Lecture 14 Convection Term

汪　洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

August 2022

对流项计算 Unstructured Grids

- 二维非结构化网格对流扩散方程

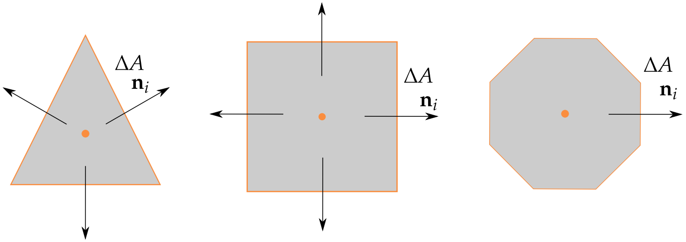
对流项计算 Unstructured Grids

- 非结构化网格离散
- cell-centered, node-centered 两种
- 基于体心的相对来说存储开销要少一些
- 控制方程

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_V div(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_V div(\Gamma grad(\phi)) dV + \int_V S_\phi dV \tag{1}$$

对流扩散计算 Unstructured Grids

- 常见 2 维非结构化网格

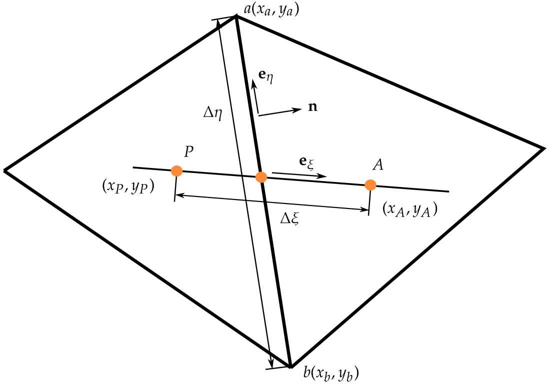


- 通过高斯散度定理将方程 1 离散后，忽略时间项 (相当与定常流动)

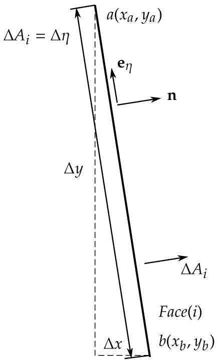
$$\sum_f \int_{\Delta A_i} (\rho\phi\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dA = \sum_f \int_{\Delta A_i} (\Gamma grad\phi) \cdot \mathbf{n} dA + \int_V S_\phi dV \tag{2}$$

对流扩散计算 Unstructured Grids

- 典型的 cell center 二维非结构化网格



对流扩散计算 Unstructured Grids



$$\Delta A_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{其中},\ \Delta x = x_b - x_a,\ \Delta y = y_b - y_a$$

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta y}{\Delta A_i}\mathbf{i} - \frac{\Delta x}{\Delta A_i}\mathbf{j}^{1} \tag{3}$$

[1] ▸ rotation matrix

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 扩散项离散

$$\int\limits_{\Delta A_i} (\Gamma grad\phi) \cdot \mathbf{n} dA \approx \Gamma grad\phi \cdot \mathbf{n}_i \Delta A_i \approx \Gamma \left(\frac{\phi_A - \phi_P}{\Delta \xi} \right) \Delta A_i \tag{4}$$

- 与曾经学的比较

$$\int\limits_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = (\Gamma \nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \Gamma \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \right)_f S_f$$

- 中心差分

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 由于 **PA** 与面法向 **n** 并不平行，引起非正交,non-orthogonal 或奇异 skewness，所以需要修正。
- 比较常用的方式：引入一项 cross-diffusion，将其作为源项处理
- 本文以 ▸ Mathur and Murthy 1997

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 梯度计算

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\phi x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\phi y}\mathbf{j} = \frac{\partial\phi}{\phi n}\mathbf{n} + \frac{\partial\phi}{\phi\eta}\mathbf{e}_\eta = grad\phi \tag{5}$$

- 其中

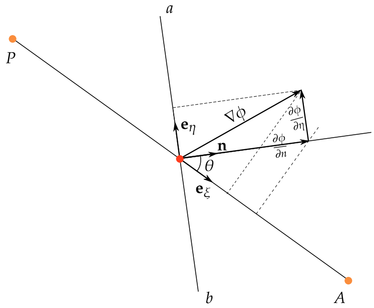
$$\mathbf{n} = \frac{\Delta y}{\Delta A_i}\mathbf{i} - \frac{\Delta x}{\Delta A_i}\mathbf{j} = \frac{y_b - y_a}{\Delta\eta}\mathbf{i} + \frac{x_b - x_a}{\Delta\eta}\mathbf{j} \tag{6}$$

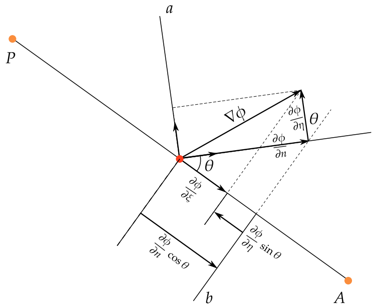
$$\mathbf{e}_\xi = \frac{x_A - x_P}{\Delta\xi}\mathbf{i} + \frac{y_A - y_P}{\Delta\xi}\mathbf{j} \tag{7}$$

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{x_b - x_a}{\Delta\eta}\mathbf{i} + \frac{y_b - y_a}{\Delta\eta}\mathbf{j} \tag{8}$$

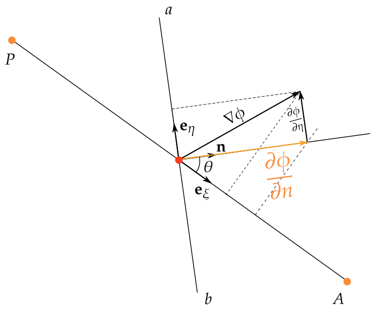
扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 梯度计算





扩散项离散 Discretization of the diffusion term



- 梯度计算

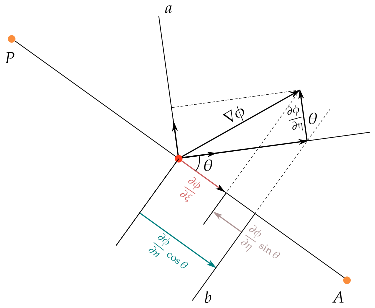
$$(\nabla\phi)_f\cdot\mathbf{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

- 只有当 $\theta=0$，也就是正交时，才有

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\frac{\partial\phi}{\partial n} \tag{9}$$

- 公式 9 为图中橙色箭头所示

扩散项离散 Discretization of the diffusion term



- 如果能够理解 $\frac{\partial \phi}{\partial n}\mathbf{n}$ 是一个向量，那么其在 ξ 方向的投影为

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\xi = \frac{\partial \phi}{\partial n} cos(\theta) \tag{10}$$

- 公式 10 为图中绿色箭头所示
- $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\mathbf{e}_\eta$ 其在 ξ 方向的投影为

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\xi = -\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\sin\theta \tag{11}$$

- 公式 11, 12 为图中灰色箭头所示

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 由公式 $9, 10$ 可以推出

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\sin\theta \tag{12}$$

- 所以 $\nabla\phi\cdot\mathbf{n}$

$$\boxed{\nabla\phi\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\tan\theta = grad\phi\cdot\mathbf{n}} \tag{13}$$

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 公式 13

$$\boxed{\nabla\phi\cdot\mathbf{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\tan\theta=grad\phi\cdot\mathbf{n}}$$

- 其中非结构化网格 direct gradient 中央差分

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}=\frac{\phi_A-\phi_P}{\Delta\xi} \tag{14}$$

- 其中非结构化网格 cross-diffusion 项

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=\frac{\phi_b-\phi_a}{\Delta\eta} \tag{15}$$

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 所以公式 13 离散为

$$\boxed{\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\Delta A_i = \frac{\Delta A_i}{\cos\theta}\frac{\phi_A-\phi_P}{\Delta\xi}+\tan\theta\Delta A_i\frac{\phi_b-\phi_a}{\Delta\eta}} \tag{16}$$

- 其中

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\xi}=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\xi} \tag{17}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_\eta}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\xi} \tag{18}$$

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 所以公式 16 可以写为

$$\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\Delta A_i = \underbrace{\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\Delta A_i}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\xi}\frac{\phi_A-\phi_P}{\Delta\xi}}_{Direct\ gradient\ term} - \underbrace{\frac{\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_\eta\Delta A_i}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\xi}\frac{\phi_b-\phi_a}{\Delta\eta}}_{Cross\ diffusion\ term} \tag{19}$$

- 系数项 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 可以通过几何关系确定，所以在有了几何关系之后，如果网格不发生改变，只用算一次即可

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 对于方程 20，通常将 cross-diffusion 当成源项处理

$$\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\Delta A_i=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\Delta A_i}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\xi}\frac{\phi_A-\phi_P}{\Delta\xi}+S_{D-cross} \tag{20}$$

- 由于需要知道 ϕ_a,ϕ_b，节点上的值，可以使用简单平均、加权平均等方法计算

$$\phi_a=\frac{\phi_P+\phi_A+\phi_B+\cdots}{N} \tag{21}$$

- 当然梯度计算也有很多其他方法

扩散项离散 Discretization of the diffusion term

- 对于方程 20，通常将 cross-diffusion 当成源项处理

$$\boxed{\Gamma grad\phi \Delta A_i \cdot \mathbf{n} = D_i(\phi_A - \phi_P) + S_{D-cross,i} = \Gamma(\nabla\phi)_f \cdot \mathbf{S}_f} \tag{22}$$

- 其中

$$D_i = \frac{\Gamma}{\Delta\xi} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\xi} \Delta A_i$$

$$S_{D-cross,i} = -\frac{\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\xi} \frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta\eta}$$

- 注意 skewness 和 aspect ratio

对流项离散 Discretization of the convective term

- 对流项离散

$$\sum_f \int_f \rho\phi\mathbf{U}\cdot d\mathbf{S} = \sum_{all\ \ surfaces} \int_{\Delta A_i} \rho\phi\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dA \approx \sum_f (\rho\phi\mathbf{u})_f \cdot \mathbf{n} A_f \tag{23}$$

- 以前提到过，这里有精度损失，就是一次高斯积分点
- 两种网格方式，交错网格和同位网格
- 交错网格不会带来checkboard，而同位网格会，所以后续会引入 Rhie-Chow 插值

对流项离散 Discretization of the convective term

- 引入 convective flux，对流通量

$$F_i = (\rho \mathbf{u})_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta A_i$$

$$\sum_f (\rho \phi \mathbf{u})_f \cdot \mathbf{n}_f A_f = \sum_i F_i \phi_i$$

- 注意这里的 ϕ 是广义量，所以也可以适用与速度 u, v, w
- 注意，这里的对流通量 $\rho \mathbf{u}$ 里面的 $\mathbf{u}$ 是已知值，这就是动量方程的线性化，用上个时间步长的速度

对流项离散 Discretization of the convective term

- 一阶迎风格式

$$
\begin{aligned}
F_i > 0 \quad \phi_i = \phi_P \\
F_i < 0 \quad \phi_i = \phi_A
\end{aligned}
$$

- 如果流动方向与 **PA** 不平行，则会带来 false-diffusion
- 所以还是要引入高阶格式或者 **TVD** 格式来计算对流项

对流项离散 Discretization of the convective term

- 线性迎风格式

$$\phi_e = \phi_P + \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}\right)\frac{1}{2}\Delta x$$

- 对于非结构化网格可以使用 Taylor series 将 ϕ 展开

$$\phi(x, y) = \phi_P + (\nabla\phi)_P \cdot \Delta\mathbf{r} + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{r})^2$$

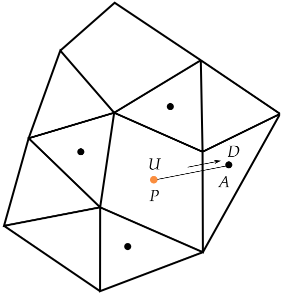
- 如果 $\Delta\mathbf{r}$ 是点 P 到面心的距离

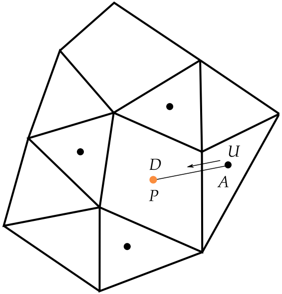
$$\phi_i = \phi_P + (\nabla\phi)_P \cdot \Delta\mathbf{r} \tag{24}$$

- 所以对于非结构化网格，如果需要面心值 ϕ_i，就必须知道体心梯度值 $(\nabla\phi)_P$

对流项离散 Discretization of the convective term

- 最小二乘法重构 reconstruct体心梯度值





- 周围点对 P 的泰勒展开

$$\phi_i = \phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\Big|_0 \Delta x_i + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\Big|_0 \Delta y_i \tag{25}$$

$$\phi_1 - \phi_0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\Big|_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\Big|_0 \Delta y_1$$

$$\phi_2 - \phi_0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\Big|_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\Big|_0 \Delta y_2$$

$$\phi_N - \phi_0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\Big|_0 \Delta x_N + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\Big|_0 \Delta y_N$$

对流项离散 Discretization of the convective term

- 形成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_N & \Delta y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_0 \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 - \phi_0 \\ \phi_2 - \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_N - \phi_0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

- 矩阵大概率属于超定 overdetermined，所以不太可能直接求解。最小二乘法，**least-squares**

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \tag{27}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \tag{28}$$

- Anderson and Bonhaus 1994推荐使用 QR 分解，因为最小二乘在网格高度拉伸的时候不准确。还可以参考Haselbacher and Blazek 2000得到更多细节

对流项离散 Discretization of the convective term

- 结构化网格的 TVD 格式

$$\phi_i = \phi_P + \frac{\psi(r)}{2}(\phi_E - \phi_P) \tag{29}$$

$$r = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} \tag{30}$$

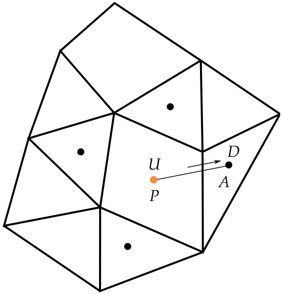
- 非结构化网格因为很难确定上游点 W，所以需要构造一个假的上有点 B

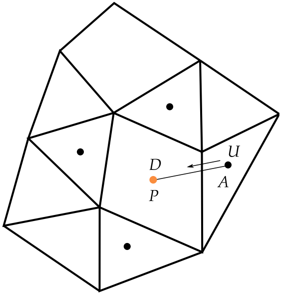
$$r = \frac{\phi_P - \phi_B}{\phi_A - \phi_P} \tag{31}$$

- 但是 B 点构造很麻烦

对流项离散 Discretization of the convective term

- 非结构化网格





对流项离散 Discretization of the convective term

- 非结构化网格的 r 采用 Darwish and Moukalled 2003 的推荐公式

$$r = \frac{2(\nabla\phi)_P \cdot \mathbf{r}_{PA}}{\phi_A - \phi_P} - 1 \tag{32}$$

- 因为上面公式是个广义形式，所以改成上下游的写法

$$r = \frac{2(\nabla\phi)_P \cdot \mathbf{r}_{PA}}{\phi_D - \phi_U} - 1 \tag{33}$$

- 对流通量的 TVD 表达式变为

$$\boxed{\phi_i = \phi_U + \frac{\psi(r)}{2}(\phi_D - \phi_U)} \tag{34}$$

源项处理 Treatment of source terms

- 源项处理

$$\int_V S dV = \overline{S}\Delta V \tag{35}$$

- 面积和体积计算可以使用几何关系，简单的向量代数即可。但是 Kordula and Vinokur 1983 给出了较为有效率的计算体积的方法

源项处理 examples

例题