

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯”
全国研究生数学建模竞赛

学 校	中国科学院金属研究所
参赛队号	80144001
队员姓名	1. 程曦月
	2. 刘 威
	3. 马会财

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 有杆抽油系统的数学建模及诊断

摘 要：

油杆抽油机系统在国内外采油井广泛应用。在该系统中，通过悬点载荷和运动参数，以及泵功图对井的工作状况诊断，将对油井产量、气体影响等重要作用。特别是，如何通过数学建模，把悬点示功图转化为泵功图，是一个很有价值的实际问题。

本文紧密围绕题干提出的四大问题，从经典物理运动规律和机械原理出发，运用数学思维，结合波动方程，建立了抽油机系统的简化模型并求解。

针对游梁式抽油机的几何特征和运动关系，我们分别运用简谐近似模型和曲柄滑块模型对其进行求解，并与精确解析解进行了比较，结果发现除加速度局部有微小差别外，三种方法所得其他参数差别较小。另外，结论也表明在一般工程应用中，采用简化方法基本上可以满足要求，而在抽油机结构设计及力学分析中，则应采用精确解析方法。

为了获得抽油机系统的动态参数，我们根据 Gibbs 给出的悬点示功图转化为地下泵功图模型，对其进行分析并采用精确的数值积分求解算法进行求解，得出两口井的泵功图，并与传统级数算法结果对比，克服了传统算法的复杂性，且提高了计算精度。

根据 Gibbs 模型计算得出的泵功图，我们建立了 2 个由泵功图估计油井产量的模型，一是泵的理论排量模型，另一个是利用“有效冲程”估计的油井产量模型。前者基于抽油机的冲次、冲程、抽油泵的参数、原油物性参数给出了油井的理论产量，后者则考虑了相应的影响因素，如有效冲程、液体收缩性、漏失和充气等的影响，更加接近生产实际情况。

最后，我们对 Gibbs 模型波动方程进行了分析，在传统粘滞阻尼系数计算

方法的基础上，使用了三种改进方法：考虑比能损失、考虑摩擦功以及改进的摩擦功方法，从方程本身运用数学方法重新计算了阻尼系数，并给出了详尽的推导过程，更真实的反应了实际情况，并对模型进行了进一步推广。

关键词：有杆抽油机 **Gibbs** 模型 泵功图 粘滞阻尼系数

目录

目录.....	3
有杆抽油系统的数学建模及诊断.....	4
一、问题重述与提出.....	4
二、模型假设.....	5
三、符号约定.....	5
四、模型的分析、建立与求解.....	6
4.1 光杆悬点运动规律.....	6
4.1.1 简谐运动简化模型.....	7
4.1.2 曲柄滑块机构简化模型.....	8
4.1.3 精确解析法.....	10
4.2 泵功图计算.....	12
4.2.1 Gibbs 模型求解方法探讨	13
4.2.2 Gibbs 模型的算法实现	16
4.2.3 油井泵功图.....	18
4.2.4 对结果的误差讨论.....	20
4.3 泵功图在油井产量中的应用.....	21
4.3.1 泵的理论排量模型.....	21
4.3.2 油井的实际产量模型.....	22
4.4 Gibbs 模型的深入研究	25
4.4.1 考虑比能损失推导的阻尼粘滞系数.....	25
4.4.2 利用摩擦功确立的阻尼系数计算公式.....	27
4.4.3 改进的利用摩擦功确立的阻尼系数计算公式.....	29
五、模型的评价及推广	30
六、参考文献.....	31
附录.....	32

有杆抽油系统的数学建模及诊断

一、问题重述与提出

有杆泵抽油是国内外石油工业的传统采油方式之一，在我国石油开采中有杆抽油系统一直占主导地位。在我国各油田中，大约 80% 以上杆抽油系统。其中，60% 的产液量、75% 的产油量均依靠该采油方式进行采油生产。有杆抽油机以其结构简单、制造容易、可靠性高、耐久性好、维修方便、适应现场工况等优点，在采油机械中占有举足轻重的地位。原理简单来说是由电机旋转运动转化为抽油杆上下往返周期运动，带动设置在杆下端的泵的两个阀的相继开闭，从而将地下上千米深处蕴藏的原油抽到地面上来。

钢制抽油杆由很多节连接而成，具有相同直径的归为同一级，级数从上到下按 1,2... 进行编号，可多达 5 级，从上端点到下端点可能长达上千米。描述抽油杆中任意一水平截面（为表述方便，下面把杆水平截面抽象称为“点”）处基本信息的通用方法是示功图：它是该点随时间 t 而变化的荷载（合力，向下为正）数据作为纵坐标，以该点垂直方向上随时间 t 而变化的位置相对于 $t=0$ 时刻该点位置的位移数据作为横坐标构成的图形。函数关系表现为位移-荷载关于时间 t 的参数方程。一个冲程中示功图是一条封闭的曲线。构成示功图的数据称为示功数据。

抽油杆上端点称为悬点。在一个冲程期间，仪器以一系列固定的时间间隔测得悬点 E 处的一系列位移数据和荷载数据，据此建立悬点 E 的示功图称为悬点示功图。悬点示功图可由油田某井采油工作时采集的悬点处原始位移-荷载示功数据作图得到。

“泵”是由柱塞、游动阀、固定阀、部分油管等几个部件构成的抽象概念，泵中柱塞处的示功图称为泵功图。因为受到诸多因素的影响，在同一时刻 t ，悬点处的受力（荷载）与柱塞的受力是不相同的；同样，在同一时刻 t ，悬点处的相对位移与柱塞的相对位移也不相同。因此悬点示功图与泵功图是不同的。示功图包含了很多信息，其中就有有效冲程，泵的有效冲程是指泵中柱塞在一个运动周期内真正实现从出油口排油的那段冲程。工程上一般根据示功图形状与理论示功图进行对比来判断抽油机工作状态。

通过悬点示功图可以初步诊断该井的工作状况，如产量、气体影响、阀门漏液、沙堵等等。要精确诊断油井的工作状况，最好采用泵功图。然而，泵在地下深处，使用仪器测试其示功数据实现困难大、成本高。因此，通过数学建模，把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图（统称为地下示功图）并最终确定泵功图，以准确诊断该井的工作状况，是一个很有价值的实际问题。

本文我们需要解决以下几个问题：

1. 光杆悬点运动规律

光杆的运动与地下抽油杆的运动息息相关，获取光杆的运动规律是对抽油过程进行合理分析首要条件。电机旋转运动通过四连杆机构转变为抽油杆的垂直运动。假设驴头外轮廓线为部分圆弧、电机匀速运动，悬点 E 下只挂光杆（光杆下不接其它杆，不抽油，通常用来调试设备）。利用附录 4 给出四连杆各段尺寸以及附件 1 的参数，求出悬点 E 的一个冲程的运动规律：位移函数、速度函数、加速度函数。并与有荷载的附件 1 的悬点位移数据进行比较。

2. 泵功图计算

1966 年, Gibbs 给出了悬点示功图转化为地下示功图的模型[1,2], 由于受计算机速度的限制, 直到近些年才得以被重新重视。我们将使用 Gibbs 模型进行计算, 同时给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程, 包括: 原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法; 其中附件 1 是只有一级杆的某油井参数和悬点示功数据, 附件 2 是有三级杆的另一油井参数和悬点示功数据, 我们将利用它们分别计算出这两口油井的泵功图数据; 并分别绘制出两油井的悬点示功图和泵功图(每口井绘一张图, 同一井的悬点示功图与泵功图都会在同一张图上, 并注明坐标数据)。

3. 泵功图的应用

建立 2 个不同的由泵功图估计油井产量的模型, 其中至少一个要利用“有效冲程”; 同时利用附件 1 和附件 2 的数据分别估算两口油井一天(24 小时)的产液量, 并对不同的模型进行分析评价(单位: 吨, 所指的液体是指从井里抽出来的混合液体)

4. 对 Gibbs 的模型深入研究

Gibbs 模型在数学上可简化为“波动方程”: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t}$ 其中 a

为已知常数, c 称为阻尼系数, 鉴于大多数的阻尼系数公式[3]是作了诸多假设后推出的, 并不能完整地反应实际情况, 计算也相对繁琐。如果能从方程本身和某些数据出发用数学方法估计参数 c , 贡献是很大的。对此, 我们应深入考虑并给出改进的 c 的计算方法, 同时详细给出计算 c 的理论推导过程并尽可能求出 c 。如果需要题目之外的数据, 会用字母表示之并给出计算 c 的推导过程。

二、模型假设

- 1) 本题将抽油系统各个连接件假设成长度、材质均匀的连杆
- 2) 假设抽油系统各连接部分即铰链润滑良好, 阻力忽略不计, 运动过程中各连接杆件不产生弹性形变
- 3) 假设驴头外轮廓线为部分圆弧, 电机匀速运动, 悬点 E 下只挂光杆, 即忽略了光杆下载荷的作用
- 4) 假设油管内充满液体, 且液体密度均匀

由于本文中 4 个问题各不相同, 所采用模型也有诸多变化, 其他假设将在后文模型中单独说明。

三、符号约定

表 1 主要符号约定

符号	符号说明
φ	曲柄转角
θ	游梁摆角
r	曲柄半径
l	连杆长度
a	应力波在抽油杆柱中的传播速度
c	粘滞阻尼系数

U	位移相关
D	载荷相关
A	面积相关
A_r	抽油杆截面积
A_b	泵的截面积
E	抽油杆的弹性模量
γ	无纲量的阻尼系数
L	杆长
P_r	光杆功率，即抽油机悬点载荷做功的功率
P_h	水力功率，即有用功率或称有效功率
S	冲程
n	冲数
ρ_l	混合液体密度（即水与油混合密度）
W_l	作用在活塞上的液柱载荷
W_l'	静载荷
W_r'	抽油杆在液体中的重量
Q	油井产液量
H	泵对液体的有效提升高度
L_f	动液面高度
P_B	油压
P_C	套压
H_L	液体在长直导管中等温，层流条件下流动时的比能压头损失位移
H_L'	抽油柱在液体中运动时因粘滞阻尼造成的弹性比能损失的位移
V_{cp}	抽油过程中抽油杆柱运动平均速度
N'_L	抽油杆柱在粘性液体中运动时，因粘滞阻尼造成的弹性比能损失的功率
F	每个抽油周期内抽油杆柱运动能够提及在管内液体中的等效重力
V	单位时间内抽油杆柱因粘滞阻尼而造成的弹性损失位移
ρ_r	抽油杆密度
C_F	单位杆长的粘滞阻力系数
μ_0	原油的动力粘度
μ_w	水的动力粘度
μ	油层中液体动力粘度
\bar{n}	傅里叶所截项数

四、模型的分析、建立与求解

4.1 光杆悬点运动规律

游梁式抽油机是以游梁支点和曲柄轴中心的连杆做固定杆，以曲柄、连杆和游梁后壁为三个活动杆所构成的四连杆机构，如图 1 所示。游梁式抽油机悬点，即驴头悬点，运动的位移、速度和加速度是抽油机结构设计及力学分析的重要运动参数。目前，常用的简化方法，如简谐运动与曲柄滑块机构近似，只能给出其近似解，不能满足精确计算的需要。因此，本文根据游梁式抽油机四

连杆机构的几何关系和运动特点, 通过建立游梁摆动方程, 提出了求解游梁式抽油机悬点运动参数的新模型。为了便于与实验进行对比, 我们首先还原文献[1]中, 对光杆悬点的简谐运动与曲柄滑块机构近似, 之后再讨论新模型的方案。

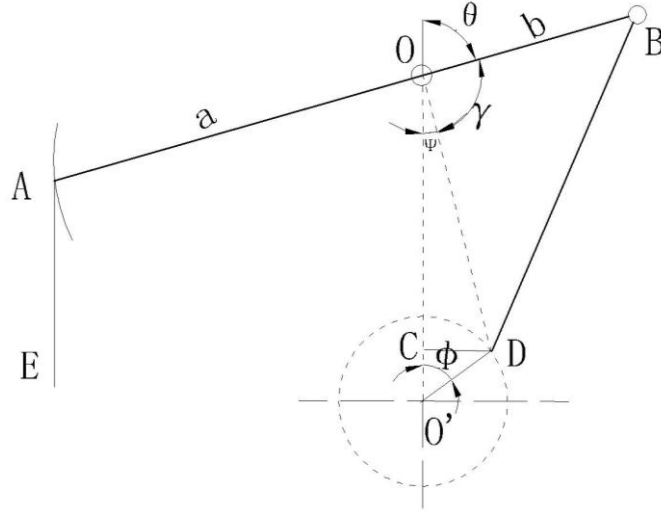


图 1 游梁式抽油机示意图

4.1.1 简谐运动简化模型

为方便讨论, 我们认为曲柄半径 r 比连杆长度 l 和游梁后壁 b 小很多时, 以致它与 l 和 b 的比值可以忽略, 此时, 游梁和连杆的连接点 B 的运动可以看做简谐运动, 即认为 B 点的运动规律和 D 点做圆运动时在垂直中心线上的投影 (C 点) 的运动规律相图。则 B 点经过 t 时间 (曲柄转过 φ 角) 时的位移 S_B 为:

$$S_B = r(1 - \cos \phi) = r(1 - \cos \omega t) \quad (1)$$

式中: φ —— 曲柄转角, $\varphi = \omega t$

ω —— 曲柄角速度

t —— 时间

悬点 E 的位移 S_E 为

$$S_E = \frac{AO}{BO} S_B = \frac{AO}{BO} r(1 - \cos \omega t) \quad (2)$$

E 点的速度为

$$V_E = \frac{dS_E}{dt} = \frac{AO}{BO} \omega r \sin \omega t \quad (3)$$

E 点的加速度为

$$a_E = \frac{dV_E}{dt} = \frac{AO}{BO} \omega^2 r \cos \omega t \quad (4)$$

由式(1)、(2)、(3)和(4)可以得到简化为简谐运动时悬点 E 位移、速度和加速度随 φ 角的变化曲线。

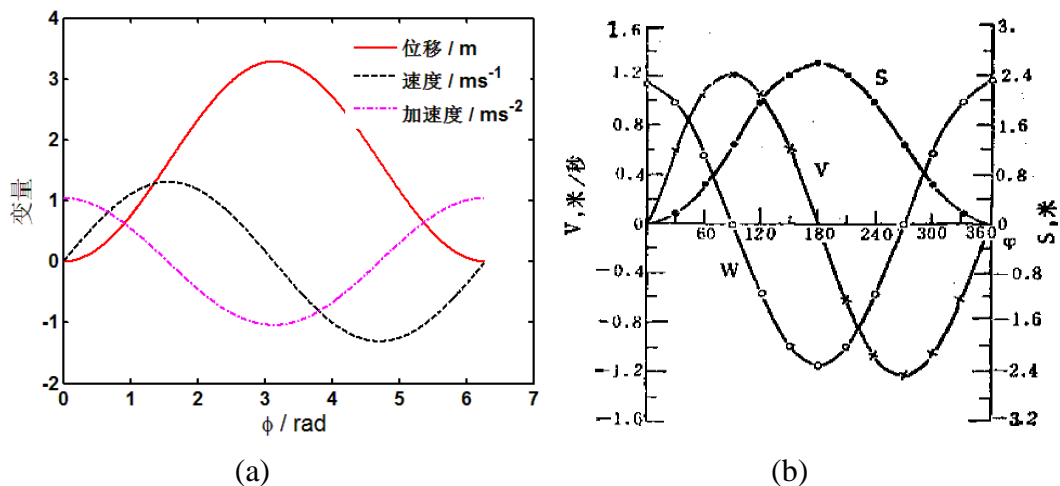


图 2 (a)简化为简谐运动时悬点 E 的位移速度，加速度运动规律 (b)文献[3]提供
CYJ5-2712 型号抽油机简谐运动悬点运动参数图形

由上图 (a) 可以看出，抽油机在一个冲程中，悬点的速度和加速度不仅大小在变化，而且方向也在发生改变。上冲程的前半冲程为加速运动，加速度为正（加速度方向与运动方向都向上）；后半冲程为减速运动（加速度方向与运动方向相反）。下冲程只是改变了运动方向，前半冲程任为加速运动（加速度方向与运动方向相同，都是向下）；后半冲程任为减速运动（加速度方向与运动方向相反）。在上下死点处（ $\phi=0, 2\pi$ ），加速度的绝对值最大为： $a_{\max} = \frac{AO}{OB} \omega^2 r$ 。

图 2 (b) 为文献[1]所提供的简谐运动时悬点位移，速度，加速度曲线本文计算的三种参数变化规律与文献报道的结论有着比较好的符合。

4.1.2 曲柄滑块机构简化模型

模型一中简化为简谐运动所得结果，只能在做不太精确的近似计算和分析中使用，因为在实际情况下，抽油机的曲柄半径 r 比连杆长度 l 的比值是不能忽略的，特别是冲程长度比较大时，忽略后会引起很大的误差。在将抽油机模型简化为曲柄滑块机构时，首先模型假设了 $\lambda=r/l$ 值在 0 到 1/4 之间，并且将 B 点绕游梁支点的弧线运动近似地看作是支线运动，如图 3 所示。

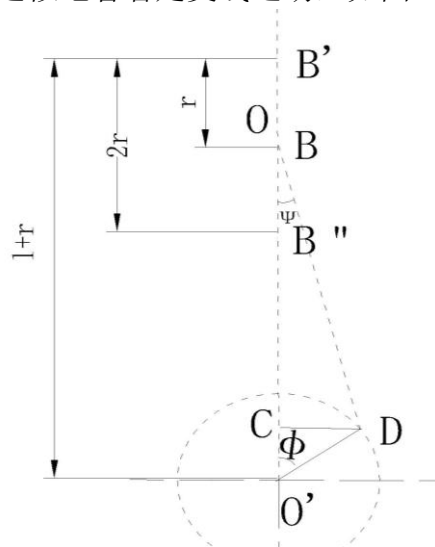


图 3 曲柄滑块近似机构示意图

但由本题附录一所提供的曲柄半径 $r=O'D=950\text{mm}$ 与连杆长度 $l=BD=3675\text{mm}$ ，可以得到 $\lambda=0.2585$ 。该值略大于理论 λ 最大的 0.25，因此该模型在假设上是合理的，同时也可以说明模型二也并非最佳的方案。

在这种曲柄滑块模型中： $\varphi=0$ 时，游梁与连杆的连接点 B 在 B' 点，为距离曲柄轴心最远的位置，相应于悬点 E 的下死点。

当 $\varphi=2\pi$ 时， B 点再 B'' 处，为距离曲柄轴心最近的位置，相应于悬点 A 为上死点。可以有： $O'B'=l+r, O'B=r\cos\phi+l\cos\psi$ 。

可以导出 B 点的位移方程： $S_B = O'B' - O'B = r[(1-\cos\phi) + \frac{1}{\lambda}(1-\cos\psi)]$

利用三角关系简化 $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\phi$,

最后得到 B 点位移方程： $S_B = r(1-\cos\phi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\phi)$

于是， B 点的速度为： $V_B = \frac{dS_B}{dt} = \omega r(\sin\phi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\phi)$

B 点的加速度为： $a_B = \frac{dV_B}{dt} = \omega^2 r(\cos\phi + \lambda\cos 2\phi)$

当已知 B 点的位移、速度、加速度之后，则可以用以下关系式求得悬点 E 的相应位移：

$$S_E = S_B \frac{AO}{BO} = \frac{AO}{BO} r(1-\cos\phi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\phi) \quad (5)$$

E 点的速度为

$$V_E = V_B \frac{AO}{BO} = \frac{AO}{BO} \omega r(\sin\phi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\phi) \quad (6)$$

E 点的加速度为

$$a_E = a_B \frac{AO}{BO} = \frac{AO}{BO} \omega^2 r(\cos\phi + \lambda\cos 2\phi) \quad (7)$$

由式(5)、(6)和(7)可以得到简化为曲柄滑块运动时悬点 E 位移、速度和加速度随 ϕ 角的变化曲线，如图 4 所示。

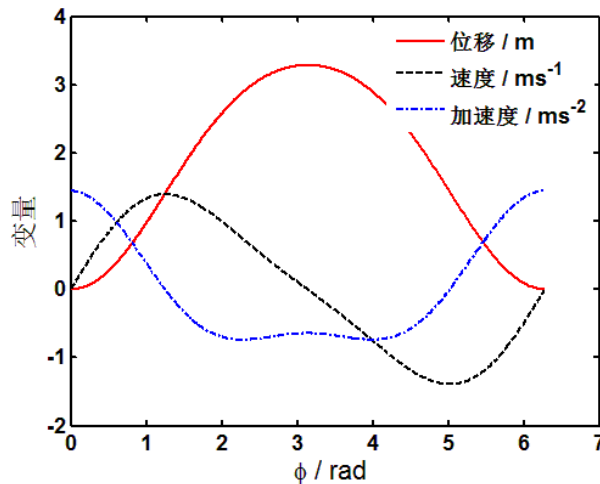


图 4 简化为曲柄滑块运动时悬点 E 的位移，速度，加速度运动规律

与模型一图 2 相比，尽管同一个 φ 角下的运动参数数值不同，但是其变化规律是类似的。但是仔细观察图 4 的速度曲线，可以看出在模型二下，速度曲线在斜率下降时有一定程度的变形，相应的速度变化趋势可以从加速度曲线中看出。在上下死点的最大加速度与模型一的结果比较分别大 $\lambda\%$ 和小 $\lambda\%$ 。

4.1.3 精确解析法

上述两种模型分别简化为简谐运动与曲柄滑块机构的研究结果只可以用于一般计算与分析，由于给出的只是近似解，都不能满足精确计算的需要。为此我们根据游梁式抽油机四连杆机构的几何关系和运动特点，通过建立游梁的摆动方程给出了另一种求解游梁式抽油机悬点运动参数的方法[4]，并与前两种方法进行了比较。

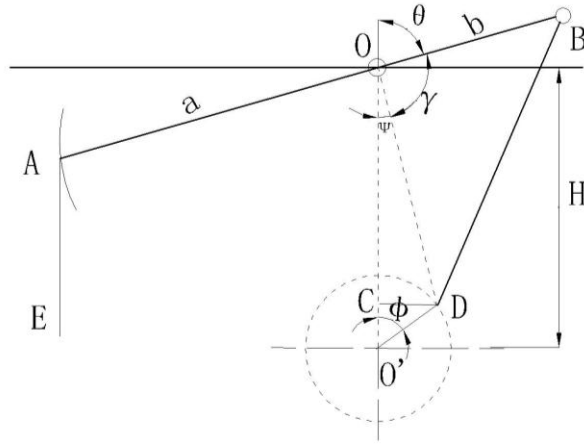


图 5 运动参数精确解析法示意图

1) 悬点 E 运动位移

不考虑抽油杆柱的弹性表现，假设柱塞与抽油机悬点具有相同的运动规律。游梁式抽油机结构简化模型如图 5 所示。

假定曲柄同样由下死点开始沿顺时针方向以角速度 ω 做匀速圆周运动。游梁的摆角定义为游梁后臂与上垂线方向的夹角 θ ，其计算如下

$$\theta = \pi - \gamma - \psi \quad (8)$$

式中 γ 为游梁与 J 的夹角； ψ 为 J 与下垂线方向的夹角。由下式求得

$$\gamma = \arccos \left[\frac{b^2 + J^2 - L^2}{2bJ} \right] \quad (9)$$

$$\psi = \arctg \left[\frac{r \sin \varphi}{H - r \cos \varphi} \right] \quad (10)$$

其中 $J = \sqrt{(r \sin \varphi)^2 + (Hr \cos \varphi)^2}$

将 (10) 式和 (9) 式代入 (8) 式得：

$$\theta = \pi - \arccos \left[\frac{b^2 + J^2 - L^2}{2bJ} \right] - \arctg \left[\frac{r \sin \varphi}{H - r \cos \varphi} \right] \quad (11)$$

由于游梁开始处于水平，即 $\theta=0$ ，因此悬点的位移是

$$S_A = a \cos \theta \quad (12)$$

2) 悬点 E 运动速度

将式(11)两边同对时间 t 求导数得到游梁摆动的角速度 θ' 为

$$\theta' = \frac{\omega r [J \sin(\varphi + \psi) + b \sin(\varphi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (13)$$

由几何关系可得:

$$J \sin(\varphi + \psi) = H \sin \varphi \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式得:

$$\theta' = \frac{\omega r [H \sin \varphi + b \sin(\varphi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (15)$$

上式即为游梁摆动的任意时刻的角速度公式，则悬点的运动速度为:

$$v = a\theta' = \frac{a}{b} \omega r \frac{[H \sin \varphi + b \sin(\varphi - \theta)]}{J \sin(\theta + \psi)} \quad (16)$$

3) 悬点 E 运动加速度

将式(16)两边同对时间 t 求导数，整理得任意时刻悬点运动加速度 a 为

$$a = \frac{a}{b} \omega^2 r \frac{[H \cos \varphi + b \cos(\varphi - \theta)] - 2b\omega r \theta' \cos(\varphi - \theta) - \theta'^2 \cos(\theta + \psi)}{J \sin(\theta + \psi)} \quad (17)$$

图 6 画出了在采用精确解析法之后，悬点 E 运动位移、速度及加速度曲线。

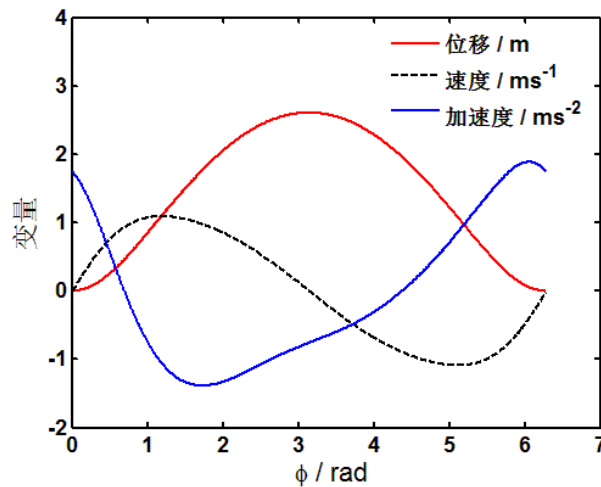


图 6 精确解析法模拟悬点 E 运动位移、速度及加速度曲线

为了对比三种模型的结果，我们将附件 1 中的实验测量悬点位移值与计算值进行对比。分别做出位移，速度，加速度的图形，如图 7 所示。

由图 7 可以看出，各种模型计算出的位移与速度差距不大，但是在加速度上有比较明显的区别。从图 7(a)位移的对比来看，严格解析法与实验值最为接近，而其他两种模型则差别比较大；对图 7(b)中的实验测量值进行处理时，我们采用了 9 次多项式拟合速度，符合的程度非常好，再通过对时间求导可以得到(c)图中的实验加速度(红色实线)。对比分析速度的各个模型，精确解析法依然较高程度的还原了实验测量值；对于图 7 (c)中的加速度，对比实验悬点加速度与文献报道的相关模型加速度图 7 (d)，可以看出我们的模型三依然存在一定的误差，但是依然表示出了加速度变化的相关趋势，而简谐模型与曲柄滑块近似的结果与文献报道值吻合。

综合考虑以上分析结果，在一般工程应用中，采用简化方法基本上可以满足要求，而在抽油机结构设计及力学分析中，则应采用精确方法。

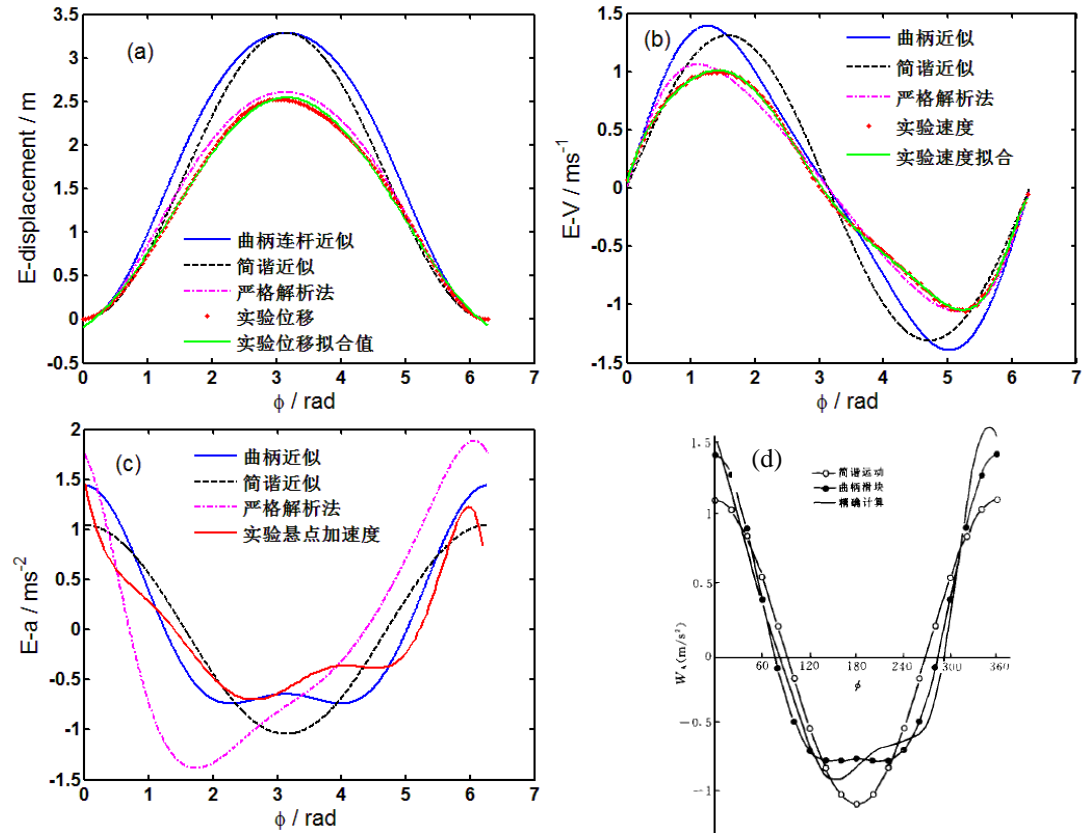


图 7 三种模型计算运动参数(a)位移(b)速度(c)加速度与实验值的对比；
(d)文献[3]中给出的加速度对比图

4.2 泵功图计算

抽油杆在有杆抽油系统中起着非常重要的作用，它是连接地面抽油机与井下抽油泵的桥梁。井下泵的运行状况会通过抽油杆上的载荷与运动的信息反映出来，即泵功图。泵功图是对抽油杆柱最下端载荷变化与位移变化规律及相互关系的直观描述，亦称为井下示功图。这类示功图包含了有杆抽油系统运行情况的丰富信息，是工况诊断和相关计算的重要基础资料。由于大部分抽油泵工作在离地面千米以下的地方，很难直接测得泵功图。如果利用井下示功图诊断

法来直接测得泵功图，由于它本身的缺点，即耗资甚巨、工艺复杂等缺点，无法广泛地在实际中应用。

因此，目前国内外学者在对有杆抽油系统井下工作状况进行研究时，必须首先研究抽油杆的动力学特性，建立抽油杆柱振动模型，并以此作为整个有杆抽油系统的模型进行故障诊断及井口产液量计算。

4.2.1 Gibbs 模型求解方法探讨

1963 年，Gibbs 首次提出了有杆抽油系统动态参数的预测模型[1]，该模型把悬点当做振源，将悬挂在悬点下的细长抽油杆的振动视为一个由悬点上下往复运动引起的受迫振动，建立了描述抽油杆柱纵向振动的有阻尼二阶偏微分方程(波动方程)，可采用数值求解的方法预测悬点动载荷变化。其提出的带粘滞阻尼的波动方程如下：

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \quad (18)$$

按照 Gibbs 方程中提到求解该方程的方式，采用分离变量傅里叶变换法求解波动方程。波动方程(18)的边界条件是将悬点动载荷函数 $D(t)$ 及光杆位移函数 $U(t)$ 展开成的傅氏级数：

$$D(t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (\sigma_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t) \quad (19)$$

$$U(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (v_n \cos n\omega t + \delta_n \sin n\omega t) \quad (20)$$

其特解如下：

位移与深度，时间的函数 $u(x_i, t)$

$$u(x_i, t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} [(O_n(x_i) \cos n\omega t + P_n(x_i) \sin n\omega t)] \quad (21)$$

载荷与深度，时间的函数 $F(x_i, t)$

$$F(x_i, t) = \frac{\sigma_0}{2} + EA_r \sum_{n=1}^{\bar{n}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} O_n(x_i) \cos n\omega t + \frac{\partial}{\partial x} P_n(x_i) \sin n\omega t \right\} \quad (22)$$

以上式中的 4 个傅里叶系数 σ_n , τ_n , v_n , δ_n 由实测的 $D(t)$ 和 $U(t)$ 曲线数值积分求得。计算时也可将 2π 周期 k 等分，采用级数近似的方法计算。表述如下：

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \cos n\omega t dt \approx \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D(p) \cos \left(\frac{2n\pi}{k} p \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \quad (23)$$

$$\tau_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \sin n\omega t dt \approx \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k D(p) \sin\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) \quad n=1,2,\dots,\bar{n} \quad (24)$$

$$v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega t) \cos n\omega t dt \approx \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k U(p) \cos\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) \quad n=0,1,2,\dots,\bar{n} \quad (25)$$

$$\delta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \sin n\omega t dt \approx \frac{2}{k} \sum_{p=1}^k U(p) \sin\left(\frac{2n\pi}{k} p\right) \quad n=1,2,\dots,\bar{n} \quad (26)$$

以 (19) 和 (20) 式为边界条件, 用分离变量法求解方程 (18) 便可得出抽油杆任意深度 x 断面的位移随时间的变化。

令 $U(x,t) = X(x)T(t)$, $X(x)$ 和 $T(t)$ 为分别仅含 x 和 t 的函数, 将其代入波动方程并整理得:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{cT'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (27)$$

上式仅含有一个独立变量, 因而它等于一个常数, 令其为 λ_n^2 , 代入(27)式并将其分离成两个常微分方程:

$$\begin{cases} T''(t) + cT'(t) + \lambda_n^2 a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda_n^2 X(x) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

方程组 (28) 中 (1) 式得周期解为: $T(t) = e^{in\omega t}$ 代入方程组第一个等式可得方程 (27) 的特解 λ_n :

$$\lambda_n = -\alpha_n + i\beta_n \quad (29)$$

式中 α_n 和 β_n 为实数, 其值为:

$$\alpha_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2}} \quad (30)$$

$$\beta_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2}} \quad (31)$$

当 $n=0$ 时, $\lambda_0=0$, 方程组(28)变为:

$$\begin{cases} T''(t) + cT'(t) = 0 \\ X''(x) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

其解为:

$$\begin{cases} T(t) = \xi \\ X(x) = \zeta + \eta x \end{cases} \quad (33)$$

方程组(28)中第二个等式解为谐波方程:

$$X(x) = \phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x \quad (34)$$

综合以上各式, 可求出方程 (27) 的解为:

$$U(x, t) = \xi(\zeta + \eta x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n \sin \lambda_n x + \theta_n \cos \lambda_n x) e^{in\omega t} \quad (35)$$

再经过变换可得到 Gibbs 方程的解析解为:

$$U(x, t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t) \quad (36)$$

由胡克定律, 抽油杆柱任意深度 x 断面上的动载荷随时间的变化为:

$$F(x, t) = EA_r \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \quad (37)$$

即:

$$F(x, t) = \frac{\sigma_0}{2} + EA_r \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O'_n(x) \cos n\omega t + P'_n(x) \sin n\omega t) \quad (38)$$

式 (35) 和 (37) 中的函数系数如下:

$$O_n(x) = (k_n \operatorname{ch}(\beta_n x) + \delta_n \operatorname{sh}(\beta_n x) \sin(\alpha_n x) + (\mu_n \operatorname{sh}(\beta_n x) + v_n \operatorname{ch}(\beta_n x) \cos(\alpha_n x) \quad (39)$$

$$P_n(x) = (k_n \operatorname{sh}(\beta_n x) + \delta_n \operatorname{ch}(\beta_n x) \cos(\alpha_n x) - (\mu_n \operatorname{ch}(\beta_n x) + v_n \operatorname{sh}(\beta_n x) \sin(\alpha_n x) \quad (40)$$

$$O'_n(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA_r} \operatorname{sh}(\beta_n x) + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) \operatorname{ch}(\beta_n x) \right] \sin(\alpha_n x) \quad (41)$$

$$+ \left[\frac{\delta_n}{EA_r} \operatorname{ch}(\beta_n x) + (v_n \beta_n - \delta_n \alpha_n) \operatorname{sh}(\beta_n x) \right] \cos(\alpha_n x)$$

$$P'_n(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA_r} \operatorname{ch}(\beta_n x) + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) \operatorname{sh}(\beta_n x) \right] \cos(\alpha_n x) \quad (42)$$

$$- \left[\frac{\delta_n}{EA_r} \operatorname{sh}(\beta_n x) + (v_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \operatorname{ch}(\beta_n x) \right] \sin(\alpha_n x)$$

$$k_n = \frac{\sigma_n \alpha_n + \tau_n \beta_n}{EA_r (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \quad (43)$$

$$\mu_n = \frac{\sigma_n \beta_n - \tau_n \alpha_n}{EA_r (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \quad (44)$$

式中 E 为弹性模量; A_r 为抽油杆柱的截面积; ω 为曲柄的角速度。

以上是一级抽油杆的系统动态参数的计算, 在实际的油田生产过程当中,

一般采用多级杆，所以对抽油杆柱的动载荷需要分级计算，逐级消除抽油杆住动载荷。首先计算第一级杆柱末端载荷与位移；然后以第一级杆柱末端载荷为初始及边界条件，计算第二级末端载荷即位移。以此类推，直至求出最后一级末端的载荷和位移，得出泵功图。

根据力的连续原理，计算第二级杆柱载荷与位移所需的傅里叶系数与计算第一级杆柱的系数的关系如下：

$$\sigma_{02}=\sigma_0, \quad \sigma_{n2}=EA_r O_n', \quad \tau_{n2}=EA_r P_n', \quad v_{02}=\frac{\sigma_0}{EA_r} L_1+v_0, \quad v_{n2}=O_n(x), \quad \delta_{n2}=P_n(x)$$

4.2.2 Gibbs 模型的算法实现

1) 对原始数据的处理

由于附录 6 提到有关悬点功图数据的来源为自动测试，并且附件 1、2 所提供的起始数据并不刚好是一个冲程的起点，上行，下行的时间可能并不完全相等。通过对第一问原始数据位移的分析，我们判断冲程的起始、终止位移应为 0 m，且约定上行的位移为正。

根据附件 1 与 2 中提供的冲次 n (分别为 7.6/min、4/min)，我们可以得到自动取点的间隔时间

$$\Delta t = \frac{60/n}{N-1} \quad (45)$$

其中 N 为实验数据的个数。

根据上式，在 Matlab 中很容易得到时间与实验载荷、位移对应的分离值 $D(t)$ 、 $U(t)$ 。例如图 7(a)红色点线，即实验悬点位移值与时间(或角度)的关系。

2) 计算粘滞阻尼系数 c

根据地面示功图计算井下示功图时，必须首先确定阻尼系数，它是影响诊断准确性的重要参数。抽油杆柱系统的阻尼力主要有抽油杆柱、接箍与液体之间的粘滞性阻尼力；杆柱及接箍与油管之间的非粘滞性摩擦力；光杆与盘根之间的摩擦力；泵柱塞与泵筒之间的摩擦力损失；泵阀和阀座内孔的流体压力以及杆柱材料的迟滞损失等。国内外许多人进行这方面研究。但许多研究得出的公式需要的参数较多，而且阻尼系数也随油区的变化，生产时期的不同，油井状态的变化而变化，因而使用不方便。

在本题此问中，我们首先采用 Gibbs 方程中所提供的方法计算粘滞阻尼系数 c ，在后文关于 Gibbs 模型的深入讨论中再采用其他方法计算该系数。

根据文献， c 可以表达为：

$$c = \frac{\pi a \gamma}{2L} \quad (46)$$

其中 γ 为无量纲的阻尼系数：

$$\gamma = \frac{4.42 \times 10^{-2} L (P_r - P_h) T^2}{(A^1 L^1 + A^2 L^2 + \dots + A^n L^n)} \quad (47)$$

式中 P_r 为光杆功率：即是抽油机悬点载荷做功的功率，是提升液体和克服井下消耗所需要的功率(kW)，可以由下式计算：

$$P_r = \frac{W_l' S n}{6 \times 10^4} \quad (48)$$

其中 W_l' 为液柱载荷或转移载荷(N): $W_l' = A_b L \rho_l g$

A_b 为泵的横截面积(m^2), L 为杆长(m), ρ_l 为混合液体密度(kg/m^3)

P_h 即是所谓的有用功率或称有效功率, 也称为水力功率, 是指在一定时间内, 将一定量的液体提升一定的距离所需要的功率(kW):

$$P_h = \frac{QHg}{86400} \quad (49)$$

式中 Q 为日油井产液量(kg/d), H 为泵对液体的有效提升高度(m)。

考虑套压和回压的影响时, 假设忽略气柱重力和进泵阻力的影响, 并认为环空中和油管中的液体密度相同, 有效提升高度为:

$$H = L_f + \frac{P_B - P_C}{\rho_l g} \times 10^6 \quad (50)$$

式中 P_r 、 P_h 分别为回压和套压(MPa); L_f 为动液面高度, 可以由下式计算:

$$L_f = \frac{\Delta W - 10^6 (P_B - P_C) A_b}{A_p \rho_l} \quad (51)$$

从式(48-51)可以计算得到(47)式的 γ 值, 进而计算得到 c 的值。根据附件 1 以及附近 2 中提供的油井基本参数, 如表 2 所示:

表 2 油井基本参数

数据号	1	2
井号	7#	1#
日期	2012.5.30	2010.12.1
泵径(mm)	70	44
一级杆杆长(m)	792.5	523.61
二级杆杆长(m)	无	664.32
三级杆杆长(m)	无	618.35
四级杆杆长(m)	无	无
油层中深(m)	无	1893.1
泵深(m)	793	1819.56
冲程(m)	3.2	4.2
冲次(1/min)	7.6	4
一级杆杆径(mm)	22	25
二级杆杆径(mm)	无	22
三级杆杆径(mm)	无	19
四级杆杆径(mm)	无	无

套压(MPa)	0.2	0.2
含水率(%)	98	91.2
油压(MPa)	0.3	0.3
地面原油密度(g/cm ³)	0.864	0.864
地面原油粘度(mPa*s)	30	30
原油体积系数	1.025	1.025

我们用以上 Gibbs 法得到了阻尼粘滞系数值：

表 3 Gibbs 法计算阻尼粘滞系数 $c(1/s)$

泵型号	阻尼粘滞系数 c
附件 1:7#	0.672
附件 2:1#	0.729

从表中可以看出，油井的阻尼粘滞系数大致在 0.6 左右，这与文献[4]估计的 $c=0.6$ 左右差距不大，可以慎重的选用为本文在 Gibbs 模型中的井液粘滞系数。

3) 系数求解

根据 $D(t)$ 和 $U(t)$ ，以及(23-26)积分计算四个傅里叶系数 σ_n ， τ_n ， v_n 和 δ_n 。

由于 $D(t)$ ， $U(t)$ 已经处理成离散值，使用 Matlab 编程对进行数值积分，本文直接采用梯形积分 *trapz* 函数计算四个傅里叶系数，而非利用 n 的级数形式进行近似计算。

例如，对于 σ_0 ，当 $n=0$ 时，根据(23)式，分别利用积分和级数两种算法，计算出这个参数数值分别为 71485.625 和 71608.706。可见两者相差 123.08，明显存在较大的差别。由于 σ_0 在最终求解 $u(x,t)$ 以及 $F(x,t)$ 时，对结果有着比较大的影响，所以，算法的选择也十分重要。

一般来说 n 越大越精确，但 Gibbs 等人[2]以指出 $n>4$ 后给出的傅里叶系数可以忽略。因此，本文计算中设 n 为 10。

其他参数， α_n ， β_n ， k_n ， μ_n ，使用式(30),(31),(40),(44)编程可以容易求解。

4) 其他相关函数

$O_n(x)$ 、 $P_n(x)$ 、 $O'_n(x)$ 和 $P'_n(x)$ 为计算泵位移和载荷的重要函数，通过(39-42)式，联立求解出的各项系数，可以得到与时间对应的离散值。

5) 位移与载荷

通过位移与载荷特解的(35)以及(38)式，对傅里叶系数 n 求和，可以直接得到各级连杆的位移和载荷值。

4.2.3 油井泵功图

基于以上对 Gibbs 模型的探讨以及算法描述，以及附录 1 和附录 2 中所提供油井的基本参数，我们计算了#7 以及#1 号油井的泵功图，分别显示在图 8(a)(b)中。

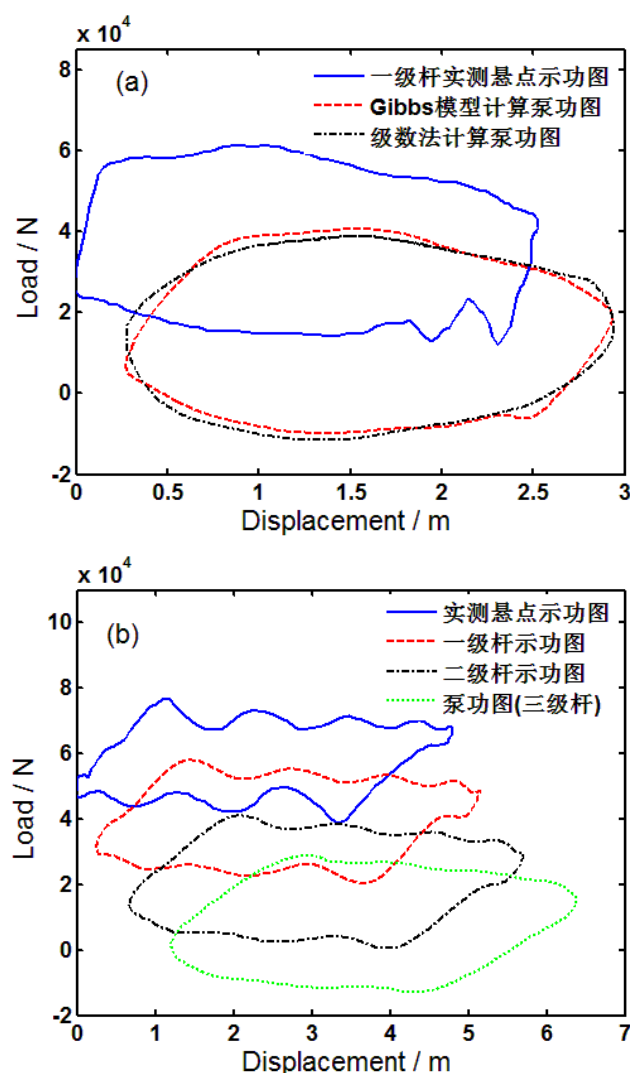


图 8 (a) #7 油井泵功图 (b) #1 号油井泵功图

图 8 中蓝色实线均表示为地面实测悬点示功图，红色虚线为第一级杆的示功图。图 8(b) 中黑色点虚线为第二级杆的示功图，最后绿色点画线为三级杆的示功图，即最下层的泵功图。将(a)(b)图中泵功图与本题附录 5 图 5(B)所示理论泵功图形状基本吻合，表明所设计的模型与程序具有可用性。

图 8(a) 中黑色虚线为采用传统级数方法近似处理四种傅里叶参数后得到的结果，可以看出，级数计算会很明显的忽略掉原始数据的一些细节问题，比如右下角的锯齿部分。而采用精确积分(红色虚线)方法得到的结果则较好的体现了示功图的特征。

从上图可知，由地面示功图经计算机处理的得到泵功图，由于已经清除抽油杆柱的变形、粘滞阻尼和振动等影响，会真实地反映泵的工作状况。这不仅很容易地对影响抽油泵工作的各种因素做出定性分析，而且可以求出活塞冲程、有效冲程、泵排量和油管漏失等。当求出正确的泵功图时，能够准确地推断出抽油泵的工作状况[5]。

为了更加明晰的显示每一级杆的位移与载荷的变化，我们在图 9 与图 10 中分别给出了两个油井的位移、载荷随时间的变化图。

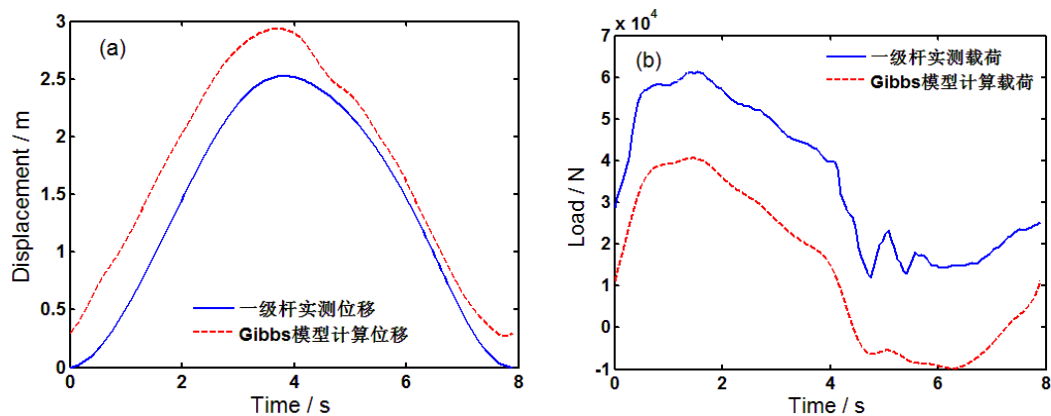


图 9 #7 油井(a)位移(b)载荷随时间变化图

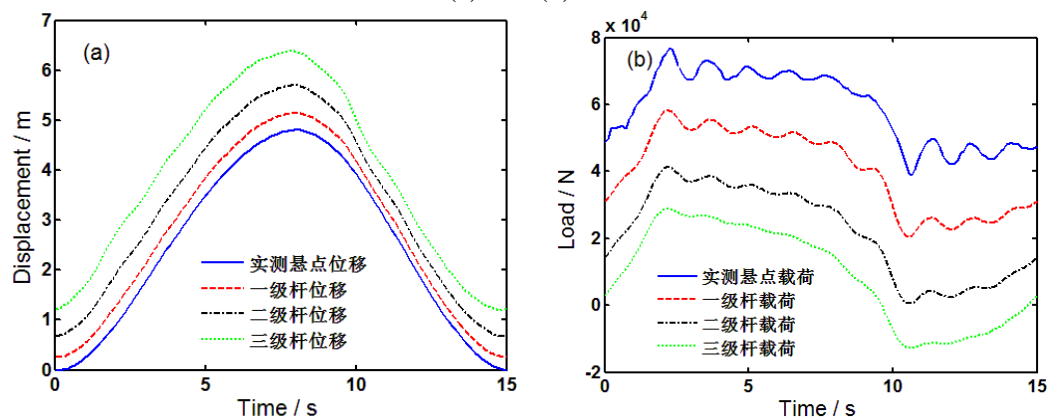


图 10 #1 油井(a)位移(b)载荷随时间变化图

在实际情况计算时，一定要考虑液体浮力的作用，基于 Gibbs 方程，利用提供的悬点示功图数据，在计算出最下层杆的载荷后，需要减去杆所受到的浮力，所以每一级杆所计算的载荷都会有一定程度的下降，这与 Gibbs 等人[1]所报道的结果非常相似。

4.2.4 对结果的误差讨论

由于附件中没有给出油井管理器所测的地下泵功图，我们无法对比计算泵功图与实验的误差，但是通过模拟一级杆长 $x=1\text{m}$ 时的泵功图，我们可以估量 Gibbs 模型产生的误差，图 11 给出了假设一级杆 $x=1\text{m}$ 时的泵功图与实测悬点示功图的对比。

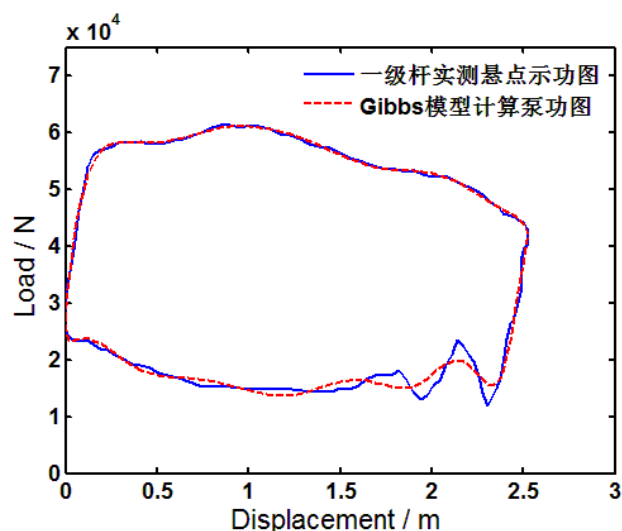


图 10 当 $x=1\text{m}$ 时模拟的泵功图与地上示功图

当 $x=1\text{m}$ 时的泵功图，理论上应该与地上悬点所测的示功图一致。由图 10 可知，计算出的结果还是与实验值有一定误差，其产生误差可能性如下：

1. 从地面示功图中取数据是自动机器采集的，在坐标轴上取数据时，不管坐标轴线作的多么精细，误差是不可避免的。

2. Gibbs 波动方程在杆式油井中应用过程中，傅立叶系数是通过载荷、时间、位移、时间曲线计算出来的。而在取数据中，只有地面示功图，以位移为等份取得数据。由于数据点个数有限，不能无限微分时间，所以为产生比较明显的误差，如上图右下角锯齿部分。如果 Δt 可以取到足够小，那么计算出的结果应当与实测值一致。

3. Gibbs 模型本身的误差问题。Gibbs 假设杆柱在垂直井中工作，抽油杆柱不与油管发生摩擦或摩擦载荷不计，显然，在实际情况下模型的假设是不可靠的[6]。

4. Gibbs 提到的相邻两杆在交界处的连接条件，没有考虑杆级连接处上级抽油杆突出的环形面积所受的油管内液体的压力，也存在一定的误差。

4.3 泵功图在油井产量中的应用

我们建立了 2 个不同的泵功图估计油井产量的模型，一是泵的理论排量模型，另一个是利用“有效冲程”估计的油井产量模型。前者基于抽油机的冲次、冲程、抽油泵的参数、原油物性参数给出了油井的理论产量，后者则考虑了相应的影响因素，如漏失和充气等的影响，更加接近实际的产量。

4.3.1 泵的理论排量模型

假设柱塞冲程长度等于悬点冲程长度，泵内为油水两相混合物且充满时的井口产液量为抽油机井的理论产液量。

泵的工作过程是有三个基本环节所组成，即活塞在泵内让出体积，原有进泵和从泵内排除原油。在理想情况下，活塞上、下一次进入和排除的液体体积都等于活塞让出的体积 V_p 。

其计算表达式为：

$$V_p = A_p S \quad (52)$$

其中： A_p 活塞的截面积(m^2)， S 为光杆冲程(m)

因此日产量 Q_t 为：

$$Q_t = 1440 A_p S n \quad (53)$$

在实际油井中，由于不可以忽略冲程损失和液体的收缩对排量的影响，因此我们建立模型二计算油井的实际产量。

4.3.2 油井的实际产量模型

油井的实际产液量 Q 是指井口原油脱气后的地面实际产液量，在抽油井生产过程中，实际产量 Q 一般都比理论产量 Q_t 低，两者的比值叫泵效，用 η 表示。即，

$$\eta = Q / Q_t \quad (54)$$

影响泵效的因素很多，但从深井泵工作的三个基本环节（活塞让出体积，原油进泵和从泵内排出原油）和经地面脱气和冷却后液体体积收缩来考虑，泵效可以写为：

$$\eta = \eta_p \eta_l \eta_g \eta_t \quad (55)$$

其中 η_p 为活塞冲程影响系数,考虑抽油杆和油管变形对柱塞冲程影响； η_l 为液体漏失系数,考虑泵工作时液体漏失的影响； η_g 为充满系数,考虑油井含气的影响； η_t 为液体的收缩性系数,考虑液体从井下到地面容器时体积减少的影响。

1) 冲程损失对排量系数的影响

由于深井泵工作特点，抽油杆柱和油管柱在工作过程中承受着交变载荷，从而发生弹性伸缩，使活塞冲程 S_p 小于光杆冲程 S 。因而，减小了活塞让出的体积。如图 11 中斜线所示，为抽油杆柱和油管弹性变形对冲程的影响。

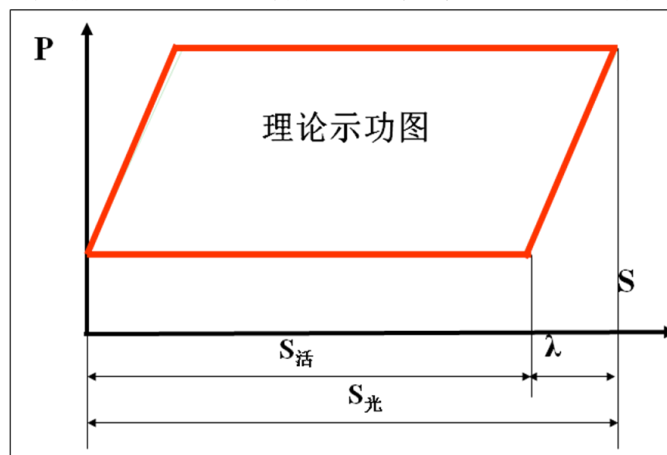


图 11 理论示功图

活塞冲程影响系数 η_p 可按下式计算:

$$\eta_p = \frac{S_p}{S} = \frac{S - \lambda}{S} \quad (56)$$

冲程损失 λ 主要考虑静载荷和惯性载荷的影响。

a) 静载荷响引起的冲程损失

由于作用在柱塞上的液体的重量在上、下冲程中交替分别有油管道抽油杆柱再由抽油杆柱转移到油管,从而引起杆柱和管柱交替增载和卸载,使杆柱和管柱发生交替的伸长和缩短。根据胡克定理有:

$$\lambda_r = W'_l \left(\sum_{i=1}^n \frac{L_{ri}}{E_r A_{ri}} + \frac{L_t}{E_t A_t} \right) \quad (57)$$

其中 W'_l 为液柱载荷(N); $W'_l = A_p \rho_l L_r g$; λ_r 为静载荷影响引起的冲程损失(m); ρ_l 为液体密度(kg/m); L_{ri} 为第*i*级杆的长度(m); L_t 为油管的长度(m); A_t 为油管截面积(m); E 为抽油杆的弹性模量(N/m²); E_t 为油管弹性模量(N/m²)。

b) 惯性载荷引起的冲程的损失

当悬点到达上死点时,柱塞速度趋于零,抽油杆由于惯性还会带着柱塞继续上行,使柱塞比静载变形时向上多移动一段距离。当悬点到达下死点时,抽油杆的惯性力向下,使抽油杆伸长,柱塞又比静载变形时向下多移动一段距离。因此,由于惯性载荷作用,柱塞冲程比静载变形时要增加。惯性载荷引起的冲程增加量 λ_g 由下式计算:

$$\lambda_g = \frac{W_r S n^2 L_r}{1790 A_r E_r} \quad (58)$$

式中: λ_g 为惯性载荷引起的冲程增加量(m); W_r 为杆柱重量(N)。

根据 $\lambda = \lambda_r - \lambda_g$ 得:

$$\eta_p = \frac{S_p}{S} = \frac{S - \lambda_r + \lambda_g}{S} \quad (59)$$

2) 气体对泵效的影响

抽油泵工作时,总会有或多或少的气体伴随油流进入泵内。气体的来源主要是: (1)井下游离气进入泵中; (2)上冲程时吸入泵中的液体在泵的入口处油气分离所产生的气,如图 12 所示是泵内充气的泵功图。气体对排量系数的影响可用充满系数 η_g 来衡量。

$$\eta_g = \frac{1 - KR}{1 + R} \quad (60)$$

其中 K 为余隙比, $K=V_s/V_p$, V_s 为活塞在下死点时, 吸入凡尔和排出凡尔之间的泵筒容积 (称余隙容积), V_p 为活塞让出体积, R 表示泵内气油比。

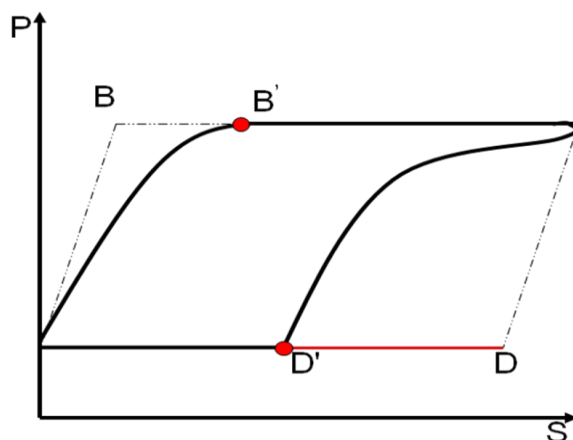


图 12 充气时的泵功图

3) 液体的收缩性对排量系数的影响

在泵吸入处的压力和温度的条件下, 一定体积的混合液进入抽油泵泵筒, 而当它们到达地面油罐时由于进行了脱气和冷却, 使油和水的体积都会发生变化。液体的收缩性对排量系数的影响大小可用液体的收缩性系数来表示。液体的收缩性系数可按下式计算:

$$\eta_t = \frac{1}{b_o(1-F_w) + b_w F_w} \quad (61)$$

b_o 为原油体积系数, b_w 为水体积系数, F_w 为含水率。

一般的, 对于泵吸入口 $P = 1.5 \times 10^6 - 3.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ 和 $T = 30 - 40^\circ \text{C}$ 时 $b_o = 1.1 - 1.5$,

$b_w = 1.005 - 1.025$ 。

4) 漏失对排量系数的影响

影响排量系数的漏失包括: 泵筒与柱塞间隙漏失、阀漏失、油管丝扣漏、腐蚀穿孔漏、制造缺陷的管壁砂眼、裂缝漏和泄油器漏等。

正常情况下, 仅考虑泵筒与柱塞间隙漏失, 液体漏失按下式计算:

$$Q_l = \frac{1.57 D_p \delta^3 \Delta p}{\mu L_p} - 0.5 \pi D_p \delta v_p \quad (63)$$

其中 $P_d = P_o + \rho_l g L_p$, $v_p = S_p n / 30$, $\Delta p = P_d - P_i$

Q_l 为柱塞与泵筒间的漏失 (m^3/s), μ 为井液体动力粘度 ($\text{Pa}\cdot\text{s}$); δ 柱塞与套筒配合单边间隙 (m); L_p 为柱塞长度 (m); v_p 为柱塞移动速度 (m/s); Δp 为柱塞

两端压差(Pa); P_o 为油压(Pa); P_i 为沉没压力(Pa)。

统一单位后, 可以得出液体漏失 η_1 系数为:

$$\eta_1 = 1 - \frac{86400Q_1}{Q} \quad (64)$$

根据问题二中计算的泵功图可得, 所研究的两口井可以忽略漏失和充气的影响, 因此我们只考虑冲程损失和液体的收缩对排量的影响。结合两口抽油井的参数见表 2, 编写程序计算出了两口井的理论产量和实际预测产量, 如下表 4:

表 4 油井产量

	理论产量 t/d	实际预测产量 t/d
#7(1 级杆)	134.4	122.6
#1(3 级杆)	36.7	31.1

由上表可知, 考虑了有效冲程和液体压缩系数#7 井的产量与理论产量比值 $\eta = Q/Q_i$ 为 0.9123, #1 号为 0.8480。可见载荷和液体压缩系数对产量的影响比较大。

产量的影响因素还有很多, 针对具体的油田需要考虑实际的情况, 考虑相应的影响因素, 如漏失和充气等的影响。

4.4 Gibbs 模型的深入研究

Gibbs 方程将所有的粘滞阻尼影响都归结为等效的粘滞阻尼影响这一项, 所以该系数对泵功图的计算结果有很大影响。对于 Gibbs 模型中粘滞阻尼系数, 很多学者都是依据一些假设而给出的, 并不能完全反映实际情况, 因此本文就此对其进行了深入的研究, 并提出了一些改进。

4.4.1 考虑比能损失推导的阻尼粘滞系数

由 Gibbs 在 1967 年所发表的文章可知, 阻尼系数可以通过式(46) $c = \frac{\pi a \gamma}{2L}$ 解出来, 其中关键参数为无系数阻尼因数 γ 的。这里我们给出一种基于以下假设计算新的 γ 的计算方法[7]。

首先给出该模型的假设:

- 1) 假设光杆悬点系简谐运动, 并以光杆瞬时运动速度的均方根来表示推油杆运动的平均速度。
- 2) 用推油杆柱运动平均速度的积分表示粘滞阻尼损失。
- 3) 将抽油杆柱在粘滞性液体中运动时由粘滞阻尼引起的弹性比能损失的位移, 等效为同种液体在与推油柱尺寸相同的长直导管中等温, 层流流动时比能损失的压头高度。
- 4) 认为在上述两种情况下, 其无因次阻尼常数相等, 即 $\gamma = \lambda$ 。

其具体公式推导如下：

1) 因粘滞阻尼而造成的弹性比能损失的位移

利用水力学中的“达普卡-比尤巴塔 (Dapcu-Beulata)”公式计算出液体的压头损失 H_L ，等效表示抽油柱在同种液体中运动时因粘滞阻尼造成的弹性比能损失的位移 $H_{L'}$ 。

$$H_{L'} \approx H_L = \lambda(L/D)(V_{cp}^2 / 2g) \quad (65)$$

2) 抽油杆柱在粘性液体中运动时，因粘滞阻尼造成的弹性比能损失的 N'_L

$$N'_L = FV \quad (66)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} F = (\rho_r - \rho_l)QT \\ Q = \frac{(A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n)}{L} \cdot V_{cp} \\ V = H_{L'} / T \end{cases}$$

代入，得：

$$N'_L = (\rho_r - \rho_l) \frac{(A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n)}{L} \frac{2S}{T} H_{L'} \quad (67)$$

3) 用实测光杆马力与抽油泵水马力计算 N'_L

$$N'_L = 75(P_r - P_h) \quad (68)$$

4) 相关参数计算

光杆马力 P_r 和抽油泵马力 P_h 的计算详见式(48)和(49)

5) 计算 λ 的值。

联立 (65)，(67) 和 (68) 式有，

$$\lambda = \frac{184L(P_r - P_h)T^3}{(\rho_r - \rho_l)(L/D)(A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n)S^3}$$

所以有，

$$c = \frac{\pi a \gamma}{2L} = \frac{\pi a}{2} \frac{184(P_r - P_h)T^3}{(\rho_r - \rho_l)(L/D)(A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n)S^3} \quad (69)$$

对于本文所研究的两口井，我们采用表一中两口井的数据和在问题二中计算出的相关参数的值，可以得到：

1) 一级杆抽油结构：

$$\begin{aligned}
c &= \frac{184(P_r - P_h)T^3}{(\rho_r - \rho_{mix})(L/D)(A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n)S^3} \\
&= \frac{184 \times 792.5 \times (12.0821 - 10.8955) \times 1.360 \times (7.98)^3}{(8456 - 997.28)(792.5/0.022)(792.5 \times 3.80 \times 10^{-4})(3.2)^3} \\
&= 0.431
\end{aligned}$$

结果与问题二中按 Gibbs 方法求得的值 0.676 具有相同的数量级, 说明结果的正确性; 但同时也应注意到与之前计算的有一定差别。

2) 三级杆抽油结构。

利用同样的公式, 可以计算得到

$$c = 0.295$$

与在问题二中计算得到的 c 的数量级相同, 同时结果也偏小。

4.4.2 利用摩擦功确立的阻尼系数计算公式

在解 Gibbs 波动方程时, 可用等值阻尼代替真实阻尼, 从而简化阻尼参数的求解。代替的条件是以系统中消除等值阻尼力时, 每一个循环中的能量与消除真实阻尼时相同。所以, 可以通过计算抽油杆在一个循环中由粘滞阻力引起的摩擦功来确定阻尼系数[8]。

具体推导如下:

微元 dx 的粘滞阻力

$$F_d = C_F \frac{\partial u}{\partial t} dx = c \rho_r A_r \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (70)$$

长度为 L 的抽油管在一个周期内的总粘滞摩擦功

$$W = \int_0^L \int_0^T F_d \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = c \rho_r f \int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \quad (71)$$

联系上述两式, 有

$$c = \frac{W}{\rho_r A_r \int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx} \quad (72)$$

其中总粘滞摩擦功的计算公式如下:

$$\begin{aligned}
W &= 2\pi\mu \left\{ \left[\frac{1}{\ln m} + \frac{4B_1}{B_2}(B_1+1) \right] \int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{B_2}(B_1+1) \times \int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right] dx \right\} \quad (73)
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } m = \frac{D_t}{D_r}, \quad B_1 = \frac{m^2 - 1}{2 \ln m} - 1, \quad B_2 = m^4 - 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{\ln m}$$

μ 为油层中液体的动力粘度，满足 $\lg \mu = \sum_i x_i \lg \mu_i$ [9]。

将上式代回粘滞摩擦系数的表达式有

$$c = \frac{2\pi\mu}{\rho_r A_r} \left\{ \frac{1}{\ln m} + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \left[B_1 + \frac{\int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right] dx}{\int_0^L \left[\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx} \right] \right\} \quad (74)$$

到这里还不能直接计算 c ，因为 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 还不知道。

一种解决方案是将悬点运动看成简谐运动，考虑无粘滞阻尼 ($c=0$) 时的情况，此时 Gibbs 方程简化为一个简谐运动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (75)$$

对应的边界条件为

$$\begin{cases} u|_{x=0} = \frac{S}{2} (1 - \cos \omega t) \\ -A_r E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (76)$$

由此无粘滞阻尼的简谐运动方程解得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{S}{2} \omega \left(\cos \frac{\omega}{a} x + \tan \frac{\omega}{g} L \sin \frac{\omega}{a} x \right) \sin \omega t \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} &= \frac{S}{2} \omega \frac{1}{\cos \frac{\omega}{a} L} \sin \omega t \end{aligned}$$

带入式，得

$$c = \frac{2\pi\mu}{\rho_r A_r} \left\{ \frac{1}{\ln m} + \frac{4}{B_2} (B_1 + 1) \left[B_1 + \frac{2}{\frac{\omega L}{a} \times \frac{1}{\sin \frac{\omega L}{a}} + \cos \frac{\omega}{a} L} \right] \right\} \quad (77)$$

对于本文所研究的两口井，代入表一中所列的和前文中计算出的相关数据可得出其阻尼系数。

1) 一级杆的粘滞阻尼系数

$$\frac{\omega L}{a} = 0.1266 \quad m = \frac{D_t}{D_r} = \frac{70}{22} = 3.182, \quad B_1 = \frac{3.128^2 - 1}{2 \ln 3.128} - 1 = 2.941$$

$$B_2 = m^4 - 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{\ln m} = 3.128^4 - 1 - \frac{(3.128^2 - 1)^2}{\ln 3.128} = 29.572$$

$$c = \frac{2 \times 3.14 \times 0.9588 \times 10^{-3}}{8456 \times 3.8013 \times 10^{-4}} \times \left\{ \frac{1}{\ln 3.182} + \frac{4}{29.572} (2.941 + 1) \left[2.941 + \frac{2}{(0.1266) \times \frac{1}{\sin(0.1266)} + \cos(0.1266)} \right] \right\}$$

$$= 0.00556$$

这个数据和前面得到的相差很大，这与相关文献[10]的结论相符。因为影响阻尼的因数相当多，而且很多因数也很难确定。不同估算方法可能会出现很大偏差，要靠实际情况进行取舍。

2) 三级杆的粘滞阻尼系数

用相同算法，可以得到

$$c = 0.02073$$

同样也小于前面计算得到的值，不过没有一级杆的变化幅度大。从公式中可以看出当泵径与抽油杆杆径比值减小时，这种算法得到的值会快速增加。

4.4.3 改进的利用摩擦功确立的阻尼系数计算公式

(77)式所得到的公式是根据(73)式经过简谐简化而来的，当时这么处理的原因是 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的值无法求出。实际上我们可以根据 Gibbs 方程中根据悬点的位移-载荷计算得到 $u(x, t)$ 的表达式进行计算[10]。其表达式具体如下：

$$u(x, t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} O_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t \quad (78)$$

其对时间的微分为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\bar{n}} n\omega (P_n \cos n\omega t - O_n(x) \sin n\omega t) \quad (79)$$

首先取 $c=0$ ，由 (4-18) 式得到 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 后代入 (73) 式，得到新的 c 的值；然后反复不断迭代，即采用简单迭代法，就可以达到 c 的精确值。这样的计算量对现代计算机来说是非常轻松的。

对于本文所研究的两口井，用表 2 中和前文计算出的相关数据，用 Matlab 进行编程。取 c 的初值为 0 和 1 进行对一级杆和三级杆 10 次迭代，迭代次数为 0 使得数据为初值。其结果如下所示：

表 5 7#井(一级杆)的粘滞阻尼系数

迭代次数	粘滞阻尼系数 c	
	迭代初始值 0	迭代初始值 1
0	0.0000000000000000	1.0000000000000000
1	0.005562417923472	0.005562572772747
2	0.005562418787073	0.005562418787097
3	0.005562418787073	0.005562418787073
4	0.005562418787073	0.005562418787073
5	0.005562418787073	0.005562418787073
6	0.005562418787073	0.005562418787073
7	0.005562418787073	0.005562418787073
8	0.005562418787073	0.005562418787073
9	0.005562418787073	0.005562418787073
10	0.005562418787073	0.005562418787073

表 6 1#井(三级杆)的粘滞阻尼系数

迭代次数	粘滞阻尼系数 c	
	迭代初始值 0	迭代初始值 1
0	0.0000000000000000	1.0000000000000000
1	0.020811847020028	0.020819539468035
2	0.020811986847566	0.020811986899410
3	0.020811986848509	0.020811986848509
4	0.020811986848509	0.020811986848509
5	0.020811986848509	0.020811986848509
6	0.020811986848509	0.020811986848509
7	0.020811986848509	0.020811986848509
8	0.020811986848509	0.020811986848509
9	0.020811986848509	0.020811986848509
10	0.020811986848509	0.020811986848509

可以看到, c 的值收敛很迅速, 第一次计算之后前两位有效数字就已经稳定。和前面所使用简谐近似所得到的 c 值相比也十分接近, 这进一步验证了简谐近似的合理性和正确性。初值的影响对结果不是很大, 这可能与收敛值比较小有关系。从表中可以看出迭代 5 次之后前五位有效数字就不再发生变化, 这对于工程上的问题已经足够。如果 c 的实际值比较大则达到收敛值迭代次数会增多, 但是一般迭代 10 次已能满足精度要求的。

五、模型的评价及推广

本文紧密围绕题干提出的四大问题, 从经典物理运动规律和机械原理出发, 运用数学思维, 结合波动方程, 建立了抽油机系统的简化模型并求解。

针对游梁式抽油机的几何特征和运动关系, 我们分别运用简谐近似模型和曲柄滑块模型对其进行求解, 并与精确解析解进行了比较, 结果发现除加速度

局部有微小差别外,三种方法所得其他参数差别较小,可以用于实际油井分析。对于简谐近似和曲柄滑块模型由于不同的抽油机的参数的限制,这种简化有时候带入的误差会比较大,但是可以满足一般的计算。当需要精确计算时则可以采用精确解析解法。

为了获得抽油机系统的动态参数,我们根据 Gibbs 给出的悬点示功图转化为地下泵功图模型,对其进行分析并采用精确的数值积分求解算法进行求解,得出两口井的泵功图,并与传统级数算法结果对比,克服了传统算法过程繁杂性,我们利用现代计算机采用较精确的算法,不仅提高了计算速度而且提高了精度。

根据 Gibbs 模型计算得出的泵功图对油井产量的影响,由于油井产量的影响因素较多,我们根据实际油井的情况,采用了两种方法对两口油井的产量进行了估计,一种模型基于抽油机的冲次、冲程、抽油泵的参数、原油物性参数给出了油井的理论产量,另一种则考虑了相应的影响因素,如有效冲程、液体收缩性、漏失和充气等的影响,更加接近生成实际情况。不同的油井其产量估计应考虑其相应的因素。

最后,我们针对 Gibbs 模型波动方程进行分析,在传统阻尼系数计算方法的基础上,使用了三种改进方法:考虑比能损失,摩擦功,改进的摩擦功方法重新计算了阻尼系数,更真实的反应实际情况。由于阻尼系数的影响因素相当多,而其中的许多因素很难确定,也有诸多计算方法,但是对于具体油井要通过试算的方法选用适合本油井的阻尼系数计算公式。

当然,由于专业知识以及时间的限制,我们的模型还有很多地方值得推敲和进一步改进,但总体上已完成了题目本身的各项要求,并有所创新。而且我们的模型结合实际情况不仅可以应用于油田的生产分析,还可以改进应用于其他开采生产设计分析。

六、参考文献

- [1] Gibbs.S.G, Neely,A.B, Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells, J. Pet. Tech., 93-98, 1966。
- [2] Gibbs.S.G, Method of Determining Sucker Rod Pump Performance, United States Patent Office, 3343409, 1967。
- [3] 王鸿勋,张琪,《采油工业原理》,石油工业出版社,46-111,1985。
- [4] 王常斌,陈涛平,郑俊德,游梁式抽油机运动参数的精确解,石油学报,2,107-110,1998
- [5] 冯娜娜,抽油机井泵况智能诊断方法研究,燕山大学硕士学位论文,38-41,2006。
- [6] 高银中,用示功图计算抽油机井井口产液量方法研究,北京交通大学硕士学位论文,22-23,2007。
- [7] 曹钧合,抽油杆柱动态方程等效粘滞阻力系数的确定,石油钻采工艺,2,97-101,1988。
- [8] 张琪,吴晓东,抽油杆计算机诊断技术及其应用,华东石油学院学报,2,144-159,1984。
- [9] 田立楠,纯气体、混合气体及液体粘度的计算,化肥设计,35,9-12,1997。
- [10] 葛述卿,有杆抽油泵性能及泵功图计算分析,西安理工大学硕士论文,44-52,2004。

附录

相关可执行程序已经打包在 C80144001 程刘马 fj.rar 文件中。
包含 4 个问题 4 个文件夹，分别说明如下：

问题一：

jqjx.m: 精确解析法计算运动参数

duli_sim.m: 简谐近似以及曲柄滑块机构计算的运动参数以及相关图形的程序。

a_jqjx.dat, v_jqjx.dat, E_dis_jqjx.dat: 分别为 jqjx.m 精确解析法计算出的悬点加速度，速度以及位移文件，用于 duli_sim.m 中画图。

E_dis_exp_new.dat: 实测#7 油井悬点位移值

问题二：

gibbs.m: 解决一级杆油井的 Gibbs 方程

gibbs3.m: 解决三级杆油井的 Gibbs 方程

E_dis_exp_new.dat: 实测#7 油井悬点位移值

E_zaihe_exp_new.dat: 实测#7 油井悬点载荷值

E_dis_exp3_new.dat: 实测#1 油井悬点位移值

E_zaihe_exp3_new.dat: 实测#1 油井悬点载荷值

u_js.dat, f_js.dat: 分别为级数法(子文件夹 jishu)中计算的#7 油井位移载荷值

问题三：

chanliang.m: 计算两台油井的产量

运行后能直接输出相关模型对于的产量值

问题四：

Question4_2_1_1.m 1 级杆的 c 值。

运行结果中 c 为 Gibbs 方法计算的，c_new 为第一种方法所得。

Question4_2_1_2.m 3 级杆的 c 值。

运行结果中 c 为 Gibbs 方法计算的，c_new 为第一种方法所得。

Question4_2_2_1.m 1 级杆的 c 值。

运行结果中 c 为 Gibbs 方法计算的，c_new2 为第二种方法所得。

Question4_2_2_2.m 3 级杆的 c 值。

运行结果中 c 为 Gibbs 方法计算的，c_new2 为第二种方法所得。

对于文件夹中的程序，请分别运行

Question4_2_3_1.m

Question4_2_3_2.m

计算结果为不同初值迭代之后得到的粘滞阻尼系数

它们计算时间比较长，大约为 5-10 分钟，请耐心等待。