

目 录

1. 问题的重述与分析	2
2. 模型假设.....	2
3. 符号定义.....	3
4. 模型建立与求解.....	3
4.1 圆柱型砂轮加工的法线一致最小偏差模型（问题一）	3
4.1.1 问题的分析.....	3
4.1.2 符号说明.....	5
4.1.3 初级运动方程的建立.....	5
4.1.4 模型建立方案.....	7
4.1.5 模型建立.....	10
4.1.6 加工方案合理性及误差分析.....	17
4.2 轮式砂轮加工的法线一致最小偏差模型（问题二）	19
4.2.1 问题的分析.....	19
4.2.2 符号说明.....	21
4.2.3 初级运动方程的建立.....	21
4.2.4 模型建立方案.....	23
4.2.5 模型的建立.....	23
4.2.6 加工方案合理性及误差分析.....	27
4.3 基于最佳延迟的圆柱型砂轮加工的法线一致最小模型（问题三）	28
4.3.1 问题的分析.....	28
4.3.2 模型的建立.....	28
4.3.3 加工方案合理性及误差分析.....	32
4.3.4 模型比较.....	33
4.4 轮式砂轮加工的斜率一致最小偏差模型（问题四）	33
4.4.1 问题的分析.....	33
4.4.2 符号说明.....	33
4.4.3 模型的建立.....	33
4.4.4 加工方案合理性及误差分析.....	41
4.4.5 模型的比较.....	42
5. 结论与分析.....	42
6. 参考文献.....	42

特殊工件磨削加工的数学建模

1. 问题的重述与分析

某科研单位和工厂研制了一种大型精密内外圆曲线磨床，用来加工具有复杂母线旋转体的特殊工件，如导弹天线罩等，这些工件具有硬度高、尺度大、加工精度高和母线为连续光滑曲线等特点。

本课题的目的是运用数学建模的方法，根据旋转体工件的光滑母线方程 $y = f(x)$ ，给出一个合理的加工方案，在尽可能短的时间内完成磨削，并作加工误差分析。

加工方案指为了完成加工任务的各个步骤（含具体内容）以及相应的数据，包括如何确定加工基准，如何选择加工次序，如何选择砂轮几何尺寸，如何确定三组控制步进电机在各时间段（自主进行时间分段）中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布等。

误差分析主要包括实际加工曲线与理论曲线在整体与局部的误差，误差的来源分析，以及采用什么数学量来表示上述误差，或采取的措施在减少加工误差方面的实际效果等。

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。实践表明相邻两时间段的脉冲频率 f_q 和 f_h （ f_q, f_h 分别指前后时段中的脉冲频率）相差大，是造成工作

台运动的不平稳，加工表面的质量下降的重要原因。可以采取的措施，要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$

（一般取 $\delta \leq 0.10$ ）。

本课题主要解决以下问题：

(1) 加工外表面母线为 $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.045(600 - x), x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件，采用圆柱型砂轮加工，给出一个加工方案；对你的方案作误差分析。

(2) 加工外表面母线为 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin(\frac{1}{100}(x + 25\pi)) + 130, x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件，采用轮式砂轮加工，给出一个加工方案；对你的方案作误差分析；

(3) 在整个加工过程中，若各个瞬时砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点（实际是点的一个邻域），随砂轮旋转形成一个圆周，那么砂轮在该圆周上的磨损会加大，从而影响加工质量。为此，希望在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀，请结合上述第 1 问题，提出一个修整策略，给出一个合理的加工方案，作相应的误差分析。

(4) 请结合上述第 2 问题，提出一个修整策略，给出一个使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案，作相应的误差分析。

2. 模型假设

1) 模型的建立不考虑各组步进电机、变速器，功放伺服机构和精密丝杠-螺母副的各种误差。

2) 认为控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级 (10^{-3} 秒)。

- 3) 三工作台的可移动范围足够大, 能保证被加工工件的加工。
- 4) 本文中所假设的数据符合实际加工参数需求。

3. 符号定义

符号	定义
L_1	下台沿 x 轴方向的位移量
L_2	中台沿 y 轴方向的位移量
L_{3x}, L_{3y}	上台转动 Φ 角度后, 工件母线上某点分别在 x 轴和 y 轴方向上的位移量
L	刀具与工件的切点投影到上台转动轴的距离
ΔL	一个脉冲下丝杠移动距离
$\Delta X, \Delta X_{\max}$	工件在距中心轴 300mm 的 x 轴方向位移、最大位移
ΔY	工件在距中心轴 300mm 的 y 轴方向位移
f	脉冲频率
t, t_{\max}	脉冲发送时间间隔、最少脉冲发送时间间隔
T_{\min}	最短加工时间
Φ_1, Φ_2	下一磨削点切线和下下磨削点切线与现磨削点切线夹角
d_1, d_2	工件转动后某下一磨削点及下下磨削点沿 y 轴方向的改变量
K, K_1, K_2, K_3	分别为母线斜率、现加工点、下一加工点以及下下个加工点的切线斜率
a, b, c	下台、中台、上台电机控制的脉冲个数
B	砂轮纵轴至工件母线的最短距离
f_q, f_h	分别指前、后时段中的脉冲频率
σ	电机脉冲频率变化率
T	调整余量

4. 模型建立与求解

4.1 圆柱型砂轮加工的法线一致最小偏差模型（问题一）

4.1.1 问题的分析

根据赛题要求, 磨床主要由机床底座, 下工作台, 中工作台, 上工作台, 工件工作箱固装在上台上, 它通过专用夹具装夹工件, 使工件绕工件工作箱主轴以较慢的转速旋转, 同时随三个工作台的复合运动改变待加工工件与砂轮的相对位置。三个台的运动必须相互配合, 使工件与砂轮相切磨削, 加工出满足要求的旋转体。其中下, 中台做直线运动, 上台可转动。

根据赛题要求, 本模型采用砂轮与工件母线相切磨削, 磨削点处砂轮轴线与工件母线的法线重合, 且本模型采用的是基于半个脉冲距离对加工偏差进行调整, 因此将本模型命名为法线一致最小偏差模型。

工件加工过程如图 1 所示。

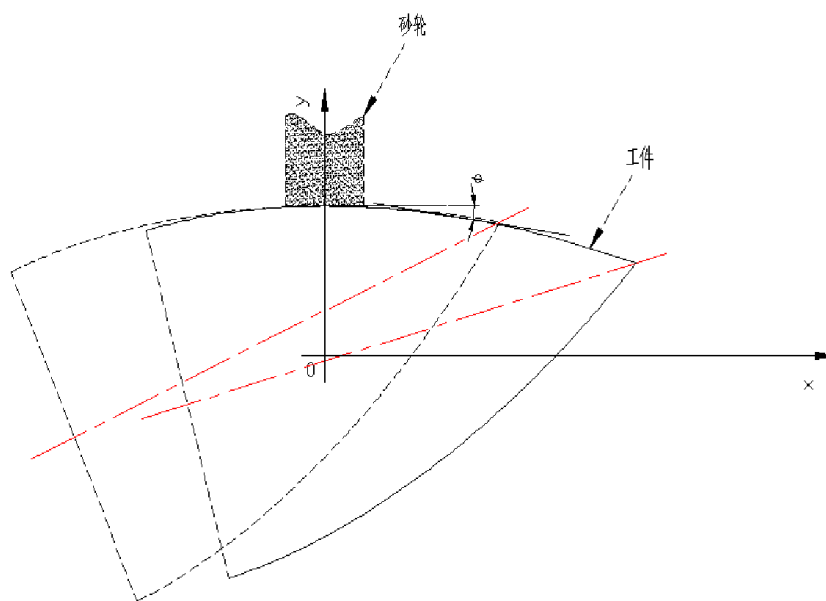


图 1 工件加工示意图

因此对于磨床的移动方式做如下定义：

1、下台朝右移动方向定为横坐标 x 的正方向，中台朝上移动方向定为纵坐标 y 的正方向，坐标原点为砂轮与工件的磨削点，坐标轴不随着工作台的移动而移动，如图 2 所示；

2、下台驱动电机正转带动下台向横坐标 x 的负方向运动，中台驱动电机正转带动下台向纵坐标 y 的正方向运动，上台驱动电机正转带动上台逆时针方向旋转，否则反向运动；

3、电机接收正脉冲则正转，接收负脉冲则反转；

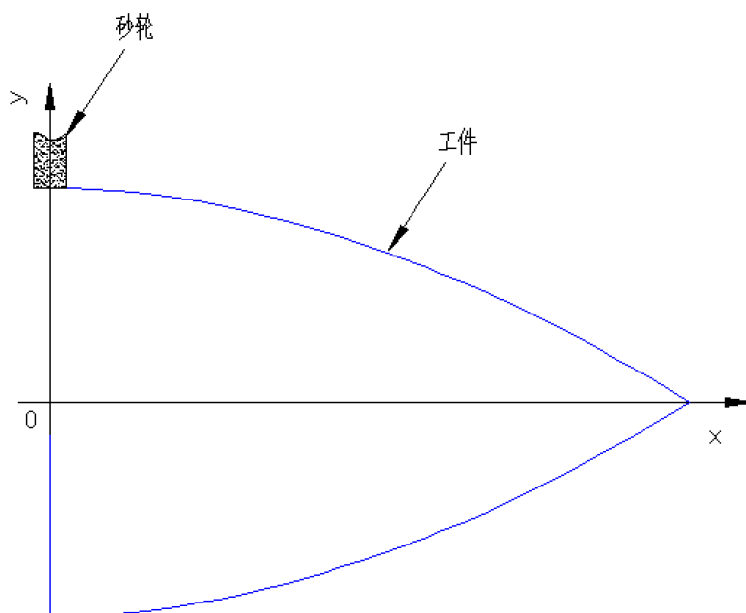


图 2 系统坐标系

4.1.2 符号说明

符号	定义
L_1	下台沿 x 轴方向的位移量
L_2	中台沿 y 轴方向的位移量
L_{3x}, L_{3y}	上台转动 Φ 角度后, 工件母线上某点分别在 x 轴和 y 轴方向上的位移量
L	刀具与工件的切点投影到上台转动轴的距离
ΔL	一个脉冲下丝杠移动距离
$\Delta X, \Delta X_{\max}$	工件在距中心轴 300mm 的 x 轴方向位移、最大位移
ΔY	工件在距中心轴 300mm 的 y 轴方向位移
f	脉冲频率
t, t_{\max}	脉冲发送时间间隔、最少脉冲发送时间间隔
T_{\min}	最短加工时间
Φ_1, Φ_2	下一磨削点切线和下下磨削点切线与现磨削点切线夹角
d_1, d_2	工件转动后某下一磨削点及下下磨削点沿 y 轴方向的改变量
K, K_1, K_2, K_3	分别为母线斜率、现加工点、下一加工点以及下下个加工点的切线斜率
a, b, c	下台、中台、上台电机控制的脉冲个数
T	调整余量

4.1.3 初级运动方程的建立

已知母线方程: $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.045(600 - x), x \in [0, 600]$

分别设计三个工作台在脉冲下的位移量:

i 下台:

由于下台只沿 X 轴方向移动, 因此其在一个脉冲下的位移量为 X 轴的位移, 其位移量为:

$$L_1 = \Delta L \times s_1$$

其中: ΔL —— 一个脉冲下丝杠移动距离;

s_1 —— 下台电机的脉冲个数。

此时工件的函数为:

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x - \Delta L \times s_1)^2 + 0.45(600 - x - \Delta L \times s_1)$$

ii 中台:

由于中台只沿 y 轴方向移动, 因此其在一个脉冲下的位移量为 y 轴的位移, 其位移量为:

$$L_2 = \Delta L \times s_2$$

其中：\$s_2\$——中台电机的脉冲个数。

此时工件的函数为：

$$y - \Delta L \times s_2 = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$$

推出：

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x) + \Delta L \times s_2$$

iii上台：

上台是转动的，在转动的同时，x轴和y轴都产生了位移量。

X轴方向的距离转轴L处位移量：

$$L_{3x} = L - L \cos \Phi = L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}$$

Y轴方向的距离转轴L处位移量：

$$L_{3y} = \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

由于刀具与工件切点在x轴上的投影到上台转动轴的距离为L，因此L值与下台和上台都有关联，L值为

$$L = 250 - L_1 - L_{3x} = 250 - \Delta L \times s_1 - L + \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}$$

此时工件的x轴方向位移量为：

$$L_x = L_1 + L_{3x} = \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}} \quad (1)$$

工件的y轴方向位移量为：

$$L_y = L_2 + L_{3y} = \Delta L \times s_2 + \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3 \quad (2)$$

此时工件的母线函数为：

$$y - L_y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x + L_x)^2 + 0.45(600 - x + L_x) \quad (3)$$

将(1)、(2)代入(3)得：

$$y - \Delta L \times s_2 - \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3 = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}})^2 + 0.45(600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}})$$

整理可得：

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}})^2 + 0.45(600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}) + \Delta L \times s_2 + \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

即原工件在磨削过程中与砂轮的切点运动时母线方程为：

$$y = \frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}})^2 + 0.45 (600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}) + \Delta L \times s_2 + \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

4.1.4 模型建立方案

i) 已知条件的分析:

原题已知条件:

- 1、各组步进电机的步进角度（每输入一个控制脉冲的主轴转动角）均为 1° ;
- 2、对步进电机的控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲;
- 3、各组变速器的传动比为 10:1（即步进电机转 1° ，则变速器输出 0.1° ）; 丝杆的螺距为 12mm;
- 4、中台转轴到上工作台的控制丝杠—螺母副中心线的距离 $R = 300\text{mm}$ ，工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离 $b = 250\text{mm}$;
- 5、为保证表面的加工质量，要求工件每转动 100 转，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4mm;
- 6、工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 250—300 转。

对于原有的条件做如下计算:

- 1、电机接收一个脉冲，丝杠移动距离:

$$\Delta L = \frac{1 \times 12}{10 \times 360} = \frac{1}{300} \text{mm} \approx 0.003333\text{mm}$$

- 2、电机接收一个脉冲，上台转动逆时针角度，其转动形式如下图 3 所示:

$$\Phi = \arctan \frac{1}{300 \times 300} \approx 1.11e-5 \text{ 弧度}$$

此时，工件在距中心轴 300mm 的 x 轴方向位移:

$$\Delta X = \frac{L}{\cos \Phi} - L = L \left(\frac{1}{\cos \Phi} - 1 \right) = 300 \left(\frac{1}{\cos(1.11e-5)} - 1 \right) \approx 1.85e-8 \text{mm}$$

由于工件长度为 600mm，最远端距离转轴中心为 350mm，即:

$$\Delta X_{\max} = -L_{\max} \left(\frac{1}{\cos \Phi} - 1 \right) = -350 \left(\frac{1}{\cos(1.11e-5)} - 1 \right) \approx -2.16e-8 \text{mm}$$

$\Delta X_{\max} \ll \Delta L$ ，因此上台转动一个脉冲角度时，可忽略横坐标的位移。

工件在距中心轴 300mm 的 y 轴方向位移:

$$\Delta Y = \frac{L}{300} \times \Delta L = \frac{300}{300} \times \frac{1}{300} = \frac{1}{300} = 0.003333\text{mm}$$

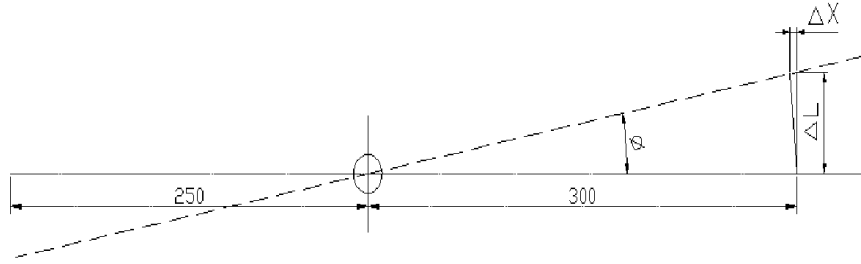


图 3 上台转角示意图

3、工件转速 $n=250\text{—}300\text{r/min}=\frac{25}{6}\text{—}5\text{ r/s}$ ，工件旋转一周所花的时间为 0.2—0.24s

4、工件转 100 转，磨削点在旋转轴向上的移动量不超过 4mm，假设轴处的转速 250r/min，此时可得最短的加工时间：

$$T_{\min} = \frac{100 \times 600}{250 \times 4} = 60 \text{ min}$$

脉冲频率： $f = \frac{600 \times 300}{60 \times 60} = 50$ （个/秒）<100（个/秒）

脉冲发送时间间隔： $t = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ s}$

由题知，电机的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲，即脉冲发送时间间隔最少为：

$$t_{\min} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ s} < 0.02 \text{ s}$$

即工件在旋转轴上以 4mm 的移动量移动时，电机可以满足工作频率的要求。

5、考虑到加工时砂轮与工件母线轮廓相切，而要保证这一工作状况，就必须使上台转动现假设上台转动后的角度与工件母线的切线斜角一致。根据初级运动方程做如下计算。

母线斜率： $K = \frac{\Delta L \times s_3}{300}$ ，母线方程求导代入得：

$$K = \frac{\Delta L \times s_3}{300} = \frac{7}{9 \times 10^3} (600 - x + \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}) - 0.45$$

ii) 加工基准的选择:

由于工件的加工是靠 3 个工作台（下台、中台、上台）运动的相互配合，磨削出工件的外轮廓曲线，在计算 3 个工作台移动或者转动情况时，需要定义一个基准，即以哪个工作台的运动为基准，然后根据工件的轮廓曲线和砂轮的位置计算其余工作台的运动情况。

由于工件与砂轮相切磨削，而砂轮在加工台上的位置固定不变，工件在加工时的情况见图 4。

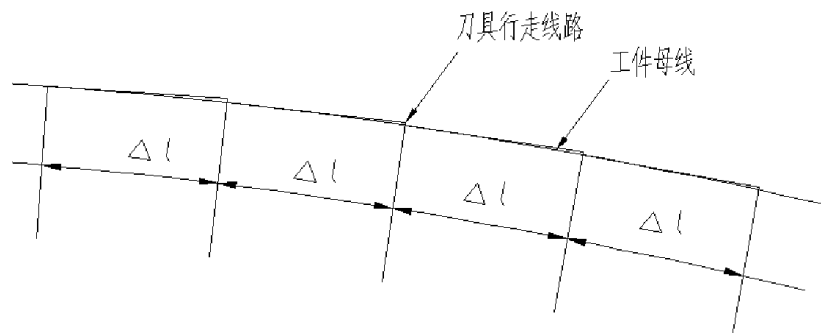


图 4 工件加工示意图

如图 4 所示，如果把工件外表面曲线均分成 N 段等长弧度 Δl 进行加工，则加工出来的工件会有较高质量。从图中可以看出，工件在加工时， Δl 长的弧线与加工台的下台移动 Δx 长度大致相等，即如果工件在加工时，下台的移动量均匀分布，则工件在加工时就可以看成是等弧长加工。因此本文将下工作台定义为基准，且定义下工作台的电机脉冲均匀分布。由于曲线为凸的，因此圆柱型砂轮的尺寸大小会对工件加工的精度影响很小，可以忽略不计，本文以插补法计算时，不考虑砂轮的影响。

iii) 加工次序的确定:

- 以下台每 0.02s 给一个脉冲信号，匀速进给。
- 计算上台的转动角 θ ，计算电机脉冲数。
- 移动中台，计算其电机脉冲数。

iv) 砂轮尺寸的选择:

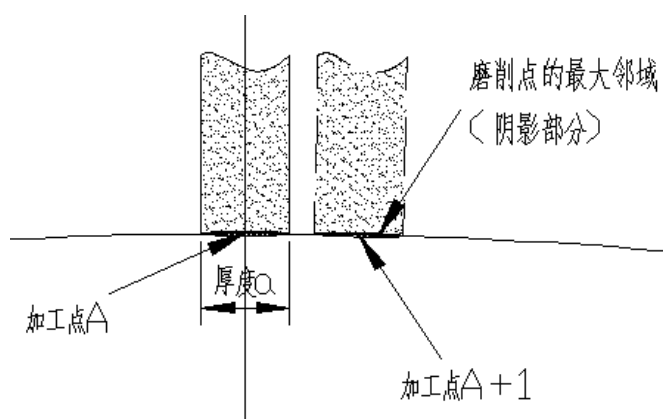


图 5 砂轮磨削邻域图

如图 5 所示，由于磨床是采用步进电机控制，因此工件上两个相邻磨削点的弧线段，靠砂轮磨削点的邻域磨削。为保证工件每一处都加工到位，砂轮的厚度必须至少大于步进电机步进长度，即 $a > \frac{1}{300} \text{ mm}$ 。

由于该工件母线为凸的，因此采用圆柱型砂轮对其进行加工时，砂轮直径 φ 和砂轮厚度 a 对工件加工没有影响，因此砂轮的尺寸可以自行定义，本课题定义的圆柱型砂轮直径 $\varphi = 80 \text{ mm}$ 和砂轮厚度 $a = 15 \text{ mm}$ 。

v) 三组控制步进电机在各时间段中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布

本文定义下台的移动为基准，即下台电机接收一个脉冲产生位移时，工件的加工点移动 ΔL 距离，此时求解出上台应转过的角度 $d\theta$ ，如果这一角度大于上台电机一个脉冲带动旋转的角度 $\Delta\theta$ 时，则给上台电机施加一个脉冲，否则这一角度就累积到下一次，直到角度大于上台电机带动旋转的最小角度 $\Delta\theta$ 。然后根据上台转动的角度 θ ，即上台电机带动工件转动引起的纵向位移 Δy ，计算此时工件的母线 y 值相对于上一加工点位置的差值 Δ ，比较 $\Delta - \Delta y$ 的大小是否小于中台电机带动中台移动的最小距离 dy ，如果大于的话，则给中台电机施加脉冲，否则不施加脉冲。

4.1.5 模型建立

据原母线方程：

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.045(600 - x), x \in [0, 600]$$

运用 Matlab 软件建立母线方程，得出的工件形状如图 6 所示，其函数的二阶导数小于零，此母线为凸的。

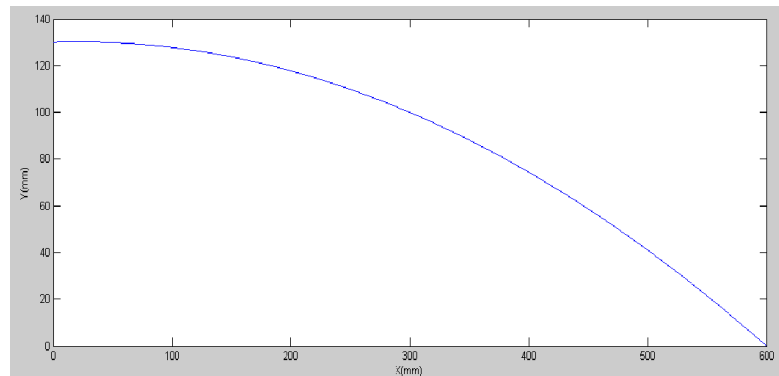


图 6 工件 1 的母线外轮廓

本题采用插补算法控制电机的运动，进而产生工件轮廓。

a. 插补法原理：

以直线为例，简述插补法原理如下：

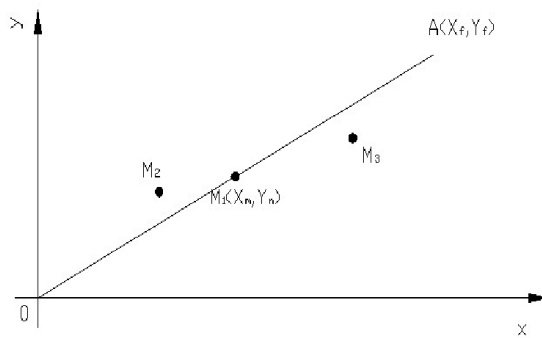


图 7 直线插补图

数控机床在加工直线轮廓时，逐点比较插补法都以直线的起点为原点建立加工时的相对坐标系。以 $X-Y$ 平面第一象限的直线为例，起点为坐标原点 O ，终点坐标为 $A(X_f, Y_f)$ ， $M(X_m, Y_m)$ 为加工时的动点，如图 7 所示，存在三种情况：

(1) M 点在直线上，如 M_1 点，有：

$$\frac{Y_m}{X_m} = \frac{Y_f}{X_f}, \text{ 即 } X_f Y_m - X_m Y_f = 0$$

(2) M 点在直线上方，如 M_2 点，有：

$$\frac{Y_m}{X_m} > \frac{Y_f}{X_f}, \text{ 即 } X_f Y_m - X_m Y_f > 0$$

(3) M 点在直线下方，如 M_3 点，有：

$$\frac{Y_m}{X_m} < \frac{Y_f}{X_f}, \text{ 即 } X_f Y_m - X_m Y_f < 0$$

定义 $F_{m,n} = X_f Y_n - X_m Y_f$ 为偏差函数，则有：

(1) 当 $F_{m,n} \geq 0$ 时，加工动点位于直线上方或直线上， $+X$ 方向进给一个脉冲当量；

(2) 当 $F_{m,n} < 0$ 时，加工动点位于直线下方， $+Y$ 方向进给一个脉冲当量。

上述插补运算方法中，由于插补过程中每走一步要进行一次新的偏差运算，即求 $F_{m,n}$ ，故造成坐标轴进给有停顿，且每次求 F 时，要作乘法和减法运算，而这在使用硬件或汇编语言软件实现时不太方便，还会增加运算时间，实际使用时常采用偏差计算递推式来进行：

(1) 当 $F_{m,n} \geq 0$ ， $+X$ 方向进给一个脉冲当量，形成新的坐标点 $M_{m+1,n}$ ，则新点的偏差函数为：

$$F_{m+1,n} = X_f Y_n - X_{m+1} Y_f = X_f Y_n - (X_m + 1) Y_f = F_{m,n} - Y_f$$

(2) 当 $F_{m,n} < 0$ ， $+Y$ 方向进给一个脉冲当量，形成新的坐标点 $M_{m,n+1}$ ，则新点的偏差函数为：

$$F_{m,n+1} = X_f Y_{n+1} - X_m Y_f = X_f (Y_n + 1) - X_m Y_f = F_{m,n} + X_f$$

偏差计算递推公式的出发点就是根据当前点的偏差值推算出下一点的偏差值，当运动到该点时，就能立即作出下一步的走向，使坐标进给保持连续。同时，偏差递推式只有加减运算，便于硬件或软件实现，且加减的运算时间短。

上述直线偏差的方法也可以运用到本题的曲线加工过程中，如下示意图 8 表示：

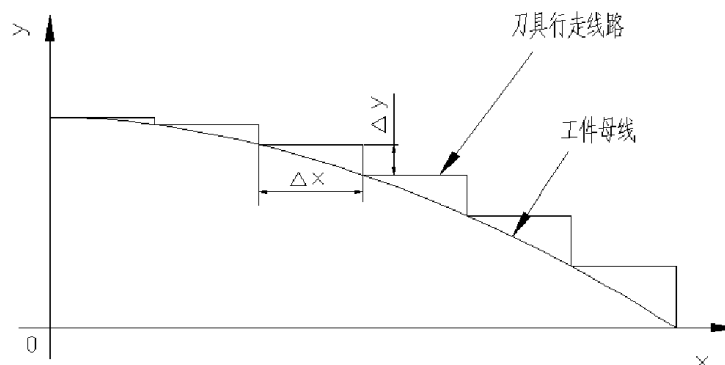


图 8 插补法加工工件走势图

b. 模型建立:

基本思路如下:

采用离散数据点求解, 即工作台电机接收一个脉冲产生运动就计算判断一次。

具体操作方法如图 9 所示。

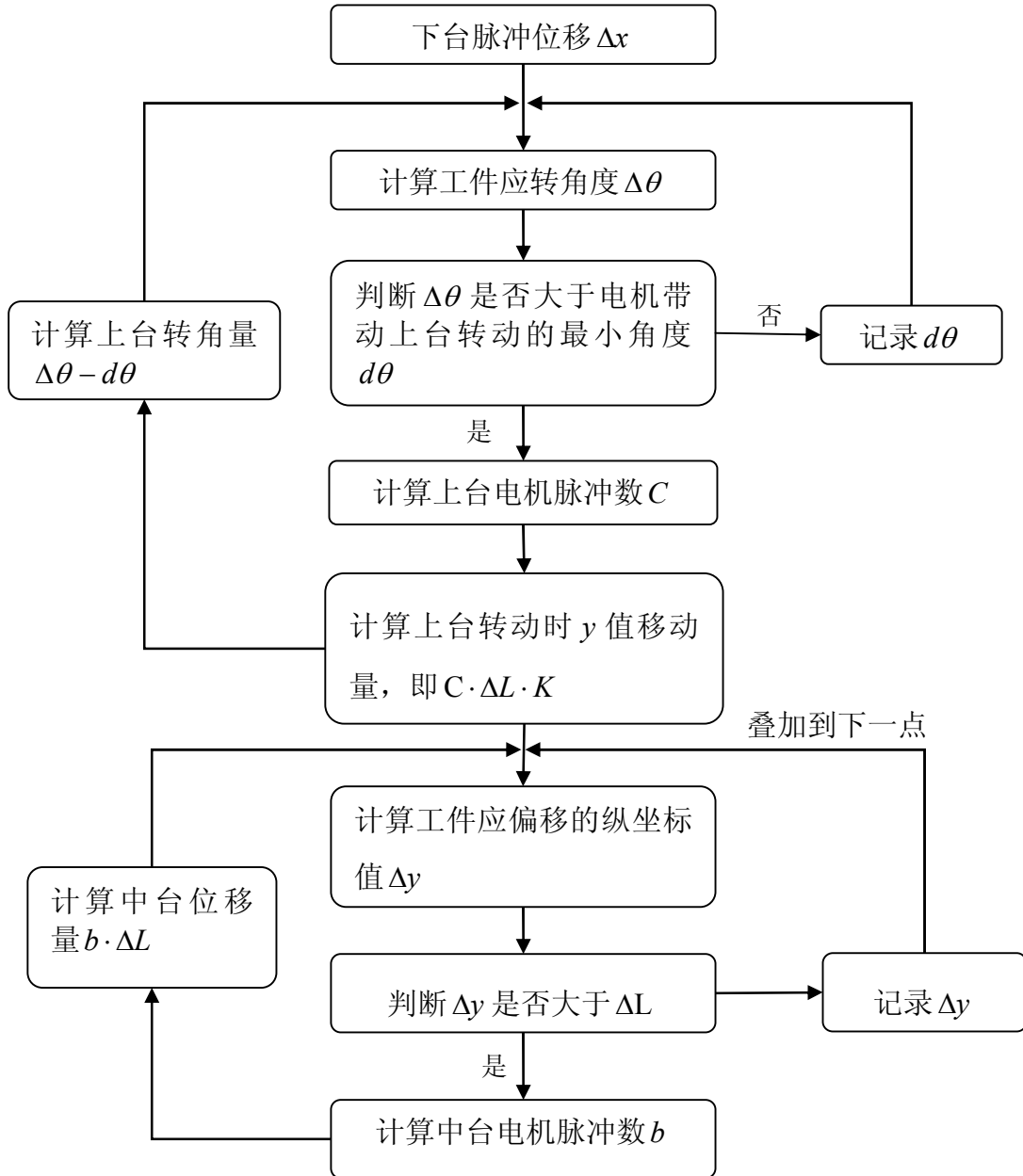


图 9 模型拟合步骤图

程序说明:

1. 定义下工作台以最快的移动速度移动, 即给下台电机最大频率的脉冲, 下台电机脉冲均匀分布, 得到每个脉冲下加工点的横坐标值 X_s ;

由电机的一个控制脉冲下台移动 $\frac{1}{300}mm$, 工件的长度 600mm, 计算可得下台电机

的控制脉冲数 $S = \frac{600}{1/300} = 180000$ (个)。

2. 根据工件母线公式，计算出 X_s 对应的工件母线纵坐标值 Y_s 及其斜率 dy_s ；

3. 定义在加工点 a 处，工件母线横坐标为 X_a ，工件母线纵坐标为 Y_a ，切线斜率为 dy_a ，在上一个加工点 $a-1$ 处，工件母线纵坐标为 Y_{a-1} ，切线斜率为 dy_{a-1} ；

4. 首先判断上工作台是否转动，即控制上工作台电机的控制脉冲，计算上台电机的控制脉冲数 c ；

由于上控制台的转动是为了确保工件与砂轮相切磨削，且砂轮静止不动，砂轮的轴线与系统横坐标轴平行，因此控制上工作台的转动就是确保工件母线加工点处的切线与横坐标轴平行，如图 1 所示。

工件是逐点加工，工件加工点的切线与横坐标轴平行，此时工件的下一个加工点的切线与现加工点的切线夹角，即为工件加工下一个点时上工作台要考虑转过的角度，如图 10 所示。

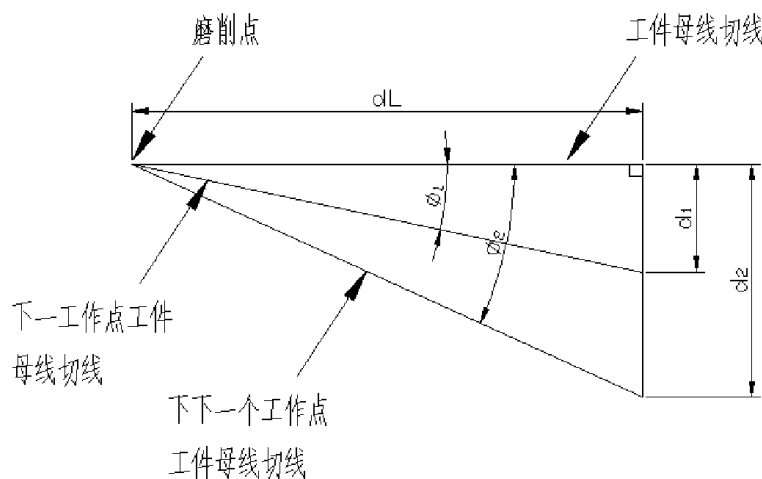


图 10 工件加工旋转角度示意图

上图中： Φ_1 ， Φ_2 分别为下一磨削点切线和下下磨削点切线与现磨削点切线夹角， d_1 ， d_2 为工件转动后纵坐标值的改变量。

由图中可知 $\tan \Phi_1 = \frac{d_1}{dL} = K_1 - K_0$ ， $\tan \Phi_2 = \frac{d_2}{dL} = K_2 - K_0$ ， K_0 为现加工点的切线斜率， K_1 为下一加工点的切线斜率， K_2 为下下个加工点的切线斜率。

此时，电机带动上台转动情况如下图 11 所示。

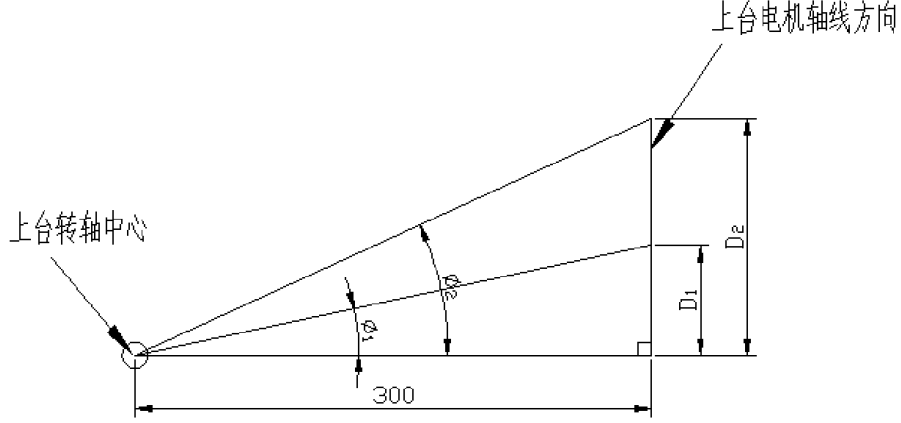


图 11 电机带动上台转动示意图

上图中： D_1 ， D_2 为上台电机控制脉冲产生的移动距离。

$$\text{由图可得 } \tan \Phi_1 = \frac{D_1}{300}, \quad \tan \Phi_2 = \frac{D_2}{300}$$

$$\text{又 } \tan \Phi_1 = \frac{d_1}{dL} = K_1 - K_0, \quad \tan \Phi_2 = \frac{d_2}{dL} = K_2 - K_0$$

$$\text{因此 } \frac{D_1}{300} = \frac{d_1}{dL} = K_1 - K_0, \quad \frac{D_2}{300} = \frac{d_2}{dL} = K_2 - K_0$$

$$D_1 = (K_1 - K_0) \times 300$$

$$D_2 - D_1 = (K_2 - K_1) \times 300$$

$D_2 - D_1$ 为工件从下个磨削点加工到下下个磨削点时，由于上台转动所产生的电机轴线方向的位移。

由上式可知，工件从一个磨削点加工到下一个磨削点时，上台电机控制脉冲应该产生的移动距离与相邻两个磨削点的斜率差值成正比。本模型以这一现象为基础，计算上台转动时电机应该施加的控制脉冲数。

根据加工点 a 处，工件母线纵坐标为 Y_a ，切线斜率为 dy_a ，在上一个加工点 $a-1$ 处，工件母线纵坐标为 Y_{a-1} ，切线斜率为 dy_{a-1} ，可计算得加工点 a 处，上台电机轴线处产生的位移 $D_a = (dy_a - dy_{a-1}) \times 300$ 。

比较 D_a 的值是否大于一个电机控制脉冲产生的位移 $\frac{1}{300} \text{ mm}$ ，如果大于，则给电

机施加控制脉冲，控制脉冲数 $c = \left\lceil \frac{D_a}{1/300} \right\rceil$ ，记录该点的调整余量 $T = dy_a - n \times \frac{1}{300}$ ，

否则，不给电机施加脉冲，记录下未调整量 $T = D_a$ ，在计算下一个磨削点电机轴线处的位移量 D_{a+1} 时再将调整量 T 替代 dy_{a-1} ，再进行下一工作点的迭代计算。

5. 判断中台是否移动，计算中台的电机控制脉冲数 b ；

由于上台的转动会导致工件母线的纵坐标值在系统坐标中产生移动，横坐标值的变动忽略不计。因此在计算工件纵向移动量时，要减去上台转动引起的位移量。

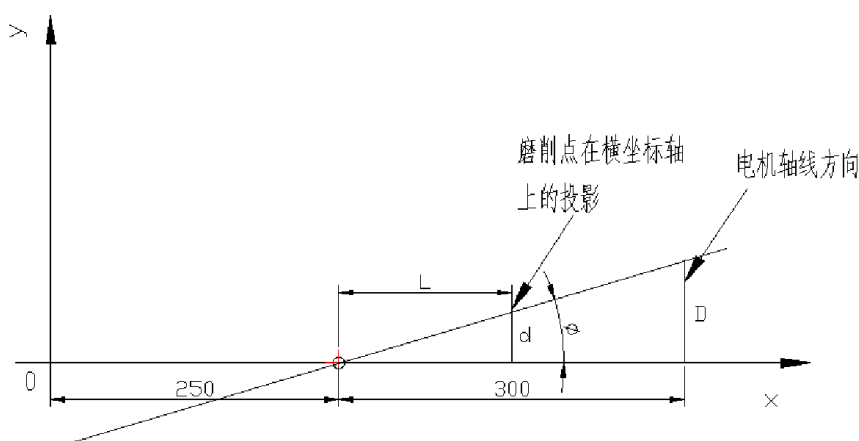


图 12 上台转动引起加工点纵坐标值改变示意图

上图为上台转动引起的加工点纵坐标值改变量，图中 L 为加工点横坐标值与上台转轴的距离， D 为上台电机控制脉冲产生的位移量。

由图可知加工点 a 处与上台转轴的距离 $L = X_a - 250$ ，上台转动引起的纵坐标值变化量 $d = \frac{X_a - 250}{300} \times D$ ，计算工件纵坐标方向的位移 $DY_a = Y_a - Y_{a-1} - d$ 。

判断 DY_a 的值是否大于一个电机控制脉冲产生的位移 $\frac{1}{300}mm$ ，如果大于，则给电机施加控制脉冲，控制脉冲数 $b = \left\lceil \frac{DY_a}{1/300} \right\rceil$ ，记录该点的调整余量 $T = Y_a - n \times \frac{1}{300}$ ，否则，不给电机施加脉冲，记录下未调整量 $T = DY_a$ ，在计算下一个磨削点电机轴线处的位移量 DY_{a+1} 时再将调整量 T 替代 Y_{a-1} ，再进行下一工作点的迭代计算。

6. 根据计算得到的中台电机脉冲数 b ，上台电机脉冲数 c ，可计算得下台移动一个脉冲距离，工件加工点 a 的纵坐标值 $Yg_a = Yg_{a-1} - \frac{b}{300} - \frac{c}{300} \times \frac{X_a - 250}{300}$ ，通过不断地迭代计算，可得出工件的每个加工点的坐标值，即得到了工件的加工曲线。

c. 拟合结果:

根据本文的计算方法，编程计算得到结果如下图：

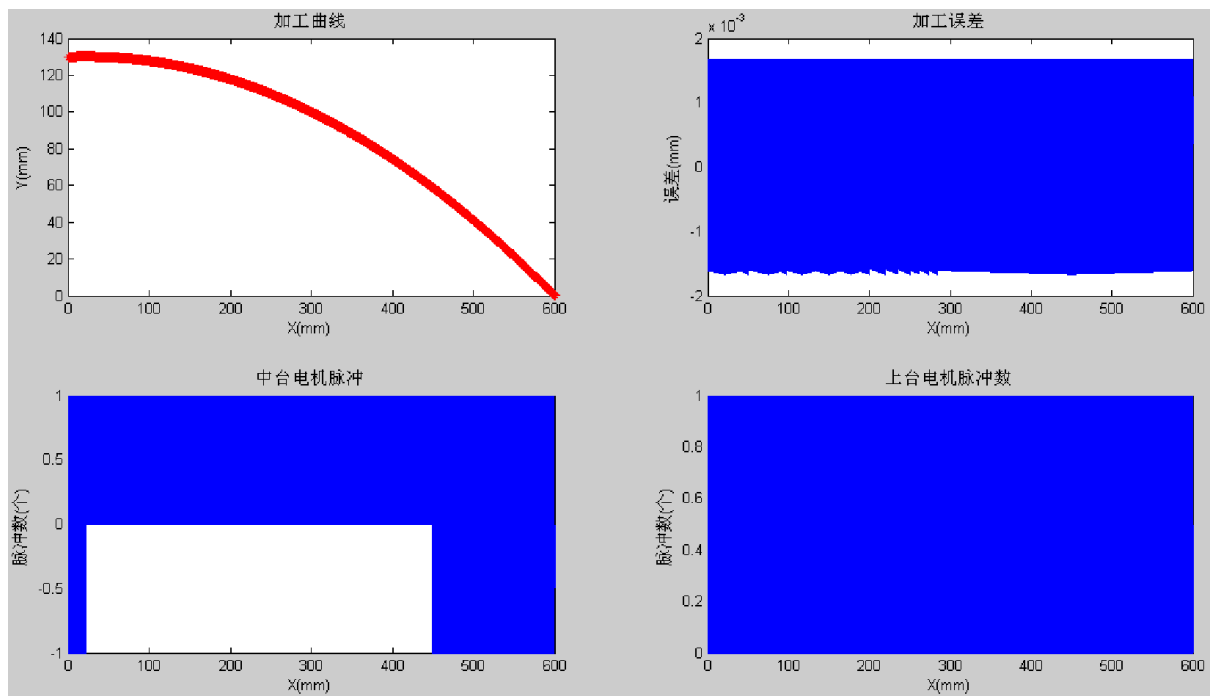


图 13 加工曲线、误差及电机脉冲分布图

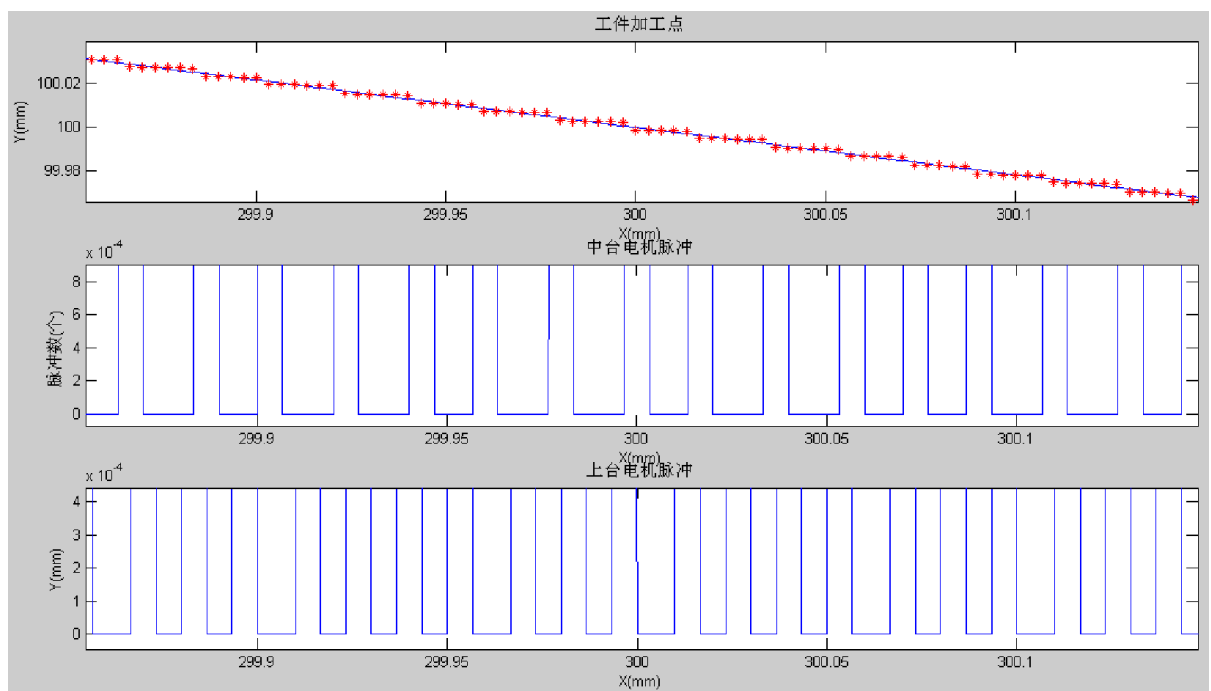


图 14 工件加工点与其对应的电机脉冲分布局部视图

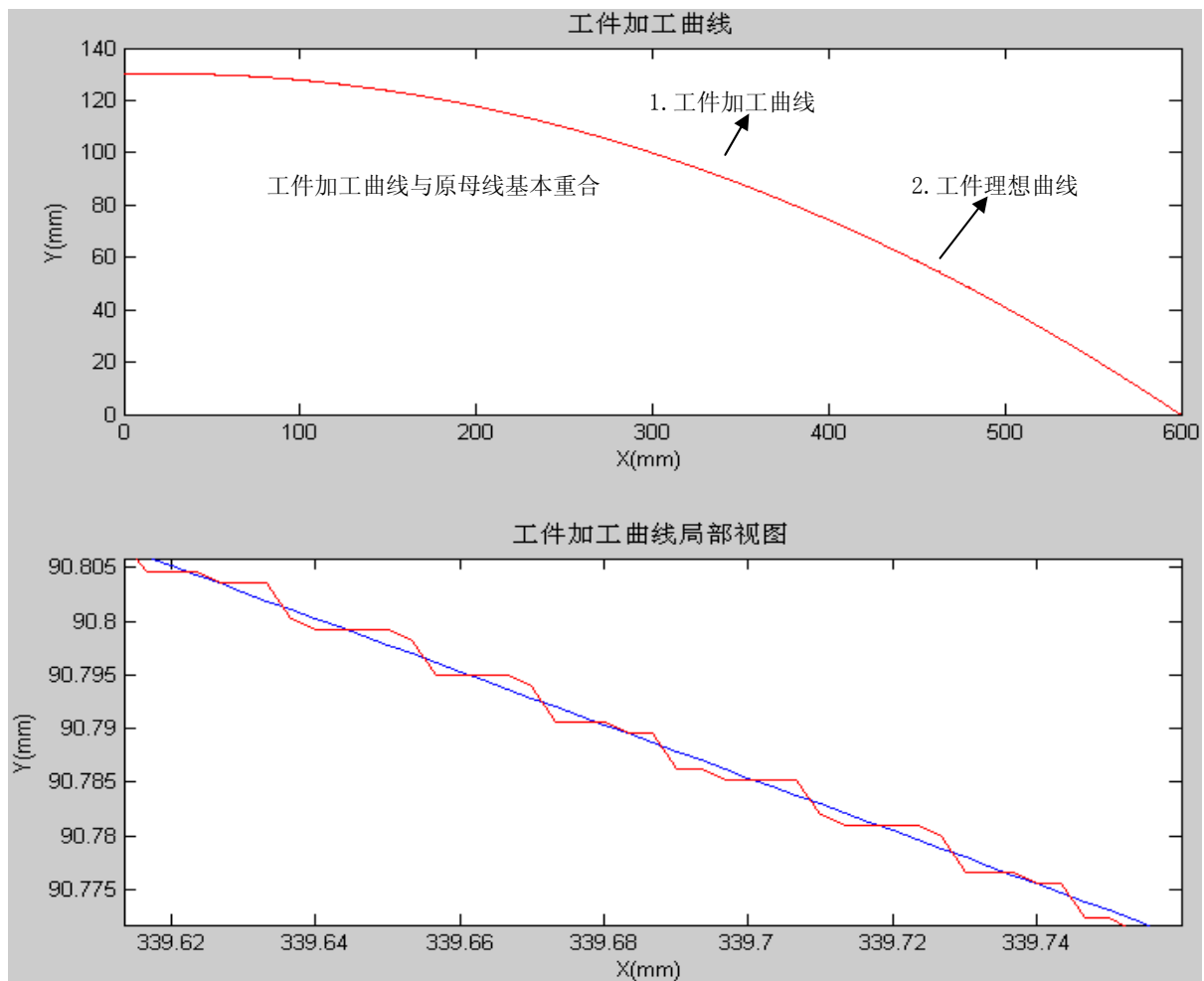


图 15 加工曲线与理想工件母线对比图

结果如下：

如图 13、14、15 所示，采用离散数据点求解法通过迭代所模拟的曲线与原曲线几乎完全重叠，通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为 152.4395 mm ，整体平均误差为 $8.4688 \times 10^{-4} \text{ mm}$ ，局部最大误差为 0.0017 mm 。

4.1.6 加工方案合理性及误差分析

a) 加工方案合理性：

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。实践表明相邻两时间段的脉冲频率 f_q 和 f_h (f_q, f_h 分别指前后时段中的脉冲频率) 相差大，是造成工作台运动的不平稳，加工表面的质量下降的重要原因。可以采取的措施，要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$

(一般取 $\delta \leq 0.10$)。

由于本方案中下台的电机控制脉冲在时间轴上是均匀分布的，因此下台电机脉冲频率变化率：

$$\sigma_1 = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = 0 < 0.10;$$

中台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_{2\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|1437 - 1469|}{1437} \approx 0.0223 < 0.10;$$

上台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_{3\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|686 - 700|}{700} \approx 0.0204 < 0.10$$

因此该加工方案是合理的。

b) 误差分析:

通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为152.4395 mm，整体平均绝对误差为 8.4688×10^{-4} mm，局部最大绝对误差为 1.7×10^{-3} mm。具体分析如下：

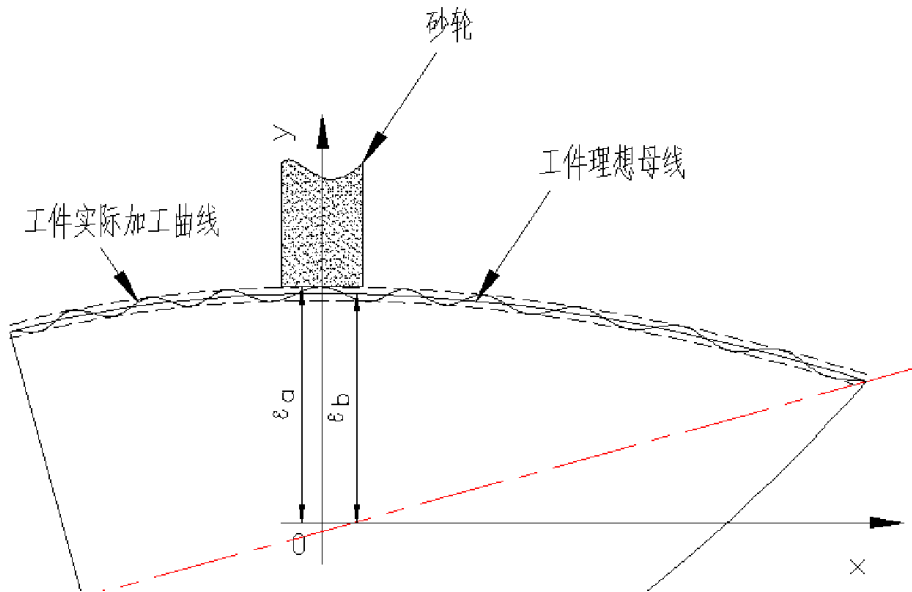


图 16 工件实际加工曲线误差示意图

图 16 为工件实际加工曲线误差示意图，在此模型中误差的来源是：此模型采用的是步进法磨削，每给一个脉冲步进一次，而每次步进的步长相等，因此砂轮不可能和工件完全贴合，故产生的误差为系统误差。

计算结果如下：

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{b1}| \\ \Delta_2 &= |\varepsilon_{a2} - \varepsilon_{b2}| \\ &\dots\dots \\ \Delta_n &= |\varepsilon_{an} - \varepsilon_{bn}| \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n &= 152.4395mm \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_n}{n} = 0.4688 \times 10^{-4} mm$$

$$\max \Delta_i = 0.0017 mm$$

在加工过程中，这类系统误差已经小于微米级，就工件加工本身而言，其影响可以忽略不计。

4.2 轮式砂轮加工的法线一致最小偏差模型（问题二）

4.2.1 问题的分析

母线方程： $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin(\frac{1}{100}(x + 25\pi)) + 130, x \in [0, 600]$ ，用 Matlab7.4 拟合，得如下工件母线：

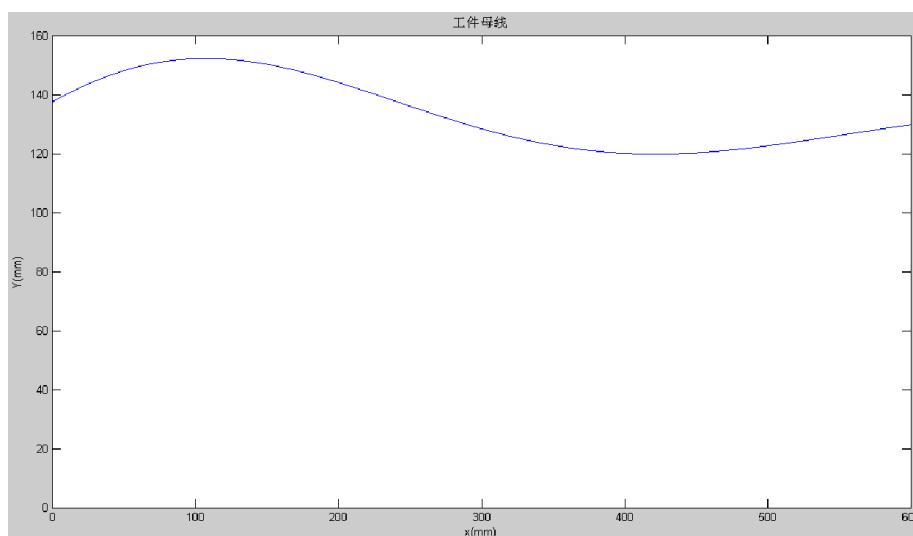


图 17 工件母线图

本模型采用的是法线一致最小偏差的加工方法，建立了轮式砂轮加工的法线一致最小偏差模型。

模型中砂轮的运动方式与上个模型相同，不同点在于凹曲线需要重点考虑曲率半径和砂轮半径的关系，砂轮厚度及半径大小是建立此模型的关键。原因如下所述：

由题已知，采用轮式砂轮磨削，砂轮的外轮廓如下图 18 所示：

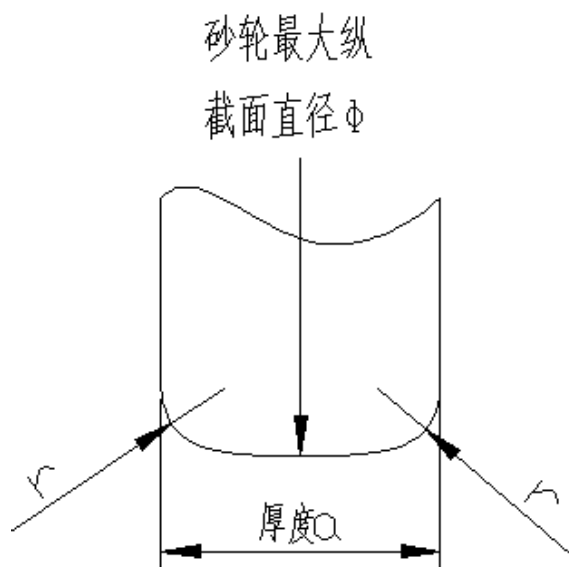


图 18 轮式砂轮图

图 2 中， φ 为砂轮最大纵截面直径， a 为砂轮厚度，半径 r 为边倒圆角半径。

由于工件母线有凹的部分，选用尺寸不当的轮式砂轮磨削工件母线下凹的部分时，可能会导致工件母线的部分下凹处磨削不到，如图 19 所示：

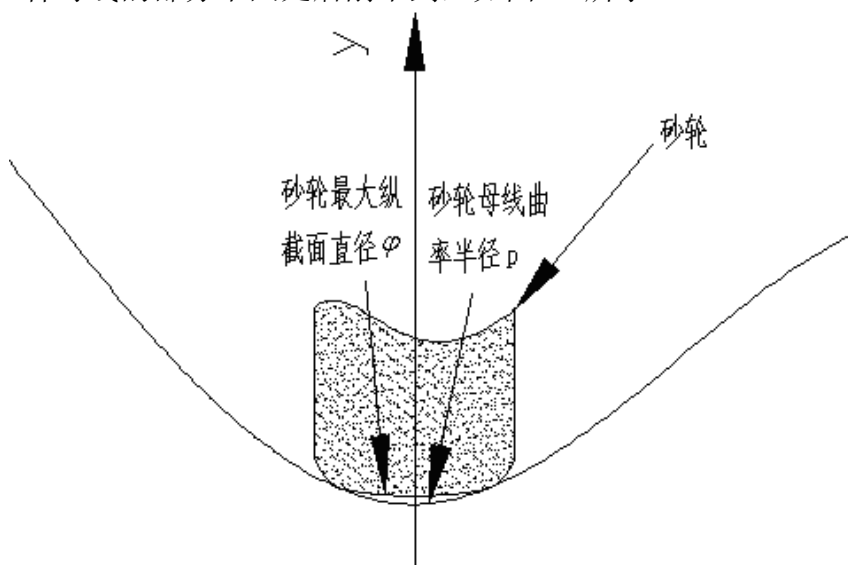


图 19 尺寸不当的砂轮加工工件示意图

从上图中可看出，轮式砂轮最大纵截面直径 φ 大于砂轮母线曲率半径 ρ 的一半时，即砂轮加工不到工件母线曲率 $\rho < \frac{\varphi}{2}$ 处，因此如果要加工出工件母线，砂轮最大纵截面的直径 $\varphi < 2 \times \rho$ 。

4.2.2 符号说明

符号	定义
φ	砂轮最大纵截面直径
a	砂轮厚度
ρ	砂轮母线曲率半径
r	边倒圆角半径
L_1	下台沿 x 轴方向的位移量
L_2	中台沿 y 轴方向的位移量
L_{3x}, L_{3y}	上台转动 Φ 角度后, 工件母线上某点分别在 x 轴和 y 轴方向上的位移量
L	刀具与工件的切点投影到上台转动轴的距离
ΔL	一个脉冲下丝杠移动距离
B	砂轮纵轴至工件母线的最短距离
f_q, f_h	分别指前、后时段中的脉冲频率
σ	电机脉冲频率变化率

4.2.3 初级运动方程的建立

已知母线方程: $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin(\frac{1}{100}(x + 25\pi)) + 130, x \in [0, 600]$, 分别设计三个工作台在脉冲下的位移量:

i 下台:

由于下台只沿 X 轴方向移动, 因此其在一个脉冲下的位移量为 X 轴的位移, 其位移量为:

$$L_1 = \Delta L \times s_1$$

其中: ΔL —— 一个脉冲下丝杠移动距离;

s_1 —— 下台电机的脉冲个数。

此时工件的函数为:

$$y = 30e^{-\frac{x + \Delta L \times s_1}{400}} \sin(\frac{1}{100}(x + \Delta L \times s_1 + 25\pi)) + 130$$

ii 中台:

由于中台只沿 y 轴方向移动, 因此其在一个脉冲下的位移量为 y 轴的位移, 其位移量为:

$$L_2 = \Delta L \times s_2$$

其中: s_2 —— 中台电机的脉冲个数。

此时工件的函数为:

$$y - \Delta L \times s_2 = 30 e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$$

推出：

$$y = 30 e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130 + \Delta L \times s_2$$

iii上台：

上台是转动的，在转动的同时，x轴和y轴都产生了位移量。
X轴方向的距离转轴L处位移量：

$$L_{3x} = L - L \cos \Phi = L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}$$

Y轴方向的距离转轴L处位移量：

$$L_{3y} = \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

由于刀具与工件切点在x轴上的投影到上台转动轴的距离为L，因此L值与下台和上台都有关联，L值为：

$$L = 250 - L_1 - L_{3x} = 250 - \Delta L \times s_1 - L + \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}}$$

此时工件的x轴方向位移量为：

$$L_x = L_1 + L_{3x} = \Delta L \times s_1 + L - \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L \times s_3)^2}} \quad (1)$$

工件的y轴方向位移量为：

$$L_y = L_2 + L_{3y} = \Delta L \times s_2 + \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3 \quad (2)$$

此时工件的母线函数为：

$$y - L_y = 30 e^{-\frac{x-L_x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x - L_x + 25\pi)\right) + 130 \quad (3)$$

将(1)、(2)代入(3)得：

$$y - \Delta L \times s_2 \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

$$= 30e^{-\frac{x - \Delta L \times s_1 - L \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L + s_3)^2}}}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}\left(x - \Delta L \times s_1 - L \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L + s_3)^2}} + 25\pi\right)\right) + 130$$

整理可得：

$$y = 30e^{-\frac{x - \Delta L \times s_1 - L \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L + s_3)^2}}}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}\left(x - \Delta L \times s_1 - L \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L + s_3)^2}} + 25\pi\right)\right) + 130$$

$$+ \Delta L \times s_2 \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

即原工件在磨削过程中与砂轮的切点运动时母线方程为：

$$y = 30e^{-\frac{x - \Delta L \times s_1 - L \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L + s_3)^2}}}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}\left(x - \Delta L \times s_1 - L \frac{L^2}{\sqrt{L^2 + (\Delta L + s_3)^2}} + 25\pi\right)\right) + 130$$

$$+ \Delta L \times s_2 \frac{L}{300} \times \Delta L \times s_3$$

4.2.4 模型建立方案

加工基准的选择，加工次序的确定，三组控制步进电机在各时间段中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布等问题都与上述模型一（4.1.4）的假设相同。

此方案中除了考虑模型一所有的因素外，需要特别注意砂轮尺寸的选择，选用尺寸不当的轮式砂轮磨削工件母线下凹的部分时，可能会导致工件母线的部分下凹处磨削不到。此问题已在本节的问题分析中做详细阐述。

4.2.5 模型的建立

a. 约束条件的确定

为避免上述问题，建立模型前需确定砂轮的厚度，纵截面直径，倒圆角半径，确保加工过程中不会出现干涉或加工不到的现象。具体分析如下：

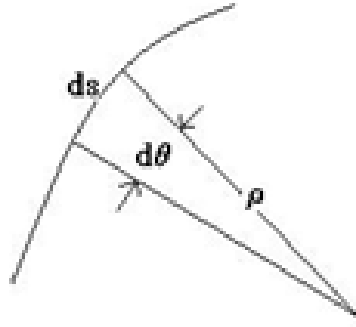


图 20 曲线曲率图

由上图可知，曲线曲率半径 $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ ，根据工件母线图可知在 $[200, 500]$ 的范围内会出现砂轮加工不到的点，用 Matlab 编程，计算得工件母线的最大曲率半径 $\rho = 722.658\text{mm}$ ，即轮式砂轮最大纵截面直径 $\varphi < 2 \times \rho = 1445.316\text{mm}$ ，且其边倒圆角半径 $r < 2 \times \rho = 1445.316\text{mm}$ 。

与模型一相同，砂轮磨削点的邻域要大于工作台的步进长度，即 $a - 2 \times r > \frac{1}{300}\text{mm}$ 。

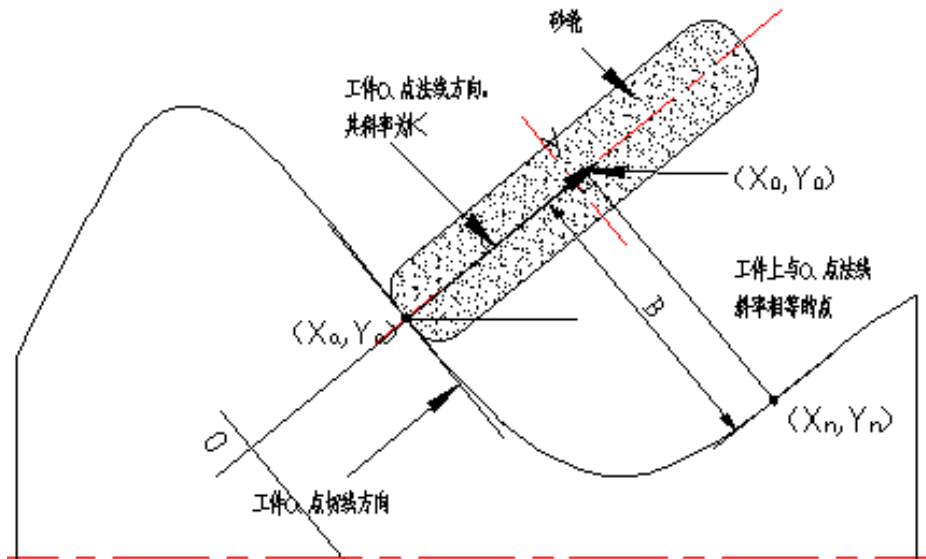


图 21 砂轮磨削工件示意图

图 21 中，点 a 为磨削点，其坐标为 (X_a, Y_a) ，设其法线的斜率为 K ，点 n 为工件母线上斜率等于 K 的点，其坐标为 (X_n, Y_n) ，点 (X_0, Y_0) 为 a 点和 n 点的法线相交点，长度 B 即为砂轮纵轴至工件母线的最短距离。

长度 B 的求解公式如下：

$$\begin{cases} \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a} = K \\ \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = K(x_0 - x_a) + y_a \\ y_0 = y_n - \frac{1}{K}(x_n - x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{K}{K^2 - 1}(y_n - y_a - \frac{1}{K}x_n + Kx_a) \\ y_0 = \frac{K}{K^2 - 1}\left[y_n - y_a - \frac{1}{K}(x_n - x_a)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

通过 Matlab7.4 编程迭代计算得到长度 B 的最小值 $B_{\min} = 272.0566mm$ ，即砂轮的厚度 $a < 2 \times B_{\min} = 544.1132mm$ 。

综上所述，本课题中轮式砂轮的约束条件如下：

$$\begin{cases} \varphi < 1445.316mm \\ r < 1445.316mm \\ a - 2 \times r > \frac{1}{300}mm \\ a < 544.1132mm \end{cases}$$

由于工件母线是非单调凸的，砂轮如果厚度太大，则在磨削工件时可能会与工件其它部位发生干涉。

根据约束条件，本课题定义轮式砂轮厚度 $a = 15mm$ ，最大纵截面直径 $\varphi = 1000mm$ ，倒圆角半径 $r = 1.5mm$ 。

b. 拟合结果

运用与模型一相同的迭代思路。

根据本课题的计算方法，编程计算得到结果如下图：

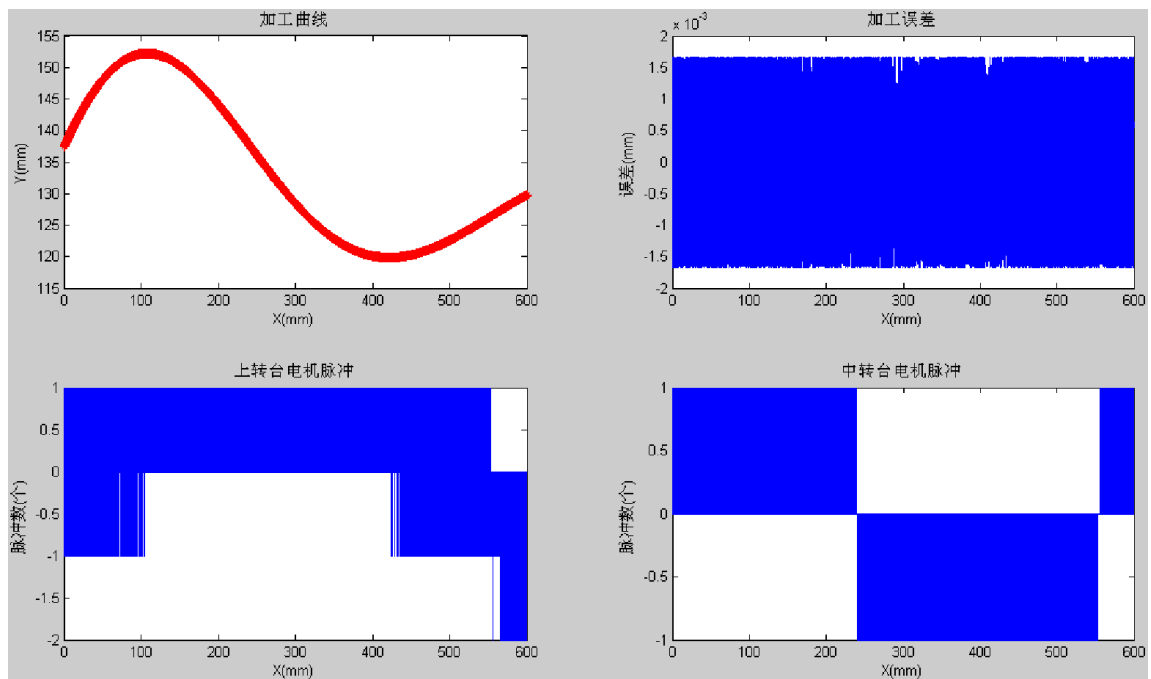


图 22 加工曲线、误差及电机脉冲分布图

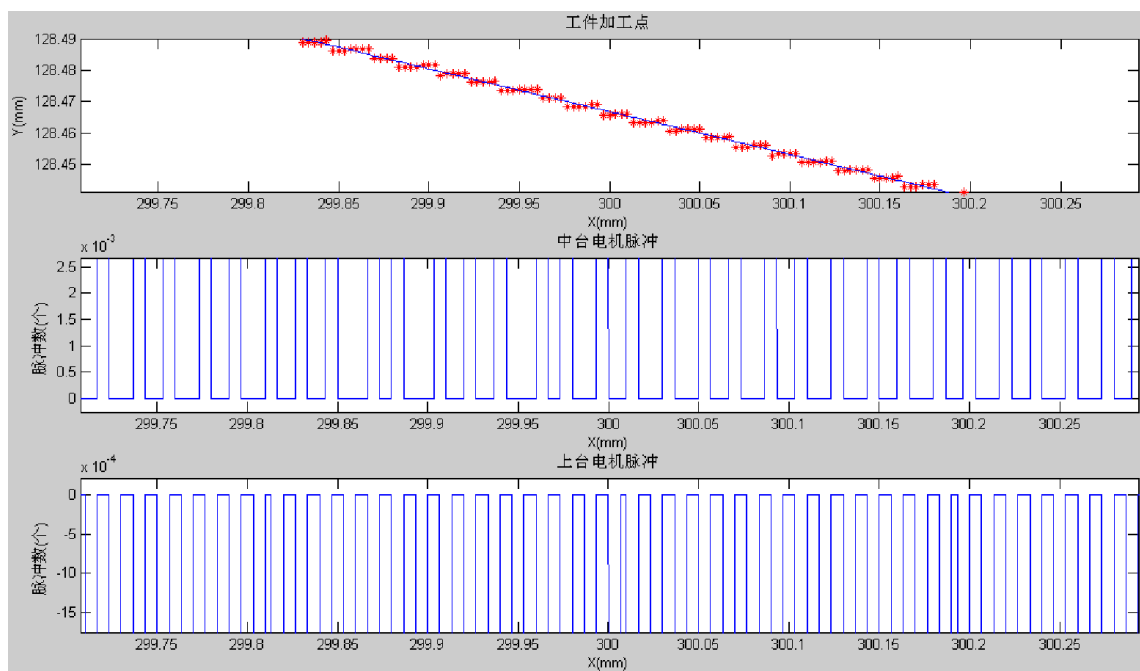


图 23 工件加工点与其对应的电机脉冲分布局部视图

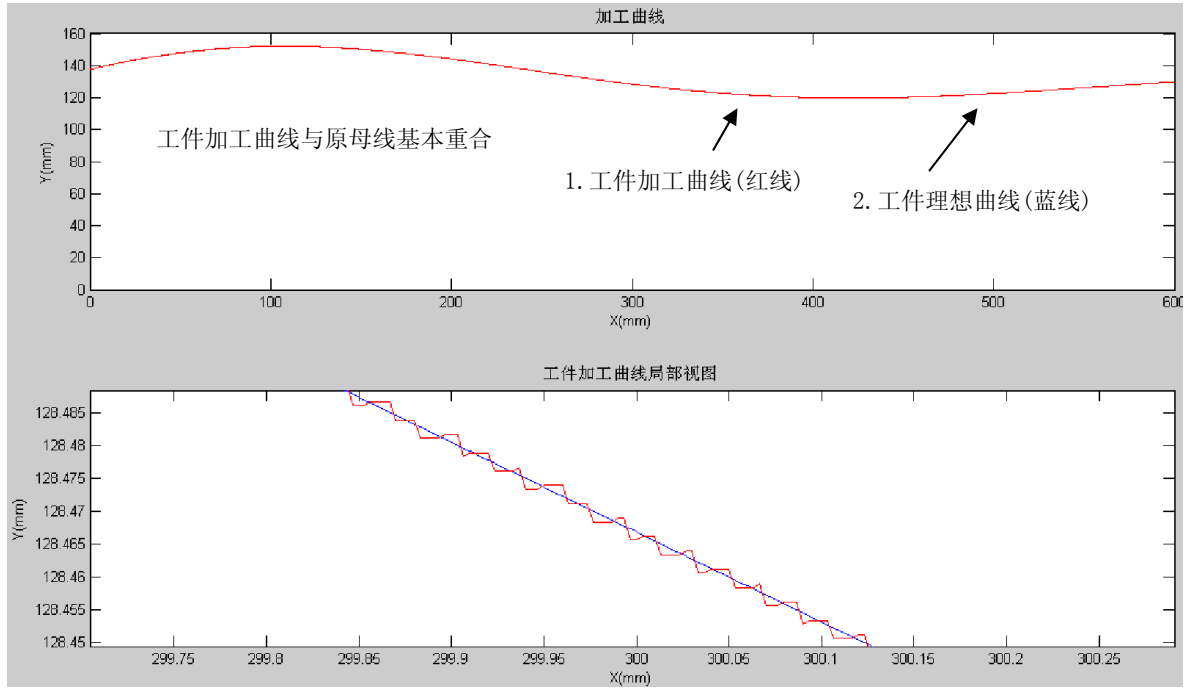


图 24 加工曲线与理想工件母线对比图

结果如下：

如图 22、23、24 所示，采用离散数据点求解法通过迭代所模拟的曲线与原曲线几乎完全重叠，通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为 149.9020mm ，整体平均误差为 $8.3278 \times 10^{-4}\text{mm}$ ，局部最大误差为 $1.7 \times 10^{-3}\text{mm}$ 。

4.2.6 加工方案合理性及误差分析

a) 加工方案合理性：

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。实践表明相邻两时间段的脉冲频率 f_q 和 f_h （ f_q ， f_h 分别指前后时段中的脉冲频率）相差大，是造成工作台运动的不平稳，加工表面的质量下降的重要原因。可以采取的措施，要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$ （一般取 $\delta \leq 0.10$ ）。

由于本方案中下台的电机控制脉冲在时间轴上是均匀分布的，因此下台电机脉冲频率变化率：

$$\sigma_1 = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = 0 < 0.10$$

中台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_{2\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|322 - 350|}{322} \approx 0.0870 < 0.10$$

上台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_{3\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|600 - 543|}{600} \approx 0.0950 < 0.10$$

因此该加工方案是合理的。

b) 误差分析：

通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为149.9020mm，整体平均绝对误差为 8.3278×10^{-4} mm，局部最大绝对误差为 1.7×10^{-3} mm。

在此模型中误差的来源是：此模型采用的是步进法磨削，每给一个脉冲步进一次，而每次步进的步长为一固定值，因此砂轮不可能和工件完全贴合，故产生的误差为系统误差。

计算结果如下：

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{b1}| \\ \Delta_2 &= |\varepsilon_{a2} - \varepsilon_{b2}| \\ &\dots\dots \\ \Delta_n &= |\varepsilon_{an} - \varepsilon_{bn}| \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n &= 149.9020mm \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n}{n} &= 8.3278 \times 10^{-4} mm \\ \max \Delta_i &= 1.7 \times 10^{-3} mm\end{aligned}$$

在加工过程中，这类系统误差为微米级，就工件加工本身而言，误差大小达到了工件加工的精度要求。

4.3 基于最佳延迟的圆柱型砂轮加工的法线一致最小模型（问题三）

4.3.1 问题的分析

根据赛题要求，该问题希望在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀。根据问题的要求，本课题提出了一个修正策略，较好的解决了砂轮在加工过程中磨削点始终处于同一点的问题。

与4.1中的模型比较，这个模型的建立是对第一个模型的优化，问题中要求圆柱形砂轮磨损均匀。即理解为，当工件从头至尾磨削一步就是在砂轮上从头至尾走过一遍的过程。

4.3.2 模型的建立

本课题提出的修正方案如下：

砂轮在加工工件的起始点处，采用砂轮磨削面的一个端点作为起始磨削点，加工工件的终点处时采用的是砂轮磨削面的另一个端点，即在加工整个工件时砂轮从一个端点到另一端点全部磨削一遍，如下图所示。

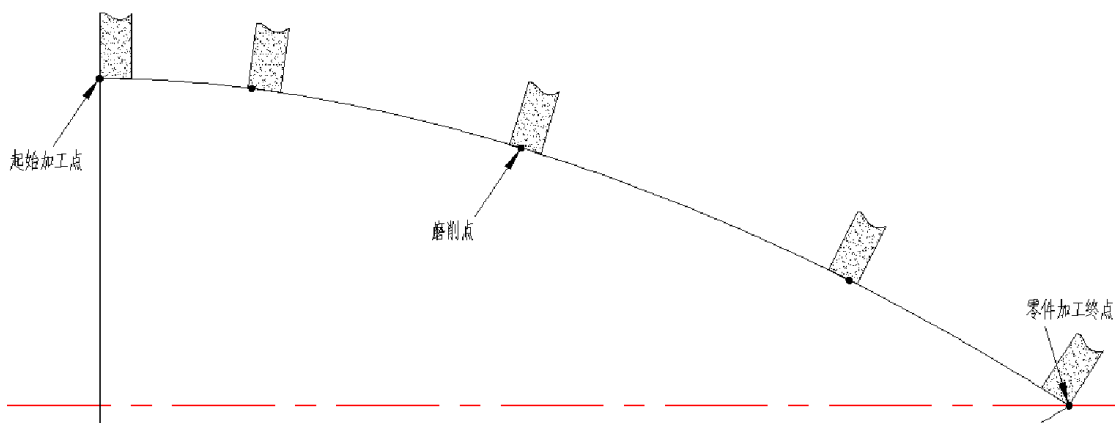


图 25 砂轮磨削点变动图

本课题定义砂轮的磨削点匀速移动。根据工件长度 $L = 600\text{mm}$ ，砂轮厚度 $a = 15\text{mm}$ ，可计算得砂轮磨削点每移动一个电机脉冲距离 $\Delta L = \frac{1}{300}\text{mm}$ 时，工件移动 $dL = \Delta L \times \frac{600}{15} = \Delta L \times 40\text{mm}$ ，即下工作台电机移动 40 个电机脉冲距离时，砂轮就要相对工件移动一个电机脉冲距离。

由于砂轮是静止不动的，砂轮相对工件的移动也可看成工件相对砂轮的移动，因此，如果下台电机在输入了 40 个脉冲后，本应该输入的第 41 个脉冲现在停止输入，但相应的上台、中台的电机脉冲仍然按照题 1 中的情况输入，则就相当于砂轮的磨削点前进了一个电机脉冲距离。现下台每隔 40 个脉冲就停止一次脉冲输入，即在第 41、81、121...180001 个脉冲点处停止其脉冲输入，则砂轮在加工出工件的同时，保证了砂轮的均匀磨损。

定义砂轮的纵轴线上的磨削点为零点，砂轮最左端磨削点为 $-\frac{a}{2}$ ，砂轮最右端磨削点为 $\frac{a}{2}$ 。

根据这一修正方案，采用题 1 中的编程思路和方法编程，计算得到结果如下：

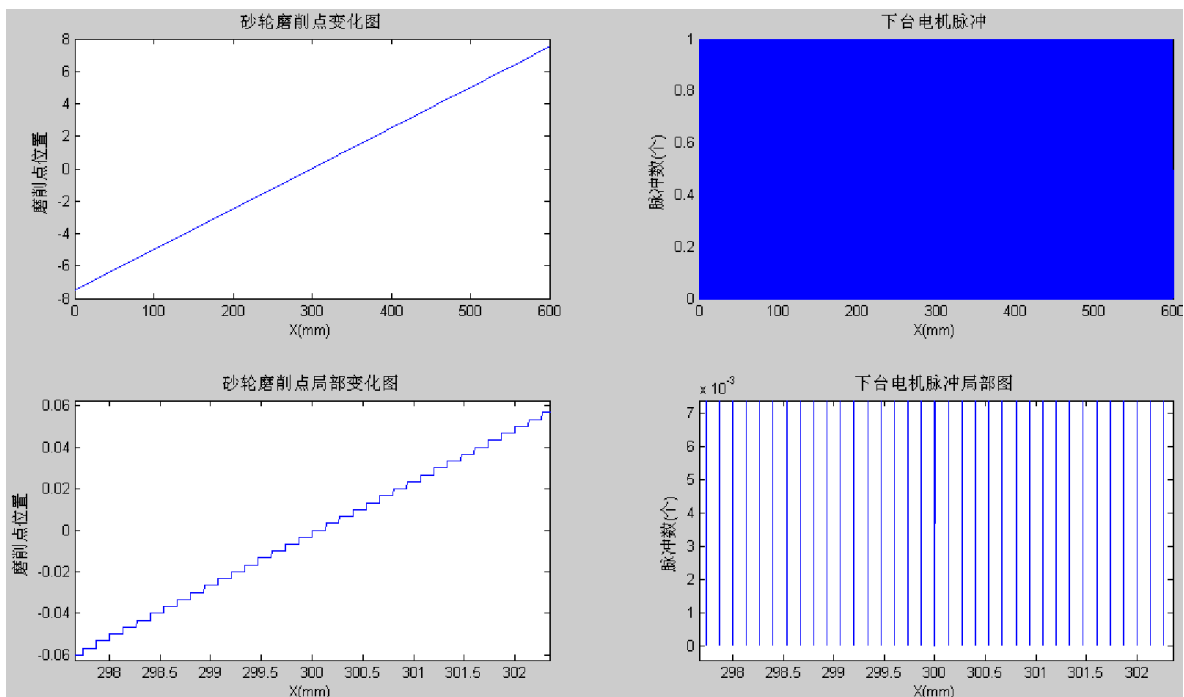


图 26 砂轮磨削点位置及下台电机脉冲分布图

上图反应了工件上的加工点与砂轮磨削点的相互对应关系。

根据本节的计算方法，编程计算得到结果如下图：

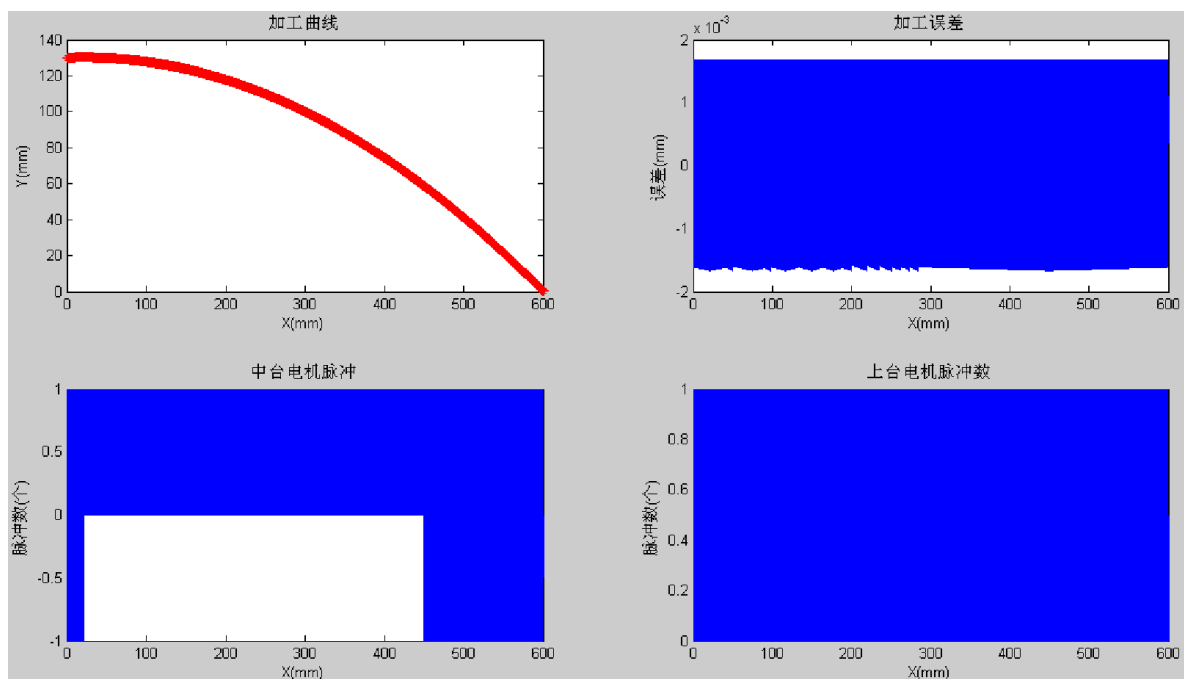


图 27 加工曲线、误差及电机脉冲分布图

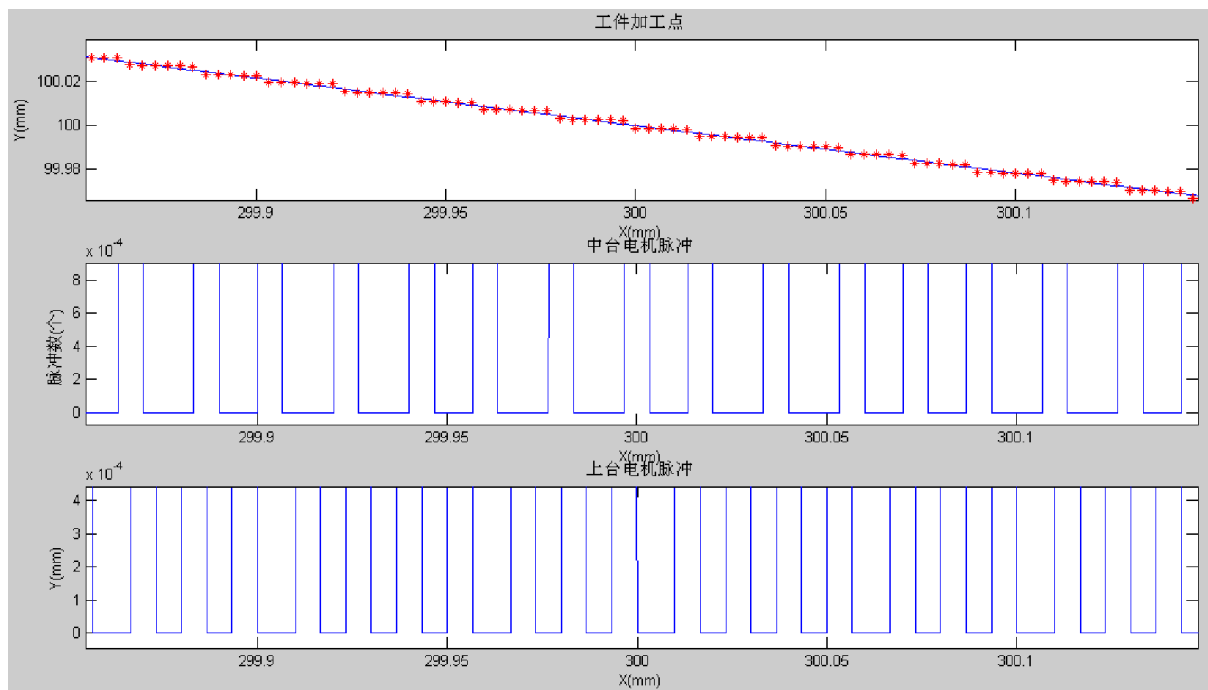


图 28 工件加工点与其对应的电机脉冲分布局部视图

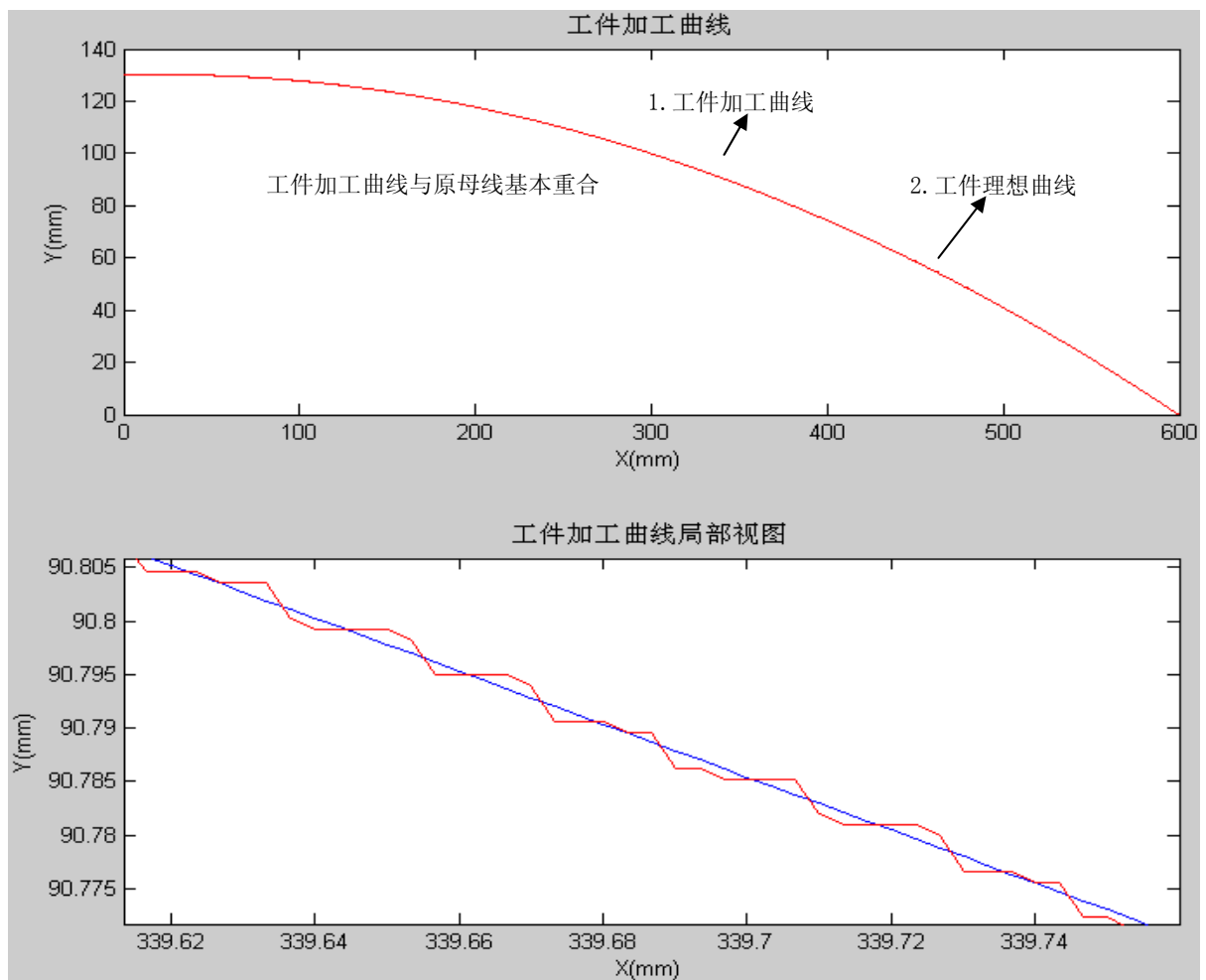


图 29 加工曲线与理想工件母线对比图

结果如下：

如图 27、28、29 所示，采用离散数据点求解法通过迭代所模拟的曲线与原曲线几乎完全重叠，通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为 152.4395 mm ，整体平均误差为 $8.4688 \times 10^{-4} \text{ mm}$ ，局部最大误差为 $1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

4.3.3 加工方案合理性及误差分析

a) 加工方案合理性：

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。实践表明相邻两时间段的脉冲频率 f_q 和 f_h (f_q, f_h 分别指前后时段中的脉冲频率) 相差大，是造成工作台运动的不平稳，加工表面的质量下降的重要原因。可以采取的措施，要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$

(一般取 $\delta \leq 0.10$)。

下台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_1 = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = 0 < 0.10;$$

中台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_{2\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|1437 - 1469|}{1437} \approx 0.0223 < 0.10;$$

上台电机每分钟最大脉冲频率变化率：

$$\sigma_{3\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|686 - 700|}{700} \approx 0.0204 < 0.10$$

因此该加工方案是合理的。

b) 误差分析：

通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为 152.4395 mm ，整体平均绝对误差为 $8.4688 \times 10^{-4} \text{ mm}$ ，局部最大绝对误差为 $1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

计算结果如下：

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{b1}| \\ \Delta_2 &= |\varepsilon_{a2} - \varepsilon_{b2}| \\ &\dots\dots \\ \Delta_n &= |\varepsilon_{an} - \varepsilon_{bn}| \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n &= 152.4395 \text{ mm} \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n}{n} &= 0.4688 \times 10^{-4} \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\max \Delta_i = 1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

在加工过程中，这类系统误差已经小于微米级，就工件加工本身而言，其影响可以忽略不计。

4.3.4 模型比较

该模型是对模型一进行优化，与模型一对比，由于迭代式相同，其拟合曲线与模型一相同，故所模拟的曲线与模型一是相同的。

该模型优化处在于：下台每隔 40 个脉冲就停止一次脉冲输入，上台、中台保持脉冲输入，该方法理论上切实可行，且使圆柱形砂轮均匀磨损。

说明该加工方案可在保证圆柱形砂轮均匀磨损的情况下达到原来的加工水平。

4.4 轮式砂轮加工的斜率一致最小偏差模型（问题四）

4.4.1 问题的分析

根据赛题要求，该问题希望在加工过程中使砂轮表面尽量均匀的磨损。根据问题的要求，本课题提出了一个修正策略，较好的解决了砂轮在加工过程中磨削点始终处于同一点的问题。

与 4.2 中的模型比较，这个模型的建立是对第二个模型的优化，问题中要求轮式砂轮磨损均匀。即理解为，当工件从头至尾磨削一步就是在砂轮上从头至尾走过一遍的过程。但是比起抛物线，此母线有凸有凹，因此考虑当工件母线斜率为正时，砂轮用右半部分磨削工件，当工件母线斜率为负时，砂轮用左半部分磨削工件，砂轮定点磨损的问题得到较好的解决。

4.4.2 符号说明

符号	定义
φ	砂轮最大纵截面直径
a	砂轮厚度
ρ	砂轮母线曲率半径
r	边倒圆角半径
B	砂轮纵轴至工件母线的最短距离
f_q, f_h	分别指前、后时段中的脉冲频率
σ	电机脉冲频率变化率

4.4.3 模型的建立

本课题提出的修正方案如下：

通过计算工件母线的斜率，发现其斜率分布比较均匀，因此本模型中采用不转动工件的方法加工工件，其磨损量基本均匀。

上工作台不转动，砂轮以竖直的方式磨削工件，砂轮上的磨削点会随着工件母线的

曲率变化而改变位置，如下图所示。

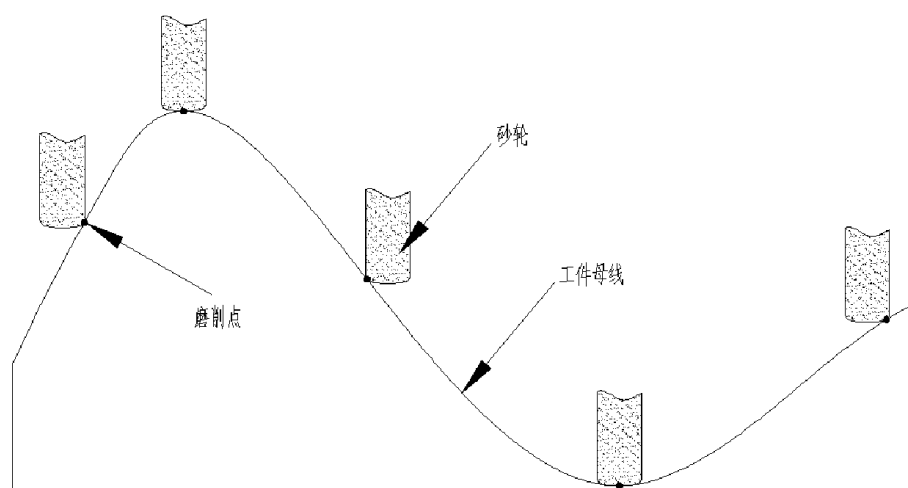


图 30 砂轮磨削点变动图

由图 30 可知，当工件母线斜率为正时，砂轮用右半部分磨削工件，当工件母线斜率为负时，砂轮用左半部分磨削工件，砂轮定点磨损的问题得到较好的解决。

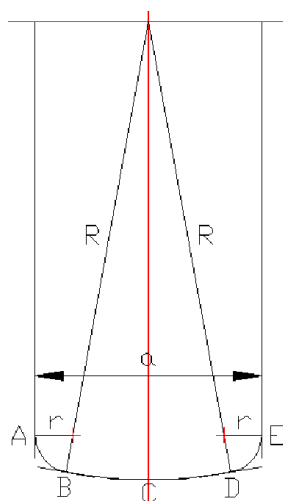


图 31 砂轮磨削面斜率分段图

图 31 中， R 为砂轮最大纵截面的半径， r 为边倒圆角的半径， a 为砂轮厚度，点 A、B、C、D、E 为砂轮曲线分段的节点。

由上图可得：

$$\text{点 A、E 的斜率为无穷大，点 C 的斜率 } K_C = 0, \text{ 点 D 的斜率 } K_D = \frac{\frac{a}{2} - r}{\sqrt{R^2 - (\frac{a}{2} - r)^2}},$$

$$\text{点 B 的斜率 } K_B = -\frac{\frac{a}{2} - r}{\sqrt{R^2 - (\frac{a}{2} - r)^2}}, \text{ 由问题 2 定义的砂轮厚度 } a = 15\text{mm}, \text{ 最大纵截面直}$$

径 $\varphi = 1000\text{mm}$ ，倒圆角半径 $r = 1.5\text{mm}$ ，计算得 $K_D = 0.012$ ， $K_B = -0.012$ 。

考虑到砂轮上的各段弧线磨削关系都不一样，在确定砂轮在加工工件各点时工作台的进给量，就要考虑砂轮对磨削点的影响。

将砂轮磨削面的曲线分成四段：

第一段 A-B：曲线的斜率范围为 $(-0.012—\text{负无穷大})$

第二段 B-C：曲线的斜率范围为 $[-0.012—0]$

第三段 C-D：曲线的斜率范围为 $[0—0.012]$

第四段 D-E：曲线的斜率范围为 $(0.012—\text{正无穷大})$

由于砂轮是静止的，砂轮磨削点在磨削面上移动，如果以砂轮顶点为参考点，将各段曲线上的磨削点与砂轮顶点的关系计算出来，则砂轮磨削点位置变化的关系以及加工台的进给量就可以确定。

现分别分析各段曲线的磨削点与砂轮顶点的关系：

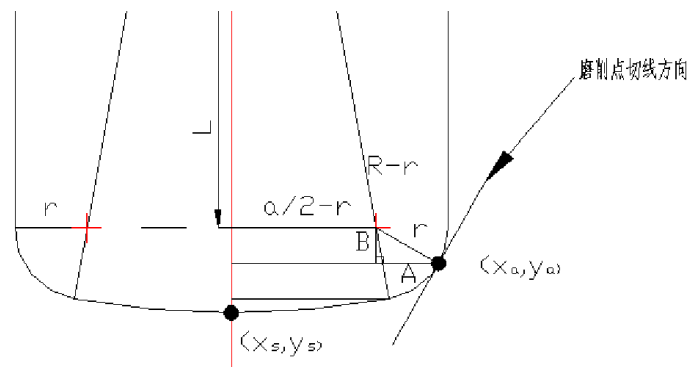


图 32 砂轮磨削点处于 D-E 段时与砂轮顶点关系图

上图中， R 为砂轮最大纵截面直径， r 为倒角半径， a 为砂轮厚度， (x_a, y_a) 为某时刻的磨削点， (x_s, y_s) 为砂轮最大纵截面的顶点。

当磨削点 a 的斜率为 K_a 时，由上图可得：

$$\begin{cases} K_a = \frac{A}{B} \\ A^2 + B^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} K_a \\ B = \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s = x_a - \left[A + \left(\frac{a}{2} - r \right) \right] \\ y_s = y_a - \left(R - \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{a}{2} - r \right)^2} - B \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s = x_a - \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} K_a - \frac{a}{2} + r \\ y_s = y_a - \left(R - \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{a}{2} - r \right)^2} - \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} \right) \end{cases}$$

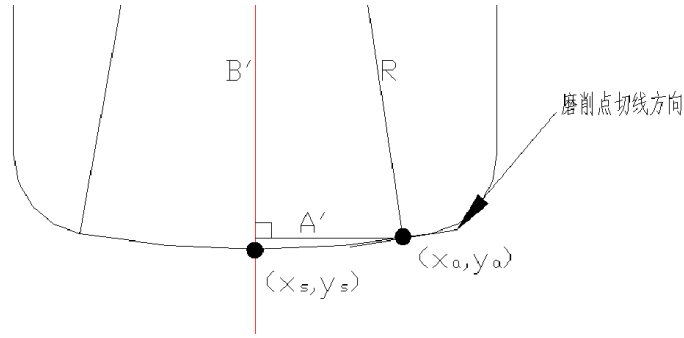


图 33 砂轮磨削点处于 C-D 段时与砂轮顶点关系图

上图中， R 为砂轮最大截面直径， (x_a, y_a) 为某时刻的磨削点， (x_s, y_s) 为砂轮最大纵截面的顶点。

当磨削点的斜率为，由图可得：

$$\begin{cases} K_a' = \frac{A'}{B'} \\ A'^2 + B'^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = \frac{R}{\sqrt{1+K_a'^2}} K_a' \\ B' = \frac{R}{\sqrt{1+K_a'^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s' = x_a' - A' = x_a' - \frac{R}{\sqrt{1+K_a'^2}} K_a' \\ y_s' = y_a' - (R - B') = y_a' - R + \frac{R}{\sqrt{1+K_a'^2}} \end{cases}$$

砂轮的 A-B 段、B-C 段弧线上磨削点与砂轮顶点关系与 C-D 段、D-E 段相似。
计算可得砂轮在各段弧线的磨削点与砂轮顶点关系：

$$\begin{aligned}
 \text{A-B段弧线上} & \begin{cases} x_s = x_a - \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} K_a + \frac{a}{2} - r \\ y_s = y_a - \left(R - \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{a}{2} - r\right)^2} - \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} \right) \end{cases} \\
 \text{B-C段弧线上} & \begin{cases} x_s' = x_a' - A' = x_a' - \frac{R}{\sqrt{1+K_a^2}} K_a \\ y_s' = y_a' - (R - B') = y_a' - R + \frac{R}{\sqrt{1+K_a^2}} \end{cases} \\
 \text{C-D段弧线上} & \begin{cases} x_s' = x_a' - A' = x_a' - \frac{R}{\sqrt{1+K_a^2}} K_a \\ y_s' = y_a' - (R - B') = y_a' - R + \frac{R}{\sqrt{1+K_a^2}} \end{cases} \\
 \text{D-E段弧线上} & \begin{cases} x_s = x_a - \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} K_a - \frac{a}{2} + r \\ y_s = y_a - \left(R - \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{a}{2} - r\right)^2} - \frac{r}{\sqrt{1+K_a^2}} \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

确定了砂轮磨削面上各段曲线的磨削范围以后，现在就可以确定砂轮各段磨削曲线相对应的工件的磨削曲线段。

现根据砂轮隔断曲线的斜率范围，将工件母线分割成七段，分别为：

A1-B1 段：由砂轮的 D-E 段磨削得到；

B1-C1 段：由砂轮的 C-D 段磨削得到；

C1-D1 段：由砂轮的 B-C 段磨削得到；

D1-E1 段：由砂轮的 A-B 段磨削得到；

E1-F1 段：由砂轮的 B-C 段磨削得到；

F1-G1 段：由砂轮的 C-D 段磨削得到；

G1-H1 段：由砂轮的 D-E 段磨削得到；

工件母线分段如图 34 所示：

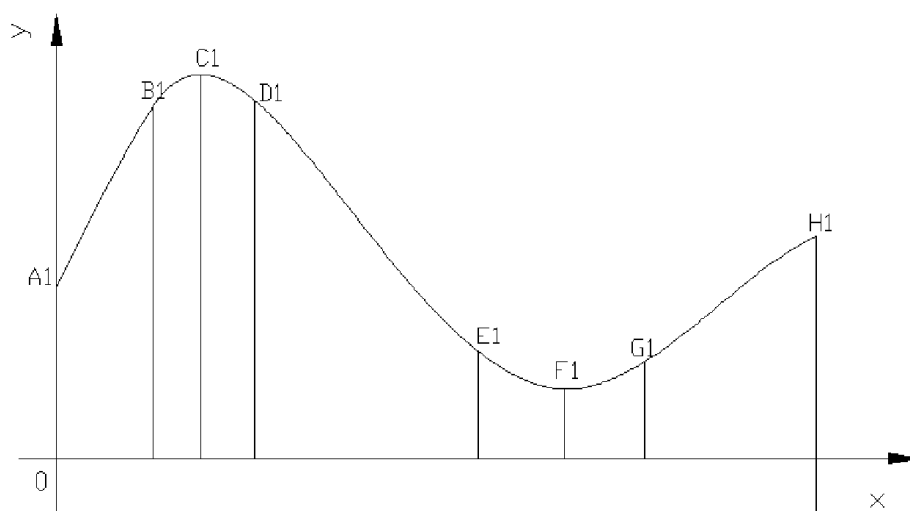


图 34 工件母线分段图

根据砂轮各磨削段磨削点与砂轮顶点关系，计算工件母线上各个磨削段砂轮位置的补偿量。

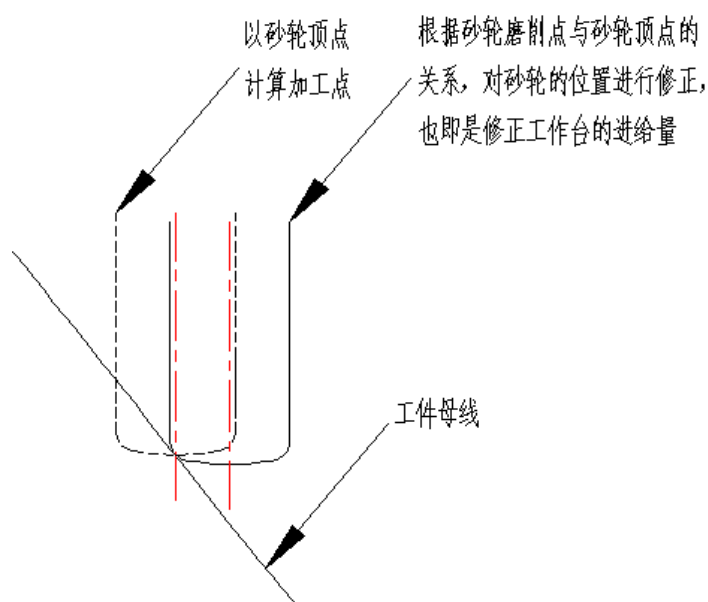


图 35 工作台进给量计算方法

采用该种修正方案时，以砂轮顶点来计算加工点的位置，然后利用上文提出的补偿方法对砂轮的位置进行修正，然后计算出磨削点的位置。

根据这一修正方案，采用 MATLAB 编程，计算得到结果如下：

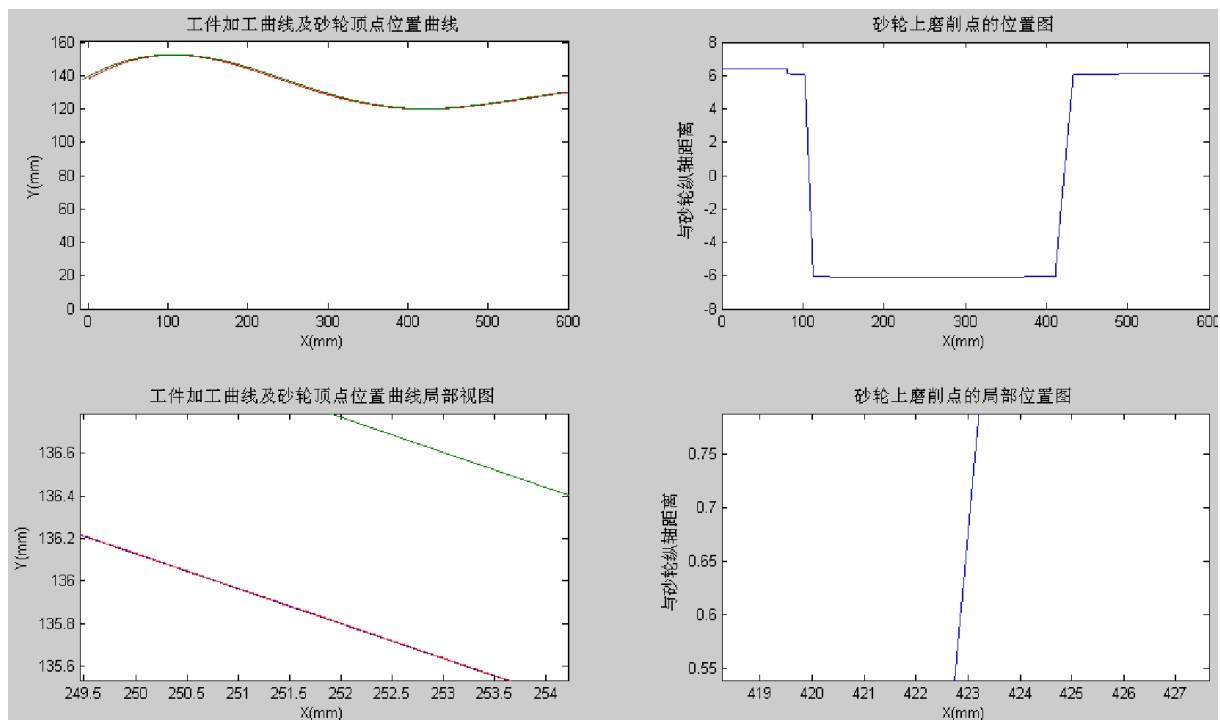


图 36 工件加工曲线、砂轮顶点位置曲线及砂轮磨削点位置图

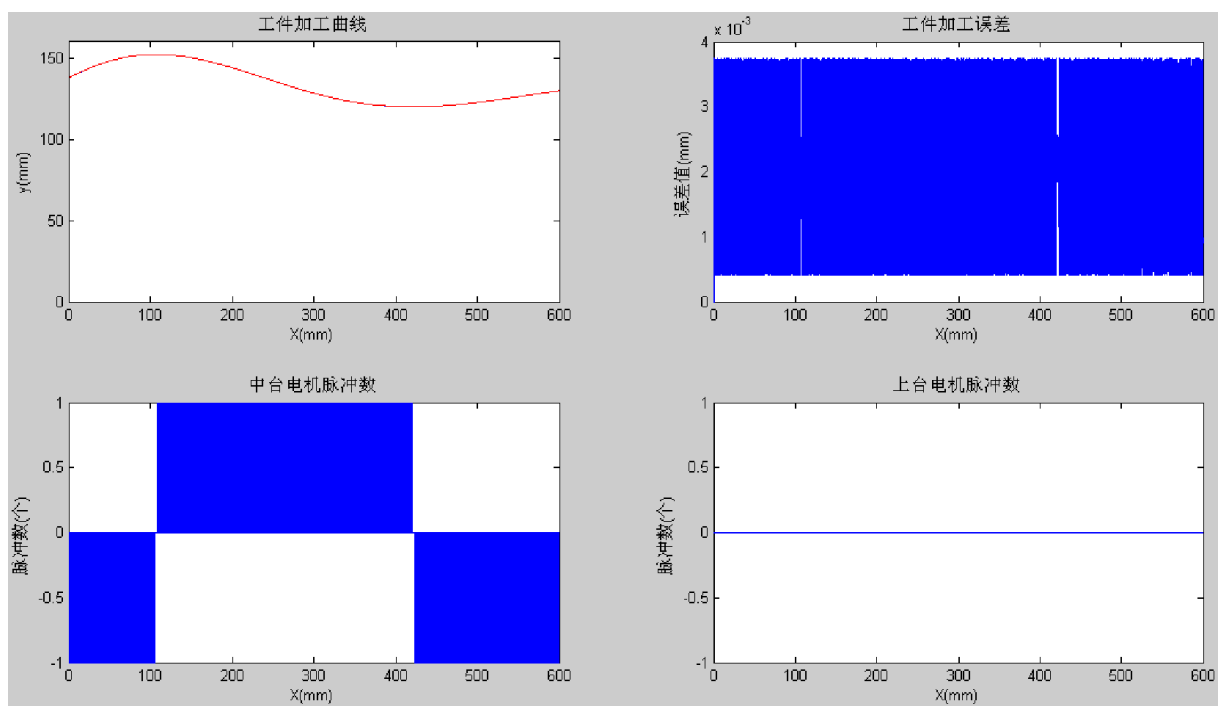


图 37 加工曲线、误差及电机脉冲分布图

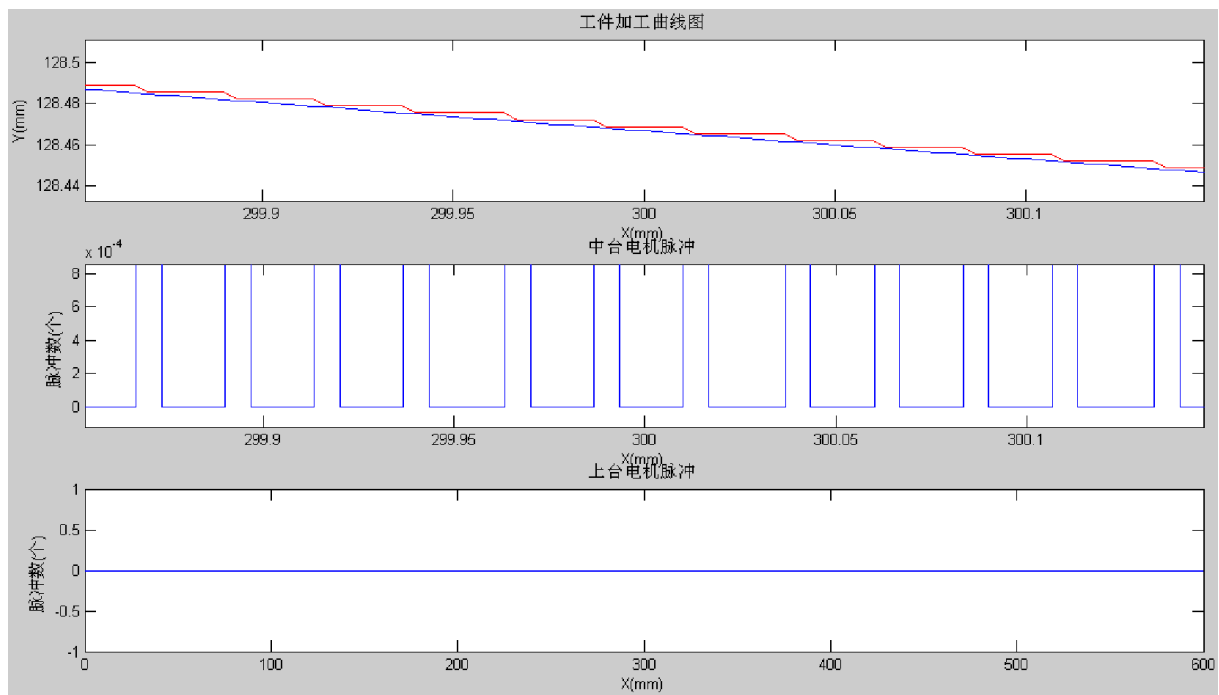


图 38 工件加工点与其对应的电机脉冲分布局部视图

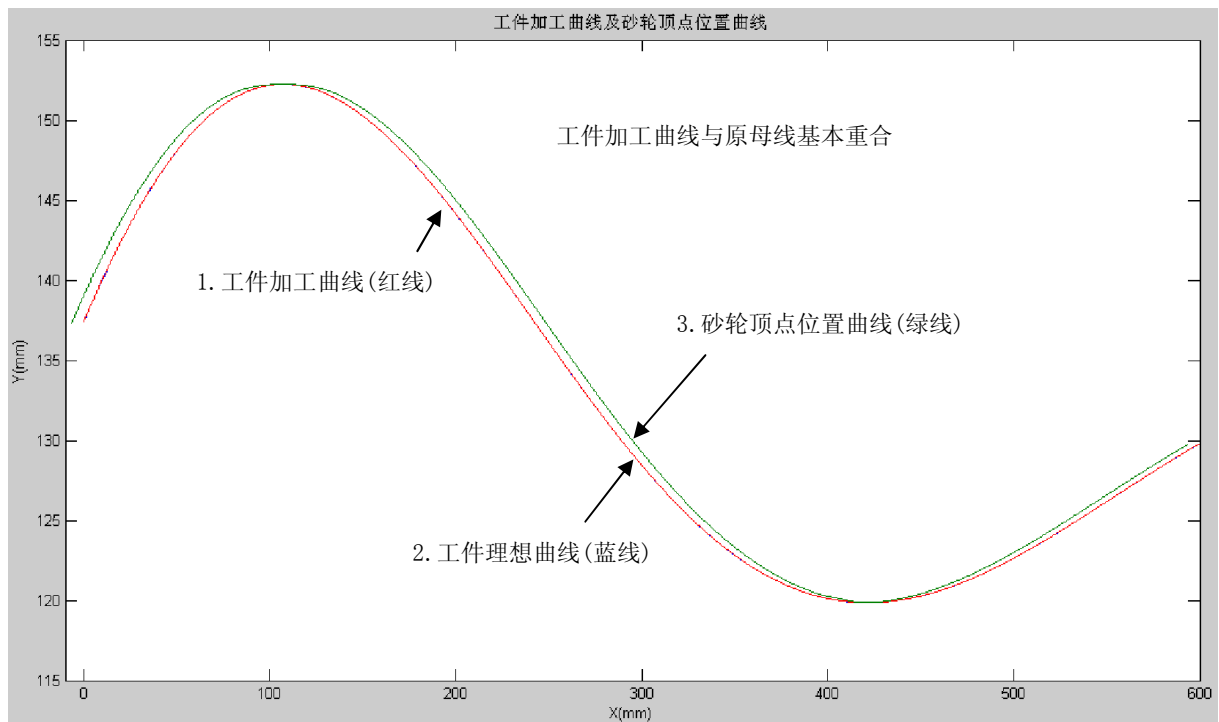


图 39 加工曲线与理想工件母线对比图

结果如下：

如图 36、37、38、39 所示，采用离散数据点求解法通过迭代所模拟的曲线与原曲线几乎完全重叠，通过计算结果图可知，计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为 372.7880 mm ，整体平均误差为 $2.1 \times 10^{-3}\text{ mm}$ ，局部最大误差为 $3.7 \times 10^{-3}\text{ mm}$ 。

4.4.4 加工方案合理性及误差分析

a) 加工方案合理性:

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。实践表明相邻两时间段的脉冲频率 f_q 和 f_h (f_q, f_h 分别指前后时段中的脉冲频率) 相差大, 是造成工作台运动的不平稳, 加工表面的质量下降的重要原因。可以采取的措施, 要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$ (一般取 $\delta \leq 0.10$)。

$$\text{下台电机每分钟最大脉冲频率变化率 } \sigma_{1\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = 0 < 0.10$$

$$\text{中台电机每分钟最大脉冲频率变化率 } \sigma_{2\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = \frac{|600 - 543|}{600} \approx 0.0950 < 0.10$$

$$\text{上台电机每分钟最大脉冲频率变化率 } \sigma_{3\max} = \frac{|f_q - f_h|}{f_q} = 0 < 0.10$$

因此该加工方案是合理的。

b) 误差分析:

通过计算结果图可知, 计算得到的加工曲线与弓箭的理想曲线基本吻合。加工曲线与工件理想母线的整体误差为 149.9020 mm , 整体平均绝对误差为 $8.3278 \times 10^{-4} \text{ mm}$, 局部最大绝对误差为 $1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

在此模型中误差的来源是: 此模型采用的是步进法磨削, 每给一个脉冲步进一次, 而每次步进的步长为一固定值, 因此砂轮不可能和工件完全贴合, 故产生的误差为系统误差。

计算结果如下:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |\varepsilon_{a1} - \varepsilon_{b1}| \\ \Delta_2 &= |\varepsilon_{a2} - \varepsilon_{b2}| \\ &\dots\dots \\ \Delta_n &= |\varepsilon_{an} - \varepsilon_{bn}| \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n &= 372.7880 \text{ mm} \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n}{n} &= 2.1 \times 10^{-3} \text{ mm} \\ \max \Delta_i &= 3.7 \times 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned}$$

在加工过程中, 这类系统误差为微米级, 就工件加工本身而言, 误差大小达到了工件加工的精度要求。

4.4.5 模型的比较

该模型是对模型二进行优化,与模型二对比,由于迭代式相同,其拟合曲线与模型二相同,故所模拟的曲线与模型二是相同的。

该模型优化处在于:考虑当工件母线斜率为正时,砂轮用右半部分磨削工件,当工件母线斜率为负时,砂轮用左半部分磨削工件,砂轮定点磨损的问题得到较好的解决。以砂轮顶点为参考点,将各段曲线上的磨削点与砂轮顶点的关系计算出来,从而确定砂轮磨削点位置变化的关系以及加工台的进给量。该方法理论上切实可行。

5. 结论与分析

1) 模型一采用插补法,基于砂轮与工件母线相切磨削,工件磨削的最小误差不超过脉冲距离的一半,建立了法线一致最小偏差模型。求解得到加工曲线的误差为微米级满足工件磨削加工的精度要求。

2) 模型二建立了轮式砂轮加工的法线一致最小偏差模型,确定了轮式砂轮的约束条件,并据条件定义了轮式砂轮厚度 a ,最大纵截面直径 φ ,倒圆角半径 r 。采用插补法求解,计算结果误差为微米级符合工件磨削加工的精度要求。

3) 模型三建立基于最佳延迟的圆柱形砂轮加工的法线一致最小偏差模型,考虑到砂轮磨损问题,采取磨削点在砂轮磨削面上均匀移动的方法,定义下台每隔一定脉冲数,减少一个脉冲,上台、中台保持脉冲输入不变的方法,对砂轮的磨损进行优化。即相当于加工过程中,原本固定不动的砂轮,在与工件的相对运动中前进了1个电机脉冲距离,使圆柱形砂轮在保证均匀磨损的同时达到原加工精度水平。该模型

4) 模型四建立工件上斜率一致最小偏差模型,采用工作台平移的方法,利用轮式砂轮外轮廓的曲线,使得砂轮在磨削工件母线的不同斜率段时,砂轮上的磨削点产生移动。与模型二相比,优化处在于在磨削加工的过程中使轮式砂轮磨损均匀,在此基础上所得曲线与理论曲线误差,该误差满足磨削加工的精度要求,该方法理论上切实可行,且可以有效延长砂轮的使用寿命。

6. 参考文献

- [1] 赵恒华,王颖,磨削机工技术的发展及现状[J],制造技术与机床,7:39-41,2007.
- [2] 赵萍,赵波,一种适用于凸轮类工件磨削加工的方法[J],辽宁交通高等专科学校学报,8(3):39-40,2006.
- [3] 来传远,金建新,唐小琦,任意凸轮曲线的极坐标式等速CNC磨削[J],工具技术,35(3):9-12,2001.
- [4] 金建新,来传远,平面凸轮曲线的等速数控磨削方法[J],中国机械工程,13(10):844-846,2002.
- [5] 姚斌,席文明,叶军君等,基于砂轮均与钝化和进让式进给精密磨削的研究[J],中国机械工程,18(2):127-129,2007.
- [6] 张建设,数控机床加工精度的影响因素及其控制措施[J],工艺与装备,5:

39-41, 2009.

[7] 李庆扬, 王能超, 易大义, 数值分析[M], 华中工学院出版社, 2004.

[8] T. Jin, D. J. Stephenson, Investigation of the heat partitioning in high efficiency deep grinding[M], International Journal of Machine Tools & Manufacture, 43: 1129-1134, 2003.

[9] 刘宏谦, 现代磨削加工技术的发展[J], 机械管理开发, 5: 52-53, 2005

[10] 魏法明, 一种抛物线轮廓的数控加工方法[J], 机械工程师, 10: 112-113.

[11] 陈明君, 董申, 张飞虎, 梁迎春, 超精密非球面磨削系统中砂轮修整技术的研究[J], 兵工学报, 23(2): 238-240, 2002.

[12] Huang Hao, Wang Zhenzhong, Guo Yinbiao, Research on Uniform Wear Technology of Grinding Wheel in High Precision Axisymmetric Aspheric machining[C], Proceedings of the 6th International Conference on Frontiers of Design and Manufacutring, Xi' an: 283-284, 2004.

