1. 概述

曲线相交计算是计算机辅助集合设计中的一种基础问题。Sederberg和Meyer提出用两个细分的包围框去计算两条曲线的交点。他们的方法可以有效的计算出两条曲线的交点。但是，当两条曲线重合时，他们的方法将会导致产生无限的细分。事实上，当两条曲线重合时，大多数的求交点算法都不适用。一个好的CAD系统应该有能力在计算两条曲线焦点之前判断两条曲线是否重合。

Hu等人指出，如果两条C∞连续的曲线重合，则这两条曲线将不会有任何一处分离。这个结论可以用来寻找重合部分的起点和终点。但是，这个结论无法用于判断两条曲线是否重合。

还有一种方法去判断两条曲线是否重合：在一条曲线上采集足够多的点，然后判断这些点是否在另一条曲线上。Garcial and Li 指出这个方法需要的方程数与控制点数量和阶数相关(累乘)。因此，如果两条曲线有足够多的交点，则可以判断两条曲线重合。但是，判定一个点是否在参数曲线上并不是一件容易的事，它很费时间。

三阶贝塞尔曲线广泛应用与CAD系统中。本文提出了判定两条三阶贝塞尔曲线是否重合的充分条件和必要条件。它只需要少量的计算就可以判断两条曲线重合。

1. 充分必要条件

令和为两条三阶贝塞尔曲线。当A(t)的四个控制点共线时，B(s)的控制点也应共线。如果控制点和在控制点和之间，和在和之间，很明显，当且仅当=且=或=且=时，两条曲线重合。除此之外，我们改变控制点的坐标，使控制点全部位于X轴上。令和分表表示A(t)X轴最小最大值；令和分辨标志B(s)X轴上的最小最大值。很明显，当且仅当=且=时，A(t)和B(s)重合。

然后我们假设A(t)的四个控制点不共线，不失一般性，我们将设置在坐标原点。由于A(t)和B(s)重合，所以对于任意，都存在满足。同样的，对于任意，存在满足。我们将这个关系改写成多项式形式：

(1)

(2)

(3)

此处

**推论 2.1.** 等式(4)可以由等式(1)-(3)推导出，其中:

(4)

**证明.** 考虑系数，和。

1. 如果其中两个或三个参数等于0，不失一般性，我们假设==0。则和不能同时等于0，因为A(t)的四个控制点不共线。因此等式(1)或等式(2)有与等式(4)相同的形式。
2. 如果其中两个参数不等于0，不失一般性，我们假设且，等式(1)乘以，减去等式(2)乘以得到

1. 如果，等式(1)乘以，减去等式(3)乘以得到一个相似的等数，其和的系数分别表示为和。因为不共线，和不能同时等于0;综上得到等式(4)。
2. 如果且，等式(3)有与等式(4)相同的形式。否则，。由于不共线,所以或。综上得到等式(4)。

现在我们通过分析等式(4)来考虑控制点和之间的关系。

1. 如果且，等式(4)可以表示为

（5）

1. 如果，则且。
2. 如果，则t和s的取值范围分别为和。因为t和s可以为区间内的任意值，因此我们得到和。因此得到和。由前两个不等式我们可以得到，是由后两个不等式得到的。因此可以得到且。在这种情况下，。是的逆转曲线。
3. 如果，同理，我们可以得到和。
4. 如果或将等式(5)代入等式1中并将变换为对应的多项式。用来表示。因为对于任意有，所以有。因此，在 中的系数等于0。如果，中的系数为，这意味着。否则且。的系数为。我们可以得到。同理可得。如同推论 2.1 一般，我们可以证明存在由以下形式的等式：

.

同样地，如果，我们可以得到或**。**否则，这表示的控制点共线。这与前提条件冲突。另一方面，如果或，很明显，两条曲线重合。

1. 如果，等式可以表示为

通过求解上面方程式可得t：

在这，上任意一点对应在的点的参数。由于上有无数个点，所有有无限数量t和s满足或。不失一般性，我们假设对于无限个t和s成立。将代入等式1中得到

上面等式表示为。方程两边同时平方得到。根据假设，多项式方程有无数个解。因此该方程为恒等式方程。这里有两种可能：或必然为一多项式方程。

如果，那么，且。因为和不能同时为0，所以。

现在，我们考虑为多项式的情况。已知，则或。显然。为了方便起见，我们将t和s的关系式重写为或。相应地，或。不失一般性，我们假设本文其余部分的，则，，和的取值范围分别为,，和。

现在我们证明以下推论

**推论 2.2.** 如果在区间，则不存在在中。

**证明.** 如果推论不成立，令为的取值区间和令为的取值区间，当处于内时，将代入等式1中得到

我们得到以下等式：

(6)

同样地，在区间中，我们得到以下等式：

(7)

比较等式6与等式7得到

=

因为，从上面等式可以得到和。同理可得，，和。这代表

上面两个等式表明这四个控制点时共线的，这与前提条件冲突。在推论 2.2的基础上，我们得到以下推论。

**推论 2.3.** 至少满足以下条件之一

1. 和
2. 和

**证明.** 假设(i)和(ii)中的皆不成立。在不失一般性前提下，我们假设。因为t可以为中的任意值，因此存在在区间中。有推论2.2得知。根据假设。因此，存在在区间中。同理，存在在中，这与推论2.3冲突。

我们根据推论2.3分析和之间的关系。

1. 如果条件(i)成立条件(ii)不成立，存在在区间上。因为，有且，所以可得到。另一方面，，。因此，。从而可以得到和。两条曲线控制点之间的关系为**。**
2. 如果条件(ii)成立调教(i)不成立，存在在区间中。同样地，我们可以得到和。我们很容易可以得到两条曲线控制点之间的关系。很明显两条曲线是重合的。
3. 如果条件(i)和(ii)都成立，则存在无限个t和s满足或。需要注意的是等式(1)~(3)都是多项式等式。如果有无限多个t和s满足条件，那么可以得到，否则得到。

综上所述，我们得到关于判定两条三阶贝塞尔曲线重合有以下结论。

**结论 2.4.** 当且仅当两条三阶贝塞尔曲线的控制点重合或一条曲线是另一条曲线的反转曲线时，两条曲线重合。

1. **讨论**

关于结论2.4是否适用于阶数大于3的曲线？事实上，结论2.4不适用于四阶贝塞尔曲线，我们可以使用不同的参数化方式去将二阶贝塞尔曲线转换为四阶贝塞尔曲线。例如，令为一个二阶贝塞尔曲线。我们将曲线重新参数化得到如下：

*.*

通过重新参数化后，二阶曲线转换为了四阶曲线。新的控制点计算方法如下：

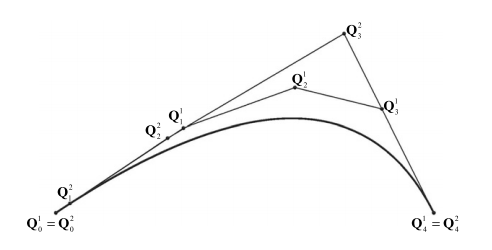


图1 两条具有不同控制点的重合四阶贝塞尔曲线

显然，不同的a值会产生不同的控制点，但是它们表示了同一条几何曲线。因此，第二节中的条件不适用于四阶曲线。例如，令，和。当时，控制点分别为，，，和。当时，控制点分别为，，，和。尽管相应的控制点并不重合，但是两条四阶贝塞尔曲线时重合的(见图1)。

我们可以通过对四阶曲线进行曲线升阶得到阶数高于4的曲线。因此两条阶数高于4的重合的贝塞尔曲线可能有不同的。将来，我们将研究判定更高阶的贝塞尔曲线重合需要满足的条件。

1. **结论**

本文介绍了判断两条三阶贝塞尔曲线重合的充分必要条件。当给定的控制点共线时，我们转变控制点的坐标，使控制点全部位于在X轴上。当且仅当一条曲线的最大x值和最小x值分别等于另一条曲线的最大x值和最小x值时，两条曲线重合。当曲线的控制点不共线时，当且仅当或时，两条曲线重合。 也就是说，如果和重合，则和具有相同的参数化形式或是的反转曲线。