Assignment 3

183139-耿冬冬

2019 年 5 月 29 日

1

因为 x_1 和 x_2 为 0 或 1，所以 $x_1^2 = x_1, x_3^3 = x_3$。
所以 $z = x_1^2 + x_2x_3 - x_3^3 = x_1 + x_2x_3 - x_3$，令 $y_1 = x_2x_3$，则有：

$$\begin{cases} y_1 \le x_1 \\ y_1 \le x_2 \\ y_1 \ge x_1 + x_2 - 1 \\ y_1 \ge 0 \end{cases}$$

于是有：

$$\max z = x_1 + y_1 - x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3 \\ y_1 \le x_1 \\ y_1 \le x_2 \\ y_1 \ge x_1 + x_2 - 1 \\ y_1 \ge 0 \\ x_1, x_2, y_1 = 0, 1 \end{cases}$$

2

(1) 松弛整数条件解得：$x_1 = 0.0769, x_2 = 7, x_3 = 0, x_4 = 0.6154, z = 22.3846$，所以 $0 \le z < 22.3846$。
分支：$x_1 \le 0$ 和 $x_1 \ge 1$
当 $x_1 \le 0$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = 0, x_4 = \frac{2}{3}, z = 22.33$。
当 $x_1 \ge 1$ 时，解得：$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 2, z = 18$。
定界：$18 \le z < 22.33$。
分支：$x_4 \le 0$ 和 $x_4 \ge 1$
当 $x_4 \le 0$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 0, z = 21.667$。
当 $x_4 \ge 1$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 6.5, x_3 = 0, x_4 = 1, z = 21.5$。
定界：$18 \le z < 21.5$。
分支：$x_2 \le 6$ 和 $x_2 \ge 7 \quad (x_4 \ge 1) \qquad x_3 \le 0$ 和 $x_3 \ge 1 \quad (x_4 \le 0)$
当 $x_2 \le 6$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = \frac{4}{3}, z = 20.667$。
当 $x_2 \ge 7$ 时，No solution exists。
当 $x_3 \le 0$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = 0, x_4 = 0, z = 21$。
当 $x_3 \ge 1$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 6.5, x_3 = 1, x_4 = 0, z = 20.5$。
所以最优解为 $x = (0, 0, 7, 0)^T, z^\star = 21$。

(2) 松弛整数条件解得：$x_1 = 3.5, x_2 = 1.8, z = 5.3$，所以 $0 \leq z < 5.3$。
分支：$x_1 \leq 3$ 和 $x_1 \geq 4$
当 $x_1 \leq 3$ 时，解得：$x_1 = 3, x_2 = 2, z = 5$, 所以 $5 \leq z < 5.3$。
当 $x_1 \geq 4$ 时，解得：$x_1 = 4, x_2 = 1.2, z = 5.2$。
因为 x_1　x_2 都为整数，所以 $z^\star = 5, x = (3,2)^T$。

```
prob2_1=cplex.Cplex()
prob2_1.read("2_1.lp")
prob2_1.solve()
print(prob2_1.solution.get_objective_value())
print(prob2_1.solution.get_values())
```

3

使用 cplex-python 求解。

```
prob3=cplex.Cplex()
prob3.read("3.lp")
prob3.solve()
print(prob3.solution.get_objective_value())
print(prob3.solution.get_values())
```

3.lp 文件内容如下：

```
Minimiz
obj: 3 x1 + 4 x2
Subject To
3 x1 + x2 >= 4
x1 + 2 x2 >= 4
Bounds
x1 >= 0
x2 >= 0
Integers
x1
x2
End
```

解得最优解：$x_1 = 2, x_2 = 1, z^\star = 10$。

4

隐枚举法
显然 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ 符合约束条件，此时 $z = 2$，于是增加约束条件：

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2$$

因此最优解有 $X = (0, 0, 1), z = 2$。

(x_1,x_2,x_3)	约束条件				条件	z
	ⓞ	①	②	③		
(0,0,0)	0	0	0		×	
(0,0,1)	2	3	3	1		2
(0,1,0)	3				×	
(0,1,1)	5				×	
(1,0,0)	4				×	
(1,0,1)	6				×	
(1,1,0)	7				×	
(1,1,1)	9				×	

5

设 x_i 为城市 i 是否有加油站，则有 $x_i = 1, 0 \quad i = 1, 2 \dots 6$。设 c_{ij} 为城市 i 到城市 j 的距离，则有：

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 30 & 20 \\ 10 & 0 & 25 & 35 & 20 & 10 \\ 20 & 25 & 0 & 15 & 30 & 20 \\ 30 & 35 & 15 & 0 & 15 & 25 \\ 30 & 20 & 30 & 15 & 0 & 14 \\ 20 & 10 & 20 & 25 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

由题可得：

$$\min z = \sum_i^6 x_i$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_6 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_i = 0, 1 \quad i = 1, 2 \dots 6 \end{cases}$$

6

错误

设 x_{ij} 为 component i 在 work station j 上加工完成。

$t = [9, 3, 5, 7, 3, 8]^T$ 根据题意可得：

$$\min z = j$$

$$\begin{cases} \sum_1^6 t_i * x_{ij} \leq 16 \quad j = 1, 2 \dots j \\ \sum_1^j x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2 \dots 6 \\ x_{2s} * x_{3t} - x_{2t} * x_{3s} \geq 0 \quad 0 \leq s < t \leq j \\ x_{4s} * x_{6t} - x_{4t} * x_{6s} \geq 0 \quad 0 \leq s < t \leq j \\ x_{1s} * x_{5t} - x_{1t} * x_{5s} \geq 0 \quad 0 \leq s < t \leq j \\ x_{3s} * x_{5t} - x_{3t} * x_{5s} \geq 0 \quad 0 \leq s < t \leq j \\ x_{ij} = 0, 1 \end{cases}$$

7

(1) 设每种类型为 $x_i, i = 1, 2, 3$

$$\max z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 22 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad integers \end{cases}$$

(2)

$$\max z = 26x_1 + 30x_2 + 19x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 33 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 37 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad integers \end{cases}$$

单纯型表如下：由表可知 $x_1 = 0, x_2 = \frac{33}{6}, x_3 = 0, z = 165$，可得 $0 \leq z^\star < 165$。

			26	30	19	0	0	
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	33	6	[6]	5	1	0	
0	x_5	37	4	6	7	0	1	
$c_j - z_j$			26	39	19	0	0	
30	x_2	$\frac{33}{6}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	
0	x_5	4	2	0	2	-1	1	
$c_j - z_j$			-4	0	-6	-5	0	

分支：$x_2 <= 5$ 和 $x_2 >= 6$

当 $x_2 \leq 5$ 时，解得：$x_1 = 0.5, x_2 = 5, x_3 = 0, z = 163$。

当 $x_1 \geq 6$ 时，解得：No solution exists。

定界：$0 << z^\star < 163$

分支：$x_1 \leq 0$ 和 $x_1 \geq 1$

当 $x_1 \leq 0$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0.6, z = 161.4$。

当 $x_1 \geq 1$ 时，解得：$x_1 = 1, x_2 = 4.5, x_3 = 0, z = 161$。

分支：$x_3 \leq 0$ 和 $x_3 \geq 1 \quad (x_1 \leq 0) \qquad x_2 \leq 4$ 和 $x_2 \geq 5 \quad (x_1 \geq 1)$

当 $x_3 \leq 0$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0, z = 150$。

当 $x_3 \geq 1$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 4.67, x_3 = 1, z = 159$。

当 $x_2 \leq 4$ 时，解得：$x_1 = 1.5, x_2 = 4, x_3 = 0, z = 159$。

当 $x_2 \geq 5$ 时，解得：No solution exists。

定界：$150 \leq z^\star < 159$

分支：$x_2 \leq 4$ 和 $x_2 \geq 5 \quad (x_1 \leq 0 \quad x_3 \geq 1) \qquad x_1 \leq 1$ 和 $x_1 \geq 2 \quad (x_1 \geq 1 \quad x_2 \leq 4)$

当 $x_2 \leq 4$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 1.8, z = 154.2$。

当 $x_2 \geq 5$ 时，解得：No solution exists。

当 $x_1 \leq 1$ 时，解得：$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 0.6, z = 157.4$。

当 $x_1 \geq 2$ 时，解得：$x_1 = 2, x_2 = 3.5, x_3 = 0, z = 157$。

定界：$150 \leq z^\star < 154.2$

分支：$x_3 \leq 1$ 和 $x_3 \geq 2 \quad (x_1 \leq 0 \quad x_3 \geq 1 \quad x_2 \leq 4)$

当 $x_3 \leq 1$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 1, z = 139$。

当 $x_3 \geq 2$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 3.83, x_3 = 2, z = 153$。
定界：$150 \leq z^\star < 153$
分支：$x_2 \leq 3$ 和 $x_2 \geq 4 \quad (x_1 \leq 0 \quad x_3 \geq 1 \quad x_2 \leq 4 \quad x_3 \geq 2)$
当 $x_2 \leq 3$ 时，解得：$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2.714, z = 141.57$。
当 $x_2 \geq 4$ 时，解得：No solution exists。
综上最优解为 $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0$。

8

设 x_i 为 location i 处是否安装 telephone，则有 $x_i = 1,2 \quad i = 0,1\ldots 8$。
根据题意可得：

$$\min z = \sum_{i}^{8} x_i$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_6 \geq 1 \\ x_4 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_4 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_i = 0,1 \quad i = 1,2\ldots 8 \end{cases}$$

9

指派问题
设 x_{ij} 为 worker i 去做 job j，则有 $x_{ij} = 0$ 或 1。
根据题意可得：

$$\min z = \sum_{i}^{10} \sum_{j}^{10} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_i^{10} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2\ldots 10 \\ \sum_j^{10} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2\ldots 10 \\ x_{ij} = 0,1 \quad i,j = 1,2\ldots 10 \end{cases}$$