Université Nice Sophia Antipolis

Thèse de Master 2

Fonctions thêta et Tores complexes

Auteur :
OUARAS Zakaria

Encadreur :
Christian PAULY

A thesis submitted in fulfilment of the requirements
for the degree of Master 2 MPA

in the

Laboratoire J.A. Dieudonné

Nice, 31 Mai 2019

I, OUARAS Zakaria, declare that this thesis titled, 'Fonctions thêta et Tores complexes' and the work presented in it are my own. I confirm that :

- **This work was done wholly or mainly while in candidature for a research degree at this University.**
- **Where any part of this thesis has previously been submitted for a degree or any other qualification at this University or any other institution, this has been clearly stated.**
- **Where I have consulted the published work of others, this is always clearly attributed.**
- **Where I have quoted from the work of others, the source is always given. With the exception of such quotations, this thesis is entirely my own work.**
- **I have acknowledged all main sources of help.**
- **Where the thesis is based on work done by myself jointly with others, I have made clear exactly what was done by others and what I have contributed myself.**

Signature : OUARAS Zakaria.

Date : 31 Mai 2019.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire, Monsieur Christian PAULY, Professeur au laboratoire J.A Dieudoné université de Nice Sophia-Antipolis. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants en Master deux mathématique pure et appliqué, pour leurs conseils et leurs critiques qui ont guidé mes réflexions et qui ont accepté de répondre à mes questions durant les cours. Et je remercie les personnels du laboratoire spécialement Mr. Andreas Höring pour sa patience et son professionnalisme.

Je remercie mes très chers parents et ma sœurs, qui ont toujours été là pour moi par leurs encouragements. Et toute ma famille plus spécialement les deux Hamid

Finalement je remercie Pr. Abdelghani ZEGHIB et Mr. Samir BEKKARA pour leurs recommandations et orientation vers cette expérience qui à enrichie mon savoir mathématique .

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Introduction

Notre but dans ce travail est l'étude la catégorie des tores complexe et plus précisément une sous-classe particulière dite la classe des variétés abéliennes. Pour arriver à définir les variétés abéliennes on s'intéresse tout d'abord aux fibrés en droites sur un tore complexe quelconque et au calcul des groupes de cohomologie de ces fibrés en droites noté $H^k(X, L)$ pour L un fibré en droites sur un tore X. Cette étape est importante puisqu'elle nous permet de distinguer une famille de tores complexes admettant un fibré en droites ayant une cohomologie concentrée en degré zéro.

La classe des variétés abéliennes est formée par des tores qui sont plongeables dans un espace projectif. La condition pour qu'un tore X soit plongeable dans un espace projectif est l'existence d'un fibré en droites L dans sa première classe de Chern $c_1(L)$ est une forme hermitienne définie positive. Une base de l'espace des sections holomorphes globales de ce fibré en droites $H^0(X, L)$ qu'on identifie à un espace vectoriel de dimension finie des fonctions holomorphes quasi-périodiques (*ie* : Périodique à un facteur près dit facteur d'automorphie du fibré L) appelées fonctions thêta nous permet de donner explicitement l'application du plongement dans l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(X, L))$. En particulier une variété abélienne est une sou-variété fermée d'un espace projectif et d'après le théorème de Chow c'est une variété algébrique complexe. La signature de la première classe de Chern $c_1(L)$ d'un fibré en droites holomorphe L quelconque sur un tore complexe X nous permet d'après le théorème d'annulation de donner la dimension des groupes de cohomologie en degré supérieur $H^k(X, L)$ notée $h^k(L)$ à partir de $h^s(L)$ où la signature de $c_1(L)$ est (r, s) par la formule $h^k(L) = \binom{\dim_{\mathbb{C}}(X)-r-s}{k-s} h^s(L)$ pour $s \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}}(X) - r$, et nulle à l'extérieur de cet intervalle. Alors la famille des tores complexes admettant un fibré en droites de cohomologie concentrée en degré zéro coïncide avec la famille des variétés abéliennes complexe et donc plongeable dans un espace projectif.

En mathématique d'une façon général quand on définit des objets on essaie de les classifier. Dans notre situation on a des objets intéressants les variétés abéliennes et leur classification est basée sur l'action du groupe symplectique réel $Sp^D(2g, \mathbb{R})$ sur l'espace des matrices symétriques complexes de parties imaginaires définies positives (L'espace de Siegel) qui forme un ouvert dans l'espace des matrices symétriques complexes ou l'espace des modules de variétés abéliennes est le quotient par une action d'un sous-groupe discret qu'on note $\mathcal{A}_D$ (D est une matrice diagonale dépendant que du réseau et le fibré en droites définissant la Variété abélienne) est le quotient par une action d'un sous-groupe discret.

Le but du mémoire est de définir une connexion sur un schéma abélien où l'espace total est la famille universelle de variétés abéliennes de type D de base l'espace de Siegel basé sur l'opérateur de la chaleur, la particularité de cette connexion est que les fonctions thêtas sont plates.

1 Tores complexes

1.1 Tores complexes

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension g et soit Λ un réseau dans V (*ie* : un sous-groupe discret de rang maximal $2g \Longleftrightarrow V{=}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ comme espace vectoriel réel). Λ agit par translation sur V le quotient $X = V/\Lambda$ est un tore complexe. En effet X est un groupe abélien munis de la topologie quotient, la surjection canonique $\pi : V \longrightarrow X$ nous permet de le munir d'une structure de groupe de Lie. Comme π est surjective et V simplement connexe la surjection canonique est vue comme le revêtement universel de X son noyau est le réseau Λ qu'on identifie au groupe fondamental de X, ie : $\pi_1(X) \simeq \Lambda$. On sait que le premier groupe de homologie de X à coefficients entières $H_1(X,\mathbb{Z}) \simeq \pi(X)/([\pi(X),\pi(X)])$ l'abélianisé du groupe fondamental. Or le réseau est un groupe abélien, donc on a un isomorphisme canonique $H_1(X,\mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X) \simeq \Lambda$.

On peut présenter un tore complexe $X = V/\Lambda$ de dimension g par une matrice dite de période, en fixant une $\mathbb{C}$-base $\{e_1,\dots,e_g\}$ pour V et une $\mathbb{Z}$-base $\{\lambda_1,\dots,\lambda_{2g}\}$ pour le réseau Λ Alors $\forall i \in \{1,\dots,2g\}$: $\exists \lambda_{ji} \in \mathbb{C}$ tel que : $\lambda_i = \sum_{j=1}^{g} \lambda_{ji}e_j$ alors la matrice

$$\Pi = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1}\cdots & \cdots\lambda_{1\,2g} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_{g\,1}\cdots & \cdots\lambda_{g\,2g} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(g\times 2g,\mathbb{C})$$

est dite la matrice des périodes associe a X (Π détermine entièrement X).

1.2 Morphismes et Isogénies

Soient $X_1 = V_1/\Lambda_1$ et $X_2 = V_2/\Lambda_2$ deux tores complexes de dimension respectivement g_1 et g_2 un morphisme entre X_1 et X_2 est un morphisme de groupe holomorphe (Morphisme entre groupe de Lie)

Proposition 1.2.1 *Soit $h : X_1 \longrightarrow X_2$ une application holomorphe.*

a) Il existe un morphisme de groupe $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tel que : $h(x) = f(x) + h(0)\ \ \forall x \in X$.

b) Il existe une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $F : V_1 \longrightarrow V_2$ tel que $F(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$ qui induit f.

Donc $Hom_{Lie|_{\mathbb{C}}}(X_1, X_2) \simeq \{F \in End_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)\ /F(\Lambda_1) \subset \Lambda_2\}$

Preuve .

On définit $f(x) = h(x) - h(0)$,on relève $f\circ\pi_1$ au revêtement universel V_2 de X_2 en F avec $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ tel que $F(0) = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
V_1 \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f\circ\pi_1"'] & X_1
\end{tikzcd}$$

ce diagramme implique que pour tout $\lambda \in \Lambda_1$ et pour tout $v \in V_1$ on a : $F(v+\lambda) - F(v) \in \Lambda_2$. l'application continue $v \mapsto F(v+\lambda) - F(v)$ est constante et $\forall\lambda \in \Lambda_1 \forall v \in V_1$

$$F(v+\lambda) = F(v) + F(\lambda).$$

Les dérivées partielles sont périodique et donc constante par Liouville et donc F est $\mathbb{C}$-Linéaire et f est un homomorphisme. ∎

On pose $Hom(X_1, X_2) = \{f : X_1 \longrightarrow X_2 \ / \ f$ morphisme de groupes holomorphe$\}$ muni de sa structure groupe abélien additive. On a deux représentation de morphisme :

a) La présentation analytique : $\rho_a : \begin{array}{ccc} Hom(X_1, X_2) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) \\ f & \longmapsto & \rho_a(f) = F \end{array}$

b) La présentation rationnelle : $\rho_r : \begin{array}{ccc} Hom(X_1, X_2) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda_1, \Lambda_2) \\ f & \longmapsto & \rho_r(f) = \rho_a(f) \mid \Lambda_1 \end{array}$

La traduction matricielle : Soient $\Pi_1 \in \mathcal{M}(n \times 2n, \mathbb{C})$ et $\Pi_2 \in \mathcal{M}(m \times 2m, \mathbb{C})$les matrices de période associe a X_1 et X_2 respectivement par rapport a des bases choisies, soit $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un homomorphisme on pose $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{C})$ la matrice de $\rho_a(f)$ et $R \in \mathcal{M}(2m \times 2n, \mathbb{C})$ la matrice de $\rho_r(f)$. la condition $\rho_a(f)(\Lambda_1) \subset \Lambda_2 \Longleftrightarrow A\Pi_1 = \Pi_2 R$. Inversement tout couple de matrice $(A, R) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{C}) \times \mathcal{M}(2m \times 2n, \mathbb{C})$ satisfaisant $A\Pi_1 = \Pi_2 R$ alors ça définit un morphisme entre X_1 *et* X_2 où A la matrice de sa représentation analytique et R la représentation rationnelle.

Proposition 1.2.2 *Soit $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un homomorphisme*

a) $Im(f)$ est un sous tore de X_2.

b) la composante connexe $(ker(f))_0$ de 0 dans $ker(f)$ (un sous-groupe d'indice finis dans $ker(f)$) est un sous-tore de X_1. et $dim(X) = dim(ker(f)_0) + dim(Im(f))$

Preuve .

a) $Im(f) = \{f(x)./x \in X_1\} = \{F(v) \ \ /v \in V_1\}/(F(V_1) \cap \Lambda_2) = \ F(V_1)/(F(V_1) \cap \Lambda_2)$,il est claire que $F(V_1) \cap \Lambda_2$ est un réseau dans $F(V_1)$ donc $Im(f) \subset X_2$ est un tore complexe.

b) Comme X_1 est compact alors $ker(f)$ a un nombre finis de composante connexe alors $F^{-1}(\Lambda_2)_0$ est un sous espace vectoriel de V et $(ker(f))_0 = F^{-1}(\Lambda_2)_0/(F^{-1}(\Lambda_2)_0 \cap \Lambda_1)$ et comme $(ker(f))_0$ est compact alors $F^{-1}(\Lambda_2)_0 \cap V_1$ est réseau. ■

On a un type particulier de morphisme entre tores complexes les isogénies qui sont des homomorphismes $f : X_1 \rightarrow X_2$ surjectif et de noyau fini. Le degré d'un morphisme $f : X_1 \longrightarrow X_2$ est le degré du groupe $ker(f)$ s'il est fini et zéro sinon.

Remarque 01 : Dans le cas des isogénies $deg(f) = (\Lambda_2 : \rho_r(f)(\Lambda_1))$.

Remarque 02 : la proposition précédente implique qu'une isogénie existe entres tores de même dimension. En effet Soit $f : X_1 \longrightarrow X_2$ une isogénie donc $ker(f)$ est fini alors $dim((ker(f)_0) = 0$ est donc la relation des dimension implique $dim(X_1) = dim(Im(f))$ or f surjective alors $dim(X_1) = dim(X_2)$.

Exemples :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a le morphisme : $n_X : \begin{array}{c} X \longrightarrow X \\ {\scriptstyle x \longmapsto n.x} \end{array}$ son noyau est noté :

$X_n = \ker(n_X) \simeq (\frac{\Lambda}{n\Lambda}) \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^{2g}$ est le groupe des points de n-division.

2) Soit V un espace vectoriel et deux réseaux $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ alors la surjection canonique $p : X_1 = V/\Lambda_1 \longrightarrow X_2 = V/\Lambda_2$ *est une isognie.*

La notion d'isogénie permet de définir une relation d'équivalence dans l'espace des tores complexes.

1.3 La Cohomologie des tores complexes

Dans cette section on cherche a calculer les différents groupes de cohomologie des tores complexes, on commence tout d'abord par la cohomologie de De Rham qui ne reflète pas la structure complexe du tore et la cohomologie de Dolbeault qui est une cohomologie à coefficients dans le faisceau des formes holomorphes d'un degré donné.

La cohomologie de De Rham

Définition 1.3.1 *La cohomologie de De Rham a coefficient complexe de la variété différentiable sous-jacente a une variété complexe X est la cohomologie de la résolution du faisceau $\underline{\mathbb{C}}$ (Appendice A) dite de De Rham*

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathcal{C}_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_X \xrightarrow{d} ..... \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{2g}_X \dots$$

avec

$$\underline{\mathbb{C}} = \{\textit{le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans}\mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{A}^n_X = \{\textit{le faisceau des n-formes lisses sur } X \textit{ à valeur dans}\mathbb{C}\}$$

et on aura :

$$H^n_{DR}(X,\mathbb{C}) = \frac{\{\omega \in \Gamma(X,\mathcal{A}^n_X)\ /\ d\omega = 0\}}{\{d\omega\ /\ \omega \in \Gamma(X,\mathcal{A}^{n-1}_X)\}}$$

Le n-ème groupe de De Rham.

Théorème 1.3.2 ***de De Rham[5]***

$$H^n(X,\mathbb{C}) \simeq H^n_{DR}(X,\mathbb{C})$$

Dans le cas des tores

Dans cette section on oublie la structure complexe du Tore $X = V/\Lambda$ de dimension complexe g (*On pose* : $2g = N$), donc X est difféomorphe au produit de cercles $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^N = (S^1)^N$. On prend la $\mathbb{R} -$ *base* canonique $\{e_1,\cdots,e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$ de coordonnées $\{x_1,\cdots,x_N\}$. Une k-forme différentielle sur X est donnée par l'expression :

$$\omega = \sum_{\sharp I = k} \omega_I\ dx_I \quad où \ \ \omega_I \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$$

est $\mathbb{Z}^N$-*pérodique* et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ avec $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1,\dots,N\}$.

On note l'espace des k-formes lisses sur X par A^k_X, la différentielle $d : A^k_X \longrightarrow A^{k+1}_X$ définit par : $d\omega = \sum \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}\ dx_j \wedge dx_I$. Alors (A^k_X, d) est un complexe de cochaine puisque $d^2 = 0$.
Le k-éme groupe de cohomologie de De Rham a coefficients complexe est la cohomologie du complexe précédent donnée par

$$H^k_{DR}(X,\mathbb{C}) = \frac{\ker(d : A^k_X \longrightarrow A^{k+1}_X)}{Im(d : A^{k-1}_X \longrightarrow A^k_X)}$$

, Les formes constantes $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ sont dans $H^k(X,\mathbb{C})$ ($\forall I$ *tel que* $\sharp I = k$), non nulles puisque leurs intégrales sur les sous-Tores engendrés par les $\{e_I\}$ est non nulle.

Théorème 1.3.3
Une $\mathbb{C}$-base de l'espace $H^k_{DR}(X,\mathbb{C})$ est donnée par $\{\ dx_I \ = \ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ \ I = (i_1 < \cdots < i_k)\}$ donc

$$H^k_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq Alt^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}).$$

Preuve .

On a déjà démonter que $H_1(X,\mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe a Λ et d'après le **théorème de Hurewicz** [1] On a $H^1(X,\mathbb{Z}) \simeq Hom(\Lambda,\mathbb{Z})$ en utilisant la formule de Künneth à n-facteurs On aura *le* n -ème groupe de cohomologie singulière a coefficients dans $\mathbb{Z}$ est

$$H^n(X,\mathbb{Z}) \simeq Alt^n(\Lambda,\mathbb{Z}) := \Lambda^n Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{Z})$$

Où $Alt^n(\Lambda,\mathbb{Z})$ le groupe des n-formes alternées sur Λ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

D'après le théorème des coefficients universel on a le résultat suivant :

$$H^n(X,\mathbb{C}) = H^n(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

et comme $Alt^n_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \simeq Alt^n_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ donc $H^n(X,\mathbb{C}) \simeq Alt^n_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \ \ \forall\, n \geq 1$. le théorème de De Rham implique le résultat. ■

On peut explicité les groupes de cohomologie dans le cas des tores comme suit : Si on prend $\{x_1,\ldots,x_{2g}\}$ les coordonnées réels associe à $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{2g}\}$ une $\mathbb{Z}-$base de Λ on définie :

$$IF^n(X) = \{\omega \in \mathcal{A}^n_X(X)/\ t^*_x(\omega) = \omega\ \forall x \in X\} \quad et \quad IF^n(V) = \{\omega \in \mathcal{A}^n_V(V)/\ t^*_v(\omega) = \omega\ \forall v \in V\}$$

Les formes différentielles $dx_i \in IF^1(V)$ sont le pullback par la surjection canonique $\pi : V \longrightarrow X$ des 1-formes différentielles invariantes sur X noté aussi dx_i . Donc

$$IF^n(X) = \mathbb{C}\{\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \ \ /\ i_1 < \cdots < i_n\}$$

qui est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension $\binom{2g}{n}$ est comme $dim_{\mathbb{C}}(Alt^n_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})) = \binom{2g}{n}$ alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.4

$$H^n_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq Alt^n_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \simeq IF^n(X).$$

La Cohomologie de Dolbeault et Décomposition de Hodge

Définition 1.3.5 *La cohomologie de Dolbeault d'une variété complexe X :*

On a $\forall p \in \mathbb{N}$ la résolution de Dolbeault du faisceau Ω^p_X :

$$0 \to \Omega^p_X \to \mathcal{A}^{p,0}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,2}_X \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,q}_X \xrightarrow{\bar\partial} \cdots\cdots \textit{où}.$$

$$\mathcal{A}^{p,q}_X = \{\ \textit{faisceau des formes lisses sur } X \textit{ de bidegré } (p,q)\}.$$
$$\Omega^p_X = \{\ \textit{les formes holomorphes de degré } p \textit{ sur } X\}.$$

Le q-éme groupe de cohomologie de Dolbeault de X est :

$$H^{p,q}(X) \simeq H^q(X,\Omega^p_X) = \frac{\{\omega \in \Gamma(X,\mathcal{A}^{p,q}_X)\ /\ \bar\partial\omega = 0\}}{\{\bar\partial\ \omega\ /\ \omega \in \Gamma(X,\mathcal{A}^{p,q-1}_X)\}}.$$

1. Soit X un espace topologique connexe et M groupe abélien alors on a un isomorphisme :

$$H^1(X,M) \longrightarrow \ Hom(\pi_1(X),M)$$

$$[c] \ \ \longrightarrow \{[\alpha] \longrightarrow c(\overset{\curlywedge}{\alpha})\}$$

$\overset{\curlywedge}{\alpha} = un$ 1-*Cocycle* identifie au lacet α et $[\alpha]$est une classe d'homotopie.

Théorème 1.3.6 *Soit X un tore complexe.*

a) $H^q(X,\Omega^p_X) \simeq \Lambda^p\Omega \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q\overline{\Omega}$ *(les groupes de cohomologies de Dolbeault)*

$\Omega := Hom_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ *les formes $\mathbb{C}$-linéaires.*
$\overline{\Omega} := Hom_{\mathbb{C}}(\overline{V},\mathbb{C})$ *les formes $\mathbb{C}$-antilinéaires.*

b) $H^n(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^q(X,\Omega^p_X)$. *(la décomposition de Hodge)*

Preuve . On donne les étapes de la preuve et les outils utilisées, la preuve complète voir [1].

La preuve se fait en plusieurs étapes :

Étape 01 :

On démontre que

$$IF^{p,q}(X) \simeq \Lambda^p\Omega \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q\overline{\Omega}$$

en utilisant le faite que les deux faisceaux $\Lambda^p\Omega \otimes_{\mathbb{C}} O_X$ et Ω^p_X sont isomorphes.

Étape 02 :

Définir un Laplacien $\Delta := \overline{\partial} \circ \overline{\delta} + \overline{\delta} \circ \overline{\partial}$ sur l'espace $A^{p,q}_X := \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}_X)$

Définir l'espace des formes harmoniques noté

$$\mathcal{H}^{p,q} = ker(\Delta) = \{\varphi \in A^{p,q}_X \ / \ \Delta(\varphi) = 0\}.$$

Étape 03 :

On démontre que : $\mathcal{H}^{p,q} \simeq IF^{p,q}(X)$.

Étape 04 :

On démontre que : $\mathcal{H}^{p,q} \simeq H^{p,q}(X)$. ■

2 Fibrés en droites et première classe de Chern

2.1 Fibrés en droites et groupe de Picard

1) Un fibrés en droites holomorphe sur le tore complexe X est la donnée d'une variété complexe L et d'une application holomorphe $p : L \longrightarrow X$ où $\forall z \in X$ la fibre $L_z := p^{-1}(z)$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension un satisfaisant :

$\exists\, \mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement d'ouverts pour X et des applications biholomorphes

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$$

tel que $p = pr_1 \circ \varphi_i$ sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$ qui induit un $\mathbb{C}$-isomorphisme linéaire $pr_2 \circ \varphi_\alpha |_{L_z} : L_z \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$

- p la projection.
- φ_α : trivialisations locales de L sur U_α.
- U_α les ouverts distingués.

2) *Soient deux fibrés en droites holomorphes sur* X, ($p_1 : L_1 \longrightarrow X$) et ($p_2 : L_2 \longrightarrow X$), *un morphisme entre* L_1 et L_2 est une application holomorphe $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ et $\mathbb{C}-$linéaire sur les fibres tel que $p_1 = p_2 \circ \phi$.

L'ensemble des fibrés en droites à isomorphisme prés sur X est muni d'une structure de groupe on le note $Pic(X)$ la loi du groupe est le produit tensoriel des fibrés en droites et l'inverse est le fibrés en droite duale noté L^*.

3) On définit les fonctions de transitions

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

associe aux trivialisations $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ par :

$$g_{\alpha\beta}(z) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \mid_{L_z} \in \mathbb{C}^*$$

ces fonctions sont holomorphes et satisfaisants :

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = 1 \; et \; g_{\alpha\beta}.g_{\beta\gamma}.g_{\gamma\alpha} = 1.$$

Inversement : Pour toute famille

$$\{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta) \; / \; g_{\alpha\beta}.g_{\beta\gamma} = 1 \quad et \quad g_{\alpha\beta}.g_{\beta\gamma}.g_{\gamma\alpha} = 1\}$$

on peut construire un fibré en droite sur X avec $g_{\alpha\beta}$ comme fonctions de transition en prenant :

$$L = \Big(\coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{C})\Big) \diagup \sim$$

Où la relation d'équivalence " $\sim$" est donnée par : $(z,\, t) \sim (z,\, g_{\alpha\beta}(z).t)$ alors :

$$p = pr_1 : L \longrightarrow X.$$

est un fibrés en droites holomorphe sur X.

Soit L un fibré en droites holomorphe sur X de recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in I}$ et de fonctions de trivialisation $\{\ \varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Une collection $\{\ f_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)\}$ définie d'autres trivialisations

$$\varphi'_\alpha = f_\alpha \cdot \varphi_\alpha$$

du même fibré en droites sur le même recouvrement et de fonctions de transitions

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \cdot g_{\alpha\beta}.$$

Donc toute trivialisation de L sur $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in I}$ peut être donnée sous la forme précédente, et deux collections $\{\ g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)\}$ et $\{\ g'_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)\ \}$ de fonctions de transitions définies le même fibrés en droites L si et seulement s'il existe une collection $\{\ f_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)\}$ de fonctions tel que $g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \cdot g_{\alpha\beta}$.

La description des fibrés en droites sur X par les fonctions de transitions est liée a la notion de cohomologie de Čech de X a coefficients dans dans le faisceau $\mathcal{O}_X^*$ (*Appendice A*) comme suit : la collection $\{g_{\alpha\beta} \in O_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)\ \}$ est un 1-cocycle dans X a coefficients dans $\mathcal{O}_X^*$ par les relations

$$g_{\alpha\beta}.g_{\beta\gamma} = 1 \; et \; g_{\alpha\beta}.g_{\beta\gamma}.g_{\gamma\alpha} = 1$$

qui exprime le faite que $\delta(\{g_{\alpha\beta}\}) = 1$ est que $\{g_{\alpha\beta}\}$ est un cocycle.

Deux cocycles $\{g_{\alpha\beta}\}$ et $\{g'_{\alpha\beta}\}$ définie le même fibré en droites L si et seulement si leurs différences $\{g_{\alpha\beta} \cdot g'^{-1}_{\alpha\beta}\}$ est un cobord . Donc le groupe des fibrés en droites $Pic(X)$ est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ le premier groupe de cohomologie de X à valeur dans le faisceau $\mathcal{O}_X^*$. La discutions précédente sur les fibrés en droites et les fonctions de transitions traduit la loi du groupe comme suit :

Soient L , $L' \in Pic(X)$ donnée par $\{g_{\alpha\beta}\}$ et $\{g'_{\alpha\beta}\}$ respectivement alors $L \otimes L' \sim \{g_{\alpha\beta} \cdot g'_{\alpha\beta}\}$ et $L^* \sim \{g_{\alpha\beta}^{-1}\}$

2.2 Facteurs d'automorphie

Pour définir les facteurs d'automorphie on aura besoin de la notion de cohomologie du groupe [6].

Le réseau Λ agit sur l'espace vectoriel complexe V et donc induit une structure de Λ-Module sur

$$H^0(V, \mathcal{O}_V^*) = \{\text{fonctions holomorphes partout non nulle sur } V\}$$

par l'action : $\Lambda \times H^0(V, \mathcal{O}_V^*) \longrightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$ donnée par

$$(\lambda \circ f)(v) = f(v + \lambda).$$

un 1-cocycle de Λ à valeur dans $H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$ est une application holomorphe $f : \Lambda \times V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ satisfaisant

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \ \forall v \in V \ \ f(\lambda + \mu, v) = f(\lambda, v + \mu) \cdot f(\mu, v)$$

l'ensemble des 1-cocycles forme un groupe abélien noté par $Z^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*))$ est ses éléments sont appelé facteurs d'automorphie, les facteurs d'automorphies de la formes

$$(\lambda, v) \longmapsto \frac{h(\lambda + v)}{h(v)} \quad où \quad h \in H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$$

sont appelées cobord leurs ensemble forme un sous groupe noté $B^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*))$. Le premier groupe de cohomologie de Λ a coefficients dans $H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$ est le quotient

$$H^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*)) = Z^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*))/B^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*)).$$

Tous éléments $f \in Z^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*))$ définie un fibré en droites sur X comme suit :

On définit une action de Λ sur le fibrés en droites trivial sur V par :

$$\lambda \bullet (v, t) = (\lambda + v, f(\lambda, v) \cdot t) \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Cette action est libre et proprement discontinue donc le quotient

$$L = (V \times \mathbb{C})/\Lambda$$

est une variété complexe, on note $p : L \longrightarrow X$la projection induite par la première projection $pr_1 : V \times \mathbb{C} \longrightarrow V$.Alors (L, p) définit un fibré en droites holomorphe sur X. Cette construction permet de donnée une application $Z^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq Pic(X)$ et on a :

Proposition 2.2.1 *l'application $Z^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq Pic(X)$ induit un isomorphisme*

$$\phi_1 : H^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq Pic(X).$$

Preuve : Voir [1].

NB : D'une façon analogue pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupe abélien sur X. On définit

$$\phi_1 : H^1(\Lambda, \pi^*(\mathcal{F})) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

$$(\phi_1(f))_{ij} = f(\lambda_{ij}, c) \ et \ (\phi_2(F))_{ijk} = F(\lambda_{ij}, \lambda_{jk}, \pi_i^{-1}).$$

Reste à définir λ_{ij} et π_i Pour le faire soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouverts de X, tel que il existe des ouvert connexes $W_i \subset \pi^{-1}(U_i)$ avec $\pi_i := \pi \mid_{W_i}: W_i \longrightarrow U_i$ biholomorphe. $\forall (i, j) \in I \times I$ il existe un unique $\lambda_{ij} \in \Lambda$ tel que $\pi_j^{-1}(x) = \lambda_{ij} \cdot \pi_i^{-1}(x) \ \ \forall x \in U_i \cap U_j$. Ça implique que

$$\lambda_{ij} + \lambda_{jk} = \lambda_{ik} \ \forall i, j, k \in I.$$

Donc comme résultat de cette section on a :

$$Pic(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq H^1(\Lambda, H^0(V, \mathcal{O}_V^*))$$

Définition 2.2.2 ***Sections d'un fibré en droites***

Soit X un tore complexe et $L \in Pic(X)$. de surjection $p : L \longrightarrow X$. Le faisceau des sections holomorphe du fibrés L noté aussi L est donné pour tout ouvert $U \subset X$ par

$$L(U) = \{s : U \subset X \longrightarrow L \ / \ holomorphe\ et\ p \circ s = Id_U\}$$

se faisceau est naturellement un $\mathcal{O}_X - Module$.

On particulier $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des section du fibré trivial sur X.

NB : l'espace des sections globales sur un tore complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (Comme X est compact alors $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$) noté $H^0(X, L) = \Gamma(X, L)$.

Si un fibré en droites L est donné par un élément du groupe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (ie : par une famille $\{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)\}$) alors une section holomorphe de L sur un ouvert $U \subset X$ est la donnée d'une famille

$$\{\ s_\alpha \ \in \ \mathcal{O}_X(U \cap U_\alpha) \ /s_\alpha = \ g_{\alpha\beta} \cdot s_\beta \text{sur l'ouvert } U \cap U_\alpha \cap U_\beta\}.$$

Définition 2.2.3 ***Fonctions thêta***

On peut décrire les sections globales d'un fibrés en droites $L \in Pic(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ sur un tore complexe $X = V/\Lambda$ par un facteur d'automorphie f pour L.

Pour tout fibré en droites L sur X il existe un isomorphisme naturel

$$H^0(X, L) \simeq H^0(V, \pi^*(L))^\Lambda \ \simeq H^0(V, V \times \mathbb{C})^\Lambda$$

puisque $\pi^*(L) \simeq V \times \mathbb{C}$ le deuxième isomorphisme dépend d'une trivialisation $\varphi : \pi^*(L) \longrightarrow V \times \mathbb{C}$, Soit $f \in Z^1(\Lambda, H^0(O_X^*))$ un facteur d'automorphie associer à L par rapport à la trivialisation φ alors :

$$H^0(V, V \times \mathbb{C})^\Lambda = \{\vartheta \in H^0(\mathcal{O}_V) \ / \ \vartheta(v + \lambda) = f(\lambda, v) \cdot \vartheta(v) \ \forall \lambda \in \Lambda \ \forall v \in V\}$$

les éléments de cet espace sont appelés fonctions thêta du fibré L.

Donc les sections holomorphes de L peutêtre vu comme des fonctions thêta du fibré L

NB :

Si en changer la trivialisation $\varphi : \pi^*(L) \longrightarrow V \times \mathbb{C}$ on identifier les sections holomorphes de L par des fonctions quasi-périodique par rapport à un facteur d'automorphie équivalent.

2.3 Première classe de Chern

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension g, la suite exacte de faisceau dite "Suite exponentielle" :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \stackrel{e(2\pi i\ \cdot)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1$$

induit une suite longue en cohomologie, la première classe de Chern est le premier connecteur en cohomologie

$$c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq Pic(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

et donc $\forall L \in Pic(X)$ sa première classe de Chern $c_1(L)$ peut être vue comme une forme alternée à valeurs dans $\mathbb{Z}$ sur Λ. Et on note $Pic^0(X) = \ker(c_1)$ de plus deux fibrés en droites sur un tore X , L_1 et L_2 sont dit analytiquement équivalent si

$$c_1(L_1) = c_1(L_2) \quad ie : \ L_1 \otimes L_2 \in Pic^0(X).$$

Théorème 2.3.1
Il existe un isomorphisme canonique $H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ *tel que un fibré en droites* L *de facteur d'automorphie* f *[Notons que* f *peut être mise sous la forme* $f = e(2\pi i g)$ *où* $g : \Lambda \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphe en* v *]. Sa première classe de Chern* $c_1(L)$ *est donnée par :*

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \ \forall v \in V \qquad E_L(\lambda,\mu) = g(\mu, v+\lambda) + g(\lambda, v) - g(\lambda, v+\mu) - g(\mu, v).$$

Preuve du Théorème : La preuve du théorème est basé sur deux lemmes :
Lemme 01 : L'application $\alpha : Z^2(\Lambda,\mathbb{Z}) \longrightarrow Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ donnée par :

$$(\alpha F)(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu) - F(\mu,\lambda)$$

induit un isomorphisme canonique noté aussi :

$$\alpha : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z}).$$

Preuve du lemme 01 :

Il est claire que α est un morphisme de groupe. Un 2-cycle $F \in Z^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ est une application $F : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que :

$$(\partial F)(\lambda,\mu,\eta) = F(\mu,\eta) - F(\lambda+\mu,\eta) + F(\lambda,\mu+\eta) - F(\lambda,\mu) = 0. \quad \forall\ \lambda,\mu,\eta \in \Lambda$$

donc

$$(\alpha F)(\lambda+\mu,\eta) - (\alpha F)(\lambda,\eta) - (\alpha F)(\mu,\eta) = 0.$$

alors αF est une 2-forme alternée sur Λ.

Le groupe $B^1(\Lambda, H^0(V,\mathcal{O}_V^*)) \subset \ker(\alpha)$. puisque ∂f est symétrique $\forall f \in Z^1(\Lambda,\mathbb{Z})$. Donc α descend a une application $\alpha : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$.

La surjection de α :

$$\forall f,g \in Alt^1(\Lambda,\mathbb{Z}) \Longrightarrow f\otimes g \in Z^2(\Lambda,\mathbb{Z}) \ \ et \ \ \alpha(f\otimes g) = f \wedge g$$

donc α surjective. Puisque $f\wedge g$ engendre $Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$.

L'injectivité de α :
comme $H^2(X,\mathbb{Z})$ et $Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$ ont le même rang égale a $\binom{2g}{2}$ et α surjective alors est un isomorphisme.■

Le réseau Λ agit d'une manière compatible sur chaque groupe de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = H^0(V,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(V,\mathcal{O}_V) \overset{e(2\pi i\,\cdot)}{\longrightarrow} H^0(V,\mathcal{O}_V^*) \longrightarrow 1$$

induit un connecteur

$$\delta : H^1(\Lambda, H^0(V,\mathcal{O}_V^*))) \longrightarrow H^2(\Lambda,\mathbb{Z})$$

qui envoi les cocycles $f = e(2\pi i g) \in Z^1(\Lambda, H^0(V,\mathcal{O}_V^*))$ au 2-Cycle

$$\delta f(\lambda,\mu) = g(\mu, v+\lambda) - g(\lambda+\mu, v) + g(\lambda, v)$$

. δf ne dépend pas de $v \in V$ puisque f satisfait la relation :

$$f(\lambda+\mu, v) = f(\lambda, v+\mu)\cdot f(\mu, v).$$

le lemme suivant implique que :

$$\alpha\circ\delta : H^1(\Lambda, H^0(V,\mathcal{O}_V^*))) \longrightarrow Alt^2(\Lambda,\mathbb{Z})$$

est l'homomorphisme qui associe a chaque fibré en droites comme une 2-forme alternée sur Λ.

Lemme 02 :

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les isomorphismes canoniques définies plus haut on a le diagramme commutative suivant :

$$\begin{tikzcd} H^1(\Lambda, H^0(V, O_V^*)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^2(\Lambda, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi_2"] & Alt^2(\Lambda, \mathbb{Z}) \\ H^1(X, O_X^*) \arrow[r, "c_1"'] & H^2(X, \mathbb{Z}) & \end{tikzcd}$$

La preuve de ce lemme est un calcule.

L'isomorphisme canonique est : $\alpha \circ \phi_2^{-1}$ est $\alpha \circ \phi_2^{-1} c_1(L) = E_L$.■

D'un coté on a l'injection de faisceau : $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$ elle induit une injection :

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \overset{i}{\hookrightarrow} H^2(X, \mathbb{C}).$$

D'un autre coté la suit exponentielle : $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow O_X \overset{e(2\pi i\,\cdot)}{\longrightarrow} O_X^* \longrightarrow 1$ induit en cohomologie les applications

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \overset{c_1}{\longrightarrow} H^2(X, \mathbb{Z}) \overset{\epsilon}{\longrightarrow} H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^{0,2}(X).$$

L'application ϵ se décompose à travers i en composant par la projection

$$p : H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1;1}(X) \oplus H^{0,2}(X) \longrightarrow H^{0,2}(X) = H^2(X, O_X)$$

Donc pour $L \in Pic(X)$: $c_1(L) = E = E_1 + E_2 + E_3$ avec $E_1 \in H^{2,0}(X) \simeq \Lambda^2\Omega$, $E_2 \in H^{1,1}(X) \simeq \Omega \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\Omega}$ et $E_3 \in H^{0,2}(X) \simeq \Lambda^2\overline{\Omega}$. on $E_1 = \overline{E}_3$ et E est a valeurs réelles alors $E_1 = \overline{E}_3 = 0$ donc $c_1(L) = E = E_2 \in \Omega \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\Omega}$ avec $E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ et $E(iv, iw) = E(v, w)$ $\forall v, w \in V$.Et donc la première classe de Chern d'un fibrés en droites est une 2-forme alternée sur V a valeur réelles de type (1,1). Le lemme suivant nous permet de voir les première classe de Chern comme des formes Hermitienne sur V.

Lemme 2.3.2 *On a une bijection entre les deux ensemble*

$$\mathcal{H}(V) = \{\ H/\ H \ \ \textit{forme hermitienne sur } V\}$$

et

$$\mathcal{E}(V) = \{E \in \Omega \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\Omega}\ /\ E(iv, iw) = E(v, w) \ \ \forall v, w \in V\}$$

donnée par :

$$E(v, w) = Im(H(v, w)) \ \textit{et}\ H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w).$$

On définit le groupe de Néron-Severi :

$$\begin{aligned} NS(X) &= Im(c_1 : H^1(O_X^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})) = \{E \in \mathcal{E}(\mathcal{V}) \ \ / \ E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}\} \\ &= \{H \in \mathcal{H}(\mathcal{V}) / Im(H)(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Théorème d'Appell-Humbert

Définition 2.3.3 *Soit* $H \in NS(X)$ *un semi-character pour* H *est une application* $\chi : \Lambda :\longrightarrow U(1) = \{z \in \mathbb{C}/ \mid z \mid = 1\}$ *satisfaisant :*

$$\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu) \cdot e(\pi i Im(H(\lambda, \mu)) \qquad \forall \lambda, \mu \in \Lambda.$$

NB : $\forall \lambda \in \Lambda, \forall n \in \mathbb{Z} \ \ \chi(n\ \lambda) = \chi(\lambda)^n.$

Définition 2.3.4 *Un facteur d'automorphie canonique associe à* (H, χ) *est l'application*

$$a(\lambda, v) = a_{(H,\chi)}(\lambda, v) = \chi(\lambda) e(\pi\ H(v, \lambda) + \tfrac{\pi}{2} H(\lambda, \lambda)).$$

Propriétés : $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall \lambda \in \Lambda\ \forall v, w \in V$

$$i)\ a(\lambda, v + w) = a(\lambda, v) \cdot\ e(\pi H(w, \lambda)).$$

$$ii)\ a(\lambda, v)^{-1} = a(-\lambda, v) \cdot e(-\pi H(\lambda, \lambda)).$$

Comme tout facteur d'automorphie définit un fibré en droites, alors on définit le fibré :

$$L(H, \chi) = (V \times \mathbb{C})/\Lambda \quad \text{par l'action suivante } \lambda * (v, t) = (v + \lambda, a(\lambda, v)\ t).$$

Théorème 2.3.5 ***Théorème d'Appell-Humbert***

Tout fibré en droites sur un Tore complexe est isomorphe à un fibré en droites de la forme $L(H, \chi)$.

Preuve .

Comme pour tout $L \in Pic(X)$ $c_1(L) \in NS(X)$ donc une forme hermitienne de partie imaginaire entière sur le réseau, et donc il suffit de démontrer que pour tout élément H du groupe $NS(X)$ il existe un semi-charactér associe. En effet il suffit de prendre $\chi(\lambda) = e(2\pi i\ H(\lambda, \lambda))$. ■

Le théorème d'Appell-Humbert nous permet d'étudier facilement les pullback des fibrés en droites sur les tores complexes par les fonctions holomorphe, et comme toute application entre tores complexes est la composée d'une translation et d'un morphisme de groupe on étudier chaque cas séparément.

Lemme 2.3.6 ***Cas des translations*** *:*

Soit $L = L(H, \chi) \in Pic(X) \forall\ w \in V$ *avec* $\pi(w) = \overline{w} \in X$

$$t^*_{\overline{w}}(L(H, \chi)) = L(H, e(2\pi i\ Im(H(w, -)) \cdot \chi).$$

Preuve .

La translation t_w sur V induit une translation $t_{\overline{w}}$ sur X et aussi une application $t_{\overline{w}*} = Id_\Lambda$ sur Λ pour a_L le facteur d'automorphi canonique de L alors $(Id_\Lambda \times t_w)^*(a_L\ )$ est un facteur d'automorphi de $t^*_{\overline{w}}(L)$ non-canonique on ajuste ce défaut en multipliant par : $g(v) = e(-\pi H(v, w))$ on aura :$(Id_\Lambda \times t_w)^*(a_L\ )(\lambda, v)\frac{g(v+\lambda)}{g(v)} = \chi(\lambda)\ e(2\pi i\ Im(H(w, \lambda))\ e(\pi H(v, \lambda) + \frac{\pi}{2} H(\lambda, \lambda))$ qui donne un facteur d'automorphi canonique du fibré $t^*_{\overline{w}}(L)$, puisque $\chi(\lambda)\ e(2\pi i\ Im(H(w, \lambda))$ définit un semi-character pour H. ■

Lemme 2.3.7 ***Cas des morphismes :***

Soit $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme de représentation analytique et* $F : V \longrightarrow W$ *et représentation rationnelle* $F_\Lambda : \Lambda \longrightarrow \Gamma$. *Pour* $L(H,\chi) \in Pic(Y)$

$$f^*(L(H,\chi)) = L(F^*(H), F_\Gamma^*(\chi))$$

Preuve .

On a le réseau est canoniquement isomorphe au groupe fondamental du tore. On a :

$$(F_\Gamma \times F)^* a_{\ L_{(H,\chi)}} = a_{L_{(F^*(H),F_\Gamma^*(\chi))}}$$

Pour plus de détails sur cette égalité voir [1] dans l'Appendice C . ∎

Exemple

Pour $X = Y = V/\Lambda$et $f = n_X$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\forall L = L(H,\chi) \in Pic(X)$ on a :

$$L^{\frac{n^2+n}{2}} \otimes (-1)_X^* L^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot = L(\tfrac{n^2+n}{2} \cdot H + \tfrac{n^2-n}{2} \cdot (-1)_V^*(H), \chi^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot (-1)_V^*(\chi^{\frac{n^2-n}{2}}))$$
$$= L(n^2 H, \chi^n) = L(n_V^*(H), n_\Lambda^*(\chi)) = n_X^* L(H,\chi).$$

Le théorème suivant va nous servir plus tard :

Théorème 2.3.8 ***Théorème du Carré***

$$\forall v, w \in V \forall L \in Pic(X)\ t_{\overline{v}+\overline{w}}^*(L) = t_{\overline{v}}^*(L) \otimes t_{\overline{w}}^*(L) \otimes L^{-1}.$$

2.4 Dualité des tores complexes

Soit $X = V/\mathit{\Lambda}$ un tore complexe de dimension g. On pose $\overline{\Omega}$ l'espace des formes $\mathbb{C}$-antilinéaire sur V. On définit le réseau dual a $\mathit{\Lambda}$ noté $\mathit{\Lambda}^\vee$ par

$$\mathit{\Lambda}^\vee = \left\{ f \in \overline{\Omega}\ / Im(f(\mathit{\Lambda})) \subset \mathbb{Z} \right\}$$

est un réseau dans $\overline{\Omega}$. On définit le tore dual comme le quotient $\overline{\Omega}/\mathit{\Lambda}^\vee$ on le note $X^\vee$ ou $\overset{\curlywedge}{X}$.

NB : Cette construction est fonctoriel de sort que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme entre tore complexes alors il existe une application naturel $f^\vee : Y^\vee \longrightarrow X^\vee$ qui est de plus un morphisme.

Proposition 2.4.1

Le tore dual $X^\vee$ *est isomorphe au groupe* $Pic^0(X)$

Preuve . Prenons l'application surjective

$$\overline{\Omega} \longrightarrow Hom(\mathit{\Lambda}, U(1))$$

donnée par

$$f \longmapsto e(2\pi i Im(f(-)))$$

il est claire que $ker(f) = \mathit{\Lambda}^\vee$ est donc elle induit un isomorphisme entre $X^\vee$ et $Pic^0(X)$. ∎

La dualité se traduit à travers cette isomorphisme par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Y^\vee \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f^\vee"'] & Pic^0(Y) \arrow[d, "f^*"] \\ X^\vee \arrow[r, "\sim"] & Pic^0(X) \end{tikzcd}$$

Soit $L = L(H, \chi)$ un fibré en droite sur X alors $\forall x \in X$ alors $c_1(t_x^*(L) \otimes L^{-1}) = 0$ et donc on définit l'application

$$\phi_L : X \longrightarrow X^\vee \quad x \longmapsto t_x^*(L) \otimes L^{-1}$$

qui est d'après le théorème du carré un morphisme de groupe. On note $Ker(\phi_L) = K(L) = \Lambda(L)/\Lambda$ où $\Lambda(L) = \{v \in V / Im(H(v, \Lambda)) \subset \mathbb{Z}\}$.La représentation analytique de ϕ_L est donnée par l'application

$$\phi_H : V \longrightarrow \overline{\Omega} \qquad v \longmapsto H(v, -)$$

Et on donne les équivalences suivantes :

$$(\phi_L \ est \ isogénie) \Longleftrightarrow (H = c_1(L) \ est \ non - dégénéré) \Longleftrightarrow (K(L) \ est \ finie)$$

3 Cohomologie des fibrés en droites

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension g, et soit H une forme hermitienne entière sur le réseau Λ. Il existe une base $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_g, \mu_1, \cdots, \mu_g\}$ pour Λ symplectique par rapport à $E = Im(H)$, dans la quelle sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$ où $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$ avec $d_i \geq 0$ et $d_i \mid d_{i+1}$ voir [5]. Le vecteur $(d_1, \ldots, d_g)$ est appeler le type de H (résp : de $L \in Pic(X)$ pour $H = c_1(L)$). Pour un fibrés en droite $L \in Pic(X)$ une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ avec V_i des sous-espaces réels est dite décomposition pour L (résp : à $E = Im(H) = Im(c_1(L))$) si $\Lambda_i = V_i \cap \Lambda$ sont isotrope par rapport a la forme symplectique E. clairement les sous espace V_i sont isotrope maximal.

Lemme 3.0.1

Soit L un fibré en droites sur X non dégénéré et $V = V_1 \oplus V_2$ une décomposition pour L. alors :

i) $\Lambda(L) = \Lambda(L)_1 \oplus \Lambda(L)_2$ *où* $\Lambda(L)_i = \Lambda(L) \cap V_i \quad (i = 1, 2)$.

ii) $K(L) = K_1 \oplus K_2$ *avec* $K_i = \Lambda(L)_i / \Lambda_i \quad (i = 1, 2)$.

iii) $K_i \simeq \mathbb{Z}^g / D\mathbb{Z}^g$ *pour* $i = 1, 2$ *avec* $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$ *est le type du fibré* L.

Preuve . Il suffit de démontré (i) et les autres sont des conséquences . Il reste a monter que $\Lambda(L) \subset \Lambda(L)_1 \oplus \Lambda(L)_2$. soit $v \in \Lambda(L)$ donc $v = v_1 + v_2$ pour $v_i \in V_i$. Il est suffisant de montrer que $v_1 \in \Lambda(L)$ ie : $\forall \lambda \in \Lambda \ E(v_1, \lambda) \in \mathbb{Z}$. par définition la décomposition de V induit une décomposition pour $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ donc $\forall \lambda \in \Lambda \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ avec $\lambda_i \in \Lambda_i$ alors $E(v_1, \lambda) = E(v_1, \lambda_1 + \lambda_2) = E(v_1, \lambda_2) = E(v, \lambda_2) \in \mathbb{Z}$. ∎

NB :Comme $K_i = \Lambda(L)_i / \Lambda_i$ sont des groupes finis alors $\Lambda(L)_1 \oplus \Lambda_2$ et $\Lambda_1 \oplus \Lambda(L)_2$ formes des réseaux dans V.

En fixant une décomposition pour $H \in NS(X)$ $V = V_1 \oplus V_2$ on peut distingué un fibré en droite particulier noté L_0 pour le quel $H = c_1(L_0)$(On note :$E = Im(H)$), tout d'abord on définit une application $\chi_0 : V \longrightarrow U(1)$ par

$$\chi_0(v) = e(\pi i \ E(v_1, v_2)) \ \ avec \ \ v = v_1 + v_2 \ et \ v_i \in V_i \ pour \ i = 1, 2$$

la restriction de cette application au réseau Λ définit un semi-character pour H et on pose $L_0 = L(H, \chi_0)$.

Lemme 3.0.2 *Soit $H \in NS(X)$ une forme hermitienne non dégénéré sur V et $V = V_1 \oplus V_2$ avec une décomposition pour H.Pour tout fibré en droits $L = L(H, \chi)$ sur X il existe $c \in V$ unique a translation prés par $\Lambda(L)$ tel que*

$$t_{\bar{c}}^*(L_0) = L \quad .(ie : \chi = \chi_0 \cdot e(2\pi i\ E(c, -))).$$

c est appeler caractéristique de L par rapport à la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$.

Pour $L = L(H, \chi)$ un fibré en droites non dégénéré sur X de caractéristique c par rapport a la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$, On donne un prolongement pour le facteur d'automorphie canonique sur tout $V \times V$ comme suit :

$$a_L(u, v) = \chi_0(u) \cdot e(2\pi i\ E(c, u)) \cdot e(\pi H(v, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u))$$

.

La restriction de $a_L : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ aux réseaux $\Lambda(L)_1 \oplus \Lambda_2$ et $\Lambda_1 \oplus \Lambda(L)_2$ définit des facteurs d'automorphies. On a donc deux tores complexes

$$X_1 = V/(\Lambda(L)_1 \oplus \Lambda_2) = X/K_1 \quad et \quad X_2 = V/(\Lambda_1 \oplus \Lambda(L)_2) = X/K_2$$

de projections $p_i : X \longrightarrow X_i$ $(i = 1, 2)$ sont des isogénies induit par Id_V. L'application a_L détermine des fibrés en droites M_i sur X_i de caractéristique c par rapport a la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ avec $L = p_i^* M_i$ pour $i = 1, 2$.

Propriétés de a_L sur $V \times V$: Fixons une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$

$$i) \quad a_L(u, v + w) = a_L(u, v)\ e(\pi H(w, u))$$

$$ii) \quad a_L(u + v, w) = a_L(u, v + w)\ a_L(v, w)\ e(2\pi i\ E(u_1, v_2))$$

$$iii) \quad a_L(u, v)^{-1} = a_L(-u, v)\chi_0(u)^{-2}\ e(\pi H(u, u))$$

$$iv) \quad a_{t_{\bar{w}}^*(L)}(u, v) = a_L(u, v)\ e(2\pi i\ E(w, u)).$$

3.1 Fibrés en droites défini positifs

Dans cette section on donne la dimension $h^0(L)$ de l'espace des sections holomorphes globale pour un fibré en droites $L \in Pic(X)$ définit positif en fonction de son type $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$, en utilisant le faite que $H^0(X, L)$ est isomorphe a l'espace des fonctions thêtas de cet fibré et en donnant une base explicite de cette espace.

Soit $L = L(H, \chi)$ un fibré en droites définit positif notons $E = Im(H)$ et fixant une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ alors V_2 engendre V comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet posons $W = V_2 \cap iV_2$ alors E est nulle sur W et donc H est nulle aussi sur W et comme H est définit positif implique $W = 0$. Comme la forme E est nulle sur V_2 et comme $E = Im(\ H)$ alors H est symétrique sur V_2 on pose B le prolongement $\mathbb{C}$-bilinéaire de $H \mid V_2 \times V_2$ sur tout $V \times V$ qui est symétrique et on a le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 : $(H - B)(v, u) = \begin{cases} 0 & si \quad (v, u) \in V \times V_2 \\ 2i\ E(v, u) & si \quad (v, u) \in V_2 \times V \end{cases}$

Preuve . Comme H est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport a la première composante alors $(H - B)$ est nulle sur $V \times V_2$. Pour $(v, u) \in V_2 \times V$ On a :
$(H - B)(v, u) = \overline{H(u, v)} - B(u, v) = (H - B)(u, v) - 2i\ E(u, v) = 2i\ E(v, u)$. ■

Définition 3.1.2 *En utilisant B on définit un facteur d'automorphie particulier pour L dit facteur d'automorphie classique noté :* $e_L : \Lambda \times V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *avec :*

$$\forall \lambda \in \Lambda \forall v \in V \quad e_L(\lambda, v) = \chi(\lambda) e(\pi(H-B)(v,\lambda) + \frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda))$$

Par un simple calcule on aura : $\forall \lambda \in \Lambda \forall v \in V$

$$e_L(\lambda, v) = a_L(\lambda, v)\ e(\frac{\pi}{2}B(v,v) - \frac{\pi}{2}H(v+\lambda, v+\lambda)) \cdots\cdots (\bigstar)$$

Et donc e_L *est un facteur d'automorphi équivalent a* a_L.
On appelle les fonctions thêta par rapport a e_L *une fonctions thêta classique.*

Lemme 3.1.3
Soit L de caractéristique c par rapport a la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ *alors* $h^0(L) = h^0(L_0)$.

Preuve .
On prend les fonctions thêta classiques.
L'application $\varphi : H^0(X,L) \longrightarrow H^0(X,L_0)$ définit par $\vartheta \mapsto \widetilde{\vartheta} = e(\pi(H-B)(\cdot,c))\vartheta(\cdot - c)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Il suffit de montrer $\widetilde{\vartheta}$ thêta classique pour L_0, or Comme $t^*_{\overline{c}}(L_0) = L$ et d'après les propriétés des facteurs d'automorphies on a :

1) $e_L(\lambda, v) = e_{L_0}(\lambda, v)\ e(2\pi i E(c,\lambda))$

2) $e_L(\lambda, v-c) = e(-\pi(H-B)(c,\lambda)) \cdot e_L(\lambda, v) \quad \forall \lambda \in \Lambda\ \forall v \in V$

on aura
$$\widetilde{\vartheta}(v+\lambda) = e_{L_0}(\lambda, v)\ \widetilde{\vartheta}(v) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \forall v \in V.$$

Il reste a calculer $h^0(L_0)$, Pour le faire on construit une base explicite de l'espace des fonctions thêta canonique. On pose :

$$\vartheta^0(v) = e\left(\frac{\pi}{2}B(v,v)\right) \sum_{\lambda \in \Lambda_1} e(\pi(H-B)(v,\lambda) - \frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda))$$

avec ϑ^0 une fonction thêta canonique pour L_0. En effet :

$$\begin{aligned}\vartheta^c(v+\lambda) &= e(-\pi H(v+\lambda, c) - \frac{\pi}{2}H(c,c))\vartheta^0(v+c+\lambda)\\ &= e(-\pi H(v+\lambda,c) - \frac{\pi}{2}H(c,c))a_{L_0}(\lambda, v+c)\vartheta^0(v+c)\\ &= e(2\pi i E(c,\lambda))a_{L_0}(\lambda,v)\vartheta^c(v) = a_L(\lambda,v)\vartheta^c(v)\end{aligned}$$

Il reste a prouver que ϑ^0 holomorphe $\Leftrightarrow f(v) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_1} \mid e(\pi(H-B)(v,\lambda) - \frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda)) \mid$ converge uniformément sur tout compact de V .

Pour tout $\lambda \in \Lambda_1$ ($\lambda = a + ib$ avec $a, b \in V_2$ et $b \neq 0$ puisque V_2 engendre V) on a $Re(\frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda)) = Re(2i\ E(a,\lambda) - 2E(b,\lambda)) = 2E(\lambda,b) = 2E(ib,b) + 2iE(b,b) = 2H(b,b) > 0$ puisque H définit positive. Alors $e(R_1 \parallel \lambda \parallel^2) \leq\mid e(\frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda))$ |pour $R_1 > 0$.

On fixe une norme $\|\|$ sur V entière sur Λ Pour tout $r > 0\ \forall v \in V/ \parallel v \parallel \leq r\ \exists R_2 > 0$ $telquee(\pi(H-B)(v,\lambda) \mid\leq e(R_2 \parallel \lambda \parallel)$ alors

$$f(v) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_1} e(R_2 \parallel \lambda \parallel - R_1 \parallel \lambda \parallel^2) \leq K(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e(R_2 n - R_1 n^2))^{2g}$$

qui est fini pour K une constante positive. ■

ϑ^0 nous permet de construire une famille de fonctions thêta canonique pour L_0 :, $\forall \overline{w} \in K(L)$ de représentation $w \in \Lambda(L)$ On pose

$$\vartheta^0_{\overline{w}} = a_{L_0}(w, -)^{-1} \vartheta^0(\cdot + w)$$

. une fonction thêta canonique en effet $\forall \overline{w} \in K(L) \quad \forall \lambda \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \vartheta^0_{\overline{w}}(v+\lambda) &= a_{L_0}(w, v+\lambda)^{-1} \vartheta^0(v+\lambda+w) \\ &= e(\pi H(w,\lambda) - \pi H(\lambda, w)) \frac{a_L(\lambda, v)}{a_L(w, v)} \vartheta^0(v+w) \\ &= e(2\pi i E(w,\lambda)) a_L(\lambda, v) \vartheta^0_{\overline{w}}(v) = a_L(\lambda, v) \vartheta^0_{\overline{w}}(v) \end{aligned}$$

puisque $E(w, \lambda) \in \mathbb{Z}\ \forall w \in \Lambda(L) \forall \lambda \in \Lambda$.

Théorème 3.1.4 *Soit $V = V_1 \oplus V_2$ une décomposition pou $H = c_1(L_0)$ alors l'ensemble $\{\vartheta^0_{\overline{w}} / \overline{w} \in K(L_0)_1\}$ forme une base pour l'espace des fonctions thêta canonique pour L_0.(Cette base dépend de la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ pour $H = c_1(L_0)$).*

Si $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$ est le type de L_0 et comme $K(L_0)_1 \simeq \mathbb{Z}^g / D\mathbb{Z}^g$ alors la dimension $h^0(L_0) = \det(D)$.(Le Pfaffian de $E = Im(H)$).

Preuve .

Étape 01 : Tout d'abord montrons que : $h^0(L_0) \leq \det(D)$

Soit $\vartheta \in H^0(L_0)$ une fonction thêta classique alors

$$\forall \lambda_2 \in \Lambda_2 \quad \vartheta(v+\lambda_2) = e_{L_0}(\lambda_2, v) \quad \vartheta(v)$$

or $e_{L_0}(\lambda_2, v) = 1$ donc ϑ est Λ_2-périodique, donc décomposable en série de Fourier comme suit

$$\vartheta(v) = \sum_{\lambda \in \Lambda(L)_1} \alpha_\lambda \cdot e(\pi(H-B)(v, \lambda))$$

où α_λ les coefficients de Fourier.

La fonction ϑ satisfait aussi $\vartheta(v+\lambda_1) = e_{L_0}(\lambda_1, v)\vartheta(v) \quad \forall \lambda_1 \in \Lambda_1$ .et on a les deux égalités suivante :

$$\begin{aligned} 1) \quad \vartheta(v+\lambda_1) &= \sum_{\lambda \in \Lambda(L)_1} \alpha_\lambda \cdot e(\pi(H-B)(v+\lambda_1, \lambda)) \\ 2) \quad e_{L_0}(\lambda_1, v)\vartheta(v) &= \sum_{\lambda \in \Lambda(L)_1} \alpha_\lambda \cdot e_{L_0}(\lambda_1, 0) \cdot e(\pi(H-B)(v, \lambda+\lambda_1)) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda(L)_1} \alpha_{\lambda-\lambda_1} \cdot e_{L_0}(\lambda_1, 0) \cdot e(\pi(H-B)(v, \lambda)). \end{aligned}$$

En comparent les coefficients on aura que $\alpha_{\lambda-\lambda_1} = \frac{\alpha_\lambda e(\pi(H-B)(\lambda_1, \lambda))}{e_{L_0}(\lambda_1, 0)}$ $\forall \lambda_1 \in \Lambda_1 \forall \lambda \in \Lambda(L_0)_1$. Alors ϑ est entièrement déterminer par les coefficients α_λ pour $\lambda \in \Lambda(L_0)_1$ un représentant de $K(L_0)_1$ alors

$$h^0(L_0) \leq \sharp(K(L_0)_1) = \det(D)$$

Etape 02 : On démontre que la famille $\{\vartheta^0_{\overline{w}} / \overline{w} \in K(L_0)_1\}$ est libre.

D'après l'équation (★) les fonctions $g(v)=e(-\frac{\pi}{2}B)\vartheta^0_{\overline{w}}$ sont des fonctions thêta classique pour L_0 Λ_2-périodique donc développable en série de Fourier. Soient $w_1, \ldots, w_N$ des représentants de $K(L_0)_1$. Pour tout $v \in V$ on a :

$$
\begin{aligned}
g(v) &= \frac{e(-\frac{\pi}{2}B(v,v)+\frac{\pi}{2}B(v+w_j,v+w_j)))}{a_{L_0(w_j,v)}}\sum_{\lambda\in\Lambda_1} e(\pi(H-B)(v+w_j,\lambda)-\frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda_1} e(-\pi(H-B)(v,w_j)-\frac{\pi}{2}(H-B)(w_j,w_j)-\frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda)+\pi(H-B)(w_j,\lambda)+\pi(H-B)(v,\lambda))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda_1} e(-\frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda-w_j,\lambda-w_j)+iE(w_j,\lambda))e(\pi(H-B)(v,\lambda-w_j))\\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda_1-w_j} e(-\frac{\pi}{2}(H-B)(\lambda,\lambda))e(\pi(H-B)(v,\lambda))
\end{aligned}
$$

et comme les ensemble $\Lambda_1 - w_j$ pour $1 \le j \le N$ sont deux a deux disjoints dans $\Lambda(L)_1$ alors les fonctions $e(-\frac{\pi}{2}B)\vartheta^0_{\overline{w_j}}$ pour $1 \le j \le N$ sont linéairement indépendantes. ■

Soit $L = t^*_{\overline{c}}L_0$ un fibré en droites définit positif de caractéristique $c \in V$ par rapport a la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ on définit une fonction thêta canonique (*ie* : par rapport a_L) pour le fibré L en fonction de ϑ^0 par : $\vartheta^c(v) = e(-\pi H(v,c) - \frac{\pi}{2}H(c,c))\vartheta^0(v+c)$ En effet :

$$
\begin{aligned}
\vartheta^c(v+\lambda) &= e(-\pi H(v+\lambda,c)-\frac{\pi}{2}H(c,c))\vartheta^0(v+\lambda+c)\\
&= e(-\pi H(v+\lambda,c)-\frac{\pi}{2}H(c,c))a_{L_0}(\lambda,v+c)\vartheta^0(v+c)\\
&= e(2\pi i\ E(c,\lambda))\ a_{L_0}(\lambda,v)\vartheta^c(v)\\
&= a_L(\lambda,v)\vartheta^c(v).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.1.5 *: Soit $L = t^*_{\overline{c}}L_0$ un fibré en droites définit positif de caractéristique $c \in V$ par rapport a la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$. Alors la famille*

$$\{\vartheta^c_{\overline{w}} = a_L(w,\cdot)^{-1}\vartheta^c(\cdot+w)/\overline{w} \in K(L_0)_1\}$$

est une base de l'espace $H^0(X,L)$ des fonctions thêta canonique pour L.

Preuve . Il suffit de montrer que $\vartheta^c_{\overline{w}}$ sont des fonctions thêta canonique pour L.

$$
\begin{aligned}
\vartheta^c_{\overline{w}}(v+\lambda) &= a_L(w,v+\lambda)^{-1}\ \ \vartheta^c(v+\lambda+w)\\
&= e(\pi H(w,\lambda)-H(\lambda,w))\ a_L(\lambda,v)\ a_L(w,v)^{-1}\ \vartheta^c(v+w)\\
&= e(2\pi i\ E(w,\lambda))\ a_L(\lambda,v)\vartheta^c_{\overline{w}}(v)\\
&= a_L(\lambda,v)\ \vartheta^c_{\overline{w}}(v)\ \ \textit{Puisque}:\ E(w,\lambda)\in\mathbb{Z}\forall\lambda\in\Lambda\forall w\in\Lambda(L).
\end{aligned}
$$

■

3.2 Fibrés en droites semi-défini positif

Dans cette section on cherche a calculer la dimension de $H^0(X,L)$ pour un fibrés en droite L semi-définit positif (*ie* : $c_1(L)$ semi-définit positif). La méthode de la section précédente ne marche pas dans ce cas puisque on a pas la notion de caractéristique qui est définit que pour les formes hermitienne non dégénéré. Pour se ramener a cette situation on utilise le faite que la composante connexe de zéro du noyau de la représentation analytique de φ_L $\Lambda(L)_0$ coïncide avec le noyau de $H = c_1(L)$, et la forme hermitienne induite par H sur le quotient $W = V/\Lambda(L)_0$ est par définition une forme hermitienne définit positive. Le tore quotient $Y = X/K(L)_0 = W/\Gamma$ avec $\Gamma = \Lambda/(\Lambda(L)_0 \cap \Lambda)$ un réseau dans W est le Tore candidat pour se ramener au cas définit positif.

Lemme 3.2.1 *Soit $p : X \longrightarrow Y$ la surjection canonique alors L descend en fibré en droites $\overline{L}$ sur Y si et seulement si $L\mid_{K(L)_0}$ est trivial. Et dans ce cas $h^0(L) = h^0(\overline{L})$.*

Preuve . Si $L = L(H, \chi)$ descend a $Y \Longleftrightarrow$ (H descend a W et χ descend a Γ)

$\Longleftrightarrow$ ($H\mid_{\Lambda(L)_0} = 0$ et $\chi\mid_{\Lambda(L)_0\cap\Lambda} = 1$)

$\Longleftrightarrow L\mid_{K(L)_0}$ est trivial.

Si $L\mid_{K(L)_0}$ est trivial alors par définition $\overline{L}$ est définit positif alors $h^0(L) \leq h^0(\overline{L})$. On a l'égalité car sinon L admet une section globale non trivial sur $K(L)_0$ ■

NB : Si $L\mid_{K(L)_0}$ est non-trivial alors $\chi\mid_{\Lambda(L)_0\cap\Lambda}$ est non trivial. Soit ϑ une fonction thêta canonique pou L. $\forall w \in V$ la fonction $t_w^*\vartheta$ satisfait $\forall \lambda \in \Lambda(L)_0 \cap \Lambda$ $\forall v \in \Lambda(L)_0$ l'équation fonctionnelle :

$$t_w^*\vartheta(v + \lambda) = \vartheta(v + \lambda + w) = a_L(\lambda, v + w)\vartheta(v + w) = \chi(\lambda)t_w^*\vartheta(v).$$

Donc $t_w^*\vartheta$ borner et donc constant sur $\Lambda(L)_0$. Comme $\chi\mid_{\Lambda(L)_0\cap\Lambda}$ est non trivial $\exists \lambda_0 \in \Lambda(L)_0 \cap \Lambda$ tel que $\chi(\lambda_0) \neq 1$ alors $t_w^*\vartheta\mid_{\Lambda(L)_0}$et donc $\vartheta(w) = 0$ pour tout $w \in V$.

Le théorème suivant nous donne la dimension $h^0(L)$ pour tout fibré en droites semi-définit positif sur X.

Théorème 3.2.2

Soit $L = L(H, \chi)$ un fibré en droites semi-définit positif sur X de type $D = diag(d_1, \ldots, d_s, 0, \ldots, 0)$ et $E = Im(H)$ alors :

$$h^0(L) = \begin{cases} Pfr(E) \text{ si } L\mid_{K(L)_0} \text{ est trivial} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Avec le Pfaffian réduit de E : $Pfr(E) = \prod_{k=1}^{s} d_k$ si $s \geq 1$ et égale à 1 si $s = 0$.

3.3 Cohomologie des fibrés en droites

Dans cette section on définit les groupes de cohomologie de degré supérieurs $H^q(X, L)$ d'un fibré en droites L quelconque sur un tore complexe X et on donne leurs dimension $h^q(L)$ en utilisant deux outils importants :

1) Définir un Laplacien sur l'espace des formes différentielles globales lisses de degré $(0, q)$ twister

par le fibré en droites L pour définir les formes harmonique sur L.

2) Le théorème d'annulation qui donne un intervalle d'entier dépendant du fibré L ou la cohomologie

est concentrer.

Groupe de cohomologie de degré supérieurs

Soit $X = V/\Lambda$ un Tore complexe et L un fibré en droites sur X.

Prenons la résolution de Dolbeault pour $p = 0$ c'est-à-dire la résolution du faisceau $\mathcal{O}_X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}_X^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}_X^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}_X^{0,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

tensorisons par le fibré L qui est un $\mathcal{O}_X$−Module on obtient une résolution de L vu comme un faisceau donnée par :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{A}_X^{0,0}(L) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}_X^{0,1}(L) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}_X^{0,q}(L) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

$$avec\ \ \mathcal{A}_X^{0,q}(L) = \mathcal{A}_X^{0,q} \otimes_{\mathcal{O}_X} L := \left\{ \begin{array}{c} Le\ faisceau\ des\ formes\ diff\acute{e}rentielles\ lisses \\ de\ type(0,q)\grave{a}\ valeurs\ dans\ L\ ou\ \overline{\partial}\ est\ \overline{\partial}\otimes id \end{array} \right\}$$

Définition 3.3.1 *Le $q-$ème groupe de cohomologie de L est définit comme la cohomologie du complexe des sections globales donnée par :*

$$0 \longrightarrow H^0(X,L) \longrightarrow A_X^{0,0}(L) \xrightarrow{\overline{\partial}} A_X^{0,1}(L) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} A_X^{0,q}(L) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

$$A_X^{0,q}(L) = \mathcal{A}_X^{0,q}(L)(X) \simeq \left\{ \begin{array}{c} Formes\ diff\grave{e}rentielles\ lisses\ sur\ V\ de\ bidegr\grave{e}\ (0,q) \\ tel\ que\ \ t_\lambda^*\omega = a_L(\lambda,-)\ \omega\ \forall\ \lambda\ \in\ \Lambda \end{array} \right\}.$$

et l'opérateur $\overline{\partial}\ :\ A_X^{0,q}(L) \longrightarrow A_X^{0,q+1}(L)$ s'exprime dans une $\mathbb{C}$-base de V $\{e_1,\ldots,e_g\}$ de coordonnés $\{v_1,\ldots,v_g\}$ par

$$\overline{\partial}(\varphi\ dv_I) = \sum_{j=1}^{g} \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{v}_j} dv_j \wedge d\overline{v}_j.$$

3.3.1 Formes harmoniques à valeurs dans des fibrés en droites

Soit $L = L(H,\chi) \in Pic(X)$. On définit une métrique hermitienne sur L [C'est-à-dire une forme hermitienne sur chaque fibre de L dépendant différentiablement en $x \in X$] par :

$$\begin{array}{rccl} <\ ,\ >: & A_X^{0,0}(L) \times A_X^{0,0}(L) & \longrightarrow & A_X^{0,0} = \{f : V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lisse }\} \\ & (\ f\ ,\ g\ ) & \mapsto & <\ f\ ,\ g\ > \end{array}$$

Ou :

$$< f,g > (v) = f(v)\overline{g(v)}\ e(-\pi H(v,v))\ \ \forall v \in V.$$

périodique par rapport à Λ.

L'étape suivante est de définir une métrique Kählerienne sur X compatible avec la métrique hermitienne définie sur L. Fixons une $\mathbb{C}$-base $\{e_1,\ldots,e_g\}$ de coordonnés $\{v_1,\ldots,v_g\}$ par rapport à la quelle $H = c_1(L)$ est diagonal ie :

$$H(v,v) = \sum_{j=1}^{g} h_j\ v_j\ \overline{v}_j.$$

Pour tout choix de réels positifs $\{k_1,\ldots,k_g\}$ la 2-forme

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{g} k_j\ dv_j \otimes d\overline{v}_j$$

Définie une métrique Kählerienne sur X, pour la compatibilité avec la métrique hermitienne sur L il suffit de choisir les $\{k_1,\ldots,k_g\}$ en fonction de $H = c_1(L)$. Cette métrique induit un produit scalaire sur $A_X^{0,0}(L)$

$$(-,-) : A_X^{0,0}(L) \times A_X^{0,0}(L) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (f,g) = \int_X < f,g > dv$$

avec

$$dv = ((\frac{i}{2})^g \prod_{j=1}^{g} k_j)\ dv_1 \wedge d\overline{v}_1 \wedge dv_2 \wedge d\overline{v}_2 \wedge \cdots \wedge dv_g \otimes d\overline{v}_g$$

est la forme volume associe à ds^2. Comme

$$A_X^{0,q}(L) = \{\ \omega = \sum_I \varphi_I d\overline{v}_I\ /\ \varphi_I \in A_X^{0,0}(L)\ et\ I = (i_1 < \cdots < i_q)\}$$

alors en généralise le produit scalaire aux espaces $A_X^{0,q}(L)$ par :

$$\left(\sum_I \varphi_I d\overline{v}_I, \sum_I \psi_I d\overline{v}_I\right) = \sum_I \frac{1}{k^I}\ (f,g)$$

avec $k^I = \prod_{j\in I} k^j$. se produit scalaire sur $A_X^{0,q}(L)$ nous permet de définir un adjoint pour l'opérateur $\overline{\partial}$ c'est-à-dire un opérateur $\overline{\delta} : A_X^{0,q+1}(L) \longrightarrow A_X^{0,q}(L)$ avec

$$(\overline{\partial}\omega, \alpha) = (\omega, \overline{\delta}\alpha) forall \omega \in A_X^{0,q-1} \forall \alpha \in A_X^{0,q}$$

et donc on définit un Laplacien

$$\Delta := \overline{\delta} \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \overline{\delta} : A_X^{0,q} \longrightarrow A_X^{0,q}$$

plus précisément on a :

Lemme 3.3.2 *Soit* $\varphi \in A_X^{0,0}(L)$

i) $\overline{\delta}_j : A_X^{0,0}(L) \longrightarrow A_X^{0,0}(L) : \overline{\delta}_j\varphi = -\partial_j + \pi h_j \overline{v}_j \varphi$

ii) $\overline{\delta}(\varphi d\overline{v}_J) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q+1} \frac{(-1)^{j-1}}{k_{i_j}} \overline{\delta}_{i_j} \varphi d\overline{v}_{I-i_j}$. *Pour* $I = (i_1 \ < \cdots \ < i_{q+1})$

iii) $\Delta(\varphi d\overline{v}_I) = \displaystyle\sum_{j=1}^{g} \frac{\overline{\delta}_j \overline{\partial}_j(\varphi)}{k_j} d\overline{v}_I + \pi \sum_{j=1}^{q} \frac{h_{i_j}}{k_{i_j}} \varphi d\overline{v}_I$. *Pour* $I = (i_1 \ < \cdots \ < i_q)$

Preuve . $\forall f, g \in A_X^{0,0}(L) \ \ < \overline{\partial}_j f\ ,g\ \ > - \ \ < f,\ \delta_j g\ \ >= \overline{\partial}_j(\ < f\ ,g\ \ >)$ et

$\int_X \overline{\partial}_j(\ < f\ ,g\ \ >) dv = -(\frac{i}{2})^g (\prod_{j=1}^{g} k_j) \int_X d(\ < f\ ,g\ \ > dv_1 \wedge d\overline{v}_1 \wedge \cdots \overset{\vee}{d\overline{v}_g} \cdots \wedge dv_g \wedge d\overline{v}_g) = 0$

D'après le théorème Stokes. Le deuxième et troisième points sont des conséquences du premier. ■

3.3.2 Théorème d'annulation

À ce niveau on doit choisir les réels $\{k_1, \ldots, k_g\}$ pour rendre la forme de Kähler sur X compatible a la métrique hermitienne définit sur L. d'après le théorème de la Classification des formes hermitiennes on peut trouvé une base orthogonale ou H s'écrit sous la forme

$$\forall v, w \in V \quad H(v,w) = \sum_{j=1}^{p} v_j \overline{w}_j - \sum_{j=p+1}^{p+q} v_j \overline{w}_j$$

Le couple (r, s) s'appelle signature de la forme hermitienne H ou $r =$ (le nombres des valeurs propres positives) et $s =$ (le nombre des valeurs propres négatives).

On pose $k_j = \begin{cases} \frac{1}{1+s} & \text{si j} \leq r \\ \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

De plus on note : $R_I = \sharp I \cap \{1, \ldots, r\}$ et $S_I = \sharp I \cap \{1+r, \ldots, r+s\}$ avec $I = (i_1 \ < \cdots \ < i_q)$.

Proposition 3.3.3 *On définit les formes harmoniques de degré q à valeurs dans L les éléments de l'espace noté $\mathcal{H}^q(L) = \ker(\Delta)$. Muni d'une décomposition :*

$$\mathcal{H}^q(L) = \underset{\sharp I=q}{\oplus} \mathcal{H}^q_I(L) \quad avec \quad \mathcal{H}^q_I(L) = \{f \; d\overline{v}_I / \; f \in A^{0,0}_X(L)\}$$
$$\mathcal{H}^q_I(L) = 0 \quad Si \quad R_I \; > 0.$$

Preuve .

Pour tout $\varphi \; d\overline{v}_I \in A^{0,q}_X(L)$ on a l'inégalité :

$$(\Delta(\varphi d\overline{v}_I), \varphi \; d\overline{v}_I) \geq \pi((s+1)R_I - S_I)(\varphi \; d\overline{v}_I, \varphi \; d\overline{v}_I).$$

Alors pour tout $\varphi \; d\overline{v}_I \in \mathcal{H}^q_I(L)$ on a
$0 = (0, \; \varphi \; d\overline{v}_I) = (\Delta(\; \varphi \; d\overline{v}_I), \; \varphi \; d\overline{v}_I) \geq \pi((s+1)R_I - S_I)(\; \varphi \; d\overline{v}_I, \; \varphi \; d\overline{v}_I)$.
or si $R_I \; > 0$ on a $((s+1)R_I - S_I) \geq 1$ et $(\; \varphi \; d\overline{v}_I, \; \varphi \; d\overline{v}_I) \geq 0 \Longrightarrow \varphi \; d\overline{v}_I = 0.$ ■

On utilise le faite que : $H^q(X, L) \simeq \mathcal{H}^q(L)$ $(\forall q \geq 0)$.On a le théorème :

Théorème 3.3.4 *Soit $L = L(H, \chi)$ un fibré en droites sur X avec H de signature (r, s) alors $H^q(X, L)$ pour $q \; > g - r$ et $q \; < s$.*

NB : D′après le théorème précédent la cohomologie du fibré en droites L est concentré dans l'intervalle entier $[s,g - r]$.

Cohomologie des fibrés en droites

Soit $L = L(H, \chi)$ un fibré en droites sur X avec H de signature (r, s).Il reste a calculer $h^q(L)$ pour $s \leq q \leq g - r$.

Lemme 3.3.5

$$h^q(L) = \binom{g-r-s}{q-s} h^s(L).$$

Preuve :

Ètape 01 : $\mathcal{H}^q(L) = \underset{\substack{\sharp I=q \\ R_I=0, S_I=s}}{\oplus} \mathcal{H}^q_I(L)$ supposons $R_I = 0$ et $S_I \leq s$ on a $\Delta(\varphi d\overline{v}_I) = \psi d\overline{v}_I$ avec

$$\psi = \sum_{j=1}^{g} \frac{\overline{\delta}_j \overline{\partial}_j(\varphi)}{k_j} - \pi S_I \varphi.$$

Si $J = I \cap \{r+1, \ldots, r+s\}, R_I = 0$ et $S_I = S_J$ tel que $\Delta(\varphi \; d\overline{v}_J) = \psi d\overline{v}_J$ donc l'application

$$\mathcal{H}^q_I(L) \longrightarrow \mathcal{H}^q_J(L), \qquad \varphi d\overline{v}_I \longmapsto \varphi d\overline{v}_J$$

est un isomorphisme. Si de plus $S_I \prec s$ le théorème d'annulation implique $\mathcal{H}^q_J(L) = 0$.

Ètape 02 : pour $J = (r+1, \ldots, r+s)$ on a :

$$\begin{aligned} H^q(X, L) \simeq \mathcal{H}^q(L) &\simeq \underset{\substack{\sharp I=q \\ R_I=0, S_I=s}}{\oplus} \mathcal{H}^q_I(L) \\ &= \underset{\substack{\sharp I=q \\ R_I=0, S_I=s}}{\oplus} \mathcal{H}^s_J(L) \simeq \mathcal{H}^s_J(L) \otimes \mathbb{C}^{\binom{g-r-s}{q-s}} \\ &\simeq H^s(X, L) \otimes \mathbb{C}^{\binom{g-r-s}{q-s}} \end{aligned}$$

■

Donc il nous reste a calculer $h^s(L)$ en se ramenant a la situation d'un fibré en droites positif en cherchant un couple (Y, M) où Y est un tore complexe muni du fibré en droites M semi-définit positif avec

$$H^s(X, L) \simeq H^0(Y, M).$$

Fixons une $\mathbb{C}$-base $\{e_1, \ldots, e_g\}$ sur V de coordonnées $\{v_1, \ldots, v_g\}$. On décompose $V = V^+ \oplus V^- \oplus Ker(H)$ avec $V^+ = \{v \in V/H(v, v) \succ 0\}$ et $V^- = \{v \in V/H(v, v) \prec 0\}$ on peut supposé $V^+ = \mathbb{C}\{e_1, \ldots, e_r\}$ et $V^- = \mathbb{C}\{e_{r+1}, \ldots, e_{r+s}\}$ cette décomposition induit une décomposition de sous espace réel W sous jacent à V en sous-espace réel $W = W^+ \oplus W^- \oplus W^0$ ou W est muni de la structure presque complexe $j \in End_{\mathbb{R}}(W)$ avec $j^2 = -Id_W$ induite par la multiplication par le nombre complexe i dans V, on modifier la structure presque complexe j sur W^- en la multipliant par un (-1) donc on définit sur W une nouvelle structure presque complexe $k : W \longrightarrow W$

$$k(w) = \begin{cases} j(w) \text{ si } w \in W^+ \oplus W^0 \\ -j(w) \text{ si } w \in W^- \end{cases}$$

Cette structure presque complexe définit un espace vectoriel complexe $U = (W, k)$ muni de la même base $\{e_1, \ldots, e_g\}$ de coordonnées $\{u_1, \ldots, u_g\}$ définit par

$$u_m = \begin{cases} v_m \text{ si } m \in \{1, \ldots, r, r+s+1, \ldots, g\} \\ \overline{v}_m \text{ sinon} \end{cases}$$

. On définit une forme hermitienne

$$\widetilde{H}(v, w) = Im(H(k(v), w)) + i\ Im(H(v, w))$$

par définition entière sur le réseau Λ qui est indépendant de la structure complexe sur W et qui a χ aussi comme semi-caractère puisque $Im(H) = Im(\widetilde{H})$. Alors on prend le tore complexe $Y = U/\Lambda$ muni du fibré en droites $M = L(\widetilde{H}, \chi)$.

Théorème 3.3.6 *Voir [1]*

$$H^s(X, L) \quad et \quad H^0(Y, M). \quad sont \quad isomorphes$$

.

Corollaire 3.3.7 *Soit $L = L(H, \chi)$ un fibré en droites semi-définit positif sur X de type $D = diag(d_1, \ldots, d_s, 0, \ldots, 0)$ et $E = Im(H)$ alors*

$$h^s(L) = \begin{cases} Pfr(E) \ si \ \ L\mid_{K(L)_0} est\ trivial \\ 0 \qquad sinon \end{cases}$$

Le théorème suivant englobe toute les situation des sous section précédente.

Théorème 3.3.8 *Soit $L = L(H, \chi) \in Pic(X)$ avec H de signature (r, s) alors*

$$h^q(L) = \begin{cases} \binom{g-r-s}{q-s} Pfr(E) \ \ si \ \ s \leq q \leq g-r \ et\ L\mid_{K(L)_0} est\ trivial \\ 0 \qquad sinon \end{cases}$$

Comme corollaire de ce théorème est la caractéristique d'Euler Poincaré

$$\chi(L) = \sum (-1)^q h^q(L)$$

d'un fibré en droites $L = L(H, \chi) \in Pic(X)$.

Théorème 3.3.9 (Théorème de Riemann-Roch) *:*

Soit $L = L(H, \chi) \in Pic(X)$ avec H de signature (r, s) alors $\chi(L) = (-1)^s Pf(E)$

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme surjectif de tores complexes et soit $L = L(H, \chi) \in Pic(Y)$ alors $\chi(f^*L) = \deg(f)\ \chi(L)$.

Lemme 3.3.10 *Soit $L \in Pic(X)$ de type $D = diag(d_1, \dots, d_g)$ alors $c_1(L) = -\sum_{j=1}^{g} d_j\ dx_j \wedge dy_j$.*

4 Variétés abéliennes et espaces de modules

Dans cette section on définit la classe des variétés abéliennes comme des tores plongeable dans un espace projectif puis les classifies a isomorphisme conservant la structure prés en décrivant une action du groupe symplectique sur le demi-espace de Siegel, l'application du plongement est liée au sections holomorphe de la polarisation. Puis on décrit des structures supplémentaire sur ces variétés par exemple les D-structure ou les structures d'un niveau donnés et aussi donné une classification par rapport a ces structures en restreignant l'action précédente a des sous groupe bien précis.

4.1 Variétés Abéliennes et Plongement

Définition 4.1.1 *Un Tore complexe $X = V/\Lambda$ est une Variété Abélienne s'il admet un fibré en droite $L \in Pic(X)$ de première classe de Chern $H = c_1(L)$ définit positif.*

On appelle $H = c_1(L)$ ou L une polarisation sur la variété abélienne X.

Le type de L est appeler le type de la polarisation.

On dit quelle est principale si elle est de type $D = I_g$.

Le couple (X, L) est appeler variété abélienne polarisée de polarisation L.

D'une manière équivalente une variété abélienne est la donnée d'un tore complexe X muni d'une isogénie $\varphi : X \to X^\vee$ ou sa représentation analytique $\psi : V \to \overline{\Omega} = Hom_{\overline{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ est une forme hermitienne définit positif sur V, dans ce cas φ est appeler polarisation sur X et le couple (X, φ) est appeler variété abélienne polarisée.

Un homomorphisme entre deux variétés abéliennes polarisées $f : (X, L) \to (Y, M)$ est la donnée d'un morphisme entre tore complexe $f : X \to Y$ tel que $c_1(M) = c_1(f^*L)$. Le faite que f^*L est définit positif donc non dégénéré implique la finitude du noyau de f. Inversement, soit $f : X \to Y$ un morphisme entres tores complexes de noyau finis et soit une polarisation $L \in Pic(Y)$ sur Y alors f^*L est une polarisation sur X. induite par L.

Théorème 4.1.2

1) Soit (X, L) une variété abélienne avec $H = c_1(L)$ et $Y \subset X$ Un sous tore alors (Y, i^*L) est une variété abélienne avec $i : Y \longrightarrow X$ l'injection canonique.

2) Un tore complexe isogéne a une variété abélienne est une variété abélienne.

3) Soient (X, L_X) et (Y, L_Y) deux variétés abélienne polarisées. Notons $pr_X : X \times Y \longrightarrow X$ et $pr_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ les projections , le fibré en droites $pr_X^* L_X \otimes pr_Y^* L_Y$ est un fibré en droites sur $X \times Y$ représente la polarisation produit. Donc $(X \times Y, pr_X^* L_X \otimes pr_Y^* L_Y)$ est une variété abélienne.

Proposition 4.1.3

Toute polarisation est induite par une polarisation principal par une isogénie.

Preuve .

Soit (X, L) une variété abélienne de type $(d_1, \cdots, d_g)$ l'isogénie $p_1 : X \longrightarrow X_1$ (X_1 est définit dans la section 3) est de degré $\prod_{i=1}^{g} d_i$ et l'existence d'un fibré en droite définit positif $M_1 \in Pic(X_1)$ tel que $p_1^* M_1 = L$, d'après le théorème de Riemann-Roch on aura $\prod d_i = \chi(L) = \prod d_i \chi(M_1)$ alors $\chi(M_1) = 1$ alors M_1 est principale. ■

La définition de variété abélienne X est basé sur l'existence d'un fibrés en droites définit positif L supposant de type $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$, d'après la section de cohomologie des fibrés en droites définit positif et le théorème de Riemann-Roch l'espace des section $H^0(X, L)$ est de dimension $N = \prod d_i$ avec une base des fonctions thêtas $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N\}$ associe à un facteur d'automorphie pour L, cette base nous permet de construire une application dans le projective de l'espace des sections comme suit :

$$\phi_L : X \to \mathbb{P}(H^0(X, L)), \quad x \mapsto [\vartheta_1(v) : \vartheta_2(v) : \ldots : \vartheta_N(v)] \ \ avec \ \ \pi(v) = x$$

L'holomorphie de cette application dépend du type du fibré L.

Théorème 4.1.4 *De Lefschetz*

Soit L un fibré en droites définit positif de type $(d_1, \ldots, d_g)$ sur un tore complexe X.

1) Si $d_1 \geqslant 2$ alors ϕ_L est holomorphe.

2) Si $d_1 \geqslant 3$ alors ϕ_L est un plongement.

On a une deuxième version du théorème de Lefschetz donnée par.

Théorème 4.1.5 *Soit X un tore complexe et L un fibré eb droites sur X.*

1) Si L a une section non identiquement nulle, alors pour tout $r \geq 2$ l'application ϕ_{L^r} est holomorphe.

2) Si L est définit positif, alors pour tout $r \geq 3$ l'application $\phi_L r$ est un plongement.

Preuve . Voir [2] ■

Exemple 4.1.6 *L'exemple de variétés abéliennes en dimension une est les courbes elliptiques, Soit $X = \mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ avec $\tau \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire strictement positif. On définit la forme hermitienne définit positif $H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par*

$$H(v, w) = \frac{v, \overline{w}}{Im(\tau)}$$

H est entière sur le réseau et définit positif donc $H \in NS(X)$ alors le couple (X, H) est une variété abélienne polarisée. Donc tout Tore en dimension une est une variété abélienne (Variété Projective).

NB : Il existe des tores de dimension $g \geqslant 2$ non abéliennes. C'est-à-dire il existe en dimension supérieur des réseaux n'admettant pas des forme hermitienne entière définit positif.

D'après l'exemple précédent on peut remarquer que la structure de variété abélienne est liée au réseau définissant le Tore complexe, La question est comment le réseau encode cette structure et la réponse est donné par les relation de Riemann.

4.2 Relations de Riemann

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension g. Fixons une $\mathbb{C}$-base $\{e_1, \dots\ e_g\}$ pour V et une $mathZ$-base $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ pour Λ et soit Π la matrice des période de X par rapport à ces bases. alors $X = \mathbb{C}^g/\Pi\mathbb{Z}^g$. On démontre dans cette section le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 *X est une variété abélienne si et seulement s'il existe une matrice non-dégénéré alternée $A \in \mathcal{M}(2g, \mathbb{Z})$ tel que :*

1) $\Pi\ A^{-1}\ {}^t\Pi = 0$

2) $i\ \Pi\ A^{-1}\ {}^t\overline{\Pi} > 0$

Soit E une forme alternée non dégénéré sur $varLambda$, on la prolonge par bilinéarité sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{C}^g$ si on note A sa matrice dans la $\mathbb{Z}$-base $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$, On définit $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\quad H(u, v) = E(iu, v) + iE(u, v)$

Lemme 4.2.2 *H une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^g$ si et seulement si $\Pi\ A^{-1}\ {}^t\Pi = 0$*

Preuve . H est hermitienne si et seulement si $E(iu, iv) = E(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^g$. On pose

$$I = \begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i\ I_g & 0 \\ 0 & -i\ I_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix}$$

La matrice I satisfait l'équation : $i\Pi = \Pi I$. Comme $E(\Pi x, \Pi y) =^t xAy\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{2g}$, alors H est une forme hermitienne si et seulement si ${}^tIAI = A$ se qui est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} i\ I_g & 0 \\ 0 & -i\ I_g \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix} A^{-1}({}^t\Pi\ {}^t\overline{\Pi}) \right)^{-1} \begin{pmatrix} i\ I_g & 0 \\ 0 & -i\ I_g \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix} A^{-1}({}^t\Pi\ {}^t\overline{\Pi}) \right)$$

En comparant les bloc de taille $g \times g$ on obtient le résultat.

■

Pour compléter la preuve du théorème on dois calculer la matrice de H dans la $\mathbb{C}$-base $e_1, \dots, e_g$

Lemme 4.2.3 *Supposons H une forme hermitienne , alors $2i(\overline{\Pi}\ A^{-1}\ {}^t\Pi)^{-1}$ est la matrice de H dans la base choisie. En particulier h définit positif si et seulement si $i\ \Pi\ A^{-1}\ {}^t\overline{\Pi} > 0$*

Preuve . On pose $u = \Pi x$ et $v = \Pi y$ avec $x, y \in \mathbb{R}^{2g}$. En utilisant le faite que $\Pi\ A^{-1}\ {}^t\Pi = 0$ on aura :

$$\begin{aligned} E(iu, v) = &\ {}^tx\ {}^tIAy = {}^t\begin{pmatrix} u \\ \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\ I_g & 0 \\ 0 & -i\ I_g \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix} A^{-1}({}^t\Pi\ \ {}^t\overline{\Pi}) \right)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ \overline{v} \end{pmatrix} \\ = &\ {}^t\begin{pmatrix} u \\ \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i(\overline{\Pi}A^{-1}\ {}^t\Pi)^{-1} \\ i(\Pi\ A^{-1}\ {}^t\overline{\Pi})^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \overline{v} \end{pmatrix} \\ = &\ i\ {}^tu(\overline{\Pi}A^{-1}\ {}^t\Pi)^{-1}\ \overline{v} - i\ {}^t\overline{u}i(\Pi\ A^{-1}\ {}^t\overline{\Pi})^{-1}v \end{aligned}$$

de la même facçon on calcule

$$E(u, v) = {}^tu(\overline{\Pi}A^{-1}\ {}^t\Pi)^{-1}\ \overline{v} + i\ {}^t\overline{u}i(\Pi\ A^{-1}\ {}^t\overline{\Pi})^{-1}v$$

alors

$$H(u, v) = E(iu, v) + iE(u, v) = 2i\ {}^tu(\overline{\Pi}A^{-1}\ {}^t\Pi)^{-1}\ \overline{v}$$

■

4.3 Espace de Modules

Dans cette section on donne une classification des variétés abéliennes de type donné à isomorphisme près en utilisant l'action du groupe symplectique réel sur le demi-espace de Siegel.

Soit $X = V/\Lambda$ une variété abélienne de polarisation H de type $D = diag(d_1, \dots, d_g)$ sur le réseau. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g$ une base symplectique de Λ par rapport a H. La matrice de la forme alternée $E = Im(H)$ dans cette base symplectique est $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. On prend comme une $\mathbb{C}$-base de V les vecteurs $\{e_j\}_{j=1,\dots,g}$ avec $e_j = \frac{1}{d_j}\mu_j$. Dans ces deux base la matrice des période de X est donné par $\Pi = (Z, D)$, où $Z \in \mathcal{M}(g, \mathbb{C})$.

Proposition 4.3.1

1) Z est symétrique et sa de partie imaginaire $Im(Z)$ est définie positive. donc $Z \in \mathbb{H}_g$

2) La matrice de la forme hermitienne H dans la base $\{e_j\}_{j=1,\dots,g}$ est $(Im(Z))^{-1}$.

La preuve de ce théorème est l'application directe des relations de Riemann.

Ce choix de la base complexe nous a permis d'associer à une variété abélienne polarisée de type D un élément dans le demi-espace de Siegel. L'étape suivante est l'opération inverse, c'est-à-dire d'associer à une matrice Z dans l'espace de Siegel une Variété abélienne de type D, à isomorphisme près. Pour le faire on procède comme suit :

Soit $Z \in \mathbb{H}_g$. On prend comme réseau dans $\mathbb{C}^g$ le groupe discret $\Lambda_Z = (Z\ D)\ \mathbb{Z}^{2g}$, le quotient $X_Z = \mathbb{C}^g/\Lambda_Z$ est un tore complexe, On le munit de la forme hermitienne H_Z donnée dans la base standard de $\mathbb{C}^g$ par la matrice $(Im(Z)^{-1})$. Donc on a associe à Z une variété abélienne polarisée. Maintenant prenant deux matrices Z et Z' dans $\mathbb{H}_g$ et (X_Z, H_Z) et (X'_Z, H'_Z) les variétés abéliennes polarisées associées. Pour qu'elles soit isomorphes il suffit qu'il existence un automorphisme F de $\mathbb{C}^g$ qui vérifie

$$F(\Lambda'_Z) = \Lambda_Z \iff A\ (Z'\ D) = (Z\ D)\ R$$

avec A la matrice de F dans la base canonique de $\mathbb{C}^g$ et R sa matrice entière dans les bases de Λ'_Z et Λ_Z correspondant aux colonnes des matrices $(Z'\ D)$ et $(Z\ D)$ respectivement.

On pose

$$M = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} R \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

qui est la matrice F dans les bases $\mathcal{B}_1 = Colonnes(Z'\ I_g)$ et $\mathcal{B}_2 = Colonnes(Z\ I_g)$ on aura la relation

$$A\ (Z'\ I_g) = (Z\ I_g)\ M$$

et si on pose ${}^tM = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, la relation précédente devient

$$A\ Z' = Z\ {}^t\alpha + {}^t\beta \ et\ A = Z\ {}^t\gamma + {}^t\delta$$

alors

$$Z' = (\alpha\ Z + \beta)(\gamma\ Z + \delta)^{-1}$$

Si F est de plus un isomorphisme entre variétés abéliennes, il conserve la forme symplectique standard dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et donc M est dans le groupe symplectique $Sp(2g, \mathbb{R})$. Plus précisément dans le groupe symplectique rationnel puisque toutes les matrices sont rationnelles. d'après la définition de M on aura que R est dans le groupe $Sp^D(2g, \mathbb{Z})$ avec

$$Sp^D(2g, \mathbb{Z}) = \left\{ R \in \mathcal{M}(2g, \mathbb{Z}) /\ R \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}\ {}^tR = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposition 4.3.2 *$\forall Z', Z \in \mathbb{H}_g$ les deux variétés abéliennes polarisées X'_Z et X_Z sont isomorphes si et seulement si il existe $M \in G_D$ tel que $Z' = (\alpha\ Z + \beta)(\gamma\ Z + \delta)^{-1}$ où*

$$G_D = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{Q}) \,/ \alpha, \beta D^{-1}, D\gamma, D\delta D^{-1} \text{ sont des matrices entières} \right\}$$

Le groupe G_D est discret, puisque est le conjuguais du groupe $Sp^D(2g, \mathbb{Z})$ dans le groupe $GL(2g, \mathbb{Q})$

$$G_D = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} Sp^D(2g, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

On déduit le corolaire suivant

Corollaire 4.3.3

D'après **l'Appendice C** *l'action de G_D, induite par l'action du groupe symplectique réel, par l'application σ_D est une action propre et discontinue.*

L'espace des modules de variétés abéliennes polarisées [2] de type D est le quotient

$$\mathcal{A}_D^g = G_D \backslash \mathbb{H}_g$$

Remarque On peut utiliser directement l'action du groupe symplectique $Sp^D(2g, \mathbb{Z})$ induite par celle de G_D à travers l'isomorphisme de groupe

$$\sigma_D : M \in Sp^D(2g, \mathbb{R}) \longmapsto M = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} R \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{Z})$$

Ou $\sigma_D(G_D) = Sp^D(2g, \mathbb{Z})$

donnée par :

$$\forall R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp^D(2g, \mathbb{R}) \quad \forall Z \in \mathbb{H}_g \quad R[Z] = (\alpha\ Z + \beta\ D)^{-1}(\delta\ Z + \gamma\ D)^{-1} D$$

le quotient $Sp^D(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g$ est isomorphe comme espace analytique à l'espace des modules de variétés abéliennes polarisées de type D ie ! :

$$Sp^D(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g \cong \mathcal{A}_D^g = G_D \backslash \mathbb{H}_g$$

En dimension 1 tout tore complexe est une variété abélienne principalement polarisée et comme le groupe symplectique coïncide avec le groupe spécial linéaire $SL(2, \mathbb{Z})$ l'espace des modules est isomorphe à $\mathbb{C}$ par le biais du j-invariant [4]

4.4 Structure Supplémentaire sur les Variétés Abéliennes

Dans cette section on munit les variétés abéliennes de structures supplémentaires et on donne leurs espaces de modules en faisant agir des sous-groupes discrets du groupe symplectique sur le demi-espace de Siegel.

2. D'après le théorème de H.Cartan $\mathcal{A}_D^g$ est un espace analytique [3]

Bases symplectique fixe

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension g muni d'une polarisation H de type $D = diag(d_1, \dots, d_g)$ donc une variété abélienne. Fixons une $\mathbb{Z}$-base symplectique $\{\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g\}$ du réseau par rapport a H et donc toute variété abélienne polarisée de type D peut être vue comme un triplet

$$(X, H, \{\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g\})$$

Inversement pour un type D fixé, on associe pour tout $Z \in \mathbb{H}_g$ sa variété abélienne polarisée de type D (X_Z, H_Z) (Section 4.3) comme choix canonique d'une base symplectique du réseau Λ_Z on prend les colonnes de la matrice $(Z \ D)$ vue dans la base canonique de $\mathbb{C}^g$ qui forme une base symplectique du réseau Λ.

Théorème 4.4.1 *L'espace des modules des variétés abéliennes polarisées de type D munies d'une base symplectique du réseau fixe est l'espace de Siegel.*

$$\mathbb{H}_g = \{Variètès\ abèliennes\ polarisèes\ de\ type\ D\ munies\ d'une\ base\ symplectique\}$$

D-Structure de Niveau

Avant de donner la définition de D-structure sur une variété abélienne on aura besoin de quelque définitions.

Définition 4.4.2
Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe et soit $L \in Pic(X)$ avec $H = c_1(L)$ on munit

$$K(H) = K(L) = \Lambda(L)/\Lambda = \ker \left\{ \begin{array}{r} \phi_L : X \longrightarrow X^\vee \\ x \longmapsto t_x^* L \bigotimes L^{-1} \end{array} \right\} \subset X$$

d'une forme alternée multiplicative noté $e^L : K(L) \times K(L) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ donnée par

$$\forall v, w \in \Lambda(L) \qquad e^L(\overline{v}, \overline{w}) = e(-2\pi \ i \ Im(v, w))$$

Théorème 4.4.3

L non-dégénéré $\implies$ e^L est non-dégénérée.

Définition 4.4.4 *On fixe un type $D = diag(d_1, \dots, d_g)$ .On pose $K(D) = \mathbb{Z}^g/D\mathbb{Z}^g \bigoplus \mathbb{Z}^g/D\mathbb{Z}^g$. On munit ce groupe d'une forme symplectique $e^D : K(D) \times K(D) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définit par :*

$$e^D(f_j, f_k) = \begin{cases} exp(-\frac{2i\pi}{d_j}) & si \quad k = j + g \\ exp(\frac{2i\pi}{d_j}) & si \quad j = g + k \\ 1 & sinon \end{cases}$$

où $\forall j \in \{1, \dots, g\}$ f_j est un générateur standard du groupe $\mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z}$.

Définition 4.4.5 ***D-Structure de Niveau sur les Variétés Abéliennes***

Soit $(X = V/\Lambda, H)$ une variété abélienne ou H est une polarisation de type D, Une D-structure sur X est la donnée d'un symplectomorphisme

$$\psi : K(H) \longrightarrow K(D)$$

qui envoi une base symplectique réduite $\{\frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \frac{\lambda_g}{d_g}, \frac{\mu_1}{d_1}, \dots, \frac{\mu_g}{d_g}\}$ du réseau Λ vers la base standard de $K(D)$. Onnote les variétés abéliennes munies d'une D-structure ψ comme un triplet (X, H, ψ)

NB : Une D-Structure sur une variété abélienne (X, L) revient à fixé une base symplectique dans le groupe $K(L)$.

D'après la classification des variétés Abélienne polarisée d'un type D muni d'une base symplectique fixe, on associe $Z \longmapsto (X_Z, H_Z, colonnes\{(Z\ D)\})$ et si en pose $colonnes\{(Z\ D)\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_g\}$ qui forme une base symplectique du réseau Λ_Z on aura l'association suivante :

$$Z \in \mathbb{H}_g \longrightarrow \left(X_Z, H_Z, \left\{\overline{\frac{\lambda_1}{d_1}}, \ldots, \overline{\frac{\lambda_g}{d_g}}, \ldots, \overline{\frac{\mu_1}{d_1}}, \ldots, \overline{\frac{\mu_g}{d_g}}\right\}\right)$$

d'après la remarque précédente est une variétés abélienne polarisée munis d'une D-structure de niveau.

Un morphisme entre variétés abéliennes polarisées munis d'une D-structure associées respectivement à $Z, Z' \in \mathbb{H}$

$$f : \left(X_{Z'}, H_{Z'}, \left\{\overline{\frac{\lambda'_1}{d_1}}, \ldots, \overline{\frac{\lambda'_g}{d_g}}, \ldots, \overline{\frac{\mu'_1}{d_1}}, \ldots, \overline{\frac{\mu'_g}{d_g}}\right\}\right) \longrightarrow \left(X_Z, H_Z, \left\{\overline{\frac{\lambda_1}{d_1}}, \ldots, \overline{\frac{\lambda_g}{d_g}}, \ldots, \overline{\frac{\mu_1}{d_1}}, \ldots, \overline{\frac{\mu_g}{d_g}}\right\}\right)$$

est un isomorphisme si et seulement si f est un isomorphisme entre variétés abéliennes et de plus

$$f\left(\overline{\frac{\lambda'_j}{d_j}}\right) = \overline{\frac{\lambda_j}{d_j}} \quad et \quad f\left(\overline{\frac{\mu'_j}{d_j}}\right) = \overline{\frac{\mu_j}{d_j}} \quad 1 \leqslant j \leqslant g$$

Si on traduit les conditions par les matrices dans les base $colonnes(Z\ I_g)$ et $colonnes(Z'\ I_g)$ on aura : $A\ (Z'\ I_g) = (Z\ I_g)\ M$ et $A(Z'D^{-1}\ D^{-1}) \equiv (ZD^{-1}\ D^{-1})\ M \quad Mod\,[(Z\ I_g)\ \mathcal{M}(2g, \mathbb{Z})]$ se qui est équivalent

$$A(Z'\ I_g) - (Z\ I_g) = (Z\ I_g)(M - I_{2g}) \in (Z\ I_g)\mathcal{M}(2g, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Donc $M - I_{2g} \in \mathcal{M}(2g, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Alors on a démonter que deux variétés abéliennes polarisée de type D munis d'une D-structure sont isomorphes si $Z' = M(Z)$ ou

$$M \in G_D(D) = \left\{ M = \begin{pmatrix} I_g + D\alpha & D\beta D \\ \gamma & I_g + \delta D \end{pmatrix} / \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{M}(g, \mathbb{Z}) \right\}$$

Le quotient

$$\mathcal{A}_D^g(D) := G_D(D) \backslash \mathbb{H}_g$$

est l'espace des modules de variétés abélienne de type D munis d'une D-structure de niveau.

L'inclusion de $G_D(D)$ dans G_D induit à travers l'identité de $\mathbb{H}_g$ une application holomorphe

$$\mathcal{A}_D^g(D) \longrightarrow \mathcal{A}_D^g.$$

n-Structure de Niveau

On peut généraliser les D-structures de niveau au structure de niveau $n > 1$ en réduisant une base symplectique fixe du réseau par n. Alors pour un type fixé D et un entier naturel non nul n ; pour tout $Z \in \mathbb{H}_g$ on associe $(X_Z, H_Z, \frac{1}{n} colonnes(Z\ D))$. Un isomorphisme entre deux variétés de se type est tout simplement un isomorphisme de variétés abéliennes envoyant la base réduite par n du réseau de départ vers la base réduite par n du réseau d'arrivée. Le même calcul pour les D-structure de niveau nous donne $M \equiv I_{2g} Mod[n]$ avec $M = \sigma_D(R)$ ou R est la matrice entière dans les base $colonne(Z\ D)$ et $colonne(Z'\ D)$

L'espace des modules de variétés abéliennes polarisées de type D munis d'une n-structure de niveau est le quotient

$$\mathcal{A}_D^g(n) = G_D(n) \backslash \mathbb{H}_g$$

5 Famille universelle et Connexion

Dans cette section on définit la famille universelle de variétés abéliennes polarisées d'un type donnée D noté $\mathcal{X}_D$ au dessus de l'espace de Siegel qui est un schéma abélien c'est a dire une surjection holomorphe ou les fibres sont des variétés abéliennes polarisées et on donne une construction d'une connexion sur cette famille à partir d'un opérateur de la chaleur.

5.1 Famille universelle de variétés abéliennes polarisées

Fixons un type $D = diag(d_1, \dots, d_g)$. On cherche à donner une application qui génère tous les réseaux associés a des éléments $Z \in \mathbb{H}_g$. Tout d'abord on pose le réseau universel

$$\Lambda_D = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{2g}$$

et $\forall Z \in \mathbb{H}_g$ on définit le $\mathbb{R}$-isomorphisme

$$\begin{aligned} J_Z : \mathbb{R}^{2g} &\longrightarrow \mathbb{C}^g \\ x &\longmapsto (Z\ I_g)x \end{aligned}$$

ou l'image Λ_D par J_Z est le réseau $(Z\ D)$ associer à Z dans $\mathbb{C}^g$. L'image de la base donnée par les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est une base symplectique du réseau $\Lambda_Z = J_Z(\Lambda_D)$.

On définit une action du réseau universel Λ_D sur l'espace $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ donnée pour tout $\lambda \in \Lambda_D$ et $(v, Z) \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ par

$$\lambda \circ (v, Z) = (v + J_Z(\lambda), Z)$$

Cette action est libre et proprement discontinue. Donc le quotient

$$\mathcal{X}_D = \Lambda_D \backslash (\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g)$$

est une variété complexe où la projection $p : \mathcal{X}_D \longrightarrow \mathbb{H}_g$ est holomorphe et pour tout $Z \in \mathbb{H}_g$ la fibre $p^{-1}(Z) = \mathbb{C}^g / J_Z(\Lambda_D)$ est un tore complexe.

L'étape suivante est de définir un fibré en droites $\mathcal{L}$ relativement ample, c'est-à-dire sa restriction sur les fibres définit une polarisation. On pose l'application

$$e_{\Lambda_D} : \Lambda_D \times (\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g) \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad e_{\Lambda_D}(\lambda, (v, Z)) = e(-\pi i\ {}^t a Z a - 2\pi i\ {}^t v a)$$

où $\lambda = (a, b) \in \mathbb{Z}^g \oplus D\mathbb{Z}^g$ définit sur $\Lambda_D \times \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ définit un facteur d'automorphi sur le produit $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$. On définit une action du réseau universel sur le fibré trivial de $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ via e_{Λ_D} et J_Z, pour tout $\lambda \in \Lambda_D$, $(v, Z) \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ et $t \in \mathbb{C}$

$$\lambda * (t, (v, Z)) = (e_{\Lambda_D}(\lambda, (v, Z))t, (v + J_Z(\lambda), Z))$$

le quotient

$$\mathcal{L} = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g) / \Lambda_D$$

est un fibré en droites sur $\mathcal{X}_D$.

Pour tout $Z \in \mathbb{H}_g$ la restriction du fibré $\mathcal{L}$ sur la fibre $X_Z = p^{-1}(Z)$ est un fibré en droites sur X_Z donné par la restriction du facteur d'automorphie e_{Λ_D} sur $\Lambda_D \times \mathbb{C}^g$ qui définit un facteur d'automorphie sur $\mathbb{C}^g$ est donc un fibré en droites sur X_Z donnée par $L = L(H_Z, \chi_0)$, comme H_Z est définie positive alors c'est une polarisation sur X_Z. Donc les fibre de p sont des variétés abéliennes. Donc la projection $p : \mathcal{X}_D \longrightarrow \mathbb{H}_g$ est un schéma abélien. De plus

$$H^0(\mathcal{X}_D, \mathcal{L}) = \{f : \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{C} / f(v + J_D(\lambda), Z) = e_{\Lambda_D}(\lambda, (v, z)) f(v, Z)\}$$

5.2 Fonctions thêta de Riemann

Dans la section (3.1) on a défini les fonctions thêta classiques comme fonctions quasi-périodique par rapport au facteur d'automorphie classique donnée pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $v \in V$ par

$$e_L(\lambda, v) = \chi(\lambda)e(\pi(H-B)(v,\lambda) + \frac{1}{2}(H-B)(\lambda,\lambda))$$

et d'après la définition de se facteur il dépend d'une décomposition du réseau. Dans cette section on définit des fonctions thêta classique dite de Riemann associée aux réseaux de type $Z\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$ pour tout Z dans l'espace de Siegel puis les généralisées aux réseaux de type D.

Soit $Z \in \mathbb{H}_g$ on lui associe le réseau $Z\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$. Alors B l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire de la restriction de H_Z à $\mathbb{R}^g$ est donnée pour $v, w \in \mathbb{C}^g$ par $B(v,w) = {}^t v(Im(Z))^{-1}w$. est donc la forme bilinéaire $(H-B)$ est donnée pour $v, w \in \mathbb{C}^g$ par $(H-B)(v,w) = -2\pi\ {}^t v w^1$ ou $w = Zw^1 + w^2$. Et pour tout fibré en droites $L = L(H,\chi)$ principalement polarisée de caractéristique réelle $c = Zc^1 + c^2$ d'après Riemann-Roch l'espace des sections est de dimension 1 engendré par la fonction thêta dite de Riemann donnée par :

$$\vartheta \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} (v, Z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} e(\pi i\ {}^t(l+c^1)Z(l+c^1) + 2\pi i\ {}^t(v+c^2)(l+c^1))$$

Les fonctions thêta de Riemann sont liée aux fonction thêta classique de caractéristique c par la formule

$$\vartheta^c(v) = e(\frac{\pi}{2}B(v,v) - \pi i\ {}^t c^1 c^2)\vartheta \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} (v, Z) \quad \forall v \in \mathcal{C}^g$$

Propriétés des fonctions thêta de Riemann Soit $Z \in \mathbb{H}_g$. alors

i) $\forall c = Zc^1 + c^2$la fonction $\vartheta \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} (-, Z)$ est une fonction thêta par rapport au réseau $Z\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$.

ii) Soit $e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} : (Z\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g) \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie pour tout $a, b \in \mathbb{Z}^g$ et $v \in \mathbb{C}^g$ par :

$$e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (Za + b, v) = e(-\pi i\ {}^t aZa - 2\pi i\ {}^t va)$$

, appelé le facteur d'automorphie du fibré en droites de caractéristique zéro par rapport au réseau $Z\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$. Alors pour $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$ un type donné, la fonction $\vartheta \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} (-, Z)$ est une fonction thêta par rapport au facteur d'automorphie $e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ par rapport au réseau $Z\mathbb{Z}^g \oplus D\mathbb{Z}^g$ si et seulement si le couple $(c^1, c^2) \in D^{-1}\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$.
Alors d'après corollaire(3.1.5) l'ensemble

$$\left\{ \vartheta \begin{bmatrix} c_j \\ 0 \end{bmatrix} (-, Z) \ ou\ c_1, \ldots, c_N \ sont\ des\ reprsentant\ dans \mathbb{Q}g\ du\ groupe\ D^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g \right\}$$

est une base des fonctions thêta du fibré en droites détermine par le facteur $e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sur le tore $X_Z = \mathbb{C}^g/(Z\mathbb{Z}^g + D\mathbb{Z}^g)$.

iii) Les fonctions thêta de Riemann $\vartheta \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$sont holomorphes sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$

Section d'une puissance k-ème d'une polarisation de type D

Soit L une polarisation de type D sur un tore $X = \mathbb{C}^g/(Z\mathbb{Z}^g \oplus D\mathbb{Z}^g)$, avec $Z \in \mathcal{H}_g$ fixe. Soit k un entier positif on cherche à décrire les sections de L^k qui est de type kD, par deux méthodes :

La Première Approche : Consiste à prendre les fonctions thêta de Riemann $\vartheta \begin{bmatrix} c_j \\ 0 \end{bmatrix}$ avec c_j des représentants du groupe $(kD)^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g = D^{-1}\mathbb{Z}^g/k\mathbb{Z}^g$.

La Deuxième Approche : Soit $\vartheta \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $c \in D^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ une fonction thêta dans le réseau $Z\mathbb{Z}^g \oplus D\mathbb{Z}^g$ on associe les applications

$$v \longmapsto \left(\vartheta \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} (kv, kZ)\right)^k$$

définies pour tout $c \in D^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ des fonctions thêta classiques du fibré en droites L^k sur X.

5.3 Opérateur de la chaleur et Connexion

Soit $\mathcal{X}$ une variété complexe et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathcal{X}$. Tout d'abord on définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le faisceau $\mathrm{Diff}^k_{\mathcal{X}}(\mathcal{L})$ des opérateurs différentielles d'ordre k sur $\mathcal{L}$ au-dessus de $\mathcal{X}$ comme le sous faisceau de $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$, où tout élément $D \in \mathrm{Diff}^k_{\mathcal{X}}(\mathcal{L})$ s'écrit localement sur un ouvert distingué $U \subset \mathcal{X}$ de $\mathcal{L}$ comme :

$$D = \sum_{|\alpha| \leq k} f_\alpha \; \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_\alpha}$$

ou $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ un multi-indice et $|\alpha| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$ et $f_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$ et $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}}$.

On donne une définition par récurrence sur k du faisceau $\mathrm{Diff}^k_{\mathcal{X}}(\mathcal{L})$ en disant que $D \in \mathrm{Diff}^k_{\mathcal{X}}(\mathcal{L})$ si pour toute section λ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ le commutateur $[\lambda, D]$ est un opérateur d'ordre $k-1$, où

$$[\lambda, D] = D\lambda - \lambda D$$

donnée pour $\forall s \in \mathcal{L}$ par

$$[\lambda, D](s) = D(\lambda s) - \lambda D(s)$$

Exemple d'opérateur d'ordre un : Soit

$$D = f + \sum_{i=1}^{g} f_j \; \frac{\partial}{\partial x_j}$$

D'après la définition il faut vérifié pour toute section λ que l'opérateur $[\lambda, D]$ est d'ordre zéro (c'est multiplication par une fonction dépendant que de λ).En effet soit λ et s deux sections de $\mathcal{L}$ alors

$$\begin{aligned} [\lambda, D](s) &= D(\lambda s) - \lambda D(s) \\ &= fs + \sum_{i=1}^{g} f_j \; \frac{\partial(\lambda s)}{\partial x_j} - fs - s \; \sum_{i=1}^{g} f_j \; \frac{\partial(s)}{\partial x_j} \\ &= s \; \sum_{i=1}^{g} f_j \frac{\partial(\lambda)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$[\lambda, D]$ est l'opérateur d'ordre zéro donnée par multiplication par la fonction $\sum_{i=1}^{g} f_j \frac{\partial(\lambda)}{\partial x_j}$.

Soit $p : \mathcal{X} \longrightarrow S$ une surjection holomorphe entre deux variétés complexe $\mathcal{X}, S$ et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathcal{X}$. On définit l'opérateurs de la chaleur sur le fibré $\mathcal{L}$ au dessus de S.

Notation :

$\forall x \in \mathcal{X}$ on prend un ouvert $V \subset \mathcal{X}$ contenant x, et un ouvert $U \subset S$ contenant $p(x)$, tel que $p(V) = U$ et des coordonnées $x_1, \ldots, x_g \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$ et $t_1, \ldots, t_r \in \mathcal{O}_S(U)$ avec $t_j \circ p = x_j$.

Définition 5.3.1 *[8]*
Un opérateur de la chaleur sur $\mathcal{L}$ au-dessus de S est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$D : p^*(\mathcal{T}_S) \longrightarrow Diff_{\mathcal{X}}^{(k)}(\mathcal{L})$$

tel que localement pour tout ouvert distingué $V \subset \mathcal{X}$ trivialisant $\mathcal{L}$ (ie : $\mathcal{L}|_V \approxeq \mathcal{O}_V$), l'opérateur $D(\frac{\partial}{\partial t_1})$ est sous la forme

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) = f + \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{g} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq g} f_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

avec $f, f_i, f_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$

On peut décrire un opérateur de la chaleur D comme un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$$D : \mathcal{T}_S \longrightarrow p_*(Diff_{\mathcal{X}}^{(k)}(\mathcal{L}))$$

satisfaisant localement la même condition.

Un opérateur de la chaleur projectif est la donnée d'un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\overline{D} : \mathcal{L} \longrightarrow p_*(Diff_{\mathcal{X}}^{(k)}(\mathcal{L})/\mathcal{O}_S$$

tel que pour tout ouvert U dans S la restriction

$$\overline{D}\Big|_U : \mathcal{T}_S\Big|_U \longrightarrow p_*(Diff_{\mathcal{X}}^{(2)}(\mathcal{L})\,|_U)$$

définit un opérateur de la chaleur au dessus de U.

On garde cette notation dans la suite. Dans cette section on utilise les opérateur de la chaleur pour définir une connexion sur le fibré en droites $\mathcal{L}$, ce qui donne un moyen de dérivation des sections de ce fibré.

Connexion et Courbure

Soit $E \longrightarrow \mathcal{X}$ un fibré vectoriel holomorphe sur la variété complexe $\mathcal{X}$. Une connexion holomorphe est un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla : \Omega^0_{\mathcal{X}}(E) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{X}}(E)$$

satisfaisant la formule de Leibnitz

$$\nabla(f\ s) = \partial(f) \otimes s + f\nabla(s)$$

pour tout sections $s \in \Omega^0_{\mathcal{X}}(E)(U), f \in \mathcal{O}_X(U)$, avec ∂ différentielle des sections locales $\mathcal{O}_X$.

Pour une connexion ∇ fixe sur un fibré vectoriel $E \longrightarrow \mathcal{X}$ on définit les opérateurs :

$$\nabla : \Omega^p_{\mathcal{X}}(E) \longrightarrow \Omega^{p+1}_{\mathcal{X}}(E)$$

En appliquant Leibnitz : $\forall \sigma \in \Omega^p(U), \forall s \in \Omega^0(E)(U)$

$$\nabla(\sigma \wedge s) = \partial(\sigma) \otimes s + (-1)^p \sigma \wedge \nabla(s)$$

La courbure d'une connexion est l'opérateur $\mathcal{O}_X$-linéaire défini par $\nabla^2 = \nabla \circ \nabla$

$$\nabla^2 : \Omega^0_{\mathcal{X}}(E) \longrightarrow \Omega^2_{\mathcal{X}}(E)$$

Satisfaisant :

$$\nabla^2(fs) = f\nabla^2(s) \qquad \forall f \in \mathcal{O}_X$$

Une section $s \in E$ est dite plate si $\nabla(s) = 0$ et une connexion est dite plate si sa courbure est nulle.

Une connexion associée à un opérateur de la chaleur

On associer à tout opérateur de la chaleur $D : \mathcal{T}_S \longrightarrow p_*(Diff^{(2)}_{\mathcal{X}}(\mathcal{L}))$ une connexion

$$\nabla(D) : p_*(\mathcal{L}) \longrightarrow p_*(\mathcal{L}) \otimes_{O_S} \Omega^1_S$$

donnée pour tout $s \in p_*(\mathcal{L})(U) = \mathcal{L}(p^{-1}(U))$ et $\partial \in \mathcal{T}_S(U)$ par $\nabla(D)(\partial)(s) := D(\partial)(s)$.

Comme $D(\partial)$ est un opérateur différentiel de second ordre sur $\mathcal{L}$ sur $p^{-1}(U)$ alors $D(\partial)(s) \in \mathcal{L}(p^{-1}(U)) = p_*(\mathcal{L})(U)$. Dans une description local de l'opérateur D on aura

$$D(\partial)(fs) = fD(\partial)(s) + \partial(f)s$$

pour toute application $f \in \mathcal{O}_S(U)$.

L'opérateur $(\partial, s) \longmapsto D(\partial)(s)$ définit une connexion.

Si l'opérateur de la chaleur est projectif la connexion est définie que localement et deux relèvement diffères par un élément de $\Omega^1_S(U)$.

Le cas des familles universelle de variétés abéliennes

Fixons un type $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$. Soit le fibré en droites universel sur la famille $\mathcal{X}_D$ $p : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{X}_D$ On cherche à définir une connexion sur le fibré en droites $p_*(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{H}_g$ pour la-quelle les sections du fibré en droites $\mathcal{L}$ sont plates en définissant un opérateur de la chaleur sur le schéma abélien $p : \mathcal{X}_D \longrightarrow \mathbb{H}_g$ muni du fibré $\mathcal{L}$.

Définissons tout d'abord un opérateur de la chaleur sur le schéma $pr_2 : \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{H}_g$ munis du fibré en droites trivial. $D : \mathcal{T}_{\mathbb{H}_g} \longrightarrow p_{r_2*}(Diff^{(2)}_{\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g}))$ Comme suit

$$D\left(\frac{\partial}{\partial Z_{jk}}\right) = \frac{\partial}{\partial Z_{jk}} + \frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}.$$

. On cherche à faire descendre cet opérateur à un opérateur de la chaleur projectif sur $\mathcal{X}_D$ munis du fibré en droites $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd} D : \mathcal{T}_{\mathbb{H}_g} \arrow[r] \arrow[dr] & p_{r_2*}(Diff^{(2)}_{\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g})) \arrow[d, "q"] \\ & p_*(Diff^{(2)}_{\mathcal{X}_D}(\mathcal{L})))/\mathcal{O}_{\mathbb{H}_g} \end{tikzcd}$$

On étudie l'opérateur différentiel d'ordre deux $D\left(\dfrac{\partial}{\partial Z_{jk}}\right)$ restreint au fibré $\mathcal{L}$ vu comme suit

$$\mathcal{L} = \left\{ f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g} \ / \ f(v + J_Z(\lambda), Z) = e_{\Lambda_D}(\lambda, (v, Z)) \ f(v, Z) \ \forall \lambda \in \Lambda_D \ \forall v \in V \right\}$$

Le but est de démontrer l'égalité suivant

$$\forall \lambda \in \Lambda_D \ \forall v \in V \ (Df)(v+J_Z(\lambda),Z) = e_{\Lambda_D}(\lambda,(v,Z)) \ D(f)(v,Z) \ \ Mod\left(Diff^{(0)}_{\mathcal{X}_D}(\mathcal{L}) \ f\right)$$

Soit $f \in \mathcal{L} \iff g(v,Z) = f(v+J_Z(\lambda),Z) = e_D(\lambda,(v,Z)) \ f(v,Z) \ \forall \lambda \in \Lambda_D \ \forall v \in V \quad (*)$
En dérivant les deux cotés on obtient les relations : pour $\lambda = l^1 + D\ l^2$ tel que $l^\nu \in \mathbb{Z}^g$

$$(**) \begin{cases} \frac{\partial(f)}{\partial v_j}(v+J_Z(\lambda),Z) & = e_{\Lambda_D}(v,Z) \ \frac{\partial f}{\partial v_j}(v,Z) - 2\ i\ \pi l^1_j \ e_{\Lambda_D} f(v,Z) \ \forall j \\ \\ \frac{\partial g}{\partial Z_{jk}}(v,Z) & = \ l^1_j \frac{\partial f}{\partial v_k}(v+J_Z(\lambda),Z) + l^1_k \ \frac{\partial f}{\partial v_j}(v+J_Z(\lambda),Z) + \frac{\partial f}{\partial Z_{jk}}(v+J_Z(\lambda),Z) \ \ \forall \ j,k. \end{cases}$$

Appliquons l'opérateur D à l'équation $(*)$ des deux cotés. On aura d'un coté

$$\begin{aligned} (Dg)(v,Z)) = l^1_j \ \frac{\partial f}{\partial v_k}(v+J_Z(\lambda),Z) + l^1_k \ \frac{\partial f}{\partial v_j}(v+J_Z(\lambda),Z) \\ + \frac{\partial f}{\partial Z_{jk}}(v+J_Z(\lambda),Z) + \frac{i}{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k}(v+J_Z(\lambda),Z) \\ = (Df)(v+J_Z(\lambda),Z) + l^1_j \frac{\partial f}{\partial v_k}(v+J_Z(\lambda),Z) + l^1_k \frac{\partial f}{\partial v_j}(v+J_Z(\lambda),Z) \\ \overset{(*)}{=} (Df)(v+J_Z(\lambda),Z) + l^1_j\left(e_{\Lambda_D}\frac{\partial f}{\partial v_k} - 2\ i\ \pi \ l^1_k \ e_D \ f\right) + l^1_k\left(e_{\Lambda_D}\frac{\partial f}{\partial v_j} - 2\ i\ \pi\ l^1_j \ e_D \ f\right) \\ = (Df)(v+J_Z(\lambda),Z) + e_{\Lambda_D}\left(l^1_j\frac{\partial f}{\partial v_k} + l^1_j\frac{\partial f}{\partial v_j}\right) - 4\ \pi\ i\ l^1_j \ l^1_k \ e_{\Lambda_D} \ f \end{aligned}$$

et de l'autre coté

$$\begin{aligned} D(e_{\Lambda_D} f) &= e_{\Lambda_D} \ \frac{\partial f}{\partial Z_{jk}} + \frac{\partial e_{\Lambda_D}}{\partial Z_{jk}} f + \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 e_{\Lambda_D}}{\partial v_j \partial v_k} f + \frac{\partial e_{\Lambda_{\Lambda_D}}}{\partial v_j}\frac{\partial f}{\partial v_k} + \frac{\partial e_{\Lambda_D}}{\partial v_k}\frac{\partial f}{\partial v_j} + e_D\frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k}\right) \\ &= e_{\Lambda_D} \ D(f) + fD(e_{\Lambda_D}) + \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\partial e_{\Lambda_D}}{\partial v_j}\frac{\partial f}{\partial v_k} + \frac{\partial e_{\Lambda_D}}{\partial v_k}\frac{\partial f}{\partial v_j}\right) \\ &= e_{\Lambda_D} \ D(f) + \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\partial e_{\Lambda_D}}{\partial v_j}\frac{\partial f}{\partial v_k} + \frac{\partial e_{\Lambda_D}}{\partial v_k}\frac{\partial f}{\partial v_j}\right) \\ &= e_{\Lambda_D} D(f) + e_{\Lambda_D}\left(l^1_j\frac{\partial f}{\partial v_k} + l^1_j\frac{\partial f}{\partial v_j}\right) \end{aligned}$$

Alors on aura :

$$(Df)(v+J_Z(\lambda),Z) = e_{\Lambda_D} D(f) + 4\ \pi i \ l^1_j \ l^1_k \ e_{\Lambda_D} \ f$$

$$D(f)(v+j_Z(l),Z)e^{-1}_{\Lambda_D} - D(f)(v,Z) = 4\ \pi i \ l^1_j \ l^1_k \ f$$

Conclusion : le calcul précédent nous a permet de voir que Df vérifier la quasi-périodicité Modulo une multiplication par une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$ qu'on voit comme opérateur différentiel d'ordre zéro. et donc modulo $Diff^{(0)}_{\mathbb{C}^g\times\mathbb{H}_g}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\}\times\mathbb{H}_\}})$ la fonction $D(f)$ vérifier la quasi-périodicité et donc est une section de $\mathcal{L}$. Donc l'opérateur$D$ descend a un opérateur de la chaleur projectif $\overline{D}$ sur la famille $\mathcal{X}_D$ munis du fibré $\mathcal{L}$ comme suit :

Soit s une section locale de $\mathcal{L}$ qui a comme pull-back f. Alors

$$\overline{D}(s)Mod(s) = D(f)Mod(f)$$

.

Donc travailler modulo s sur $\mathcal{X}_D$ cela revient à travailler modulo f sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g$.

NB On note par $\nabla(D)$ la connexion associer à $\overline{D}$.

Corollaire 5.3.2 *Les fonctions thêta de Riemann* $\vartheta\begin{bmatrix}c^1\\c^2\end{bmatrix}$ *pour tout* $(c^1,c^2)\in\begin{pmatrix}D-1 & 0\\0 & I_g\end{pmatrix}\mathbb{Z}^{2g}$ *sont des sections globales du fibré en droites* $\mathcal{L}$ *plates par rapport à la connexion* $\nabla(D)$ *associée à l'opérateur de la chaleur projectif* $\overline{D}$.

6 Appendices

Appendice A : Faisceau et Cohomologie de Čech

Définition de faisceau Soit X un espace topologique, un faisceau de groupe abélien (ou d'une structure algébrique; Anneau, module,espace vectoriel...etc) est la donnée d'un foncteur contravariant $\mathcal{F}$ de l'ensemble des ouverts de X ordonnée par l'inclusion vu comme une catégorie vers la catégorie des groupes abéliens on le traduit par les axiomes suivants :

i) $\forall U\subset X$ un ouvert $\Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ est un groupe abélien avec$\mathcal{F}(\varnothing)=\{0\}$.

les éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ on les appelle sections de $\mathcal{F}$ sur U.

ii) $\forall U\subset V\subset X$ deux ouverts il existe un morphisme dit restriction

$r_U^V:\mathcal{F}(\mathcal{V})\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$ on note $r_U^V(s)$ par $s_{|U}$ pour tout $s\in\mathcal{F}(\mathcal{V})$. avec :

$$\begin{aligned} a)\ r_U^U &= Id_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}\ (\textit{identité}).\\ b)\ \forall\ U\subset V\subset W\ \textit{on a}\ r_U^V\circ r_V^W &= r_U^W. \end{aligned}$$

si $\mathcal{F}$ satisfait que (i) et (ii) on dit que $\mathcal{F}$ est un pré-faisceau. Pour que $\mathcal{F}$ soit un faisceau on ajoute les deux axiomes :

iii) Si $s\in\mathcal{F}(\bigcup_{i\in I}U_i)$ *tel que :* $s_{|U_i}=0\ \forall i \implies s=0$ *sur* $\bigcup_{i\in I}U_i$.

iv) Si $s_i\in\mathcal{F}(U_i)$ *tel que :* $s_{j|U_i\cap U_j}=s_{i|U_j\cap U_i}\implies \exists! s\in\mathcal{F}(\bigcup_{i\in I}U_i)$ *tel que* $s_{|U_i}=s_i$.

Exemples de Faisceaux

$\mathcal{C}_X^0=$ faisceau des fonctions continues sur l'espace topologique X.
$\mathcal{O}_X=$ faisceau des fonctions holomorphes sur la variété complexe X.
$\underline{\mathbb{Z}}=$ faisceau des fonctions localement constantes sur X.

Morphismes entres faisceaux :

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X, un morphisme de faisceau $\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ est une famille de morphismes de groupe parametrisée par les ouverts de X ie :

$$(\varphi(U):\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U))_{(U\subset X\text{ ouvert})}$$

plus la compatibilité avec les restrictions ie : $r_U^{\mathcal{V}}\circ\varphi(V)=\varphi(U)\circ r_U^V$ pour tout $U\subset V$.

NB : Dès qu'on a un morphisme de faisceau on peut définir le noyau l'image et le conoyau du morphisme.et donc les suites exactes de faisceaux.

Cohomologie à coefficients dans un faisceau et cohomologie de Čech

Définition : Soit $\mathcal{F}$ un faisceau dans l'espace topologique X , on cherche à définir des groupes de cohomologie de X à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}$ noté $H^q(X, \mathcal{F})$. Pour le faire on aura besoin de quelques définitions supplémentaires et la notion de résolution des faisceaux ou bien on utilise la cohomologie de Čech.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X avec I un ensemble ordonné posons $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 \prec i_1 \prec \ldots\ldots \prec i_p} \mathcal{F}(U_{i_0,i_1,\ldots,i_p})$$

l'application bord :

$$\partial_p : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}); \quad \partial_p(s)_{i_0,i_1,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \, s_{i_0,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{p+1}} |_{U_{i_0,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{p+1}}}$$

avec : $U_{i_0,i_2,\ldots,i_p}$=$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ et comme $\partial_p \circ \ \partial_{p-1} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$ alors $(\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \partial_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est un complexe de cochaine, et le *p-éme* groupe de cohomologie est défini comme suit : $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$=$\ker(\partial_p)/Im(\partial_{p-1})$; dépendant de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U}$. pour définir un groupe indépendant du recouvrement de X on prend la limite des groupes sur tout les recouvrements possible de l'espace X : $\check{H}^p(X, \mathcal{F})$=$\underset{\mathcal{U}}{\underrightarrow{\mathcal{L}im}} \ \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

NB : Les groupes de cohomologie de X donner par une résolution du faisceau $\mathcal{F}$ dans le cas ou X est para-compact coïncide avec la cohomologie de Čech ie :

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \check{H}^p(X, \mathcal{F}).$$

Exemple de résolution de faisceau

$i)$ La cohomologie de de Rham dans le cas d'une variété différentiable X

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathcal{C}_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_X \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n_X \cdots$$

$\mathcal{A}^p_X$ =\{le faisceau des forme lisses de degré p sur X\} et d la différentielle.
alors le p-ème groupe de de Rham :

$$H^p_{DR}(X, \mathbb{R}) = \{\omega \in \Gamma(X, \mathcal{A}^p_X)/\{d\omega = 0\}\}\{d\omega \ / \ \omega \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{p-1}_X)\}$$

.

$ii)$ La résolution de Dolbeault dans le cas d'une variété complexe X du faisceau Ω^p_X :

$$0 \to \Omega^p_X \to \mathcal{A}^{p,0}_X \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}_X \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,2}_X \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots$$

$\Omega^p_X =$ faisceau des formes holomorphes de degrer p sur X
Le q-ème groupe de cohomologie de Dolbeaut a valeurs dans le faisceau Ω^p_X

$$H^q(X, \Omega^p_X) = \{\omega \in \Gamma(x, \Omega^p_X)/\partial\omega = 0\}/\{\partial\omega/\omega \in \Gamma(x, \Omega^{p-1}_X)\}$$

Appendice C L'action du groupe symplectique sur l'espace de Siegel

Définition le demi-espace de Siegel est un ouvert dans l'espace des matrice complexe symétrique donné par :

$$\mathbb{H}_g = \{Z \in \mathcal{M}(g,\mathbb{C}) \,/\quad {}^tZ = Z \quad et \quad Im(Z) \quad dèfinit\ positif\}$$

sa dimension complexe est $\frac{1}{2}g(g+1)$.

Définition Le groupe symplectique réel est le groupe des matrices conservant la forme symplectique standard ie :

$$Sp(2g,\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(2g,\mathbb{R}) /\ {}^tMJM = J\}$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$

Proposition Soit $\mathcal{R}$ un anneau commutative unitaire et $n > 1$:

1) Le groupe symplectique $Sp(2n,\mathcal{R})$ est stable par transposition.

2) Une matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{M}(n,\mathcal{R})$ les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in Sp(2g,\mathcal{R})$

ii) ${}^t\alpha\gamma$ et ${}^t\beta\delta$ sont des matrices symétrique et ${}^t\alpha\gamma -\ {}^t\beta\delta = I_g$.

iii) $\alpha\ {}^t\beta$ et $\gamma\ {}^tt\delta$ sont des matrices symétrique et $\alpha\ {}^t\beta - \gamma\ {}^tt\delta = I_g$.

On définit une action du groupe symplectique réel sur l'espace de Siegel par :

Proposition

1) le groupe symplectique $Sp(2g,\mathbb{R})$ agit biholomorphiquement sur $\mathbb{H}_g$ par :

$$\begin{array}{ccc} Sp(2g,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}_g & \longrightarrow & \mathbb{H}_g \\ (M,Z) & \longmapsto & M(Z) = (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1} \end{array}$$

avec $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

2) Cette action est transitive.

3) Tout sous groupe discret $G \subseteq Sp(2g,\mathbb{R})$ agit proprement et totalement discontinue.

Preuve

1) - Montrons que la matrice $(\gamma Z + \delta)$ est inversible En effet :

$$^t\overline{(\gamma Z + \delta)}(\alpha Z + \beta) -\ ^t\overline{(\alpha Z + \beta)}(\gamma Z + \delta) = Z - \overline{Z} = 2i\ Im(Z) \tag{6.1}$$

Soit $v \in \mathbb{C}^g$ tel que $(\gamma Z + \delta)v = 0$. Alors l'équation (6.1) implique que

$$^t\overline{v}(Im(Z))v = 0$$

donc $v=0$ puisque $Im(Z)>0$ D'où la matrice $(\gamma Z+\delta)$ est inversible.
- La symétrie de la matrice $M(Z)$:

$$^t(\gamma Z+\delta)(M(Z)-\ ^tM(Z))(\gamma Z+\delta)=Z-\ ^tZ=0$$

alors la matrice est symétrique.
- L'inégalité suivante :

$$\overline{^t(\gamma Z+\delta)}\quad Im(M(Z))\quad(\gamma Z+\delta)=Im(Z)>0$$

implique que la matrice $M(Z)$ est définie positive.

- Les axiomes d'une action se vérifie par calcul.

2) Pour montrer la transitivité de l'action il suffit de monter l'action envoie toutes les matrices vers une matrice choisie par exemple on prend la matrice iI_g :
Soit $Z=X+iY\in\mathbb{H}_g$ puisque Y est symétrique définit positif alors d'après la Factorisation de Cholesky d'une matrice il existe une matrice réelle triangulaire α telle que $Y=\ ^t\alpha\alpha$. On prend la matrice $M=\begin{pmatrix}\alpha & X\ ^t\alpha^{-1}\\ 0 & ^t\alpha^{-1}\end{pmatrix}\in Sp(2g,\mathbb{R})$ et $M(iI_g)=Z$ De plus le stabilisateur de iI_g est le groupe compact dit unitaire

$$U(g)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\in\mathcal{M}(2g,\mathbb{R})\quad/\quad\alpha\ ^t\beta=\beta\ ^t\alpha\quad et\quad\alpha\ ^t\alpha+\beta\ ^t\beta=I_g\right\}$$

$$=\left\{A\in\mathcal{M}(g,\mathbb{C})\quad/\quad A\ ^t\overline{A}=I_g\right\}$$

3) Pour monter que l'action de tout sous-groupe discret $G\subset Sp(2g,\mathbb{R})$ est proprement discontinue [ie : $card(\{M\in G/\ M(K_1)\cap K_2=\emptyset\})$ est fini $\forall K_1,K_2$ des sous ensembles compacts de $\mathbb{H}_g$], il suffit d'utiliser le fait que l'action est transitive et que l'application suivante et surjective et propre

$$\begin{aligned}h:Sp(2g,\mathbb{R})&\longrightarrow\ \mathbb{H}_g\\ M&\longmapsto M(iI_g)\end{aligned}$$

est propre. Tout d'abord les fibres de cette application ont la forme $M\cdot U(g)$. Fixons un sous groupe discret G est deux compacte de $\mathbb{H}_g$;K_1 et K_2 d'après la définition de h on a l'équivalence suivante :

$$M(K_1)\cap K_2)=\emptyset\Longleftrightarrow M\in h^{-1}(K_2)(h^{-1}(K_1))^{-1}=\{M_2M_1^{-1}/\quad M_j\in h^{-1}(K_j),j=1,2\}$$

et donc il suffit de montrer que $h^{-1}(K_2)(h^{-1}(K_1))^{-1}$ est compact dans le groupe symplectique, or $h^{-1}(K_j),j=1,2$ est compacte et comme h est propre alors $h^{-1}(K_2)(h^{-1}(K_1))^{-1}$ est compact puisque image d'un compact sous le difféomorphisme d'Iwasawa. La preuve complète est dans [1].

Références

[1] BIRKENHAKE, Christina et LANGE, Herbert. Complex abelian varieties. Springer Science and Business Media, 2013.

[2] DEBARRE, Olivier. Tores et variétés abéliennes complexes. EDP sciences, 1999.

[3] JEAN-PIERRE SERRE Géométrie algébrique et géométrie analytique Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 1-42

[4] SILVERMAN, Joseph H. Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. Springer Science and Business Media, 2013.

[5] LIPMAN, Joseph, et al. Phillip Griffiths and Joseph Harris, Principles of algebraic geometry. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1980, vol. 2, no 1, p. 197-200.

[6] D.Mumford, Abelian varities

[7] HUYBRECHTS, Daniel. Complex geometry : an introduction. Springer Science & Business Media, 2006.

[8] VAN GEEMEN BERT, B. et DE JONG, A. J. On Hitchin's Connection. 1998.