федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**«Национальный исследовательский университет «МЭИ»**

Институт информационных и вычислительных технологий
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1
По дисциплине «Оптимальное правление»
*Решение задач оптимального управления на основе уравнений Эйлера-Лагранжа*

Выполнил студент: Михайловский М. Ю.
Группа: А-02м-25
Бригада: 2
Проверила: Сидорова Е. Ю.

Москва 2025

## Содержание

# 1 ЗАДАЧА 1

## 1.1 Условия задачи

Исходный объект описывается дифференциальным уравнением:

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 2u_1 + 2u_2 \tag{1}$$

Даны следующие изопериметрические ограничения:

$$\int_{t_0}^{t_1} (4x_1 + 2x_2 + 2x_3)\, dt = 0 \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (x_1 + 4x_2 + 4x_3)\, dt = 0 \tag{3}$$

Нужно оптимизировать следующий функционал при краевых условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4u_1^2 + 3u_2^2\right) dt \to \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{C}[t_0, t_1]} \tag{4}$$

## 1.2 Переход к задаче безусловной оптимизации

Запишем безусловное ограничение (1) в виде системы уравнений Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2u_1 + 2u_2 \end{cases} \tag{5}$$

Составим лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \lambda, \mathbf{p}) = \lambda_0 \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4u_1^2 + 3u_2^2\right) + \lambda_1 (4x_1 + 2x_2 + 2x_3) + \lambda_2 (x_1 + 4x_2 + 4x_3) + \\ + p_1 (\dot{x}_1 - x_2)\, p_2 (\dot{x}_2 - x3) + p_3 (\dot{x}_3 + 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2u_1 - 2u_2) \tag{6}$$

Запишем условие стационарности по $\mathbf{x}$: $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 4\lambda_0 x_1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3p_3 \\ \dot{p}_2 = 4\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_1 + 3p_3 \\ \dot{p}_3 = 6\lambda_0 x_3 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_2 + p_3 \end{cases} \tag{7}$$

Запишем условие стационарности по $\mathbf{u}$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} 8\lambda_0 u_1 - 2p_3 = 0 \\ 6\lambda_0 u_2 - 2p_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Подставим исключим $\mathbf{u}$ с помощью (8) из (5). Получим систему дифференциальных уравнений в форме Коши, для определения оптимальной траектории:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + \frac{2p_3}{4\lambda_0} + \frac{2p_3}{3\lambda_0} \\ \dot{p}_1 = 4\lambda_0 x_1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3p_3 \\ \dot{p}_2 = 4\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_1 + 3p_3 \\ \dot{p}_3 = 6\lambda_0 x_3 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - p_2 + p_3 \end{cases} \tag{9}$$