博弈论 Homework-2

2021 年 6 月 28 日

Chap4 - Problem 1

Solution. 设玩家一采取策略 1、2、3 的概率分别为 x, y, z, 则玩家一的策略为

$$(x, y, z) \in \arg\max_{(x,y,z)} min(-2y + z, 2x - 3z, -x + 3y)$$

该问题可转化为如下线性规划问题

$$\begin{aligned} & \max \quad v_1 \\ s.t. \quad & -2y + z \geq v_1 \\ & 2x - 3z \geq v_1 \\ & -x + 3y \geq v_1 \\ & x + y + z = 1, \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

设玩家二采取策略 A、B、C 的概率分别为 a, b, c, 同理可得

$$\begin{aligned} & \min \quad v_2 \\ s.t. \quad & 2b - c \leq v_2 \\ & -2a + 3c \leq v_2 \\ & a - 3b \leq v_2 \\ & a + b + c = 1, \\ & a, b, c \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

解线性优化问题 (1) 和 (2) 得到的混合策略 $\{(x, y, z), (a, b, c)\}$ 为一种 PNE.

Chap4 - Problem 2

Solution. 设玩家一采取四种策略的概率分别为 a, b, c, d, 则玩家一的策略为

$$(a, b, c, d) \in \arg\max_{(a,b,c,d)} min(a+3b-2c-5d, -a-2b-4c+2d, 2a+4b-5c+6d, -2a-2b+7c+3d)$$

该问题可转化为如下线性规划问题

$$\begin{array}{rrcl} & \max & v_1 & \\ s.t. & a+3b-2c-5d & \geq & v_1 \\ & -a-2b-4c+2d & \geq & v_1 \\ & 2a+4b-5c+6d & \geq & v_1 \\ & -2a-2b+7c+3d & \geq & v_1 \\ & a+b+c+d & = & 1, \\ & a,b,c,d & \geq & 0 \end{array} \tag{3}$$

设玩家二采取四种策略的概率分别为 r,x,y,z, 同理可得

$$\begin{array}{rrcl} & \min & v_2 & \\ s.t. & r-x+2y-2z & \leq & v_2 \\ & 3r-2x+4y-2z & \leq & v_2 \\ & -2r-4x-5y+7z & \leq & v_2 \\ & -5r+2x+6y+3z & \leq & v_2 \\ & r+x+y+z & = & 1, \\ & r,x,y,z & \geq & 0 \end{array} \tag{4}$$

解优化问题 (3) 和 (4) 得到的混合策略 $\{(a,b,c,d),(r,x,y,z)\}$ 为一种 PNE.

Chap4 - Problem 3

Solution. 设玩家一采取四种策略的概率分别为 a,b,c,d, 则玩家一的策略为

$$(a,b,c,d) \in \arg\max_{(a,b,c,d)} min(a+2b-3c-8d, -2a-7b+4c+3d, 6a+2b-4c-2d, -4a+4b-3c+3d)$$

该问题可转化为如下线性规划问题

$$\begin{array}{rrcl} & \max & v_1 & \\ s.t. & a+2b-3c-8d & \geq & v_1 \\ & -2a-7b+4c+3d & \geq & v_1 \\ & 6a+2b-4c-2d & \geq & v_1 \\ & -4a+4b-3c+3d & \geq & v_1 \\ & a+b+c+d & = & 1, \\ & a,b,c,d & \geq & 0 \end{array} \tag{5}$$

设玩家二采取四种策略的概率分别为 r,x,y,z, 同理可得

$$\begin{array}{rrcl} & \min & v_2 & \\ s.t. & r-2x+6y-4z & \leq & v_2 \\ & 2r-7x+2y+4z & \leq & v_2 \\ & -3r+4x-4y-3z & \leq & v_2 \\ & -8r+3x-2y+3z & \leq & v_2 \\ & r+x+y+z & = & 1 \\ & r,x,y,z & \geq & 0 \end{array} \tag{6}$$

解优化问题 (5) 和 (6) 得到的混合策略 $\{(a,b,c,d),(r,x,y,z)\}$ 为一种 PNE.

Chap4 - Problem 4

证明. (p^*,q^*) 是混合策略纳什均衡, 等价于对于任意 $p\in\Delta_1, q\in\Delta_2$ 有

$$U(p,q^*)\le U(p^*,q^*)\le U(p^*,q) \tag{7}$$

即等价于

$$U(p,q^*)\le U(p^*,q) \tag{8}$$

下面开始证明原命题.

- 必要性

  (p^*,q^*) 是混合纳什均衡, 有 $U(p,q^*)\le U(p^*,q)$, 即

  $$\max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*)\le \min_{q\in\Delta_2} U(p^*,q) \tag{9}$$

  根据 p^*,q^* 的定义, 可得

  $$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q)\le \max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} U(p,q) \tag{10}$$

  又因为 $\min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} U(p,q)\ge \max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} U(p,q)$, 所以

  $$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q)= \max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} U(p,q) \tag{11}$$

  必要性得证.

- 充分性

  $$U(p,q^*)\le \max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*)=\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \tag{12}$$

  $$U(p^*,q)\ge \min_{q\in\Delta_2} U(p^*,q)=\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} U(p,q) \tag{13}$$

  根据 $\min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} U(p,q)= \max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} U(p,q)$, 有

  $$U(p^*,q)\ge U(p,q^*) \tag{14}$$

  上式等价于混合策略纳什均衡, 充分性得证.

□

Chap4 - Problem 5

证明. 根据 Nash Theorem, 任何有限策略游戏存在混合策略纳什均衡, 对于双人零和有限游戏 G, 记它的一个混合策略纳什均衡为 (p^*,q^*), 记 $U(p,q)=pMq^T$, 有

$$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q)\le \max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*)=U(p^*,q^*) \tag{15}$$

另一方面

$$U(p^*,q^*)=\min_{q\in\Delta_2}U(p^*,q)\le\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2}U(p,q) \tag{16}$$

综合 (19),(20) 有

$$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1}U(p,q)\le\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2}U(p,q) \tag{17}$$

由 min-max 引理，

$$\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2}U(p,q)\le\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1}U(p,q) \tag{18}$$

综合 (21),(22) 有

$$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1}U(p,q)=\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2}U(p,q) \tag{19}$$

原定理得证. □

Chap5 - Problem 1

Solution. 根据两玩家的 payoff functions，可以得到两玩家的最优反应函数分别为：

$$B_1(b_2)=\begin{cases} b_2 & ,\text{if } b_2\le v_1 \\ [0,b_2) & ,\text{otherwise}\end{cases}$$

$$B_2(b_1)=\begin{cases} b_1+\epsilon & ,\text{if } b_1< v_2 \\ [0,b_1] & ,\text{otherwise}\end{cases}$$

其中 ϵ 为一个任意小量。

根据 $b_1\in B_1(b_2)$ 和 $b_2\in B_2(b_1)$，可以得到纳什均衡为：

$$\{(c,c): v_2\le c\le v_1\}$$

Chap5 - Problem 2

Solution. 根据两玩家的 payoff functions，可以得到两玩家的最优反应函数分别为：

$$B_1(q_2)=\begin{cases} (q_2,+\infty) & ,\text{if } 0\le q_2<c \\ [c,+\infty) & ,\text{if } q_2=c \\ q_2-\epsilon & ,\text{if } c<q_2\le\frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} & ,\text{if } q_2>\frac{a+c}{2}\end{cases}$$

$$B_2(q_1)=\begin{cases} (q_1,+\infty) & ,\text{if } 0\le q_1<c \\ [c,+\infty) & ,\text{if } q_1=c \\ q_1-\epsilon & ,\text{if } c<q_1\le\frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} & ,\text{if } q_1>\frac{a+c}{2}\end{cases}$$

其中 ϵ 为一无穷小量。

根据 $b_1\in B_1(b_2)$ 和 $b_2\in B_2(b_1)$，可以得到纳什均衡为：(c,c)。