一. 本题所提的关系式在很多场合都会遇到:

1. 证明下面的表示式成立:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}N, & \alpha=1\\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \text{任意复数}\alpha\neq 1\end{cases}$$

该式子常称为有限项和公式。

2. 证明: 若 $|\alpha|<1$, 则:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}$$

该式子常称为无限项和公式。

3. 证明: 若 $|\alpha|<1$, 则:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

4. 假设 $|\alpha|<1$, 求:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n$$

解:

1. 当 $\alpha=1$ 时, $\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$。
   当 $\alpha\neq 1$ 时, 令

$$S_N=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n$$

   则 $\alpha S_N=\sum_{n=1}^{N}\alpha^n$ 于是

$$S_N-\alpha S_N=1-\alpha^N$$

   又因为 $\alpha\neq 1$, 所以

$$S_N=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

2. 当 $|\alpha| < 1$ 时，有 $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

3. 对

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

两边求导，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

两边同时乘以 α，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

4. 注意到

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n$$

而 $\sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$，从而

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$$

二. 给出下列各时间函数的波形图，注意它们的区别：

(1) $f_1(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t)$

(2) $f_2(t) = \sin\left[\omega(t-t_0)\right] \cdot u(t)$

(3) $f_3(t) = \sin\left[\omega(t)\right] \cdot u(t-t_0)$

(4) $f_4(t) = \sin\left[\omega(t-t_0)\right] \cdot u(t-t_0)$

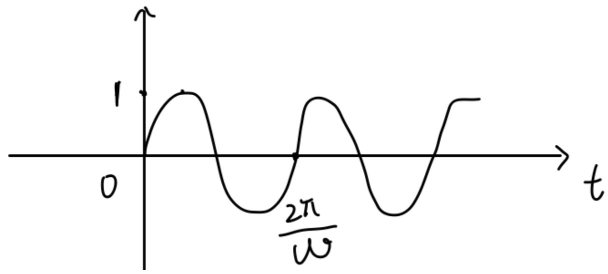

Figure 1: $f_1(t)$ 波形图

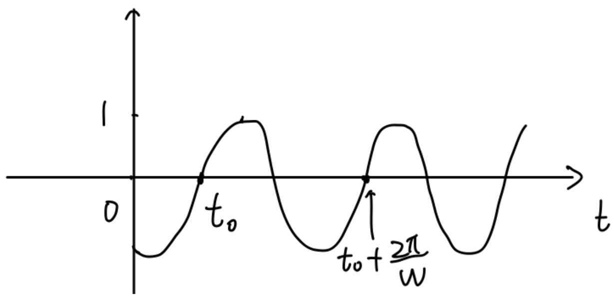

Figure 2: $f_2(t)$ 波形图

解：

(1) 如图 1

(2) 如图 2

(3) 如图 3

(4) 如图 4

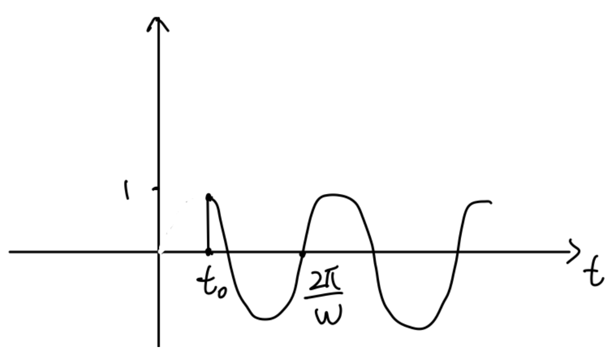

Figure 3: $f_3(t)$ 波形图

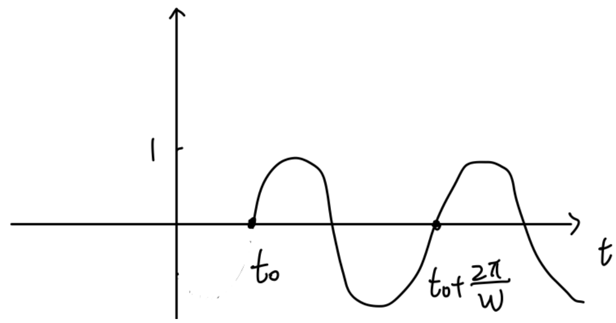

Figure 4: $f_4(t)$ 波形图

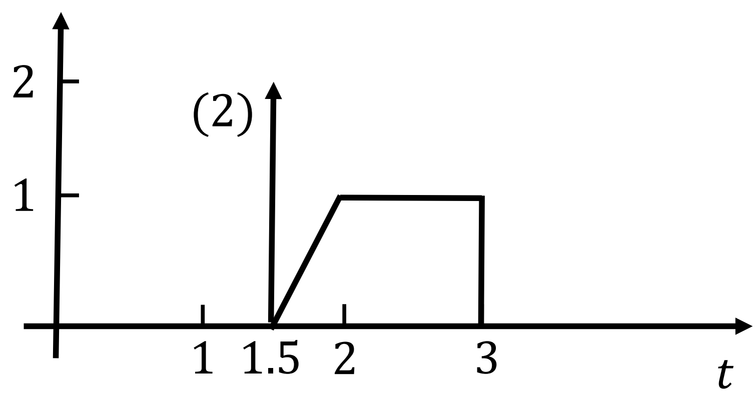

Figure 5: $f(5-2t)$ 波形图

三. 已知 $f(5-2t)$ 的波形如图 5所示，画出 $f(t)$ 的波形图。

解：
$f(5-2t)=f(-2(t-\frac{5}{2}))$，将原图像左移 $\frac{5}{2}$ 得到 $f(-2t)$ 的图像，再翻转得到 $f(2t)$ 的图像，再扩展到原来的 2 倍得到 $f(t)$ 的图像如图 6：

四. 分别求下列周期信号的周期 T：

(1) $\cos(10t)-\cos(30t)$

(2) e^{j10t}

(3) $[5\sin(8t)]^2$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[u(t-nT)-u(t-nT-T)\right]$($n$ 为正整数)

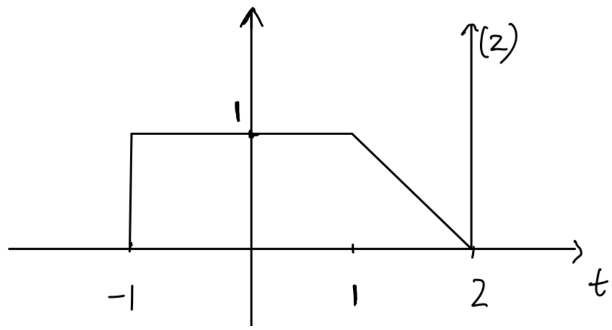

Figure 6: $f(t)$ 波形图

解:

(1) $\cos(10t)$ 的周期是 $T_1=\frac{\pi}{5}$，$\cos(30t)$ 的周期是 $T_2=\frac{\pi}{15}$，$\frac{T_1}{T_2}=3$，所以原周期信号的周期 $T=\frac{\pi}{5}$。

(2) $e^{j10t}=\cos(10t)+j\sin(10t)$，$cos(10t)$ 和 $jsin(10t)$ 的周期均为 $\frac{\pi}{5}$，所以原周期信号的周期 $T=\frac{\pi}{5}$。

(3) $[5\sin(8t)]^2=\frac{25}{2}-\frac{25\cos(16t)}{2}$，所以原周期信号的周期 $T=\frac{\pi}{8}$。

(4) 令 $f_n(t)=u(t-nT)-u(t-nT-T)$，则

$$f_n(t)=\begin{cases}1, & nT\le t<(n+1)T\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

从而 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)=u(t)$，且容易得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(t)=\begin{cases}1, & kT\le t<(k+1)T, k=0,2,4,\cdots\\ -1, & kT\le t<(k+1)T, k=1,3,5,\cdots\\ 0, & t<0\end{cases}$$

当 $t\in\mathbf{R}$ 时，该信号非周期信号；当 $t\in[0,\infty)$ 时，该信号的周期为 $2T$。

五. 应用冲激信号的抽样特性，求下列表示式的函数值:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-\frac{t_0}{2})dt$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-t}+t)\delta(t+2)dt$

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}(t+\sin t)\delta(t-\frac{\pi}{6})dt$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\left[\delta(t)-\delta(t-t_0)\right]dt$

解:

以下不妨假设 $t_0>0$。

(1) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}f(0-t_0)\delta(t)dt=f(-t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=f(-t_0)$

(2) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}f(t_0-0)\delta(t)dt=f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=f(t_0)$

(3) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t_0-\frac{t_0}{2})dt=u(\frac{t_0}{2})=1$

(4) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t_0-2t_0)dt=u(-t_0)=0$

(5) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}(e^2-2)\delta(t+2)dt=(e^2-2)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+2)dt=e^2-2$

(6) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6})\delta(t-\frac{\pi}{6})dt=(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{\pi}{6})dt=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

(7) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\delta(t)dt-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)dt=1-e^{-jwt_0}$

六. 判断下列系统是否是线性的、时不变的、因果的:

(1) $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

(2) $y(t)=x(t)u(t)$

(3) $y(t)=\sin\left[x(t)\right]u(t)$

(4) $y(t)=x(1-t)$

(5) $y(t)=x(2t)$

(6) $y(t)=x^2(t)$

(7) $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

(8) $y(t)=\int_{-\infty}^{5t}x(\tau)d\tau$

解：

(1) 线性系统，时不变系统，因果系统。

(2) 线性系统，时变系统，因果系统。

(3) 非线性系统，时变系统，因果系统。

(4) 线性系统，时变系统，非因果系统。

(5) 线性系统，时变系统，非因果系统。

(6) 非线性系统，时不变系统，因果系统。

(7) 线性系统，时不变系统，因果系统。

(8) 线性系统，时变系统，非因果系统。

七. 求下列各个函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $f_1(t) * f_2(t)$：

(1) $f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-at}u(t)$

(2) $f_1(t) = \delta(t), f_2(t) = \cos(\omega t + 45°)$

(3) $f_1(t) = (1+t)\left[u(t) - u(t-1)\right], f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$

(4) $f_1(t) = \cos(\omega t), f_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

(5) $f_1(t) = e^{-at}u(t), f_2(t) = (\sin t)u(t)$

解：

(1) $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$。当 $t < 0$ 时，卷积为 0；当 $t \geq 0$ 时，$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \frac{1}{a}(1-e^{-at})$。从而 $f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$。

(2) $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\cos(\omega\tau + 45°)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\cos(\omega t + 45°)d\tau = \cos(\omega t + 45°)$

(3) $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\tau)[u(\tau) - u(\tau-1)][u(t-\tau-1) - u(t-\tau-2)]d\tau$。容易看出，当 $0 < \tau < 1$ 且 $t-2 < \tau < t-1$ 时积分不为 0。从而，

- 当 $t < 1$ 或 $t > 3$ 时，卷积为 0。

- 当 $1<t<2$ 时，$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{t-1}(1+\tau)d\tau=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$。
- 当 $2<t<3$ 时，$f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-2}^{1}(1+\tau)d\tau=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2}$。

(4) 易得:

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega\tau)[\delta(t-\tau+1)-\delta(t-\tau-1)]d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega\tau)\delta(t-\tau+1)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega\tau)\delta(t-\tau-1)d\tau\\&=\cos(w(t+1))-\cos(w(t-1))\end{aligned}$$

(5) 易得:

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)\sin(\tau)u(\tau)d\tau\\&=u(t)e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}\sin(\tau)d\tau\\&=u(t)\frac{e^{-at}}{2i}\int_0^t e^{(a+i)\tau}-e^{(a-i)\tau}d\tau\\&=u(t)\frac{e^{-at}}{2i}[\frac{e^{(a+i)t}-1}{a+i}-\frac{e^{(a-i)t}-1}{a-i}]\\&=u(t)[\frac{e^{it}-e^{-at}}{2ai-2}-\frac{e^{-it}-e^{-at}}{2ai+2}]\\&=u(t)[\frac{(2ai+2)e^{it}-(2ai+2)e^{-at}-(2ai-2)e^{-it}+(2ai-2)e^{-at}}{-4a^2-4}]\\&=u(t)[\frac{(2ai+2)(\cos x+i\sin x)-(2ai-2)(\cos x-i\sin x)-4e^{-at}}{-4a^2-4}]\\&=\frac{e^{-at}+a\sin t-\cos t}{a^2+1}u(t)\end{aligned}$$

八. 已知系统相应的齐次方程及其对应的 0_+ 状态条件，求系统的零输入响应:

(1) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=0$，给定：$y(0_+)=1,y'(0_+)=2$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=0$，给定：$y(0_+)=1,y'(0_+)=2$

(3) $\frac{d^3}{dt^3}y(t)+2\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{d}{dt}y(t)=0$，给定：$y(0_+)=y'(0_+)=0,y''(0_+)=1$

解:

(1) 特征方程为 $a^2+2a+2=0$，特征根为 $a_1=-1+i, a_2=-1-i$。从而齐次解为 $y(t)=e^{-t}(A_1\cos t+A_2\sin t)$。从而有 $y'(t)=e^{-t}(-A_1(\cos t+\sin t)+A_2(\cos t-\sin t))$。代入 0_+ 状态条件，得到 $A_1=1, A_2=3$。从而零输入响应为 $y(t)=e^{-t}(\cos t+3\sin t)u(t)$。

(2) 特征方程为 $a^2+2a+1=0$，特征根为 $a_1=a_2=-1$。从而齐次解为 $y(t)=(A_1t+A_2)e^{-t}$。从而有 $y'(t)=e^{-t}(A_1-A_1t-A_2)$。代入 0_+ 状态条件，得到 $A_1=3, A_2=1$。从而零输入响应为 $y(t)=e^{-t}(1+3t)u(t)$。

(3) 特征方程为 $a^3+2a^2+a=0$，特征根为 $a_1=0, a_2=a_3=-1$。从而齐次解为 $y(t)=A_1+(A_2t+A_3)e^{-t}$。从而有 $y'(t)=e^{-t}(A_2-A_2t-A_3), y''(t)=-e^{-t}(2A_2-A_2t-A_3)$。代入 0_+ 状态条件，得到 $A_1=1, A_2=A_3=-1$。从而零输入响应为 $y(t)=(1-(1+t)e^{-t})u(t)$。

九. 给定系统微分方程、起始状态以及激励信号，求出下面微分方程的完全解:

(1) $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=x(t), y(0_+)=0, x(t)=u(t)$

(2) $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=3\frac{d}{dt}x(t), y(0_+)=3, x(t)=u(t)$

解:

(1) 齐次方程为 $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=0$，特征方程为 $a+2=0$，特征根为 $a=-2$，从而齐次解为 Ae^{-2t}，代入初始条件 $y(0_+)=0$，得到零输入响应为 $y_{zi}=0$。激励信号为 $u(t)$，代入 $y_(0_+)=0$ 到 $Ae^{-2t}+1$ 中，得到零状态响应为 $y_{zs}=-e^{-2t}+1$。于是完全解为 $y(t)=y_{zi}+y_{zs}=-e^{-2t}+1$。

(2) 齐次方程为 $\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=0$，特征方程为 $a+2=0$，特征根为 $a=-2$，从而齐次解为 Ae^{-2t}。在 $t>0_+$ 时等式右端为 0，所以特解为 0。从而完全解为 $y(t)=Ae^{-2t}$。代入 0_+ 条件 $y(0_+)=3$，得到完全解为 $y(t)=3e^{-2t}$。