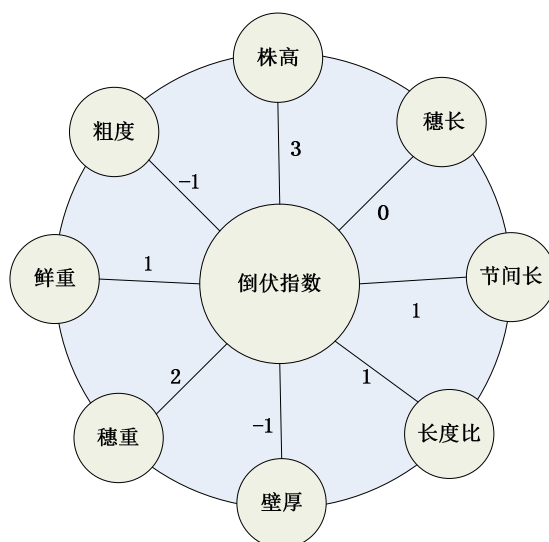


图 3 倒伏指数与茎秆外部形态特征相关性

图 3 所得的结论与生活常识和对第一问推出的公式相一致，株高越高、穗重越重倒伏指数越大，小麦越易倒伏；粗度越大、壁厚越厚倒伏指数越小，小麦越不易倒伏。

#### 5.2.2 茎秆性状的各个因素之间相关性分析

对该问题以矮抗 58、周麦 22、平安三个品种作为例进行研究，对题中的数据进行相关性分析。

##### 5.2.2.1 矮抗 58 茎秆性状的各个因素之间相关性研究

矮抗 58 的株高、穗长、节间长、节间长度比、壁厚、穗重、鲜重、粗度两两因素之间相关性分析结果如下：

表 16 2011 年矮抗 58 茎秆外部形态特征间的相关系数

	株高	穗长	节间长	节间长度比	壁厚	穗重	鲜重	粗度
株高	1	-0.2676	0.9951	0.5552	-0.3937	-0.2948	-0.2669	-0.3838
穗长		1	-0.3614	-0.1417	0.5268	0.6224	0.6537	0.5747
节间长			1	0.5518	-0.4350	-0.3490	-0.3253	-0.4303
节间长度比				1	0.2158	0.3739	0.3902	0.3002
壁厚					1	0.9232	0.8668	0.9381
穗重						1	0.9681	0.9315
鲜重							1	0.9344
粗度								1

对表 16 中相关数据进行分析，可得到如下结论：

- 1、株高与节间长正强相关，与节间长度比正中等相关，与其余各因素负弱相关；
- 2、穗长与壁厚、穗重、鲜重、粗度正中等相关，与其余系数负弱相关。由数据拟合的结论可知，穗长与穗重成非线性关系。主要的原因是穗长在增长时，不仅长度对重量造成了影响，而且在小麦成长过程中，麦穗在不断增粗，非线性由此可见。另外，不同品种的小麦其颗粒饱满程度不一，也是穗长与穗重成非线性的原因；
- 3、节间长与穗重、壁厚、鲜重、粗度为负弱相关；
- 4、节间长度比与各因素间相关性均不明显；
- 5、穗重、壁厚、鲜重、粗度两两正强相关，且相关系数较高，为进一步说明穗重、壁厚、鲜重、粗度间的正相关情况，对数据进行了拟合，由于数据的限制，本文仅对穗重与壁厚、鲜重、粗度间的相关情况进行了数据拟合，拟合结果如图 4 所示：

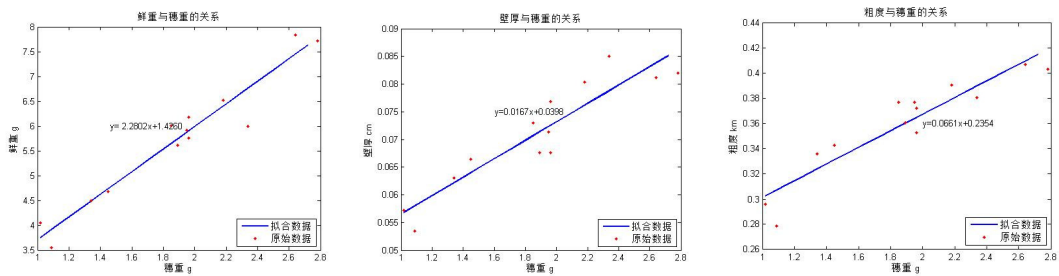


图 4 穗重与壁厚、鲜重、粗度的数据拟合

通过数据拟合分析，可认为穗重与壁厚、鲜重、粗度成线性关系。

#### 5.2.2.2 周麦 22 茎秆性状的各个因素之间相关性研究

周麦 22 的株高、穗长、节间长、节间长度比、壁厚、穗重、鲜重、粗度两两因素之间相关性分析结果如下：

表 17 2011 年周麦 22 茎秆外部形态特征间的相关系数

	株高	穗长	节间长	节间长度比	壁厚	穗重	鲜重	粗度
株高	1	0.8469	0.9892	-0.1951	0.4711	0.8668	0.8567	0.8117
穗长		1	0.7598	-0.4652	0.5556	0.8888	0.8039	0.8450
节间长			1	-0.1102	0.4227	0.8147	0.8259	0.7594
节间长度比				1	-0.6036	-0.4463	-0.4217	-0.5372
壁厚					1	0.6694	0.6606	0.6838
穗重						1	0.8726	0.8611
鲜重							1	0.8898
粗度								1

对表 17 中相关数据进行分析，可得到结论如下：

- 1、株高、穗长、节间长、穗重、鲜重、粗度两两因素间正强相关，株高与节间长度比可认为不相关、节间长与节间长度比不相关；
- 2、节间长度比与株高、穗长、节间长、穗重、鲜重、粗度负弱相关；
- 3、壁厚与穗重、鲜重、粗度正中等相关；
- 4、株高与节间长度比、节间长与节间长度比可认为不相关。

#### 5.2.2.3 平安茎秆性状的各个因素之间相关性研究

平安的株高、穗长、节间长、节间长度比、壁厚、穗重、鲜重、粗度两两因素之间相关性分析结果如下：

表 18 平安茎秆外部形态特征间的相关系数

	株高	穗长	节间长	节间长度比	壁厚	穗重	鲜重	粗度
株高	1	-0.2676	0.9951	0.5552	-0.3937	-0.2948	-0.2669	-0.3838
穗长		1	-0.3614	-0.1417	0.5268	0.6224	0.6537	0.5747
节间长			1	0.5518	-0.4350	-0.3490	-0.3253	-0.4303
节间长度比				1	0.2158	0.3739	0.3902	0.3002
壁厚					1	0.9232	0.8668	0.9381
穗重						1	0.9681	0.9315
鲜重							1	0.9344
粗度								1

对表 18 中相关数据进行分析，可得到结论如下：

- 1、株高与节间长正强相关，与节间长度比正中等相关，与其余因素负弱相关；
- 2、穗长与壁厚、穗重、鲜重、粗度正中等相关，与节间长、节间长度比负弱相关；
- 3、节间长度比与各因素相关性均不高；
- 4、壁厚、穗重、鲜重、粗度两两因素之间正强相关。

#### 5.2.2.4 茎秆性状的各个因素之间相关性综合分析

对矮抗 58、周麦 22、平安三个小麦品种的株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重、粗度两两因素相关性结果及结论，进行综合分析可得表 19

表 19 茎秆性状的各因素间相关性综合分析

	株高	穗长	节间长	节间长度比	壁厚	穗重	鲜重	粗度
株高	3	*	-1	2	-1	-1	-1	-1
穗长		3	*	-1	2	2	2	2
节间长			3	2	-2	-2	-2	-2
节间长度比				3	1	1	1	1
壁厚					3	3	3	3
穗重						3	3	3
鲜重							3	3
粗度								3

说明：\*号表示两者之间的相关性因品种不同而不同。

表 19 所得的结论与生活常识相符，小麦穗重越大，则壁厚越厚、鲜重越重、粗度越重，节间长度比和壁厚、穗重、鲜重、粗度的关系不明显。

#### 5.2.3 倒伏原因分析

2008 年数据中，国信 1 号与智 9998 品种抗倒伏能力比其余的品种要差的原因可以用第一问的相关结论进行说明。在第一问中为了对倒伏指数计算公式合理性进行论证，我们对矮 58、联丰 85、TM、周 18、国信 1 号、智 9998 六个品种的倒伏指数分别进行了计算，计算的结果已在图 3 中给出，计算结果表明国信 1 号、智 9998 两个品种的倒伏指数分别为 103.3335 和 100.0670，倒伏指数比其余的品种要大很多，所以这两个品种极易倒伏。

为了对该问题进一步说明，下面我们从两个方面对该问题进行研究

1、倒伏指数计算公式。对于倒伏指数计算公式的合理性已在解决问题 1 过程中进行了论证。分析倒伏指数计算公式可知，对于某一品种小麦而言，倒伏指数的计算公式与茎秆鲜重  $M_{sum}$ 、含穗重心高度  $H_{inc}$ 、粗度  $D$ 、壁厚  $d$  四个参数有关。国信 1 号和智 9998 倒伏指数比其余的要大很多，说明这两个品种的上述四个参量跟别的品种差异性明显。

2、数据分析。利用文中提供的对矮 58、联丰 85、TM、周 18、国信 1 号、智 9998 六个小麦品种上述四个数据进行比较发现，国信 1 号和智 9998 的含穗重心高度  $H_{inc}$  比其余品种要高，且这两个品种的壁厚  $d$  比别的品种要薄的多。正是因为这两点原因，国信 1 号和智 9998 抗倒伏能力要比别的品种差，且易倒伏，不适合作为小麦品种进行种植和推广。

两个研究方面所得的结论是一致的，说明对国信 1 号和智 9998，两个小麦品种倒伏原因的分析是合理的。该分析结论与生活常识也是相符的，对于相同重量的不同品种，茎秆的中心高度越高，小麦在风等外界因素的作用下，越容易发生重心偏移，越易倒伏。

对于相同重量的不同品种，小麦的壁厚越厚，则小麦的柔韧性越强，小麦的抗倒伏能力越强，反之越弱。

5.3 问题 3 模型及求解

问题 3 的求解，主要根据实际实验数据和问题 2 得到的单穗重与小麦的各株形结构参数（株高、穗长、各节间长、节间长度比、壁厚、穗重、鲜重等）之间的关系，进行建模求解。

5.3.1 方法 1——类比法求解

由问题 1 和问题 2 中，对不同品种倒伏指数的分析计算可以看出，矮抗 58 品种的小麦倒伏指数最小，抗倒伏性最好。另外，根据 2008 年数据材料中，对不同品种小麦的各种生产性指标对比，如表 20 所示，也可以看出矮抗 58 品种的小麦，不仅抗倒伏性最好，而且产量高，根据 2011 年数据材料中不同品种间的产量构成及经济系数表，可以看出矮抗 58 的经济系数最高，所以可以用矮抗 58 的各株形结构参数进行类比，从而确定单穗重分别为 1.19g，2.06g，2.46g，2.56g，2.75g，2.92g 时小麦的理想株形结构。

表 20 2008 年数据材料中不同品种小麦的生产性指标对照表

品种	平均亩穗数	单穗籽粒重（g）	最佳产量	抗倒性
矮抗 58	45-56 万	1.20--2.46	650-700kg	最好
联丰 85	38-40 万	1.53--2.56	580-600kg	次之
周麦 18	38-40 万	1.41--2.75	650-700kg	与联丰相当
国信 1 号	46 万左右	1.08--1.91	500-550kg	易倒
智 9998	45-46 万	0.97--2.06	500-550kg	易倒
TM	20 万左右	1.80--2.92	500kg 左右	矮抗与联丰之间

表 21 2011 年数据材料中不同品种间的产量构成及经济系数

品种	成穗数	穗粒数	千粒重	产量	经济系数
周麦 18	611.85	40.17	46.07	10083.30	0.481
百农矮抗 58	720.60	38.83	43.36	10519.65	0.502
温麦 6 号	687.90	38.37	42.04	8391.60	0.430
周麦 22	569.85	37.87	42.16	9123.45	0.433
郑麦 9023	540.45	34.97	45.21	8710.35	0.460
平安 6 号	628.95	36.4	36.17	6649.35	0.389
豫麦 18	577.65	36.3	44.65	7889.70	0.481

5.3.1.1 类比法求解思路

根据问题 3 中单穗重的不同，将小麦分成 6 类，分别记为 A 类、B 类、C 类、D 类、E 类、F 类，如下图所示。

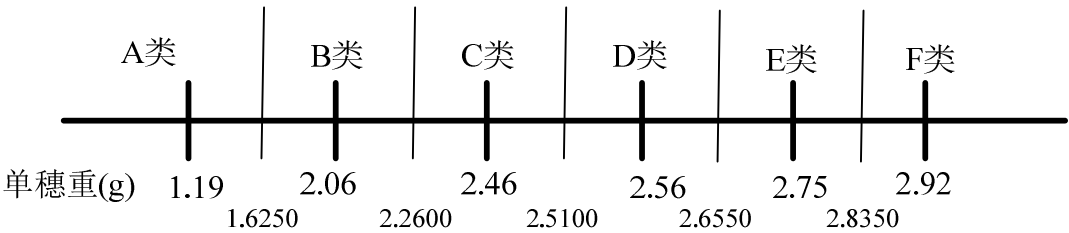


图 5 依据单穗重的小麦分类示意图

根据分类标准，就 2011 年数据表中矮抗 58 的数据信息进行分类，在每一个具体的类型中，对矮抗 58 各种株形结构参数进行综合分析，求出各株形结构参数的平均值，并用此平均值对理想的株形结构进行类比。

### 5.3.1.2 类比法求解

根据 2011 年数据材料中矮抗 58 的信息，得到矮抗 58 在不同穗重下的理想结构参数，如下表所示。

表 22 根据矮抗 58 得到的理想株形各株形结构值

		株形 1	株形 2	株形 3	株形 4	株形 5	株形 6
	穗重(g)	1.2989	2.0027	2.3200	2.5850	2.7500	2.9467
	穗长(cm)	7.5944	7.8591	8.2333	8.3500	9.0333	7.9333
穗下第一节	长(cm)	23.7100	22.8264	24.7833	18.8000	22.3067	22.8000
	粗(mm)	2.2944	2.7291	2.8133	2.7050	3.0533	2.7300
	鲜重(g)	0.5444	0.8045	0.6100	0.8200	0.6833	0.2033
	壁厚(mm)	0.3322	0.3455	0.3800	0.4600	0.4400	0.2667
穗下第二节	长(cm)	14.6978	14.7109	13.6667	15.0750	15.0033	15.2000
	粗(mm)	2.9744	3.5818	3.7800	4.0650	4.0700	4.0267
	鲜重(g)	0.6122	1.0082	0.5800	1.1250	0.8167	0.1667
	壁厚(mm)	0.4022	0.4964	0.4667	0.5050	0.5267	0.3467
穗下第三节	长(cm)	7.9522	7.9536	7.7333	8.0000	7.4000	7.4667
	粗(mm)	3.0267	3.5582	3.6900	4.0200	3.9733	3.6667
	鲜重(g)	0.4156	0.7255	0.5500	0.9100	0.5833	0.0867
	壁厚(mm)	0.3944	0.5264	0.5433	0.6450	0.4500	0.2400
穗下第四节	长(cm)	6.0033	6.2973	6.3700	6.1500	6.7967	6.5667
	粗(mm)	3.0489	3.5036	3.6233	4.1900	3.8467	3.6367
	鲜重(g)	0.3289	0.6082	0.3367	0.7500	0.4700	0.0733
	壁厚(mm)	0.4478	0.5664	0.4467	0.6800	0.5167	0.3033
穗下第五节	长(cm)	4.3725	5.0833	6.2200	6.8500	6.2200	NaN
	粗(mm)	3.0450	3.9567	3.7400	4.2700	3.9000	NaN
	鲜重(g)	0.3825	0.6183	0.7600	1.1000	0.9800	NaN
	壁厚(mm)	0.7525	0.9200	1.0100	0.9600	1.0000	NaN
	株高(cm)	64.3303	64.7306	67.0067	63.2250	66.7600	NaN
	平均壁厚(mm)	0.4658	0.5709	0.5693	0.6500	0.5867	0.2892
	平均粗度(mm)	2.8779	3.4659	3.5293	3.8500	3.7687	3.5150
	鲜重(g)	2.2836	3.7647	2.8367	4.7050	3.5333	NaN
	平均节间长度(cm)	11.3472	11.3743	11.7547	10.9750	11.5453	13.0083
	节间比 2/1	0.6199	0.6445	0.5514	0.8019	0.6726	0.6667
	节间比 3/2	0.5410	0.5407	0.5659	0.5307	0.4932	0.4912
	节间比 4/3	0.7549	0.7917	0.8237	0.7688	0.9185	0.8795
	节间比 5/4	0.7283	0.8072	0.9765	1.1138	0.9152	NaN

由表中数据可以看出，理想株形的穗重与题目要求的单穗重基本相符，所以可以近似认为单穗重分别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时的理想株形结构就是表中的数据决定的株形结构。

### 5.3.2 方法 2——通用建模方法

#### 5.3.2.1 建模思想

根据问题 2 中分析的各类小麦茎秆外部形态之间的相关性，可以总结建立小麦茎秆外部形态各参量与小麦穗重的数学关系表达式，如某一形态参量与穗重的相关性为强相关，相关系数大于 0.9，我们就可以根据数据材料中大量数据，对该参量与穗重进行线性拟合，求出关系表达式，从而求出不同穗重下的该形态参量的数值。

#### 5.3.2.2 模型建立

##### 1、壁厚、鲜重、粗度与穗重的关系模型

通过问题 2 中对 2011 年矮抗 58、周麦 22、平安三种小麦各外部形态之间的相关性研究，可以发现壁厚、鲜重、粗度与穗重的相关性都很高，以矮抗 58 为例，壁厚、鲜重、粗度与穗重的相关系数均在 0.9 以上，如下图所示。

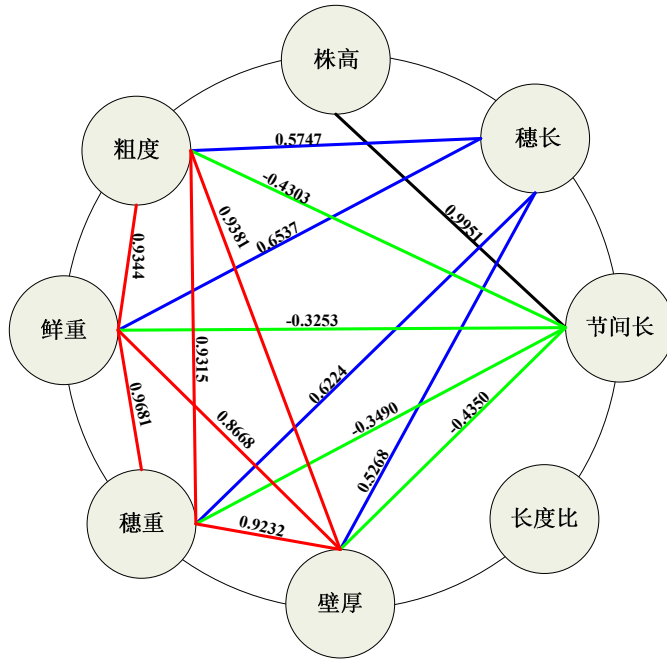


图 6 矮抗 58 各外形结构之间的相关系数图

所以可以近似认为壁厚、鲜重、粗度与穗重是线性关系，通过对矮抗 58 的数据进行拟合，可以分别得到壁厚、鲜重、粗度与穗重的关系模型。

壁厚与穗重：

$$d = 0.0167m_f + 0.0398 \quad (17)$$

鲜重与穗重：

$$M_{sum} = 2.2802m_f + 1.426 \quad (18)$$

粗度与穗重：

$$D = 0.0661m_f + 0.2354 \quad (19)$$

##### 2、穗长与穗重的关系模型

通过问题 2 中对矮抗 58、周麦 22、平安三种小麦穗长与穗重的相关性研究，发现穗长与穗重为正相关，他们之间的先关系数均大于 0.5，但总体都不大，不能用线性拟合，通过对矮抗 58 的数据进行分析，得到穗长与穗重之间的近似关系为：

$$L_f = -0.0771m_f^2 + 0.83351m_f + 6.7109 \quad (20)$$

##### 3、茎长（节间长之和）计算模型

在问题 2 的研究过程中，发现矮抗 58、平安两种小麦的茎长与穗重为负相关，而

周麦 22 的茎长与穗重成正相关，而且相关系数大于 0.8，为强相关，这说明茎长与穗重之间的相关性不明确，或者因不同品种的小麦而不同，为了进一步明确茎长与穗重之间的相关性，利用 2007 年数据重新对矮抗 58 关于茎长与穗重之间的相关性进行了研究，由于 2007 年矮抗 58 的数据信息量比 2011 年要多，更能体现出一一般性，研究结果发现矮抗 58 的茎长与穗重基本是相互独立的，没有相关性，相关系数为 0.0152，通过分析也发现茎长基本为一常数，如下图所示。

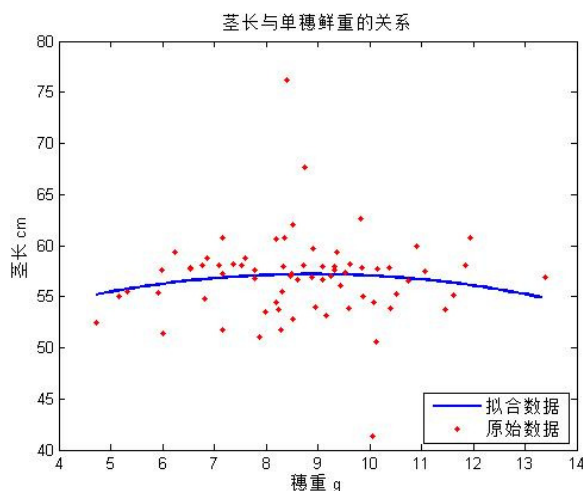


图 7 2007 年矮抗 58 茎长与穗重的关系示意图

通过曲线拟合，得到茎长与穗重的近似关系为：

$$L = -0.1154m_f^2 + 2.0497m_f + 48.1003 \quad (21)$$

由于穗重  $m_f$  一般很小，所以茎长  $L$  由上式计算基本为一常数，由图可以看出，茎长多数分布在 55cm 左右，根据生长过程中的淘汰竞争法则可以认为理想的茎长就为 55cm。

#### 4、节间长度比

有了茎长，如果再知道节间长度比，就可以算出各节间长度，查阅相关文献和利用数据计算可以得到，节间长度比按照从基部第一节、基部第二节……的顺序，其比值基本满足黄金分割点的值 0.618，在此，我们就取 0.618 作为节间长度比。

#### 5、其他形态参量的计算模型

株高为小麦的总长度，其大小等于穗长加上茎长，即：  $H = L + L_f$ 。

#### 5.3.2.3 模型求解

根据以上所建立的计算模型，就可以计算出单穗重非别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时的理想株形结构，如下表所示。

表 23 不同穗重时小麦的理想株形表

	穗重 (g)	壁厚 (cm)	粗度 (cm)	鲜重 (g)	穗长 (cm)	株高
理想株形 1	1.1900	0.0597	0.3141	4.1394	7.5936	62.5936
理想株形 2	2.0600	0.0742	0.3716	6.1232	8.1007	63.1007
理想株形 3	2.4600	0.0809	0.3980	7.0353	8.2947	63.2947
理想株形 4	2.5600	0.0826	0.4046	7.2633	8.3394	63.3394
理想株形 5	2.7500	0.0857	0.4172	7.6965	8.4200	63.4200
理想株形 6	2.9200	0.0886	0.4284	8.0842	8.4873	63.4873



通过两种不同的建模计算方法，可以看出两种方法得到的理想株形的外形结构，基本接近，从而验证了模型的有效性。

## 5.4 茎秆抗倒伏的数学模型

### 5.4.1 模型建立的思路

在查阅相关资料并结合题中的资料及数据的基础上，对茎秆抗倒伏因素进行了研究，分析得出麦穗自重和风是影响麦秆倒伏的重要因素，在建立模型时需重点考虑。本文按照递进的研究思路，在进行力矩分析的基础上，结合物理学中的胡克定律，运用最小势能原理，建立了在麦穗自重及自重和风载的共同作用下茎秆抗倒伏的常微分方程模型。为对模型的合理性进行论证，我们利用题中的数据从数值计算和图形分析两个角度对模型进行验证，并将所得结论与生活常识进行比较。

### 5.4.2 模型的建立

#### 5.4.2.1 相关概念的定义

**挠度：**物理学中对挠度的定义是结构构件的轴线或中面由于弯曲引起垂直于轴线或中面方向的线位移，本文中挠度是指小麦茎秆在自重和风载等因素的作用下，茎秆偏移原来位置的位移。

**挠度曲线：**物理学中挠度曲线是指构建在平面弯曲时其轴线将在形心主惯性平面内弯成一条连续光滑的平面曲线，本文中挠度曲线是指小麦茎秆在弯曲时偏离原来位置的光滑曲线，在文中用  $V(x)$  进行表示。

**弯曲力矩：**是相对于某一点而言，其定义是该点以上麦秆部分在重力下相对于该点的力矩。在文中用  $M$  表示。

**麦秆线密度：**单位长度下，麦秆的重量，在文中用  $q$  表示。

各物理量的含义可用下图表示：

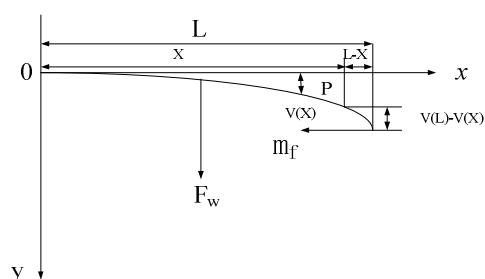


图8 麦穗在自重和风载作用下示意图

#### 5.4.2.2 挠度曲线模型建立

根据刚性/弹性理论知识及胡克定律，挠度（弹性）曲线的曲率  $K$  与弯曲力矩  $M$  成正比（资料来源于附加三）

由生活常识可知，麦穗自重占麦鲜重中的比例较大。因此，本文的公式推导考虑了麦穗自重的作用。

已知曲率公式：

$$K = \frac{V''(x)}{(1+V'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (22)$$

设  $y = V(x)$  为挠度曲线方程。

则：挠度曲线的微分方程为：

$$K = \frac{M}{EI} \quad (23)$$

又因为  $V'(x) \ll 1$  则：  $K = V''(x)$

将上式带入挠度曲线的微分方程可得：  $EIV'' = M$

由图 8 可知：麦穗相对于  $P$  点的力矩为：

$$M_f = m_f \cdot g[V(L) - V(x)] \quad (24)$$

近似求解  $P$  点以麦秆的力矩：

$$\begin{aligned} M_p &= q\sqrt{[V(L) - V(x)]^2 + (L - x)^2} \cdot g \cdot \frac{V(L) - V(x)}{2} \\ &= q(L - x) \cdot \sqrt{1 + V'(x)^2} \cdot g \cdot \frac{V(L) - V(x)}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

又因为  $V'(x) \ll 1$  可得  $M_p = q(L - x) \cdot g \cdot \frac{V(L) - V(x)}{2}$

则总力矩为：

$$M = M_f + M_p = m_f \cdot g[V(L) - V(x)] + q \cdot (L - x) \cdot g \cdot \frac{V(L) - V(x)}{2} \quad (26)$$

将上式带入公式 (23) 可得：

$$EI \cdot V'' = m_f \cdot g \cdot [V(L) - V(x)] + \frac{q \cdot g}{2} (L - x)[V(L) - V(x)] \quad (27)$$

由于麦秆的穗下前几节对弯曲力矩影响远远小于麦穗的力矩，则上式可化简为

$$EIV'' = m_f \cdot g[V(L) - V(x)] \quad (28)$$

令：  $\frac{m_f \cdot g}{EI} = a$  ,  $V(L) = b$  ( $V(L)$  是在自重作用下的最大挠度)。

则：

$$V'' = a[b - V(x)] \quad (29)$$

进一步可得：

$$V'' + aV(x) - ab = 0 \quad (30)$$

其齐次微分方程为:

$$V'' + aV(x) = 0 \quad (31)$$

特征方程为:

$$r^2 + a = 0 \quad (32)$$

则两个特征根为:  $r_1 = \sqrt{ai}$ ,  $r_2 = -\sqrt{ai}$ 。

因此,

$$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{ax}) + C_2 \sin(\sqrt{ax}) \quad (33)$$

而 (30) 式的特解为:  $V^* = b$

则:

$$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{ax}) + C_2 \sin(\sqrt{ax}) + b \quad (34)$$

又因为  $V(0) = 0$   $V(L) = b$

$$\begin{cases} V(0) = C_1 + b = 0 \\ V(L) = b - b \cos(\sqrt{a}L) + C_2 \sin(\sqrt{a}L) \end{cases} \quad (35)$$

进一步推出  $\begin{cases} C_1 = -b \\ C_2 = \frac{b \cos(\sqrt{a}L)}{\sin(\sqrt{a}L)} \end{cases}$

$$V(x) = b[1 - \cos \sqrt{ax} + \frac{\cos(\sqrt{a} \cdot L)}{\sin(\sqrt{a} \cdot L)} \sin \sqrt{ax}] \quad (36)$$

$$V(x) = b\{1 - \frac{1}{\sin(\sqrt{a} \cdot L)} \sin \sqrt{ax} \sin[\sqrt{a}L - \sqrt{ax}]\} \quad (37)$$

代入  $a, b$  参数值, 则:

$$V(x) = V(L)\{1 - \frac{1}{\sin(\sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} \cdot L)} \sin \sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} x \sin[\sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} L - \sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} x]\} \quad (38)$$

#### 5.4.2.3 曲线模型合理性分析

为了对上式进行合理性论证, 我们在参考题中提供的数据以及袁红梅的硕士论文 P18 的数据 ( $\overline{EI} = 14535.76 N \cdot mm^2$ ) 的基础上从数值计算和图形分析两个方面对公式进行了论证。

##### 1、数值计算

将 $a$ 的表达式代入到 $\sqrt{a}L$ 可得结果如下：

$$\sqrt{a}L = \sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} \cdot L = \sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} \cdot L = \sqrt{\frac{2.03 \times 9.8 \times 10^{-3}}{1.454 \times 10^4 \times 10^{-6}}} \times 0.638577 = 0.7470 < \frac{\pi}{2}$$

上式中数据 2.03、0.638577 来源于题中 2011 年矮抗 58 数据。所以  $0 \leq \sqrt{a}(L-X) < \frac{\pi}{2}$ ,

$$\text{又由} \quad \sqrt{a} = \sqrt{\frac{m_f \cdot g}{EI}} = \sqrt{\frac{m_f \cdot g}{\frac{qL^3}{48y}}} = \sqrt{\frac{48y \cdot m_f \cdot g}{qL}} \cdot \frac{1}{L} \quad (39)$$

所以

$$\theta = \sqrt{a}(L-x) = \sqrt{\frac{48y \cdot m_f \cdot g}{qL}} \cdot \frac{L-x}{L} \quad (40)$$

而  $\frac{x}{L}$  型是合理的，上式与附件 3 中挠曲线近似公式  $(v(x) = a_l \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right), a_l = b)$

相仿。

## 2、图形分析

运用题中及参考资料的数据，在假设最大挠度就是麦秆顶端的挠度，麦秆的最大挠度不变的前提下，根据表达式  $a = \frac{m_f \cdot g}{EI}$ ，在固定  $m_f$ 、 $I$  以及最大挠度  $b$ （ $g$  表示重力

加速度，是常量）情况下，当  $a$  值变化时，讨论麦秆挠度曲线的变化。

根据数据，可得小麦高度与挠度的关系图如下。

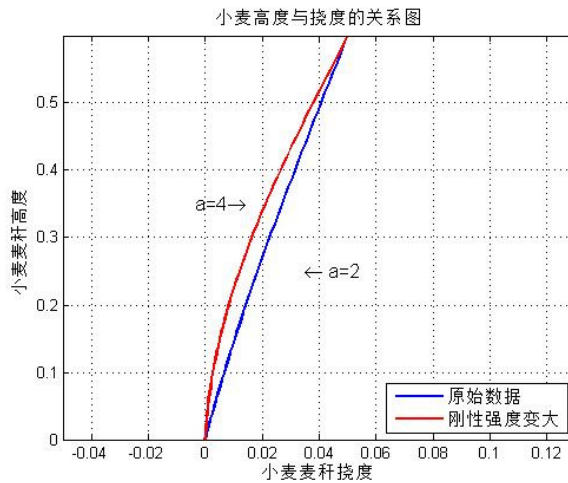


图 9 小麦高度与挠度的关系图

对图形进行分析可知，当  $a$  由 2 变为 4 时，麦秆的挠度曲线曲率增大，依  $a$  的表达式进行分析可知，当  $a$  变大时， $E$  变小，说明杨氏模量减小。这一结论与杨氏模量表示的物理意义一致，杨氏模量越小，越容易发生形变，即挠度曲线曲率变大，反之亦然。

该图同时说明  $V(x)$  为单调增函数，且为上凸函数。

从数值计算和图形分析得出的结论是一致的。由图可知，麦秆在基部第 1、2 节间的曲率最大，易发生倒伏，这一结论与我们查阅的《小麦品种百农矮抗 58 茎秆特性分析》和生活常识都是相符的，小麦通常由于基部第 1、2 节机械组织不发达或由于第 1、2 节间伸长变细，在自重或风载等外界因素的影响下，难以负荷地上部植株重量，使其茎秆弯曲或折断而发生倒伏。

#### 5.4.2.4 风载倒伏模型建立

##### 1、相关知识——风压的贝努利公式

$$w = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{\gamma}{2g} v^2 = \frac{v^2}{1630} (kN/m^2) \quad (41)$$

其中  $w$  为风压， $v$  为风速， $\rho = 1.25 kg/m^3$  为标准的空气密度， $\gamma = 0.012018 kN/m^3$  为空气单位体积的重力， $g = 9.8 m/s^2$  重力加速度。

##### 2、麦秆势能计算

弯曲麦秆的势能计算，对挠度曲线求两次导数

$$V(x) = b \left\{ 1 - \frac{1}{\sin(\sqrt{a} \cdot L)} \sin \sqrt{a} x \sin[\sqrt{a} L - \sqrt{a} x] \right\} \quad (42)$$

$$V'(x) = \frac{b\sqrt{a}}{\sin(\sqrt{a}L)} \cos(\sqrt{a}L - \sqrt{a}x) \quad (43)$$

$$V''(x) = \frac{ba}{\sin(\sqrt{a}L)} \sin(\sqrt{a}L - \sqrt{a}x) \quad (44)$$

则：麦秆的弹性势能为：

$$\begin{aligned} U &= \frac{EI}{2} \int_0^l [V''(x)]^2 dx = \frac{EI}{2} \times \left[ \frac{ba}{\sin(\sqrt{a}L)} \right]^2 \int_0^l [\sin(\sqrt{a}L - \sqrt{a}x)]^2 dx \\ &= \frac{EI}{2} \times \left[ \frac{ba}{\sin(\sqrt{a}L)} \right]^2 \int_0^l \left[ \frac{1 - \cos 2(\sqrt{a}L - \sqrt{a}x)}{2} \right] dx \\ &= \frac{EI}{2} \times \left[ \frac{ba}{\sin(\sqrt{a}L)} \right]^2 \int_0^l \left[ \frac{1 - \cos 2(\sqrt{a}L - \sqrt{a}x)}{2} \right] dx \\ &= \frac{EI}{2} \times \left[ \frac{ba}{\sin(\sqrt{a}L)} \right]^2 \left( \frac{L}{2} - \frac{1}{4\sqrt{a}} \right) \int_0^l d \sin[2(\sqrt{a}L - \sqrt{a}x)] \\ &= \frac{EI}{2} \times \frac{b^2 a^2}{\sin^2(\sqrt{a}L)} \left[ \frac{L}{2} + \frac{(\sin 2\sqrt{a}L)}{4\sqrt{a}} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

$(\sqrt{a}L < \frac{\pi}{2})$  由麦秆平均数据得  $\sqrt{a}L$  一般不超过  $\frac{\pi}{3}$ 。

计算小麦自重和风载共同作用下的势能，设风对麦秆的作用面积为  $S$ ，由风压与风速公式 ( $w = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{\gamma}{2g}v^2 = \frac{v^2}{1630} (kN/m^2)$ ) 可得，麦秆在风载作用下的应力为：

$$F_w = w \cdot S \quad (46)$$

则风力势能为：

$$V = F_w \cdot b \quad (47)$$

则总势能为：

$$E = U - V = \frac{EI}{2} \times \frac{b^2 a^2}{\sin^2(\sqrt{a}L)} \left[ \frac{L}{2} + \frac{(\sin 2\sqrt{a}L)}{4\sqrt{a}} \right] - F_w b \quad (48)$$

由最小势能原理，即：  $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$  时， $E$  最小。可得单一麦秆弯折时所需最大为：

$$F_w = EI \frac{a^2 b}{\sin^2(\sqrt{a}L)} \left[ \frac{L}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{a}L)}{4\sqrt{a}} \right] \quad (49)$$

而有：

$$F_w = w \cdot s = \frac{V^2(x) \cdot s}{1.63} \quad (50)$$

因此：

$$V_w = \sqrt{\frac{1.63 \times EI \times a^2 b}{S \times \sin^2(\sqrt{a}L)} \left[ \frac{L}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{a}L)}{4\sqrt{a}} \right]} \quad (51)$$

将上式带入下式  $I = 0.0004V_w^3 - 0.0242V_w^2 + 0.7114V_w + 0.2149$  中，可求得风在多少级以上使得小麦倒伏。

## 5.5 茎秆抗倒伏公式的应用

假设自重条件下  $b=0.05$ ，将 2007 年题中所给数据，带入麦穗自重条件下茎秆抗倒伏公式中，计算结果如下：

对于矮抗 58 求出的挠度计算公式为：

$$v = 0.05 - 0.0512 \sin(1.3514 - 2.3519x) \quad (52)$$

对于新麦 208 求出的挠度计算公式为：

$$v = 0.05 - 0.0501 \sin(1.505 - 2.3908x) \quad (53)$$

对于周麦 18 计算求出的挠度计算公式为：

$$v = 0.05 - 0.05 \sin(1.5942 - 2.3824x) \quad (54)$$

则在自重条件下三个品种挠度及曲率的计算结果如下：

表 24 自重条件下不同品种挠度及曲率的计算

品种	数值	穗下第一节	穗下第二节	穗下第三节	穗下第四节
矮抗 58	挠度值 m	0.05	0.0236	0.0098	0.0036
	曲率值	0	0.1460	0.2224	0.2569
新麦 208	挠度值 m	0.05	0.0208	0.0074	0.0019
	曲率值	0	0.1612	0.2432	0.7490
周麦 18	挠度值 m	0.05	0.0174	0.0049	0.0009
	曲率值	0	0.1849	0.2558	0.2788

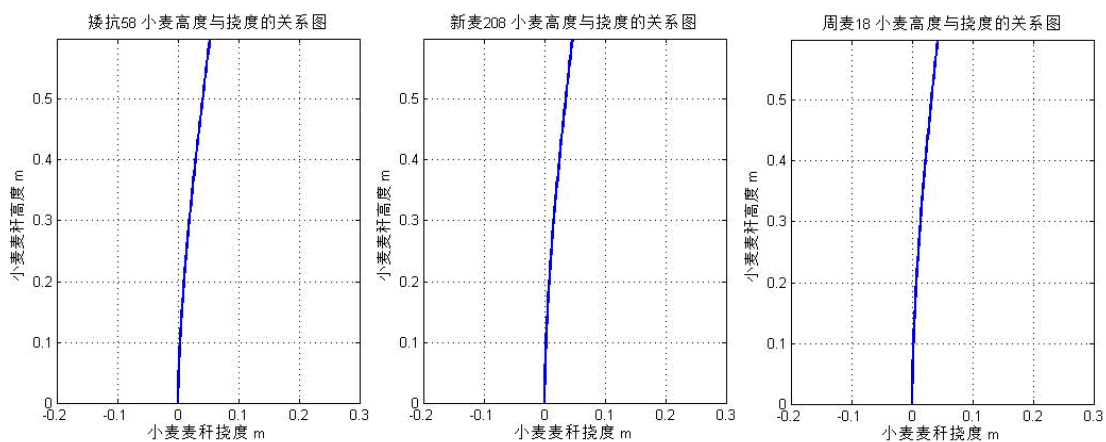


图 10 自重条件下不同品种小麦麦秆挠度与高度关系示意图

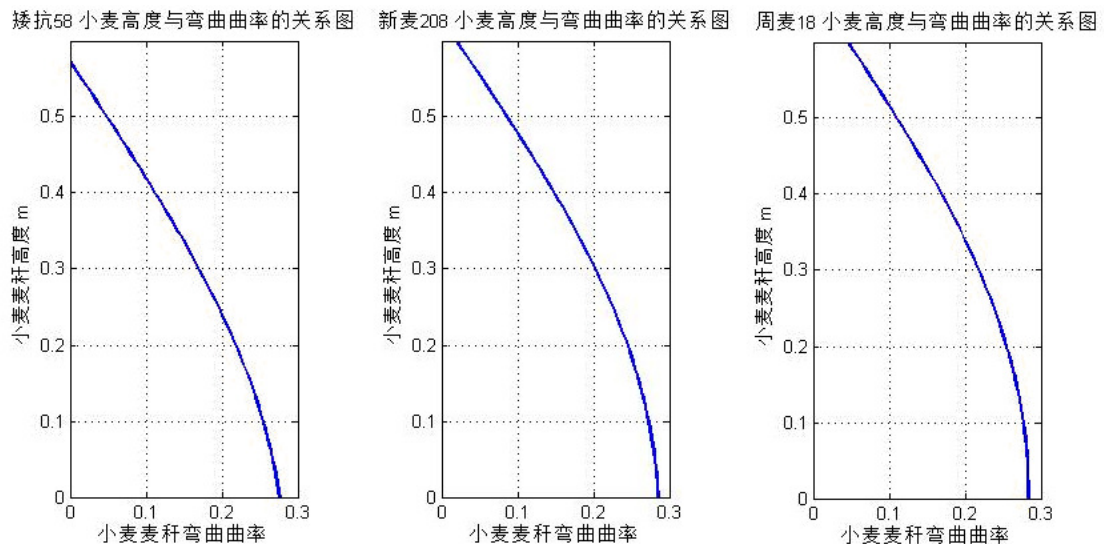


图 11 自重条件下不同品种小麦麦秆弯曲曲率与高度关系示意图

假设风载条件下， $b=0.3$ ，

$$\left\{ \begin{array}{l} D_f = \frac{L_f}{\lambda} \\ S = \mu \cdot D_f L_f \\ a = \frac{m_f \cdot g}{EI} \\ e = \frac{1.63EI \cdot a}{S \cdot \sin^2(\sqrt{a} \cdot L)} \left( \frac{L}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{a} \cdot L)}{4\sqrt{a}} \right) \\ v_w = \sqrt{e \cdot b} \end{array} \right. \quad (55)$$

式中  $v_w$  为风速,  $m_f$  为穗重,  $L_f$  为穗长,  $D_f$  为穗的粗度,  $L$  为茎长,  $EI$  为抗弯刚度,  $\lambda$  为麦穗长宽比, 取为 8。  $\mu$  为风载面积系数, 主要是由麦穗的颗粒间隙, 表面空气动力以及麦穗与风的作用关系共同决定, 取为 0.6。

将 2007 年的数据带入 (55) 可得三个品种倒伏风速情况如下表所示

表 25 不同品种小麦抗倒伏性能比较

品种	倒伏风速 (m/s)	倒伏风力级数	抗倒伏性能
矮抗 58	9.7105	5 - 6	最好
新麦 208	9.0304	5	次之
周麦 18	8.0886	4 - 5	较差

说明: 由于 2007 年的数据中, 没有穗长的值, 所以在计算过程中, 矮抗 58 和周麦 18 两品种穗长的值是根据 2008 年的数据类比的, 新麦 208 的穗长取值在矮抗 58 与周麦 18 之间。

## 5.6 模型的评价及应用分析

### 5.6.1 模型的总结及分析

本文所建模型, 一方面基于已有的成果模型, 结合现实生活中的常识规律, 对所需建立的模型进行大胆假设, 并对其合理性进行理论论证与推导; 另一方面是利用数据材料中的相关数据, 进行数据间的相关性分析, 佐证模型的正确性, 并通过所建立模型对数据材料中的相关数据进行分析, 理论分析结果与试验的一致性也验证了模型的有效性。

在建立倒伏指数模型时, 首先, 我们通过题中给出抗倒伏计算公式和查阅的文献, 对 2007 年的矮抗 58、新麦 208, 周麦 18 的抗倒伏指数进行了计算, 发现矮抗 58 的抗倒伏指数最小, 通过 2008 年材料得知矮抗 58 的抗倒伏性最好, 所以, 我们认为抗倒伏指数的命名与现实生活存在一定的不一致性, 故在论文中我们称之为倒伏指数, 其次, 根据题中给出的参考公式, 结合现实生活, 认为茎秆的机械强度与茎长、粗度, 壁厚等外部形态因素都应具有一定的关系, 而且茎秆的倒伏指数与麦穗头、穗重也应该是有关联的。因此, 我们对试题的模型进行修正, 重新建立茎秆倒伏指数与茎秆外部形态之间的关系模型, 既进行了理论推导和论证, 也利用 2008 年的数据材料, 对矮抗 58, 联丰 85, 周麦 18, 国信 1 号, 智 9998, TM 六种品种的小麦进行了倒伏指数计算, 在扣去小麦鲜重和干重数据的影响下, 可认为计算结果与试验的结论是一致的。



在建立茎秆抗倒伏模型时，首先，我们对题中所给的袁红梅硕士论文中计算茎秆抗倒伏模型进行了分析，发现其模型的建立前提不合理，没有考虑到麦穗的作用，而麦穗在小麦鲜重中占的比例较大。因此，本文在建立模型时考虑了麦穗的自重。其次，我们按照由易到难的顺序，在进行力矩分析的基础上，结合物理学中的胡克定律，运用势能最小原理，建立了在麦穗自重及自重和风载的共同作用下茎秆抗倒伏的微分方程模型。最后，结合题中提供的数据，从数值计算和图形分析两个角度对模型的合理性进行了论证，所得的结论与我们生活常识相符，进一步说明所建立的模型是合理的。

本文所建立的模型，对于分析不同品种的小麦倒伏程度是合理的。对模型中的参数进行比较分析，可以对小麦的倒伏难易进行初步的定性分析；根据模型计算公式可以给出每种小麦的倒伏指数，对小麦的倒伏情况进行定量分析。所建立的模型可以指导小麦品种的择优，对某个品种的小麦是否应该进行推广具有借鉴意义。

### 5.6.2 试验方案的制定及合理性检验

根据小麦抗倒伏性研究的特点，结合本文的研究思路及数理统计的方法，制定 2012 年的试验方案，其流程图如下：

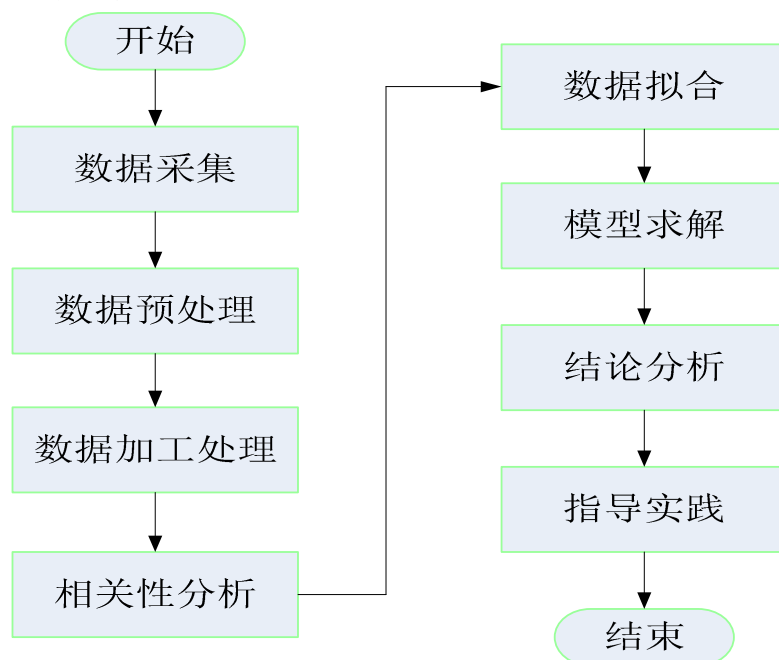


图 12 试验方案流程图

Step1: 数据采集，根据试验要求，到麦田采集穗长、秆长、鲜重、粗度、壁厚等数据。

Step2: 数据预处理，采用数据拟合的方法，或利用统计学知识使某个外部形态特征符合某种分布下进行显著性检验，剔除异常数据。

Step3: 数据加工处理，对于某些数据如不能直接进行采集，则可以通过进行数据推导的方式给出，如株高=穗长+秆长。

Step4: 相关性分析，对所研究问题的因素间进行相关性分析。通过相关系数的正负关系，推断出两者之间的增减性是相同、相反和不相关，再对两者间的关系进行定性分析；通过相关系数的大小决定对数据进行何种拟合方式，再对两者间的关系进行定量分析。

Step5: 数据拟合，根据相关系数的大小，选择进行线性拟合还是非线性拟合，得到两者之间的函数关系式。

Step6: 模型求解, 根据求解问题的需要, 将数据拟合得到的结果, 带入相应的模型, 如研究的是倒伏指数问题, 则就需要将茎秆鲜重、茎秆重心高度、粗度、壁厚数据代入进行计算。

Step7: 结论分析, 对模型求解的结果进行分析比较, 如所研究的麦种抗倒性是否强, 可以抵抗几级的风力。

Step8: 指导实践, 将结论分析应用于小麦品种的培育、选种、推广等实际工作中, 如本文中的数值计算表明, 国信 1 号和智 9998 两个麦种的倒伏指数大, 不适合作为麦种进行培育和推广。

小麦育种专家在品种培育、选种、推广过程中应遵循以下几点准则:

- 1、抗倒伏能力强, 即小麦的倒伏指数要小, 茎秆抗倒伏数值要大。
- 2、株高高度适中 (65cm 左右)、茎秆柔韧性好、茎秆基部节间短。
- 3、穗粒数多且穗粒重, 一般要求单根麦穗数 50 粒以上。
- 4、株型较松散, 有利于叶片进行光合作用。
- 5、环境适应性强, 抗旱、抗风、抗寒、抗病能力强。
- 6、产量高且经济系数大。

## 6 模型的改进

本文在模型建立的过程中, 为了简化, 我们也做出了一些假设, 可能会使得模型在建立的过程中, 忽略了部分因素。比如, 在寻找机械强度与茎秆外部形态特征之间的关系时, 我们只进行了机械强度与单个外部特征之间的相关性分析, 而多因素同时作用下的情况, 没有考虑, 在建立茎秆各外部形态之间的关系模型时, 也只是进行了单个形态特征与单个形态特征之间的相关性分析, 未能考虑多因素情况, 而且由于数据材料中数据信息量较少和部分信息尚为空缺, 所以所建模型可能与真实情况存在不一致性。另外, 模型的推导中并非所有情况都考虑到。下面针对具体问题, 对模型加以改进。

### 6.1 有雨水时的挠度曲线模型

有雨时, 麦穗和麦秆在雨水的渗透下, 加大自重。同时, 雨水对麦秆存在力矩作用。另外雨水对土壤也存在渗透作用, 可能会引起小麦的“根倒”现象。现只考虑雨水对麦穗增加自重加以分析。

假设, 麦穗在雨水作用下, 增加自重为  $\Delta m$ 。那么, 现在的麦穗重量为  $m_f + \Delta m$ 。

由挠度公式可知, 绕度曲线与参数  $a$  有关。在增加自重的条件下

$$a = \frac{(m_f + \Delta m) \cdot g}{EI} \quad (56)$$

在挠度曲线公式推导中, 已说明参数  $a$  变大时, 则麦秆曲率变大, 则更易倒伏。把上式代入挠度公式中, 同样使麦秆曲率变大, 更易倒伏。

### 6.2 光合作用对小麦中有机物形成的影响

本论文在前面的论述只是考虑抗倒伏性强, 可以提高小麦的产量。实际情况中对产量的影响的因素是很多的。其中光合作用对小麦产量的影响十分重要。种植小麦时, 不易过密, 因为平均亩穗数与穗重成负相关关系, 种植过密会使单穗穗重减少。但要充分利用土壤空间, 在一定的条件下亩穗数对产量的影响大于单穗籽粒重对产量的影响, 因此不易过疏。主要目的是使小麦进行最大光合作用, 产生更多的有机物——淀粉。

而光合作用的多少, 除了与亩穗数多少有关之外, 还与麦穗自身的株型特征有关, 而株型特征与小麦品种基因有关。相关文献已有说明。

6.3 小麦经济系数模型

小麦光合作用多少也不能完全反应产量的多少。如果光合作用产生的有机物积聚在麦秆和麦叶上，这样会使麦穗得到的有机物量下降。这可以用经济系数描述。参考 2011 年数据说明。

定义：

1、经济产量是植物在整个生育过程中所累积的可直接供人们食、用或作其它用途的产品的重量，通常用单位面积上生产的鲜重或风干重或干物质重表示。

2、经济系数是经济产量与生物学产量之比，通常用下式表示：

$$\text{经济系数}=\text{经济产量}/\text{生物学产量}$$

经济系数因植物种类、品种、自然条件和栽培措施而不同，在这重新定义小麦的经济系数  $\gamma$ ：

$$\gamma=\frac{m_f}{M_{sum}} \tag{57}$$

即：

$$\gamma=\frac{m_f}{m_f+\sum_{i=1}^N m_i} \tag{58}$$

其中：  $m_f$  为小麦的穗重

$m_i$  为小麦的各节秆重

$M_{sum}$  为小麦的总重

根据小麦的经济系数定义，计算出 2011 年 7 种小麦的经济系数。已知数据是 2011 年数据表的补充说明中的数据，推算数据是根据 2011 年 EXCELL 中数据计算得出。

表 26 小麦 7 个品种的经济系数比较

小麦品种	周麦 18	矮抗 58	温麦 6 号	周麦 22	郑麦 9023	平安 6 号	豫麦 18
已知数据	0.481	0.502	0.430	0.433	0.460	0.389	0.481
推算数据	0.3048	0.4019	*	0.4154	0.6285	0.4982	0.3926

\* 实验数据不完整，无法求出。

上述两项结论相差过大，可能是没有考虑小麦叶和小麦根部对经济系数的影响。

6.4 小麦优劣综合评价模型

由上述分析可知，小麦的综合指标  $G$  与倒伏指数  $R$ 、产量  $Q$ 、经济系数  $\gamma$  有关。建立小麦评价指标的权重系数。可以使用层次分析法、Topsis 法、灰色关联法、信息熵法、

组合赋权法等，这里不再讨论。设权重系数向量：

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

对评判指标归一化处理：

产量  $Q$ 、经济系数  $\gamma$  是效益性指标，而倒伏指数  $R$  是成本性指标。设有  $n$  种小麦品种，那么：

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{Q_i - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \\ \beta_i = \frac{\gamma_i - \gamma_{\min}}{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}} \\ \theta_i = \frac{R_{\max} - R}{R_{\max} - R_{\min}} \end{cases} \quad (i = 1 \dots n)$$

则有：

$$G_i = \omega_1 \alpha_i + \omega_2 \beta_i + \omega_3 \theta_i \quad (59)$$

再对  $G_i (i = 1 \dots n)$  进行排序，最大值所在的行数及是总体评价时的最优品种。

## 7 模型的评价

本文围绕抗倒伏问题，按照先自身因素后考虑外界因素的研究思路，主要建立了小麦的倒伏指数计算模型和小麦在自重和风载作用下的抗倒伏模型。

对于小麦的倒伏指数计算模型，根据生活常识和前人建立抗倒伏指数计算模型，在进行理论推导的基础上，我们建立了小麦倒伏指数的通用表达式。在利用文中提供的数据在对机械强度与茎秆外部形态特征进行了相关性分析基础上，根据文中提供的数据分别建立某一种小麦的倒伏指数计算模型。并根据各自的计算模型，计算各自的倒伏指数，所得结论与生活常识及题中提供的数据均相符。但在建立该模型的过程中，我们只进行了机械强度与单个外部特征之间的相关性分析，而多因素同时作用下的情况，没有考虑，影响了建立模型对分析问题的精度。因此，我们可以认为建立的倒伏指数通用模型是合理的，可用来对小麦的倒伏问题进行精度不是很高的分析。

对于小麦在自重和风载作用下的抗倒伏模型，在对茎秆抗倒伏因素进行了综合分析的基础上，得出麦穗自重是影响麦秆倒伏的重要因素，在建立模型时需考虑。在进行力矩分析的基础上，结合物理学中的胡克定律，运用最小势能原理，建立了在麦穗自重及自重和风载的共同作用下茎秆抗倒伏的微分方程模型。在对模型进行合理论证中所得的结论与生活常识相一致。该模型在建立过程中，对空气动力学的研究较少，对风载的作用进行了简化处理。

此外，本文在解决第二问的过程中建立的茎秆外部形态特征两两因素间的相关性模型，对多个因素间的相关性没有进行研究，因此，所得研究结论与试验数据有部分差别。

## 参考文献

- [1]师义明等. 数理统计[M]. 北京:科学出版社. 2009 年第三版.
- [2]张志涌等. Matlab 教程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社. 2006 年第一版.
- [3]袁志华等. 作物茎秆抗倒伏的力学分析及综合评价探讨[J]. 农业工程学报. 第 18 卷 (6) 期. 30—31. 2002.
- [4]袁红梅. 小麦茎秆生物力学性能试验与抗倒伏力学评价分析[D]. 太谷. 山西农业大学 2005 年硕士论文.
- [5]安呈峰. 高产小麦发育后期基部节间与倒伏的关系[D]. 济南. 山东农业大学 2008 年硕士论文.
- [6]冯素伟等. 小麦品种百农矮抗 58 茎秆特性分析[J]. 河南科技学院学报. 第 37 卷 (4) 期. 1-3.
- [7]郭玉明等. 茎秆作物抗倒伏生物力学评价研究及关联分析[J]. 农业工程学报. 第 23 卷 (7) 期. 14-18.
- [8]巨晓棠等. 引起小麦倒伏的因子分析[J]. 土壤通报. 第 31 卷 (3) 期. 134-135.
- [9]姚瑞亮等. 小麦形态性状与倒伏的相关分析[J]. 广西农业大学学报. 1998 年第 17 卷增刊. 16-18.