

单摆法测重力加速度实验设计

刘子墨 PB23000233

少年班学院

1 实验原理

在实际的单摆实验中，悬线是一根有质量（弹性很小）的线，摆球是有质量有体积的刚性小球，摆角不为零，摆球的运动还受到空气的影响。此时单摆周期公式为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m}\left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m}\right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16}\right]}$$

若实验精度要求在 10^{-3} 以内，则这些修正项都可以忽略不计。在一级近似下，单摆周期公式为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

则重力加速度的测量公式为：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

2 实验方案设计

2.1 不确定度合成公式

根据测量公式，需测出摆长 l 和周期 T 。

1、摆长 l 的不确定度

摆长的测量模型为：

$$L = \bar{L} + L_0$$

其中 \bar{L} 为摆长的平均值， L_0 为钢卷尺的仪器误差对测量的影响。测量数据的平均值 \bar{L} 的不确定度为标准差 $\mu_{\bar{L}}$ 。仪器误差 B 类正态分布，所以仪器误差 L_0 的不确定度为 $\mu_{L_0} = \frac{\Delta_B}{3} = 0.0667 \text{ cm}$ 。所以摆长的不确定度为：

$$\mu_L = \sqrt{\mu_{\bar{L}}^2 + \mu_{L_0}^2} = \sqrt{\mu_{\bar{L}}^2 + \frac{\Delta_B^2}{9}}$$

2、周期 T 的不确定度

周期的测量模型为：

$$T = \bar{T} + T_0 + T_A$$

其中 \bar{T} 为周期的平均值, T_0 为秒表的仪器误差对测量的影响, T_{λ} 为人的反应时间。测量数据的平均值 \bar{T} 的不确定度为标准差 $\mu_{\bar{T}}$ 。仪器误差 B 类正态分布, 所以仪器误差 T_0 的不确定度为 $\mu_{T_0} = \frac{\Delta_{秒}}{3} = 0.0033 \text{ s}$ 。人的反应时间 B 类正态分布, 所以人的反应时间 T_{λ} 的不确定度为 $\mu_{T_{\lambda}} = \frac{\Delta_{人}}{3} = 0.0667 \text{ s}$ 。所以周期 T 的不确定度为:

$$\mu_T = \sqrt{\mu_{\bar{T}}^2 + \mu_{T_0}^2 + \mu_{T_{\lambda}}^2} = \sqrt{\mu_{\bar{T}}^2 + \frac{\Delta_{秒}^2 + \Delta_{人}^2}{9}}$$

3、重力加速度的标准合成不确定度

综上, 重力加速度的标准合成不确定度为:

$$\mu_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \mu_L^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \mu_T^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \mu_L\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3} \mu_T\right)^2}$$

2.2 测量周期数量

已知单摆的摆长约为 70 cm, 摆长测量的不确定度约为 0.2 cm, 用秒表测量时间的不确定度约为 0.2 s。按照合肥市重力加速度为 9.79 m/s^2 , 估计单摆周期约为 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1.68 \text{ s}$ 。如果测单个周期, 由公式可知, 重力加速度的标准合成不确定度为:

$$\mu_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \mu_L\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3} \mu_T\right)^2} = g \sqrt{\left(\frac{\mu_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\mu_T}{T}\right)^2} = 2.33 \text{ m/s}^2$$

由此可知, 测量一个周期时精度 $\frac{\mu_g}{g} = 0.238$, 误差较大不满足实验要求。

为了提高测量精度, 可以使用累计放大法测量多个周期提高精度。设测量 n 个周期, 测量总时间为 T, 则重力加速度测量公式变为:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\left(\frac{T}{n}\right)^2} = \frac{4\pi^2 l n^2}{T^2}$$

重力加速度的标准合成不确定度为:

$$\mu_g = g \sqrt{\left(\frac{\mu_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\mu_T}{T}\right)^2}$$

带入上述数据求得当 $\frac{\mu_g}{g} \leq 0.01$ 时, 总时间 T 的最小值为 41.74 s, 即最少测量 25 个周期。