федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт информационных и вычислительных технологий
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

Отчёт по лабораторной работе №2
По дисциплине «Оптимальное правление»
Решение задач оптимального управления на основе принципа максимума

Выполнил студент: Михайловский М. Ю.
Группа: А-02м-25
Бригада: 2
Проверила: Сидорова Е. Ю.

Москва 2025

Содержание

1 ЗАДАЧА 1

1.1 Условия задачи

Задано дифференциальное уравнение описывающее объект, при известных граничных условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$:

$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 4\dot{x} + x = u_1 \tag{1}$$

На управление наложено ограничение $|u_1| \leqslant 1$. А также введены изопериметрические ограничения:

$$\int_{t_0}^{t_1} (2x_1 + x_2)\, dt = 0 \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (3x_1 + 4x_2)\, dt = 0 \tag{3}$$

При таких условиях нужно оптимизировать следующий критерий:

$$J(t_0,\, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \to \min_{|u_1| \leqslant 1} \tag{4}$$

1.2 Решение задачи

Получим представление объекта в форме задачи Коши $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u_1)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 4x_3 + u_1 \end{cases} \tag{5}$$

Получим гамильтониан. Так как рассматривается задача быстродействия, в соответствии с видом J, в выражении гамильтониана отсутствует слагаемое $\psi_0 G_0$. Для задачи быстродействия полагается $\psi_0 = 0$.

$$\begin{multline} H = -\boldsymbol{\lambda}^\intercal \cdot \mathbf{G} + \boldsymbol{\psi}^\intercal \cdot f(\mathbf{x}, u_1) = \\ = -\lambda_1(2x_1 + x_2) - \lambda_2(3x_1 + 4x_2) + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3(-x_1 - 4x_2 - 4x_3 + u_1) \end{multline} \tag{6}$$

Получим значение Лагранжиана:

$$\begin{multline} \mathcal{L} = -H + \boldsymbol{\psi}^\intercal \cdot \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}^\intercal \cdot \mathbf{G} + \boldsymbol{\psi}^\intercal \cdot (\dot{\mathbf{x}} - f(\mathbf{x},\, u_1)) = \\ = \lambda_1(2x_1 + x_2) + \lambda_2(3x_1 + 4x_2) + \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - x_3) + \psi_3(\dot{x}_3 + x_1 + 4x_2 + 4x_3 - u_1) \end{multline} \tag{7}$$

Получим уравнения сопряжённого состояния $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \psi_3 \\ \dot{\psi}_2 = \lambda_1 + 4\lambda_2 - \psi_1 + 4\psi_3 \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2 + 4\psi_3 \end{cases} \tag{8}$$

Как известно, если управление входит в гамильтониан линейно, то есть

$$H = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi},\, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\psi}^\intercal B\mathbf{u}$$

то j-ая компонента оптимального управления u_j^* определяется видом ограничения $|u_j| \leqslant \beta_j$ и значением $\left(\boldsymbol{\psi}^\intercal B\right)_j$ – j-м элементом данной вектор-строки:

$$u_j^* = \beta_j \operatorname{sign}\left[\left(\boldsymbol{\psi}^\intercal B\right)_j\right] \Rightarrow u_1^* = \operatorname{sign}\psi_3 \tag{9}$$

Подставим в (5) и получим уравнения, описывающие оптимальный процесс в объекте:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 4x_3 + \operatorname{sign}\psi_3 \end{cases} \tag{10}$$

2 ЗАДАЧА 2

2.1 Условия задачи

Задано дифференциальное уравнение, описывающее объект, при известной левой границе $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. При этом значения $\mathbf{x}(t_1)$, t_1 – неизвестны:

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + 5x = 2u_1 + 5u_2 \tag{11}$$

На управление наложены ограничения $\mathbf{u} \in \Omega_u$: $|u_1| \leqslant 5$ и $|u_2| \leqslant 2$. А также введены изопериметрические ограничения:

$$\int_{t_0}^{t_1} (5x_1 + 5x_2)dt + 4t_1 + 3x_1(t_1) + 3x_2(t_1) + 3x_3(t_1) = 0 \tag{12}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (3x_1 + x_2)dt + 4t_1 + 4x_1(t_1) + 5x_2(t_1) + 2x_3(t_1) = 0 \tag{13}$$

При таких условиях нужно оптимизировать следующий критерий:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3u_1^2 + 5u_2^2)dt + 2t_1 + 3x_1(t_1) + 4x_2(t_1) + 2x_3(t_1) \to \min_{\mathbf{u}\in\Omega_u} \tag{14}$$

2.2 Решение задачи

Получим представление объекта в форме задачи Коши $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}\,\mathbf{u})$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - x_2 - 2x_3 + 2u_1 + 5u_2 \end{cases} \tag{15}$$

Получим гамильтониан:

$$
\begin{aligned}
H = -\lambda_0 G_0 - \boldsymbol{\lambda}^\intercal \cdot \mathbf{G} + \boldsymbol{\psi}^\intercal \cdot f(\mathbf{x}, u_1) = \\
= -\lambda_0(2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3u_1^2 + 5u_2^2) - \lambda_1(5x_1 + 5x_2) - \lambda_2(3x_1 + x_2) + \\
+ \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3(-5x_1 - x_2 - 2x_3 + 2u_1 + 5u_2)
\end{aligned} \tag{16}
$$

Получим значение лагранжиана:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = -H + \boldsymbol{\psi}^\intercal \cdot \dot{\mathbf{x}} = \lambda_0 G_0 + \boldsymbol{\lambda}^\intercal \cdot \mathbf{G} + \boldsymbol{\psi}^\intercal \cdot (\dot{\mathbf{x}} - f(\mathbf{x},\, u_1)) = \\
= \lambda_0(2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3u_1^2 + 5u_2^2)\lambda_1(5x_1 + 5x_2)\lambda_2(3x_1 + x_2) + \\
+ \psi_1(\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2(\dot{x}_2 - x_3) + \psi_3(\dot{x}_3 + 5x_1 + x_2 + 2x_3 - u_1 - 5u_2)
\end{aligned} \tag{17}
$$

Получим уравнения сопряжённого состояния $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$:

$$
\begin{cases}
\dot{\psi}_1 = 2\lambda_0 + 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\psi_3 \\
\dot{\psi}_2 = \lambda_0 + 5\lambda_1 + \lambda_2 - \psi_1 + \psi_3 \\
\dot{\psi}_3 = 4\lambda_0 - \psi_2 + 2\psi_3
\end{cases} \tag{18}
$$

Так как значение $\mathbf{x}(t_1)$ – неизвестно, введём условие трансверсальности $\boldsymbol{\psi}(t_1) = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}(t_1)}$:

$$
\begin{cases}
\psi_1(t_1) = -3\lambda_0 - 3\lambda_1 - 4\lambda_2 \\
\psi_2(t_1) = -4\lambda_0 - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 \\
\psi_3(t_1) = -2\lambda_0 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2
\end{cases} \tag{19}
$$

Так как значение t_1 – неизвестно, введём условие стационарности по t_1, имеющее следующий вид $\frac{\partial J_{\mathcal{L}}}{\partial t_k} = (-1)^{k+1}\lambda_0 G_0(t_k) + \boldsymbol{\lambda}^\intercal \mathbf{G}(t_k) + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t_k} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 G_0(t_1) + \lambda_1 G_1(t_1) + \lambda_2 G_2(t_1) + \lambda_0(2 + 3\dot{x}_1(t_1) + 4\dot{x}_2(t_1) + 2\dot{x}_3(t_1)) + \\
+ \lambda_1(4 + 3\dot{x}_1(t_1) + 3\dot{x}_2(t_1) + 3\dot{x}_3(t_1)) + \lambda_2(4 + 4\dot{x}_1(t_1) + 5\dot{x}_2(t_1) + 2\dot{x}_3(t_1)) = 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

Так как управление входит в гамильтониан нелинейно, найдём оптимальное управление как кусочную функцию из условия стационарности по $\mathbf{u}$, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$:

$$
u_1^* = \begin{cases}
\dfrac{2\psi_3}{6\lambda_0}, & |u_1| < 5 \\
5\,\mathrm{sign}\, 2\psi_3, & |u_1| \geqslant 5
\end{cases} \tag{21}
$$

$$
u_2^* = \begin{cases}
\dfrac{5\psi_3}{10\lambda_0}, & |u_2| < 2 \\
2\,\mathrm{sign}\, 5\psi_3, & |u_2| \geq 2
\end{cases} \tag{22}
$$