федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт информационных и вычислительных технологий
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

Контрольная работа
По дисциплине «Оптимальное правление»

Выполнил студент: Михайловский М. Ю.
Группа: А-02м-25
Вариант: 4
Проверила: Сидорова Е. Ю.

Москва 2025

Содержание

1 ЗАДАЧА (2В)

1.1 Условия задачи

Требуется определить структуру регулятора, который обеспечит оптимальный режим движения объекта с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{4}{p}$$

Критерий оптимизации:

$$J = \int_0^{\infty} \left(18x^2 + 8u^2\right) dt \to \min_u$$

Краевые условия:

$$x(\infty) = 0,\ x(0) = 5$$

1.2 Решение

Нужно синтезировать регулятор для использования его в соответствии со структурной схемой, представленной на рис. 1.1. Будем искать передаточную функцию регулятора $K(p)$.

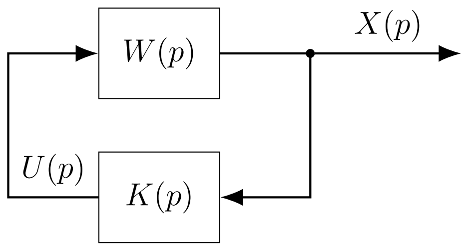

Рис. 1.1. Структурная схема объекта с синтезируемым регулятором

Получим безусловное ограничение из вида передаточной функции объекта:

$$W(p) = \frac{4}{p} \Leftrightarrow pX(p) = 4U(p) \xrightarrow{\mathscr{L}} \dot{x}(t) = 4u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4u(t) \\ x(0) = 5,\ x(\infty) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Запишем гамильтониан для данной системы, чтобы свести задачу к безусловной оптимизации:

$$H(x, u, \psi) = -\lambda_0 \left(18x^2 + 8u^2\right) + 4\psi u \tag{2}$$

Получим оптимальное уравнение, для этого запишем связь с лагранжианом, и воспользуемся условием стационарности по u:

$$H = -\mathcal{L} + \psi\dot{x} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \psi \cancelto{0}{\frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial u}} \tag{3}$$

Подставим значения и учтём стационарность по $u : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$

$$-16\lambda_0 u + 4\psi = 0 \Rightarrow u = \frac{\psi}{4\lambda_0} \overset{\lambda_0=1}{\Rightarrow} \frac{\psi}{4} \tag{4}$$

Для нахождения оптимального управления $u^*(x)$ запишем уравнения Эйлера-Лагранжа в канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 36x \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = 4u = \psi \end{cases}$$

Характеристическое уравнение можно получить из информации о матрице состояния данной системы:

$$\begin{vmatrix} -p & 36 \\ 1 & -p \end{vmatrix} = p^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow p_{1,\,2} = \pm 6 \tag{5}$$

Тогда переменная состояния может быть представлена в виде:

$$x(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-6t} \tag{6}$$

Из условия $x(\infty) = 0$ получаем $C_1 = 0$. А из другого граничного условия $x(0) = 5$ получаем $C_2 = 5$.

Теперь получим зависимость $u^*(x)$. Для этого воспользуемся безусловным ограничением:

$$\dot{x} = -6 \cdot C_2 e^{-6t} = -6x = 4u \Rightarrow u^*(x) = -\frac{3}{2}x \tag{7}$$

Итого получаем, что оптимальным регулятором будет звено усиления с передаточной функцией $K(p) = -\frac{3}{2}$.

2 ЗАДАЧА (6С)

2.1 Условия задачи

Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче:

$$\dot{x} = 2{,}5u$$

$$x(0) = 0,\ t \in [0,\ 1{,}5] \text{ (второй конец не закреплен)}$$

$$|u| \leqslant 4$$

$$\int_0^{1{,}5} \left(2{,}5u^2 + 10x\right) dt \to \min_{u \in \Omega_u}$$

2.2 Решение

Составим гамильтониан:

$$H(x, u) = -\lambda_0 \left(2{,}5u^2 + 10x\right) + 2{,}5\psi u \tag{8}$$

Оптимальное управление выразим из условия стационарности по $u : \frac{\partial H}{\partial u} = 0$ т.к. управление входит в гамильтониан нестационарно

$$-5\lambda_0 u + 2{,}5\psi(t) = 0 \Rightarrow u = \frac{\psi(t)}{2\lambda_0} \overset{\lambda_0=\frac{1}{2}}{=} \psi(t) \tag{9}$$

В соответствии с принципом максимума оптимальное управление примет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} \psi(t), & |u| \leqslant 4 \\ 4\operatorname{sign}\psi(t), & |u| > 4 \end{cases}$$

Запишем уравнение сопряжённого состояния $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\dot{\psi} = 10\lambda_0 = 5 \Rightarrow \psi(t) = 5t + C \tag{10}$$

В данной задаче терминант отсутствует $T = 0$, поэтому условие трансверсальности примет вид $\psi(1{,}5) = -\frac{\partial T}{\partial x(1{,}5)} = 0$. Отсюда следует, что $C = -7{,}5$.

Тогда управление примет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} -4, & t \in [0,\ 0{,}7) \\ 5t - 7{,}5, & t \in [0{,}7,\ 1{,}5] \end{cases} \tag{11}$$

Траектория будет иметь вид:

$$x^*(t) = \begin{cases} 10t + C_1, & t \in [0,\ 0{,}7) \\ \dfrac{12{,}5t^2}{2} - 2{,}5 \cdot 7{,}5t + C_2, & t \in [0{,}7,\ 1{,}5] \end{cases} \tag{12}$$

Из условия $x(0) = 0$ получаем $C_1 = 0$. Значение C_2 найдем из непрерывности $x^*(t)$ в окрестности $t = 0{,}7$.

$$10 \cdot 0{,}7 = \frac{12{,}5 \cdot 0{,}7^2}{2} - 2{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}7 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 17{,}0625 \tag{13}$$

Итого:

$$x^*(t) = \begin{cases} 10t, & t \in [0,\ 0{,}7) \\ \dfrac{12{,}5t^2}{2} - 2{,}5 \cdot 7{,}5t + 17{,}0625, & t \in [0{,}7,\ 1{,}5] \end{cases} \tag{14}$$