федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт информационных и вычислительных технологий
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1
По дисциплине «Оптимальное правление»
Решение задач оптимального управления на основе уравнений Эйлера-Лагранжа

Выполнил студент: Михайловский М. Ю.
Группа: А-02м-25
Бригада: 2
Проверила: Сидорова Е. Ю.

Москва 2025

Содержание

1 ЗАДАЧА 1

1.1 Условия задачи

Исходный объект описывается дифференциальным уравнением:

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 2u_1 + 2u_2 \tag{1}$$

Даны следующие изопериметрические ограничения:

$$\int_{t_0}^{t_1} (4x_1 + 2x_2 + 2x_3)\, dt = 0 \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (x_1 + 4x_2 + 4x_3)\, dt = 0 \tag{3}$$

Нужно оптимизировать следующий функционал при краевых условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4u_1^2 + 3u_2^2\right) dt \to \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}[t_0,\, t_1]} \tag{4}$$

1.2 Переход к задаче безусловной оптимизации

Запишем безусловное ограничение (1) в виде системы уравнений Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2u_1 + 2u_2 \end{cases} \tag{5}$$

Составим лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \lambda, \mathbf{p}) = \lambda_0 \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4u_1^2 + 3u_2^2\right) + \lambda_1 (4x_1 + 2x_2 + 2x_3) + \lambda_2 (x_1 + 4x_2 + 4x_3) + \\ + p_1 (\dot{x}_1 - x_2)\, p_2 (\dot{x}_2 - x3) + p_3 (\dot{x}_3 + 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2u_1 - 2u_2) \tag{6}$$

Запишем условие стационарности по $\mathbf{x}$: $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 4\lambda_0 x_1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3p_3 \\ \dot{p}_2 = 4\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_1 + 3p_3 \\ \dot{p}_3 = 6\lambda_0 x_3 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_2 + p_3 \end{cases} \tag{7}$$

Запишем условие стационарности по $\mathbf{u}$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} 8\lambda_0 u_1 - 2p_3 = 0 \\ 6\lambda_0 u_2 - 2p_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Подставим исключим $\mathbf{u}$ с помощью (8) из (5). Получим систему дифференциальных уравнений в форме Коши, для определения оптимальной траектории:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + \frac{2p_3}{4\lambda_0} + \frac{2p_3}{3\lambda_0} \\ \dot{p}_1 = 4\lambda_0 x_1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3p_3 \\ \dot{p}_2 = 4\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_1 + 3p_3 \\ \dot{p}_3 = 6\lambda_0 x_3 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_2 + p_3 \end{cases} \tag{9}$$

Решив (9), получим оптимальное решение, зависящее от λ_1, λ_2. Для исключения этих переменных можно будет воспользоваться изопериметрическими ограничениями (2)-(3).

2 ЗАДАЧА 2

2.1 Условия задачи

Исходный объект описывается дифференциальным уравнением:

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} + 1\dot{x} + 3x = u_1 + 2u_2 \tag{10}$$

Даны следующие изопериметрические ограничения:

$$\int_{t_0}^{t_1} (x_1 + x_2 + 2x_3)\,dt + 2t_1 + 3 + 5x_1(t_1) + 2x_2(t_1) + x_3(t_1) = 0 \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (5x_1 + 2x_2 + x_3)\,dt + 5t_1 + 2 + 3x_1(t_1) + x_2(t_1) + 3x_3(t_1) = 0 \tag{12}$$

Нужно оптимизировать следующий функционал при краевых условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + u_1^2 + 2u_2^2\right) dt + t_1 + 4 + 2x_1(t_1) + 4x_2(t_1) + 5x_3(t_1) \to \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{C}[t_0,\, t_1]} \tag{13}$$

При этом значения $\mathbf{x}(t_1)$, t_1 – неизвестны.

2.2 Переход к задаче безусловной оптимизации

Запишем описание объекта (10) в форме системы уравнений Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - x_2 - 3x_3 + u_1 + 2u_2 \end{cases} \tag{14}$$

Терминант будет иметь вид:

$$\begin{split} T = \lambda_0 \left(t_1 + 4 + 2x_1(t_1) + 4x_2(t_1) + 5x_3(t_1)\right) + \lambda_1 \left(2t_1 + 3 + 5x_1(t_1) + 2x_2(t_1) + x_3(t_1)\right) + \\ + \lambda_2 \left(5t_1 + 2 + 3x_1(t_1) + x_2(t_1) + 3x_3(t_1)\right) \end{split} \tag{15}$$

Составим лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \lambda, \mathbf{p}) = \lambda_0 \left(5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + u_1^2 + 2u_2^2\right) + \lambda_1 \left(x_1 + x_2 + 2x_3\right) + \\ + \lambda_2 \left(5x_1 + 2x_2 + x_3\right) + p_1 \left(\dot{x}_1 - x_2\right) + p_2 \left(\dot{x}_2 - x_3\right) + p_3 \left(\dot{x}_3 + 3x_1 + x_2 + 3x_3 - u_1 - 2u_2\right) \quad (16)$$

Оптимизируемый функционал будет выглядеть следующим образом:

$$J_{\mathcal{L}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt + T \quad (17)$$

Запишем условие стационарности по $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 10\lambda_0 x_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 + 3p_3 \\ \dot{p}_2 = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - p_1 + p_3 \\ \dot{p}_3 = 4\lambda_0 x_3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - p_2 + 3p_3 \end{cases} \quad (18)$$

Запишем условие стационарности по $\mathbf{u}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} 2\lambda_0 u_1 - p_3 = 0 \\ 4\lambda_0 u_2 - 2p_3 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Так как правый конец является неизвестным, запишем для него условия трансверсальности, $\mathbf{p}(t_1) = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}(t_1)}$:

$$\begin{cases} p_1(t_1) = -2\lambda_0 - 5\lambda_1 - 3\lambda_3 \\ p_2(t_1) = -4\lambda_0 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ p_3(t_1) = -5\lambda_0 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \end{cases} \quad (20)$$

Условие стационарности по t_1, $\frac{\partial J_{\mathcal{L}}}{\partial t_1} = 0$ будет иметь следующий вид:

$$\lambda_0 G_0(t_1) + \lambda_1 G_1(t_1) + \lambda_2 G_2(t_1) + \lambda_0 \left[1 + 2\dot{x}_1(t_1) + 4\dot{x}_2(t_1) + 5\dot{x}_3(t_1)\right] + \\ + \lambda_1 \left[2 + 5\dot{x}_1(t_1) + 2\dot{x}_2(t_1) + \dot{x}_3(t_1)\right] + \lambda_2 \left[5 + 3\dot{x}_1(t_1) + \dot{x}_2(t_1) + 3\dot{x}_3(t_1)\right] = 0 \quad (21)$$

Из (19) выразим оптимальное управление:

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{p_3}{2\lambda_0} \\ u_2^* = \frac{p_3}{2\lambda_0} \end{cases} \quad (22)$$

Подставим его в безусловные ограничения (14):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - x_2 - 3x_3 + \frac{p_3}{2\lambda_0} + \frac{p_3}{\lambda_0} \end{cases} \quad (23)$$

С помощью этой системы, и условий записанных выше получим оптимальный процесс.