旋转矩阵

- **绕坐标系的坐标轴转动的公式：**

$$
\begin{aligned}
Rot(\hat{x},\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
Rot(\hat{y},\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \\
Rot(\hat{z},\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

角速度

假定坐标系$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$附着在一个旋转物体上。以$\hat{x}$轴为例，定义$\hat{x}$为单位长度。若物体旋转由时间$t$变化到$t+\Delta t$，物体坐标系的姿态相应的绕过原点的某一单位轴$\hat{w}$旋转角度$\Delta\theta$。轴$\hat{w}$与参考坐标系选择无关。如果$\Delta t$趋向于零。则$\Delta\theta/\Delta t$就表示**角速度**$\dot{\theta}$,而$\hat{w}$可以看做瞬时单位转动轴。则$\dot{\theta}$和$\hat{w}$组合在一起表示为**角速度**。即$w=\hat{w}\dot{\theta}$。

如下图：

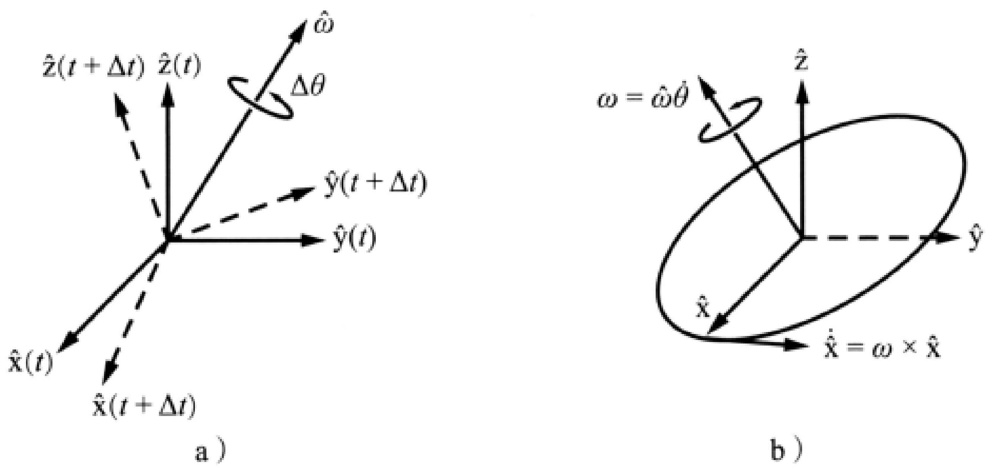


图 3.10 a）瞬时角速度向量；b）计算 $\dot{\hat{x}}$

则三个坐标轴的速度：

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= w\times\hat{x} \\
\dot{\hat{y}} &= w\times\hat{y} \\
\dot{\hat{z}} &= w\times\hat{z}
\end{aligned}
$$

对于旋转矩阵$R(t)$的第一列$r_1(t)$表示固定坐标系的$\hat{x}$轴；类似第二列和第三列分表表示固定坐标系中的的$\hat{y}$轴和$\hat{z}$轴。则在固定坐标系中的表达式可以表示为：

$$\dot{r}_i = w_s \times r_i$$

w_s表示固定坐标系中角速度w。将上式转化为矩阵形式：

$$\dot{R} = [w_s\times r_1 \quad w_s\times r_2 \quad w_s\times r_3] = w_s\times R$$

为将上式右边的叉积消去，引入新的运算，**反对称矩阵**：

反对称矩阵定义如下：

给定一个向量$x = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^T \in R^3$，定义：

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵$[x]$就是向量x对应的3×3的反对称矩阵,且$[x] = -x^T$。

则$\dot{R} = w_s \times R = [w_s]R$。$[w_s]$为向量$w_s$的反对称矩阵。

对于旋转矩阵R,给定的任意w总能满足：

$$R[w]R^T = [Rw]$$

由于$\dot{R} = w_s \times R = [w_s]R$可以导出：

$$[w_s] = \dot{R}R^{-1} = \dot{R}R^T$$

则w_b可以求出：

$$w_b = {R_{sb}}^{-1}w_s = R^{-1}w_s = R^T w_s$$

w_s为角速度w基于固定坐标系的向量表示形式，$[w_s]$是它的3×3的矩阵形式；w_b为角速度w基于物体坐标系的向量表示形式，$[w_b]$是它的3×3得矩阵表示形式。

常见函数的泰勒级数展开（麦克劳林级数）：

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

矩阵指数：

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

矩阵指数满足如下特性：

1. $d(e^{At})/dt = Ae^{At} = e^{At}A$
2. 若$A = PDP^{-1}(D \in R^{n*n}$, 可逆矩阵$P \in R^{n*n})$，则有$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$;
3. 若$AB = BA$,则有$e^A e^B = e^{AB}$
4. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

- **罗德里格斯公式：**

$$Rot(\hat{w}, \theta) = e^{[\hat{w}]\theta} = I + \sin\theta\,[\hat{w}] + (1 - \cos\theta)\,[\hat{w}]^2$$

式子中 θ 采用弧度来表示，且$\hat{w}$为一单位向量

左乘和右乘的区别：

旋转矩阵$R' = e^{[\hat{w}]\theta}R = Rot(\hat{w}\theta)R$：表示矩阵$R$绕固定坐标系的旋转轴$\hat{w}$旋转$\theta$后的姿态；

旋转矩阵$R'' = Re^{[\hat{w}]\theta} = RRot(\hat{w}\theta)$：表示矩阵$R$绕物体坐标系的旋转轴$\hat{w}$旋转$\theta$后的姿态；

刚体转动的矩阵对数：

$\hat{w}\theta$表示旋转矩阵R的指数坐标，反对称矩阵$[\hat{w}\theta] = [\hat{w}]\theta$为矩阵的对数。

对罗德里格斯公式每个元素展开得到：

$$\begin{pmatrix} c_\theta + {\hat{w}_1}^2(1-c_\theta) & \hat{w}_1\hat{w}_2(1-c_\theta) - \hat{w}_3 s_\theta & \hat{w}_1\hat{w}_3(1-c_\theta) + \hat{w}_2 s_\theta \\ \hat{w}_1\hat{w}_2(1-c_\theta) + \hat{w}_3 s_\theta & c_\theta + {\hat{w}_2}^2(1-c_\theta) & \hat{w}_2\hat{w}_3(1-c_\theta) - \hat{w}_1 s_\theta \\ \hat{w}_1\hat{w}_3(1-c_\theta) - \hat{w}_2 s_\theta & \hat{w}_2\hat{w}_3(1-c_\theta) + \hat{w}_1 s_\theta & c_\theta + {\hat{w}_3}^2(1-c_\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

其中$\hat{w} = (\hat{w}_1 \quad \hat{w}_2 \quad \hat{w}_3)$,$c_\theta = \cos\theta$,$s_\theta = \sin\theta$.

可以推导出；

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2\hat{w}_1 \sin\theta \\ r_{13} - r_{31} &= 2\hat{w}_2 \sin\theta \\ r_{21} - r_{12} &= 2\hat{w}_3 \sin\theta \end{aligned}$$

当$\theta \neq k\pi$时，也就是$sin\theta \neq 0$时：

$$\begin{aligned} \hat{w}_1 &= \tfrac{1}{2\sin\theta}(r_{32} - r_{23}) \\ \hat{w}_2 &= \tfrac{1}{2\sin\theta}(r_{13} - r_{31}) \\ \hat{w}_3 &= \tfrac{1}{2\sin\theta}(r_{21} - r_{12}) \end{aligned}$$

反对称矩阵$[\hat{w}]$可以写成：

$$[\hat{w}] = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{w}_3 & \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 & 0 & -\hat{w}_1 \\ -\hat{w}_2 & \hat{w}_3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^{\mathrm{T}})$$

且对角线元素和（矩阵的迹）$trR = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\theta$。

当$\theta = k\pi$时：

1. k为偶数时，无论$\hat{w}$取何值，都会转回原处。即$R = I$，$\hat{w}$不确定；
2. k为奇数时，罗德里格斯公式可以简化为：$R = e^{[\hat{w}]\pi} = I + 2[\hat{w}]^2$,

$$\hat{w}_{\mathrm{i}} = \pm\sqrt{\frac{r_{ii}+1}{2}}, i = 1, 2, 3$$

可以导出：

$$\begin{aligned} 2\hat{w}_1\hat{w}_2 &= r_{12} \\ 2\hat{w}_2\hat{w}_3 &= r_{23} \\ 2\hat{w}_1\hat{w}_3 &= r_{13} \end{aligned}$$

在$\theta \in [0, \pi]$中时：

1. 若$R = I$，$\hat{w}$不确定；
2. 若$trR = -1$,则：$\theta = \pi$,这时$\hat{w}$可以去以下三种情况的任一值：（**$-\hat{w}$也为一组解**）

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{33})}} \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ 1 + r_{33} \end{bmatrix}$$

或

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{22})}} \begin{bmatrix} r_{12} \\ 1 + r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}$$

或

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{2(1+r_{11})}} \begin{bmatrix} 1 + r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}$$

3. 其他情况:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}(trR - 1)\right) \in (0, \pi)$$
$$[\hat{w}] = \frac{1}{2\sin\theta}\left(R - R^{\mathrm{T}}\right)$$

齐次变换矩阵

若同时考虑刚体的位置和姿态。用旋转矩阵$R \in SO(3)$表示物体坐标系$\{b\}$相对固定坐标系$\{s\}$的姿态;用向量$p \in R^3$表示$\{b\}$相对于$\{s\}$的坐标。将二者集成到一个矩阵中,即为一个**特殊的欧式群**,也被称为**刚体运动群**或**齐次变换矩阵**,是所有4×4实矩阵T的集合可以写为:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

齐次变换矩阵的性质:

1. 齐次变换矩阵的**逆矩阵**也是齐次变换矩阵。

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 两个齐次变换矩阵的乘积也是齐次变换矩阵。
3. 其次变换矩阵的乘法满足**结合律**,一般**不满足交换律**。

运动旋量

用$\{b\}$和$\{s\}$分别表示移动(物体)坐标系和固定(空间)坐标系。令:

$$T_{sb}(t) = T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表示$\{b\}$相对$\{s\}$的位形。用T代替T_{sb}。

- # 物体的运动旋量:

$$T^{-1}\dot{T} = \begin{pmatrix} R^T & -R^Tp \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}\dot{R} & R^{-1}\dot{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R^T\dot{R} & R^T\dot{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R^{-1}\dot{R} = [\omega_b]$是物体坐标系$\{b\}$下描述角速度的反对称矩阵形式；$\dot{p}$是在固定坐标系$\{s\}$下个描述物体的线速度，因此$R^{-1}\dot{p}$是在物体坐标系$\{b\}$下描述物体的线速度。

将w_b与v_b组合在一起，构成一个六维向量的形式，将其定义为**物体坐标系中的速度**：

$$V_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^6$$
$$T^{-1}\dot{T} = [V_b] = \begin{bmatrix} [\omega_b] & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **空间运动旋量：**

$$\dot{T}T^{-1} = \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^Tp \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}R^T & \dot{p} - \dot{R}R^Tp \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{R}R = w_s$是在固定坐标系下描述角速度的反对称矩阵形式；$v_s = \dot{p} - \dot{R}R^Tp$并不是在固定坐标系下描述物体原点的线速度（应该是$\dot{p}$）。将$v_s$重新描述

$$v_s = \dot{p} - \dot{R}R^Tp = \dot{p} - [w_s]p = \dot{p} + w_s \times (-p)$$

其v_s的物理意义可以描述为：假想运动**刚体的尺寸足够大**，v_s可以看做**刚体物体上与固定坐标系原点相重合点**的瞬时速度，并非在固定坐标系中的度量。如下图所示：

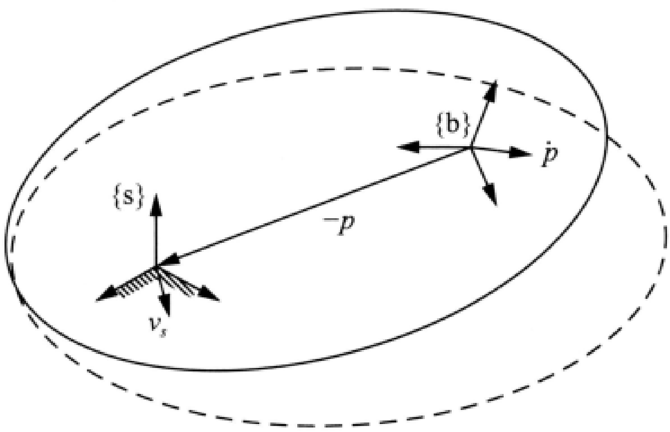


图 3.17　v_s的物理解释：刚体的初始位形（实线）和一般位形（虚线）

将w_s与v_s组合在一起，构成六维向量，将其定义为**固定坐标系中的速度**，简称为空间运动旋量。

$$V_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^6$$
$$[V_s] = \begin{bmatrix} [\omega_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{T}T^{-1}$$

- **伴随矩阵：**

$$
\begin{aligned}
&[V_b] = T^{-1}\dot{T} \Rightarrow T\,[V_b] = \dot{T} \\
&\Rightarrow [V_b] = T^{-1}[V_s]T \\
&[V_s] = \dot{T}T^{-1} \\
&\Rightarrow [V_s] = T\,[V_b]T^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[V_s] = \ T\,[V_b]T^{-1} \\
&\begin{bmatrix} [w_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [w_b] & v_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} [w_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R[w_b]R^T & -R[w_b]R^T p + Rv_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} [w_s] & v_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Rw_b] & [Rw_b]p + Rv_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\begin{cases} [w_s] = [Rw_b] \Rightarrow w_s = Rw_b \\ v_s = [Rw_b]p + Rv_b \Rightarrow v_s = [p]Rw_b + Rv_b \end{cases} \\
&\begin{bmatrix} w_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ v_b \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

将$Ad_T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}$定义为与$T$相关的**伴随变换矩阵。**

定义伴随变换矩阵:

对于给定的T,其伴随变换矩阵$[Ad_T]$为:

$$Ad_T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}$$

对于任一V,与T相关联的伴随映射为:

$$V' = [Ad_T]V$$

或者写为:

$$V' = Ad_T(V)$$

也可以写成矩阵形式:

$$[V'] = T[V]T^{-1}$$

伴随映射的特性:

$$
\begin{aligned}
&Ad_{T_1}(Ad_{T_2}(V)) = Ad_{T_1T_2}(V) \\
&[Ad_{T_1}]\,[Ad_{T_2}]V = [Ad_{T_1T_2}]V \\
&[Ad_T]^{-1} = [Ad_{T^{-1}}]
\end{aligned}
$$

- **运动旋量V_s与V_b之间的关系:**

$$
\begin{aligned}
&T_{sb} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&V_s = \begin{bmatrix} w_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ v_b \end{bmatrix} = [Ad_{T_{sb}}]V_b \\
&V_b = \begin{bmatrix} w_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ -R^T\,[p] & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_s \\ v_s \end{bmatrix} = [Ad_{T_{bs}}]V_s
\end{aligned}
$$

刚体运动的指数表达:

- **刚体运动的指数坐标:**

推导矩阵指数$e^{[S]\theta}$的闭环形式：

$$
\begin{aligned}
& e^{[S]\theta} = I + [S]\theta + [S]\frac{\theta^2}{2!} + [S]^2\frac{\theta^3}{3!} + \ldots = \begin{bmatrix} e^{[w]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& G(\theta) = I\theta + [w]\frac{\theta^2}{2!} + [w]^2\frac{\theta^3}{3!} + \ldots \\
& = I\theta + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)[w] + \left(\frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \cdots\right)[w]^2 \\
& = I\theta + (1-\cos\theta)[w] + (\theta - \sin\theta)[w]^2
\end{aligned}
$$

上式中化简利用公式：$[w]^3 = -[w]$

令$S=(w,v)$为螺旋轴，若$\| w \| = 1$，则对于任意的螺旋轴的距离$\theta \in R$，都有：

$$
e^{[S]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[w]\theta} & (I\theta + (1-\cos\theta)[w] + (\theta - \sin\theta)[w]^2)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

若$w=0, \| v \| = 1$，则：

$$
e^{[S]\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

刚体运动的矩阵对数：

$$
[S]\theta = \begin{bmatrix} [w]\theta & v\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

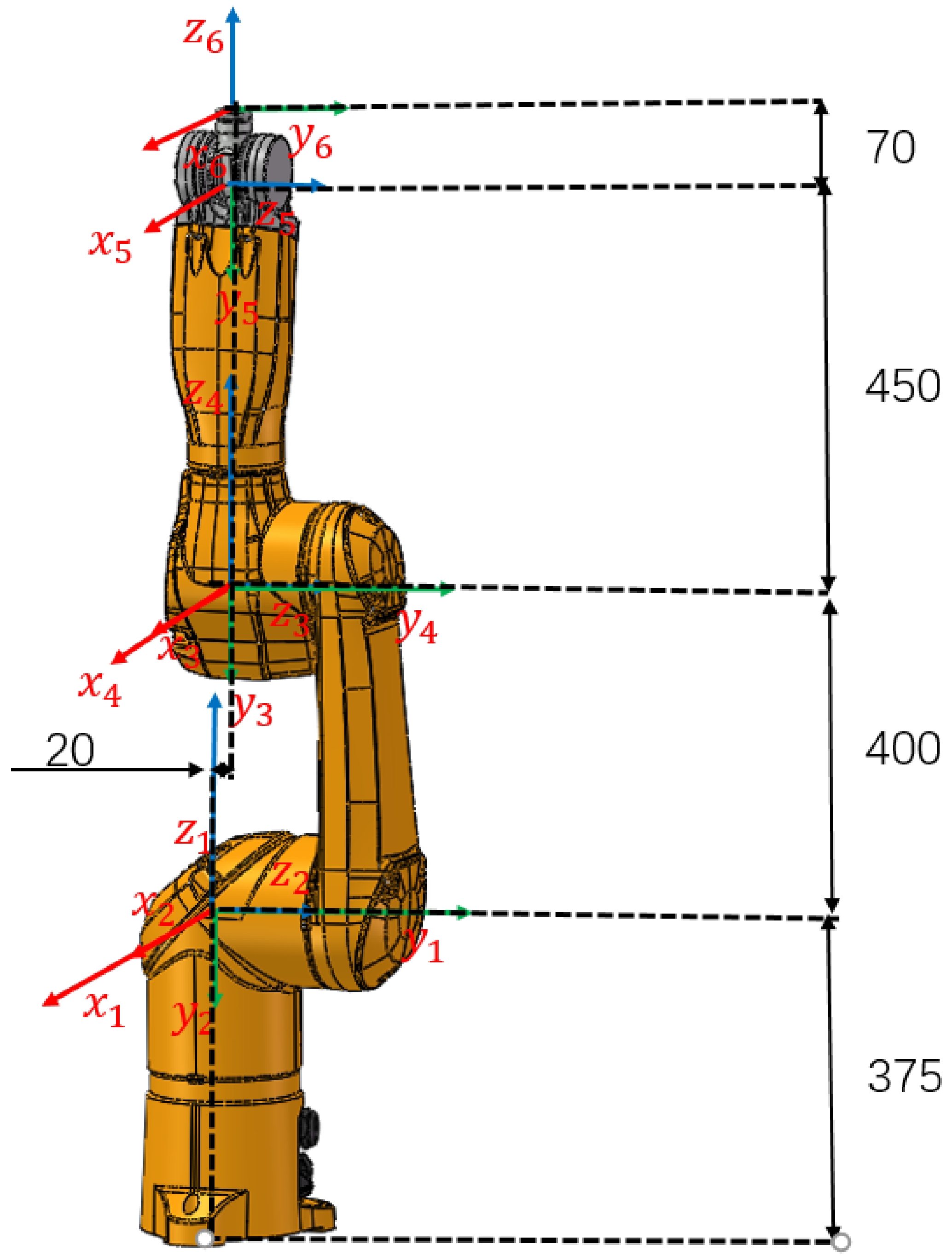
若$R=I$，则$w=0, v=p/\| p \|,$ 且$\theta = \| p \|$;

否则：

$$
\begin{aligned}
& v = G^{-1}(\theta)p \\
& G^{-1}(\theta) = \frac{1}{\theta}I - \frac{1}{2}[w] + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)[w]^2
\end{aligned}
$$

例子：以史陶比尔的机械臂TX2-60L-HB为实验模型建立旋量方程:建模位置，

其中，关节二相对于编码其零位转动了-90度；关节三相对于编码器零位转动了90度。相当于示教器关节值$J_2 = \theta_2 + 90^\circ$，$J_3 = \theta_3 - 90^\circ$

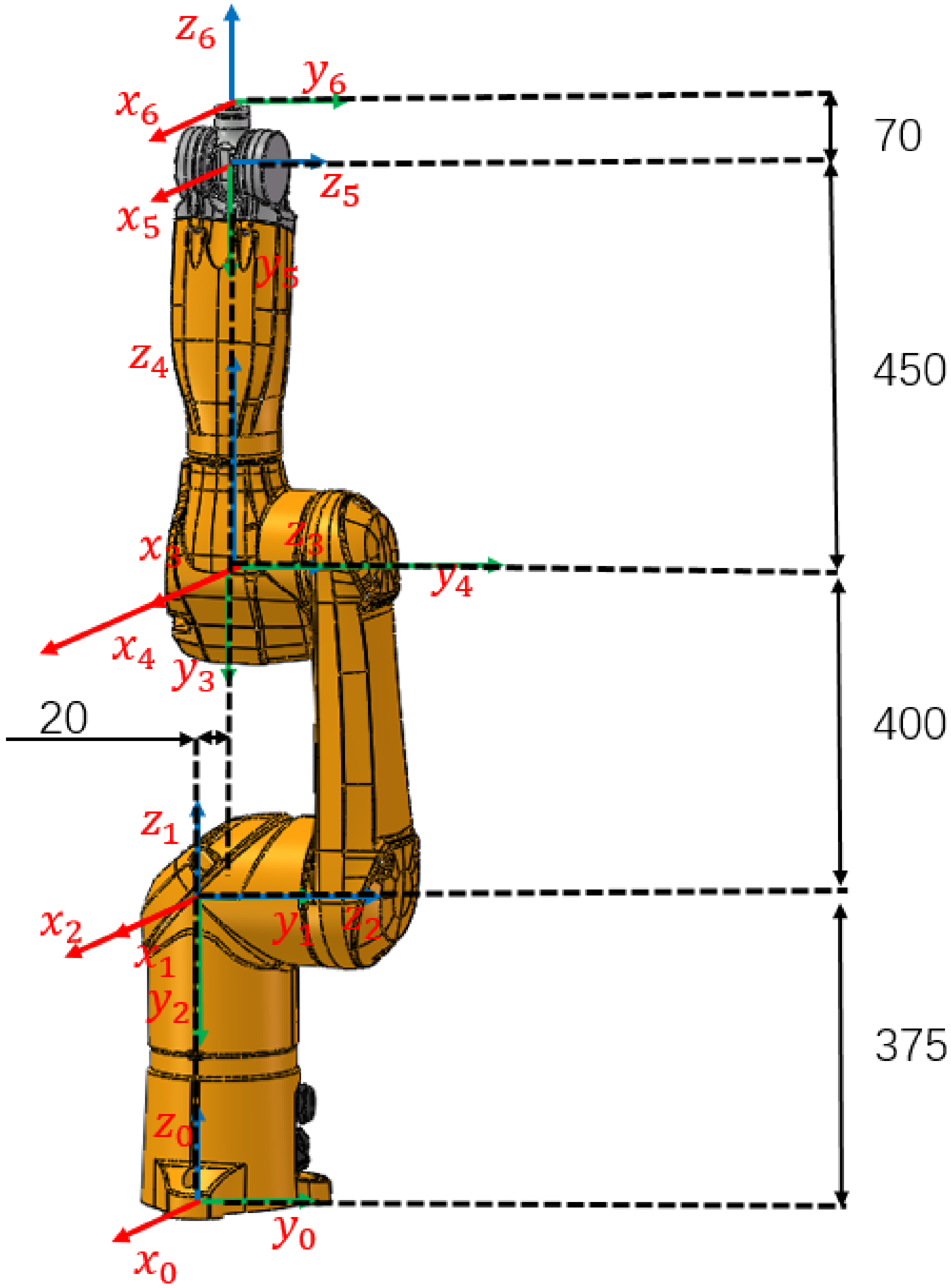


i	w_i	q_i	v_i
1	(0,0,1)	(0,0,0)	(0,0,1,0,0,0)
2	(0,1,0)	(0,0,0)	(0,1,0,0,0,0)
3	(0,1,0)	(0,20,400)	(0,1,0,-400,0,0)
4	(0,0,1)	(0,20,775)	(0,0,1,20,0,0)
5	(0,1,0)	(0,20,850)	(0,1,0,-850,0,0)
6	(0,0,1)	(0,20,920)	(0,0,1,20,0,0)

相对于末端矩坐标相对于极坐标的矩阵初始M为：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 920 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

同时，下图给出对应每个机器人的导出stl模型文件时，各个连杆模型选择的坐标系原点位置。供碰撞检测建模使用。



力旋量

作用在刚体上一点r的纯力f，定义参考坐标系$\{a\}$，点r可以表示为r_a,力f可以表示为f_a。该力产生的**力矩**或**力偶**m_a可写为：$m_a = r_a \times f_a$(未考虑沿作用线的施力点)

将力矩和力合成为一个六维的**空间力**，称为**力旋量**，在$\{a\}$系中描述为：

$$F_a = \begin{bmatrix} m_a \\ f_a \end{bmatrix}$$

如果刚体作用上的力旋量不止一个，那么将这些力旋量进行简单的向量叠加即可，只要在同一坐标系下进行即可。无力元素的力旋量称为**纯力偶**。

$\{a\}$系中的力旋量也可以变换到其他坐标系中，前提T_{ba}已知。建立F_a和F_b之间的映射关系方法之一是：

利用关于同一运动旋量的两种表达V_a和V_b；利用选取坐标系遵循同一系统功率相等的原则。力与速度的电机即为功率，功率为与坐标系无关的量，因此有：

$$V_b{}^T F_b = V_a{}^T F_a$$
$$V_b{}^T F_b = (AdT_{ab}V_b)^T F_a = V_b{}^T [AdT_{ab}]^T F_a$$

因此有：

$$F_b = [AdT_{ab}]^T F_a$$
$$F_a = [AdT_{ba}]^T F_b$$

雅克比矩阵推导过程:

- ## 空间坐标系下的雅克比矩阵推导过程:

考虑一个$\boldsymbol{n}$的开链机器人,其正向运动学的指数级公式为：

空间速度$\boldsymbol{\mathcal{V}_s}$可以写成$[\boldsymbol{\mathcal{V}_s}] = \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}^{-1}$，其中

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}} &= \left(\tfrac{d}{dt}e^{[\boldsymbol{S_1}]\theta_1}\right)\cdots e^{[\boldsymbol{S_n}]\theta_n}M + e^{[\boldsymbol{S_1}]\theta_1}\left(\tfrac{d}{dt}e^{[\boldsymbol{S_2}]\theta_2}\right)\cdots e^{[\boldsymbol{S_n}]\theta_n}M + \cdots \\ &= [\boldsymbol{S_1}]\dot{\theta}_1 e^{[\boldsymbol{S_1}]\theta_1}\cdots e^{[\boldsymbol{S_n}]\theta_n}M + e^{[\boldsymbol{S_1}]\theta_1}[\boldsymbol{S_2}]\dot{\theta}_2 e^{[\boldsymbol{S_2}]\theta_2}\cdots e^{[\boldsymbol{S_n}]\theta_n}\boldsymbol{M} + \cdots\end{aligned}$$

对于：$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{M}^{-1}e^{-[\boldsymbol{S_n}]\theta_n}\cdots e^{-[\boldsymbol{S_1}]\theta_1}$

则计算$\dot{T}T^{-1}$可以得到：

$$\dot{T}T^{-1} = \left([S_1]\dot{\theta}_1 e^{[S_1]\theta_1}\cdots e^{[S_n]\theta_n}M + e^{[S_1]\theta_1}[S_2]\dot{\theta}_2 e^{[S_2]\theta_2}\cdots e^{[S_n]\theta_n}M + \cdots\right)M^{-1}e^{-[S_n]\theta_n}\cdots e^{-[S_1]\theta_1}$$
$$= [S_1]\dot{\theta}_1 e^{[S_1]\theta_1}\cdots MM^{-1}e^{-[S_n]\theta_n}\cdots e^{-[S_1]\theta_1} + e^{[S_1]\theta_1}[S_2]\dot{\theta}_2 e^{[S_2]\theta_2}\cdots e^{[S_n]\theta_n}MM^{-1}e^{-[S_n]\theta_n}\cdots e^{-[S_1]\theta_1}$$
$$+\cdots + e^{[S_1]\theta_1}\cdots e^{[S_{\mathrm{n}-1}]\theta_{\mathrm{n}-1}}[S_{\mathrm{n}}]\dot{\theta}_n e^{[S_n]\theta_n}MM^{-1}e^{-[S_n]\theta_n}\cdots e^{-[S_1]\theta_1}$$
$$[\mathcal{V}_s] = [S_1]\dot{\theta}_1 + e^{[S_1]\theta_1}[S_2]\dot{\theta}_2 e^{-[S_1]\theta_1} + \cdots + e^{[S_1]\theta_1}\cdots e^{[S_{\mathrm{n}-1}]\theta_{\mathrm{n}-1}}[S_{\mathrm{n}}]\dot{\theta}_n e^{-[S_{\mathrm{n}-1}]\theta_{\mathrm{n}-1}}\cdots e^{-[S_1]\theta_1}$$

将:

$$[\mathcal{V}_s] = [S_1]\dot{\theta}_1 + e^{[S_1]\theta_1}[S_2]\dot{\theta}_2 e^{-[S_1]\theta_1} + \cdots + e^{[S_1]\theta_1}\cdots e^{[S_{\mathrm{n}-1}]\theta_{\mathrm{n}-1}}[S_{\mathrm{n}}]\dot{\theta}_n e^{-[S_{\mathrm{n}-1}]\theta_{\mathrm{n}-1}}\cdots e^{-[S_1]\theta_1}$$

通过伴随矩阵写成向量形式，即：

$$\mathcal{V}_s = S_1\dot{\theta}_1 + \mathrm{Ad}_{e^{[S_1]\theta_1}}(S_2)\dot{\theta}_2 + \mathrm{Ad}_{e^{[S_1]\theta_1}e^{[S_2]\theta_2}}(S_3)\dot{\theta}_3\cdots\mathrm{Ad}_{e^{[S_1]\theta_1}e^{[S_2]\theta_2}\cdots e^{[S_{\mathrm{n}-1}]\theta_{\mathrm{n}-1}}}(S_{\mathrm{n}})\dot{\theta}_{\mathrm{n}}$$

令$\mathcal{V}_s$可以写为几个空间向量的形式$J_{s1} = S_1\dot{\theta}_1$,$J_{s2} = Ad_{e^{[s_1]\dot{\theta}_1}}(S_2)\dot{\theta}_2$,$J_{s3} = Ad_{e^{[s_1]\dot{\theta}_1}e^{[s_2]\dot{\theta}_2}}(S_3)\dot{\theta}_3$

则：

$$\boldsymbol{\mathcal{V}_s} = \boldsymbol{J_{s1}}\dot{\theta}_1 + \boldsymbol{J_{s2}}(\theta)\dot{\theta}_2 + \cdots\boldsymbol{J_{sn}}(\theta)\dot{\theta}_n$$

式子中，$\boldsymbol{J_{si}}(\theta) = (\boldsymbol{w_{si}}(\theta), \boldsymbol{v_{si}}(\theta))$是关节变量$\theta$的函数。其中$i = 2, \cdots, n$

化为矩阵形式：

$$\boldsymbol{\mathcal{V}_s} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J_{S1}} & \boldsymbol{J_{S2}}(\theta) & \cdots & \boldsymbol{J_{sn}}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}_s} = \boldsymbol{J_S}(\theta)\dot{\theta}$$

矩阵$\boldsymbol{J_S}(\theta)$即为**空间固定坐标系**形式下的雅克比矩阵，简称**空间雅克比**。

总结:

$\boldsymbol{n}$的开链机器人,其正向运动学的指数级公式为:

$$\boldsymbol{T}(\theta_1, \cdots \theta_n) = e^{[\boldsymbol{S_1}]\theta_1} e^{[\boldsymbol{S_2}]\theta_2} e^{[\boldsymbol{S_3}]\theta_3} \cdots e^{[\boldsymbol{S_n}]\theta_n} \boldsymbol{M}$$

空间雅克比$J_s(\theta)$通过:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}_s} = \boldsymbol{J_S}(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

将关节速度向量$\dot{\theta}$与空降速度$\boldsymbol{\mathcal{V}_s}$有机的联系在一起，$J_s(\theta)$的第$i$列为:

$$\boldsymbol{J_{si}}(\theta) = Ad_{e^{[\boldsymbol{S_1}]\theta_1} e^{[\boldsymbol{S_2}]\theta_2} \cdots e^{[\boldsymbol{S_{n-1}}]\theta_{n-1}}} (\boldsymbol{S_i}) \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

2. 物体坐标系下的雅克比矩阵推导过程:

正向运动学的另一种指数级公式，即:

$$\boldsymbol{T(\theta)} = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} e^{[\boldsymbol{\mathcal{B}}_2]\theta_2} \cdots e^{[\boldsymbol{\mathcal{B}}_n]\theta_n}$$

同时$\dot{\boldsymbol{T}}$和$\boldsymbol{T}$的表达式为:

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{M} e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} [\mathcal{B}_n]\dot{\theta}_n + \boldsymbol{M} e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \cdots e^{[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}} [\mathcal{B}_{n-1}] e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dot{\theta}_{n-1} + \cdots \boldsymbol{M} e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} [\mathcal{B}_1] e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2} \cdots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dot{\theta}_1$$

$$\boldsymbol{T}^{-1} = e^{-[\boldsymbol{\mathcal{B}_n}]\boldsymbol{\theta}_n} \cdots e^{-[\boldsymbol{\mathcal{B}}_1]\boldsymbol{\theta}_1} \boldsymbol{M}^{-1}$$

计算的$\dot{T}T^{-1}$得:

$$\begin{aligned} [\mathcal{V}_b] &= T^{-1}\dot{T} \\ &= [\mathcal{B}_n]\dot{\theta}_n + e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} [\mathcal{B}_{n-1}] e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dot{\theta}_{n-1} + \cdots e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \cdots e^{-[\mathcal{B}_2]\theta_2} [\mathcal{B}_1] e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2} \cdots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

以矩阵形式表达:

$$\mathcal{V}_b = \mathcal{B}_n\dot{\theta}_n + Ad_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}}(\mathcal{B}_{n-1})\dot{\theta}_{n-1} + \cdots Ad_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \cdots e^{-[\mathcal{B}_2]\theta_2}}(\mathcal{B}_1)\dot{\theta}_1$$

令$J_b n = \mathcal{B}_n, J_{b,n-1} = Ad_{e^{-[\mathcal{B}]\dot{\theta}_n}} \dot{\theta}_{n-1}$ $J_{b1} = Ad_{e^{-[\mathcal{B}_n]\dot{\theta}_n} \cdots e^{-[\mathcal{B}_2]\dot{\theta}_2}}(\mathcal{B}_1)\dot{\theta}_1$，即可得:

$$\mathcal{V}_b = J_{b1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots J_{bn-1}(\theta)\dot{\theta}_{n-1} + J_{bn}(\theta)\dot{\theta}_n$$

写成矩阵形式:

$$\mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} J_{b1}(\theta) & \cdots & J_{bn-1} & J_{bn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{n-1} \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = J_b(\theta)\dot{\theta}$$

矩阵$\boldsymbol{J_b}(\theta)$即为**末端（或物体）坐标**形式下的雅克比矩阵，简称**物体雅克比**。