Lecture 04 The Finite Volume Method

汪　洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

July 2022

离散过程

- 构建计算域
- 离散计算域
- 构建与物理场控制方程等效的代数方程组
- 使用迭代求解器计算

离散过程

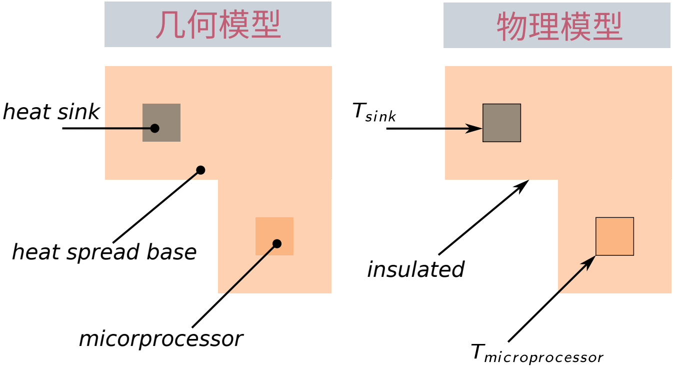
- 通过求解一系列给定点上的 ϕ 值来离散整个关注的区域
- 因此 ϕ 离散了，不再连续，将 Partial Differential Equations 方程变为一系列代数方程，这个过程为离散过程
- 将代数方程求解
- 一维例子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mu\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dx}} = 1$$

离散过程

物理模型
物理场 → 控制方程 → 代数方程组 → 数值解

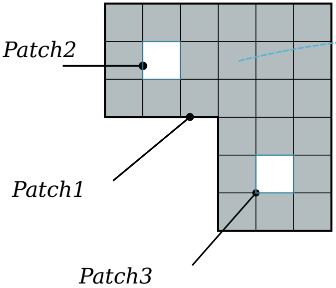
离散过程



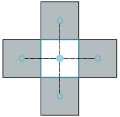
几何模型
物理模型
heat sink
heat spread base
micorprocessor
T_{sink}
insulated
$T_{microprocessor}$

离散过程

几何离散



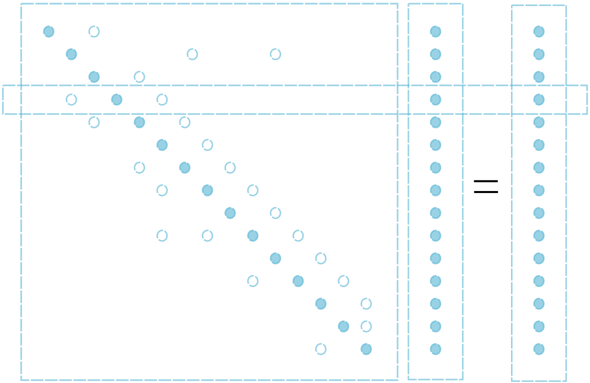
方程离散



$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi$$

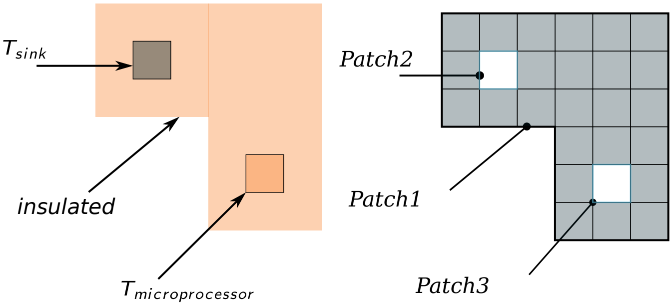
$$a_p \phi_p + \sum_f a_{nb} \phi_{nb} = b$$

矩阵形式

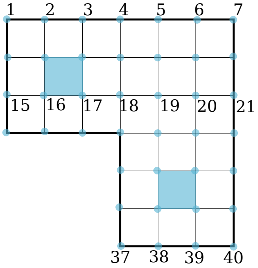


几何和物理模型

- 控制方程, $-\nabla \cdot (k \nabla T) = q$

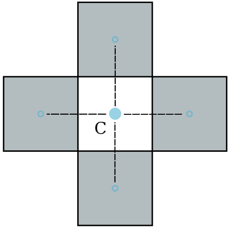


几何离散

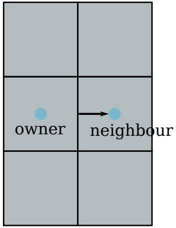


1 2 3 4 5 6 7
15 16 17 18 19 20 21
37 38 39 40
35 36 37 38 39
1 2 3 4 5
6 62 7
61 59
60
63
66 64
65
1 2 3 4 5 6
23 24 25

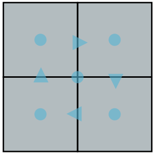
拓扑关系



Element 9
Neighbours [10 4 8 15]
Faces [12 8 11 16]
Vertices [19 11 12 18]



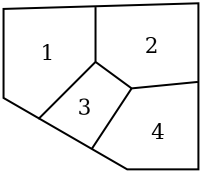
Face 12
Element 9
Element 10
Vertices [19 12]



Vertices
Elements [...]
Faces [...]

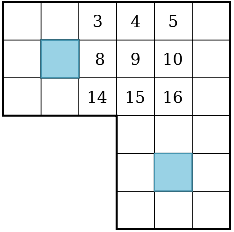
例题 1

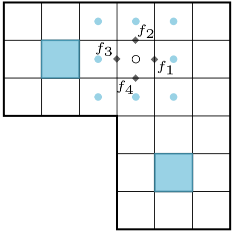
- 对图示网格，推导单元连通性和矩阵形式



方程离散

- $$\int_{V_C} \nabla \cdot (k\nabla T)dV = \int_{V_C} qdV$$





方程离散

- 散度定理

$$\int_{\partial V_C} (k\nabla T) \cdot dS = q_C V_C$$

- 一次精度损失

$$\sum_f k\nabla T \cdot S_f = q_C V_C$$

方程离散

- 一次精度损失

$$\sum_f k\nabla T \cdot S_f = q_C V_C$$

$$(k\nabla T)_{f_1} \cdot S_{f_1} + (k\nabla T)_{f_2} \cdot S_{f_2} + (k\nabla T)_{f_3} \cdot S_{f_3} + (k\nabla T)_{f_4} \cdot S_{f_4} = q_C V_C$$

方程离散

- $$(\mathrm{k}\nabla \mathrm{T})_{\mathrm{f}_1} \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{f}_1} + (\mathrm{k}\nabla \mathrm{T})_{\mathrm{f}_2} \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{f}_2} + (\mathrm{k}\nabla \mathrm{T})_{\mathrm{f}_3} \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{f}_3} + (\mathrm{k}\nabla \mathrm{T})_{\mathrm{f}_4} \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{f}_4} = \mathrm{q}_{\mathrm{C}} \mathrm{V}_{\mathrm{C}}$$
- 对于面 1 来说

$$\mathbf{S}_{f_1} = \Delta y_{f_1} \mathbf{i}$$

$$\delta x_{f_1} = x_{F_1} - x_C$$

$$\nabla T_{f_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \mathbf{j}$$

方程离散

- 对于温度梯度

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{T_{F_1}-T_C}{\delta x_{f1}}$$

$$\nabla T_{f_1}\cdot \mathbf{S}_{f_1}=\frac{T_{F_1}-T_C}{\delta x_{f1}}\Delta y_{f_1}$$

$$(k\nabla T)_{f_1}\cdot \mathbf{S}_{f_1}=a_{F_1}(T_{F_1}-T_C)$$

方程离散

- 那么系数项为

$$a_{F_1} = k\frac{\Delta y_{f_1}}{\delta x_{f_1}}$$

$$a_{F_2} = k\frac{\Delta x_{f_2}}{\delta y_{f_2}}$$

$$a_{F_3} = k\frac{\Delta y_{f_3}}{\delta x_{f_3}}$$

$$a_{F_4} = k\frac{\Delta x_{f_4}}{\delta y_{f_4}}$$

方程离散

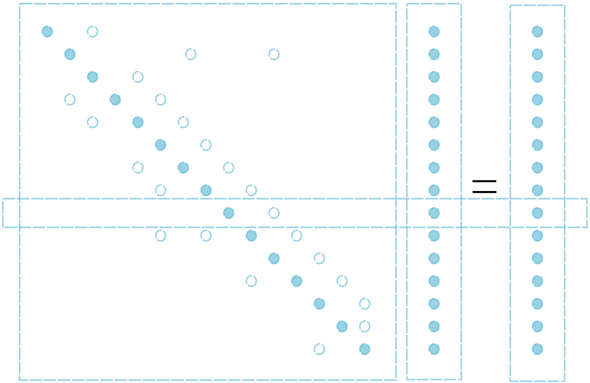
- 那么系数项为

$$
\begin{aligned}
\sum_f (k\nabla T)_f \cdot \mathbf{S}_f &= \sum_f a_f (T_F - T_C) \\
&= -(a_{F_1} + a_{F_2} + a_{F_3} + a_{F_4}) T_C + a_{F_1} T_{F_1} + a_{F_2} T_{F_2} + a_{F_3} T_{F_3} + a_{F_4} T_{F_4} \\
&= q_C V_C
\end{aligned}
$$

- 紧凑形式

$$
a_C T_C + \sum_f a_F T_F = b
$$

矩阵形式



矩阵求解

- 直接解法

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- 计算开销 $\mathcal{O}(n^3)$

矩阵求解

- 迭代解法
- 对角占优 `Scarborough` 标准

$$a_{ii} \geq \sum_{i \neq j} a_{ij}$$