



федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

---

Институт информационных и вычислительных технологий  
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

**Отчёт по лабораторной работе №1**  
**По дисциплине «Моделирование систем управления»**  
**«Исследование методов моделирования динамических систем**  
**на базе аналоговых структурных моделей»**

Выполнили студенты: Михайловский М., Рехалов А.

Группа: А-03-21

Бригада: 1

Проверил: Васильев А. А.

Москва 2024

## Содержание

<b>1</b>	<b>Подготовка к работе</b>	<b>3</b>
1.1	Составление аналоговых структурных схем . . . . .	3
1.2	Получение переходных функций . . . . .	4
1.3	Представление в нормальной форме уравнений состояния . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Выполнение работы</b>	<b>6</b>
2.1	Упругое звено . . . . .	6
2.2	Колебательное звено . . . . .	8
2.3	Звено с дифференциальным оператором 2-го порядка . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Выводы</b>	<b>10</b>

# 1 Подготовка к работе

## 1.1 Составление аналоговых структурных схем

**Упругое звено.** Уравнение звена имеет вид (1):

$$T_2 \dot{y} + y = k(T_1 \dot{u} + u) \quad (1)$$

Приведём его к виду уравнения замыкания (2) и на его основе составим аналоговую структурную схему, рис. 1.1.

$$\dot{y} - \frac{kT_1}{T_2} \dot{u} = \frac{k}{T_2} u - \frac{1}{T_2} y \quad (2)$$

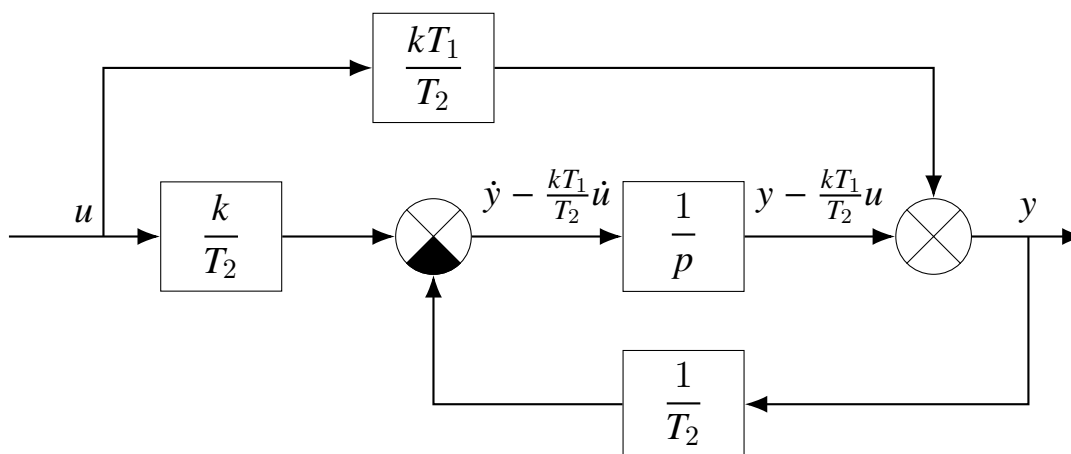


Рис. 1.1. Аналоговая структурная схема для упругого звена

**Колебательное звено.** Уравнение звена имеет вид (3):

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = ku \quad (3)$$

Приведём его к виду уравнения замыкания (4) и на его основе составим аналоговую структурную схему, рис. 1.2.

$$\ddot{y} = ku - by - a\dot{y} \quad (4)$$

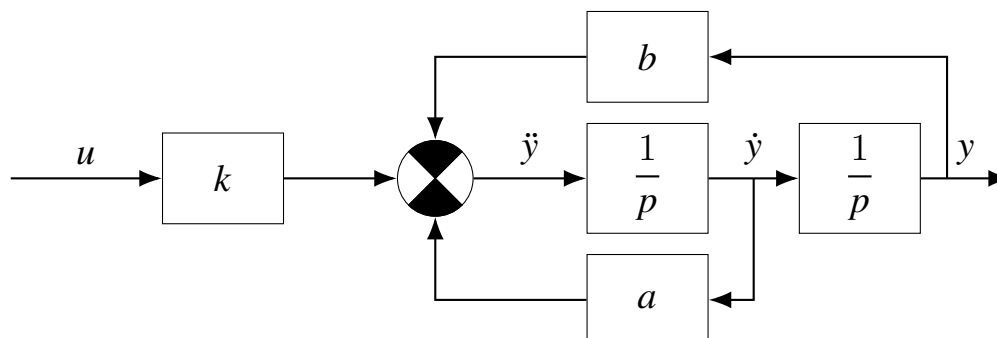


Рис. 1.2. Аналоговая структурная схема для колебательного звена

**Звено с дифференциальным оператором второго порядка.** Уравнение звена имеет вид (5):

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = c\ddot{u} + d\dot{u} + eu \quad (5)$$

Приведём его к виду уравнения замыкания (6) и на его основе составим аналоговую структурную схему, рис. 1.3.

$$\ddot{y} - c\ddot{u} + a\dot{y} - d\dot{u} = eu - by \quad (6)$$

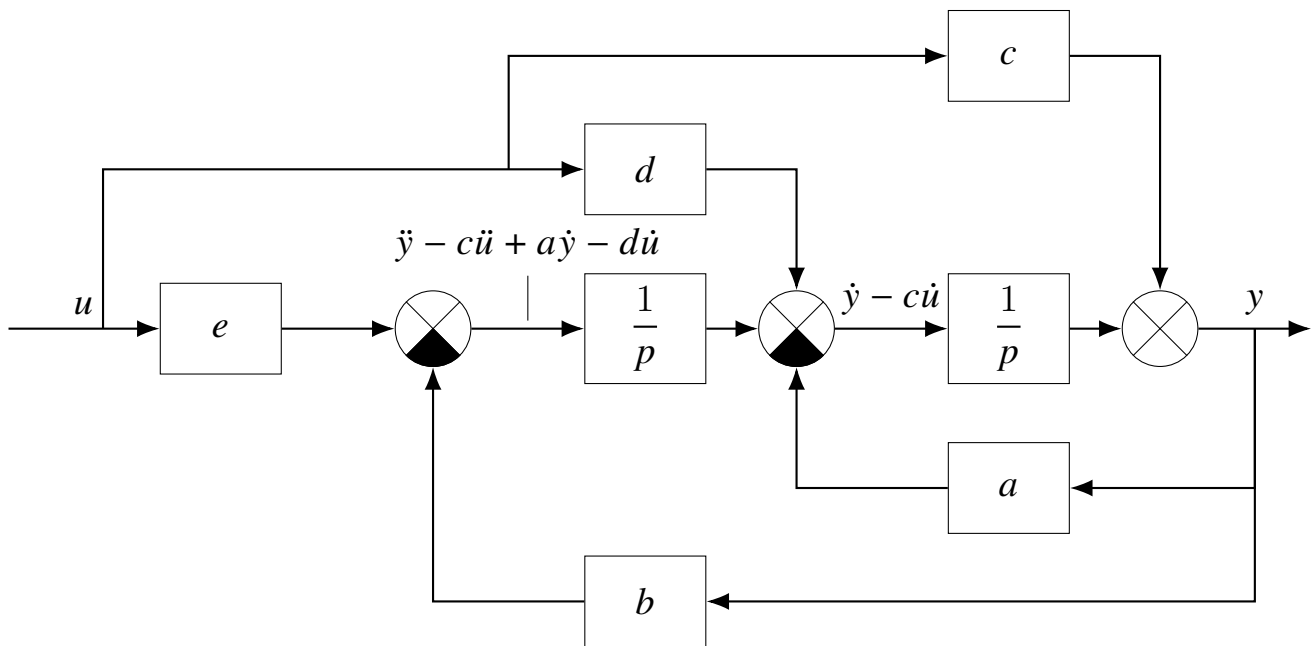


Рис. 1.3. Аналоговая структурная схема для звена с дифференциальным оператором 2-го порядка

## 1.2 Получение переходных функций

**Упругое звено.** Соответствующая передаточная функция будет иметь вид (7):

$$W(p) = \frac{k(1 + pT_1)}{1 + pT_2} \quad (7)$$

Отсюда получаем переходную функцию (8):

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ W(p) \frac{1}{p} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k(1 + pT_1)}{p(1 + pT_2)} \right] = \\ &= k \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p} - \frac{T_2 - T_1}{1 + pT_2} \right] = k \left( 1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1_0(t) \quad (8) \end{aligned}$$

**Колебательное звено.** Передаточная функция имеет вид (9):

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{k}{p^2 + ap + b} = \frac{k}{(p - \alpha + j\beta)(p - \alpha - j\beta)} = \\ &= \frac{k}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}, \text{ где } \alpha \pm j\beta = -\frac{a}{2} \pm j\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \quad (9) \end{aligned}$$

Переходная функция представляется в виде (10):

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ W(p) \frac{1}{p} \right] = k \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p((p - \alpha)^2 + \beta^2)} \right] = \\ &= k \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \frac{1}{p} + \frac{-p + 2\alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \right) \cdot \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right] = \\ &= \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left( 1 - e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \right) \cdot 1_0(t) \quad (10) \end{aligned}$$

### 1.3 Представление в нормальной форме уравнений состояния

Дано уравнение:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by - c\ddot{u} - d\dot{u} - eu = \ddot{y} + 0.4\dot{y} + 1.1y - 2\ddot{u} - 6\dot{u} - 2.5u = 0$$

Для представления в нормальной форме потребуются следующие коэффициенты:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} c \\ d - b\beta_0 \\ e - b\beta_1 - a\beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5.2 \\ -1.78 \end{bmatrix}$$

Тогда система в нормальной форме переменных состояния (11) будет иметь следующие значения матриц (12).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1.1 & -0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -1.78 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], D = 2 \quad (12)$$

## 2 Выполнение работы

### 2.1 Упругое звено

Рассматривается упругое звено со следующими параметрами:

$$k = 2, T_1 = 0.1, T_2 = 0.4$$

Моделирование будет проводиться в среде Simintech. Была собрана схема, представленная на рис. 2.1.

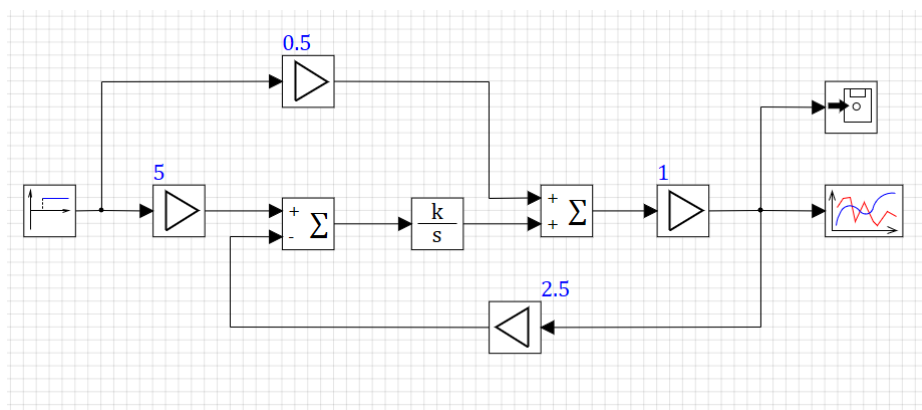


Рис. 2.1. Схема для моделирования упругого звена

Интегрирование дифференциального уравнения будет проводиться с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка для различных шагов интегрирования. Сравнение с аналитическим решением полученного переходного процесса приведено на рис. 2.2.

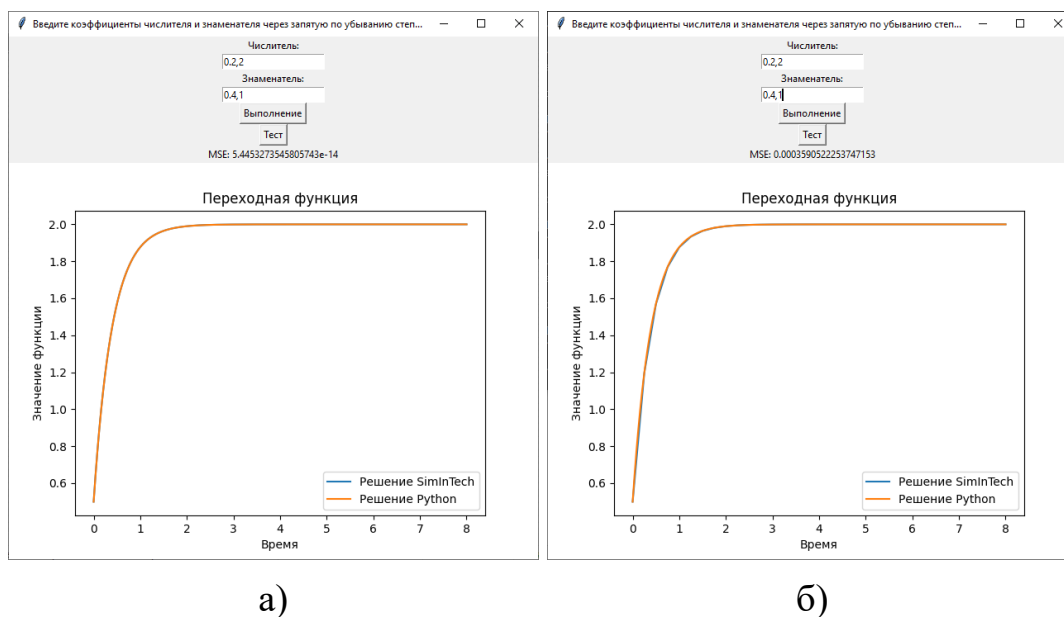


Рис. 2.2. Сравнение смоделированного и истинного переходного процесса: а)  $\Delta t = 0.001$ , б)  $\Delta t = 0.25$

Ошибка моделирования оценивается следующим образом:

$$RMSE = \frac{1}{N} \|h - \hat{h}\|_2 = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (h_i - \hat{h}_i)^2} \quad (13)$$

Здесь  $h$  - истинные значения переходной функции,  $\hat{y}$  - значения, полученные в результате моделирования. График ошибки приведен на рис. 2.3.

В результате проведения экспериментов для различных значений шага интегрирования  $\Delta t$  были получены следующие значения: табл. ??.

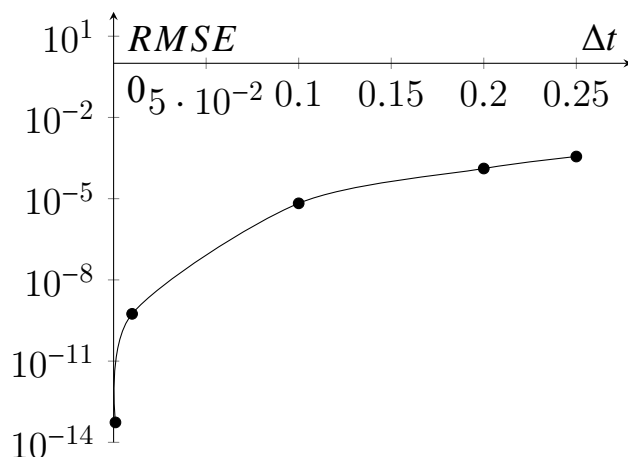


Рис. 2.3. График зависимости ошибки RMSE моделирования от шага интегрирования

Шаг интегрирования $\Delta t$ , с	RMSE	
	Упругое звено	Колебательное звено
0.001	$5.45 \cdot 10^{-14}$	$1.01 \cdot 10^{-13}$
0.01	$5.57 \cdot 10^{-10}$	$1.01 \cdot 10^{-9}$
0.1	$6.73 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$
0.2	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.77 \cdot 10^{-4}$
0.25	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$4.44 \cdot 10^{-4}$

Таблица 1. Значения ошибки моделирования RMSE от шага интегрирования  $\Delta t$

По полученным данным явно видно, что метод Рунге-Кутты 4 порядка в действительности является методом 4-го порядка, так как 10-кратное увеличение шага интегрирования приводит к  $10^4$ -кратному увеличению ошибки интегрирования.

## 2.2 Колебательное звено

Звено рассматривается со следующими параметрами:

$$k = 5, a = 1.1, b = 3.9$$

Моделирование будет проводиться в тех же условиях, что и для упругого звена. Схема моделирования приведена на рис. 2.4

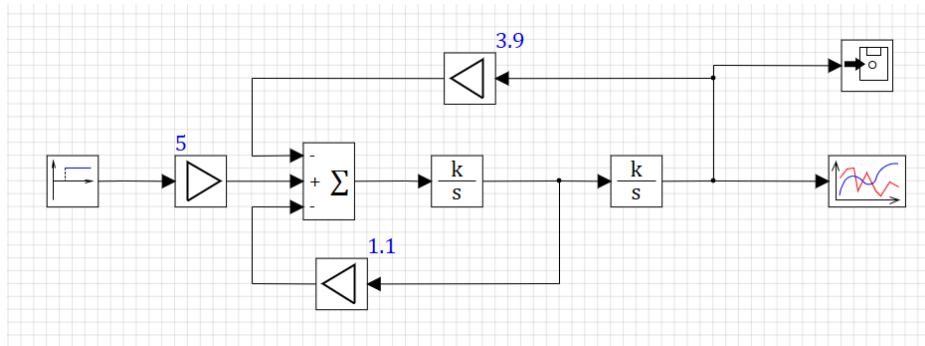
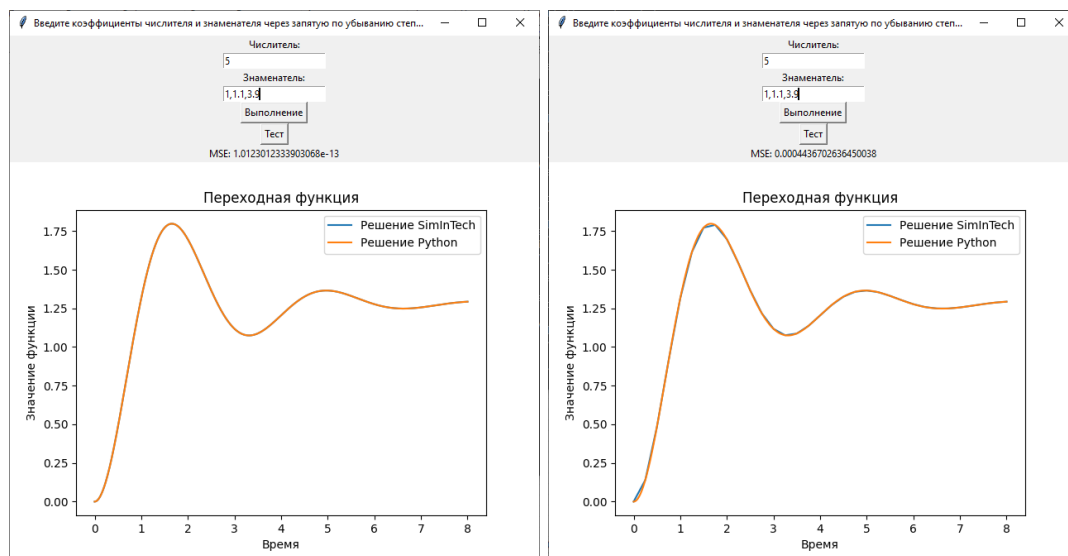


Рис. 2.4. Схема для моделирования колебательного звена

Пример переходного процесса для различных шагов интегрирования приведен на рис. 2.5



а)

б)

Рис. 2.5. Сравнение смоделированного и истинного переходного процесса: а)  $\Delta t = 0.001$ , б)  $\Delta t = 0.25$

Полученный график ошибки представлен на рис. 2.6. Сами значения ошибок приведены в табл. 1.



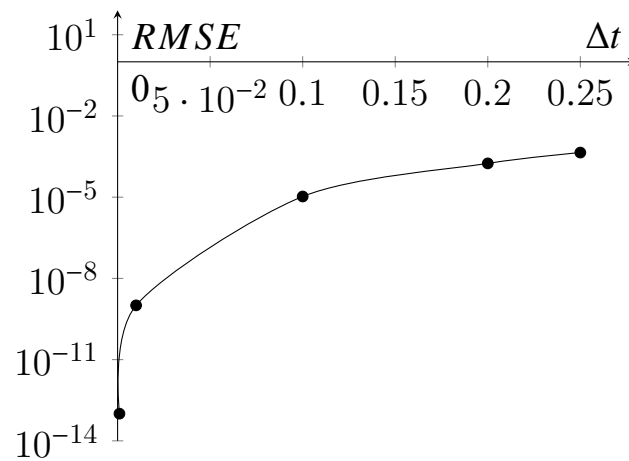


Рис. 2.6. График зависимости ошибки RMSE моделирования от шага интегрирования

## 2.3 Звено с дифференциальным оператором 2-го порядка

Звено рассматривается со следующими параметрами:

$$a = 0.4, b = 1.1, c = 2, d = 6, e = 2.5$$

Моделирование проводится в условиях, аналогичных упругому звену. Схема для моделирования приведена на рис. 2.7.

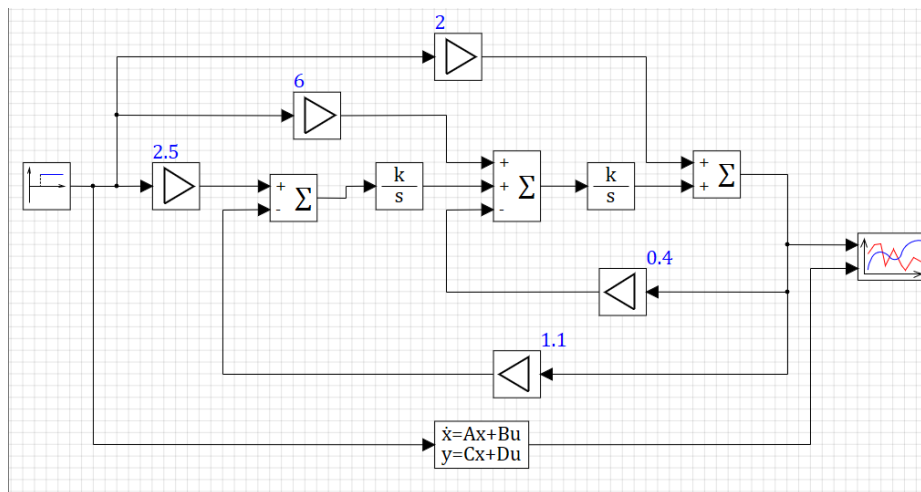


Рис. 2.7. Схема для моделирования звена с дифференциальным оператором 2-го порядка

Как видно на рисунке, система была смоделирована как в виде аналоговой структурной схемы, так и в представлении в переменных состояния. Представление в переменных состояния использовалось то же, что было получено в подготовке к работе, с учётом того, что в среде Simintech матрица состояния  $A$  вводится в транспонированной форме.

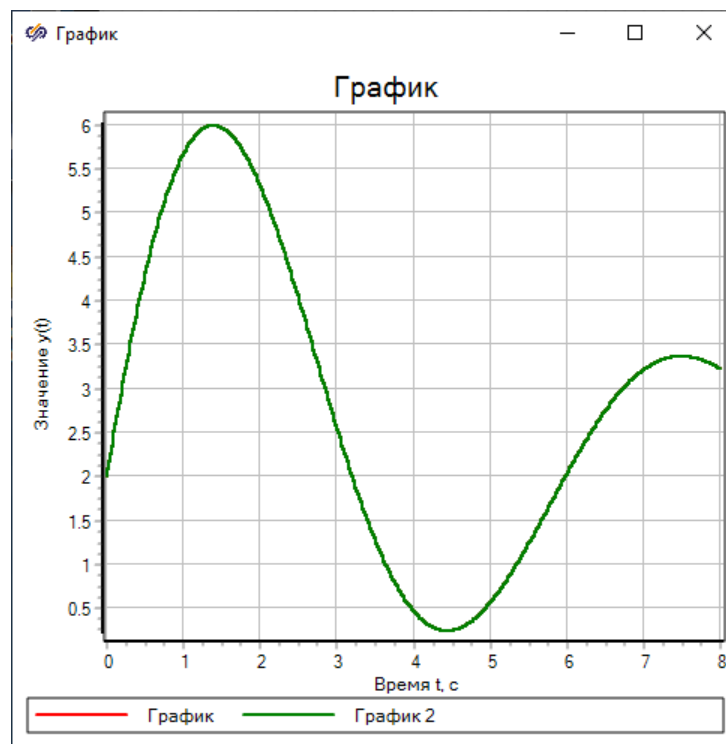


Рис. 2.8. Переходной процесс звена с дифференциальным оператором 2-го порядка

Полученные графики переходного процесса представлены на рис. 2.8.

Как видно, процессы полученные в результате моделирования обоими способами совпали.

### 3 Выводы

Было проведено моделирование трёх различных звеньев: упругого, колебательного и звена заданного дифференциальными операторами 2-го порядка. Моделирование проводилось путём представления звеньев в виде аналоговой структурной схемы. Для численного интегрирования использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка, и полученные значения среднеквадратичной ошибки подтвердили, что порядок его точности равен 4.

Также было моделирование последнего звена в представлении в переменных состояния. Полученный переходной процесс совпал с результатом моделирования аналоговой структурной схемы этого звена.