МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт информационных и вычислительных технологий
Кафедра управления и интеллектуальных технологий

Отчёт по лабораторной работе
По дисциплине «Теория автоматического управления»
«Исследование динамики линейных систем методом фазовой плоскости»

Выполнили студенты: Михайловский М., Томчук В.
Группа: А-03-21
Бригада: 1
Проверил: Дементьев В. Ю.

Москва 2024

Содержание

1 Постановка задачи

Задана линейная система, описываемая следующим уравнением:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Подобрать коэффициенты a_0, a_1, для двух видов особой точки: **центр и неустойчивый узел**. Исследовать фазовые портреты и переходные процессы полученных линейных систем методом фазовой плоскости.

2 Выполнение работы

Подготовка к работе

Центр. Для рассматриваемой системы характеристическое уравнение (ХУ) имеет следующий вид:

$$p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \Leftrightarrow (p - p_1)(p - p_2) = 0$$

Особой точкой линейной системы будет центр, если корни ХУ будут мнимыми. Выберем $p_{1,2} = \pm j\sqrt{6}$. Тогда, раскрывая скобки, получим коэффициенты a_0, a_1:

$$(p - j\sqrt{6})(p + j\sqrt{6}) = p^2 + 6 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_0 = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'' + 6y = 0$$

Тогда соответствующая система в нормальной форме Коши ($y = y_1$):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -6y_1 \end{cases} \tag{1}$$

Неустойчивый узел. Особой точкой линейной системы будет неустойчивый узел, если корни ХУ будут действительными положительными. Пусть $p_{1,2} = 1,\ 2$. Получим по теореме Виета следующее характеристическое уравнение:

$$p^2 - 3p + 2 = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow a_1 = -3,\ a_0 = 2$$

В нормальной форме Коши система имеет вид ($y = y_1$):

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\
\dfrac{dy_2}{dt} = -2y_1 + 3y_2
\end{cases}
\qquad (2)
$$

Анализ результатов работы

Особая точка центр

Исследования проводились при помощи компьютерного моделирования. Введённые параметры, в соответствии с полученной системой (1) представлены на рис. 2.1.

Рис. 2.1: Установленные параметры исследуемой системы

Затем для различных начальных условий численным моделированием было получено семейство фазовых траекторий заданной системы рис. 2.2.

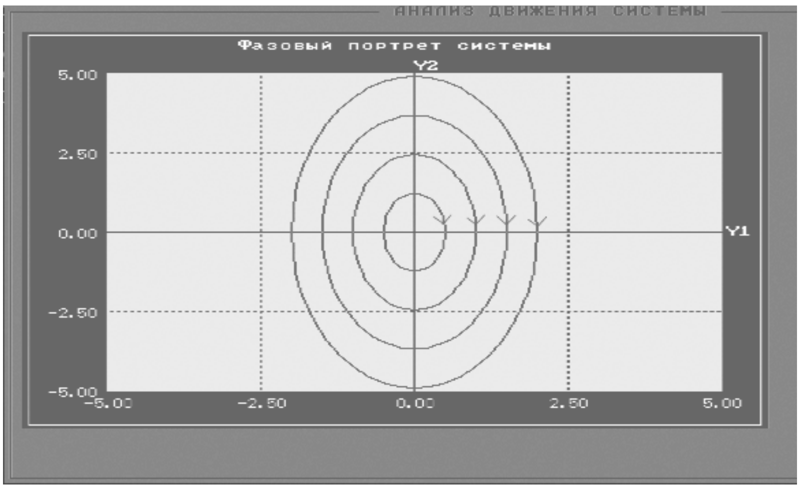
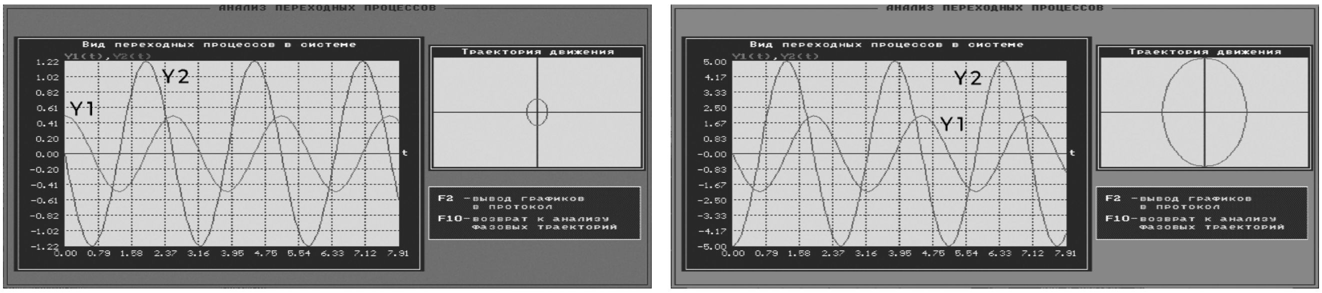


Рис. 2.2: Полученный фазовый портрет системы

Семейство интегральных кривых имеет вид эллипсов, в данном случае, вытянутых вдоль оси y_2. Соотношение длин полуосей эллипсов фазовых траекторий для данной особой точки зависит от конкретных параметров системы и может быть любым.

Далее были построены переходные характеристики (рис. 2.3)



а) б)

Рис. 2.3: Переходные характеристики для системы с особой точкой центр

Видно, что система является устойчивой по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивой. Это следует из того, что переменные состояния изменяются по гармоническому закону и являются незатухающими.

Особая точка неустойчивый узел

Введённые параметры, в соответствии с полученной системой (2) представлены на рис. 2.4.

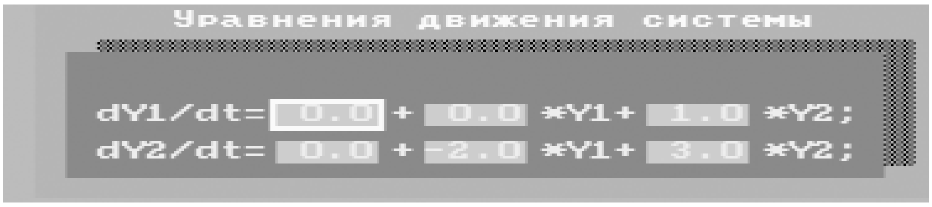


Рис. 2.4: Установленные параметры исследуемой системы

Затем для различных начальных условий численным моделированием было получено семейство фазовых траекторий заданной системы рис. 2.5.

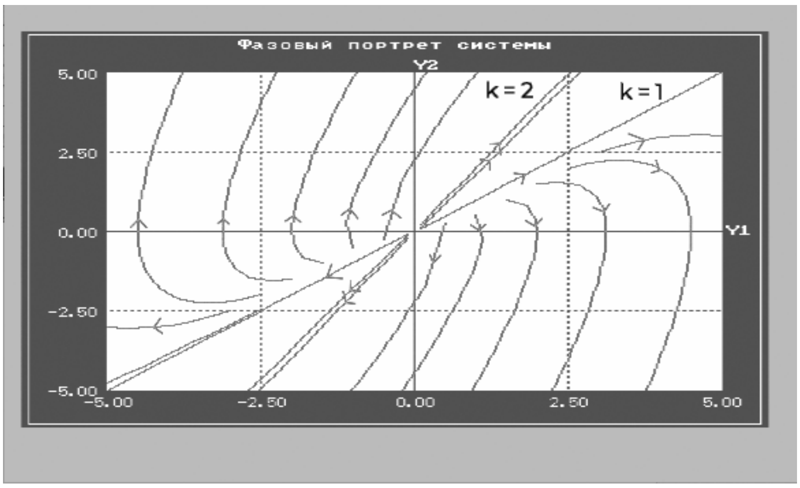


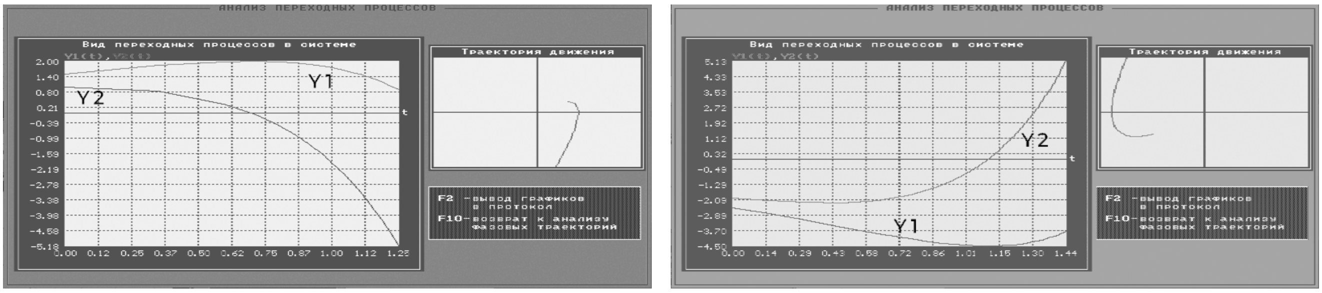
Рис. 2.5: Полученный фазовый портрет системы

Данное семейство представляет собой кривые параболического типа. Асимптотами являются прямые с углами наклона равными собственным числам матрицы из матричного представления системы (2) или, что то же, корням ХУ.

Для исследуемой системы матричное представление следующее:

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее были построены переходные характеристики (рис. 2.6)



а) б)

Рис. 2.6: Переходные характеристики для системы с особой точкой центр

Видно, что система является неустойчивой и, вообще говоря, имеет неустойчивую особую точку $\vec{y}^{\intercal} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

Выводы

Было исследовано применение метода фазовой плоскости на примере линейных систем. Как и ожидалось, для системы с характеристическими корнями на мнимой оси был получен вывод о граничной устойчивости, а для системы с правыми корнями вывод о неустойчивости.

Также, данный метод помимо исследования устойчивости даёт возможность получить вид переходного процесса, что является важной характеристикой системы.