OpenFOAM 2206 Lecture 01 Vector Calculus

汪洋
wangyangstayfoolish@gmail.com

July 2022

偏微分方程简介

- 通过偏微分方程来描述自然界的物理现象
- 常见的有: 波动方程、热传导方程、$\mathrm{Navier-Stokes}$ 方程

经典的偏微分方程

- 波动方程

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$$

- 热传导方程

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$
$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$$

- 拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$\nabla^2 u = 0$$

向量微积分

- 守恒率
  - 质量
  - 动量
- 梯度, gradient, ∇

$$\text{标量场} \Rightarrow \text{向量场}$$

- 散度, divergent, $\nabla\cdot$

$$\text{向量场} \Rightarrow \text{标量场}$$

- 旋度, curl, $\nabla\times$

$$\text{向量场} \Rightarrow \text{向量场}$$

梯度

- 标量场函数 $f(x, y)$

$$\nabla \mathrm{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix}$$

- 例题:

$$\mathrm{f} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$$

- 梯度是线性的

$$\nabla(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2) = \nabla \mathrm{f}_1 + \nabla \mathrm{f}_2$$

- 方向导数

$$\mathrm{D}_\mathrm{v}(\mathrm{f}) = \mathbf{n}_\mathrm{v} \cdot \nabla \mathrm{f}$$

散度

- 向量场函数 $\mathbf{f}(x, y)$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

- 例题:

$$\mathbf{f} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{f} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{f} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

  divergence free
- 散度是线性的

$$\nabla \cdot (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = \nabla \cdot \mathbf{f}_1 + \nabla \cdot \mathbf{f}_2$$

散度

- 对于例题 1 可以写成 *ODE*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 拉普拉斯方程

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

旋度

- 向量场函数 $\mathbf{f} = (\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2, \mathsf{f}_3)$

$$\mathrm{curl}(\mathbf{f}) = \nabla \times \mathbf{f} = \mathrm{def} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

- 例题:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= xy\mathbf{i} + \sin(z)\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \\ \mathbf{f} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{f} &= -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \end{aligned}$$

- 无旋,irrotational $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$

高斯散度定理

- 穿过一个封闭面 S 的通量 F 等于对该封闭体内散度 $div(F)$ 的体积分
- 公式

$$\iiint_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{dV} = \iint_{\mathrm{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \mathrm{dS}$$

- 质量守恒

$$\text{质量} = \iiint_{\mathrm{V}} \rho \mathrm{dV}$$

- 推导质量守恒，非常有意思的过程

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V} \rho dV = -\iint_{S} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -\iiint_{\mathrm{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{F}) \mathrm{dV}$$

Stokes 定理和格林定理

- 对一个封闭曲面上的旋度进行面积分
- 公式

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

- 格林公式是 stokes 的二维情况

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial S} f_1 dx + f_2 dy$$

- 可以格林来求面积

$$\mathbf{F} = (-y, x)^T$$

致谢

非常感谢！