Lecture 03 The Finite Volume Method

汪　洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

July 2022

有限体积法

- 将控制方程转变为半离散方程
- 将半离散方程变为代数方程
- 在两步变化过程中的选择都会影响精度和健壮性

有限体积法简介

- 有限体积法在物理和计算空间中相对协调
- 进一步采用同位网格使得其适应复杂几何

半离散方程

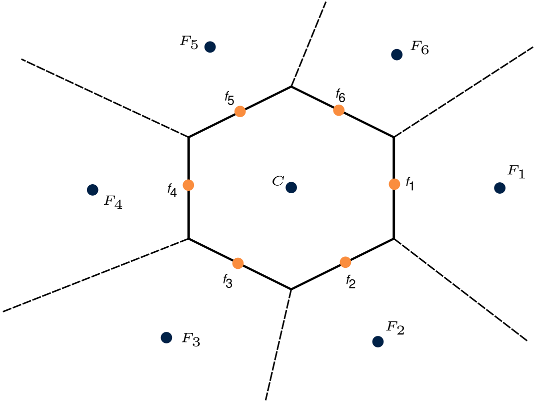
- 微分形式 $$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi$$
- 稳态方程 $$\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi$$
- 积分形式 $$\int_{CV} \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) dV = \int_{CV} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)\, dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

半离散方程

- 高斯散度定理后，定常方程变为:

$$\oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) dS = \oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot (\Gamma\nabla\phi)\, dS + \int_{V_C} S_\phi dV$$

半离散方程



通量

- 扩散通量, $\mathbf{J}^{D} = \Gamma \nabla \phi$
- 对流通量, $\mathbf{J}^{C} = \rho \mathbf{v} \phi$
- 总通量, $\quad \mathbf{J} = \mathbf{J^D} + \mathbf{J^C}$

通量

- 扩散通量:

$$\oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^D dS = \sum_f \left(\int_f (\mathbf{n} \cdot \Gamma \nabla \phi) dS \right)$$

- 对流通量:

$$\oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^C dS = \sum_f \left(\int_f (\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \phi) dS \right)$$

- 总通量:

$$\oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} dS = \sum_f \left(\int_f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) dS \right)$$

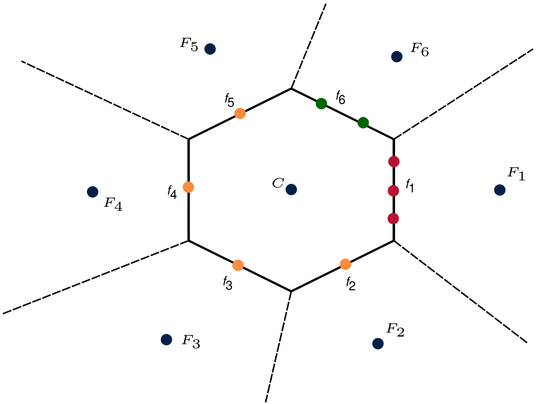
高斯积分点

- 思考下面公式

$$\int_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} dS = \sum_{ip} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})_{ip} \omega_{ip} S_f$$

- 这里精确吗?

高斯积分点



- 扩散通量:

$$\oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dS = \sum_f \sum_{ip} \left(\omega_{ip} \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi)_{ip} S_f \right)$$

- 对流通量:

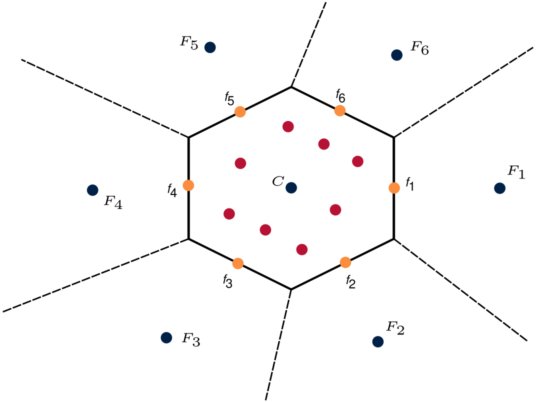
$$\oint_{\partial V_C} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \phi) dS = \sum_f \sum_{ip} \left(\omega_{ip} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \phi)_{ip} S_f \right)$$

源项处理

- 源项

$$\int_V S^{\phi} dV = \sum_{ip} \left(S_{ip} \omega_{ip} V \right)$$

高斯积分点



采用一个积分点

- 定常半离散公式

$$\sum_f (\rho \mathbf{v}\phi - \Gamma\nabla\phi)_f \cdot \mathbf{S}_f = S_C V_C$$

- 最后代数方程形式

$$a_p\phi_p + \sum_f a_n\phi_n = b$$

边界条件

- dirichlet 边界条件

$$\mathbf{J}_b^{\phi} \cdot \mathbf{S}_b = (\rho \mathbf{v} \phi)_b \cdot \mathbf{S}_b = (\rho_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{S}_b)\phi_b$$

- neumann 边界条件

$$\mathbf{J}_b^{\phi} \cdot \mathbf{S}_b = (\rho \mathbf{v} \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b S_b = (q_b) S_b$$

精度

- 假设 ϕ 在空间中线性变化

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_C + (\mathbf{x} - \mathbf{x_C}) \cdot (\nabla\phi)_C$$

- 泰勒展开

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) = \phi_C + (\mathbf{x} - \mathbf{x_C}) \cdot (\nabla\phi)_C + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_C})^2 :: (\nabla\nabla\phi)_C \\
+ \frac{1}{3!}(\mathbf{x} - \mathbf{x_C})^3 ::: (\nabla\nabla\nabla\phi)_C + \cdots\cdots + \\
+ \frac{1}{n!}(\mathbf{x} - \mathbf{x_C})^n :: \cdots :: (\nabla\nabla\cdots\nabla\phi)_C + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

精度

- $\bar{\phi}_C$ 的平均值

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}_C &= \frac{1}{V_C}\int_{V_C} \phi dV \\
&= \frac{1}{V_C}\int_{V_C} \left[\phi_C + (\mathbf{x}-\mathbf{x_C})\cdot(\nabla\phi)_C + \mathcal{O}\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x_C}|^2\right)\right] dV \\
&= \frac{1}{V_C}\int_{V_C} dV \\
&= \phi_C + \mathcal{O}\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x_C}|^2\right)
\end{aligned}
$$

对流项平均值

- 对流项

$$\overline{(\rho_f \mathbf{v}_f \phi_f) \cdot \mathbf{S}_f} = \int_f (\rho \mathbf{v} \phi) \cdot d\mathbf{S}$$
$$= (\rho \mathbf{v}_f \cdot S_f) \left[\phi_f + \mathcal{O}\left(|\mathbf{x} - \mathbf{x_f}|^2\right)\right]$$

扩散项平均值

- 对流项

$$
\begin{aligned}
\overline{(\Gamma\nabla\phi)_f \cdot \mathbf{S}_f} &= \int_f (\Gamma\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} \\
&= (\Gamma\nabla\phi)_f \cdot \mathbf{S}_f + \mathcal{O}\left(|\mathbf{x} - \mathbf{x_f}|^2\right)
\end{aligned}
$$

离散方程性质

- 1. 守恒
- 2. 精度
- 3. 收敛
- 4. 协调
- 5. 稳定
- 6. 经济
- 7. 输运
- 8. 有界