第二章

- 解的意义
  - 能精确表征状态随时间的演变过程
  - 后续系统分析的理论基础
- 状态演变受初始条件和控制输入影响
  - 零输入响应：控制输入为零时，系统从初始状态出发的自由运动形态
  - 零状态响应：初始状态为零，系统在存在外力作用下的受迫运动形态
- 线性定常系统非齐次状态方程
  - $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ —— $x(t) = e^{A(t-t0)}x(t0)$
  - $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ —— $x(t) = e^{A(t-t0)} + \int_{t0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
  - 其中，把$e^{A(t-t0)}x(t0)$称为状态转移矩阵，记为$\Phi(t-t0)$
    - 给定初始状态，状态转移矩阵完全决定了状态转移特性，即：状态转移矩阵包含了系统自由运动的全部信息
    - 运动轨迹：系统自由运动轨迹是由从初始状态 到 t 时刻状态的转移刻画的
    - 转移起止时刻：起 t0、止 t
- 线性定常系统非齐次状态方程
  - 基于无穷级数定义的求解方法 —— 1 $e^{A(t-t0)} = I + A(t-t0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t0)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k(t-t0)^k + \ldots$
  - 基于坐标变换和标准型系统矩阵的求解方法 —— 求特征值$\lambda_1 \ldots \lambda_n$和特征向量T —— $e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$
  - 基于拉氏变换/反变换的求解方法 —— $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ —— $(sI-A)X(s) = x_0 \Longrightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}x_0$ —— $x(t) = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x_0$ —— $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x_0$
  - 基于凯莱-哈密顿定理的求解方法（无限项化为有限项） —— 1 —— $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots a_1A + a_0I = 0$
    - 有n个异根：$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
    - 有n个重根 $\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & (n-)\lambda_1^{n-3} & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ te^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$