Lecture 17 Pressure-Velocity Coupling

汪　洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

August 2022

二维定常层流控制方程

- x 方向动量方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+S_u$$

- y 方向动量方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v v)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+S_v$$

- 连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0$$

- 突然发现压力梯度项成为主要的源项了。

控制方程特点

- 上面的公式可以发现两个问题。
- 第一个问题，对流项变成了非线性项了，ρu^2
- 第二个问题，速度项在三个方程都出现了，并且会发现压力项没有方程求解。
- 换个角度看，动量方程求解速度，连续性方程求解压力，但是连续性方程没有显含压力，那么连续性方程的作用大体上相当于一种约束。就是说，通过动量方程求解的速度要满足连续性方程，也即速度散度为零。

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- ▸ Patankar and Spalding 1972，提出一种迭代求解思路
- 1. 通过预测的速度分量计算面心上的扩散通量 F
- 2. 通过猜测的压力场求解动量方程
- 3. 通过连续性方程推导出压力修正方程
- 4. 然后更新速度场和压力场
- 使用初始的速度和压力场开始迭代，然后逐步改进这些猜测的场，直到最终收敛

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 对于不可压缩流动，常见控制方程如下

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla(\nu \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{g} + \sigma\kappa\nabla\alpha \tag{2}$$

- 对于不可压缩定常流动控制方程如下

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla(\nu \nabla \mathbf{U}) \tag{4}$$

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 对于不可压缩定常流动控制方程如下

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) - \nabla(\nu \nabla \mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{6}$$

- 半隐式离散

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p \tag{7}$$

- 系数矩阵 $\mathcal{M}$ 已经通过有限体积法离散，公式 7 的压力梯度为运动压力 (kinematic pressure)。 ▸ kinematic pressure

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 考虑 x 方向动量方程

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 \cdots \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_n \right]' \tag{8}$$

- 这里有 n 个方程
- 系数 $M_{i,j}$ 都是已知

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 关键推导步骤

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p \tag{9}$$

$$\mathcal{A}\mathbf{U} - \mathcal{H} = -\nabla p \tag{10}$$

- $\mathcal{H}$ 由两部分组成，transport part 和 source part。
- 输运部分，矩阵相邻单元系数乘以对应的速度
- 源项部分，不包括压力项在内的其他项
- 更多细节参考 Jasak1996 第 3.8 节和 Tessa2019 第 2.3.1 节
- 在 OpenFOAM 中，`fvVectorMatrix UEqn(fvm::div(phi,U) - fvm::laplacian(nu,U) == -fvc::grad(p));`

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 系数矩阵 $\mathcal{A}$ 是对角矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

- 所以系数矩阵 $\mathcal{A}$ 非常容易求出逆矩阵

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/A_{nn} \end{bmatrix} \tag{12}$$

- 在 OpenFOAM 中，`volScalarField A = UEqn.A();`

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 通过公式 $9, 10$ 可以推出，$\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}\mathbf{U} - \mathcal{M}\mathbf{U} \tag{13}$$

- 在 OpenFOAM 中，`volScalarField H = UEqn.H();`

- 又由于已知

$$\mathcal{A}\mathbf{U} - \mathcal{H} = -\nabla p \tag{14}$$

$$\mathbf{U} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p \tag{15}$$

- 将公式 15 带入连续性方程 5

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \nabla \cdot [\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p] = 0 \tag{16}$$

SIMPLE 算法 Semi-implicit Method for Pressure-Linked Equations

- 由此推出压力泊松方程

$$\boxed{\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{H})} \tag{17}$$

- 到此，我们有了四个方程来求解四个未知量。

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p \tag{18}$$

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}) \tag{19}$$

- 那求解过程是什么呢?
- 在 OpenFOAM 中，`fvScalarMatrix pEqn(fvm::laplacian() == fvc::div(HbyA));`

SIMPLE 算法 Solution Process

1. 动量预测 (猜测的压力场)，求出的速度并不符合连续性方程。

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p \tag{20}$$

2. 求解压力泊松方程获得压力场

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}) \tag{21}$$

3. 使用上步求解的压力场来修正速度场

$$\mathbf{U} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p \tag{22}$$

SIMPLE 算法 Solution Process

- 显式松弛

$$p^{new} = p^{old} + \alpha_p (p^p - p^{old}); \tag{23}$$

- 隐式松弛

$$\frac{1}{\alpha} a_p \mathbf{U}_p + \sum_n a_n \mathbf{U}_n = \mathbf{r}_p + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_p U_p^{old} \tag{24}$$