

# 全国第七届研究生数学建模竞赛



## 题 目 特殊工件磨削加工的数学建模

### 摘 要：

本文首先分析磨床的工作原理，明确工作台由步进电机控制的传动方式，在此基础上，定义了磨削加工的误差度量方式：磨削面与工件母线差值绝对值的积分。

对于问题一，我们从微观角度出发，在优先考虑精度的原则下，分析了每个离散状态中，上、中、下三个工作台的配合情况，给出了一套理论上实现最高精度的加工方案，通过计算给出理论上其最小误差为  $8.3726\text{mm}^2$ ，此方案加工时间为  $4229\text{s}$ 。随后，我们考虑时间最短因素，对时间、误差进行了有效折衷，提出了一种更接近实际操作方案，其误差为  $21.1704\text{mm}^2$ ，用时  $3056\text{s}$ 。

对于问题二，我们采用同问题一类似的分析方式，在结合轮式砂轮磨削特点的基础上，对误差计算做了相应改变，计算得误差下限  $9.4728\text{mm}^2$ ，在这样的精度下需时  $4830\text{s}$ ；相应快速算法误差为  $29.5446\text{mm}^2$ ，耗时  $3551\text{s}$ 。

对于问题三，首先我们假定砂轮上某一部位在磨削过程中与工件接触次数越多，则认为该部位的磨损程度越严重。为使砂轮表面的磨损尽量均匀，我们采用了局部调整的思想，在问题一提出的方案基础上进行改进。我们提出时间单元的概念，在加工过程中每个时间单元内砂轮的使用情况进行统计。加工方案将根据前一个时间单元内砂轮磨损情况进行调整，接力递进，从而在全局上改善了砂轮磨损情况。此方案耗时  $3695\text{s}$ ，误差为  $29.3901\text{mm}^2$ 。

对于问题四，针对轮式砂轮的结构特点，我们给出了一种理论上充分保护砂轮的加工方案。通过适当延长加工时间使得砂轮的磨损尽量均匀，并给出了在时间上的损失。

关键词：磨削 回旋体 母线 误差分析

参赛队号 10286081

队员姓名 宋康, 陈硕, 朱忆

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

中山大学承办

## 一、问题重述

大型精密内外圆曲线磨床, 用来加工具有硬度高、尺度大、加工精度高和母线为连续光滑曲线等特点的特殊工件。

本题的研究内容是: 运用数学建模的方法, 根据旋转体工件的母线方程  $y = f(x)$ , 给出一个合理的加工方案, 在尽可能短的时间内完成磨削, 并作加工误差分析。具体问题如下:

**问题 1:** 加工外表面母线为  $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$ ,  $x \in [0, 600]$  的某旋转体工件, 采用圆柱型砂轮加工, 给出一个加工方案; 对你的方案作误差分析。

**问题 2:** 加工外表面母线为  $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$ ,  $x \in [0, 600]$  的某旋

转体工件, 采用轮式砂轮加工, 给出一个加工方案; 对你的方案作误差分析;

**问题 3:** 在整个加工过程中, 若各个瞬时砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点 (实际是点的一个邻域), 随砂轮旋转形成一个圆周, 那么砂轮在该圆周上的磨损会加大, 从而影响加工质量。为此, 希望在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀, 请结合上述第 1 问题, 提出一个修整策略, 给出一个合理的加工方案, 作相应的误差分析。

**问题 4:** 请结合上述第 2 问题, 提出一个修整策略, 给出一个使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案, 作相应的误差分析。

## 二、基本假设

- 1、本文假设砂轮与工件的接触面均是一个切点。
- 2、在模型中忽略砂轮的磨损损失。
- 3、假设步进电机一个激励脉冲持续时间为 1ms, 即可将 1s 分等分成 1000 个时间段, 在每个时间段 (1ms) 内, 有激励脉冲为激励或不激励两种状态。
- 4、假设步进电机一个脉冲带来的位移在瞬时完成。

### 三、变量说明

#### 1、基本变量说明

$(x_i, y_i)$ : 第 $i$ 个状态下的砂轮中心坐标;

$\theta$ : 砂轮倾斜角;

$r$ : 圆柱形砂轮半径;

$d$ : 圆柱形砂轮厚度;

$f$ : 步进电机最高工作频率;

$f_q$ 、 $f_h$ : 相邻两个时间段内的脉冲频率,  $f_q$ 表示前一段,  $f_h$ 表示后一段。(本文中约定一个时间段为 1 秒);

$\varphi$ : 轮式砂轮最大纵截面(垂直于砂轮转轴的最大截面)的直径

$a$ : 轮式砂轮厚度

$\alpha$ : 轮式砂轮的圆弧横截面的张角(不大于  $180^\circ$ )

$r_1$ : 轮式砂轮的圆弧横截面的半径

$$N = N_g + N_s V = V_g = 2\pi N_g \times R_g = +V_s$$

$N_s$ : 砂轮每分钟转动的角速度(假设定值)

$N_g$ : 工件每分钟转动的角转速(250~300 转)

$R_g$ : 工件在垂直轴线的截面方向圆的半径

$D_{100}$ : 工件旋转 100 周, 工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量。

#### 2、坐标轴的建立

注意: 为方便分析, 我们将工作台的移动等效为砂轮的运动, 即: 将中台和下台沿滑轨的移动等效为砂轮分别在直角坐标系中沿  $x$  轴和  $y$  轴方向上的移动; 将上台的旋转等效为砂轮轴线与工作箱主轴之间的角度变化。以工件一的母线模

型为例（工件二的母线也类似），分析问题的坐标轴如下图所示：

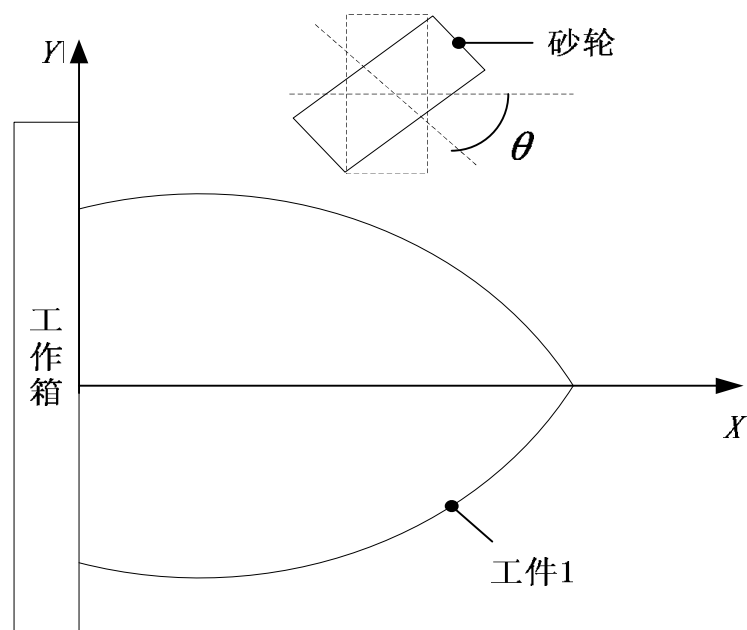


图 1

$x$ ：工作箱主轴线；

$y$ ：中台沿下台上的滑轨的位移（因为是往复运动，所以有正有负）；

$\theta$ ：砂轮旋转的角度。

#### 四、磨削基本模型

本题中砂轮磨削该工件的磨削方向为圆周方式, 通过逐行加工来完成, 以砂轮沿各切削行的运动, 近似包络出被加工曲面。磨削时采用顺磨的方式, 加工过程为: 先控制砂轮伸到工件  $x=0$  处的第一个截面  $Z1$  处, 通过控制工件绕  $Z$  轴转动和砂轮  $X$  向微动, 两轴联动来完成第一圈修磨; 然后控制砂轮移动到第二个截面  $Z2$  处, 同样地由工件旋转和砂轮微动的两轴联动完成第二周的加工……依次完成对整个内廓型的遍历修磨。

在拟合加工曲线时, 数控系统一般只能采用直线插补和圆弧插补两种方式。因此, 用普通数控车床加工母线为非圆曲线的工件时较为困难, 尤其对于一些母线较复杂而对形状精度要求较高的非圆曲线工件, 其加工难度更大。为简化母线为非圆曲线工件的加工程序编制, 提高对该类工件的加工准确性和适应性, 本文提出一种针对母线为非圆曲线工件的准确加工方法, 并编制了相应的通用加工程序生成软件。

对于非圆曲线轮廓, 只能用直线或圆弧去逼近它。节点就是逼近线段和非圆曲线的交点, 也是个逼近线段的起点和终点。一个已知曲线方程的节点数和逼近线段的形状（直线或圆弧）、曲线方程的特性以及允许的逼近误差有关。节点计算, 就是利用这三者之间的数学关系, 求解各个节点的坐标。

逼近线段的近似区间愈大则节点数越少, 相应程序段也越少, 但逼近线段的

误差  $\delta$  不得大于允许误差。

## 直线插补方式

### 1) 等间距直线逼近的节点计算

已知方程  $y = f(x)$ ，如下图所示，根据给定的等间距  $\Delta x$  求出  $x_i$ ，将  $x_i$  代入  $y = f(x)$ ，即可求得一系列  $y_i$ 。 $x_i$ 、 $y_i$  即为每个线段的终极坐标，并以该坐标值对应砂轮与工件切点的坐标值。

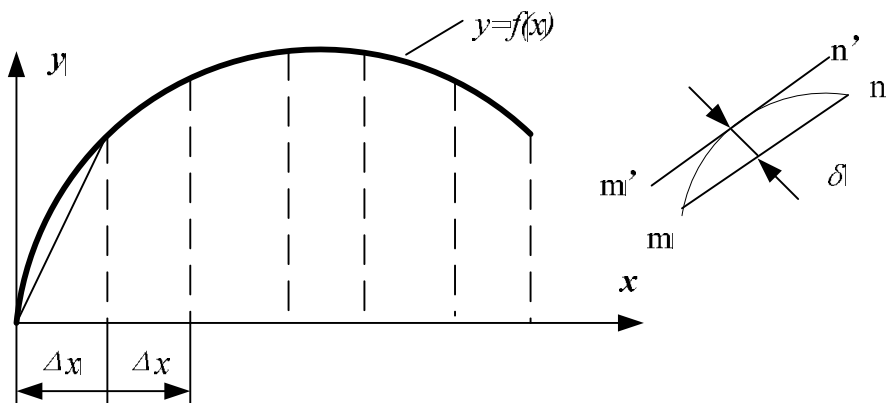


图 2

### 2) 等步长直线逼近的节点计算

使所有逼近线段的长度相等。如下图所示

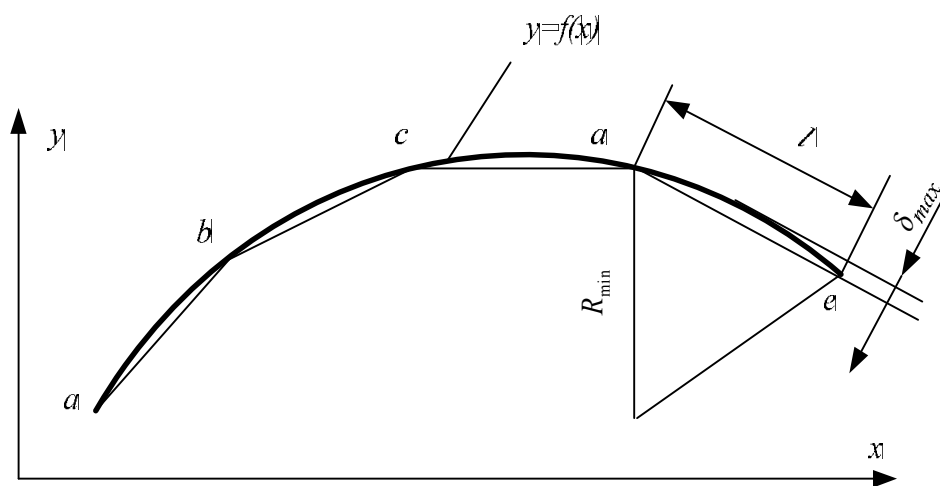


图 3

步骤：

①确定允许的步长  $L \approx 2(2R_{\min}\delta)$

②求  $R_{\min}$

③以曲线起点 a 为圆心，作半径为 L 的圆方程，交曲线  $y = f(x)$  于 b 点，即可得到  $x_b$ 、 $y_b$

④以点 b、c 等为圆心，重复步骤③即得其余节点坐标值。

### 3) 等误差直线逼近的节点计算

使所有逼近线段的误差  $\delta$  相等

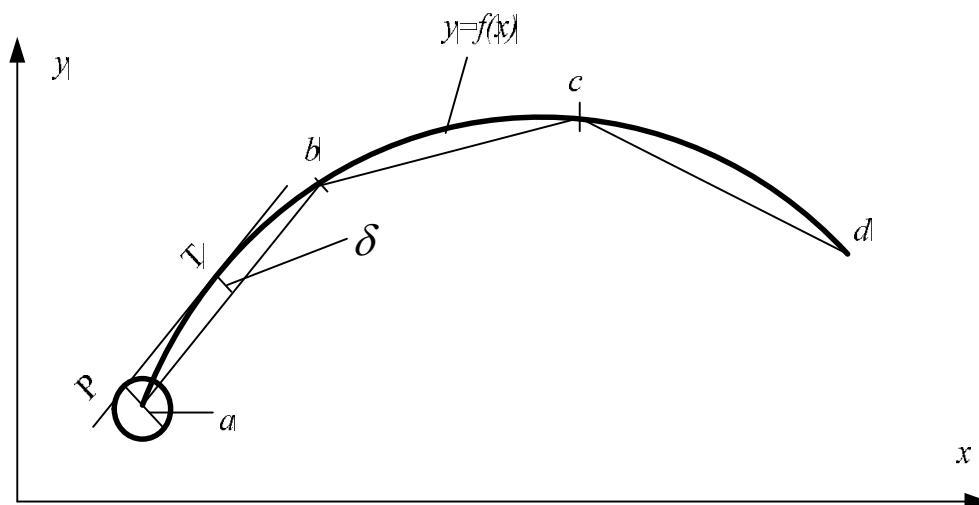


图 4

步骤:

- ①确定允许误差  $\delta$  的圆方程
- ②求圆与曲线公切 PT 得斜率 K
- ③求弦长 ab 的方程
- ④联立曲线方程和弦的方程求得 b 点坐标
- ⑤顺次求得 c、d、e 等各节点的坐标

## 五、问题分析及模型建立

工件的母线方程为一条连续的光滑曲线。加工过程中，下台、中台的移动以及上台的旋转由三台步进电机控制。步进电机相互配合，使得工件与砂轮以合理的方式接触，进行磨削，工件本身绕工作箱的旋转主轴进行转动，从而实现加工。

为使磨削结果尽可能接近理论值，即加工误差最小，我们需要给出尽可能合理的加工方案。

理论上，倘若忽略步进电机的传动方式，认为三个工作台可以实现连续运动，那么最佳的磨削方案应该使得打磨点的轨迹与工件母线完全吻合。也就是说，在整个加工过程中，砂轮与工件的接触方式均为相切。这种情况下误差为零，即达到理论上的最小值。仍以工件一的母线模型为例（工件二的母线也类似），理想的磨削过程如下图所示：

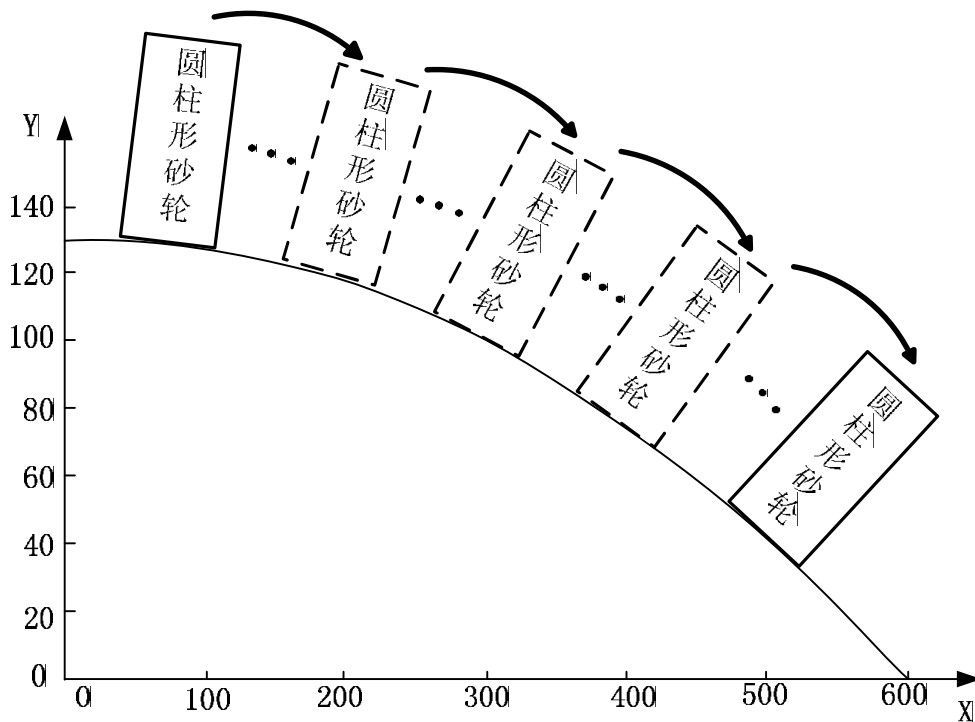


图5. 理想加工方式

然而事实上，伴随着每一个控制脉冲的发出，工作台将产生  $d = \frac{1^\circ}{10} \div 360^\circ \times 12 = \frac{1}{300} (mm)$  的位移。由此看来，工作台实际的移动方式是离散的，即每次在  $X$  或  $Y$  轴方向上移动的最小距离为  $d$ 。同理，上台转过的角度也是一个离散的值。

误差定义：

$$\varepsilon = \int_0^{600} [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{式 1})$$

其中  $f(x)$  表示工件母线方程， $g(x)$  表示磨削后工件表面形成的折线。目标函数从总体上衡量了磨削结果与理想值的差异。

## 1、问题 1 模型建立与分析

### 数学模型的建立

工件 1 的母线方程为：

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x), x \in [0, 600] \quad (\text{式 2})$$

当第 $i$ 个状态时，圆柱体式砂轮磨削面所在的直线方程：

$$y - y_i = k_i(x - x_i) \quad (\text{式 3})$$

工件母线在 $(x_i, y_i)$ 处的切线斜率：

$$k_i = \tan \theta \quad (\text{式 4})$$

砂轮规格（厚度 x 直径）：30x60 mm

工件转速：300 圈/min

约束条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} f \leq 100 \\ \frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq 0.1 \\ D_{100} \leq 4 \\ d = \frac{1^\circ}{10} \div 360^\circ \times 12 = \frac{1}{300} (mm) \end{array} \right. \quad (\text{式 5})$$

目标函数：

$$y = \min \left\{ \int_0^{600} [|f(x) - g(x)|] dx \right\} \quad (\text{式 6})$$

模型解释与分析

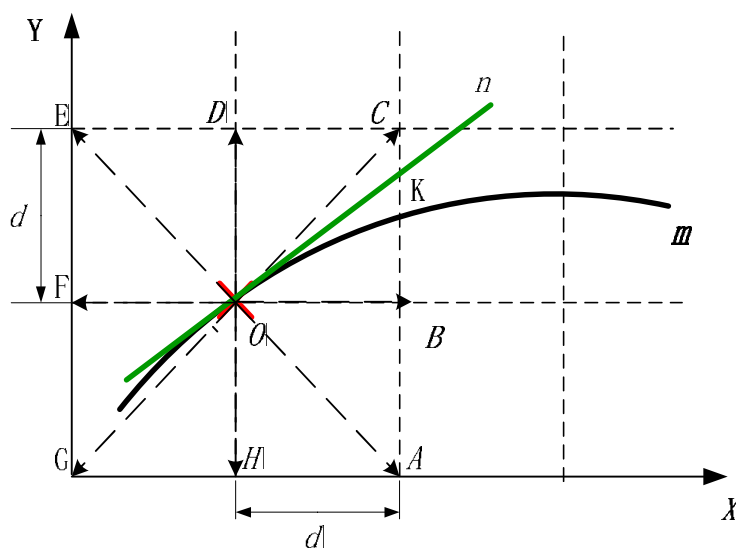


图 6



为说明问题，我们将场景进行放大。如上图所示：曲线  $m$  表示工件母线的一部分；线段  $n$  表示当前砂轮磨削面的位置， $m$  与  $n$  相切于点  $A$ ； $d$  表示步进电机单个控制脉冲可带来的工作台位移量。为方便分析，我们首先考虑中台与下台的位移情况，然后再加入上台的旋转角度这一参量。

为使加工顺利进行，当前状态下磨削面  $n$  可能沿着向量  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$  ...  $\overrightarrow{OH}$  进行移动，并伴随有一定的角度偏移。显而易见，不论按照哪个向量移动、不论上台转动角度如何，砂轮底面都无法与工件母线上的每一个点相切。造成这种误差的，正是  $x, y, \theta$  这三个参数离散变化的特点。为实现误差最小，我们应让切点的个数尽量多，以逼近理想值，这也是我们提出本方案的根本思想来源。

根据上述分析，我们针对不同因素的重要程度，提出了两种加工方案。

### 方案一：最小误差方案

如果我们期望工件的加工结果最接近理想，而不计花费的时间代价，我们提出的方案是：

- 1、设当前状态砂轮磨削面  $n$  与母线  $m$  相切与点  $O$ 。在下一步移动前，分别计算沿向量  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$  ...  $\overrightarrow{OH}$  移动后砂轮磨削面位置；
- 2、针对以上每种情况，旋转调整上台角度，判断砂轮能否与工件相切，若能，则将该情况记为砂轮移动的候选方式之一，并记录下切点横坐标。
- 3、在上述所有候选方式中，选择切点距离当前切点  $O$  最近的方案，作为最终砂轮移动的方案。

说明：由于上台的旋转方式是离散的，所以步骤 2 中很可能出现上台并不能旋转到恰好与工件相切的角度，在这种情况下，我们只能选取最接近的值。

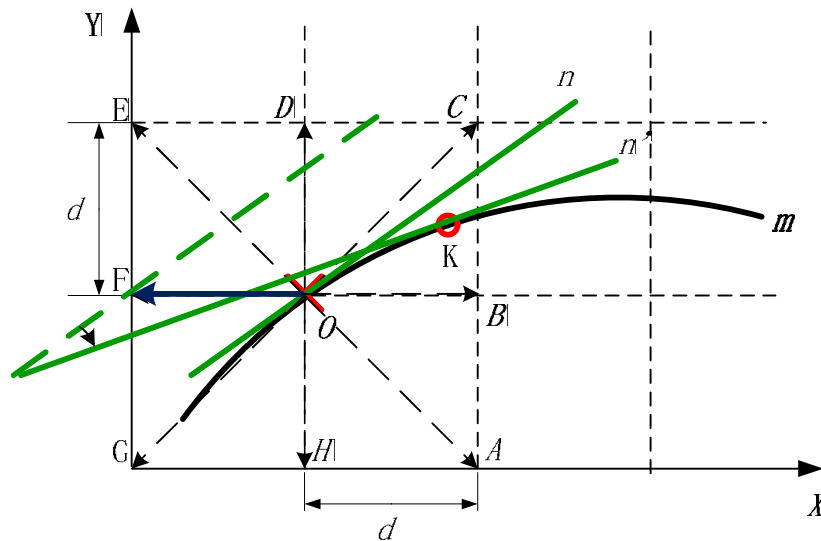


图 7

#### 1. 假定 $\theta$ 角可连续取值

如上图所示，在当前状态下，我们的方案是首先砂轮沿向量  $\overrightarrow{OF}$  移动  $d$ ，再

旋转  $\theta$  角，使得移动后的磨削面  $n'$  与工件母线近似于点  $K$ 。这时  $K$  是距离  $O$  点最近的下一个切点。直线  $n$ 、 $n'$  与抛物线  $m$  围成的封闭区域，即加工误差。

## 2. 考虑 $\theta$ 角的离散变化特性:

如下图所示，在  $\theta$  角不能连续变化的条件下，磨削面可能与工件母线的位置关系可能是相切、相离或相割。显然，下图情况中加工误差为折线  $OABC$  与曲线  $m$  所围成的阴影部分。

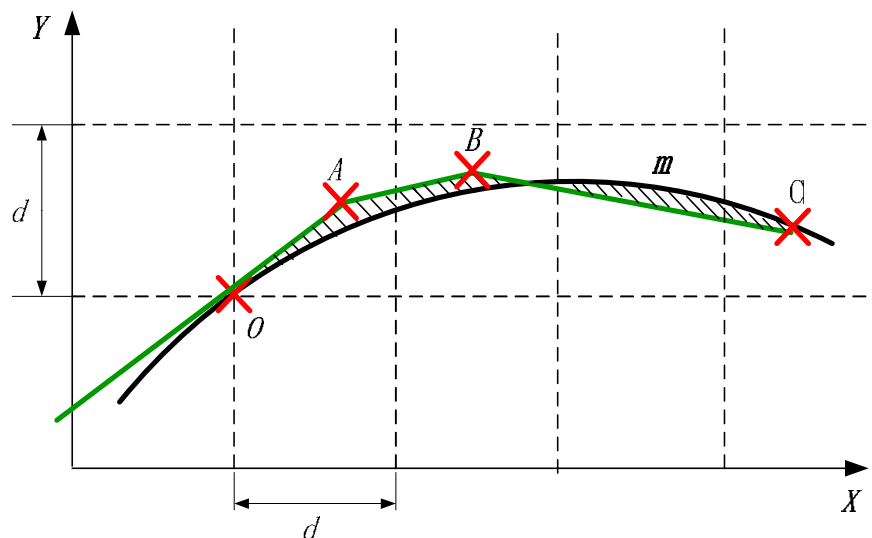


图 8

## 方案二、实际方案

上述方案中给出了理论上误差最小值，以及达到这种水平的实施方案。但这种方案将消耗巨大的时间代价。实际应用中，时间因素也往往具有相当的重要性。因此，我们权衡加工精度与时间这一对矛盾量，给出一种误差相对较小的快速加工方案。

借助方案一的思想，如下图所示，当切点位于  $O$  处。我们考虑工件母线的特点：

母线方程：

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x), x \in [0, 600] \quad (\text{式 } 7)$$

对  $y$  求一阶导数：

$$y' = -\frac{7}{9000} x + \frac{1}{60}, x \in [0, 600] \quad (\text{式 } 8)$$

在区间  $x \in [0, 600]$  内， $y'$  取值范围为：

$$-0.45 \leq y' \leq \frac{1}{60} \quad (\text{式 9})$$

即有关系式：

$$-1 < y' < 1, x \in [0, 600] \quad (\text{式 10})$$

这一结果说明，在  $x \in [0, 600]$  的范围内，工件母线斜率在 -1 至 1 之间。

某一时刻状态如下图所示，由于砂轮在  $x, y$  方向上位移的最小量相等，这就意味着倘若砂轮发生这两个方向上的位移，那么砂轮的移动方向沿  $\overrightarrow{OA}$  或  $\overrightarrow{OC}$  方向。由 (\*) 式可知，在实际加工过程中，为使加工时间尽量短，可在满足约束条件的前提下，使得砂轮沿  $x$  方向尽力移动。

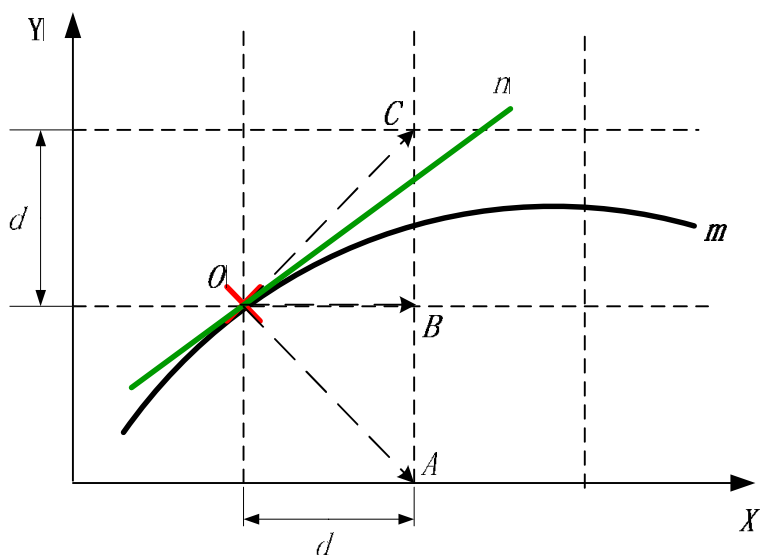


图 9

我们给出的实际加工方案如下：

- (1) 分别假设砂轮磨削面沿向量  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$  移动，而后调整  $\theta$  角，使得磨削面尽量与工件母线相切；
- (2) 计算上述三种情况下的误差情况；
- (3) 选择误差最小的一种作为移动方式。

**结果及分析：**

**加工时间求取：**

在方案一、二中，我们求取了各个步进电机的脉冲序列。在求取加工时间时，我们依据以下原则：

- (1) 在满足约束条件  $f \leq 100$  的条件下，尽量使每秒钟内的脉冲数多。也就是在约束条件允许范围内，使得步进电机全速工作。具体情况如图所示：

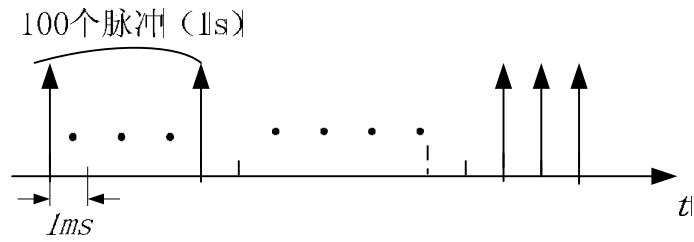


图 10

(2) 考虑约束条件:  $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq 0.1$ 。取 1s 为一个时间段, 如果相邻两秒内的

的脉冲频率相差过大, 则通过差值方式进行修正。具体方法为, 如果当前有一台步进电机频率不满足上述条件, 则在三台步进电机的脉冲序列中相应位置同时插入 0, 用以调节。我们几乎不用考虑这样的方式所带来的时间消耗, 因为在程序运行过程中我们发现, 这样的概率非常小。

### 运行结果:

1. 三台步进电机的脉冲序列情况可见附件。
2. 时间及误差

表 1

方案编号 \ 结果项	误差 ( $mm^2$ )	加工时间 (s)
一	<b>8.3726</b>	<b>4229</b>
二	<b>21.1704</b>	<b>3056</b>

分析: 通过上述结果可以看出, 相对精度最优的方案一, 时间及误差综合考虑的方案二通过牺牲精度来换取时间上的节省。这在工程应用中是十分常见的。

## 2、问题 2 的模型建立与分析

### 模型建立

工件 2 的母线方程为:

$$y = 30e^{\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130, x \in [0, 600] \quad (\text{式 } 13)$$

当第  $i$  个状态时, 轮式砂轮磨削面方程:

$$g = G(x, y, \theta) \quad (\text{式 } 14)$$

工件转速: 300 圈/min

约束条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \leq 100 \\ \frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq 0.1 \\ D_{100} \leq 4 \\ d = \frac{1^\circ}{10} \div 360^\circ \times 12 = \frac{1}{300} (mm) \end{array} \right. \quad (\text{式 } 15)$$

目标函数：

$$y = \min \left\{ \int_0^{600} [|f(x) - g(x)|] dx \right\} \quad (\text{式 } 16)$$

模型分析：

采用轮式砂轮磨削工件时，与工件接触部分为一段圆弧。其误差来源同样是由于砂轮  $x, y, \theta$  三个参数变化的离散性。

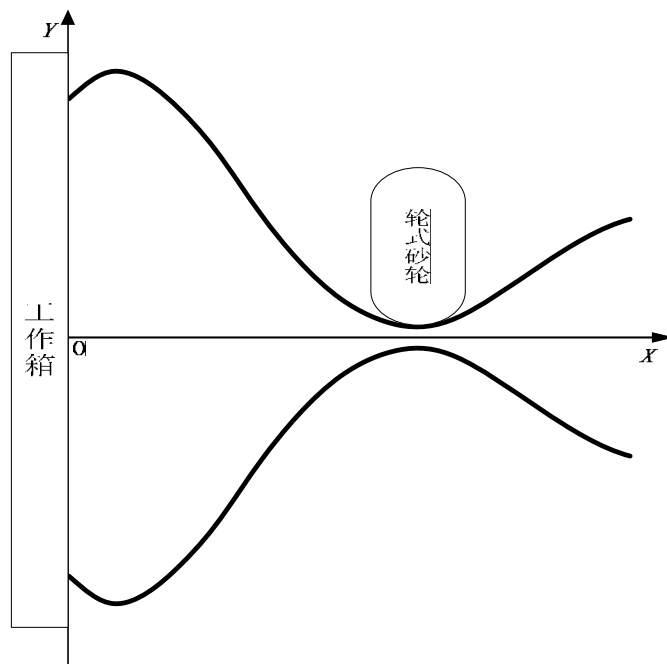


图 11

关于砂轮的厚度选择：

下图所示为采用轮式砂轮的磨削加工示意图。由图示可知，当砂轮厚度太大时（如图中红色虚线所示），磨削过程会产生很大的误差，故砂轮的厚度应满足一定的条件，才能使加工精度尽可能提高。

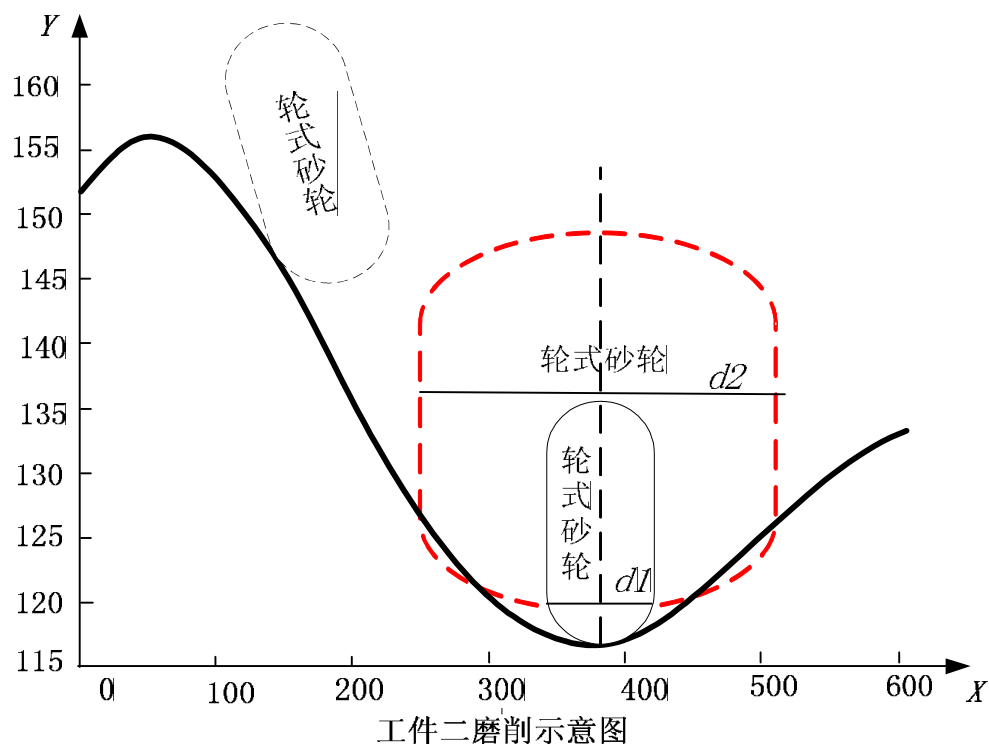


图 12

由曲率半径计算公式：设曲线方程为  $y = f(x)$ ，则曲率半径为

$$\rho = \frac{(1 + g(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{h(x)}$$

其中， $g(x)$  是  $f(x)$  的一阶导函数， $h(x)$  是  $f(x)$  的二阶导函数

由上述可知，砂轮厚度  $d$  应满足：

$$d \leq \frac{(1 + g(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{h(x)} \approx 722.67(\text{mm}) \quad (\text{式 } 17)$$

我们采用问题一中给出的两种加工方案对本题进行解答。

结果及分析：

表 2

方案编号 \ 结果项	误差 ( $\text{mm}^2$ )	加工时间 ( $s$ )
方案一	9.4728	4830
方案二	29.5446	3551

上表结果显示，追求加工精度与加工速度是一对矛盾体，我们可以针对不同场景下的司机需求，对加工方案作出调整。

### 3、问题三模型建立与分析

模型建立：

目标函数：
$$\min \{N_{\max} - N_{\min}\} \quad (\text{式 } 18)$$

其中  $N_{\max}$  表示砂轮磨削面中磨损最严重处被使用的次数， $N_{\min}$  表示磨损最轻微处被使用次数。

(说明：其他条件均与问题一中相同)

模型分析：

延续问题一中方案的思考方式，以其中方案二为例，我们在砂轮每移动到一个新的位置时，记录砂轮与母线接触部分在砂轮磨削面上的相对位置。为便于衡量砂轮不同位置的磨损程度，我们将砂轮磨削面等分成  $n$  个（本文中取 10000）

小份儿，编号为  $l_1, l_2 \cdots l_n$ ，每份长： $\nabla l = d/n$ 。如图所示：

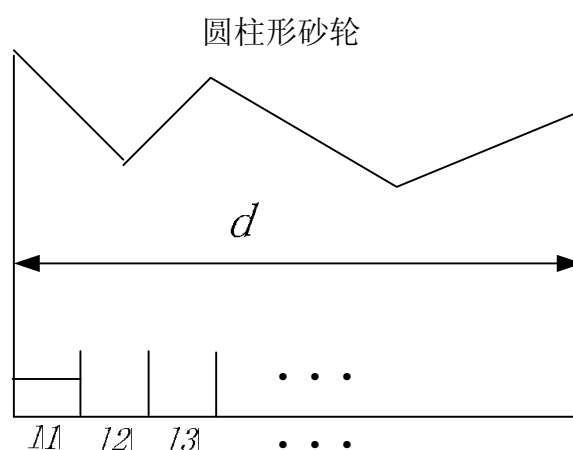


图 13

倘若在某一状态中， $l_i$  段与工件母线接触，那么就认为砂轮磨削面的  $l_i$  段被使用了一次。依据此规则，对方案一中每一状态下砂轮的使用情况进行记录。

这样我们得到了问题一中方案二加工过程对于砂轮的磨损情况，如下图所示：

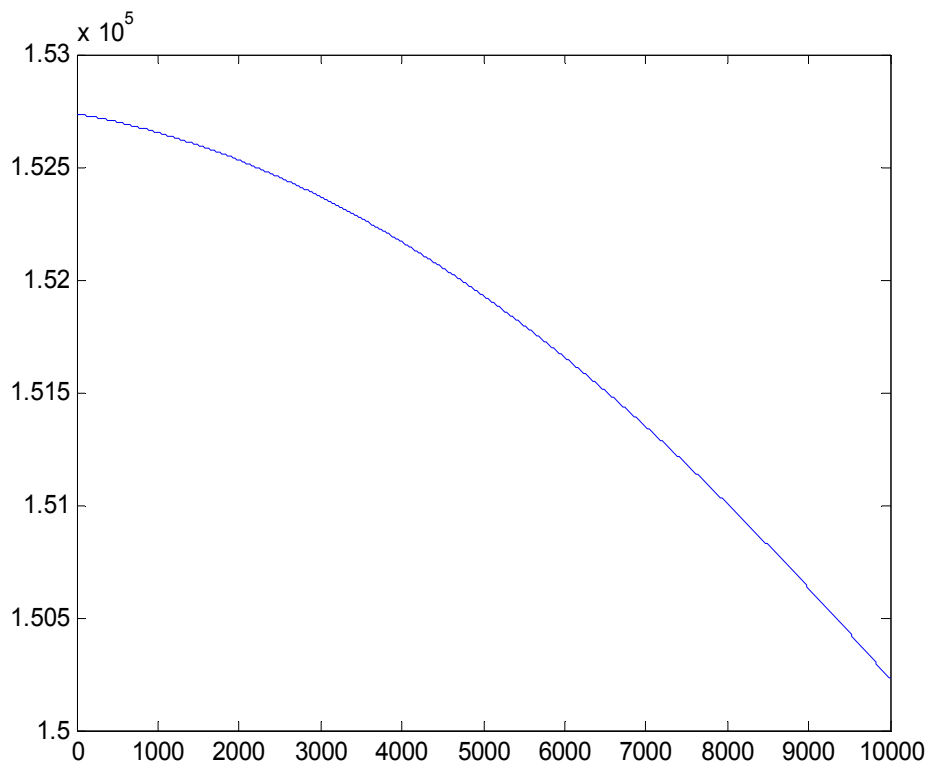


图 14

上图显示出问题一方案二中对于砂轮的使用存在不合理的方面。砂轮左侧磨损远大于右侧。

#### 加工方案:

我们首先提出一个时间单元的概念: 我们将整个加工过程中每 200 秒划分成一个时间单元, 即 1-200s 属于一个时间单元、201-400s 属于一个时间单元... ..

为使  $N_{\max} - N_{\min}$  最小, 即尽量使得砂轮磨削面的磨损程度均匀, 我们给出以下加工方案:

下加工方案:

(1) 在第一个时间单元中, 加工方案与问题一方案二完全相同, 只是需要统计出这一时间单元内砂轮的磨损情况。

(2) 在从第二个起及以后的时间单元中, 每即将跳转到一个新的状态之前, 都去比对前一个时间单元内砂轮的磨损情况。如果新状态下将要磨损的砂轮位置在上一个时间单元内已经被严重磨损(磨损度大于上一时间单元内砂轮磨损的平均值), 那么就在保持  $\theta$  角不变的情况下通过调整  $x, y$  参量来改变磨削面与工件母线的接触位置。是上一时间单元中磨损程度较小的部位与工件接触。

方案示意图:



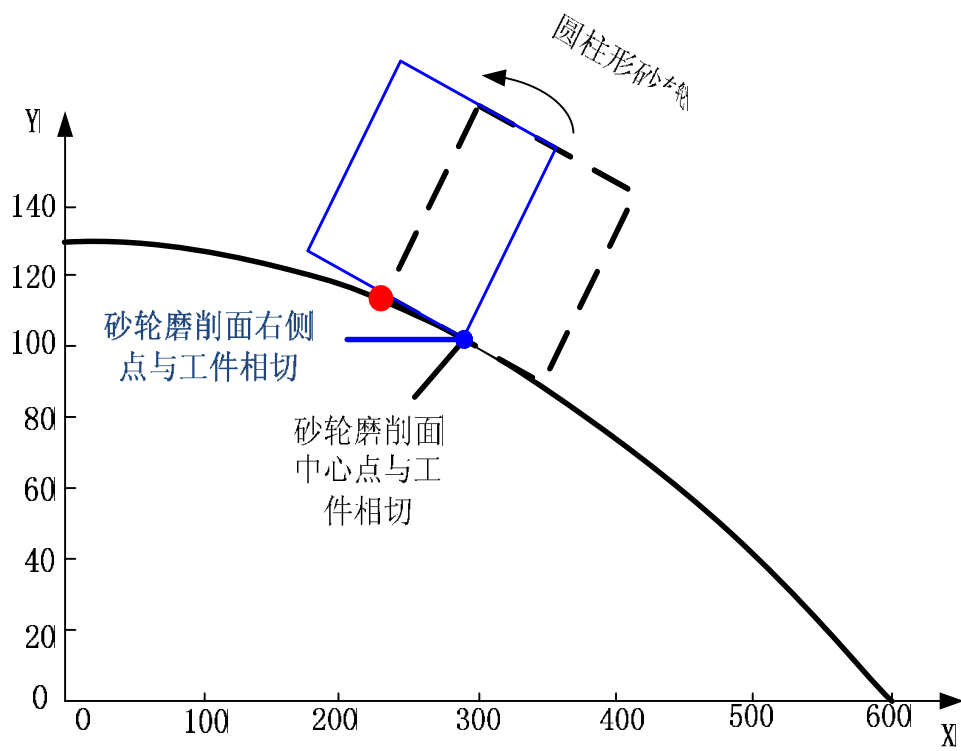


图15. 问题三解决方案

结

果：

(1) 砂轮磨损情况：

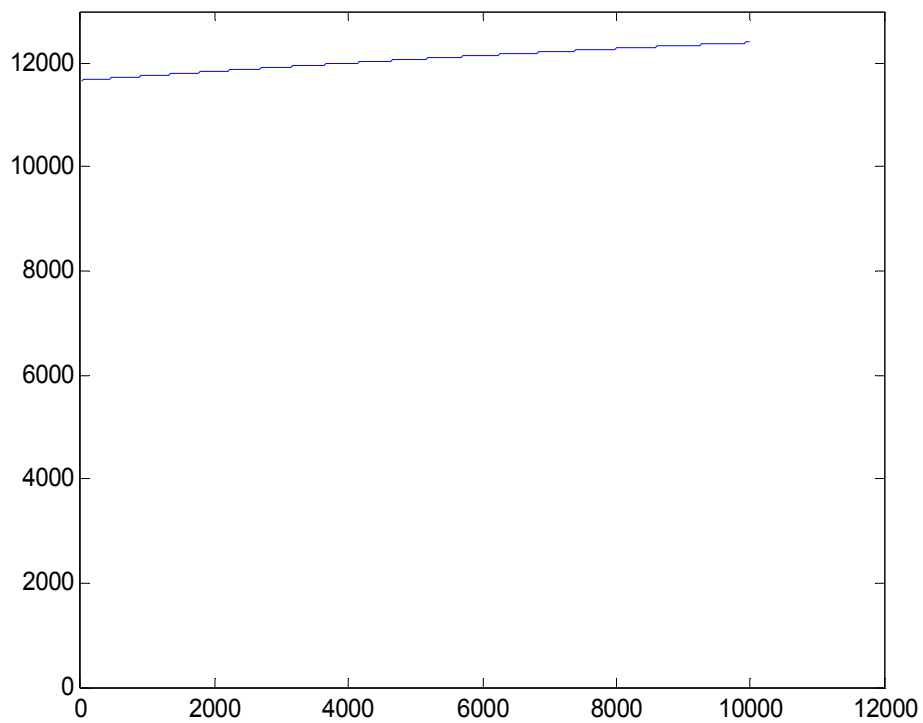


图 16

## (2) 加工时间与误差分析

表 3

方 案 \ 结果项	误差 ( $mm^2$ )	加工时间 ( $s$ )
问题一方案二	21.1704	3056
本方案	29.3901	3695

分析：由上表数据可以看出，为使砂轮磨损尽量均匀，我们在加工时间以及误差方面做出了牺牲。

加工时间延长是显而易见的，因为我们在状态跳转间存在着对砂轮切割部位的调整，这样的调整带来了时间上的消耗。

对于误差增加，是由于在强调砂轮磨削位置的时候，我们实际上弱化了尽量减少误差这一初衷。在砂轮的移动调整过程中，增加了误差。

## 4、问题四的模型建立与分析

模型建立：

工件 2 的母线方程为：

$$y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130, \quad x \in [0, 600] \quad (\text{式 } 19)$$

当第  $i$  个状态时，轮式砂轮磨削面方程：

$$g = G(x, y, \theta) \quad (\text{式 } 20)$$

工件转速：300 圈/min

约束条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} f \leq 100 \\ \frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq 0.1 \\ D_{100} \leq 4 \\ d = \frac{1^\circ}{10} \div 360^\circ \times 12 = \frac{1}{300} (mm) \end{array} \right. \quad (\text{式 } 21)$$

$$\text{目标函数：} \quad \min \{ N_{\max} - N_{\min} \} \quad (\text{式 } 22)$$

其中  $N_{\max}$  表示砂轮磨削面中磨损最严重处被使用的次数， $N_{\min}$  表示磨损最轻微处被使用次数。

模型分析：

考虑轮式砂轮的的特殊结构，其工作示意图如下：

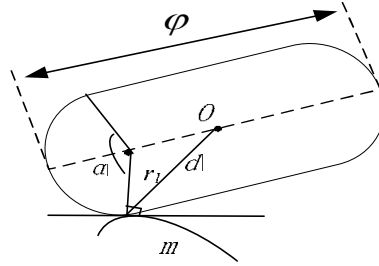


图 17

分析轮式砂轮工作状态可知，曲线上距离砂轮中心  $O$  点的距离满足关系：

$d \leq D \leq \varphi/2$  的点，都可能被砂轮切到。有几何关系可推导得：

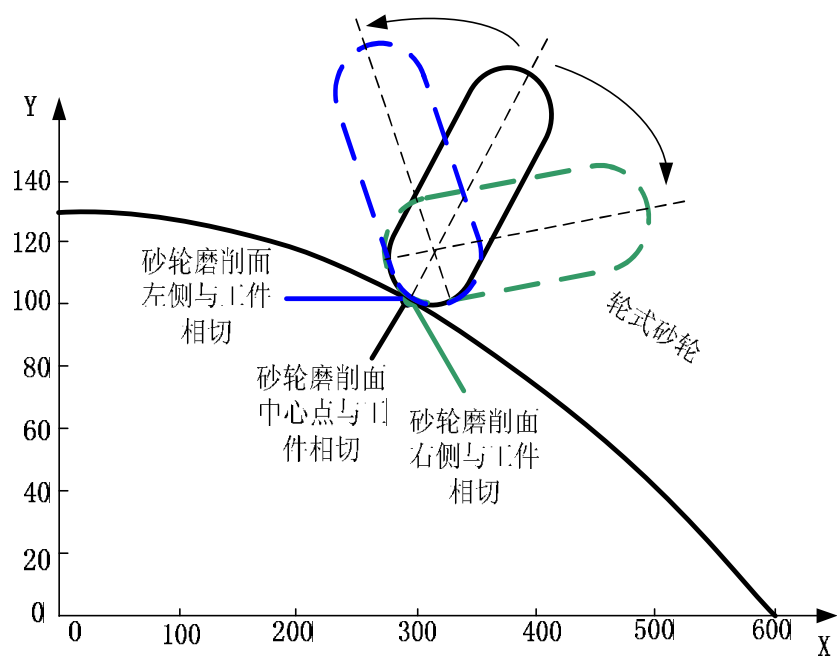
$$d = \sqrt{(\varphi/2 - r_1)^2 + r_1^2 + 2(\varphi/2 - r_1) \times r_1 \times \cos \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{式 23})$$

#### 加工方案：

根据上述分析，我们给出考虑砂轮磨损程度的加工方案：

- (1) 确定砂轮初始位置（本文选用令砂轮的左下角与工件起点相切）。
- (2) 每到一个状态时，砂轮首先固定  $x, y$  两个参数，通过转动  $\theta$  角来尽可能多的磨削工件。
- (3) 与问题一中方案类似，在砂轮跳转状态之前，分别计算砂轮沿八个方向位移后砂轮中心  $O$  与曲线的距离  $D$ 。在所有满足  $d \leq D \leq \varphi/2$  条件的结果中，选择距离当前切点最近的点作为砂轮下一状态。

上述方案赋予了角度变化最高的优先级，每到一个新的状态后，都尽可能的改变  $\theta$  角进行磨削。这样一来的直接效果是在每一个状态下，都充分利用砂轮的磨削面，使砂轮磨损尽可能均匀。



问题四解决方案

图 18

结果及分析:

(1) 砂轮磨损情况

问题二方案对砂轮的磨损情况如下图所示:

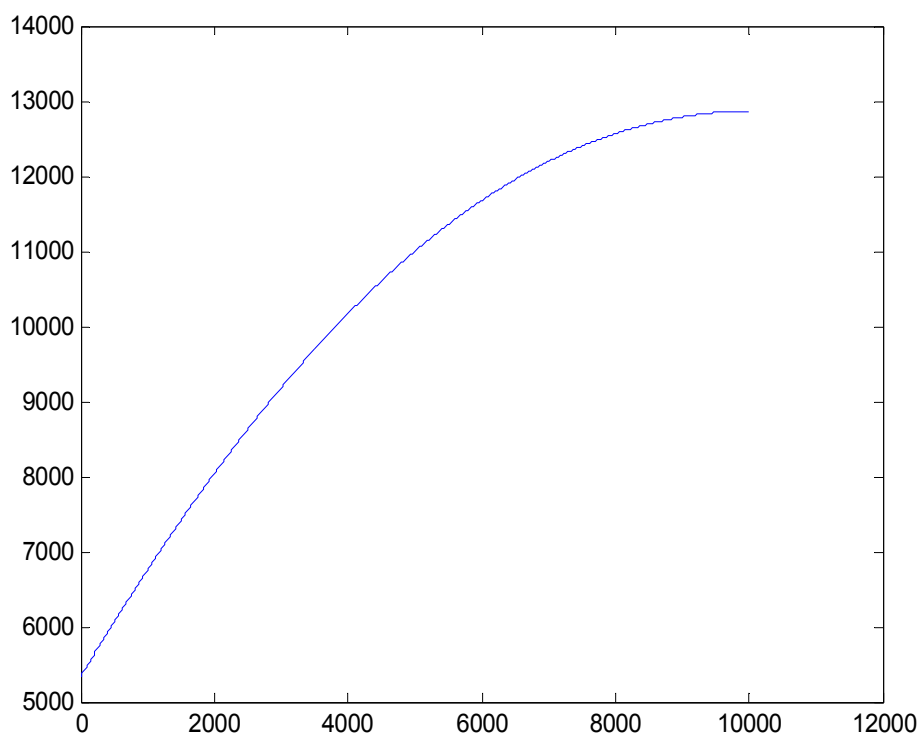


图 19

本题磨损情况如下图所示:

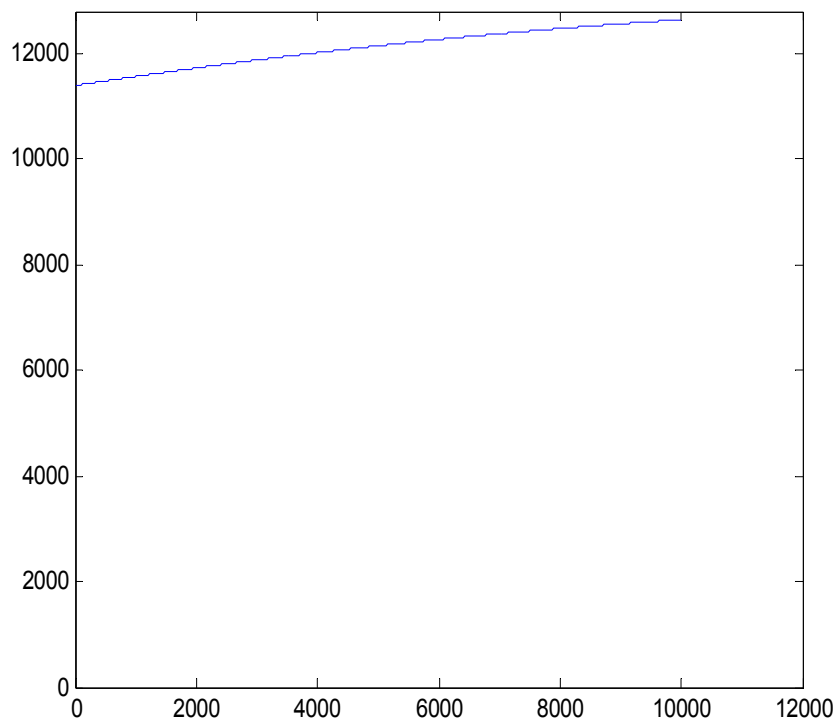


图 20

通过上述结果的对比，说明了本方案有效得将砂轮磨损程度进行了均衡。

## 六、模型评价与改进

本文从微观角度出发，针对不同问题提出了相应解决方案。但仍有待改进之处。

例如，如考虑砂轮由于摩擦产生磨损，当进给量一定时，其磨损量与磨削时间近似呈线性关系。通过试磨确定单位时间磨损量，以实现砂轮的自动补偿。

其次，本文假设了每个脉冲持续时间为 1ms，与实际情况尚存出入。

另外，还可以考虑实际中步进电机的传动误差等一系列在本文中被理想化的指标参数，才能使模型的建立更加合理，使计算结果更接近实际。

以上模型中，我们是将工件的自转速度设为定常数，在磨削过程中始终保持不变，而在实际的磨削工艺中，会将工件变速磨削，其原因在于工件**表面粗糙度**的需要。

**表面粗糙度定义为：**

工件与砂轮磨削产生的工件表面不平整度，只有恒速磨削加工才能获取均匀的粗糙度。由于本工件在不同截面处圆的半径不同，其不同 x 方向接触点的线速度也就不同，因此工件必须变速旋转，因此可以通过编程数控机床控制工件工作箱转轴的速度随半径不同而变速，从而使曲面各处表面的粗糙度区域一致，提高工件表面质量

工件的自转由工件工作箱控制带动；砂轮主轴的运动由砂轮架电动机经三角皮带直接传动，本文假设砂轮恒速旋转，。通常情况下砂轮与工件在接触点的

速度方向是相反,两者转动方向相反。因此,砂轮相对于工件的切削转速  $N$  为二者代数和  $N = N_g + N_s$ 。调整工件的转速和转向,就可改切削的大小。磨削速度:

$$V = V_g + V_s, (V_s \text{ 为常数}) \quad (\text{式 11})$$

$$V_g = 2\pi N_g \times R_g \quad (\text{式 12})$$

为了实现  $V$  恒速磨削,又砂轮转速恒定,当工件与砂轮接触截面半径  $R_g$  变化时,工件的转速  $N_g$  也要随之变化。因此在模型中加入此定义后,必然加工时间增大,而工件表面的粗糙度更加均匀一致,提高了工件的外观质量。

## 七、参考文献

- [1] 裴德琦、赵向阳、陈雅慧, 高精度凸轮磨削的凸轮升程误差分析, 现代车用动力, 第 2 期, P30-32, 2004
- [2] 黄荣芳、卢桂斌, 凸轮磨削形面误差分析及其改进措施, 广西机械, 第 2 期, P66-68, 1999 年
- [3] 王启明、马勇、凌四营, 渐开线凸轮磨削装置的参数化建模与运动仿真, 机械设计与制造, 第 7 期, P112-114, 2009 年
- [4] 数控车床, 程序编制中的数学处理--非圆曲线节点计算, <http://www.docin.com/p-34064918.html>, 2010.9.20