Problem 1　　181220076　周[illegible]

令 a 为 $n\times1$ 向量，由于 P 为置换矩阵，故 Pa 相当于将 a 的元素位置交换，a 的元素位置排列共有 $n!$ 种可能，所以在置换次数足够大的情况下必然出现重复排列，即 $\exists K_1, K_2$，$K_1>K_2$，使得 $P^{K_1}a=P^{K_2}a$，从而 $P^{K_1-K_2}a=a$，$P^{K_1-K_2}=I$。所以可以找到 $K=K_1-K_2$，使得 $P^K=I$.

Problem 2

(1) 设 λ 为 A 的任意一个特征值，对应特征向量为 x，则 $Ax=\lambda x$，两边取共轭转置得：$x^HA^H=\lambda^*x^H$，其中 λ^* 为 λ 的共轭复数，由于 $A^H=A$，两边右乘 x，可得 $x^HAx=\lambda^*x^Hx$，也即 $x^H(\lambda x)=\lambda^*x^Hx$，从而有 $\lambda x^Hx=\lambda^*x^Hx$，由于 x 非零向量，所以 $x^Hx>0$，从而 $\lambda=\lambda^*$，所以 λ 为实数，所以 A 的所有特征值为实数

(2) 设 A 的任意两个不同特征值为 λ, u，对应特征向量为 x, y，则有 $Ax=\lambda x$，$Ay=uy$，分别左乘 y^H，x^H，得到：

$y^HAx=\lambda y^Hx$，　$x^HAy=ux^Hy$，对 $x^HAy=ux^Hy$ 取共轭转置得 $y^HAx=uy^Hx$，从而 $\lambda y^Hx=uy^Hx$.

即 $(\lambda-u)y^Hx=0$，因为 $\lambda-u\neq0$，所以 $y^Hx=0$，

所以 x 与 y 正交，所以 A 的不同特征值的特征向量相互正交

Problem 3

易知 C 为循环矩阵，令 c 表示 C 第一列 $c=[c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}]^T$，则 $c_1=1$，$c_0=c_2=\cdots=c_{N-1}=0$

令 $w_j=\exp(\frac{2\pi j}{N}i)$，则第 j 个特征值为 $\lambda_j=c_0+c_{N-1}w_j+c_{N-2}w_j^2+\cdots+c_1w_j^{N-1}=w_j^{N-1}$

所以 $\lambda_j=\exp(\frac{2(N-1)\pi j}{N}i)$，对应特征向量为 $v_j=\frac{1}{\sqrt{N}}(1, w_j, w_j^2, \cdots, w_j^{N-1})$，$j=0,1,\cdots,N-1$.

Problem 4

(1)

程序如下：

```
N = 16
cp = 8
h = [1+i,0.5,0.5i,0.2+0.3i,0.3,0.1i]
d = transpose([1,i,-1,-i,1,i,-1,-i,1,i,-1,-i,1,i,-1,-i])
u = ifft(d)
x = [u(N-cp+1:N); u]
H = zeros(N+cp, N+cp)
H_r = [h(1),zeros(1,N+cp-length(h)),h(end:-1:2)]
for r = 1:N+cp
    H(r,:) = circshift([h(1),zeros(1,N+cp-length(h)),h(end:-1:2)],r-1)
end
y = H*x
u_ = y(cp+1:length(y))
d_ = fft(u_)
```

代码中的$u, x, y, u_, d_$分别对应于$u, x, y, \hat{u}, \hat{d}$，其结果为：

```
u = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
x = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
y =[
   0.3000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.1000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   1.0000 + 1.0000i
   0.5000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.5000i
   0.2000 + 0.3000i
   0.3000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.1000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   1.0000 + 1.0000i
   0.5000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.5000i
   0.2000 + 0.3000i]
u_ =[
   0.3000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.1000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
```

```
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   1.0000 + 1.0000i
   0.5000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.5000i
   0.2000 + 0.3000i]
d_ =[
   2.0000 + 1.9000i
  -0.7540 + 2.2616i
  -1.5536 - 0.2222i
   0.3763 - 1.2070i
   1.1000 + 0.2000i
  -0.1458 + 0.4868i
  -0.1293 - 0.7879i
   1.2009 - 0.4775i
   0.6000 + 1.1000i
  -1.3531 + 0.4455i
  -0.8464 - 1.7778i
   1.5166 - 1.5001i
   1.5000 + 0.8000i
  -0.5471 + 0.8061i
  -0.2707 - 1.2121i
   2.1062 - 0.8154i]
```

(2)

加入命令`d.*fft(h.',16)`，得到结果

```
ans =[
   2.0000 + 1.9000i
  -0.7540 + 2.2616i
  -1.5536 - 0.2222i
   0.3763 - 1.2070i
   1.1000 + 0.2000i
  -0.1458 + 0.4868i
  -0.1293 - 0.7879i
   1.2009 - 0.4775i
   0.6000 + 1.1000i
  -1.3531 + 0.4455i
  -0.8464 - 1.7778i
   1.5166 - 1.5001i
   1.5000 + 0.8000i
  -0.5471 + 0.8061i
  -0.2707 - 1.2121i
   2.1062 - 0.8154i]
```

发现元卷积的结果与$\hat{d}$相等。因为不考虑cp的情况下 $y = Hu = F^{-1}diag(Fh)Fu, \hat{d} = Fy = diag(Fh)FF^{-1}d = diag(Fh)d$，恰好是$d \odot f$的结果，所以可以用$d \odot f$来完成OFDM。