NANJING UNIVERSITY

课程作业报告

数理逻辑读书报告

学生姓名：左皓升

学生学号：211250074

2023 年 11 月

概述

在整个数理逻辑课程的学习中，我在课堂上经常跟不上节奏，尤其是进入一阶逻辑的学习之后，我发现内容变得更加抽象，很难理解书本上抽象的定理和证明. 所以借这篇读书报告的机会，我反复阅读了一阶逻辑书本的内容，使用我觉得更加具象的方法表达我对书本内容的理解，思考了一些我自己感兴趣的点，结合书本上的一些题目，以及我做作业时没有搞明白的题目来完成这篇读书报告.

1． 一阶逻辑和命题逻辑

一阶逻辑和命题逻辑很显著的区别，便是引入了量词、谓词和变量，用量词来量化变量.

在命题逻辑中，原子也是一个命题，举一个命题逻辑中很简单和合式公式：$A \to B$

在这个句子中，A 和 B 都是命题符号，也是命题逻辑能表达的最小的粒度. 也就是说，命题符号只能表达句子之间的关系.

而来到一阶逻辑中，描述的最小的粒度也从命题/句子，缩小到了变量. 例如书本上给出的例子：$\forall x(Hx \to Mx)$.

在这里，$\forall x$ 指的是域内任意一个变量. 我们将为此符号 H 指定翻译为“是人”，将 M 翻译为“是好人”. 那么对于人类这个定义域，无论是 s, p, q（张三、李四、王五），都被 x 所代表. 也就是说，任意的“一个人是人”，便能得出“这个人是好人”.

在命题逻辑中拿出相似的例子：$H \to M$，只能将 H 翻译为“张三是人”，将 M 翻译为“张三是好人”，无法将句子拆开.

在这个对比中，命题逻辑只能描述一个人，而一阶逻辑可以描述所有人 (当然，也可以表示某一些人)，从这里不难看出，一阶逻辑使用谓词、变量来取代命题逻辑中的原子命题，原子的尺度从更大的“命题”变成了更小的项，也让语义更加丰富，描述的内容可以更加泛化，拓展了命题逻辑.

2． 一阶语言

书本从一阶语言开始，逐步带着我们探究一阶逻辑.

2.1 等于符号

书中提到，要给定一个一阶语言，一定要指明两点：1. 等于符号是否出现；2. 参数有哪些.

等于符号为何如此重要吸引力我的注意. 书中解释与其他二元谓词符号相比，等于符号是一个逻辑符号而非参数. 那这句话应该如何理解？这样的不同又怎么对一阶语言造成影响？

等于符号有着固定、普遍使用的逻辑含义，表示逻辑上的等价关系. 而这样特殊的逻辑性质也就意味着等于符号的含义是不依赖语境的.

将等于符号和另外一个二元谓词符号“ $<$ ”来进行对比. “ $<$ ”表示小于关系，但是在不同的语境中可以有不同的含义，这里举两个例子:

1. 数学中的小于关系，$P(5,10)$ 表示 “$5 < 10$” . 这里的“ $<$ ”是数值的比较，数字 5 小于 10.

2. 时间上的小于关系，$P(5:00, 10:00)$ 表示 “$5:00 < 10:00$”. 这里的“ $<$ ”是时间的先后顺序，5:00 早于 10:00.

这里可以看到，同一个谓词符号在不同的语境中有着不同的含义. 但是对于等于符号来说，在任何情形下，他都有着相同的含义. 例如，我们可以说 $P(5,5)$ 表示 “$5 = 5$”，这在任何情形下都是对的，而在任何情形下，“$5 = 6$” 都是错误的，对等于符号的理解不需要依赖情景或领域.

等于符号的引入使得能够在一阶语言中表达相等，引入等式，并且判断逻辑一致性，扩充了一阶语言的表达能力.

2.2 自由变量

书中给出了自由变量的递归定义. 从直观上理解，将合式公式用树表达出来. 如果一个变量 x 在树中某一个向上的路径中没有被 $\forall$ 修饰，那就认为这个变量 x 是自由出现的.

为了更好地理解和感受自由变量，我将书中定义转化为迭代来判断自由变量. 由于书中给出的递归并不是一个尾递归，而定义自由变量的本质也是遍历合式公式这棵 “树”，我便想到了使用栈，伪代码如下:

```
function IsFreeVariable(x, α):
    stack = []  // 用于存储待处理的合式公式
    stack.push(α)  // 将整个合式公式α放入栈中

    while stack is not empty:
        current = stack.pop()  // 从栈中取出当前合式公式

        if current is an atomic formula:
            if x occurs in current:
                return true  // x以自由形式出现在当前原子公式中

        else if current is of the form (¬ β):
            stack.push(β)  // 将子合式公式β放入栈中

        else if current is of the form (α → β):
            stack.push(α)  // 将子合式公式α放入栈中
            stack.push(β)  // 将子合式公式β放入栈中

        else if current is of the form (∀ vi β):
            if x = vi:
                continue  // 如果x与被量词修饰的变量相同，则忽略该子合式公式
            stack.push(β)  // 将子合式公式β放入栈中

    return false  // x未以自由形式出现在合式公式α中
```

习题 2.1 第九题

给出一个精确的定义说明：变量 x 在合式公式 α 中作为第 i 个符号自由出现

这里通过类比书上对自由变量的递归定义，给出一个定义：

(1) 对原子公式 α，变量 x 在 α 中作为第 i 个符号自由出现当且仅当 x 在 α 中作为第 i 个符号出现.

(2)x 在 $\neg\alpha$ 中作为第 i 个符号自由出现当且仅当 x 在 α 中作为第 $i-1$ 个符号自由出现.

(3)x 在 $(\alpha \to \beta)$ 中作为第 i 个符号自由出现当且仅当 x 在 α 中作为第 $i-1$ 个符号自由出现或者 x 在 β 中作为第 $(i - len(a) - 2$ 个符号自由出现，$len(a)$ 表示 α 的长度.

(4)x 在 $\forall v_1\alpha$ 中作为第 i 个符号自由出现当且仅当 x 在 α 中作为第 $i-2$ 个符号自由出现并且 $x \neq v_1$.

3． 真值与模型

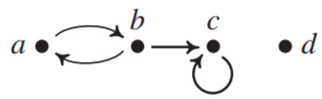
3.1 结构

初读结构的定义，觉得很抽象难懂，也难以理解结构到底起到什么作用. 但是书上这一个例子一下打开了我的思绪：

Example. Again assume the language has only the parameters $\forall$ and a two-place predicate symbol E. But this time, consider the *finite* structure $\mathfrak{B}$ with universe $|\mathfrak{B}|$ consisting of a set of four distinct objects $\{a, b, c, d\}$. Suppose the binary relation $E^{\mathfrak{B}}$ is the following set of pairs:

$$E^{\mathfrak{B}} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle\}.$$

Then we can picture $\mathfrak{B}$ as the *directed graph* whose vertex-set is the universe $\{a, b, c, d\}$:



Here we interpret Exy as saying there is an *edge* from vertex x to vertex y in the graph. (If the binary relation $E^{\mathfrak{B}}$ had been symmetric, then we could have pictured the structure as an undirected graph.)

图 1

我意识到，在使用一阶语言时，并没有指定出量词所指的域是什么，也没有指出每个谓词符号应该如何解释. 正如上文我们提到，我们可以将”<”翻译成数值上的小于，也可以是时间上的早于. 也没有提到，哪些是我们可以比较的对象.

考察 $\forall xPx$，这里我们可以有不同的理解

1. x 的论域是 $\{1,2,3,4,5\}$，Px 解释为“$x>0$”

2. x 的论域是南大学生，Px 的解释是数学很好

...

在第一个解释中，s 将 x 映射到 $\{1,2,3,4,5\}$ 中，并将 Px 映射为 $s(x)>0$. 这样，就在一个论域为 1, 2, 3, 4, 5，p 翻译为“ >0” 的结构上将合式公式翻译过来，使得合式公式有了具体的意义. 对于第二个例子而言，也是同样的. 一个简单的一阶语言合式公式，便可通过不同的的映射函数和结构获得完全不同的含义.

也就是说，一阶逻辑中的合式公式是抽象的，而通过函数 s 以及其衍生出的 $\bar{s}$，将抽象的公式转化到结构中，赋予了合式公式具体的意义.

习题 2.2 第三题 $\{\forall x(\alpha\to\beta),\forall x\alpha\}\models\forall x\beta$.

第一眼看过去，这和假言推理很像，似乎很显然是对的，我在第一次做作业时也是这么想的. 但是当再次理解完一阶逻辑和结构时，我对这道题目有了不一样的看法. 在这里，出现了 $\forall x$. 仅仅这一个合式公式并没有指明 $\forall x$ 的域，更没有指明具体的结构. 所以这里的证明理应放到结构中去，证明应当是对于任意的结构和映射，和结构、映射本身的具体内容没有关系.

$\forall x(\alpha\to\beta),\forall x\alpha$

$\Rightarrow$ 对每一个结构 A 和映射函数 s: V→|A|，有 $\models_A\forall x(\alpha\to\beta)[s]$ 并且 $\models_A\forall x\alpha$[s]

$\Rightarrow\forall d\in|A|,\models_A\forall x(\alpha\to\beta)[s(x|d)]$ 并且 $\models_A\forall x\alpha[s(x|d)]$

$\Rightarrow\forall d\in|A|,\models_A\forall x\alpha[s(x|d)]$ 并且 ($\not\models_A\forall x\alpha[s(x|d)]$ 或 $\models_A\forall x\beta[s(x|d)]$)

$\Rightarrow\forall d\in|A|,\models_A\forall x\alpha[s(x|d)]$

$\Rightarrow\forall d\in|A|,\models_A\forall x\beta[s(x|d)]$

$\Rightarrow\forall x\beta$

这道题目帮助我更好地理解了一阶逻辑与结构的关系.

习题 2.2 第十题

证明:

$$\models_A\forall\nu_2 Q\nu_1\nu_2[\![c^A]\!]\ iff.\ \models_A\forall\nu_2 Qc\nu_2$$

其中 Q 是二元谓词符号，c 是常数符号.

$\models_A\forall\nu_2 Q\nu_1\nu_2[\![c^A]\!]$

iff. 对每个 s : V→|A|，有 $s(\nu_1)=c^A$ 并且 $\models_A\forall\nu_2 Q\nu_1\nu_2[\![s]\!]$

iff. 对每个 s : V→|A|，有 $s(\nu_1)=c^A$ 并且对每个 $d\in|A|$，有 $\models_A Q\nu_1\nu_2[\![s(\nu_2|d)]\!]$

iff. 对每个 s : V→|A|，有 $s(\nu_1)=c^A$ 并且对每个 $d\in|A|$，有 $<s(\nu_1),d>\in Q$

iff. 对每个 $d\in|A|$，有 $<c^A,d>\in Q$

iff. 对每个 $d\in|A|$，有 $\models_A Qcd$

iff. $\models_A\forall\nu_2 Qc\nu_2$

4． 演绎计算

在解析算法之前，主要着重的是逻辑蕴含，这也是语义上的关系. 而来到演绎计算中，着重的是能够进行演绎，也就是通过公理或定理、规则能够在语法上证明出来.

我对这一章节的理解，就是通过六组公理以及规则 T、概化定理、演绎定理等进行推理证明. 在这里我遇到的最大困难是不知道从何下手去进行证明，在这里梳理一下我一开始没有做出来，并且觉得很有意思的演绎和证明.

习题 2.4 第三题

设 A 是结构，且令 s : V→|A|，在基本公式集上定义真值指派 v 如下：

$$\nu(\alpha) = T\ iff.\ \models_A \alpha[s].$$

证明：对于任意公式（基本与否均可），有

$$\overline{\nu}(\alpha) = T\ iff.\ \models_A \alpha[s].$$

通过归纳进行证明

1. 对于基本公式 α，$\overline{\nu}(\alpha) = \nu(\alpha) = T$ iff. $\models_A$ α[s].

2. $\overline{\nu}(\neg\alpha) = T$ iff. $\not\models_A$ α[s] iff. $\models_A$ $\neg\alpha$[s].

3. $\overline{\nu}(\alpha \to \beta) = T$

iff. $\nu(\alpha) = F$ or $\nu(\beta) = T$

iff. $\not\models_A$ α[s] or $\models_A$ β[s]

iff. $\not\models_A \alpha \to \beta[s]$.

通过以上，可以归纳出 $\overline{\nu}(\alpha) = T\ iff.\ \models_A \alpha[s]$.

习题 2.4 第四题

给出公式 $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$ 的 (从 $\emptyset$) 的一个演绎.

公式 $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$ 毫无疑问是正确的，我们使用自然语言也可以很容易地说明. 但是如何使用给出演绎却着实难以下手. 而通过几条基本公理、假言推理和规则 T，最终很巧妙的得到了这样的一个演绎.

(1)$\forall x\emptyset \to \emptyset.\ Ax2.$

(2)$\forall x\neg\emptyset \to \neg\emptyset.\ Ax2.$

(3)$(\forall x\emptyset \to \emptyset) \to (\forall x\neg\emptyset \to \neg\emptyset) \to \forall x\emptyset \to \neg\forall x\neg\emptyset.\ T.$

(4)$(\forall x\neg\emptyset \to \neg\emptyset) \to \forall x\emptyset \to \neg\forall x\neg\emptyset.\ 1, 3;\ MP.$

(5)$\forall x\emptyset \to \neg\forall x\neg\emptyset.\ 2, 4;\ MP.$

(6)$\forall x\varphi \to \exists x\varphi.$

习题 2.4 第十四题

证明:

$$\vdash (\forall x((\neg Px) \to Qx) \to \forall y((\neg Qy) \to Py))$$

(1)$\vdash ((\neg Px) \to Qx) \to ((\neg Qx) \to Px).\ Ax1.$

(2)$\vdash \forall x[((\neg Px) \to Qx) \to ((\neg Qx) \to Px)].\ 1;\ gen.$

(3)$\vdash \forall x[((\neg Px) \to Qx) \to ((\neg Qx) \to Px)]$

$\to \forall x((\neg Px) \to Qx) \to \forall x((\neg Qx) \to Px).\ Ax3.$

(4)$\vdash \forall x((\neg Px) \to Qx) \to \forall x((\neg Qx) \to Px).\ 2, 3;\ MP.$

(5)$\forall x((\neg Px) \to Qx) \vdash \forall x((\neg Qx) \to Px).\ 4;\ MP.$

(6)$\vdash \forall x((\neg Qx) \to Px) \to ((\neg Qy) \to Py).\ Ax2.$

(7)$\forall x((\neg Px) \to Qx) \vdash ((\neg Qy) \to Py).\ 5, 6;\ MP.$

(8)$\forall x((\neg Px) \to Qx) \vdash \forall y((\neg Qy) \to Py).\ 7;\ G.$

(9)$\vdash (\forall x((\neg Px) \to Qx) \to \forall y((\neg Qy) \to Py)).\ 8;\ ded.$