姓名：周韧哲　　学号：181220076　　邮箱：zhourz@smail.nju.edu.cn

一. 求图 一所示各信号的拉普拉斯变换。

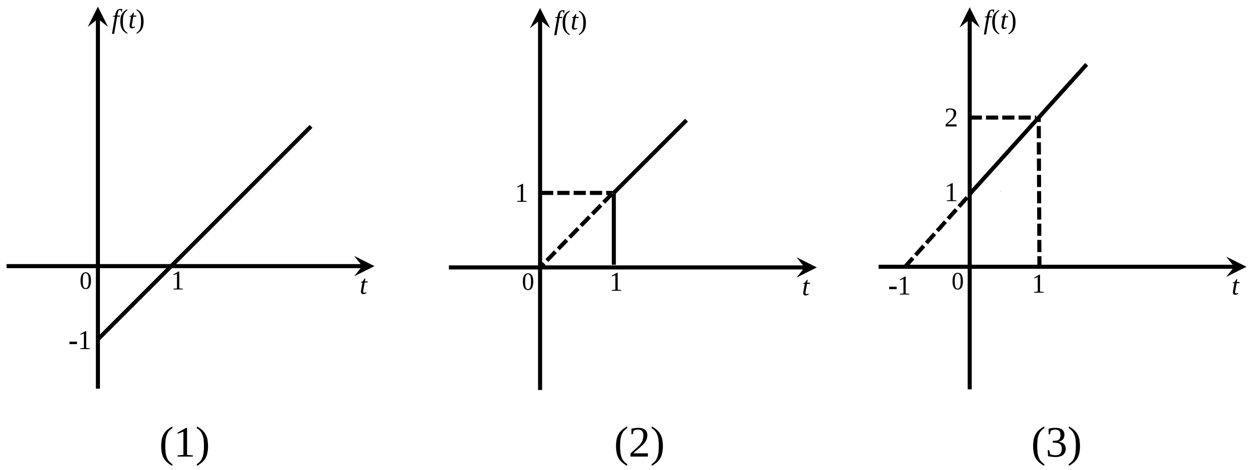

Figure 1: 第一题图

解：

(1) 易知 $x(t)=t-1, t\geq 0$，从而

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t)] &= \int_{0_-}^{\infty}(t-1)e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}\int_{0_-}^{\infty}(t-1)de^{-st} \\ &= -\frac{1}{s}[(t-1)e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty}e^{-st}d(t-1)] \\ &= -\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

因为 $\lim_{t\to\infty}x(t)e^{-\sigma t}=0, \sigma>0$，所以收敛条件为 $\sigma>0$。

(2) 易知 $x(t)=t,t>1$，从而

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t)] &= \int_1^{\infty} te^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}\int_1^{\infty} tde^{-st} \\ &= -\frac{1}{s}[te^{-st}\big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} e^{-st}dt] \\ &= (\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2})e^{-s}\end{aligned}$$

因为 $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\sigma t}=0,\sigma>0$，所以收敛条件为 $\sigma>0$。

(3) 易知 $x(t)=t+1,t\geq 0$，从而

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} (t+1)e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}\int_{0_-}^{\infty} (t+1)de^{-st} \\ &= -\frac{1}{s}[(t+1)e^{-st}\big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} e^{-st}d(t+1)] \\ &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

因为 $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\sigma t}=0,\sigma>0$，所以收敛条件为 $\sigma>0$。

二. 求图 二所示信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变化 $F(s)$.

解：

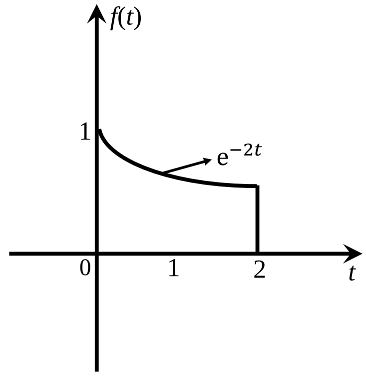

Figure 2: 第二题图

易知 $x(t)=e^{-2t}, 0\le t\le 2$，所以

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt \\ &= \int_{0_-}^{2} e^{-(2+s)t}dt \\ &= \frac{1}{2+s}(1-e^{-2(s+2)}) \end{aligned}$$

三. 某系统函数 $H(s)=\frac{1}{s^2+3s+1}$，若输入 $x(t)=u(t)$，求出系统的零状态响应 $y(t)$。

解:

激励信号的拉普拉斯变换为 $X(s)=\frac{1}{s}, Re(s)>0$，由系统函数的定义易知，零状态响应的拉氏变换为

$$Y_{zs}(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+s}=\frac{1}{s(s+\frac{3+\sqrt{5}}{2})(s+\frac{3-\sqrt{5}}{2})}$$

使用部分分式展开法，得到

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s}+\frac{\frac{2}{5+3\sqrt{5}}}{s+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{\frac{2}{5-3\sqrt{5}}}{s+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

对上式进行拉式反变换得到

$$y(t) = u(t) + \frac{2}{5+3\sqrt{5}}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}u(t) + \frac{2}{5-3\sqrt{5}}e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}u(t)$$

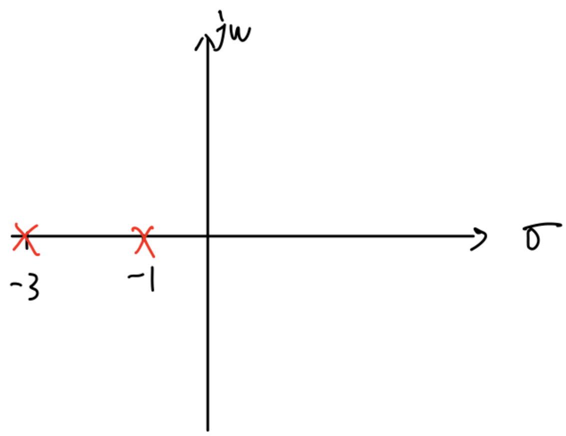

Figure 3: 零极点图

四. 已知某线性时不变系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 3y(t) = 2x(t)$。

(1) 求该系统的系统函数，画出零极点图并判断该系统是否稳定。

(2) 求该系统的冲激响应.

解：

(1) 对微分方程两边进行 LT，$(s^2+4s+3)Y_{zs}(s) = 2X(s)$，从而系统函数 $H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2+4s+3} = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$。零极点图为三。极点都位于 s 左半平面，所以该系统稳定。

(2) $H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$，进行拉氏反变换，得到系统的冲激响应为 $h(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$。

五. 求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=\begin{cases}\sin(\omega t) & 当\left(0<t<\frac{T}{2}\right) \\ 0 & t为其他值\end{cases}$

$T=\frac{2\pi}{\omega}$

(2) $f(t)=\sin(\omega t+\phi)$

解：

(1) 易得

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin(wt)(u(t)-u(t-\frac{T}{2}))\\&=\sin(wt)u(t)-\sin(wt)u(t-\frac{T}{2})\\&=\sin(wt)u(t)+\sin(wt-\pi)u(t-\frac{T}{2})\\&=\sin(wt)u(t)+\sin(w(t-\frac{T}{2}))u(t-\frac{T}{2})\end{aligned}$$

所以由时移特性得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)]&=\mathcal{L}[\sin(wt)u(t)]+\mathcal{L}[\sin(w(t-\frac{T}{2}))u(t-\frac{T}{2})]\\&=\frac{w}{s^2+w^2}+\frac{w}{s^2+w^2}e^{-\frac{sT}{2}}\\&=\frac{w}{s^2+w^2}(1+e^{-\frac{sT}{2}})\end{aligned}$$

(2) 易得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)]&=\mathcal{L}[\sin(wt+\phi)]\\&=\mathcal{L}[\sin(wt)\cos\phi]+\mathcal{L}[\cos(wt)\sin\phi]\\&=\frac{w}{s^2+w^2}\cos\phi+\frac{s}{s^2+w^2}\sin\phi\\&=\frac{w\cos\phi+s\sin\phi}{s^2+w^2}\end{aligned}$$

六. 求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t-2)$

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$
(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t)$
(4) $f(t)=\sin(2t)\cdot u(t-1)$
(5) $f(t)=(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$

解:

(1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[e^{-2}e^{-(t-2)}u(t-2)] \\ &= e^{-2}\int_{0_-}^{\infty} e^{-(t-2)}u(t-2)e^{-st}dt \\ &= \int_{2}^{\infty} e^{-t-st}dt \\ &= \frac{1}{1+s}e^{-2(1+s)}\end{aligned}$$

(2)

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^2\mathcal{L}[e^{-t}u(t-2)] = \frac{1}{1+s}e^{-2s}$$

(3)

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^2\mathcal{L}[e^{-t}u(t)] = \frac{1}{1+s}e^{2}$$

(4) 由 $f(t)=\sin(2(t-1)+2)u(t-1)=\sin(2(t-1))\cos 2u(t-1)+\cos(2(t-1))\sin 2u(t-1)$ 易得:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \cos 2\mathcal{L}[\sin(2(t-1))u(t-1)] + \sin 2\mathcal{L}[\cos(2(t-1))u(t-1)] \\ &= \frac{2\cos 2}{s^2+4}e^{-s} + \frac{s\sin 2}{s^2+4}e^{-s} \\ &= \frac{2\cos 2 + s\sin 2}{s^2+4}e^{-s}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] - \mathcal{L}[(t-2)u(t-2)] - \mathcal{L}[u(t-2)] \\ &= \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-2s} \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}(1-(1+s)e^{-s})\end{aligned}$$

七. 求下列函数的拉普拉斯逆变换。

(1) $\frac{1}{s+1}$

(2) $\frac{4}{2s+3}$

(3) $\frac{4}{s(2s+3)}$

(4) $\frac{3}{(s+4)(s+2)}$

(5) $\frac{1}{s^2-3s+2}$

(6) $\frac{1}{(s^2+3)^2}$

解:

(1)

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{1+s}] = e^{-t}u(t)$$

(2)

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{2s+3}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s+\frac{3}{2}}] = 2e^{-\frac{3}{2}t}u(t)$$

(3) 由部分分式展开得到 $\frac{4}{s(2s+3)} = \frac{\frac{4}{3}}{s} - \frac{\frac{4}{3}}{s+\frac{3}{2}}$，所以

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{s(2s+3)}] = \frac{4}{3}u(t) - \frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}t}u(t) = \frac{4}{3}u(t)[1-e^{-\frac{3}{2}t}]$$

(4) 由部分分式展开得到 $\frac{3}{(s+4)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{s+2} - \frac{\frac{3}{2}}{s+4}$，所以

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{(s+4)(s+2)}] = \frac{3}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t) = \frac{3}{2}u(t)[e^{-2t}-e^{-4t}]$$

(5) 由部分分式展开得到 $\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$，所以

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2-3s+2}]=e^{2t}u(t)-e^{t}u(t)=u(t)[e^{2t}-e^{t}]$$

(6) 由于

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+3)^2}]=\frac{1}{2\sqrt{3}}t\sin Kt$$

由拉式变换的积分特性可得

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+3)^2}]=\int_0^t\frac{1}{2\sqrt{3}}\tau\sin(\sqrt{3}\tau)d\tau=\frac{\sqrt{3}}{18}\sin(\sqrt{3}t)-\frac{t}{6}\cos(\sqrt{3}t)$$

八. 离散系统的差分方程为 $y[n]-2y[n-1]=x[n]$, 激励 $x[n]=3^nu[n], y[0]=2$，求响应 $y[n]$。

解:

将差分方程两边进行单边 Z 变换得:

$$Y(z)-2z^{-1}Y(z)-2y[-1]=\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

易知 $y[0]-2y[-1]=x[0]=1$，所以 $y[-1]=\frac{1}{2}$，$Y(z)=\frac{z(2z-3)}{(z-3)(z-2)}$，由部分分式法得 $Y(z)=\frac{1}{2z^{-1}-1}+\frac{3}{1-3z^{-1}}$，从而

$$y[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}=(-2^n+3^{n+1})u[n]$$

九. 已知离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 的 z 变换为 $\frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$，利用 z 变换的性质求信号 $n^2u[n]$ 的 z 变换。

解:

由 z 域微分特性易知

$$\mathcal{Z}\{nu[n]\}=-z\frac{d\frac{1}{1-z^{-1}}}{dz}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

从而

$$\mathcal{Z}\{n \cdot nu[n]\} = -z\frac{d\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}{dz} = -z\frac{-(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

十. 求下列序列的 z 变换 $X(z)$，并标明收敛域，绘出 $X(z)$ 的零极点分布图。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(2) $\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[n]$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

(6) $\delta[n] - \frac{1}{8}\delta[n-3]$

解：

以下的零极点分布图均见。

(1) $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，ROC=$\frac{1}{2}$。

(2) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$，ROC=$\frac{1}{4}$。

(3) 因为 $(\frac{1}{3})^{-n}u[n] = 3^n u[n]$，所以 $X(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}$，ROC=3。

(4) 首先有 $u[n] - u[n-10]$ 的 z 变换为 $X_1(z) = \frac{1-z^{-10}}{1-z^{-1}}$，所以 $X(z) = X_1(2z) = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}}$，ROC=$\frac{1}{2}$。

(5) $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$，ROC=$\frac{1}{2}$。

(6) $X(z) = 1 - \frac{1}{8}z^{-3}$，ROC=0。

十一. 求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x[n]$。

(1) $X(z) = \frac{10}{(1-0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})}, (|z| > 0.5)$

(2) $X(z)=\frac{10z^2}{(z-1)(z+1)},(|z|>1)$

解:

(1) 由部分分式分解可得 $X(z)=\frac{20}{1-0.5z^{-1}}-\frac{10}{1-0.25z^{-1}}$，从而

$$x[n]=(20\cdot(\frac{1}{2})^n-10\cdot(\frac{1}{4})^n)u[n]$$

(2) 由部分分式分解易得 $X(z)=\frac{5}{1-z^{-1}}+\frac{5}{1+z^{-1}}$，从而

$$x[n]=5\cdot(1+(-1)^n)u[n]$$

十二. 求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x[n]$。

(1) $X(z)=\frac{z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2},(|z|>6)$

(2) $X(z)=\frac{z^{-2}}{1+z^{-2}},(|z|>1)$

解:

(1) 易得 $X(z)=\frac{1}{6}\frac{6z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2}$，所以

$$x[n]=\frac{n}{6}6^nu[n]$$

(2) 易得 $X(z)=1-\frac{1}{1+z^{-2}}=1-\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\frac{\pi}{2}+z^{-2}}$，所以

$$x[n]=\delta[n]-\cos(\frac{\pi}{2}n)u[n]$$

十三. 用单边 z 变换解下列差分方程。

(1) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n],y[0]=1,y[1]=2$

(2) $y[n]+0.1y[n-1]-0.02y[n-2]=10u[n],y[-1]=4,y[-2]=6$

(3) $y[n]=-5y[n-1]+nu[n],y[-1]=0$

解：

(1) 对差分方程两边做 z 变换得到

$$z^2(Y(z)-y[0]-y[1]z^{-1})+z(Y(z)-y[0])+Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

从而

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{\frac{1}{3}}{z-1}+\frac{-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\frac{2\pi}{3})}{z^2+z+1}+\frac{\frac{2}{3}(z+\frac{1}{2})}{z^2+z+1}$$

所以

$$y[n]=[\frac{1}{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\frac{2n\pi}{3})+\frac{2}{3}\cos(\frac{2n\pi}{3})]u[n]$$

(2) 对差分方程两边做 z 变换得到

$$Y(z)+0.1(z^{-1}Y(z)+4)-0.02(z^{-2}Y(z)+6+4z^{-1})=\frac{10}{1-z^{-1}}$$

从而

$$Y(z)=\frac{9.26}{1-z^{-1}}+\frac{0.66}{1+0.2z^{-1}}-\frac{0.2}{1-0.1z^{-1}}$$

所以

$$y[n]=(9.26+0.66(-0.2)^n-0.2(0.1)^n)u[n]$$

(3) 对差分方程两边做 z 变换得到

$$Y(z)+5z^{-1}Y(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

从而

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)}=\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{\frac{5}{36}}{1-z^{-1}}-\frac{\frac{5}{36}}{1+5z^{-1}}$$

所以

$$y[n]=(\frac{n}{6}+\frac{5}{36}-\frac{5}{36}(-5)^n)u[n]$$

十四.（选做）你对这门课程的建议。

解：

在此作答。