牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

牛客暑期多校

训练营

lzr/quailty/Gromah/葫芦

HR.NOWCODER.COM

A-Alive Fossils

- 签到题，按照题意模拟即可。

B-Bloodline Counter

首先有引理：

1. 竞赛图缩点后一定是一条链。
2. 每个大小为 m 的强连通分量内一定存在大小为 $3,\ldots,m-1,m$ 的环。

因此我们不难转换题意，求最大环 $\le k$ 的答案，即求所有强连通分量大小 $\le k$ 的方案数。

假设单个强连通分量的 EGF 为 $F(x)$，其最高项次数为 k，枚举链的大小和链上排布，答案即 $n![x^n]\left(1!\frac{F(x)}{1!}+2!\frac{F(x)^2}{2!}+\cdots\right)=n![x^n]\left(\frac{F(x)}{1-F(x)}\right)$。

假设任意竞赛图的 EGF 为 $G(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}2^{\binom{i}{2}}\frac{x^i}{i!}$，计算 $F(x)$ 只需要将上式套用容斥原理，$F(x)$ 截自 $(-1)^0 1!\frac{G(x)}{1!}+(-1)^1 2!\frac{G(x)^2}{2!}+\cdots=\frac{G(x)}{1+G(x)}$。

共三次多项式求逆即可。时间复杂度 $O(n\log n)$。

C-Clamped Sequence II

首先我们考虑把序列元素放缩到一个给定的区间 $[l, r]$ 内的情况下如何计算 clamped value。这个可以维护一个权值线段树，对于线段树上的每个权值区间节点，我们维护三个标记：$cnt, sum, diff\_sum$，分别表示当前权值区间内的元素个数、元素和、元素两两之差的和。考虑合并两个相邻权值区间所对应的标记，cnt, sum 直接加起来就好，$diff\_sum$ 的话有：
$diff\_sum = diff\_sum_l + diff\_sum_r + sum_r \times cnt_l - sum_l \times cnt_r$。这样对于把元素放缩到 $[l, r]$ 时 clamped value 的计算，我们首先用权值线段树把 $[l, r]$ 对应的权值区间节点标记求出来，然后考虑 $(-\infty, l-1], [r+1, +\infty)$ 内的元素，因为这些元素全部都会变成 l 或者 r，所以我们只需要求出其个数，然后就可以手动计算对应的权值区间节点标记，再把三个标记合并起来，就可以得到答案了，即总标记中的 $diff\_sum$。

然后考虑处理操作，单点修改直接在权值线段树上操作就行，询问的话本质上只有 $2n$ 个区间需要考虑，即 l 取某个元素或者 r 取某个元素，然后 l 取某个元素或者 r 取某个元素的情况下答案是严格单峰的，可以三分来算最大值，所以就是 $O(log^2n)$ 的复杂度回答一个询问。

D-Distance on Tree

考虑 $f_{u,x}$ 表示 u 子树里选了一个权值为 x 的点到 u 的距离两倍的最大值，$g_{u,x}$ 表示 u 子树里选了两个权值和模 m 为 x 的不同点再加上u的两两距离之和的最大值， $h_{u,x}$ 表示 u 子树里选了三个权值和模 m为 x 的不同点的两两距离之和的最大值，直接做的复杂度是 $O(nm^2)$，瓶颈在于 $O(n)$ 次两个长为 m 的数组的循环 $\max$ 卷积。

关注到 $f_{u,x}$ 里有效状态只有 $O(\min\{size_u, m\})$ 个，$g_{u,x}$ 里有效状态只有 $O(\min\{size_u^2, m\})$ 个，如果只维护有效状态，在合并 u 和 v 子树时的复杂度是 $O(\min\{size_u^2, m\}\min\{size_v, m\} + \min\{size_u, m\}\min\{size_v^2, m\})$，可以发现合并的总复杂度是 $O(nm^{3/2})$。

考虑合并 u 子树和 v 子树，不妨设 $m \geq n$，于是总有 $size_u \leq m$ 和 $size_v \leq m$，不妨设 $size_u \geq size_v$，对子树大小进行分类讨论：

- $size_u \leq \sqrt{m}$ 且 $size_v \leq \sqrt{m}$，此时合并一次的复杂度是 $O(size_u^2 size_v + size_u size_v^2) = O(m^{3/2})$，由于合并次数是 $O(n)$，总复杂度是 $O(nm^{3/2})$；
- $size_u > \sqrt{m}$ 且 $size_v > \sqrt{m}$，此时合并一次的复杂度是 $O(m(size_u + size_v)) = O(m^2)$，这类合并的出现次数是 $O(n/\sqrt{m})$，总复杂度是 $O(nm^{3/2})$；
- $size_u > \sqrt{m}$ 且 $size_v \leq \sqrt{m}$，此时合并一次的复杂度是 $O(m size_v + size_u \min\{size_v^2, m\}) = O(m \min\{size_v^2, m\})$，可以发现每个点在这类合并里作为 v 子树里的点出现至多一次，因此所有这类合并的 $size_v$ 之和不超过 n，通过简单放缩可以发现有 $n/\sqrt{m}$ 个 $size_v$ 是 $\sqrt{m}$ 时取到 $\sum \min\{size_v^2, m\}$ 的最大值，总复杂度是 $O(nm^{3/2})$。

预处理所有 $h_{u,x}$ 后单次查询的复杂度是 $O(1)$，因此总复杂度是 $O(nm^{3/2} + q)$。

E-Educational Problem I

首先可以去掉下界，每个元素看作在$[0, R-L]$范围内，最后求和再加上kL

则可以设计出dp状态表示，$f(i,j,c,p)$表示前i位中，有j个元素仍然到达上界，第$i-1$位向第i位进位c，$S_1(x)-S_2(x)$的差为p的方案数。转移时可以枚举下一位有多少个数字离开上界，下一位a_i的数位和是多少来转移。时间复杂度$O(mn^5\lg r)$

考虑优化该做法，上界的限制等价于$\sum_{i=1}^n a_i \le nR'$且$a_i \le R'$，其中$R'=R-L$。注意到我们只关心a_i的总和，因此a_i的上界也可以去掉：利用容斥强制x个元素超过上界，此时我们就不关心a_i的上下界情况，dp状态只需要记录总和是否仍然抵达上界，在最后求和时候额外加上xR'即可，可以将时间复杂度优化到$O(mn^4\lg r)$

上诉dp转移过程为，$g_t \cdot f_{\lfloor \frac{t+c+bias}{10} \rfloor, p-[(t+c+bias) \bmod 10]^2+[(t+c+bias) \bmod 10]} \to f'_{c,p}$，其中$bias$表示偏移上下界带来的额外贡献，$g_t$表示$n$个数字凑出总和为$t$的方案数。注意到该转移中，$t$在$\bmod 10$意义下，$f$仅有第一维发生了改变；且由于$c \le n$，在固定$t$的前提下，$f$的第一维仅有三种可能的取值。因此可以对于每个$0 \le b \le 9, 0 \le p < m$，预处理出$\sum_k g_{10k+b} \cdot f_{k+\lfloor \frac{b+bias}{10} \rfloor + d, p}$的结果，其中$d \le \lceil \frac{n}{10} \rceil$。则转移的复杂度就可以直接除掉10，时间复杂度优化到$O(mn^3\lg r)$

F-Educational Problem II

设 f_i 表示填完 $a_1, \ldots, a_i$ 的方案数，显然每次贪心填相同的数延伸到最远的位置是优的，因此 f_i 只能从某段连续的 f_j 转移过来。

不妨用 n 个线性基描述各 a_i 的可行集。固定右端点 i，我们关心 $[j, i]$ 都能填的数的数量，也就是这段线性基交能表示出的在 $[l, r]$ 内的数。j 从左往右交集仅会变大 $O(m)$ 次。我们可以维护出每次变化加入的基，用经典的增量法将 i 不断往右推，亦可用 $\text{Fennec's Algorithm}$ 转到正交意义下简便求解。

问题缩小到求线性基能表示出多少 $[l, r]$ 内的数。将询问拆成 $[1, r]$ 和 $[1, l-1]$，从高位到低位贪心地在自由选择的位贴合上界，与数位 dp 类似，若某个位强制为 0 而上界为 1，则之后自由选择的位均选 1；若某个位强制为 1 而上界为 0，则上一个选择的 1 改成 0，其后面自由选择的位均选 1。

需要手写 bitset。时间复杂度 $O(\frac{nm^3}{w})$。

G-Expected Distance

通过对坐标系进行平移和旋转，可以将两条相互垂直的线段中的一条放在x轴上，另一条放在y轴上，于是问题转化为求解二重积分 $\int_a^b \int_c^d \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$a \le b, c \le d$。

按照象限划分积分区域，只需求解 4 个形如 $\int_0^b \int_0^d \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的子问题，其中 $b \ge 0,\ d \ge 0$。

如果使用极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，可得积分式 $\iint r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，对积分区域按 $0 \le \theta < \arctan(d/b),\ \arctan(d/b) \le \theta \le \pi/2$ 分类讨论，相加可得

$$\int_0^{\arctan(d/b)} \frac{b^3}{3\cos^3\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\arctan(d/b)}^{\pi/2} \frac{d^3}{3\sin^3\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

这里的一元积分式是常见积分，推导留作习题。

H-Insert 1,Insert 2,Insert 3, ...

首先如果有$L \le R_1 < R_2$，且$[L, R_2]$是合法的，那么我们考虑$[L, R_2]$的生成过程中，对于其中每个$\{1, 2, \cdots\}$的子序列，所有位置在$(R_1, R_2]$范围内的数一定比位置在$[L, R_1]$的数要大，把位置在$(R_1, R_2]$范围内的数去掉之后这个子序列仍然是一个形如$\{1, 2, \cdots\}$的序列，那么说明$[L, R_1]$也必然是合法的。

所以一个思路是在L固定的情况下去找合法的R的个数，本质上也就是找到最大的合法的R，或者最小的不合法的R，而找最小的不合法的R就是找第一个不存在$\{1, 2, \cdots, A[R]-1\}$生成子序列的$A[R]$。

基于以上思路，我们可以从n到1倒着枚举L，然后对于$[L, n]$中的每个元素$A[x]$，我们维护其可续性：

- 如果$A[x] = 1$，那么这个数字是可续的
- 如果$A[x] > 1$并且前面没有可用的$A[x]-1$跟他匹配，那么这个数字是不可续的
- 如果$A[x] > 1$并且前面有可用的$A[x]-1$跟他匹配，那么这个数字也是可续的

所以最小的不合法的R就是第一个不可续的元素的位置，或者$n+1$（如果不存在不可续数字）。具体实现的话，我们对于每个元素值开一个栈，然后每枚举到一个L，就把$A[L]$加入对应元素值的栈中，并且如果$A[L]+1$对应元素值的栈非空，则可以把栈顶元素（也就是当前最左的未被匹配的$A[L]+1$）弹出并与$A[L]$匹配，再令该$A[L]+1$为可续的，然后再根据$A[L]$是否为1来得到其可续性。可见这个过程中一个数从不可续变成可续只会发生一次，所以也可以用一个栈来维护所有的不可续元素。

综上可知，整个过程的总复杂度是$O(n)$的。

I-Make It Square

分两类讨论：$|S|>|T|$ 和 $|S|<|T|$。$|S|=|T|$ 可以合并到任意一类里，也可以单独简单讨论，略去不讲。

当$|S|>|T|$时候，观察到$p+S+q+T$的中点位置是固定的，即要求$p+S[1,|S|-\Delta]=S[|S|-\Delta+1,|S|]+q+T$，其中$\Delta=\frac{|S|-|T|}{2}$。接着需要进一步讨论$|p|<\Delta$ 和$|p|\geq\Delta$。

当$|p|<\Delta$时，可以发现p串和q串是各自对应等于S串的一部分，取值是存在且唯一的，同时还要求$\Delta-|p|$是S串的border，且$S[|\Delta+1,|S|-\Delta]=T$（即$S$的正中间部分必须完全等于$T$），此为充要条件。 因此只需要对$S$串求KMP并枚举border即可。

当$|p|\geq\Delta$时，观察到p的长度为$|p|-\Delta$的后缀和q的相同长度的前缀需要相等，而且是自由取值，p和q的其他部分是各自对应等于S串的一部分，取值存在且唯一，当然还必须满足S的正中间部分完全等于T。因此方案数为$26^{|p|-\Delta}$（或全0）。

另一大类情况$|S|<|T|$的时候，结论是完全对称的，留给读者作为练习:-P

J-Permutation and Primes

先考虑把题目中的奇质数变成质数，那么一个做法就是把 $\{1,2,\cdots,n\}$ 拆成两个公差为2的等差数列 $\{1,3,5,\cdots\}$ 和 $\{2,4,6,\cdots\}$，然后再考虑将这两个序列拼起来，一个简单的拼法就是把1和2作为两个序列的连接元素，即 $\{\cdots,5,3,1,2,4,6,\cdots\}$，这样数列内相邻的数的差都是2，连接部分的和是3，是符合题意的。

那么对于原题奇质数的限制，题解的做法是把 $\{1,2,\cdots,n\}$ 拆成五个公差为5的等差数列然后拼起来，具体得根据n对5取模的结果进行分类讨论，因为会影响到数列末端的数的拼接，幸运的是5种余数都是有合法的拼法的，这里就不一一展示了。

另一种做法：把$\{1,2,\cdots,n\}$每8个数分成一块，每一块的顺序是$\{1,6,3,8,5,2,7,4\}$，可见块内所有相邻元素的差要么是3要么是5，且相邻两个块的拼接部分的差是5，现在需要处理的就是$n \mod 8$个剩下来的数，同样也可以根据余数来构造前面部分的排列，下面是比赛过程中最快解题程序里一段注释的截图：

```
//1 6 3 8 5 2 7 4
//1
//1 2
//1 2 3
//1 4 3 2
//1 4 3 2 5
//1 4 3 2 5 6
//1 4 7 2 3 6 5
```

J-Permutation and Primes

n 比较小就打表。

n 如果是偶数，则存在 $p_1 + p_2 = n$，p_1, p_2 是质数，构造 $a[i] = ((ip_1 - 1) \bmod n) + 1$ 即可。

n 如果是奇数，则 $n+1$ 到 $n \times 2 + 1$ 之间有一个质数 p_3，找 $p_1 + p_2 = n - 1$，然后构造 $a[1] = n, a[2] = p_3 - n, a[i] = (a[2] + (i-2)p_1 - 1 \bmod (n-1)) + 1$。

哥德巴赫猜想（Goldbach's conjecture）是数论中存在最久的未解问题之一。这个猜想最早出现在1742年普鲁士数学家克里斯蒂安·哥德巴赫与瑞士数学家莱昂哈德·欧拉的通信中。用现代的数学语言，哥德巴赫猜想可以陈述为：

> **任一大于2的偶数，都可表示成两个质数之和。**

伯特兰-切比雪夫定理说明：若整数$n > 3$，则至少存在一个质数p，符合$n < p < 2n - 2$。另一个稍弱说法是：对于所有大于1的整数n，存在一个质数p，符合$n < p < 2n$。

1845年约瑟·伯特兰提出这个猜想。伯特兰检查了2至3×10^6之间的所有数。1850年切比雪夫证明了这个猜想。拉马努金给出较简单的证明，而埃尔德什则借二项式系数给出了另一个简单的证明。

K-Scheming Furry

特判先手一步取胜，和无法通过行列交换排序的无解情况。

对于其他情况，容易发现先手想取胜前提有 $m=2$，后手想取胜前提有 $n=2$，否则对手操作方式不唯一，一定能干扰自己的策略。

对于 $m=2$，先手操作必然改变列内逆序对奇偶性，后手只能交换仅有的两列，显然只要列内逆序对奇偶性匹配，先手就能逐位排序最终取胜。$n=2$ 同理。

THANKS

AC.NOWCODER.COM