

САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема: Таблиця інтегралів.

Мета: сформулювати теорему Коші, засвоїти таблицю основних невизначених інтегралів (ТОНІ).

План

1. Теорема (Коші).
2. Таблиця основних невизначених інтегралів(ТОНІ).

Література:

1. Вища математика: Зб. задач: Навч. посібник/В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та інші; За ред.. В. П. Дубовика, І. І. Юрика.– К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
2. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. /Х. І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П Овчинникова. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400 с. – Серія: Математичні науки
4. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики для технікумів. – Київ,: Вища школа, 1970. – 397 с.
5. Бугір І.Л. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 520 с.

Методичні рекомендації

Зразок конспекта самостійної роботи студента.

Теорема (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження. Є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x}, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \cos x^2 dx$$

Які існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці інтеграли називають «неінтегровними».

Таблиця основних невизначених інтегралів(ТОНІ).

1. $\int 0 \cdot dx = C;$ 2. $\int dx = x + C;$ 3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$ 5. $\int e^x dx = e^x + C;$ 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ 8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$ 12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C;$ 14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;$
17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$
18. $\int \frac{d}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;$
19. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C;$
20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0;$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$

Контрольні запитання:

- 1) Для функцій: а) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 1; \\ 0, & \text{якщо } x < 1; \end{cases}$ б) $f_2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; в) $f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \end{cases}$
- г) $f_4(x) = e^{-x}$; д) $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

існують невизначені інтеграли для будь-яких дійсних значень x . (Зазначте правильні твердження.)

2) При знаходженні інтеграла $\int \left(2x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$ треба скористатись такими властивостями невизначеного інтеграла, як ...

- 3) Для функцій: а) $f_1(x) = \frac{1}{\ln x}$; б) $f_2(x) = a^x$; в) $f_3(x) = \begin{cases} 10, & \text{якщо } x = 0; \\ \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } x \neq 0 \end{cases}$

існують невизначені інтеграли за таких умов: ...

Форма контролю: індивідуальне опитування на практичному занятті.

САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема: Метод заміни змінної, інтегрування частинами

Мета: Навчитися обчислювати невизначені інтеграли методом заміни змінної, інтегруванням частинами.

План

1. Метод заміни змінної.
2. Інтегрування частинами.
3. Розв'язання завдань.

Література:

1. Вища математика: Зб. задач: Навч. посібник/В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та інші; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика.– К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
2. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. /Х. І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П Овчинникова. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400 с. – Серія: Математичні науки
4. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики для технікумів. – Київ,: Вища школа, 1970. – 397 с.
5. Бугір І.Л. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 520 с.

Методичні рекомендації

Номер варіанту самостійної роботи студента повинен відповідати його порядковому номеру в журналі групи.

Роботу виконують в окремому зошиті для самостійних робіт.

Перед розв'язанням завдання самостійної роботи, його умова переписується повністю. Там, де завдання має загальне формулювання, записуючи його умову, потрібно загальні дані замінити конкретними із особистого варіанту студента.

Розв'язання супроводжувати необхідними поясненнями і завершувати наданням повної відповіді.

Завдання самостійної роботи:

Завдання 10. Знайти інтеграл.

10.1. $\int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx.$

10.2. $\int (4x^3 - 5e^x + 1) dx.$

10.3. $\int \left(\frac{3}{4} \sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx.$

10.4. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4 \operatorname{tg} x - 9 \right) dx.$

10.5. $\int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx.$

10.6. $\int \left(2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx.$

10.7. $\int (\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + 3) dx.$

10.8. $\int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx.$

10.9. $\int \left(5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx.$

10.10. $\int \left(\cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx.$

10.11. $\int \left(5x - 3 \operatorname{ctg} x + \frac{4}{x^3} \right) dx$

10.12. $\int \left(4^x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx.$

10.13. $\int \left(x^2 - \frac{3}{\sin^2 x} - 5 \right) dx$

10.14. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx.$

10.15. $\int \left(2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5 + x^2}} + 7 \right) dx$

10.16. $\int \left(4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx.$

10.17. $\int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx$

10.18. $\int (3x^2 - 5 \operatorname{tg} x + 2) dx.$

10.19. $\int \left(7x^6 + \frac{3}{x^2 - 9} + 2 \right) dx$

10.20. $\int \left(5x^4 + 4 \sin x - \frac{2}{x} \right) dx.$

10.21. $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx.$

10.22. $\int \left(2x^3 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx.$

10.23. $\int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx$

10.24. $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4} + 2 \right) dx.$

10.25. $\int \left(\sqrt[5]{x^3} - \frac{4}{x^5} + 2 \sin x \right) dx$

10.26. $\int \left(3x - \frac{5}{x^2 + 4} - 1 \right) dx.$

10.27. $\int \left(3 \operatorname{tg} x - \frac{2}{x^4} + 5 \right) dx$

10.28. $\int \left(4x^3 - \cos x + \frac{6}{x^3} \right) dx.$

10.29. $\int \left(\frac{3}{5 + x^2} - \frac{7}{x^3} + 5x \right) dx$

10.30. $\int (3 \operatorname{ctg} x - 5\sqrt[3]{x^2} + 2^x) dx.$

Завдання 11. Знайти інтеграл.

11.1. $\int \sqrt{3 + x} dx.$

11.2. $\int \sin(3x - 2) dx.$

11.3. $\int \sqrt[3]{(1 + x)^2} dx$

11.4. $\int \frac{dx}{\cos^2(4x - 3)}.$

11.5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x + 7)}$

11.6. $\int e^{2x+3} dx.$

11.7. $\int (5 - 4x)^7 dx.$

11.8. $\int \operatorname{tg}(2 + 3x) dx.$

11.9. $\int \sin(5 + 3x) dx$

11.10. $\int \sqrt[3]{2 + 5x} dx.$

11.11. $\int \frac{3}{\sqrt{5 - 4x}} dx$

11.12. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x - 5)}.$

11.13. $\int \operatorname{ctg}(4x - 3) dx$

11.14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - 4x)^2}}.$

11.15. $\int \frac{dx}{(5x + 6)^2}$

11.16. $\int 3^{2x-5} dx.$

11.17. $\int \frac{5}{\cos^2(4x + 7)} dx$

11.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}.$

11.19. $\int \sin(7x - 5) dx.$

11.20. $\int \frac{dx}{(3x - 5)^4}.$

11.21. $\int \frac{dx}{(2 + x)^3}.$

11.22. $\int \operatorname{ctg}(5 - 3x) dx.$

11.23. $\int e^{5x+4} dx$

11.24. $\int \sqrt[5]{(6 - 5x)^2} dx.$

11.25. $\int \frac{2 dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

11.26. $\int \sin(4x + 3) dx.$

11.27. $\int \sqrt{3 - 4x} dx$

11.28. $\int \frac{7 dx}{\sin^2(2x - 5)}.$

11.29. $\int \operatorname{ctg}(7x + 4) dx.$

$$11.30. \int \frac{6dx}{2x+5}.$$

Завдання 12. Знайти інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

$$12.1. \int \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}.$$

$$12.11. \int \cos x e^{\sin x} dx.$$

$$12.21. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$12.2. \int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$12.12. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$12.22. \int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx.$$

$$12.3. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x}.$$

$$12.13. \int \frac{2}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx.$$

$$12.23. \int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5} dx.$$

$$12.4. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}.$$

$$12.14. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}.$$

$$12.24. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$12.5. \int \frac{5}{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x} dx.$$

$$12.15. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx.$$

$$12.25. \int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^4 x}.$$

$$12.6. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$12.16. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$12.26. \int \frac{\sqrt[3]{\log_2(x-8)}}{x-8} dx.$$

$$12.7. \int \frac{5}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$12.17. \int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx.$$

$$12.27. \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{3x^2} dx.$$

$$12.8. \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

$$12.18. \int \frac{3dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}}.$$

$$12.28. \int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{x^3-4}}.$$

$$12.9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}.$$

$$12.19. \int \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$12.29. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$12.10. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$12.20. \int \frac{4}{(1+x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$12.30. \int 5x \operatorname{tg}(1+x^2) dx$$

Завдання 13. Знайти інтеграл за формулою інтегрування частинами.

$$13.1. \int (2x-7)\cos x dx.$$

$$13.11. \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$13.21. \int (2x+3)\log_3 x dx.$$

$$13.2. \int (3x-4)e^x dx.$$

$$13.12. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$13.22. \int (3x-5)\sin x dx.$$

$$13.3. \int (x-5)\ln x dx.$$

$$13.13. \int (x-3)\log_2 x dx.$$

$$13.23. \int (3x-4)e^x dx.$$

$$13.4. \int 3\arcsin x dx.$$

$$13.14. \int (3x+4)\cos x dx.$$

$$13.24. \int 4x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$13.5. \int (4x+3)\sin x dx.$$

$$13.15. \int (6x+2)e^x dx.$$

$$13.25. \int x \cos(x+6) dx.$$

$$13.6. \int x^3 \ln x dx.$$

$$13.16. \int 3x^2 \ln x dx.$$

$$13.26. \int (3x^2-4)\ln x dx.$$

$$13.7. \int (2x-9)3^x dx.$$

$$13.17. \int \arccos x dx.$$

$$13.27. \int \ln(2x-1) dx.$$

$$13.8. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$13.18. \int (5x-2)3^x dx.$$

$$13.28. \int (2x+3)\sin x dx.$$

$$13.9. \int 4x^3 \ln x dx.$$

$$13.19. \int (5x+4)\cos x dx.$$

$$13.29. \int (5x-4)3^x dx.$$

$$13.10. \int (3x+5)\sin x dx.$$

$$13.20. \int 7x \ln x dx.$$

$$13.30. \int 2x \operatorname{arctg} x dx.$$

Захист самостійної роботи:

Самостійну роботу, виконану в особистому зошиті для самостійних робіт, студент надає викладачу для перевірки. Робота вважається зарахованою, якщо студент має навички розв'язання аналогічних завдань і грамотно формулює відповіді на запитання із загальної теорії інтегрального числення.

Форма контролю: індивідуальна письмова робота.

САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема: Інтегрування ірраціональних функцій.

Мета: Навчитися обчислювати невизначені інтеграли від ірраціональних функцій.

План

1. Інтегрування виду $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$.
2. Інтеграли виду $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$.
3. Інтеграли від диференційного бінома.

Література:

1. Вища математика: Зб. задач: Навч. посібник/В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та інші; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
2. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. /Х. І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П Овчинникова. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400 с. – Серія: Математичні науки
4. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики для технікумів. – Київ, Вища школа, 1970. – 397 с.
5. Бугір І.Л. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 520 с.

Методичні рекомендації

- 1) Інтегрування виду $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів; m, \dots, r, n, \dots, s - цілі числа, підстановка $x = t^k$ (k – найменший загальний кратне число n, \dots, s) зводять до інтегралу від раціональних функцій.

Аналогічно знаходять інтеграли виду

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right) dx$$

Треба використовувати підстановку $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt =$$

$$\text{a) } = 6 \int \frac{t^3 + 1}{t+1} dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} = 6 \int (t^2 + t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} = 6 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right) - 6 \ln|t+1| + c =$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + 1 \right) - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1} + 1} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2x+1} \\ 2x+1 = t^2 \\ 2x = t^2 - 1 \\ x = \frac{t^2 - 1}{2} \\ dx = t dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^2 - 1}{2} t dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1)t dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)(t+1)t dt}{t+1} =$$

$$\text{б) } = \frac{1}{2} \int (t^2 - t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) + c = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} - \frac{2x+1}{2} \right) + c$$

2) Інтеграли виду:

а) $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$. В цьому випадку використовують підстановку $x = a \sin t$.

б) $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$. В цьому випадку використовують підстановку $x = a \operatorname{tg} t$

Приклад:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{3^2-x^2}} = \left. \begin{array}{l} x = 3 \sin t \\ \sin t = \frac{x}{3} \\ t = \arcsin \frac{x}{3} \\ dx = 3 \cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{3 \cos t dt}{9 \sin^2 t \sqrt{9-9 \sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cos t} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9} \operatorname{ctg} t + c = \frac{1}{9} \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{3} \right) + c = -\frac{\cos t}{9 \sin t} + c =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{9 \cdot \frac{x}{3}} + c = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$

3) Інтеграли від диференційного бінома.

Ці інтеграли мають вид $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа; a, b – дійсні числа.

а) p – ціле число. Використовується підстановка $\sqrt[k]{x} = t$, де k – загальний знаменник для m та n .

б) $p = \frac{r}{s}$. Як що $\frac{m+1}{n} - \frac{r}{s}$ – ціле число або нуль, тоді використовується підстановка $a + bx^n = t^s$.

Приклад:

$$\int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left. \begin{array}{l} m = -\frac{2}{3} \quad n = \frac{1}{3} \\ \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1 \\ 1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2 \\ x = (t^2 - 1)^3 \quad dx = 3(t^2 - 1)2t dt \end{array} \right| = \int \left((t^2 - 1)^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot t \cdot 6t(t^2 - 1)^2 dt =$$

$$= 6 \int (t^2 - 1)^{-2} t^2 (t^2 - 1)^2 dt = 6 \int t^2 dt = \frac{6t^3}{3} + c = 2t^3 + c =$$

$$= 2 \left(\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \right)^3 + c = 2 \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

в) Як що $\frac{m+1}{n}$ - дріб, а $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ - ціле або нуль, то використовують підстановку $a + bx^n = x^n t^s$.

Приклад :

$$\int x^{-3} (1 - x^4)^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{m+1}{n} = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ 1 - x^4 = x^4 t^2 \\ x^4 t^2 + x^4 = 1 \quad x^4 (t^2 + 1) = 1 = \\ x^4 = \frac{1}{t^2 + 1} \quad x = (t^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} \\ dx = -\frac{1}{4} (t^2 + 1)^{-\frac{5}{4}} 2t dt = \\ = -\frac{1}{2} t (t^2 + 1)^{-\frac{5}{4}} dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left((t^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} \right)^{-3} \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} t (t^2 + 1)^{-\frac{5}{4}} dt = -\frac{1}{2} \int (t^2 + 1)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{t^2}{t^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} t (t^2 + 1)^{-\frac{5}{4}} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (t^2 + 1)^{\frac{3}{4}} (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} t^2 (t^2 + 1)^{-\frac{5}{4}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = -\frac{1}{2} (t - \operatorname{arctg} t) + c = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 - x^4}}{x^2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x^2} \right) + c$$

Обчислити наступні інтеграли:

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt[3]{x} + 1)} dx$

9. $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$

2. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx$

10. $\int x^3 \cdot (1 + 2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$

3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$

7. $\int x \cdot \sqrt{x-3} dx$

11. $\int \frac{1}{(x-1) \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$

4. $\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} dx$

8. $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

12. $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx$

САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема: Метод невизначених коефіцієнтів.

Мета: Навчитися обчислювати невизначені інтеграли від раціональних функцій методом невизначених коефіцієнтів.

План

1. Обчислити інтеграли за індивідуальним завданням.

Література:

1. Вища математика: Зб. задач: Навч. посібник/В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та інші; За ред.. В. П. Дубовика, І. І. Юрика.– К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
2. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. /Х. І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П Овчинникова. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400 с. – Серія: Математичні науки
4. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики для технікумів. – Київ, Вища школа, 1970. – 397 с.
5. Бугір І.Л. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 520 с.

Методичні рекомендації

Номер варіанту самостійної роботи студента повинен відповідати його порядковому номеру в журналі групи.

Роботу виконують в окремому зошиті для самостійних робіт.

Розв'язання супроводжувати необхідними поясненнями і завершувати наданням повної відповіді.

Захист самостійної роботи:

Самостійну роботу, виконану в особистому зошиті для самостійних робіт, студент надає викладачу для перевірки. Робота вважається зарахованою, якщо студент має навички розв'язання аналогічних завдань і грамотно формулює відповіді на запитання із загальної теорії інтегрального числення.

А) Обчислити інтеграли методом невизначених коефіцієнтів.

15.1. $\int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.

15.20. $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

15.2. $\int \frac{43x - 67}{(x - 1)(x^2 - x - 12)} dx$.

15.21. $\int \frac{3x - x^2 - 2}{x(x + 1)^2} dx$.

15.3. $\int \frac{8x dx}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)}$.

15.22. $\int \frac{x^3 - 3}{(x - 1)(x^2 - 1)} dx$.

15.4. $\int \frac{6x^2 + 6x - 6}{(x + 1)(x^2 + x - 2)} dx$.

15.23. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.

15.5. $\int \frac{37x - 85}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$.

15.24. $\int \frac{4x dx}{(x^2 - 1)(x + 1)}$.

15.6. $\int \frac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2 - x - 2)(x - 3)} dx$.

15.25. $\int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

15.7. $\int \frac{3x^2 - 15}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} dx$.

15.26. $\int \frac{3x^2 + 2}{x(x + 1)^2} dx$.

15.8. $\int \frac{x^2 - 19x + 6}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} dx$.

15.27. $\int \frac{x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

15.9. $\int \frac{6x dx}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

15.28. $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{(x^2 - x)(x - 1)} dx$.

15.10. $\int \frac{4x^2 + 32x + 52}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx$.

15.29. $\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2} dx$.

15.11. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$.

15.30. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$.

15.12. $\int \frac{6x^2}{(x - 1)(x^2 + 3x + 2)} dx$.

15.13. $\int \frac{6x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$.

15.14. $\int \frac{2x^2 - 26}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.

15.15. $\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x + 1)(x^2 + 8x + 15)} dx$.

15.16. $\int \frac{7x^2 - 17x}{(x - 2)(x^2 - 2x - 3)} dx$.

15.17. $\int \frac{3x^2 - 17x + 2}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)} dx$.

15.18. $\int \frac{4x^2}{(x^2 - 2x + 1)(x + 1)} dx$.

15.19. $\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx$.

Б) Обчислити інтеграли.

$$16.1. \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$16.2. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$16.3. \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$16.4. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$$

$$16.5. \int \frac{xdx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

$$16.6. \int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}.$$

$$16.7. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

$$16.8. \int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx.$$

$$16.9. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

$$16.10. \int \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx.$$

$$16.11. \int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}.$$

$$16.12. \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx.$$

$$16.13. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}.$$

$$16.14. \int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x-1)^3}.$$

$$16.15. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$$

$$16.16. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

$$16.17. \int \frac{dx}{1 + x^3}.$$

$$16.18. \int \frac{xdx}{x^3 - 1}.$$

$$16.19. \int \frac{x^2 dx}{1 - x^4}.$$

$$16.20. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2 + 1)}.$$

$$16.21. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}.$$

$$16.22. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

$$16.23. \int \frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1) dx}{x^4 + x}.$$

$$16.24. \int \frac{(7x - 15)dx}{x^3 - 2x^2 + 5x}.$$

$$16.25. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$16.26. \int \frac{dx}{(1 + x^2)^4}.$$

$$16.27. \int \frac{2x - 3}{x^2 - 7x + 12} dx.$$

$$16.28. \int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx.$$

$$16.29. \int \frac{(x+1)^3 dx}{x^2 - x}.$$

$$16.30. \int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2} dx.$$

САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема: Інтегрування тригонометричних функцій.

Мета: Навчитися обчислювати невизначені інтеграли, які містять тригонометричні, ірраціональні функції.

План

1. Знайти інтеграли згідно варіанта.

Література:

1. Вища математика: Зб. задач: Навч. посібник/В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та інші; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
2. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. /Х. І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; За заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П.П Овчинникова. – 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400 с. – Серія: Математичні науки
4. Зайцев І.Л. Елементи вищої математики для технікумів. – Київ, Вища школа, 1970. – 397 с.
5. Бугір І.Л. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 520 с.

Методичні рекомендації

Номер варіанту самостійної роботи студента повинен відповідати його порядковому номеру в журналі групи.

Роботу виконують в окремому зошиті для самостійних робіт.

Перед розв'язанням завдання самостійної роботи, його умова переписується повністю. Там, де завдання має загальне формулювання, записуючи його умову, потрібно загальні дані замінити конкретними із особистого варіанту студента.

Розв'язання супроводжувати необхідними поясненнями і завершувати наданням повної відповіді.

Завдання самостійної роботи:

Завдання. Знайти інтеграл.

16.1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.

16.3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-4}}$.

16.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

16.2. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$.

16.4. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

16.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

$$16.7. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x - 4\sqrt[3]{x^2}}$$

$$16.8. \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} dx.$$

$$16.9. \int \frac{\sqrt[6]{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}}.$$

$$16.10. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x-8}}$$

$$16.11. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[3]{x}}.$$

$$16.12. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$16.13. \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

$$16.14. \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$16.15. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}.$$

$$16.16. \int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1 + \sqrt[3]{x+3}}.$$

$$16.17. \int \frac{(\sqrt{x}-1) dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}.$$

$$16.18. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$16.19. \int \frac{\sqrt[6]{x-1} dx}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$16.20. \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx.$$

$$16.21. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[4]{x}}.$$

$$16.22. \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

$$16.23. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

$$16.24. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx.$$

$$16.25. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}.$$

$$16.26. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + 1} dx.$$

$$16.27. \int \frac{(x+1) dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

$$16.28. \int \frac{x^3}{\sqrt{x+2}} dx.$$

$$16.29. \int \frac{dx}{3 + \sqrt{x-6}}.$$

$$16.30. \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{(1 + \sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx.$$

Завдання 17. Знайти інтеграл.

$$17.1. \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$$

$$17.2. \int \frac{dx}{5 \cos x + 10 \sin x}.$$

$$17.3. \int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}.$$

$$17.4. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}.$$

$$17.5. \int \frac{dx}{3 + 6 \sin x - 2 \cos x}.$$

$$17.6. \int \frac{dx}{3 + 4 \sin x + 2 \cos x}.$$

$$17.7. \int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x}.$$

$$17.8. \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 2 \cos x}.$$

$$17.9. \int \frac{dx}{4 + 3 \sin x - 2 \cos x}.$$

$$17.10. \int \frac{dx}{3 + 2 \cos x - \sin x}.$$

$$17.11. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.12. \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}.$$

$$17.13. \int \frac{dx}{7 + 6 \sin x - 5 \cos x}.$$

$$17.14. \int \frac{dx}{5 - 3 \sin x + 6 \cos x}.$$

$$17.15. \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$$

$$17.16. \int \frac{dx}{2 + 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.17. \int \frac{dx}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.18. \int \frac{dx}{7 + 4 \sin x + 6 \cos x}.$$

$$17.19. \int \frac{dx}{4 - 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.20. \int \frac{dx}{7 \sin x - 3 \cos x}.$$

$$17.21. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x + 6 \cos x}.$$

$$17.22. \int \frac{dx}{2 + 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.23. \int \frac{dx}{7 - 3 \sin x + 2 \cos x}.$$

$$17.24. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}.$$

$$17.25. \int \frac{dx}{4 - 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.26. \int \frac{dx}{2 + 3 \sin x - 2 \cos x}.$$

$$17.27. \int \frac{dx}{1 - \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.28. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x - 5 \sin x}.$$

$$17.29. \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$$

$$17.30. \int \frac{4 dx}{3 + 2 \sin x - 5 \cos x}.$$

Самостійну роботу, виконану в особистому зошиті для самостійних робіт, студент надає викладачу для перевірки. Робота вважається зарахованою, якщо студент має навички розв'язання аналогічних завдань і грамотно формулює відповіді на запитання із загальної теорії інтегрального числення.

Форма контролю: індивідуальна письмова робота.