HW2

181220076 周韧哲

Problem1

令$p_1=(x_1,x_2,x_3),p_2=(y_1,y_2,y_3)$，则需要求解的MNE为$\max_{p_1}\min_{p_2}p_1Mp_2^T,\min_{p_2}\max_{p_1}p_1Mp_2^T$，线性规划式子如下：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & v\\
s.t.\quad & -2x_2+x_3\geq v\\
& 2x_1-3x_3\geq v\\
& -x_1+3x_2\geq v\\
& x_1,x_2,x_3\geq 0\\
& x_1+x_2+x_3=1\\
\min\quad & v\\
s.t.\quad & 2y_2-y_3\leq v\\
& -2y_1+3y_3\leq v\\
& y_1-3y_2\leq v\\
& y_1,y_2\geq 0\\
& y_1+y_2+y_3=1
\end{aligned}
$$

Problem2

令$p_1=(x_1,x_2,x_3,x_4),p_2=(y_1,y_2,y_3,y_4)$，则需要求解的MNE为$\max_{p_1}\min_{p_2}p_1Mp_2^T,\min_{p_2}\max_{p_1}p_1Mp_2^T$，线性规划式子如下：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & v\\
s.t.\quad & x_1+3x_2-2x_3-5x_4\geq v\\
& -x_1-2x_2-4x_3+2x_4\geq v\\
& 2x_1+4x_2-5x_3+6x_4\geq v\\
& -2x_1-2x_2+7x_3+3x_4\geq v\\
& x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\\
& x_1+x_2+x_3+x_4=1\\
\min\quad & v\\
s.t.\quad & y_1-y_2+2y_3-2y_4\leq v\\
& 3y_1-2y_2+4y_3-2y_4\leq v\\
& -2y_1-4y_2-5y_3+7y_4\leq v\\
& -5y_1+2y_2+6y_3+3y_4\leq v\\
& y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0\\
& y_1+y_2+y_3+y_4=1
\end{aligned}
$$

Problem3

令$p_1=(x_1,x_2,x_3,x_4),p_2=(y_1,y_2,y_3,y_4)$，则需要求解的MNE为$\max_{p_1}\min_{p_2}p_1Mp_2^T,\min_{p_2}\max_{p_1}p_1Mp_2^T$，线性规划式子如下：

$$
\begin{array}{ll}
\max & v \\
s.t. & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 \geq v \\
& -2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq v \\
& 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \geq v \\
& -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 \geq v \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
\min & v \\
s.t. & y_1 - 2y_2 + 6y_3 - 4y_4 \leq v \\
& 2y_1 - 7y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq v \\
& -3y_1 + 4y_2 - 4y_3 - 3y_4 \leq v \\
& -8y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 3y_4 \leq v \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \\
& y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1
\end{array}
$$

Problem4

若(p^*, q^*)为MNE，则

$$
\begin{array}{l}
U_1(p^*, q^*) \geq U_1(p, q^*) \text{ for all } p \in \Delta_1 \\
U_2(p^*, q^*) \geq U_2(p^*, q) \text{ for all } q \in \Delta_2
\end{array}
$$

因为$U_1 = -U_2$，所以(p^*, q^*)为NE当且仅当 $U(p, q^*) \leq U(p^*, q^*) \leq U(p^*, q)$当且仅当$U(p, q^*) \leq U(p^*, q)$。所以只需要证明$U(p, q^*) \leq U(p^*, q)$当且仅当$\max_p \min_q U(p, q) = \min_q \max_p U(p, q)$。

- 充分性：易知$U(p, q^*) \leq \max_p U(p, q^*) = \min_q \max_p U(p, q)$，且$U(p^*, q) \geq \min_q U(p^*, q) = \max_p \min_q U(p, q)$，又因为$\max_p \min_q U(p, q) = \min_q \max_p U(p, q)$，所以$U(p, q^*) \leq U(p^*, q)$。
- 必要性：由于$U(p, q^*) \leq U(p^*, q)$，可以推出$\max_p U(p, q^*) \leq \min_q U(p^*, q)$，再由$p^*, q^*$的定义可得$\min_q \max_p U(p, q) \leq \max_p \min_q U(p, q)$，又因为$\min_q \max_p U(p, q) \geq \max_p \min_q U(p, q)$一定成立，所以$\max_p \min_q U(p, q) = \min_q \max_p U(p, q)$。

Problem5

令$f(p, q) = pMq^T$，则
$f(\theta x + (1-\theta)y, q) = (\theta x + (1-\theta)y)Mq^T = \theta xMq^T + (1-\theta)yMq^T = \theta f(x, q) + (1-\theta)f(y, q) \leq \theta f(x, q) + (1-\theta)f(y, q)$，所以对于所有固定的q，$f(p, q)$对p是凹的，同理对于所有固定的p，$f(p, q)$对q是凸的，所以
$\max_p \min_q f(p, q) = \min_q \max_p f(p, q)$，即$max_p \min_q pMq^T = \min_q \max_p pMq^T$。

Problem6

PNE是$b_1 \in [v_1, v_2], b_2 = b_1$。显然可以看出当处于这种策略时，两Player都不能单方面改变b_1, b_2以获得更大payoff，所以这是一个PNE。假设有其他的PNE，若某个PNE中Player2中标，则$b_2 > b_1$，此时：如果$b_2 > v_2$，Player2会使得$b_2 \leq b_1$；如果$b_2 \leq v_2$，则有$b_1 < b_2 \leq v_2 < v$，Player1会提高b_1来中标，故PNE中只有Player1中标。若PNE中$b_1 < v2$，则Player2可以提高b_2至(b_1, v_2)使得其payoff提高，同理若PNE中$b_1 > v_1$则Player1可降低b_1至小于b_2来提高Payoff。故只有那一个PNE。

Problem7

PNE为$q_1 = q_2 = c$，显然当处于这一NE时两家公司都无法单方面改变策略来获得高的payoff，例如若$q_1 < q_2 = c$则$u_1 < 0$，反之$q_1 > q_2 = c, u_1 = 0$。接下来证明没有其他的PNE。若在某PNE中$q_1 \neq q_2$，不妨讨论如下情况：$q_1 > q_2$，则$u_1(q_1, q_2) = 0, u_2(q_1, q_2) = (q_2 - c)(a - q_2)$，若$q_1 > c$则公司1可以减少$q_1$来使得其payoff提高，若$q_2 < q_1 \leq c$，则公司2可以降低$q_2$来获得更高payoff。所以$q_1 = q_2$。再假设$q_1 = q_2 \neq c$，若$q_2 > c$则公司2可以降低$q_2$至$(c, q_1)$以使得其payoff提高；若$q_1 < c$则公司1将提高$q_1$至大于$q_2$来使得其payoff提高。所以只有那一个PNE。