概率论与数理统计核心公式速记手册

1. 一、正态分布 N(μ,σ²)

1.1 概率密度函数

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

记忆技巧：

- 分母：$\sqrt{2\pi}\sigma$ （标准化常数）
- 指数：$-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ （距离平方除以2倍方差）

1.2 分布函数

$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

标准正态分布： $Z \sim N(0,1)$，记为 $\Phi(z)$

1.3 均值与方差

- **均值：** $E(X) = \mu$
- **方差：** $Var(X) = \sigma^2$

---

2. 二、常见离散分布

2.1 1. 泊松分布 P(λ)

- **概率函数：** $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$
- **均值：** $E(X) = \lambda$
- **方差：** $Var(X) = \lambda$
- **记忆：** 泊松分布的均值和方差都等于参数λ

2.2 2. 二项分布 B(n,p)

- **概率函数：** $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- **均值：** $E(X) = np$
- **方差：** $Var(X) = np(1-p)$

2.3 3. 几何分布 G(p)

- **概率函数：** $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, k = 1, 2, \ldots$
- **均值：** $E(X) = \frac{1}{p}$
- **方差：** $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

---

3. 三、常见连续分布

3.1 1. 指数分布 Exp(λ)

- **概率密度函数：** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$
- **分布函数：** $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$
- **均值：** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- **方差：** $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- **记忆：** 指数分布的均值是λ的倒数

3.2 2. 均匀分布 U(a,b)

- **概率密度函数：** $f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$
- **分布函数：** $F(x) = \frac{x-a}{b-a}, a < x < b$
- **均值：** $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- **方差：** $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

3.3 3. 伽马分布 Γ(α,β)

- **概率密度函数：** $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
- **均值：** $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$
- **方差：** $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

---

4. 四、三大分布

4.1 1. 卡方分布 $\chi^2(n)$

- **概率密度函数：** $f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, x > 0$
- **均值：** $E(X) = n$
- **方差：** $Var(X) = 2n$
- **记忆：** 自由度为n，方差是均值的2倍

4.2 2. t分布 t(n)

- **概率密度函数：** $f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
- **均值：** $E(X) = 0$ (当n>1时)
- **方差：** $Var(X) = \frac{n}{n-2}$ (当n>2时)
- **记忆：** 当n→∞时，t分布趋于标准正态分布

4.3 3. F分布 F(m,n)

- **均值：** $E(X) = \frac{n}{n-2}$ (当n>2时)
- **方差：** $Var(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ (当n>4时)

---

5. 五、区间估计与假设检验

5.1 1. 单个正态总体均值μ的置信区间

σ²已知：
$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

σ²未知：
$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

5.2 2. 单个正态总体方差σ²的置信区间

$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

5.3 3. 两个正态总体均值差的置信区间

方差已知且相等：
$(\bar{X}-\bar{Y}) \pm z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

方差未知但相等：
$(\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

其中：$S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

5.4 4. 常用检验统计量

5.4.1 单样本t检验

$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

5.4.2 两样本t检验（等方差）

$t = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$

5.4.3 方差检验（F检验）

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

5.4.4 卡方拟合优度检验

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(k-1-r)$

---

6. 六、记忆技巧总结

6.1 1. 模式识别

- **正态分布：** 钟形曲线，指数部分总是负的平方形式
- **指数分布：** 单调递减，"无记忆性"
- **泊松分布：** 均值=方差=λ

6.2 2. 参数关系

- **卡方分布：** 方差=2×均值
- **t分布：** 当自由度→∞时趋于标准正态
- **F分布：** 两个卡方分布的比值

6.3 3. 口诀记忆

- **置信区间公式：** "估计值 ± 临界值 × 标准误"
- **检验统计量：** "观测值与理论值的差除以标准误"

6.4 4. 实际应用联想

- **泊松分布：** 单位时间内事件发生次数
- **指数分布：** 等待时间
- **正态分布：** 测量误差、自然现象