Lecture 12 Convection Term

汪　洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

July 2022

对流项计算 Introduction

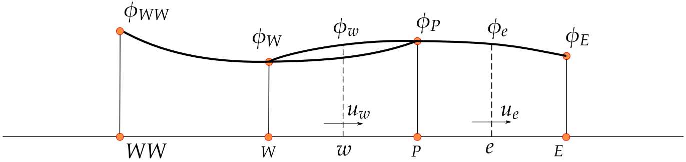
- ▸ divergence
- 高阶格式
- ▸ QUICK

对流项计算 QUICK Scheme

- quadratic upstream interpolation for convective kinetics(QUICK) ▸ Leonard(1979)
- 三个采样点，三阶格式
- ▸ QUICK

对流项计算 QUICK Scheme

- QUICK，采用二次函数插值



$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W$$
$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW}$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 一维定常对流扩散方程

$$\left[F_e\left(\frac{6}{8}\phi_P+\frac{3}{8}\phi_E-\frac{1}{8}\phi_W\right)-F_w\left(\frac{6}{8}\phi_W+\frac{3}{8}\phi_P-\frac{1}{8}\phi_{WW}\right)\right]=D_e(\phi_E-\phi_P)-D_w(\phi_P-\phi_W)$$

- 可推出

$$\begin{aligned}\left[D_w-\frac{3}{8}F_w+D_e+\frac{6}{8}F_e\right]\phi_P=&\\ \left[D_w+\frac{6}{8}F_w+\frac{1}{8}F_e\right]\phi_W+&\left[D_e-\frac{3}{8}F_e\right]\phi_E-\left[\frac{1}{8}F_w\right]\phi_{WW}\end{aligned}$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 离散后的标准形式

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW}$$

- 其中

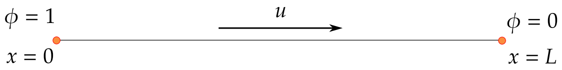
a_W	a_E	a_{WW}	a_P
$D_W + \frac{6}{8} F_W + \frac{1}{8} F_e$	$D_e - \frac{3}{8} F_e$	$-\frac{1}{8} F_w$	$a_E + a_W + a_{WW} + F_e - F_w$

对流项计算 QUICK Scheme

- 例题：求解一维定常对流扩散方程，物理量为 ϕ，控制方程如下，求解区域如下图所示，边界条件为 $\phi_0 = 1, \phi_L = 0$，将计算域等分为 5 份 (也就是 5 个网格)，使用 `QUICK` 格式求解，$u = 0.2m/s$。将计算结果与中央差分以及精确解进行比较。

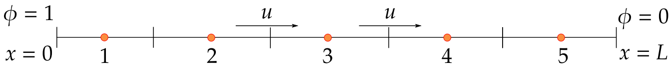
- 精确解为:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{exp(\rho u x/\Gamma) - 1}{exp(\rho u L/\Gamma) - 1}$$



对流项计算 QUICK Scheme

- 网格划分

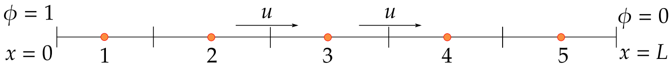


- 离散方程

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 内部节点



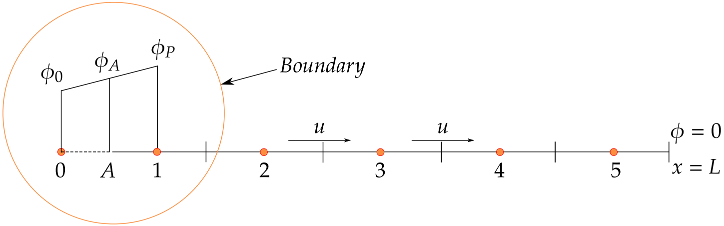
- 离散方程

$$\left[F_e\left(\frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W\right) - F_w\left(\frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW}\right)\right] = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$\begin{aligned}\left[D_w - \frac{3}{8}F_w + D_e + \frac{6}{8}F_e\right]\phi_P = \\ \left[D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e\right]\phi_W + \left[D_e - \frac{3}{8}F_e\right]\phi_E - \left[\frac{1}{8}F_w\right]\phi_{WW}\end{aligned}$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 边界处理



- 离散方程

$$F_e\phi_e - F_A\phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_A$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 第一类边界条件，节点值处理，外插

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= 2\phi_A - \phi_P \\
\phi_e &= \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}(2\phi_A - \phi_P) \\
&= \frac{7}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{2}{8}\phi_A
\end{aligned}
$$

- 梯度值处理

$$
\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_A = \frac{D_A}{3}(9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E)
$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 对于节点 1(左端节点)

$$F_e\left(\frac{7}{8}\phi_P+\frac{3}{8}\phi_E-\frac{1}{8}\phi_A\right)-F_A\phi_A=D_e(\phi_E-\phi_P)-\frac{D_A}{3}(9\phi_P-8\phi_A-\phi_E)$$

- 对于节点 5(右端节点)

$$F_B\phi_B-F_w\left(\frac{6}{8}\phi_W+\frac{3}{8}\phi_P-\frac{1}{8}\phi_{WW}\right)=\frac{D_B}{3}(8\phi_B-9\phi_P+\phi_W)-D_w(\phi_P-\phi_W)$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 节点系数

$Node$	a_{ww}	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	0	$D_e + \frac{1}{3}D_A - \frac{3}{8}F_e$	$-\left(\frac{8}{3}D_A + \frac{2}{8}F_e + F_A\right)$	$\left(\frac{8}{3}D_A + \frac{2}{8}F_e + F_A\right)\phi_A$
2	0	$D_w + \frac{7}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	$\frac{1}{4}F_w$	$-\frac{1}{4}F_w\phi_A$
5	$-\frac{1}{8}F_w$	$D_w + \frac{1}{3}D_B + \frac{7}{8}F_w$	0	$-\left(\frac{8}{3}D_B - F_B\right)$	$\left(\frac{8}{3}D_B - F_B\right)\phi_B$

对流项计算 QUICK Scheme

- 节点系数

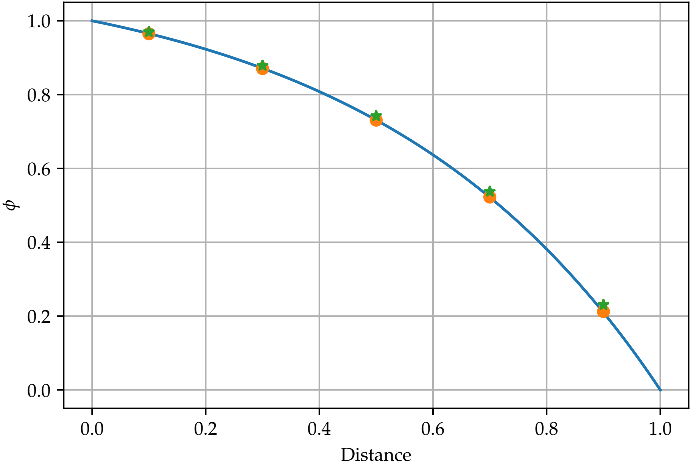
$node$	a_E	a_W	a_{WW}	S_u	a_P
1	0	0.592	0	1.583	2.175
2	0.7	0.425	0	−0.05	1.075
3	0.675	0.425	−0.025	0	1.075
4	0.675	0.425	−0.025	0	1.075
5	0.817	0.425	−0.025	0	1.925

- 计算结果 $Ax = b$

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5)' = (0.9648, 0.8707, 0.7309, 0.5226, 0.2123)'$$

对流项计算 QUICK Scheme

- 计算结果比较



对流项计算 QUICK Scheme

- 优点: 高精度 (3 阶)，保证输运属性，一般情况下有界
- 缺点: 系数矩阵不再对称，有些矩阵计算方法 (例如：$TDMA$) 不再适用，如果 $(Pe > 8/3)$，会出现异号问题，导致计算稳定性和有界性出现问题。

对流项计算 QUICK Scheme

- 许多学者做了补救工作。 Hayase

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{8}[3\phi_P - 2\phi_W - \phi_{WW}] \quad \mathit{for}\ F_w > 0$$
$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8}[3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W] \quad \mathit{for}\ F_e > 0$$
$$\phi_w = \phi_P + \frac{1}{8}[3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E] \quad \mathit{for}\ F_w < 0$$
$$\phi_e = \phi_E + \frac{1}{8}[3\phi_P - 2\phi_E - \phi_{EE}] \quad \mathit{for}\ F_e < 0$$

- 延迟修正 (*deferred correction*)，用上一步计算结果计算公式右侧第二项，这样就保证了系数项不会出现异号问题。
- 但是无论如何，*QUICK* 格式对于复杂流动还是偶尔会出现越界现象，如何处理呢？就需要 *TVD* 格式了，可以算是一种修正

对流项计算 TVD Scheme

- 总变差变小，Total Variation Diminish
- upwind scheme 无条件稳定，有界。但是会带来 false diffusion。
- High order scheme 当 *Pe* 数较大时，会带来奇怪 (spurious oscillation or wiggles)，当你计算一些物理量时，例如 k, omeage, epsilon 等，会出现奇怪的物理非真实的负值，还会诱发计算的不稳定。**TVD** 格式就是用来处理该问题的。
- 增加人工扩散或者增加上游的权重，基于此思考，统称为通量修正输运格式 flux corrected transport
- OpenFOAM TVD 参考：Jasak

对流项计算 TVD Scheme

- 基于偏向 *upwind* 格式

$$\phi_e = \phi_P$$

- linear upwind 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W)$$

- QUICK 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8}[3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W]$$

- CD 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_E - \phi_P)$$

对流项计算 TVD Scheme

- 广义高阶格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(\phi_E - \phi_P)$$