

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## “华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

学 校 上海理工大学

---

参赛队号 10252015

---

1.史琴

---

队员姓名 2.吕坤勇

---

3.张宽

---

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## “华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

### 题 目                      军事行动避空侦察的时机和路线选择

#### 摘                      要：

大型国防工程施工、武器装备实验或部队大规模移动的隐蔽性关系到国家安全以及战争胜败，因此研究卫星的运行规律以及采取合理的手段对付卫星侦察显得尤为重要。本文在此背景下，研究了 1) 三种卫星（Q，L 和 K）的运行规律，根据此规律预测卫星在未来时刻的过顶信息，监测薄弱环节，并提出规避时间或应对措施；2) 部队大规模转移时为应对卫星侦测所采取的策略；以及 3) 利用移动导弹发射装置规避卫星侦察的可行性、条件和方式。本文主要以星下点轨迹为切入点，对卫星的运行规律做了详尽的研究。

对于问题一，我们首先根据卫星的特点，建立了卫星方位角与经纬度的转换模型以及近圆轨道卫星星下点轨迹的数学模型。利用附件 1 提供的 Q 型和 L 型卫星的参数描绘出各自的一条星下点轨迹，根据已经观测到的数据，验证星下点轨迹的平移特性。为了更好地反映运动规律，本文对星下点轨迹的平移经度做了修正，以提高预测精度。经预测，Q 型卫星在 D3 和 D5 天分别有 3 次和 2 次的过顶时刻，该卫星在 D3 和 D5 天能够侦测到施工区域的时刻分别有 4 次和 4 次，施工时应避开这些时段。对于 L 型卫星，由于它们是双星网组，我们在分别分析和验证了单独的运行规律后，专门研究了两颗卫星的相位差，约为  $180^\circ$ 。双星组合的侦测能力大大地提高，每天路过施工区域的高达 8 次之多，且由于其周期接近，相位相差  $180^\circ$ ，两个卫星的侦测时段能比较均匀地分布在一天之内，威胁性较强。我们预测了 8 月 23 日两个卫星的过顶信息 8 次和确保安全的施工应避开的时段 11 次。对于 K 型卫星，我们研究了观察站观测时差和卫星运行周期的关系，结合 Q 型卫星和 L 型卫星的运行特点，首先拟合了过观测区域的升星下点轨迹和降星下点轨迹。其次，为了精确计算出星下点轨迹的平移周期，我们提出利用最小误差法将一个模糊周期确定到精确值的算法。结合算法的特点，我们得出结论：该卫星已经被连续观察最少 3 次才能够确定下次被观测到的情况，且观察次数越多，预报精度越高。详细数据请参考附件。

对于问题二，我们首先研究了新疆地区的高速公路信息，并获取相关经纬度数据。基于总行车时间最短的原则，我们选取了从阿勒泰经喀什到和田的行车路径。结合 Q 型卫星和 L1 型卫星的运行规律和侦测区域大小，研究这两颗卫星扫掠行车路径的时间和部队当前的位置。往返过程中均需两次停车休息，去程大约花费 53 小时 37 分钟，回程大约花费 46 小时 20 分钟。行车路程中需要规避 Q 和 L1 型卫星侦测的具体数据见附件。

对于问题三，我们利用卫星相邻经过目标区域的时间差来躲避侦察。特别对于相邻两次进入目标区域上升和下降方向不同时，两次的时间相差比较大，可以使移动导弹装置利用这个时间差，尽量朝与下一个区域相会时间短的方向移动，对于避无可避的情况，主要采取一些伪装的方式来掩护。

**关键词：**避空侦察，星下点轨迹，最小误差法，应对策略

# 目录

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 1 问题重述.....                  | 5  |
| 1.1 问题背景.....                | 5  |
| 1.2 问题分析.....                | 5  |
| 2 模型假设.....                  | 7  |
| 3 符号说明.....                  | 7  |
| 4 问题一模型建立与求解.....            | 7  |
| 4.1 问题描述及分析.....             | 7  |
| 4.2 卫星在地球上的信息.....           | 8  |
| 4.2.1 星下点轨迹.....             | 8  |
| 4.2.2 卫星的侦察范围.....           | 11 |
| 4.3 Q卫星轨道分析.....             | 11 |
| 4.3.1 卫星方位角与经纬度的转换.....      | 11 |
| 4.3.2 星下点运动轨迹.....           | 12 |
| 4.3.3 Q型卫星轨迹预测.....          | 16 |
| 4.4 L卫星轨道分析.....             | 19 |
| 4.4.1 L卫星方位角与经纬度的转换.....     | 19 |
| 4.4.2 星下点运动轨迹.....           | 19 |
| 4.4.3 L型卫星轨迹预测.....          | 21 |
| 4.4.4 针对L型卫星的分析.....         | 21 |
| 4.5 K型卫星轨道分析.....            | 22 |
| 4.5.1 K型卫星轨道预测.....          | 22 |
| 4.5.2 预测卫星运动轨迹所需最少的观测次数..... | 25 |
| 5 问题二模型建立与求解.....            | 26 |
| 5.1 问题描述及分析.....             | 26 |
| 5.2 出发行军路线确定.....            | 26 |
| 5.2.1 最短时间路径选择.....          | 26 |
| 5.2.2 行军路线安排.....            | 28 |
| 5.3 返回行军路径.....              | 32 |
| 6 问题三模型建立与求解.....            | 33 |
| 总结.....                      | 34 |
| 参考文献.....                    | 35 |
| 附件列表.....                    | 36 |

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

卫星侦察是利用卫星搭载光电遥感器、雷达或者无线电接收机等侦察设备，从卫星运行轨道上对地面、海洋或空中目标实施侦察、监视或跟踪，以获取目标辐射、反射或发射的光或电磁波等信息，从中提取军事情报的一种侦察方式。

大型国防工程施工、武器装备实验或部队大规模移动的隐蔽性关系到国家安全以及战争胜败，通常采用“避、变、骗、反”四种手段对付卫星侦察。“避”，就是掌握卫星运行规律，避开卫星过顶的时间段组织行动；“变”，就是针对侦察卫星的特点，相应地改变地面部队的活动规律，减弱卫星侦察的效果；“骗”，就是将军事目标伪装成非军事目标；“反”，就是利用各种武器摧毁卫星上的设备或卫星载体。无论哪种方式，都必须准确把握卫星的运行规律。

## 1.2 问题分析

卫星轨道的形状和大小是由长轴和短轴决定的，而交点角  $\Omega$ 、近地点幅角  $\omega$  和轨道倾角  $i$  则决定了轨道在空间的方位，如图 1 所示，这五个参数称为卫星轨道要素或者根数。有时还加上过近地点时刻  $t_0$ ，合称为六要素。有了这六要素，就可知道任何时刻卫星在空间的位置。因此，对军事卫星以及其它对国家利益产生重大影响的卫星，其根数被作为国家机密严格保密。

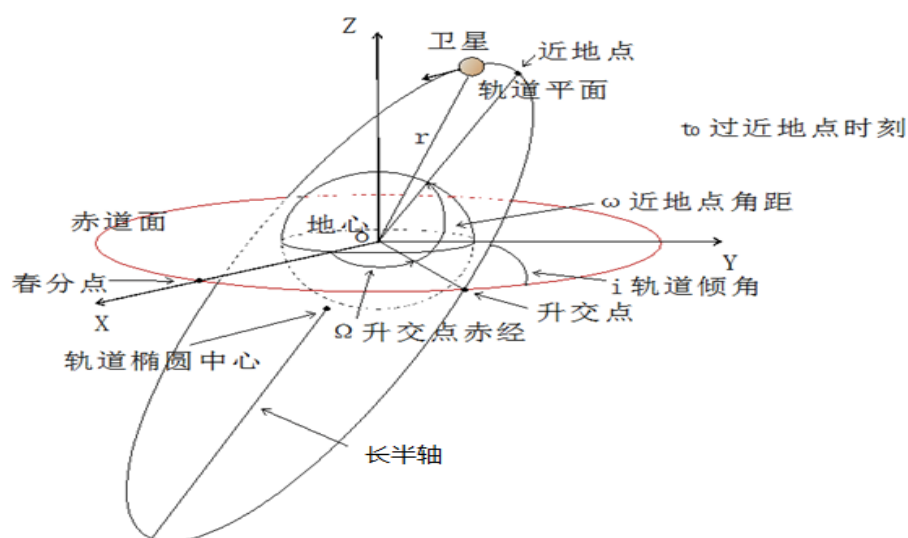


图 1 卫星轨道图

卫星与地球中心连线在地球表面的交点称为星下点。卫星运动和地球自转使星下点在地面移动所画出的轨迹称为星下点轨迹。不同的运行轨道会产生不同的星下点轨迹；并且，由于地球不停地自转，卫星沿轨道运行时，其后一圈的星下点轨迹一般不再重复前一圈的星下点轨迹。本题的主要关注点在于准确判断卫星的星下点轨迹何时经过给定地域。

卫星在太空中运行时，会实时地向地面发射出“信标信号”，用于地面站对卫星的自动跟踪（其它功能与本题无关），保证卫星不会失控。这是一个频率和幅度都固定的信号，各星不同且不会改变。当地面观察站的天线对准卫星时，就

会接收到这组信号，据此可以判断卫星的位置，从而实现对卫星的追踪。尽管卫星的侦察范围很大，但仅在星下点处侦察效果最好。为简单计，本题约定，对区域目标，卫星星下点进、出给定区域的时间区间称为卫星的过顶时间。

具体需通过数学建模，解决以下问题：

问题一：某地域（地图坐标：北纬 31.90~32.25 度；东经 118.02~118.91 度）内拟建设一大型国防工程，计划利用境外卫星过顶的间隙组织施工。该地域长期受 Q 型、L 型卫星（有关数据见附件 1）监视。附件 2-1、附件 2-2、附件 2-3 是 Q 型、L 型、K 型卫星被配置在该区域内某观察站（北纬：32.0209 度；东经：118.7681 度）观测到的情况，请你们据此完成以下任务（注：附件中数据不是附件 4 中定义的“过顶时间”，而是观察站本次最早观察到卫星的时刻、卫星与观察站距离最近的时刻和本次观察结束的时刻，但它们之间可以换算）：

1. 附件 2-1 给出了 D0、D1、D2 日 Q 型卫星被该观察站观测到的情况，请预测此后一天（D3）、此后三天（D5）的卫星被观测到的情况及过顶情况，并结合 Q 型卫星的侦察范围给出 D3、D5 两天内确保安全施工的时段。

2. L 型卫星是双星（L-1、L-2）协作工作。附件 2-2 给出了 L-1、L-2 卫星在 8 月 16 日-21 日被该观察站观测到的情况，请你们研究两星之间的相对位置的变化情况，由于 L 型卫星是雷达成像照相侦察卫星，能全天候、全天时进行侦察，并有一定的穿透能力，因而威胁比较大，请给出 8 月 23 日 L-1、L-2 卫星被观测到的情况及过顶情况和确保安全施工的时段（不考虑 Q 型卫星），并进一步寻找它们在侦察方面的薄弱环节。

3. 附件 2-3 是某卫星（记为 K 型）十次被该观察站观测到的情况，除此对其一无所知。请你们预测其未来三次的被观测到的情况，并说明该卫星已经被连续观察最少  $n$  次才能够确定下次被观测到的情况所需要的  $n$ ，以及观察次数对预报精度的影响。

问题二：某部需要从新疆的阿勒泰隐蔽地经喀什运动到和田并在和田执行某任务，24 小时后再隐蔽地返回阿勒泰（不必经喀什），部队可以按需要选择在高速公路（最大速度 100 公里/小时）或普通公路（除高速之外的其他公路，最大速度 50 公里）上行进，假设部队出发时（2016 年 11 月 1 日凌晨 5 时整）Q 型卫星、L-1 卫星（它们的轨道要素见附件 1，其他 L 型卫星都不考虑）均位于各自轨道的近地点。行车时车队最大长度 2 千米，部队每开进 10~12 小时可选择途经的县级以上（含县级）城市休息 10 小时以上（即连续开进时间不少于 10 小时，不多于 12 小时），请你们根据附件 3 给出的地图（必要时可借助因特网获取有关地理信息），设计合理的行军时机、路线和宿营地，避开 L-1 卫星侦察，并预测 Q 型卫星的过顶时刻，以便及时做好隐蔽工作，尽可能快地安全到达目的地。

问题三：研究导弹发射装置的战时隐蔽问题。有专家提出，运动方式可能是移动发射装置规避卫星侦察的有效方案。请你们研究以下问题：假设某移动发射装置可在某一指定区域内自由运动，分别研究针对 Q 型、L 型（包括 L-1、L-2）、K 型卫星的侦察能够规避的可行性、条件（区域大小、形状、路网状况及其他你们认为需要的条件）和方式。欢迎进一步针对两种或三种卫星的组合侦察能够规避的可行性、条件和方式。并考虑卫星参数变化对方案的影响。

## 2 模型假设

(1)假设在没有地球自转的情况下，卫星轨道平面随太阳转动角度与地球随太阳转动角度是完全相同的，即在计算卫星轨道的时候只需要考虑地球自转引起的变化，忽略其公转带来的微小差异；

(2)假设卫星周边环境稳定，不存在其他未知因素影响卫星轨道；

(3)假设在一定精度范围内，卫星轨道为圆轨道；

(4)只考虑地球形状摄动对卫星轨道的影响，即地球扁率因素引起的一阶摄动，忽略地球引力位系数中量级小于  $10^{-6}$  的项数。

## 3 符号说明

|             |                |                 |           |
|-------------|----------------|-----------------|-----------|
| $\omega_e$  | 地球平均自转角速度      | $e$             | 卫星轨道的偏心率  |
| $\Omega$    | 升交点赤经变化率       | $i$             | 卫星轨道的倾角   |
| $a_e$       | 地球赤道半径         | $\omega_s$      | 卫星平均运动角速度 |
| $f$         | 地球扁率           | $T$             | 卫星轨道周期    |
| $\mu$       | 地心引力常数         | $\phi$          | 大地纬度      |
| $J_2$       | 二阶引力位系数        | $\lambda$       | 大地经度      |
| $A$         | 卫星天线方位角        | $\phi'$         | 地心纬度      |
| $E$         | 卫星天线仰角         | $\lambda'$      | 地心经度      |
| $\omega_e'$ | 升交点相对经度零点的西退速率 | $\Delta\lambda$ | 经度差       |
| $a$         | 卫星轨道的长半径       | $\Delta t$      | 卫星运动时间    |
| $h$         | 卫星到地球表面的最短距离   | $T_Q$           | Q 卫星的周期   |
| $\theta$    | 卫星可侦察区域的角度     | $T_s$           | 卫星的周期     |
| $R$         | 地球的半径          |                 |           |

## 4 问题一模型建立与求解

### 4.1 问题描述及分析

某地域（地图坐标：北纬 31.90~32.25 度；东经 118.02~118.91 度）内拟建设一大型国防工程，计划利用境外卫星过顶的间隙组织施工。该地域长期受 Q 型、L 型卫星监视，附件 1 中已给出卫星成像参数和轨道参数。附件 2-1、附件 2-2、附件 2-3 是 Q 型、L 型、K 型卫星被配置在该区域内某观察站（北纬：32.0209 度；东经：118.7681 度）观测到的情况。

根据附件数据，可以得知卫星的根数，包含倾斜角、升交点赤径、偏心率、周期、长半轴等要素，由此可以计算出卫星轨道以及卫星成像单景面积大小等特征。

对问题一中三小问分别进行具体分析如下：

第一小问中附件给出 D0、D1、D2 日 Q 型卫星被该观察站观测到的情况，需要预测此后一天（D3）、此后三天（D5）的卫星被观测到的情况及过顶情况，并结合 Q 型卫星的侦察范围给出 D3、D5 两天内确保安全施工的时段。通过附件 2-1 数据可以知道，当卫星距离观测站约 1675km 的时候可以被观测站监测到，将此数据转换成在卫星星下点的经纬度范围，由此可以确定最先和最后观察到卫星的时间。根据 Q 型卫星侦察范围判定卫星的侦查范围和过顶情况。所以本题的关键在于分析计算出地球自转情况下 Q 型卫星的卫星轨道或星下点轨迹<sup>[1]</sup>，建

立合适的模型拟合卫星的运动，从而可以预测 D3、D5 两天内卫星的运动轨迹和过顶情况<sup>[2]</sup>，判别卫星能够被观察站监测的时间、经过施工区域的情况以及能够确保安全施工的时段。

第二小问中的 L 型卫星是双星协作工作，给出了 L-1、L-2 卫星在 8 月 16 日-21 日被该观察站观测到的情况，需要研究两星之间的相对位置的变化情况以及 8 月 23 日 L-1、L-2 卫星被观测到的情况及过顶情况和确保安全施工的时段，并进一步寻找它们在侦察方面的薄弱环节。通过附件 2-2 数据可以知道，L-1 和 L-2 卫星被观察到的时间有交叉，可采用同上题同样的方法，计算出两颗卫星的星下点轨迹。根据附件 1 卫星资料可知 L 型两颗卫星升交点相差约  $180^\circ$ ，结合其星下点轨迹和各自的周期等信息可总结出两颗的相对位置情况。本题的关键在于分析计算出地球自转情况下 L 型卫星的卫星轨道或星下点轨迹，建立合适的模型拟合卫星的运动，从而可以预测 8 月 23 日 L-1、L-2 卫星被观测到的情况及过顶情况和确保安全施工的时段。

第三小问仅提供了 K 型卫星十次被该观察站观测到的情况，需预测其未来三次的被观测到的情况，并说明该卫星已经被连续观察最少  $n$  次才能够确定下次被观测到的情况所需要的  $n$ ，以及观察次数对预报精度的影响。通过提供的数据，我们可以描绘出 K 型卫星在观测站周围的情况并总结出相邻两次被监测到的时间差。通过对星下点轨迹的分析总结，找出时间差与星下点轨迹周期的关系，摸索星下点轨迹的移动周期，拟合 10 组数据。 $n$  的个数和卫星运动模式有关，找出星下点轨迹移动规律后可确定  $n$  的个数。

## 4.2 卫星在地球上的信息

### 4.2.1 星下点轨迹

人造地球卫星在地面的投影点(或卫星和地心连线与地面的交点)称星下点，用地理经、纬度表示。卫星运动和地球自转使星下点在地球表面移动，形成星下点轨迹。对于位于星下点处的地面观察者来说，卫星就在天顶。卫星经过升交点时，星下点在赤道上。将星下点轨迹画在地图上便是星下点轨迹图。在星下点轨迹图上可以看出某一个时间卫星在某地的天顶附近。在麦卡托投影地图上，近地卫星的星下点轨迹像一条正弦曲线，如图 2 所示。在轨道设计中，常用星下点轨迹图来表示卫星飞经的区域。

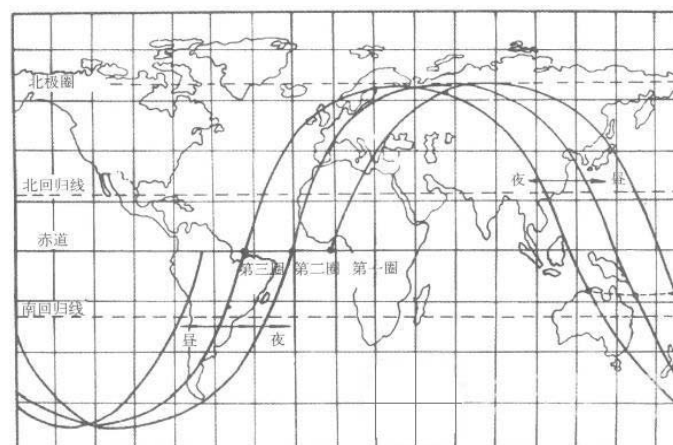


图 2 麦卡托投影下某星下点轨迹图



已有  $\Omega$  为升交点赤经变化率、 $\omega_e$  为地球平均自转角速度，有

$$\Omega = -\frac{3}{2} J^2 \sqrt{\mu} \frac{a_e^2 \cos i}{a^2 (1-e^2)^2} (\text{rad} / s)$$

$$a_e = 6378137m$$

$$J_2 = 1.083 \times 10^{-3}$$

$$\omega_e = \omega_e - \Omega$$
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$
$$\sin \hat{SD} = \sin \hat{\Omega S} \cdot \sin i$$
$$\sin \phi' = \sin n\Delta t \cdot \sin i \quad (1)$$

9

$$\phi' = \arcsin(\sin n\Delta t \cdot \sin i)$$

而由地心纬度  $\phi'$  转换为大地纬度  $\phi$  的公式为

$$\tan \phi' = \frac{1}{1 - f^2} \tan \phi \quad (2)$$

式中,  $f = 1/298.257$  为地球扁率。令

$$\widehat{W_0 S} = l, \quad \angle SW_0 D = \psi$$

那么, 在球面三角形  $\Delta WSW_0$  中, 根据边的余弦定理及五元素公式, 有

$$\begin{aligned} \cos l &= \cos \omega_e' \Delta t \cdot \cos n\Delta t + \sin \omega_e' \Delta t \cdot \sin n\Delta t \cdot \cos i - \sin l \cdot \cos \psi \\ &= \sin \omega_e' \Delta t \cdot \cos n\Delta t - \cos \omega_e' \Delta t \cdot \sin n\Delta t \cdot \cos i \end{aligned} \quad (3)$$

在球面直角三角形  $\Delta DSW_0$  中, 有

$$\begin{aligned} \cos l &= \cos \Delta\lambda \cdot \cos \phi' \\ \sin l \cdot \cos \psi &= \sin \Delta\lambda \cdot \cos \phi' \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sin \Delta\lambda \cdot \cos \phi' &= -\sin \omega_e' \Delta t \cdot \cos n\Delta t + \cos \omega_e' \Delta t \cdot \sin n\Delta t \cdot \cos i \\ \cos \Delta\lambda \cdot \cos \phi' &= \cos \omega_e' \Delta t \cdot \cos n\Delta t + \sin \omega_e' \Delta t \cdot \sin n\Delta t \cdot \cos i \end{aligned}$$

于是

$$\tan \Delta\lambda = (-\sin \omega_e' \Delta t \cdot \cos n\Delta t + \cos \omega_e' \Delta t \cdot \sin n\Delta t \cdot \cos i) / (\cos \omega_e' \Delta t \cdot \cos n\Delta t + \sin \omega_e' \Delta t \cdot \sin n\Delta t \cdot \cos i)$$

$t$  时刻卫星经度  $\lambda$  为

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

这里地心经度与大地经度等同, 无须转换。

由于在上述推导中, 忽略了卫星运动速率的非均匀性和轨道近动率的非线性, 因此为了保证计算精度, 星下点轨迹从赤道起算外推不得超过  $1/4$  圈, 也就是说, 在公式 (1) 和 (3) 中,  $\Delta t$  应满足

$$-T/4 < \Delta t < T/4$$

式中,  $T$  为轨道平周期。这样每次需先从升交点开始向北、向南各外推  $1/4$  圈后再转到从降交点开始向南、向北各外推  $1/4$  圈, 然后再从下一圈的升交点开始向北、向南各外推  $1/4$  圈。如此一圈一圈地计算星下点轨迹。

当降交点开始逆卫星飞行方向向北外推时, 这时星下点地心纬度公式改为

$$\phi' = \arcsin(-\sin n\Delta t \cdot \sin i)$$

地心经度的计算公式不变。地心纬度转换为大地纬度的公式由 (2) 式给出。如此可以计算出卫星每秒一点的星下点大地经、纬度。

在计算卫星星下点轨迹的时候, 我们还需要考虑卫星的运动方向。根据卫星轨道平面相对于地球赤道平面的位置, 可以将卫星轨道分为顺行轨道和逆行轨道, 卫星的运行分别如图 4 所示。顺行轨道的特点是轨道倾角即轨道平面与地球赤道平面的夹角小于  $90^\circ$ , 在这种轨道上运行的卫星, 绝大多数离地面较近, 高度仅为数百公里, 故又将其称为近地轨道。逆行轨道的特征是轨道倾角大于  $90^\circ$ , 欲把卫星送入这种轨道运行, 运载火箭需要朝西南方向发射, 不仅无法利用地球自转的部分速度, 而且还要付出额外能量克服地球自转。因此, 除了太阳同步轨道外, 一般都不利用这类轨道。

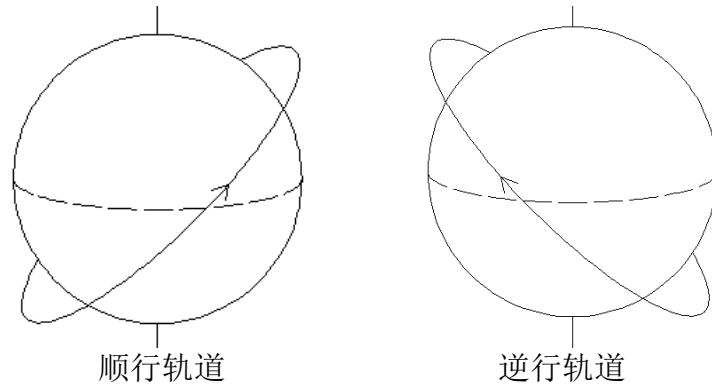


图4 卫星运行轨道

#### 4.2.2 卫星的侦察范围

卫星相对于地球的位置如图 5 所示，其中地球的半径为  $R$ ，卫星到地球表面的最短距离为  $h$ ，则卫星可侦察到的范围为从卫星到地球的两条切线。侦察角度  $\theta$  根据式(4)计算。

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right) \quad (4)$$

计算可得，Q 卫星的侦察范围约为  $21.4^\circ$ ，L 卫星的侦察范围约为  $25.0^\circ$ 。为了安全起见，我们约定当卫星能够侦察到的地方都具有危险性。确定安全施工时段时均按照这一假设进行计算。

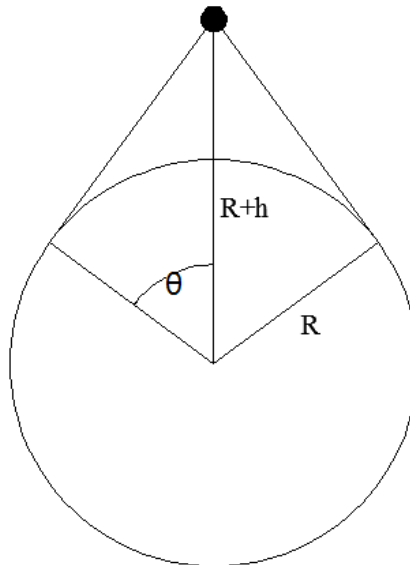


图 5 卫星侦察范围

### 4.3 Q 卫星轨道分析

#### 4.3.1 卫星方位角与经纬度的转换

根据附件 2 中的天线方位角度 (Azm)，天线仰角 (Elv) 和卫星与观测者距离 (Range) 以及观测站的经纬度 (北纬:  $32.0209^\circ$ ；东经:  $18.7681^\circ$ ) 把卫星的星下点经纬度计算出来，计算过程如下：

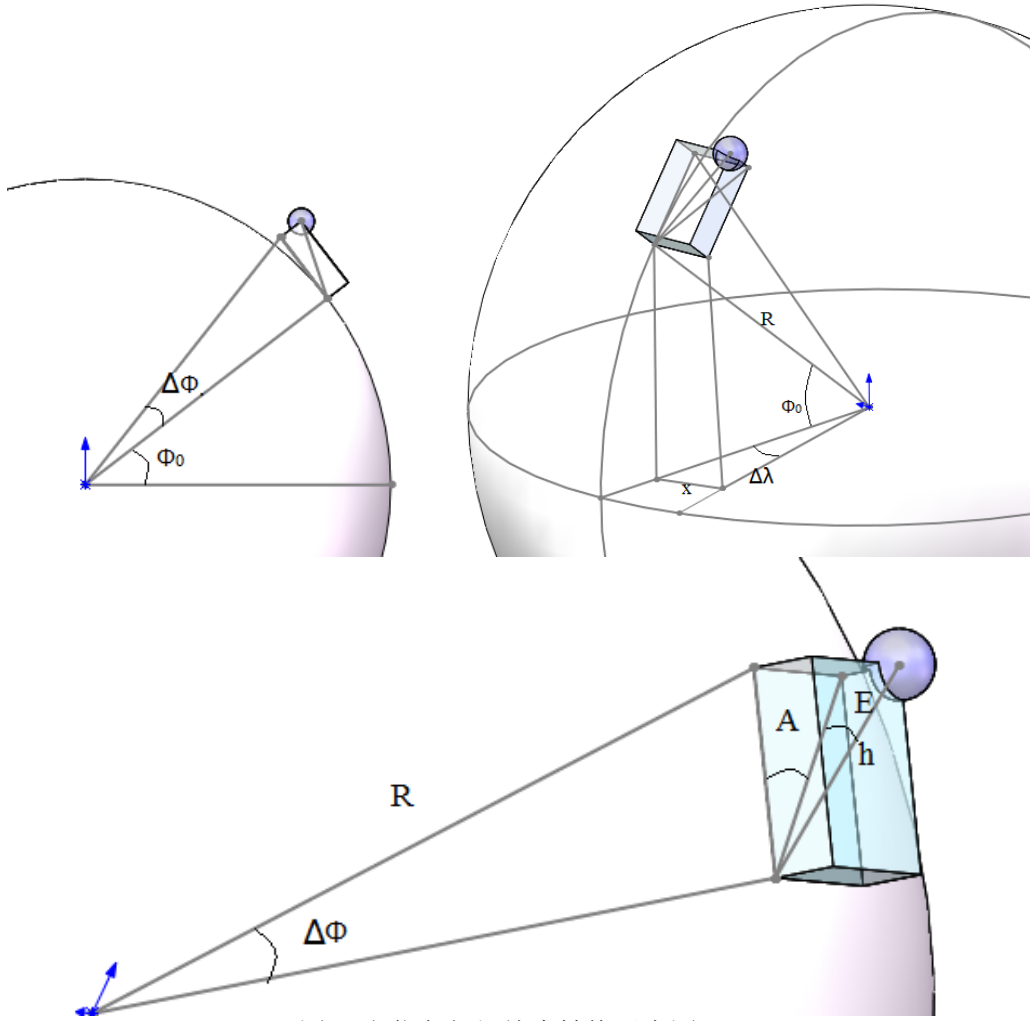


图 6 方位角与经纬度转换示意图

如图 6 所示，地球上有一卫星，观测点位置的经纬度为  $(\lambda_0, \phi_0)$ ，卫星天线的方位角和仰角分别为  $A$ 、 $E$ ，地球半径为  $R$ ，则可以近似求得卫星经纬度与观测点经纬度之差为

$$\Delta\phi = \arctan\left(\frac{d \cos(E) \sin(A)}{R}\right)$$

$$\Delta\lambda = a \tan\left(\frac{x}{R \cos \phi_0}\right) = a \tan\left(\frac{d \cos(E) \sin(A)}{R \cos \phi_0}\right)$$

卫星的经纬度为

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{d \cos(E) \sin(A)}{R}\right) + \phi_0$$

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{d \cos(E) \sin(A)}{R \cos \phi_0}\right) + \lambda_0$$

根据上式即可求得卫星的经度、纬度  $\lambda$ 、 $\phi$ 。

#### 4.3.2 星下点运动轨迹

根据 4.2.1 节的分析，Q 卫星的参数如下：

$$a = 6866000m$$

$$i = 97.418^\circ$$

$$\lambda_0 = 318.063^\circ$$

$$T_Q = 94.37 \text{ min}$$

结合 4.2.1 节给出的已知参数,绘制出 Q 卫星的一条间隔 1 秒的星下点轨迹,如图 7 所示。升交点为  $\lambda_0=318.063^\circ$ , 卫星的运动方向如图所示,该方向标识 Q 卫星的倾斜角大于  $90^\circ$ , 如果卫星在  $\lambda_0$  处升空过赤道,则下一次经过赤道则为下降的时刻,它们的时间差是  $T_Q/2$ ,再下一次经过赤道为上升的时刻,时间差是又一个  $T_Q/2$ 。在图中一并画出了观测站的经纬度以及 9 组观测点的卫星经纬度,放大图见图 8 所示,红色点为 9 组观测点的经纬度位置,蓝色圈为拟合的一个范围,能最大程度上包络这 9 组数据。根据已有的 9 组点确定的范围,以观测站为原点,  $17^\circ$  为半径画圆。卫星的星下点轨迹落入这个圆内则认为蓝色圆内的点都能被观测到。

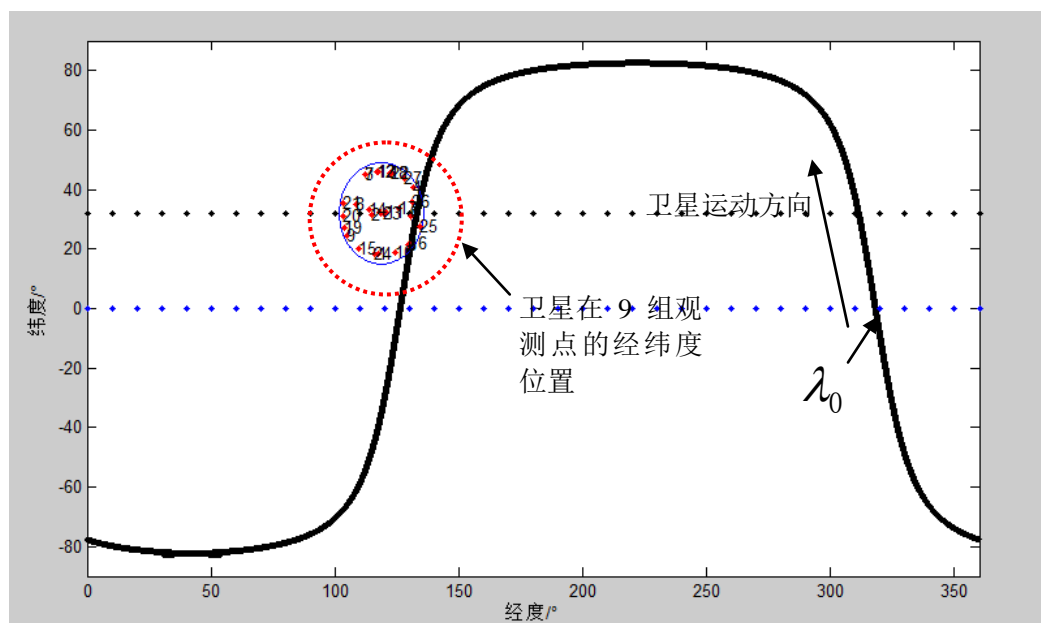


图 7 Q 型卫星的一条星下点线轨迹图

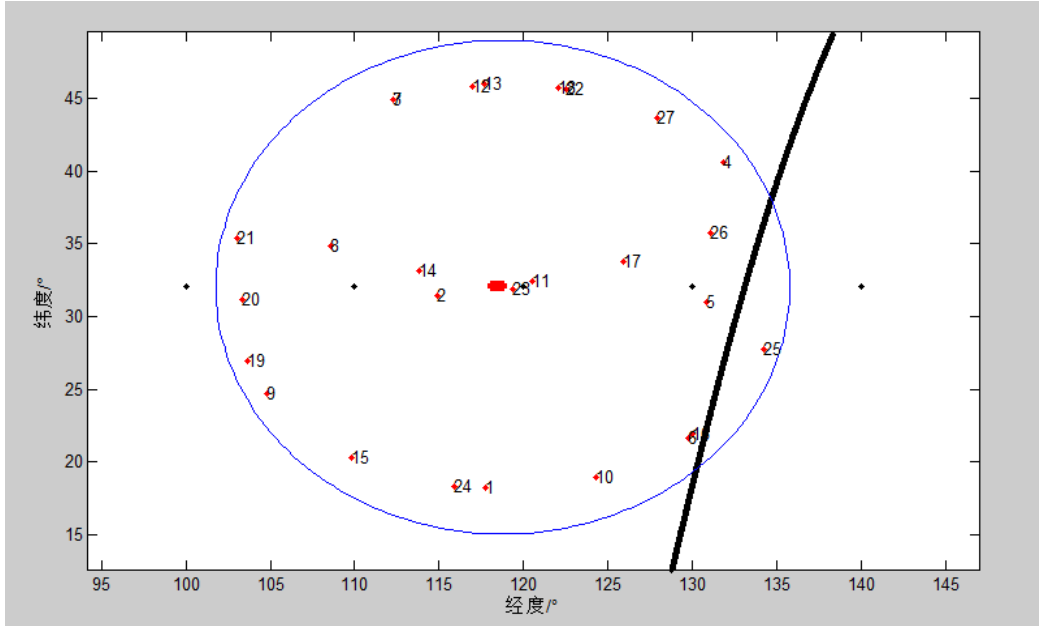


图 8 观测站位置和 9 组观测点的卫星经纬度

从图 7 中可以看出，该条轨迹与蓝色的范围，有相交的地方，但是不与 9 组观测点的任何一组匹配，由于卫星的角速度、运动方向与地球本身的自转角速度和方向都存在差异，升交点的经度并不是一成不变的，而是像图 2 所示一直在向西移动。为了确定 Q 卫星的运动规律，必须将星下点轨迹与 9 组数据匹配起来。我们将图 7 中的星下点轨迹移动一个角度后（ $196^\circ$ ），可与第一组的三个点（1，2，3）最大限度匹配，如图 9 所示。以此时第一组第 1 个观察点的时间作为起点。

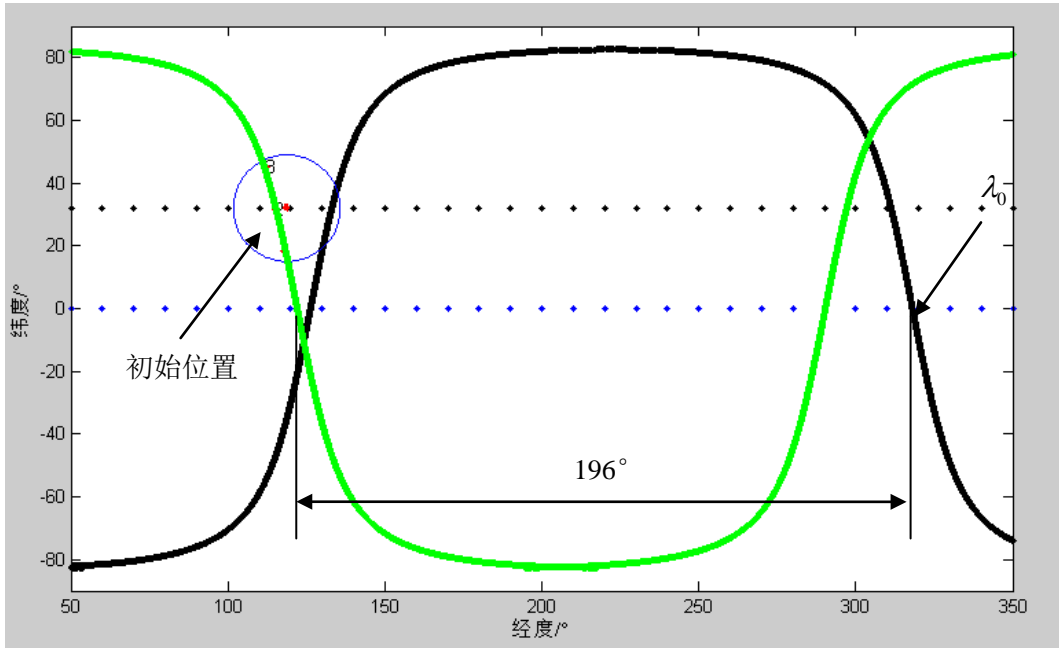


图 9 移动星下点轨迹至初始点

为了验证该星下点轨迹的正确性，将图 9 中的绿色初始曲线向左平移，每次移动的经度为  $\omega_e T_Q$ ，则经过若干次平移后，卫星的星下点轨迹必然能覆盖所有 9 组数据。值得注意的是，如果对移动的角度做细微调整，数据会拟合的更加准确。

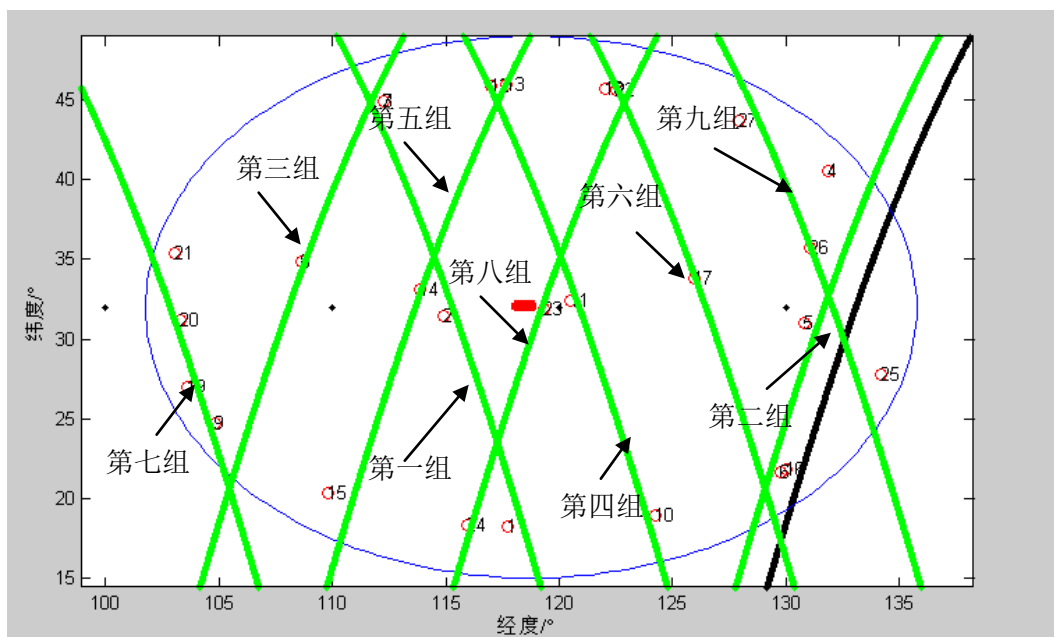


图 10 星下点轨迹平移图

经修正后 ( $\omega_e T_Q + 0.1$ )，平移星下点轨迹的结果如图 10 所示，图中过滤掉了无关组，只显示可以覆盖的曲线，吻合度较高。如果考虑地球自转，以地球球心建立直角坐标系，卫星运行轨道应该是一个固定的圆，如图 11 所示。这里假设地球是标准的球形，其半径  $R$  为 6371km，不考虑其各处半径差异。绿色点为卫星运行轨迹，相对于地心来说，这条轨迹是不变的，地球的自西向东旋转使观测站和卫星在不同的时刻相遇。

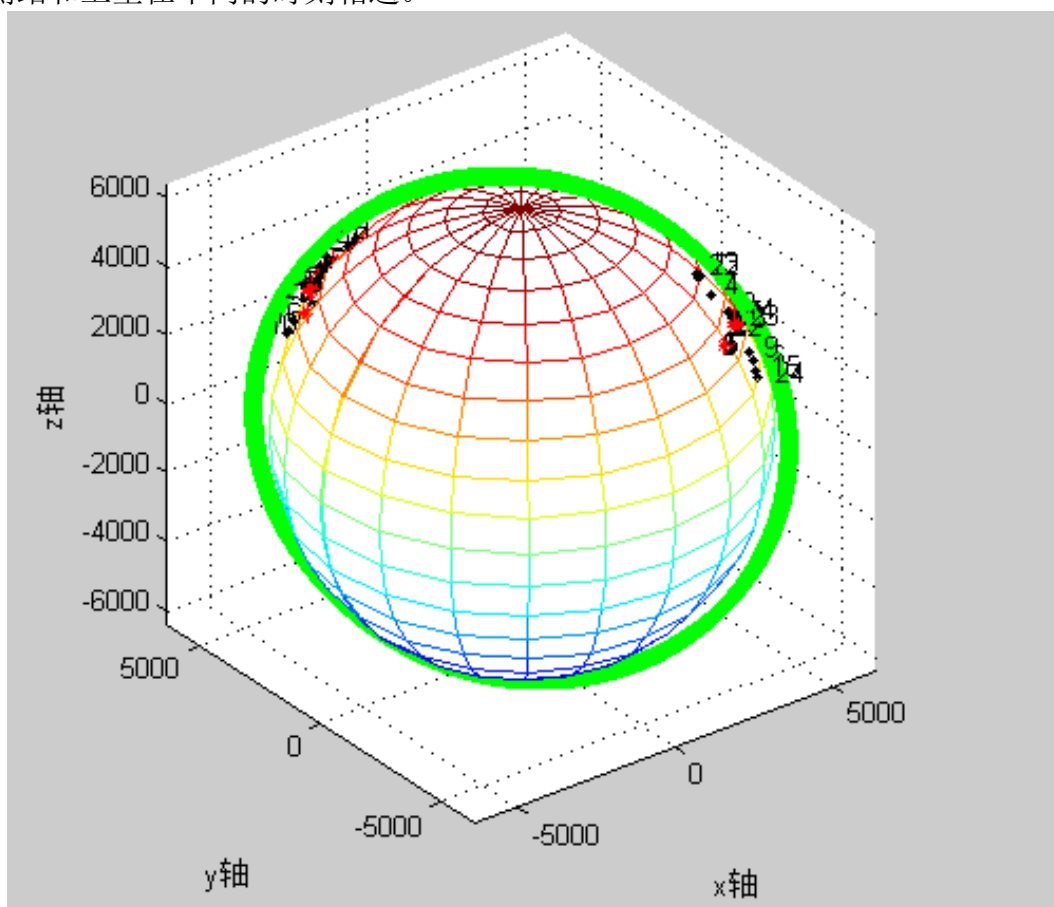


图 11 卫星运行轨道

表 1 星下点轨迹推移次数与时间差的关系

| 组数 | 平移次数 | 时间差/周期 |
|----|------|--------|
| 1  |      |        |
| 2  | 7    | 7.3    |
| 3  | 1    | 1.0    |
| 4  | 7    | 6.7    |
| 5  | 8    | 8.3    |
| 6  | 7    | 6.7    |
| 7  | 1    | 1.0    |
| 8  | 7    | 7.3    |
| 9  | 7    | 6.7    |

在平移星下点轨迹的时候，每向左平移一次，时间花费是一个周期  $T_Q$ ，但图中的数据只有三个点，不能完全相互覆盖，说明卫星每次进入蓝色圆区域的时间差不正好是周期的整数倍。此外，有的组是从上往下进入蓝色圆区域，有的组是从下往上进入蓝色区域，可以推测，他们之间的时间差应该在周期的整数倍再加上半个周期左右。表 1 是星下点轨迹平移次数与每次时间差的关系，该数据证实了我们的设想。

#### 4.3.3 Q 型卫星轨迹预测

以上分析证实了星下点轨迹的方法预测卫星运动轨迹的准确性，验算程序见附件 D11.m。下面就采用相同的方法预测在以后的时间里卫星的运动规律以及被观测到的情况。图 12 是把原始的星下点轨迹平移到已给出的最后一组数据，以第 25 次观察的时间作为起点，预测接下来的时间里卫星被观测的情况，算法过程如图 13 所示。

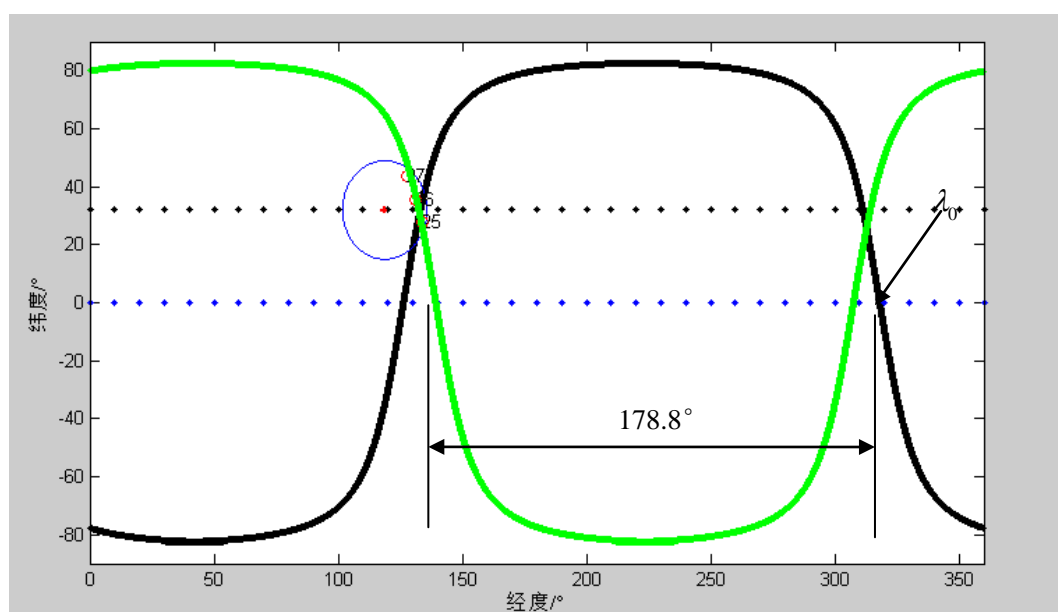


图 12 将星下点轨迹图与最后一组观测数据匹配



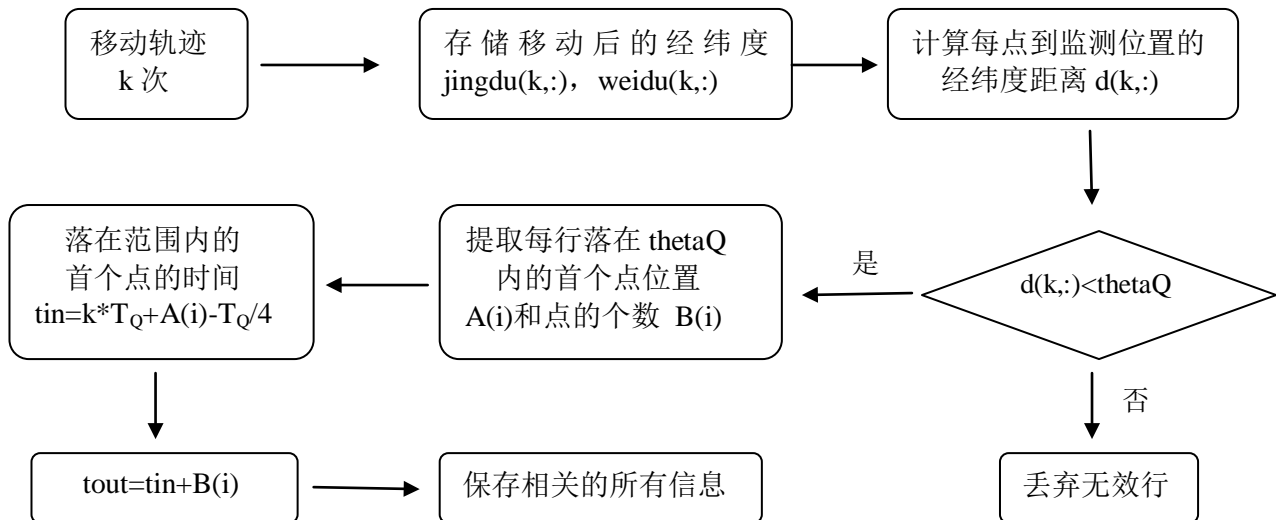


图 13 预测卫星运动规律算法

题目中只需预测 D3 和 D5 两天的数据，从 D3~D5 跨度为 3 天。Q 卫星的周期为  $TQ=94.37\text{min}$ 。因此需要平移的次数  $k=3*24*60/94.37=45.8$ ，取  $k=50$ 。算法执行过程及结果为：

(1) 运行 D11.m，获取从图 12 绿线位置平移 50 次的经纬度及距离信息，结果如图 14 所示；

(2) 按照图 13 的说明，过滤 50 组 Q 卫星经纬度及距离信息，并把有效信息限定在侦察范围 ( $17^\circ$ ) 内，结果如图 15 中的红色部分所示；

(3) 计算进出观测范围的第一个点和最后一个点，并统计相对于初始时刻 (第 25 次观察的时间) 的时间；

(4) 储存进出观测区域的经纬度信息，对应程序为 D11\_guoding；

(5) 若是获取卫星侦察地面的时间及经纬度信息，重新设定侦察区域为  $21.4^\circ$ ，重复 2~4 步，对应程序为 D11\_duobi。

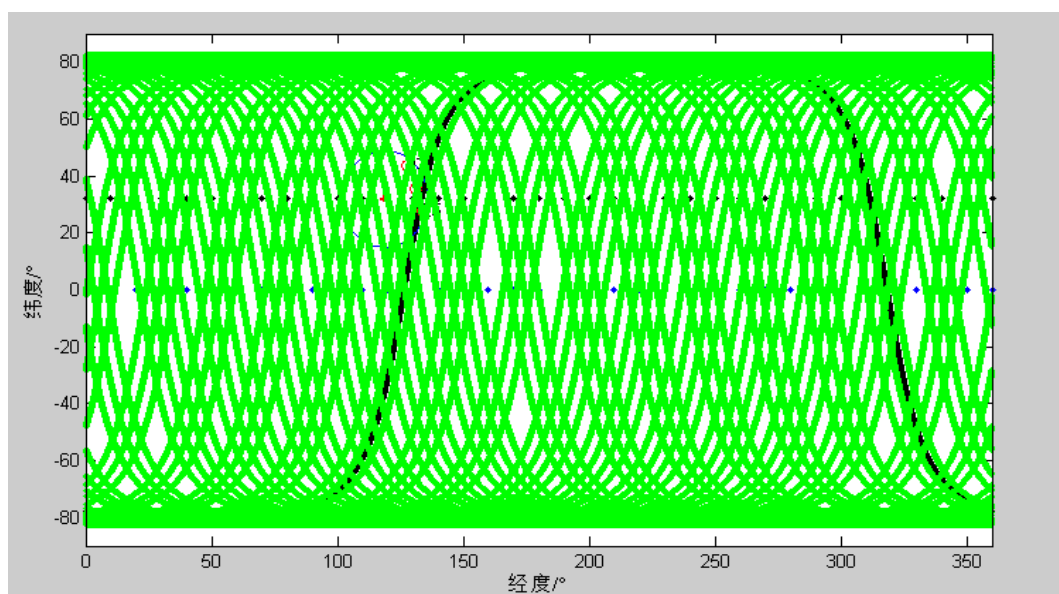


图 14 平移 50 次的所有经纬度信息

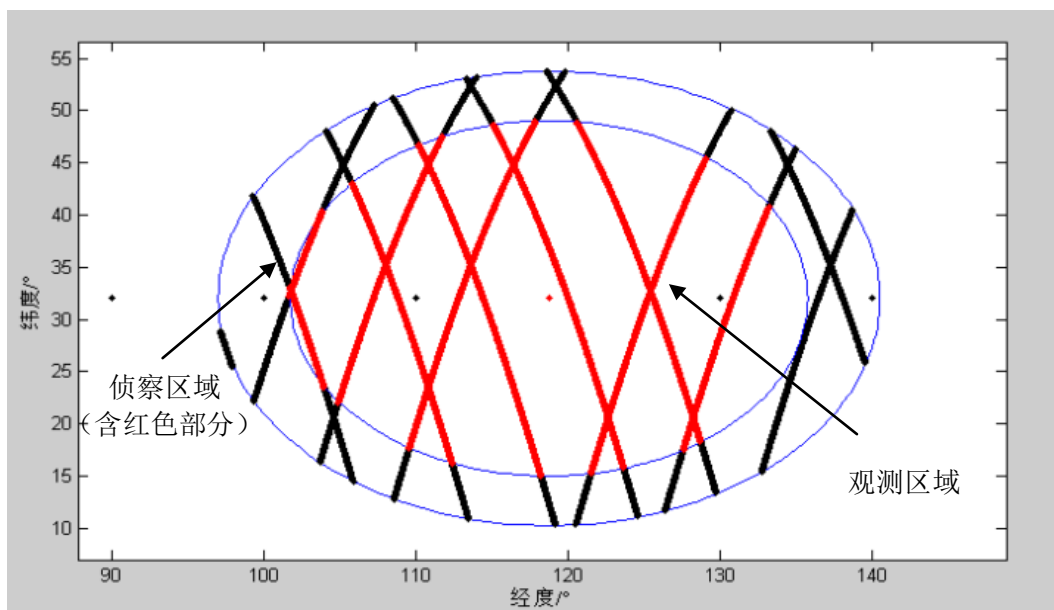


图 15 过滤后限定在观测区域和侦察区域的经纬度信息

图 15 的黑色部分（含内部的红色部分）为卫星可以侦察的区域。具体含义为，地面上的观测站可以观测到卫星的范围是内圈区域，卫星对观测站周围的侦察区域为外圈区域。由于它们是包含关系，必然有重叠区域。

最终获取的 Q 卫星在 D3~D5 天的过顶情况和躲避监视的施工时间如表 2 和表 3 所示，除了表 3 中列出的时间段，其他时间施工都是安全的。

表 2 问题一 Q 型卫星 D3D5 过顶情况

| 日期 | 序号 | 时间       | 经度    | 纬度   |
|----|----|----------|-------|------|
| D3 | 1  | 0:31:42  | 112.4 | 16.3 |
|    |    | 0:35:16  | 108.1 | 30.5 |
|    |    | 0:38:50  | 105.8 | 43.2 |
|    | 2  | 12:03:07 | 129.1 | 45.4 |
|    |    | 12:07:07 | 126.8 | 29.6 |
|    |    | 12:11:07 | 121.5 | 15.3 |
|    |    | 13:38:50 | 103.9 | 40.3 |
|    | 3  | 13:39:55 | 102.6 | 35.2 |
|    |    | 13:41:00 | 101.7 | 32.2 |
|    |    | 12:47:32 | 117.9 | 49.0 |
| D5 | 1  | 12:51:42 | 113.8 | 32.8 |
|    |    | 12:55:51 | 109.6 | 17.6 |
|    |    | 23:18:45 | 128.7 | 18.3 |
|    | 2  | 23:22:49 | 124.4 | 34.2 |
|    |    | 23:26:53 | 120.6 | 49.0 |

表 3 问题一 Q 型卫星 D3D5 避免施工的时段

| 时间 | 序号 | 时间       | 经度    | 纬度   |
|----|----|----------|-------|------|
| D3 | 1  | 0:30:18  | 113.5 | 11.0 |
|    |    | 0:40:10  | 104.1 | 48.2 |
|    | 2  | 12:01:52 | 130.7 | 50.1 |
|    |    | 12:12:25 | 120.5 | 10.3 |
|    | 3  | 13:36:07 | 107.3 | 50.5 |
|    |    | 13:43:41 | 99.3  | 22.1 |
|    | 4  | 22:35:23 | 139.5 | 25.9 |
|    |    | 22:41:17 | 133.3 | 48.1 |
| D5 | 1  | 1:19:30  | 98.0  | 25.5 |
|    |    | 1:20:25  | 97.2  | 28.9 |
|    | 2  | 11:15:26 | 138.7 | 40.5 |
|    |    | 11:22:05 | 132.7 | 15.4 |
|    | 3  | 12:46:16 | 119.8 | 53.7 |
|    |    | 12:57:09 | 108.6 | 12.7 |
|    | 4  | 23:17:26 | 129.8 | 13.4 |
|    |    | 23:28:11 | 118.6 | 53.8 |

#### 4.4 L 卫星轨道分析

##### 4.4.1 L 卫星方位角与经纬度的转换

方法同 4.3.1。

##### 4.4.2 星下点运动轨迹

L 型卫星属双星组网，首先按照 4.3.2 节介绍的方法，描绘出 L1 卫星和 L2 卫星的星下点轨迹。L1 卫星和 L2 卫星的参数如表 4 所示：

表 4 L1 和 L2 卫星的基本参数

| L1 卫星                       | L2 卫星                       |
|-----------------------------|-----------------------------|
| $a = 7022000m$              | $a = 7035000m$              |
| $i = 67.987^\circ$          | $i = 57.009^\circ$          |
| $\lambda_0 = 114.016^\circ$ | $\lambda_0 = 296.321^\circ$ |
| $T_{L1} = 97.60min$         | $T_{L2} = 97.87min$         |

计算出的 L1 和 L2 卫星的星下点轨迹如图 16 所示，L1、L2 卫星的升交点分别为  $114.016^\circ$ 、 $296.321^\circ$ ，其相位差为  $182.3^\circ$ ，从星下点轨迹图中也可看出。L1、L2 卫星的倾斜角均小于  $90^\circ$ ，根据上文可以知道该情况下卫星轨道为顺行轨道，其运动方向如图 16 所示。由于 L1 和 L2 卫星的周期不完全相等， $T_{L1}$  略小于  $T_{L2}$ 。所以 L1 卫星跑得更快，如果没有外界条件干预，它们的相位差会发生变化<sup>[5]</sup>。在实际中，通常采取一定的措施来维持它们之间的相位差<sup>[6]</sup>。

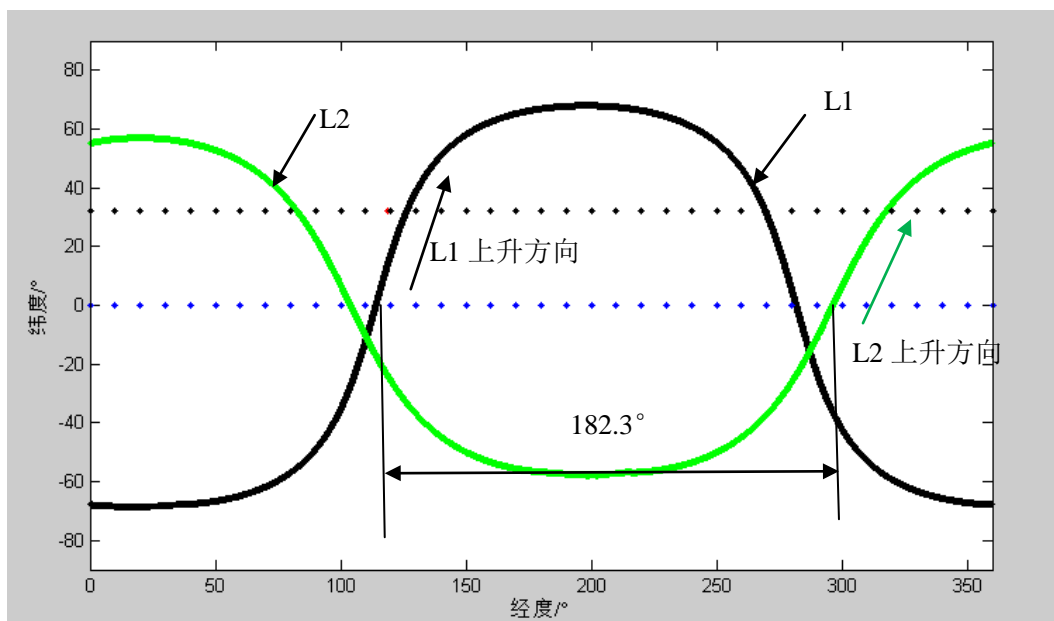


图 16 L1、L2 卫星的一条星下点轨迹图

首先，将 L1 和 L2 的行下线轨迹分别平移到各自的第一组初始位置，在验证 L1 卫星和 L2 卫星的同时，还要兼顾他们两个之间的相位差。图 17 显示的是验算 L1 和 L2 的前三组数据，其中 L1-T1 指 L1 卫星的第一组，其他命名方法相同。剩余数据未显示出来，会影响观察，结果显示数据吻合度较高。

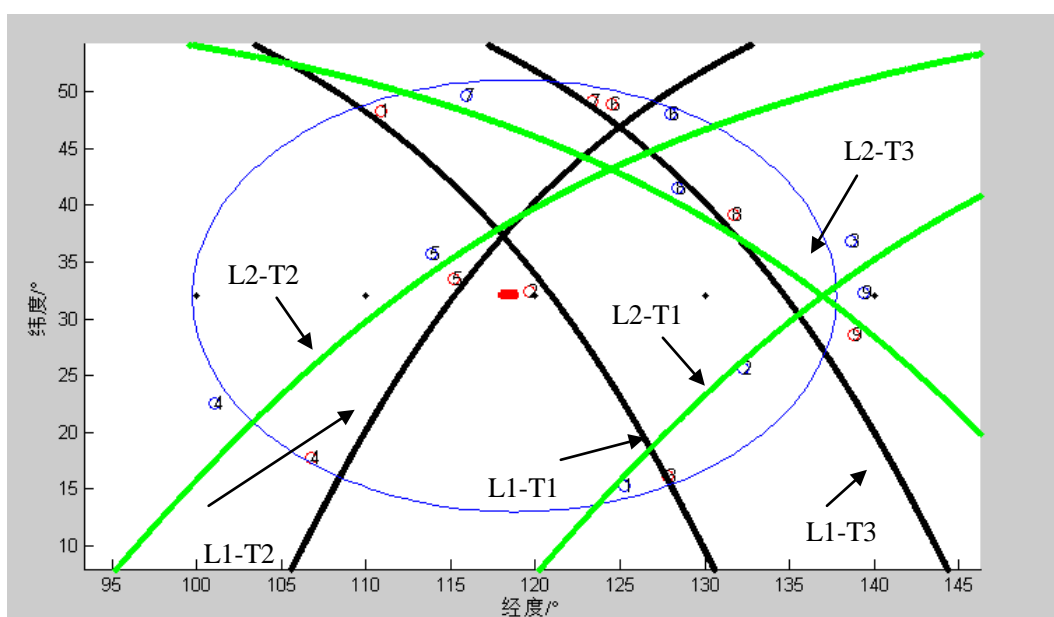


图 17 L1 和 L2 前三组数据验证

图 18 是 L1 和 L2 卫星的初始状态示意图。通过移动各自的星下点轨迹图，将 L1 的轨迹图（黑色）与其第一组拟合，如图 18 中的 B 切入点，将 L2 的轨迹图（绿色）与其第一组拟合，如图 18 中的 A 切入点。时间发生的先后顺序是 L2 卫星在 04: 18 分从 A 点切入，而后过了约 1 个小时，05: 17 分时 L1 卫星从 B 点切入。将 B 点往回推 1 个小时，大约到 C 的位置，补全 C 点所在的完整星下点轨迹，即可得到 L1 和 L2 的同步曲线，如图 18 所示，两者相位差为  $221.3^\circ$ 。

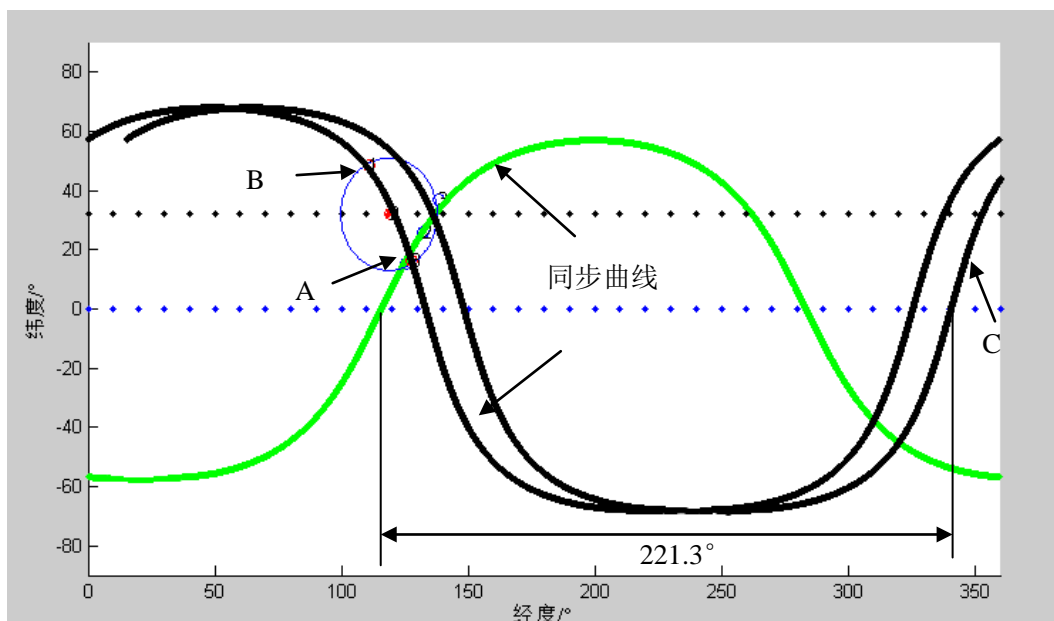


图 18 L1 和 L2 卫星在起始位置的相位差

#### 4.4.3 L 型卫星轨迹预测

采用与 4.3.3 同样的方法，分别把 L1 和 L2 的星下点轨迹平移到各自的最后一组数据。并采用图 13 所示的算法，预测未来三天的卫星运动轨迹。根据两颗卫星的周期，确定平移次数为  $k=50$  次。与 Q 卫星不同的是，L1 和 L2 卫星的侦察区域比 Q 卫星的范围更广( $25^\circ$ )。L1 和 L2 卫星的侦察区域和过顶情况如图 19 所示。

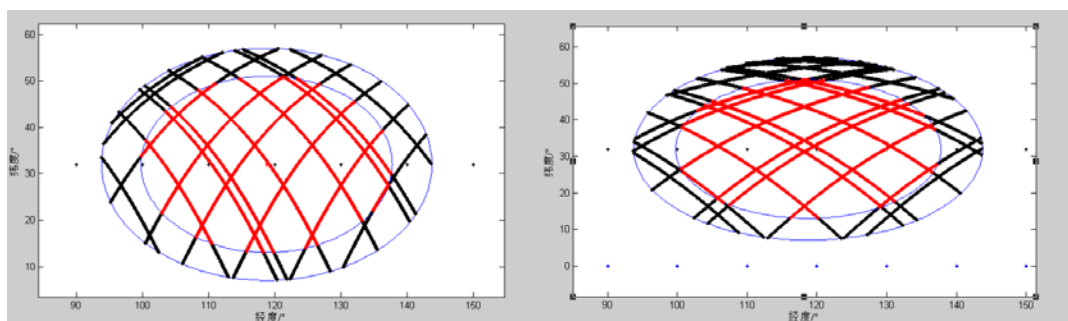


图 19 L1 和 L2 卫星的侦察区域和过顶情况

根据预测，8 月 23 日 L1 和 L2 的过顶情况表 5 所示，结合 L1 和 L2 卫星的侦察范围，施工的安全时间应该避免表 6 中的时间段。

#### 4.4.4 针对 L 型卫星的分析

双星组合的侦察能力大大地提高，每天路过施工区域的高达 8 次之多，且由于其周期接近，相位相差  $180^\circ$ ，两个卫星的侦察时段能比较均匀地分布在一天之内，威胁性较强。但通过数据分析发现，L1 和 L2 卫星的起始位置相位差就差了 220 多度，并不是严格意义上的  $180^\circ$  左右，如果不采取有效措施，L1 和 L2 之间的相位差还会继续扩大。

表 5 L1 和 L2 在 8 月 23 日的过顶情况

| 卫星 | 序号 | 时间       | 经度    | 纬度   |
|----|----|----------|-------|------|
| L1 | 1  | 3:02:49  | 114.6 | 50.5 |
|    |    | 3:07:33  | 126.5 | 34.2 |
|    |    | 3:12:18  | 133.2 | 19.8 |
|    |    | 4:44:40  | 100.4 | 37.2 |
|    | 2  | 4:48:01  | 105.4 | 27.5 |
|    |    | 4:51:21  | 110.5 | 14.8 |
|    |    | 17:11:35 | 115.7 | 13.3 |
|    |    | 17:16:27 | 122.8 | 30.5 |
|    | 3  | 17:21:20 | 132.1 | 45.5 |
|    |    | 18:55:17 | 99.8  | 33.8 |
|    |    | 18:57:44 | 108.7 | 46.6 |
|    |    | 19:00:12 | 111.0 | 49.4 |
| L2 | 1  | 4:10:56  | 116.2 | 13.2 |
|    |    | 4:15:20  | 127.1 | 27.3 |
|    |    | 4:19:43  | 136.5 | 38.6 |
|    |    | 5:53:17  | 100.5 | 26.5 |
|    | 2  | 5:57:36  | 112.8 | 39.6 |
|    |    | 6:01:55  | 127.5 | 48.9 |
|    |    | 12:47:50 | 109.4 | 48.6 |
|    |    | 12:52:15 | 125.2 | 38.1 |
|    | 3  | 12:56:40 | 136.6 | 25.6 |
|    |    | 14:30:10 | 100.6 | 37.9 |
|    |    | 14:34:27 | 113.5 | 23.2 |
|    |    | 14:38:44 | 120.2 | 13.1 |

表 6 避免在以下时段施工

| 日期       | 序号 | 起始时间     | 终止时间     |
|----------|----|----------|----------|
| 8 月 23 日 | 1  | 3:01:15  | 3:14:08  |
|          | 2  | 4:42:46  | 4:53:28  |
|          | 3  | 17:09:54 | 17:22:47 |
|          | 4  | 18:52:16 | 19:02:50 |
|          | 1  | 4:09:08  | 4:21:14  |
|          | 2  | 5:51:20  | 6:03:21  |
|          | 3  | 7:38:47  | 7:44:19  |
|          | 4  | 9:24:46  | 9:25:04  |
|          | 5  | 11:05:26 | 11:11:17 |
|          | 6  | 12:46:25 | 12:58:34 |
|          | 7  | 14:28:37 | 14:40:34 |

## 4.5 K 型卫星轨道分析

### 4.5.1 K 型卫星轨道预测

第三小问给出了 K 型卫星十次被观测站观测到的情况，根据这些数据预测未来三次被观测到的情况。通过 4.3.2 节对 Q 型卫星星下点平移次数和移动时间差的关系可以设想：1) 如果相邻两次同向经过观测站，则这两次的时间差应该

是大约 1 个周期；如果两次是反向经过观测站，则这两次的时间差大约是周期的整数倍加上半个周期。2) 观测到的每组数据的中间数据距离观测站最近，则他们的经度差可近似等于星下点轨迹平移经度的整数倍。

首先，我们描绘出这十次观测数据，如图 20 所示。从图中可以读出，第一组（1，2，3）到第二组（4，5，6）属于连续两次同向通过该区域，属于这种情况的还有（10，11，12）和（13，14，15），（16，17，18）和（19，20，21），以及（25，26，27）和（28，29，30）。根据以上对 Q 型卫星和 L 型卫星的分析，每组点之间的差异必然是整数个卫星周期，首先根据式（5）计算出大概的推移经度，

$$\lambda_{tuiyi} = average(t2 - t2, t14 - t11, t20 - t17, t29 - t26) \tag{5}$$

同时，我们计算出这些点的时间差值在 97 分钟左右，即  $T_K \approx 97 \text{ min}$ . 观察前三组数据的变化，第一组到第二组经历了约 97 分钟，即一个周期，而从第二组到第三组经历了 708 分钟，大约 7.4 个周期，根据表 1 的统计规律，可以知道第二组数据到第三组数据需要移动 7 个周期。每组相邻数据的时间差与周期比见表 7。

表 7 K 卫星相邻数据时间差与周期比

|   |     |     |   |     |   |     |     |   |
|---|-----|-----|---|-----|---|-----|-----|---|
| 1 | 7.4 | 6.7 | 1 | 6.4 | 1 | 6.7 | 7.4 | 1 |
|---|-----|-----|---|-----|---|-----|-----|---|

按照上述推理，将（7，8，9）的经纬度后推 8 个  $\lambda_{tuiyi}$  到与（1，2，3）在同一条星下点轨迹，作为整条星下点轨迹的另一半补充完整。由于只有三个点，我们仅采用线性插值的方法分别对(1，2，3)和（7，8，9）的数据进行插值，插值后如图 21 的绿色点群所示。

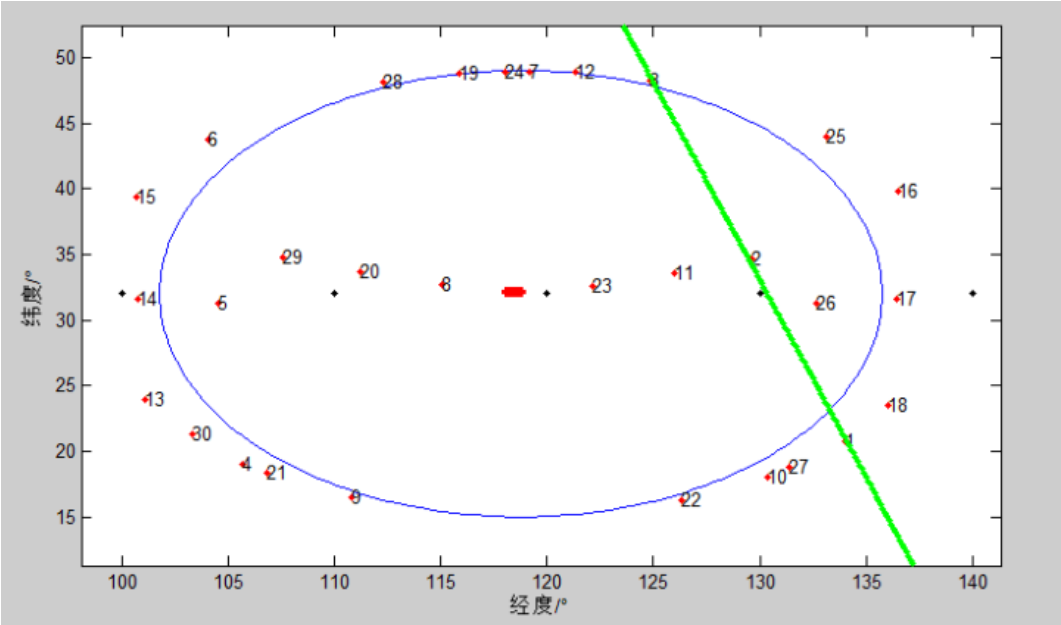


图 20 10 次观测数据的经纬度信息

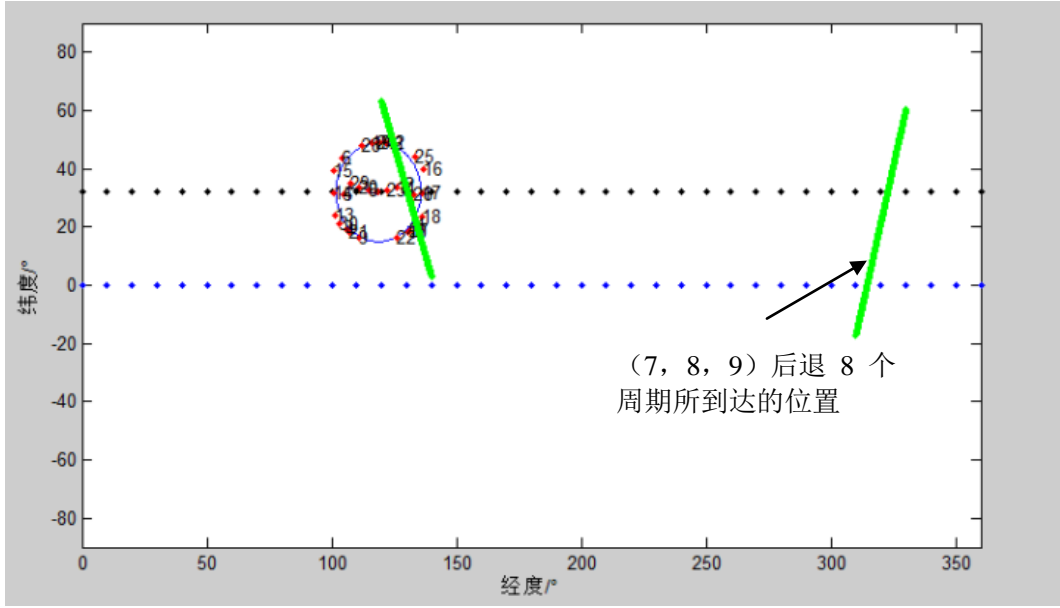


图 21 原始过第一组数据的点

以  $\lambda_{tuyi}$  为经度差，向左平移若干次，并统计与其靠近的经度的误差均方根  $error(i)$ ，其中  $i$  为数据的组数，完成数据搜索之后计算出  $\sum error(i)$ 。把  $\lambda_{tuyi}$  增加  $\Delta\lambda$ ，继续重复搜索计算  $\sum error(i)$ 。在所有  $\sum error(i)$  中，找出误差最小的一项，并把  $\lambda_{tuyi}$  校准成  $\lambda_{tuyi} + k\Delta\lambda$ 。最后求得在  $\lambda_{tuyi} + k\Delta\lambda = 25.9862$  时，数据拟合度最高。

同样参考 4.3.3 对卫星运动轨迹的预测方法，预测 K 型卫星在下三次进入该区域的情况，预测情况如图 22 所示，黑色部分为前 10 次的过顶情况，红色的三条线为未来三次的过顶情况，具体如表 8 所示。



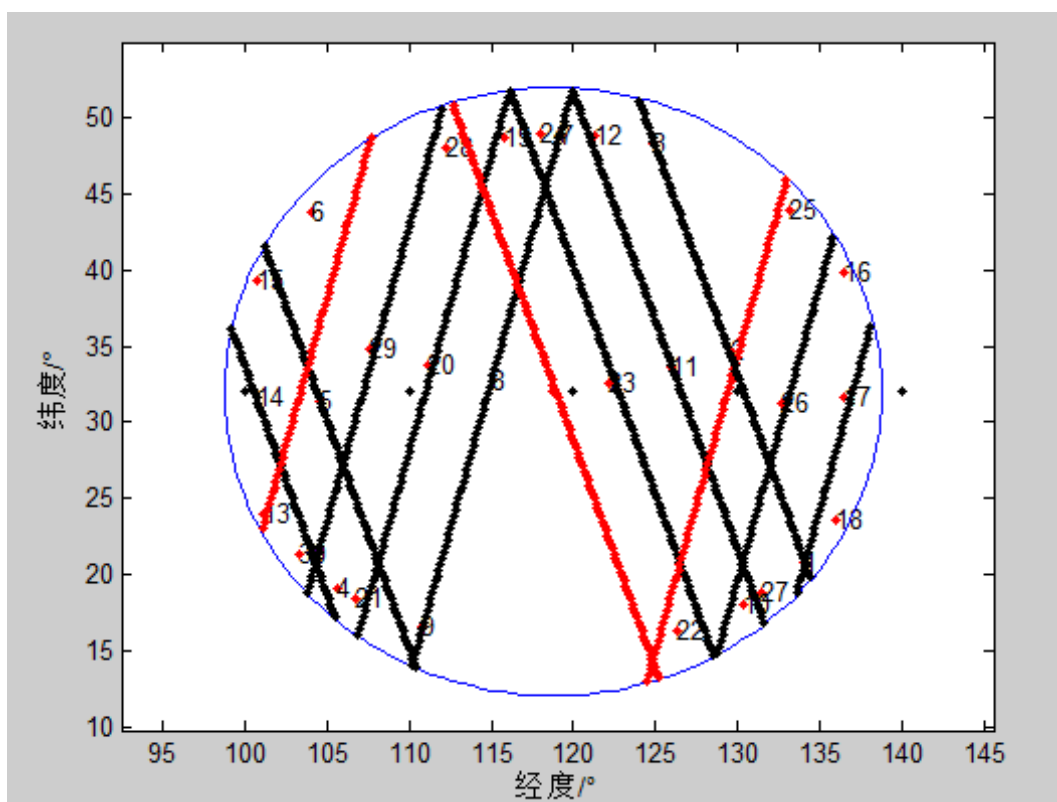


图 22 K 型卫星过顶情况预测

表 8 K 型卫星未来三次被观测到的情况

| 日期    | 序号 | 时间       | 经度    | 纬度   |
|-------|----|----------|-------|------|
| 第 4 天 | 1  | 7:49:25  | 125.2 | 14.1 |
|       |    | 7:53:40  | 118.5 | 31.2 |
|       |    | 7:57:52  | 112.8 | 51.6 |
|       | 2  | 19:40:27 | 133.7 | 47.2 |
|       |    | 19:43:59 | 128.8 | 28.7 |
|       |    | 19:47:32 | 124.5 | 13.6 |
|       | 3  | 21:17:48 | 108.2 | 48.6 |
|       |    | 21:20:48 | 105.1 | 35.3 |
|       |    | 21:23:51 | 101.3 | 23.2 |

#### 4.5.2 预测卫星运动轨迹所需最少的观测次数

由以上对 K 型卫星的轨迹预测可知，如果想完成对该卫星的预测，至少知道大概的推移经度，这就需要连续两次观察到同时上升或同时下降的情况，除此之外，还需要提供一次与前两次反方向的过顶信息。那么  $n$  至少等于 3.

当  $n=3$  时，只有一组数据可供计算误差，当  $n=4$  时，就会多出一组，随着  $n$  的增加， $\sum error(i)$  中  $i$  的个数也在增加，会增加数据拟合的精度。

因此，该卫星已经被连续观察最少 3 次才能够确定下次被观测到的情况，且观察次数越多，预报精度越高。

## 5 问题二模型建立与求解

### 5.1 问题描述及分析

某部需要从新疆的阿勒泰隐蔽地经喀什运动到和田并在和田执行某任务,24 小时后再隐蔽地返回阿勒泰(不必经喀什),要求尽可能快地安全到达目的地。根据问题及数据可知,部队在移动过程中要考虑到对 Q 型卫星、L-1 卫星的躲避情况以及车队长度和行军时间的影响。通过分析附件 3 的地图我们可以得到途径主要路径中节点(节点处可换其他路径)的经纬度坐标,同时,我们借助因特网查阅到从阿勒泰行军到喀什和喀什到和田的最短时间,还有连续行军 10~12 小时可到达地点,再结合附件 1 中给出的 Q 型卫星和 L-1 卫星的相关数据,便可画出在行军路线上的星下点轨迹,进而预测出卫星的过顶时间,找到合理的行军时机、路线和宿营地,避开 L-1 卫星侦察,以便及时做好隐蔽工作,尽可能快地安全到达目的地。

### 5.2 出发行军路线确定

#### 5.2.1 最短时间路径选择

根据所给附件 3 的地图信息和问题可知,从出发地阿泰勒途径喀什,到达目的地和田的路径有很多,我们从地图中找出一些主要的交通地点和一些可换路径的节点如下表所示,表 9 列出途径中所要经过的地点和它的经度、纬度。该路径是最主要的行车路径。

表 9 路线一

| 序号 | 地区    | 经度    | 纬度    |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 阿勒泰市  | 88.13 | 47.85 |
| 2  | 北屯市   | 87.8  | 47.35 |
| 3  | 富蕴    | 89.44 | 47.05 |
| 4  | 五彩湾   | 88.87 | 44.77 |
| 5  | 阜康    | 87.98 | 44.15 |
| 6  | 乌鲁木齐市 | 87.68 | 43.77 |
| 7  | 呼图壁县  | 86.9  | 44.18 |
| 8  | 玛纳斯县  | 86.22 | 44.28 |
| 9  | 石河子市  | 86.03 | 44.3  |
| 10 | 沙湾县   | 85.56 | 44.29 |
| 11 | 奎屯市   | 84.9  | 44.42 |
| 12 | 若羌县   | 88.17 | 39.02 |
| 13 | 库车    | 82.97 | 41.68 |
| 14 | 阿克苏   | 80.29 | 41.15 |
| 15 | 柯坪    | 79.05 | 40.51 |
| 16 | 巴楚    | 78.59 | 39.78 |
| 17 | 阿图什   | 76.12 | 39.73 |
| 18 | 喀什    | 75.98 | 39.47 |
| 19 | 英吉沙   | 76.17 | 38.91 |
| 20 | 莎车    | 77.25 | 38.45 |
| 21 | 叶城    | 77.42 | 37.89 |
| 22 | 皮山    | 78.29 | 37.06 |
| 23 | 和田    | 79.94 | 37.12 |

表 10 是在北屯市节点可换路线二到达乌鲁木齐市,表 11 是可在奎屯市节点换路线三到达库车,表 12 是可从乌鲁木齐市节点换路线四到达库尔勒,以及各途径地的经纬度。

表 10 路线二

| 序号 | 地区    | 经度    | 纬度    |
|----|-------|-------|-------|
| 2  | 北屯市   | 87.8  | 47.35 |
| 3  | 福海县   | 87.5  | 47.12 |
| 4  | 乌尔禾区  | 85.68 | 46.08 |
| 5  | 克拉玛依市 | 84.87 | 45.6  |
| 6  | 奎屯市   | 84.9  | 44.42 |
| 7  | 沙湾县   | 85.56 | 44.29 |
| 8  | 石河子市  | 86.03 | 44.3  |
| 9  | 玛纳斯县  | 86.22 | 44.28 |
| 10 | 呼图壁县  | 86.9  | 44.18 |
| 11 | 乌鲁木齐市 | 87.68 | 43.77 |

表 11 路线三

| 序号 | 地区  | 经度    | 纬度    |
|----|-----|-------|-------|
| 6  | 奎屯市 | 84.9  | 44.42 |
| 7  | 若羌县 | 88.17 | 39.02 |
| 8  | 库车  | 82.97 | 41.68 |

表 12 路线四

| 序号 | 地区    | 经度    | 纬度    |
|----|-------|-------|-------|
| 11 | 乌鲁木齐市 | 87.68 | 43.77 |
| 12 | 库尔勒   | 86.06 | 41.68 |

根据以上表格数据，在 MATLAB 中画出各点的坐标，并拟合成所有可能行驶线路，如图 23 所示。

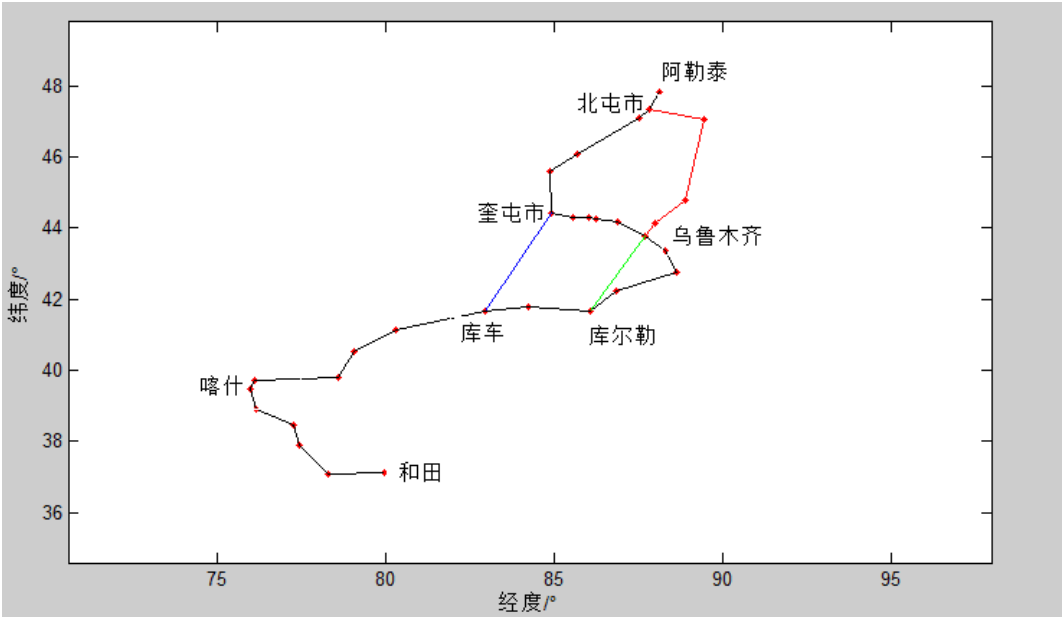


图 23 阿勒泰经喀什到和田路线图

由图 23，我们可以看出在出发点，阿勒泰和目的地之间是有几个重要节点，节点到下一个途径地之间可能有好几种行车路径，因此，我们首先可根据最短时间路径原则，参照 GIS 的路径选择模型和因特网寻找出发的最短时间路径所经过地点的集合。

表 13 最佳路线

| 序号 | 地区    | 经度    | 纬度    |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 阿勒泰市  | 88.13 | 47.85 |
| 2  | 北屯市   | 87.8  | 47.35 |
| 3  | 福海县   | 87.5  | 47.12 |
| 4  | 乌尔禾区  | 85.68 | 46.08 |
| 5  | 克拉玛依市 | 84.87 | 45.6  |
| 6  | 奎屯市   | 84.9  | 44.42 |
| 7  | 沙湾县   | 85.56 | 44.29 |
| 8  | 石河子市  | 86.03 | 44.3  |
| 9  | 玛纳斯县  | 86.22 | 44.28 |
| 10 | 呼图壁县  | 86.9  | 44.18 |
| 11 | 乌鲁木齐市 | 87.68 | 43.77 |
| 12 | 达坂城区  | 88.30 | 43.35 |
| 13 | 托克逊   | 88.63 | 42.77 |
| 14 | 和硕    | 86.84 | 42.23 |
| 15 | 库尔勒   | 86.06 | 41.68 |
| 16 | 轮台    | 84.25 | 41.77 |
| 17 | 库车    | 82.97 | 41.68 |
| 18 | 阿克苏   | 80.29 | 41.15 |
| 19 | 柯坪    | 79.05 | 40.51 |
| 20 | 巴楚    | 78.59 | 39.78 |
| 21 | 阿图什   | 76.12 | 39.73 |
| 22 | 喀什    | 75.98 | 39.47 |
| 23 | 英吉沙   | 76.17 | 38.91 |
| 24 | 莎车    | 77.25 | 38.45 |
| 25 | 叶城    | 77.42 | 37.89 |
| 26 | 皮山    | 78.29 | 37.06 |
| 27 | 和田    | 79.94 | 37.12 |

### 5.2.2 行军路线安排

根据最短时间行车路线和星下点轨迹图，可推测出每次卫星扫描区域经过行军路线时的时刻，从而可以安排行军状态。

如图 24 和 25，黑色线条为卫星星下点轨迹蓝色圆圈为星下点出卫星可覆盖区域，红色线路为最短时间线路。

图 26 和 27 为 Q 型卫星和 L1 卫星在最短时间路径上的覆盖情况。

根据问题要求设置起点，终点和出发时间，生成起点至终点距离最短时间的路径，绘制卫星在此时间段内的覆盖带，求得最短路径与覆盖面的交点，并返回交点经纬度坐标值和到达时间。根据进入覆盖带的瞬时时刻，判断卫星的位置，根据卫星的位置，生成在覆盖带内的行驶策略，确定规避点位置和规避时间如表 14~16 所示。

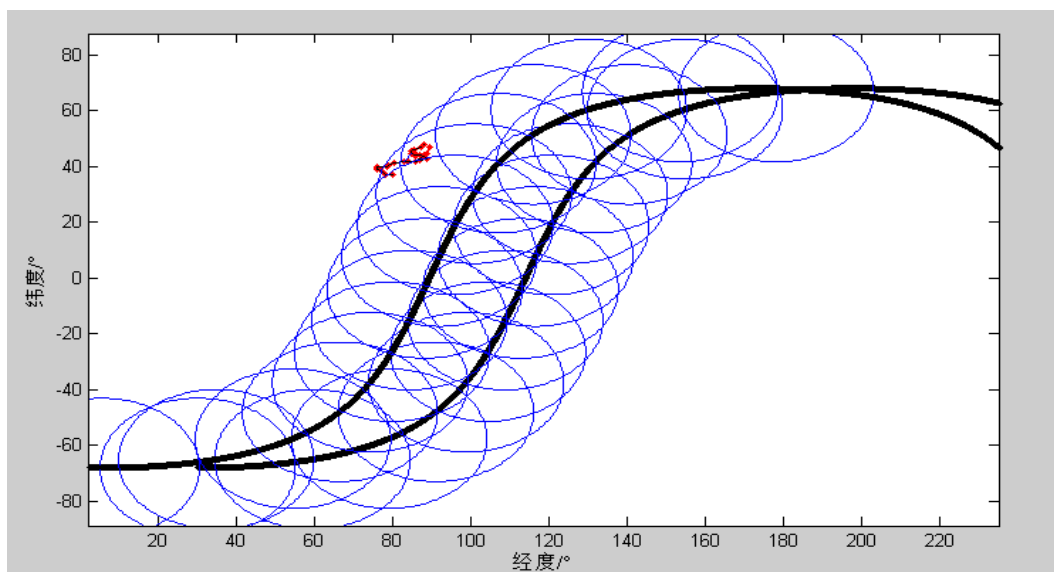


图 24 星下点轨迹的覆盖路径图

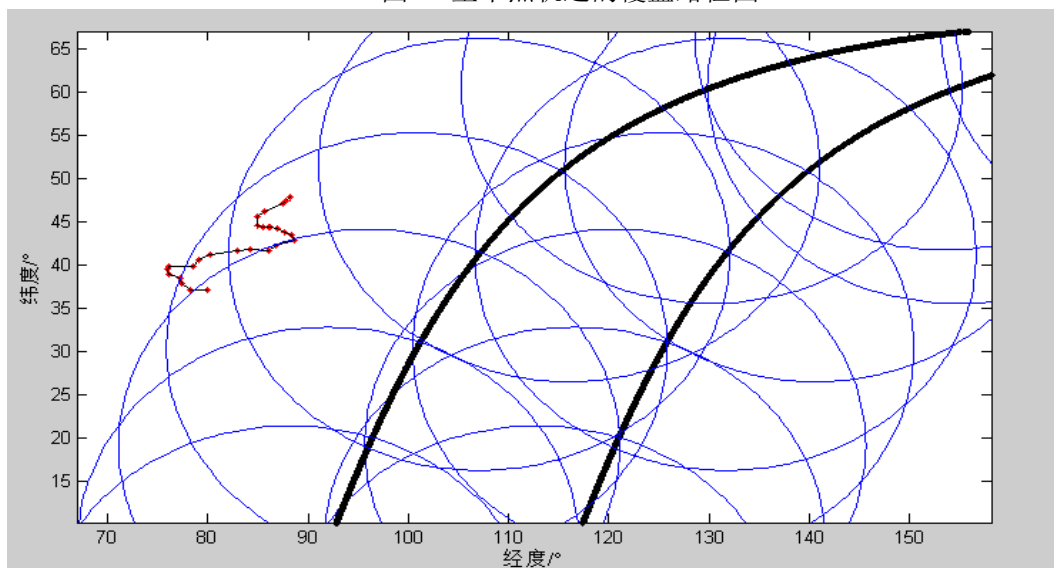


图 25 星下点轨迹的覆盖路径放大图

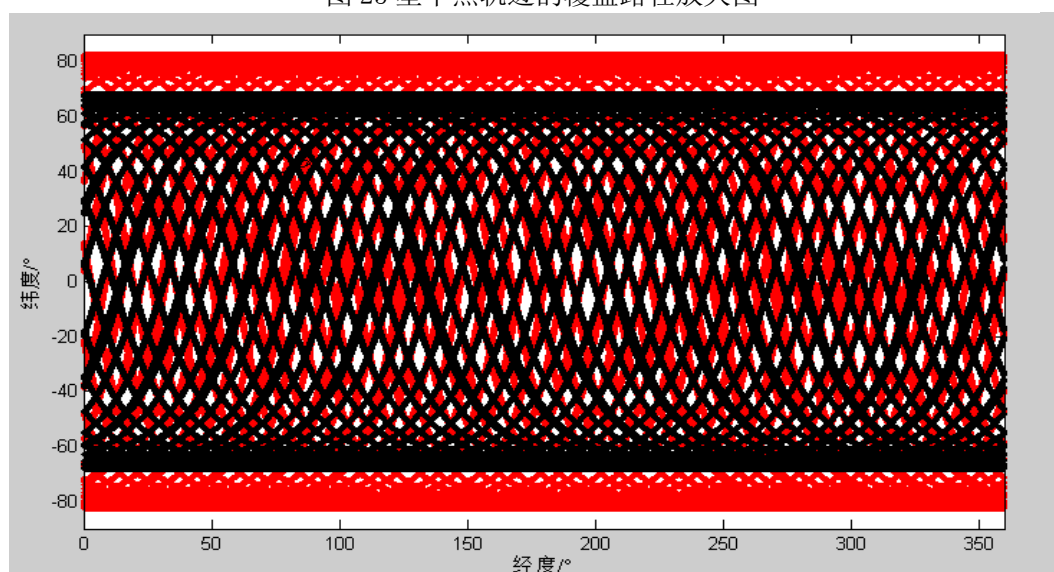


图 26 卫星星下点轨迹和最短时间路径图

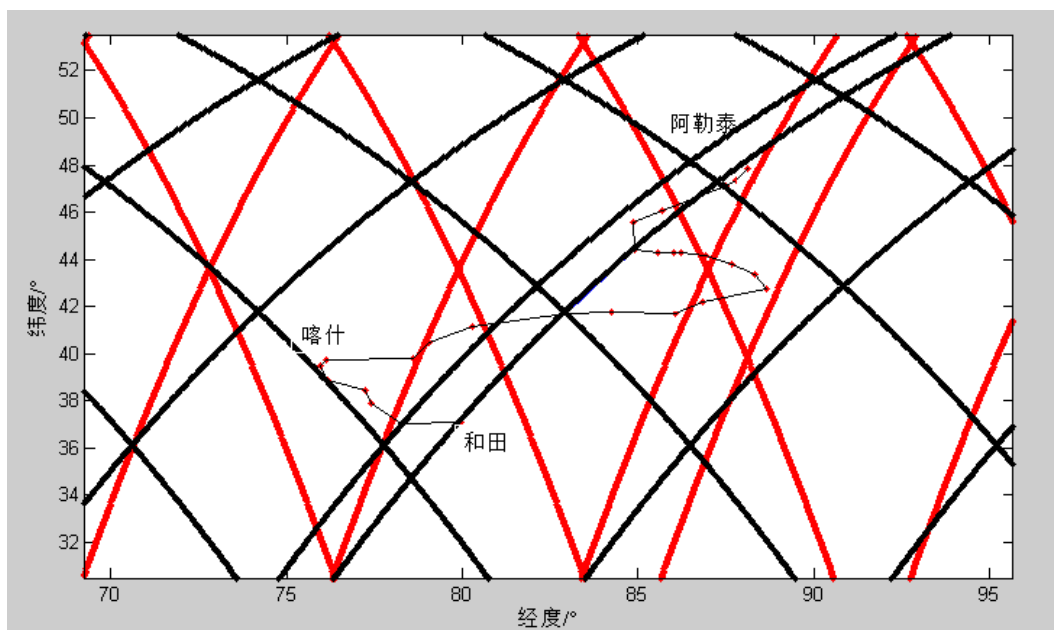


图 27 卫星星下点轨迹和最短时间路径放大图

表 14 11 月 1 日卫星躲避情况

| 序号 | 卫星 | 时间       | 地点  | 状态 |
|----|----|----------|-----|----|
| 1  | L1 | 6:18:36  | 福海  | 躲避 |
|    |    | 6:27:01  |     | 行军 |
| 2  | L1 | 7:56:54  |     | 躲避 |
|    |    | 8:09:20  |     | 行军 |
| 3  | Q  | 8:15:30  |     | 躲避 |
|    |    | 8:27:55  |     | 行军 |
| 4  | L1 | 9:42:13  |     | 躲避 |
|    |    | 9:49:28  |     | 行军 |
| 5  | Q  | 9:49:38  |     | 躲避 |
|    |    | 9:58:02  |     | 行军 |
| 6  | L1 | 14:48:47 |     | 躲避 |
|    |    | 14:55:07 |     | 行军 |
| 7  | L1 | 16:28:49 | 托克逊 | 休息 |
|    |    | 20:35:25 |     |    |

表 15 11 月 2 日卫星躲避情况

| 序号 | 卫星 | 时间       | 地点  | 状态 |
|----|----|----------|-----|----|
| 1  | L1 | 6:42:02  | 库尔勒 | 躲避 |
|    |    | 6:53:11  |     | 行军 |
| 2  | Q  | 7:28:53  |     | 躲避 |
|    |    | 7:38:18  |     | 行军 |
| 3  | L1 | 8:22:41  |     | 躲避 |
|    |    | 8:34:22  |     | 行军 |
| 4  | Q  | 9:00:08  |     | 躲避 |
|    |    | 9:12:30  |     | 行军 |
| 5  | L1 | 10:10:22 |     | 躲避 |
|    |    | 10:14:08 |     | 行军 |

|   |    |                      |    |    |
|---|----|----------------------|----|----|
| 6 | L1 | 13:34:23<br>13:35:03 | 柯坪 | 休息 |
|---|----|----------------------|----|----|

表 16 11 月 3 日卫星躲避情况

| 序号 | 卫星 | 时间                   | 地点 | 状态       |
|----|----|----------------------|----|----------|
| 1  | L1 | 5:31:29<br>5:33:50   | 莎车 | 躲避<br>行军 |
| 2  | L1 | 7:06:25<br>7:18:43   |    | 躲避<br>行军 |
| 3  | Q  | 7:28:53<br>7:38:18   |    | 躲避<br>行军 |
| 4  | L1 | 8:49:27<br>8:59:15   |    | 躲避<br>行军 |
| 5  | Q  | 9:00:08<br>9:12:30   |    | 躲避<br>行军 |
| 6  | L1 | 10:37:32<br>10:38:29 | 和田 |          |

部队在 2016 年 11 月 1 日凌晨 5 时从阿勒泰出发，在 16: 28: 49 途径托克逊，并在此停留休息 10 小时；在 11 月 2 日 13: 34: 23 途径柯坪并停留休息 10 小时；最后在 11 月 3 日 10: 37: 32 到达和田；每段路线行车时间分别为 10 小时 14 分钟、11 小时 9 分钟、10 小时 51 分钟。

表 17 返回路线

| 序号 | 地区    | 经度     | 纬度     |
|----|-------|--------|--------|
| 1  | 和田    | 79. 94 | 37. 12 |
| 2  | 阿拉尔市  | 81. 28 | 40. 54 |
| 3  | 沙雅    | 82. 9  | 41. 25 |
| 4  | 库车    | 82. 97 | 41. 68 |
| 5  | 轮台    | 84. 25 | 41. 77 |
| 6  | 库尔勒   | 86. 06 | 41. 68 |
| 7  | 和硕    | 86. 84 | 42. 23 |
| 8  | 托克逊   | 88. 63 | 42. 77 |
| 9  | 达坂城区  | 88. 3  | 43. 35 |
| 10 | 乌鲁木齐市 | 87. 68 | 43. 77 |
| 11 | 呼图壁县  | 86. 9  | 44. 18 |
| 12 | 玛纳斯县  | 86. 22 | 44. 28 |
| 13 | 石河子市  | 86. 03 | 44. 3  |
| 14 | 沙湾县   | 85. 56 | 44. 29 |
| 15 | 奎屯市   | 84. 9  | 44. 42 |
| 16 | 克拉玛依市 | 84. 87 | 45. 6  |
| 17 | 乌尔禾区  | 85. 68 | 46. 08 |
| 18 | 福海县   | 87. 5  | 47. 12 |
| 19 | 北屯市   | 87. 8  | 47. 35 |
| 20 | 阿勒泰市  | 88. 13 | 47. 85 |

### 5.3 返回行军路径

同理，确定最短返回时间路线，分析方法及过程同上，得到最佳行军路线，如表 17 所示。返回的过程中卫星过顶情况见表 18~表 20。

表 18 11 月 4 日卫星过顶情况

| 序号 | 卫星 | 时间       | 地点  | 状态 |
|----|----|----------|-----|----|
| 1  | L1 | 14:23:18 | 阿拉尔 | 躲避 |
|    |    | 14:30:18 |     | 行军 |
| 2  | L1 | 16:03:25 |     | 躲避 |
|    |    | 16:15:49 |     | 行军 |
| 3  | L1 | 17:45:37 |     | 躲避 |
|    |    | 17:54:19 |     | 行军 |
| 4  | Q  | 19:12:02 |     | 躲避 |
|    |    | 19:24:14 |     | 行军 |
| 5  | Q  | 20:45:47 | 轮台  | 休息 |
|    |    | 20:55:48 |     |    |

表 19 11 月 5 日卫星躲避情况

| 序号 | 卫星 | 时间       | 地点  | 状态 |
|----|----|----------|-----|----|
| 1  | L1 | 7:57:30  | 轮台  | 躲避 |
|    |    | 8:08:56  |     | 行军 |
| 2  | Q  | 8:12:29  |     | 躲避 |
|    |    | 8:24:21  |     | 行军 |
| 3  | L1 | 9:45:24  |     | 躲避 |
|    |    | 9:48:38  |     | 行军 |
| 4  | Q  | 9:45:27  |     | 躲避 |
|    |    | 9:56:02  |     | 行军 |
| 5  | L1 | 13:08:44 |     | 躲避 |
|    |    | 13:10:01 |     | 行军 |
| 6  | L1 | 14:48:04 |     | 躲避 |
|    |    | 14:58:07 |     | 行军 |
| 7  | L1 | 16:28:40 |     | 躲避 |
|    |    | 16:40:53 |     | 行军 |
| 8  | Q  | 18:48:58 | 石河子 | 休息 |
|    |    | 18:59:45 |     |    |

表 20 11 月 6 日卫星躲避情况

| 序号 | 卫星 | 时间      | 地点   | 状态 |
|----|----|---------|------|----|
| 1  | L1 | 5:04:52 | 克拉玛依 | 躲避 |
|    |    | 5:09:29 |      | 行军 |
| 2  | L1 | 6:40:58 |      | 躲避 |
|    |    | 6:53:21 |      | 行军 |
| 3  | Q  | 7:49:14 |      | 躲避 |
|    |    | 7:59:27 |      | 行军 |
| 4  | L1 | 8:24:28 |      | 躲避 |
|    |    | 8:33:47 |      | 行军 |
| 5  | Q  | 9:20:54 | 阿勒泰  |    |
|    |    | 9:33:02 |      |    |



部队在 2016 年 11 月 4 日 11 时从和田出发，在 20: 45: 47 途径轮台，并在此停留休息 10 小时；在 11 月 5 日 18:48:58 途径石河子并停留休息 10 小时；最后在 11 月 6 日 9: 20: 54 到达阿勒泰；每段路线行车时间分别为 10 小时 7 分，10 小时 20 分，6 小时 43 分。

表 14~16 和表 18~20 预测了 Q 卫星和 L1 卫星在整个行军路线中可能侦测到的时段，平均每天约有 6 次，每次时长在 10 分钟左右。被侦测到的时候，并不是要求停止行军，而是部队在被侦测到之前，提前做好伪装，可采用分散、变速或者向空中释放障碍等方式来躲避侦测，待警报接触后可按原计划和阵型行军。

## 6 问题三模型建立与求解

### 6.1 问题描述及分析

研究导弹发射装置的战时隐蔽问题。有专家提出，运动方式可能是移动发射装置规避卫星侦察的有效方案。现假设在某移动发射装置可在某一指定区域内自由运动，分别研究针对 Q 型、L 型（包括 L-1、L-2）、K 型卫星的侦察能够规避的可行性、条件（区域大小、形状、路网状况及其他你们认为需要的条件）和方式。对于可移动目标，由于卫星的参数是固定的，因此，我们可以通过问题一模型，在其星下点轨迹基础上判断规避卫星侦察的可行性；区域大小可通过各类型卫星探测覆盖面积确定；路网状况我们可根据星下点轨迹移动方向和卫星转动周期选择合适线路和时机；规避方式我们还是考虑题目中所说将隐蔽和运动两种方式相结合；从而成功规避不同类型卫星的扫描侦察。对于多种卫星的组合侦察，所用模型和思路同上，不同之处在于要同时考虑多种星型不同周期，侦察范围以及他们之间的运动方向之间的关系。卫星参数变化会影响到卫星转动周期和侦察范围以及转动方向等因素。卫星成像参数变化影响目标移动区域大小；轨道参数变化影响卫星星下点轨迹及其进动方向等，从而影响目标移动方向和路径。

以 Q 型卫星为例做分析。

首先，我们根据问题一模型，以及附件 1 参数，画出 Q 型卫星的星下点轨迹图和卫星可覆盖区域并标出进动方向，同时根据卫星可侦察面积确定活动区域大小，分析 Q 型卫星在第一次可侦察到该区域的时间和侦查不到时刻，然后根据卫星进动方向和转动周期，便可对可移动导弹路径方向做出预测。

首先，通过隐蔽和运动方式，我们可知能够规避侦察是可行；因为在某一时刻，当运动方式不足以规避侦察时，我们可以选择隐蔽的方式规避侦察。同时由附件 1 知 Q 型星运动周期 94.37s，通过它的星下点轨迹图可预测卫星经过某指定区域的时间，以及下次或下几次卫星经过的时间，对可移动发射装置选择运动方式规避侦察。根据卫星覆盖大小，需要可移动区域面积至少大于卫星静止时能覆盖到面积，形状为圆形，路网状况为每移动点应至少有两个方向可供选择，并且该指定区域天气最好为多雾条件，附近有高山林立等。

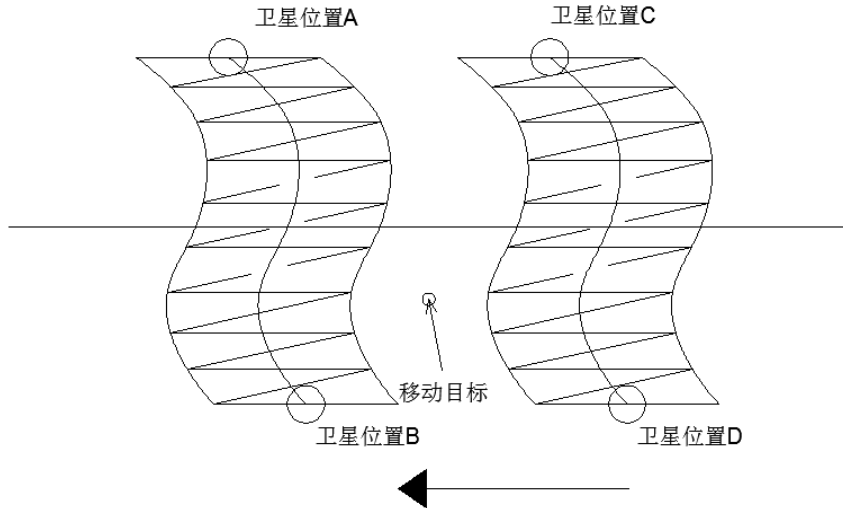


图 28 卫星星下点轨迹移动及目标躲避示意图

由 Q 型星轨道参数可知，每一定时间间隔星下点轨迹会西进一定角度，因此移动发射装置在预测到其下一次覆盖时间时，应该向相反方向运动，使卫星在下一次无法监测到，如图 28 所示。

L 型卫星，K 型卫星的分析同上。

暂时未考虑卫星组合的情况。

## 总结

根据题设要求以及所提供的原始数据，我们完成三个问题的建模、解算及讨论，针对各问题给出了相应的解答和说明，并提供相应附件。解题的关键在于根据卫星根数正确地绘制卫星的星下点轨迹图和初始位置的拟合，通过不断平移轨迹图即可得到卫星以后时刻的位置，从而预报卫星的过顶情况，为地面的规避卫星侦察提供时机和选择路线的依据。

在绘制星下点轨迹图的过程中需要将给出的卫星信息转换为卫星的经纬度，不管是已有的坐标系转换的方式或者根据相对位置分析所得的计算公式都存在一定的误差，必然不能在平面中精确地绘制出星下点轨迹图。此外，利用监测得到的卫星出入时间和过顶时间以及星下点轨迹图来拟合星下点轨迹图的初始位置，没有完全准确的方法实现拟合。我们在建模最初采用不断平移卫星轨迹图以减小和实际轨迹的距离来进行拟合，这是较为粗略的拟合方式。在不断建模的过程中，我们发现可以采用最小二乘等方法以求得误差最小化来拟合轨迹，虽然依旧会有误差，但是相比观察距离会精确得多。拟合轨迹图初始位置造成的误差经过多次平移后，会造成较大的累积误差，所以在以后的研究中还需要不断改进星下点轨迹图的拟合方式以减小误差<sup>[7]</sup>。

由于时间仓促，本文对第三问的尚处于初步阶段，有望通过算法<sup>[8]</sup>进对本题进行更深入的探讨。

### 参考文献

- [1] 张更新. 卫星移动通信系统[M]. 人民邮电出版社, 2001.
- [2] 罗伊萍, 解志刚, 陈文锋. 一种有效的卫星过顶预报方法[J]. 海洋测绘, 2006, 26(3):13-16.
- [3] 张云彬, 张永生. 近圆轨道遥感卫星星下点轨迹的计算[J]. 测绘科学技术学报, 2001(4):257-259.
- [4] 李晶, 张绪茂, 杨俊锋等. 卫星星下点轨迹图的制作[J]. 解放军测绘研究所学报, 2003(4):60-62.
- [5] 杨小芹. 双星组网轨道捕获实施方案概述[C]// 航天测控技术研讨会. 2003.
- [6] 王西京, 谭炜, 刘帆. 太阳同步卫星双星组网维持策略[C]// 航天测控技术研讨会. 2003:50-54.
- [7] 王立伟, 张胜军, 郭明志等. 一种无需考虑轨迹特征的交叉点确定方法[J]. 测绘地理信息, 2015, 40(3): 35-38;
- [8] 王鹏, 郑贵省, 王元等. 基于 GIS 躲避卫星侦察的公路运输机动路线选择[J]. 军事交通学院学报, 2015,17(7): 86-90.

## 附件列表

附件分为两个部分，程序和运行结果，说明如下：

### 程序：

D11.m %% 问题一第一问 Q 卫星星下点轨迹描画及平移  
执行时需要和'D.xls'放在一个文件夹；  
D11\_guoding.m %% 问题一第一问 Q 卫星过顶情况预测  
执行时需要和'Q卫星信息.mat'放在一个文件夹；  
D11\_duobi.m %% 问题一第一问躲避 Q 卫星侦察情况预测  
执行时需要和'Q卫星信息.mat'放在一个文件夹；  
T11.m %% 问题一第一问Q卫星绕地球旋转+地球自转  
执行时需要和'Q卫星过顶信息.mat'放在一个文件夹；  
D12L1.m %% 问题一第二问 L1 卫星星下点轨迹描画及平移  
执行时需要和'D.xls'放在一个文件夹；  
D12L1\_guoding.m %% 问题一第二问 L1 卫星过顶情况预测  
执行时需要和'L1卫星信息.mat'放在一个文件夹；  
D12L1\_duobi.m %% 问题一第二问躲避 L1 卫星侦察情况预测  
执行时需要和'L1卫星信息.mat'放在一个文件夹；  
D12L2.m %% 问题一第二问 L2 卫星星下点轨迹描画及平移  
执行时需要和'D.xls'放在一个文件夹；  
D12L2\_guoding.m %% 问题一第二问 L2 卫星过顶情况预测  
执行时需要和'L2卫星信息.mat'放在一个文件夹；  
D12L2\_duobi.m %% 问题一第二问躲避 L2 卫星侦察情况预测  
执行时需要和'L2卫星信息.mat'放在一个文件夹；  
D132.m %% 问题一第三问K卫星星下点轨迹拟合及平移  
执行时需要和'D.xls'放在一个文件夹；  
D13\_guoding.m %% 问题一第三问 K 卫星未来三次过顶情况预测  
执行时需要和'K 卫星信息.mat'和'D.xls'放在一个文件夹；  
D2L1.m %% 问题二 L1 卫星平移经纬度计算  
执行时需要和'新疆公路.xlsx'放在一个文件夹  
D2L1\_100\_duobi.m %% 问题二 L1 卫星在接下来 7 天内的侦察情况  
执行时需要和'L1 卫星新疆 2.mat'放在一个文件夹；  
D2Q.m %% 问题二 Q 卫星平移经纬度计算  
不需其它文件  
D2Q100\_duobi.m %% 问题二 Q 卫星在接下来 7 天内的侦察情况  
执行时需要和'Q 卫星新疆 2.mat'放在一个文件夹；

### 结果：

所有计算结果均放置在文件 'D.xls' 文件 sheet '答案' 里。