《矩阵计算与应用》习题一

Due date: 2021-03-31

Problem 1:

在工程控制系统的设计中，一个离散时间的控制系统的状态空间模型包括了差分方程

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}, \quad k = 0,1,\ldots$$

式中，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，并且 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 为描述系统在 k 时刻状态的向量，简称状态向量；而 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ 为系统在 k 时刻的输入或控制向量。矩阵对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 称为可控的，若

$$\operatorname{rank}\left(\left[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right]\right) = n.$$

若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 是可控的，则最多用 n 步即可将系统控制到任意一个指定的状态 $\boldsymbol{x}$ 。试确定以下矩阵对是否可控：

$$(1)\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(2)\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

（注：如果使用 MATLAB 验证，请附上 MATLAB 程序。）

Problem 2:

平面方程可以表示为 $ax + by + cz = -1$ 。证明：通过三点 $(x_i, y_i, z_i)(i = 1,2,3)$ 的平面方程由下式决定（假设已知这三点不共线）

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problem 3:

根据课上讲的矩阵范数（induced norm）定义，证明：对于矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

即 $\|\mathbf{A}\|_1$ 等于 $\mathbf{A}$ 的每列元素绝对值之和的最大值。（提示：利用向量范数的定义）

Problem 4:

判断下列命题“正确”或者“错误”，认为“正确”的请给出证明，认为“错误”的请给出理由：

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，且 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 为非奇异矩阵，则一定有 $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$.