Lecture 13 Convection Term

汪　洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

August 2022

对流项计算 TVD Scheme

- 总变差变小，Total Variation Diminish
- upwind scheme 无条件稳定，有界。但是会带来 false diffusion。
- High order scheme 当 *Pe* 数较大时，会带来奇怪 (spurious oscillation or wiggles)，当你计算一些物理量时，例如 k, omeage, epsilon 等，会出现奇怪的物理非真实的负值，还会诱发计算的不稳定。**TVD** 格式就是用来处理该问题的。
- 增加人工扩散或者增加上游的权重，基于此思考，统称为通量修正输运格式 flux corrected transport
- OpenFOAM TVD 参考： Jasak

对流项计算 TVD Scheme

- 基于偏向 *upwind* 格式

$$\phi_e = \phi_P$$

- linear upwind 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W)$$

- QUICK 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8}[3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W]$$

- CD 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_E - \phi_P)$$

对流项计算 TVD Scheme

- 广义高阶格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(\phi_E - \phi_P)$$

- LUD(`linear upwind differencing`)

$$\begin{aligned}\phi_e &= \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W) \\ &= \phi_P + \frac{1}{2}\frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}(\phi_E - \phi_P) \\ \psi &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}\end{aligned}$$

对流项计算 TVD Scheme

- 广义高阶格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(\phi_E - \phi_P)$$

- QUICK

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W$$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\left[(3 + \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P})\frac{1}{4}\right](\phi_E - \phi_P)$$

$$\psi = 0.25\frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} + 0.75$$

对流项计算 TVD Scheme

- 合理函数

$$\psi = \phi(r)$$
$$r = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}$$

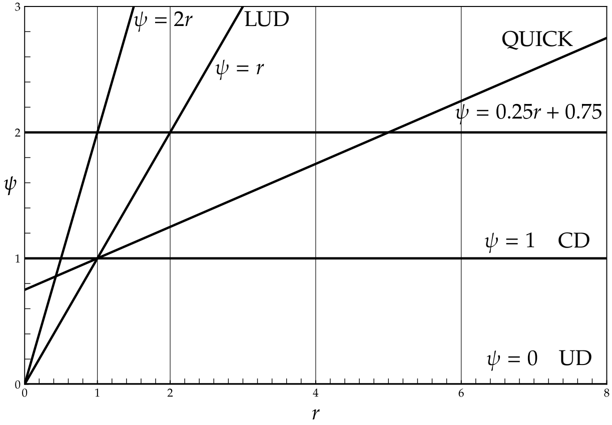
- 通用格式 (general form)

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P)$$

$$\text{UD, } \psi(r) = 0$$
$$\text{CD, } \psi(r) = 1$$
$$\text{LUD, } \psi(r) = r$$
$$\text{QUICK, } \psi(r) = 0.25r + 0.75$$

对流项计算 TVD Scheme

- $\psi - r$ 关系图



对流项计算 total variation and TVD Schemes

- 迎风格式更稳定，没有 wiggles 现象
- 中央差分和 QUICK 格式精度更高，但是在某些条件下会导致计算震荡甚至发散
- 找到精度高更稳定的格式
- 构造保证单调性格式
- total variation

对流项计算 total variation and TVD Schemes

- 保证单调性 TVD 基本假设
- 1. No new local extrema must be created
- 2. The value of an existing local minimum must be non-decreasing and that of a local maximum must be non-increasing
- total variation 是一系列离散点的数据

$$
\begin{aligned}
TV(\phi) &= |\phi_2 - \phi_1| + |\phi_3 - \phi_2| + |\phi_4 - \phi_3| + |\phi_5 - \phi_4| \\
&= |\phi_3 - \phi_1| + |\phi_5 - \phi_3|
\end{aligned}
$$

- 最初是随着时间变化的，意味着 $TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n)$, ▸ Lien and Leschziner1993

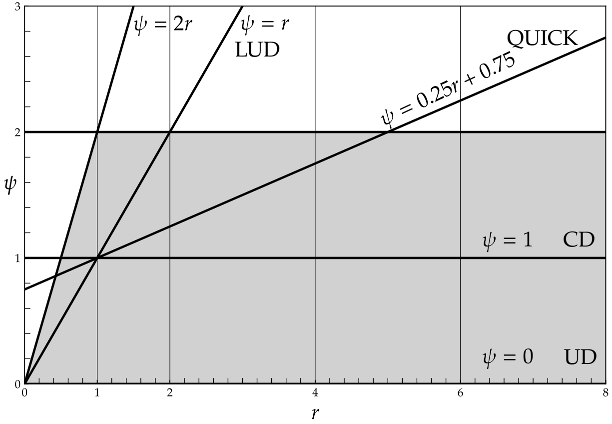
对流项计算 Criteria for TVD schemes

- Sweby ▸ Sweby 1984 给出了 TVD 格式的充要条件
- 上界是 $\psi(r) = 2r, 0 < r < 1$，$\psi(r) < 2r$
- 上界是 $\psi(r) = 2, r > 1, \psi(r) < 2$

Scheme	r	TVD
UD	-	yes
LUD	$r < 2$	yes
CD	$r > 0.5$	yes
QUICK	$3/7 \leq r \leq 5$	yes

对流项计算 Criteria for TVD schemes

- 阴影区域为 TVD 区域



对流项计算 Criteria for TVD schemes

- 上面多种格式都有限制范围。
- 观察方程 $\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P)$, 方程右边第一项符合 *TVD* 标准，第二项就会带来一些影响
- $\psi(r)$ 是个**通量限制器函数** flux limiter function
- $\psi(r)$ 对于二阶精度格式，必须通过点 $(1, 1)$
- 所以 UD 不是二阶精度，CD, LUD 和 QUICK 都是二阶级精度

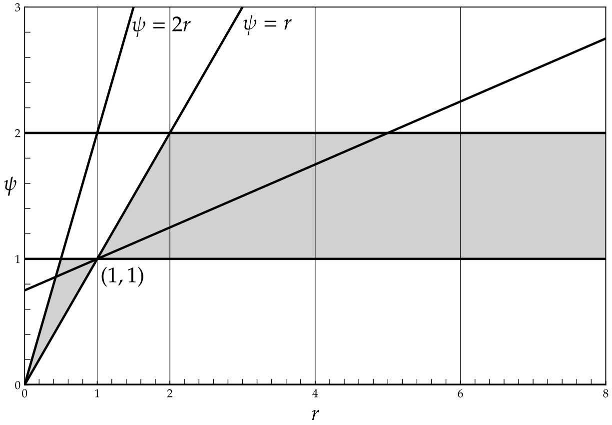
对流项计算 TVD Scheme

- Sweby ▸ Sweby 1984 给出了**二阶格式可能范围**
- $r \in [0, 1]$, 下界 $\psi(r) = r$, 上界 $\psi(r) = 1$, 所以 $r \leq \psi(r) \leq 1$
- $r \in [1, \infty)$, 下界 $\psi(r) = 1$, 上界 $\psi(r) = r$, 所以 $1 \leq \psi(r) \leq r$
- 由于限制器函数具有**对称**属性，所以在前后面上不需要特殊处理

$$\psi(r) = r\psi(\frac{1}{r})$$

对流项计算 TVD Scheme

- 二阶 *TVD* 格式范围

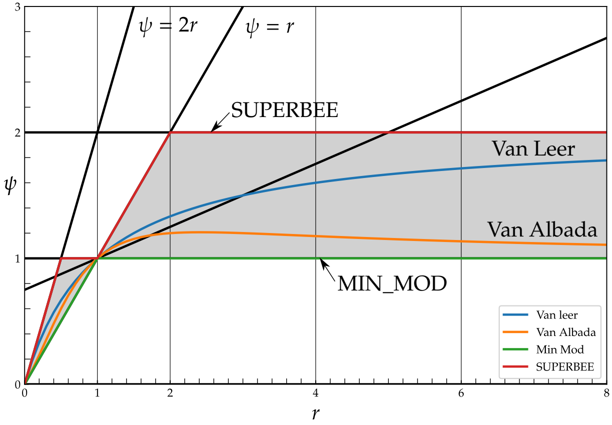


对流项计算 Flux limiter functions

Name	Limiter function $\phi(r)$	Source
Van Leer	$\frac{r+\|r\|}{1+r}$	Van Leer 1974
Van Albada	$\frac{r+r^2}{1+r^2}$	Van Albada 1982
Min-Mod	$min(r,1)$ if $r>0$, 0 if $r\le 0$	Roe 1985
SUPERBEE	$max[0, min(2r,1), min(r,2)]$	Roe 1985
Sweby	$max[0, min(\beta r,1), min(r,\beta)]$	Sweby 1984
QUICK	$max[0, min(2r,(3+r)/4,2)]$	Leonard 1988
UMIST	$max[0, min(2r,(0.75r+0.25),(0.25r+0.75),2)]$	Lien1993

对流项计算 TVD Scheme

- 各种格式 $\psi - r$ 图



对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 一维定常对流扩散方程

$$\frac{d}{dx}(\rho u\phi) = \frac{d}{dx}\left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]$$

- 有限体积法离散后

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

- 假设 $u > 0$(x 方向)

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P)$$
$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W)$$
$$r_e = \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}\right),\ r_w = \left(\frac{\phi_W - \phi_{WW}}{\phi_P - \phi_W}\right)$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 带入离散方程

$$
\begin{aligned}
&F_e\left[\phi_P+\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E-\phi_P)\right]-F_w\left[\phi_W+\frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P-\phi_W)\right]\\
&=D_e(\phi_E-\phi_P)-D_w(\phi_P-\phi_W)\\
&(D_e+F_e+D_w)\phi_P=(D_w+F_w)\phi_W+D_e\phi_E\\
&-F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E-\phi_P)\right]+F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P-\phi_W)\right]
\end{aligned}
$$

- 可以写成

$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E+S_u^{DC}$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 代数方程

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u^{DC}$$

- 其中

$$\begin{aligned}
a_W &= D_w + F_w \\
a_E &= D_e \\
a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \\
S_u^{DC} &= -F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P)\right] + F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W)\right]
\end{aligned}$$

- 因为 $u > 0$ 为了区分, 将 r_w^+ r_e^+

$$S_u^{DC} = -F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e^+)(\phi_E - \phi_P)\right] + F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w^+)(\phi_P - \phi_W)\right]$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 如果 $u < 0$

$$
\begin{aligned}
F_e\phi_e - F_w\phi_w &= D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \\
\phi_e &= \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_e^-)(\phi_E - \phi_P) \\
\phi_w &= \phi_W + \frac{1}{2}\psi(r_w^-)(\phi_P - \phi_W) \\
r_e^- &= \left(\frac{\phi_{EE} - \phi_E}{\phi_E - \phi_P}\right), \; r_w^- = \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}\right)
\end{aligned}
$$

- 代数方程

$$
(D_e - F_w + D_w)\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E
$$

$$
F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e^-)(\phi_E - \phi_P)\right] - F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w^-)(\phi_P - \phi_W)\right]
$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 代数方程

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u^{DC}$$

- 其中

$$
\begin{aligned}
a_W &= D_w \\
a_E &= D_e - F_e \\
a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \\
S_u^{DC} =& F_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^-)(\phi_E - \phi_P) \right] - F_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^-)(\phi_P - \phi_W) \right]
\end{aligned}
$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- *TVD* 格式相邻系数和延迟修正源项

Scheme	r
a_W	$D_w + max(F_w, 0)$
a_E	$D_e + max(-F_e, 0)$
S_u^{DC}	$\frac{1}{2}F_e[(1-\alpha_e)\psi(r_e^-) - \alpha_e\psi(r_e^+)](\phi_E - \phi_P) + \frac{1}{2}F_w[\alpha_w\psi(r_w^+) - (1-\alpha_w)\psi(r_w^-)](\phi_P - \phi_W)$

- 其中
  $\alpha_w = 1$ for $F_w > 0$ $\alpha_e = 1$ for $F_e > 0$
  $\alpha_w = 0$ for $F_w < 0$ $\alpha_e = 0$ for $F_e < 0$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 边界条件处理，$\phi = \phi_A$

$$F_e\left[\phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P)\right] - F_A\phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A)$$

- 处理 A 边界处的 r_e, 外插

$$\phi_o = 2\phi_A - \phi_P$$
$$r_e = \frac{\phi_P - \phi_o}{\phi_E - \phi_P} = \frac{2(\phi_P - \phi_A)}{\phi_E - \phi_P}$$

对流项计算 Evaluation of TVD Schemes

- 守恒、有界、稳定
- ▸ Lien and Leschziner1993，使用 UMIST 格式比标准的 QUICK 格式要增加额外 15% 的开销
- 对于非结构化网格，可以参考 ▸ Darwish and Moukalled 2003