HW5

181220076 周韧哲

Problem1

- 子博弈1：

	F	**B**
F	3,1	0.0
B	0,0	1.3

得到NE：$(F,F),(B,B)$。

- 子博弈2为：

	a	**b**
A	4,4	0.0
B	0,0	1.1

得到NE：$(A,a),(B,b)$。

当子博弈1取(F,F)时，子博弈2取(A,a)时，P_1会选择C，得到SPNE为(CFA,Fa)。

当子博弈1取(F,F)时，子博弈2取(B,b)时，P_1会选择S，得到SPNE为(SFB,Fb)。

当子博弈1取(B,B)时，子博弈2取(A,a)时，P_1会选择C，得到SPNE为(CBA,Ba)。

当子博弈1取(B,B)时，子博弈2取(B,b)时，P_1由于两种收益都为1，所以S或C都可选，得到SPNE为(SBB,Ba)与(CBB,Ba)。

故共有5个SPNE。

Problem2

令$\beta=(p_1,p_2,p_3)$分别代表player1，player2，player3选T,L,U的概率。令α代表player3认为其处于T分支的信念概率，$\alpha=\frac{p_1}{p_1+(1-p_1)p_2}$。

若$p_3=1$，则对player3应该有$0+1\times(1-\alpha)\geq 2\alpha+0$，得到$\alpha\leq\frac{1}{3}$，对player2有$p_2=0$（必然选R），对player1来说$p_1=0$（必然选B）。当$\alpha\in[0,\frac{1}{3}]$时总能找到$p_1,p_2$的序列使得其趋于0时取得信念$\alpha$，从而得到SPNE为$(B,R,U)$。

若$p_3=0$，则对player3应该有$0+1\times(1-\alpha)\leq 2\alpha+0$，得到$\alpha\geq\frac{1}{3}$，对player2有$p_2=1$（必然选L），对player1来说$p_1=0$（必然选B），此时可算出$\alpha=0$，矛盾。

当$p_3\in(0,1)$时，有$0+1\times(1-\alpha)=2\alpha+0$得到$\alpha=\frac{1}{3}$。当$p_2=1$时，有$4(1-p_3)>1$得到$p_3<\frac{3}{4}$，对player1来说$p_1=0$（必然选B，$3(1-p_3)<4(1-p_3)$），此时可算出$\alpha=0$，矛盾。当$p_2=0$时，有$4(1-p_3)<1$得到$p_3>\frac{3}{4}$，对player1来说$p_1=0$（必然选B，$3(1-p_3)<1$），从而得到SPNE为$(B,R,p_3|p_3\in(\frac{3}{4},1))$。当$p_2\in(0,1)$时，对于player2令$4(1-p_3)=1$得到$p_3=\frac{3}{4}$，此时player1必选B，得到$p_1=0$，可计算得到$\alpha=0$，矛盾。

综上，有两个SPNE，分别为(B,R,U)与$(B,R,p_3|p_3\in(\frac{3}{4},1))$，其中$p_3$为player3选U的概率。

Problem3

令行为策略$\beta=(\beta_1,\beta_2)=(x,y;q)$，其中$x,y$分别为$P_1$选择$M,R$的概率，$q$为$P_2$选择$a$的概率。令$\mu=(\alpha)$，$\alpha$表示在信息集$(M,R)$中选择历史$M$的信念概率。

若$x,y,q\in(0,1)$，则由贝叶斯规则得$a=\frac{x}{x+y}$。

若$x=1$，则$y=0$，且$\alpha=1,q=0$为P_2在最后信息集的最优回应，但若$q=0$则P_1会选择走R，不是P_1的最优回应，矛盾。

若$x=0$，则

1. 若$y=0$，可以推出(L,r)为sequenial equilibrium。
2. 若$y>0$，$\alpha=0,q=1$为P_1的最优回应，但若$q=1$则P_1会选择走M或者L，不是P_1的最优回应，矛盾。

若$x\in(0,1)$，对于P_2，有$q+2(1-q)=2q+1-q$，得到$q=\frac{1}{2}$。

在信息集(M,R)中，P_2的期望回报为

$$\alpha(q+2(1-q))+(1-\alpha)(2q+1-q)+2(1-x-y)=1+\frac{x}{x+y}+q(\frac{y-2x}{x+y})+2(1-x-y)$$

若$y<2x$，则$q=0$，若$y>2x$，则$q=1$，若$y=2x$，则$q\in(0,1)$。所以$q=\frac{1}{2}$当且仅当$y=2x$。此时期望回报为$\frac{10}{3}-6x$，当x趋于0时取得最大。矛盾。

综上，sequenial equilibrium为(L,r)。