Lecture 18 Pressure-Velocity Coupling

汪 洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

August 2022

PISO 算法

- PISO(Pressure-Implicit with Splitting of Operators)
- Isaa1986 年提出的一种求解压力速度耦合的非迭代算法。目前是应用最为广泛。
- OpenFOAM 中的实现的 PISO 算法与原始版本是有一定区别的。

PISO 算法 Operator splitting

- Operator splitting 方法通常是 PDE 方程一种求解方法。其有可以分为两类，差分分解和代数分解
- Issa 方法中用到的是代数分解

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}(\phi) = 0 \tag{1}$$

- 其中 $\mathcal{L}$ 表示代数离散符号

PISO 算法 Operator splitting

- 以对流扩散方程为例

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{U}) - \nabla(\nu \nabla \phi) = 0 \tag{2}$$

- 如果采用某种时间离散格式，那么下一个时刻值可以由当前时刻值表示，假设这种关系为 $\mathcal{F}$

$$\phi^{n+1} = \mathcal{F}(\phi^n, \Delta t) \tag{3}$$

PISO 算法 Operator splitting

- 对流扩散方程进行算子分解可由公式 3 变成两个微分方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{U}) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla(\nu \nabla \phi) = 0 \tag{5}$$

- 对公式 4,5 进行空间离散，时间项不变，可得到两个半离散方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}_1(\phi) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}_2(\phi) = 0 \tag{7}$$

PISO 算法 Operator splitting

- 此时，对两个方程分布求解，先求解对流方程，再求解扩散方程，得到下一个时刻的 ϕ^{n+1}

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_C(\phi^n, \Delta t) = 0 \tag{8}$$

$$\phi^{n+1} = \mathcal{F}_D(\phi^{n+\frac{1}{2}}, \Delta t) = 0 \tag{9}$$

PISO 算法 Operator splitting

- 动量方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{S} \tag{10}$$

- 对流扩散项进行有限体积法离散

$$\frac{1}{V} \int_V [\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u})] dV = \mathbf{M}\mathbf{u} \tag{11}$$

- $\mathcal{H}$ 符号

$$\mathcal{H} = \mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{u} \tag{12}$$

- A 为系数矩阵 M 的对角线元素

PISO 算法 Operator splitting

- 时间项采用一阶欧拉格式离散

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n}}{\Delta t}-\mathcal{H}^{n+1}=-\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho}+\mathbf{S} \tag{13}$$

- 对公式 13 进行算子分解，引入上标符号 $*,**,***$ 表示中间步骤产生的速度

PISO 算法 Fisrt Step Operator splitting

- 动量预测，将上一步的 p^n 带入方程，用 $\mathbf{u}^*$ 代替 $\mathbf{u}^{n+1}$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathcal{H}^* = -\frac{\nabla p^*}{\rho} + \mathbf{S} \tag{14}$$

- 求解公式 14 可以得到一个中间速度，但是 $\mathbf{u}^*$ 不满足连续行方程，需要对其修正。

PISO 算法 Second Step Operator splitting

- 第一次修正，假设新的压力场 p^* 满足连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{**} = 0 \tag{15}$$

- 动量方程变为

$$\frac{\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathcal{H}^* = -\frac{\nabla p^*}{\rho} + \mathbf{S} \tag{16}$$

- 将方程 16 带入方程 15 可得

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 p^* = \frac{1}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{u}^n + \nabla \cdot \mathcal{H}^* + \nabla \cdot \mathbf{S} \tag{17}$$

- 将算出的 p^* 带入方程 16 得到新的速度 $\mathbf{u}^{**}$

PISO 算法 Third Step Operator splitting

- 第二次修正，假设新的压力场 p^{**} 满足连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{***} = 0 \tag{18}$$

- 动量方程变为

$$\frac{\mathbf{u}^{***} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathcal{H}^{**} = -\frac{\nabla p^{**}}{\rho} + \mathbf{S} \tag{19}$$

- 将方程 16 带入方程 15 可得

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 p^{**} = \frac{1}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{u}^n + \nabla \cdot \mathcal{H}^{**} + \nabla \cdot \mathbf{S} \tag{20}$$

- 将算出的 p^{**} 带入方程 19 得到新的速度 $\mathbf{u}^{***}$

PISO 算法 Discussion

- Issa 认为一般流动两次修正即可，当然也可以三，四次。
- OpenFOAM 的实现与原生 PISO 有一点点区别。
- 1. 只有在 `system/fvSolution` 文件里面，显式打开 PISO/PIMPLE 的 `momentomPredictor` 才会求解动量方程并且，OpenFOAM 有些求解器是默认打开的，有些是默认关闭的。Jasak 认为如果动量方程中扩散项很重要，则需要打开。
- 2. 在原生算法中，$\mathcal{H}$ 只包含了对流和扩散项，但是在 OpenFOAM 中还包括了时间项的影响，也就是说 `fvm::ddt` 也放进去了