федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Институт информационных и вычислительных технологий
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

# Отчёт по лабораторной работе №2
# По дисциплине «Моделирование систем управления»
## **«Моделирование многосвязных систем и исследование устойчивости линейных систем»**

Выполнили студенты: Михайловский М., Рехалов А.
Группа: А-03-21
Бригада: 1
Проверил: Васильев А. А.

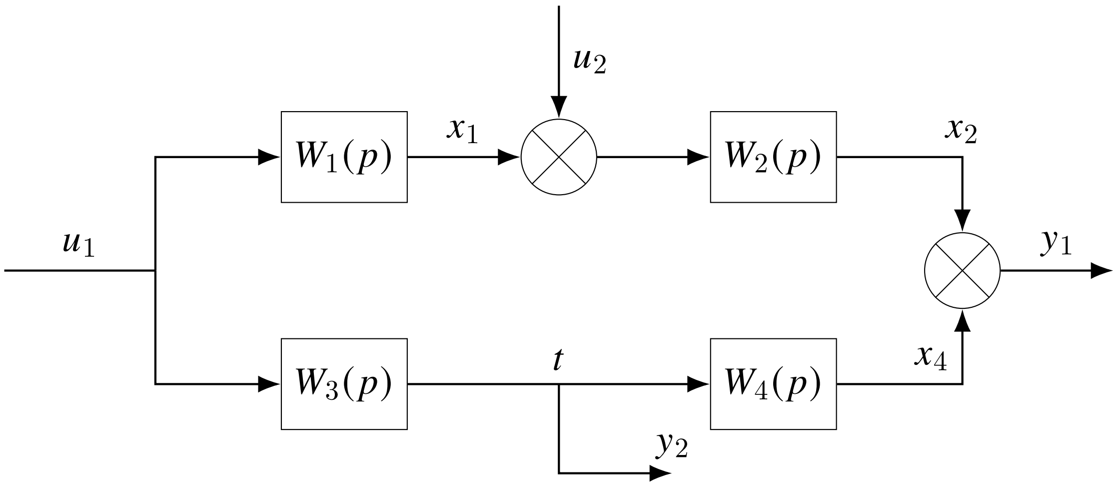
Москва 2024

# Содержание

# 1 Подготовка к работе

## 1.1 Исследование многосвязной системы

Дана многосвязная система, представленная на рис. 1.1. Составим модель этой системы в переменных состояния.




$$W_1(p) = \frac{k_1}{1+pT_1},\ W_2(p) = \frac{k_2}{p},\ W_3(p) = \frac{k_3 p}{1+pT_2},\ W_4(p) = \frac{k_4}{p^2+ap+b}$$

$$T_1 = 0{,}1,\ T_2 = 0{,}4,\ k_1 = 2,\ k_2 = 1{,}1,\ k_3 = 3{,}9,\ k_4 = 5,\ a = 6,\ b = 2{,}5$$

Рис. 1.1. Структурная схема многосвязной системы

1 звено. Упругое звено представим в следующем виде (рис. 1.2):

$$W_1(p) = \frac{k_1}{1+pT_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 + \frac{k_1}{T_1}u_1 \tag{1}$$

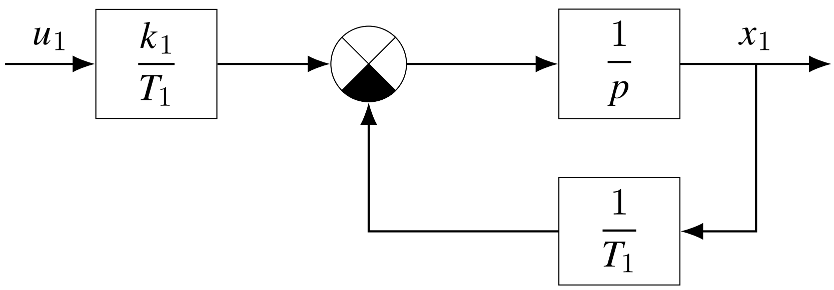



Рис. 1.2. Аналоговая структурная схема 1 звена

2 звено.

$$W_2(p) = \frac{k_2}{p} \Rightarrow \dot{x}_2 = k_2(x_1 + u_2) \tag{2}$$

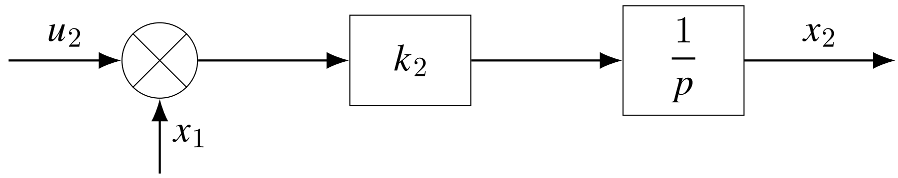



Рис. 1.3. Аналоговая структурная схема 2 звена

<u>3 звено.</u> Уравнения вход-выход примет вид:

$$W_3(p) = \frac{k_3 p}{1 + pT_2} \Rightarrow \dot{t} = \frac{1}{T_2}\left(-t + k_3 \dot{u}_1\right)$$

Примем следующую переменную состояния $x_3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{T_2} t \\ t = x_3 + \dfrac{k_3}{T_2} u_1 \end{cases} \tag{3}$$

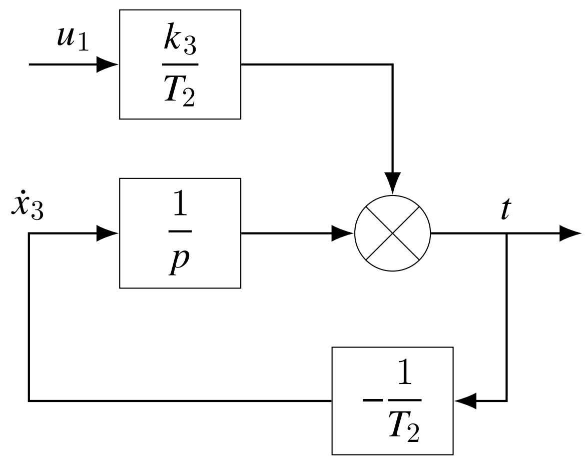



Рис. 1.4. Аналоговая структурная схема 3 звена

<u>4 звено.</u>

$$W_4(p) = \frac{k_4}{p^2 + ap + b} \Rightarrow \ddot{x}_4 + a\dot{x}_4 + bx_4 = k_4 t$$

Примем следующие две переменные состояния $x_4$ и $x_5$:

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = -bx_4 - ax_5 + k_4 t \end{cases} \tag{4}$$

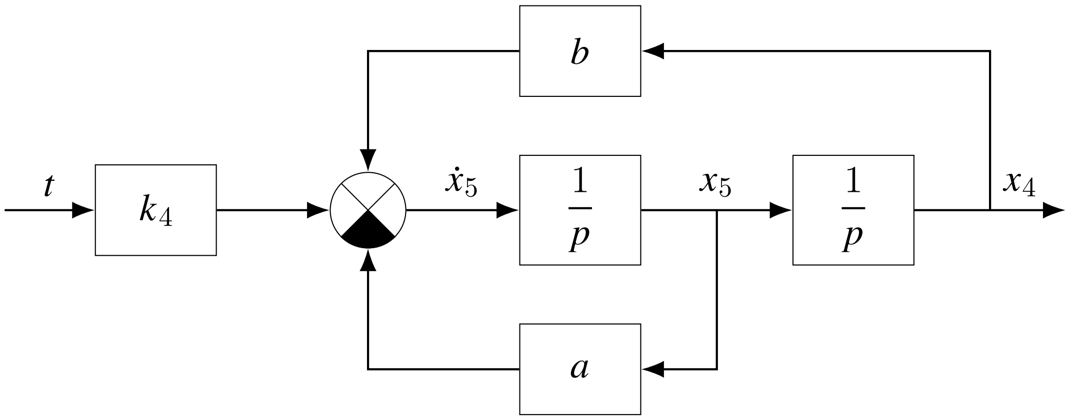



Рис. 1.5. Аналоговая структурная схема 4 звена

Собирая полученные уравнения получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 + \frac{k_1}{T_1}u_1 \\ \dot{x}_2 = k_2x_1 + k_2u_1 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_2}x_3 - \frac{k_3}{T_2^2}u_1 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = k_4x_3 - bx_4 - ax_5 + \frac{k_3k_4}{T_2}u_1 \\ y_1 = x_2 + x_4 \\ y_2 = x_3 + \frac{k_3}{T_2}u_1 \end{cases} \tag{5}$$

Эти уравнения в матричной форме принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{6}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_4 & -b & -a \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T_1} & 0 \\ 0 & k_2 \\ -\frac{k_3}{T_2^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_3k_4}{T_2} & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_3}{T_2} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

## 1.2 Исследование замкнутой системы

Дана передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{k_{\text{р}}(1 - pT_1)}{\left(1 + p\frac{T_1}{2}\right)(1 + pT_2)},\ T_1 = 0{,}1,\ T_2 = 2 \tag{8}$$

Для этого представим передаточную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{2k_{\text{р}}}{T_1T_2}\frac{1 - pT_1}{\left(p + \frac{2}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)} = c_0 + \frac{c_1}{p + \frac{2}{T_1}} + \frac{c_2}{p + \frac{1}{T_2}}$$

$$c_0 = \lim_{p\to\infty} W_{\text{р}}(p) = 0$$

$$c_1 = \operatorname*{res}_{p=-\frac{2}{T_1}} W(p) = \lim_{p\to-\frac{2}{T_1}} \frac{2k_{\text{р}}}{T_1T_2}\left(p + \frac{2}{T_1}\right)\frac{1 - pT_1}{\left(p + \frac{2}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{2k_{\text{р}}}{T_1}\frac{3}{1 - \frac{2T_2}{T_1}} = \frac{6k_{\text{р}}}{T_1 - 2T_2}$$

$$c_2 = \operatorname*{res}_{p=-\frac{1}{T_2}} W(p) = \lim_{p\to-\frac{1}{T_2}} \frac{2k_{\text{р}}}{T_1T_2}\left(p + \frac{1}{T_2}\right)\frac{1 - pT_1}{\left(p + \frac{2}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{k_{\text{р}}}{T_2}\frac{1 + \frac{T_1}{T_2}}{1 - \frac{T_1}{2T_2}} = \frac{2k_{\text{р}}}{T_2}\cdot\frac{T_1 + T_2}{2T_2 - T_1}$$

Получили каноническое представление разомкнутой передаточной функции. Аналоговая структурная схема для его моделирования представлена на рис. 1.6.

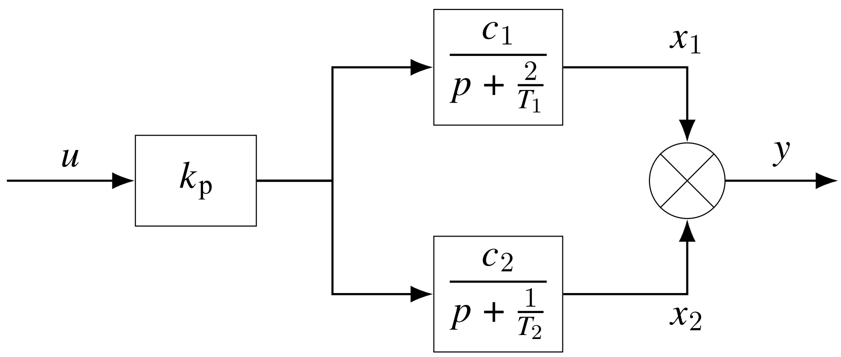



Рис. 1.6. Структурная схема разомкнутой системы в каноническом виде

Уравнения в переменных состояния примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2}{T_1}x_1 + c_1k_{\text{р}}u \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2}x_2 + c_2k_{\text{р}}u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{9}$$

Или в матричном виде (6):

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{T_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix},\ B = k_\text{р} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0 \tag{10}$$

Исследуем устойчивость замкнутой системы, полученной из данной разомкнутой добавлением единичной отрицательной обратной связи.

Характеристический полином замкнутой системы:

$$C(p) = k_\text{р}(1-pT_1)+\left(1 + p\frac{T_1}{2}\right)(1+pT_2) = \frac{T_1T_2}{2}p^2+\left(T_2 + \frac{T_1}{2} - k_\text{р}T_1\right)p+k_\text{р}+1 \tag{11}$$

Следствием критерия устойчивости системы Гурвица для систем 2-го порядка, является то, что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома системы $C(p)$ были одного знака.

Тогда с учётом (11) предельный коэффициент усиления выражается следующим образом:

$$k_\text{пр} = \frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{2} \tag{12}$$

# 2 Выполнение работы

## 2.1 Моделирование многосвязной системы

Для моделирования системы в среде *SimInTech* была собрана схема, представленная на рис. 2.1. На ней система собрана в двух представлениях: в исходных звеньях и в переменных состояния.

В соответствии с полученными в подготовке выражениями (7) матрицы системы в переменных состояния принимают вид:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2{,}5 & -6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 1{,}1 \\ -24{,}375 & 0 \\ 0 & 0 \\ 48{,}75 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9{,}75 & 0 \end{bmatrix}$$

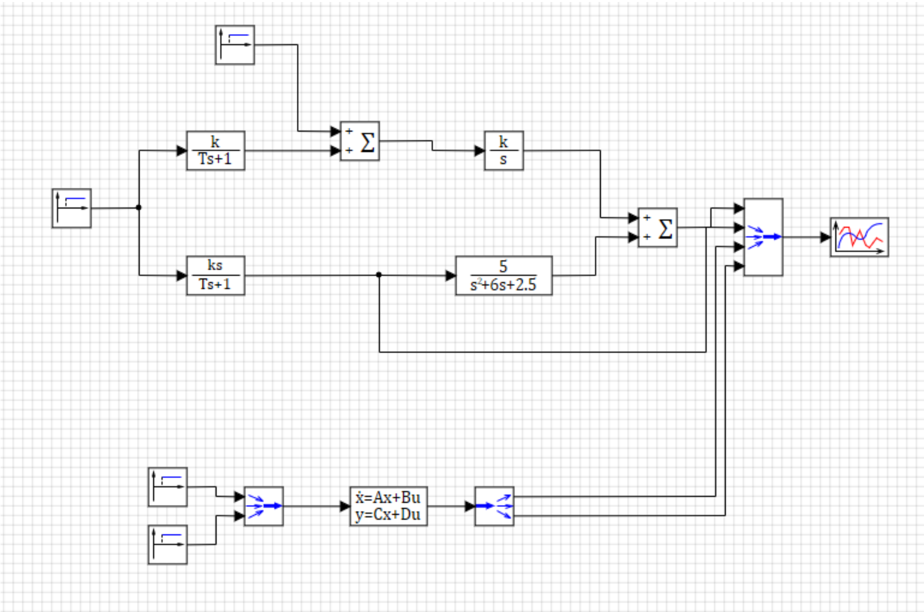



Рис. 2.1. Схема для моделирования многосвязной системы

В блоке переменных состояния в среде *SimInTech* все эти матрицы указываются в транспонированном виде. В результате моделирования переходные процессы, представленные на рис. 2.2. Видим, что графики для обоих реализации многосвязной системы совпали, значит они являются эквивалентными и ошибок при переходе от одного представления к другому допущено не было.

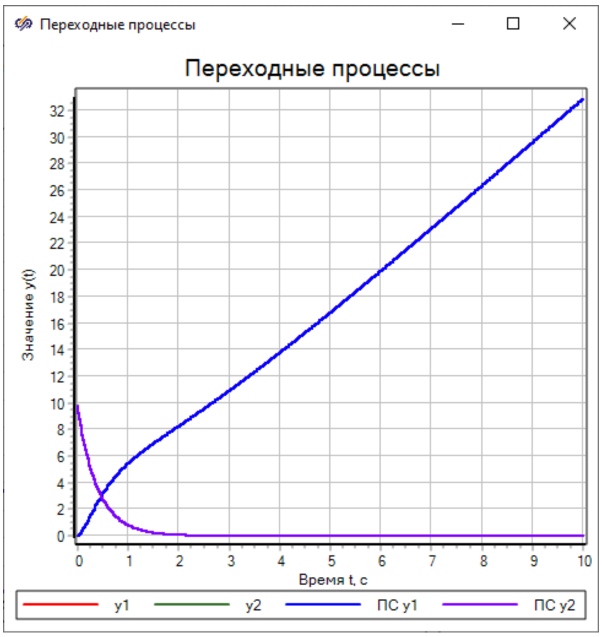



Рис. 2.2. Переходные процессы, полученные в результате моделирования многосвязной системы

## 2.2 Моделирование замкнутой системы

Для моделирования была собрана схема, представленная на рис. 2.3. Так же как и при моделировании многосвязной системы система собрана в двух представлениях.

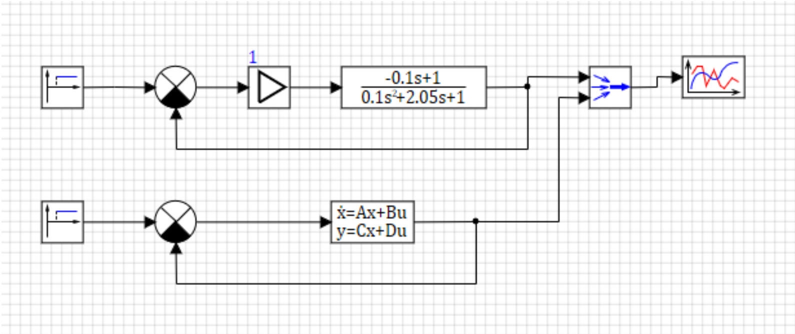



Рис. 2.3. Схема для моделирования замкнутой системы

Матрицы системы в переменных состояния в соответствии с выражениями, полученными в подготовке (10):

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1{,}54 \\ 0{,}54 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \; D = 0$$

Здесь $k_p$ положен равным 1. В результате моделирования, получили процессы, представленные на рис. 2.4. Как видим, процессы в обоих представлениях системы совпали, значит они являются эквивалентными.

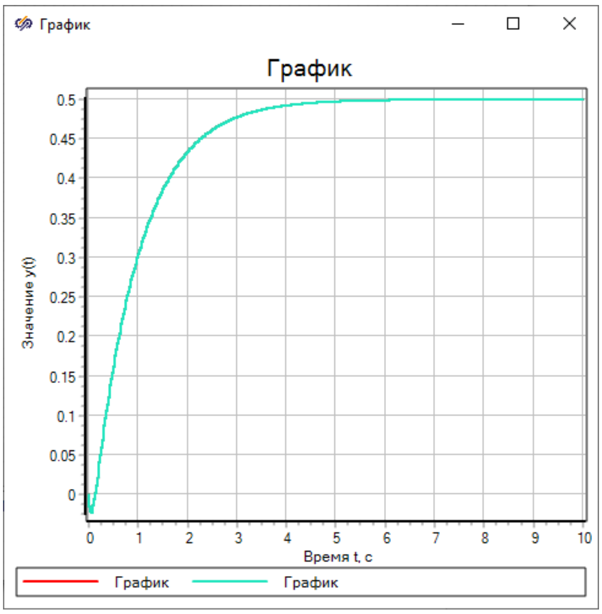



Рис. 2.4. Переходные процессы, полученные в результате моделирования замкнутой системы

**Устойчивость**. В соответствии с выражением (12), полученным в подготовке имеем $k_{пр} = 20{,}5$. Проверяем экспериментально, и получаем, что при $k_р = 20{,}5$ действительно процессы в системе являются незатухающими: рис. 2.5.

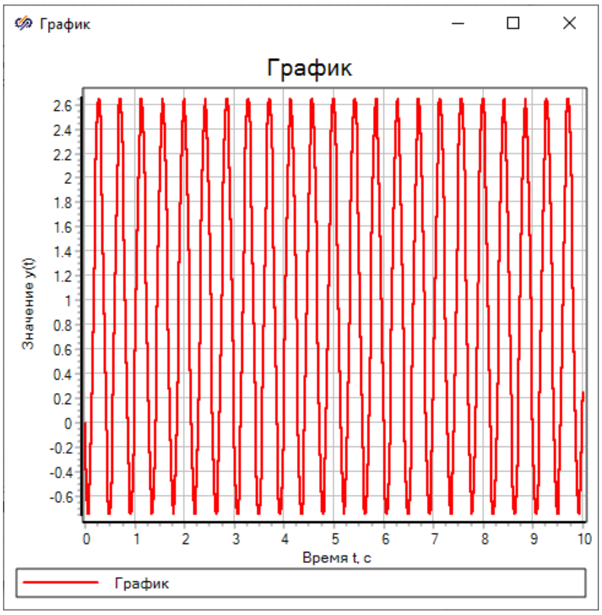



Рис. 2.5. Процессы в замкнутой системе при $k_р = 20{,}5$

Исследуем экспериментально влияние параметра $\tau = \dfrac{T_2}{T_1}$ на значение $k_{пр}$. Полученные значения занесены в табл. 1 и построены на графике, представленном на рис. 2.6. Как видно по графику, полученная зависимость совпадает с выведенной в подготовке (12) и является линейной.

| $\tau = \frac{T_2}{T_1}$ | $k_{пр}$ |
|---|---|
| 10 | 10,5 |
| 20 | 20,5 |
| 40 | 40,5 |
| 60 | 60,5 |
| 100 | 100,5 |

Таблица 1. Полученная зависимость $k_{пр}(\tau)$

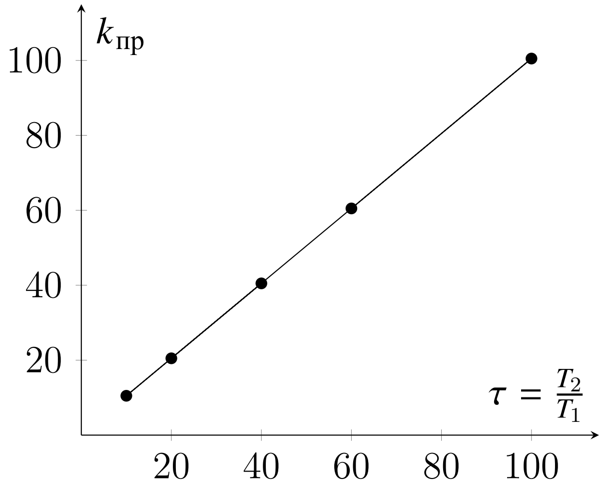



Рис. 2.6. График зависимости $k_{пр}(\tau)$

## 2.3 Блоки для исследования систем

Рассмотрим применение готовых блоков из *SimInTech* для исследования частотных и алгебраических характеристик систем. Собрана схема, представленная на рис. 2.7.

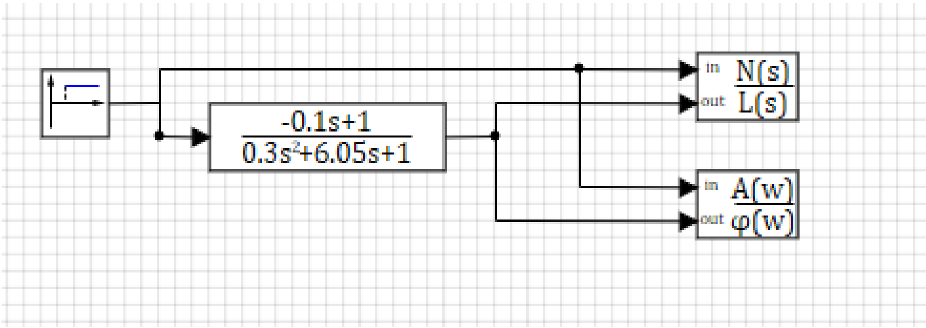



Рис. 2.7. Схема для исследования характеристик системы

В результате моделирования такой схемы мы можем увидеть годограф Найквиста, нули, полюсы системы и другие характеристики: рис. 2.8-2.9.

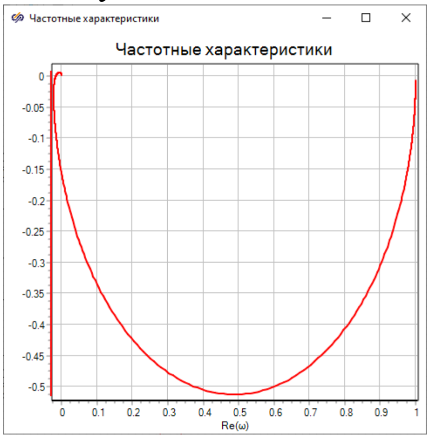
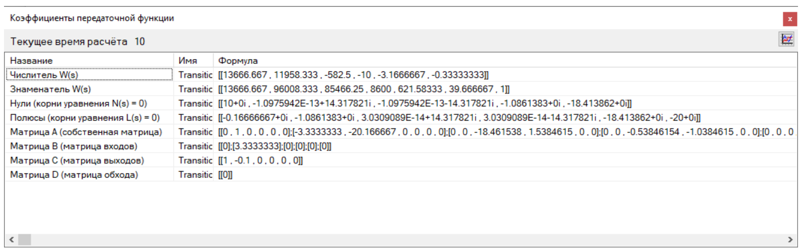



Рис. 2.8. Годограф Найквиста системы



Коэффициенты передаточной функции

Текущее время расчёта 10

| Название | Имя | Формула |
|---|---|---|
| Числитель W(s) | Transitic | [[13666.667 , 11958.333 , -582.5 , -10 , -3.1666667 , -0.33333333]] |
| Знаменатель W(s) | Transitic | [[13666.667 , 96008.333 , 85466.25 , 8600 , 621.58333 , 39.666667 , 1]] |
| Нули (корни уравнения N(s) = 0) | Transitic | [[10+0i , -1.0975942E-13+14.317821i , -1.0975942E-13-14.317821i , -1.0861383+0i , -18.413862+0i]] |
| Полюсы (корни уравнения L(s) = 0) | Transitic | [[-0.16666667+0i , -1.0861383+0i , 3.0309089E-14+14.317821i , 3.0309089E-14-14.317821i , -18.413862+0i , -20+0i]] |
| Матрица A (собственная матрица) | Transitic | [[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0];[-3.3333333 , -20.166667 , 0 , 0 , 0 , 0];[0 , 0 , -18.461538 , 1.5384615 , 0 , 0];[0 , 0 , -0.53846154 , -1.0384615 , 0 , 0];[0 , 0 , 0 |
| Матрица B (матрица входов) | Transitic | [[0];[3.3333333];[0];[0];[0];[0]] |
| Матрица C (матрица выходов) | Transitic | [[1 , -0.1 , 0 , 0 , 0 , 0]] |
| Матрица D (матрица обхода) | Transitic | [[0]] |

Рис. 2.9. Алгебраические характеристики системы

# 3 Выводы

В этой работе было проведено моделирование двух систем: многосвязной и замкнутой. Для этого системы были представлены в переменных состояния. На практике при работе в *SimInTech* задание системы в типовых звеньях и переменных состояния давало одинаковые результаты.

Для замкнутой системы была исследована устойчивость и зависимость предельного коэффициента усиления от параметра, характеризуемого постоянными времени системы, $k_{\text{пр}}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$. Полученные результаты совпали с теми, что были получены в подготовке к работе.

Была исследована возможность использования типовых блоков *SimInTech* для получения частотных и алгебраических характеристик системы.