Problem 1　　181220076 周韧哲

(1) 容易计算得到 $[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.9 & 0.81 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$

在matlab中输入：a = 上述矩阵，使用函数 rank(a) 得知其秩为3，所以该矩阵对可控。

(2) 容易计算得到 $[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.19 \\ 1 & 0.7 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

在matlab中输入：a = 上述矩阵，使用函数 rank(a) 得知其秩为2，所以该矩阵对不可控。

Problem 2

代入三点坐标得关于a, b, c的线性方程组：

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = -1 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = -1 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 = -1 \end{cases}$$

由Gramer法则得

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & y_1 & z_1 \\ -1 & y_2 & z_2 \\ -1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -1 & z_1 \\ x_2 & -1 & z_2 \\ x_3 & -1 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}, \quad c = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & -1 \\ x_3 & y_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

代入平面方程可得

$$\begin{vmatrix} -1 & y_1 & z_1 \\ -1 & y_2 & z_2 \\ -1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1 & -1 & z_1 \\ x_2 & -1 & z_2 \\ x_3 & -1 & z_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & -1 \\ x_3 & y_3 & -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} z = 0$$

化简得：
$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

## Problem 3

由矩阵范数定义知 $\|A\|_1 = \sup\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$

由向量范数定义知 $\|Ax\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$

由三角不等式得
$$\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j|$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j|$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) |x_j|$$
$$\le \left( \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

因为 $\|x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| = 1$，所以 $\sup\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \le \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

当 $x = (0, 0, \dots, 1, \cdots, 0, 0)$，其中1为第k个元素，$k = \operatorname{argmax}\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ 时，容易验证上面等号成立。

所以 $\sup\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$，

所以 $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

## Problem 4

该命题正确.

证明：令 $B = I - A$，则 $B$ 可逆，即证 $(I-B)B^{-1} = B^{-1}(I-B)$

易得左边等于 $B^{-1} - I$，右边也等于 $B^{-1} - I$，得证.