

第七章 波 动

振动在空间的传播过程—**波动**。

机械振动在弹性介质中的传播—**机械波**。

电磁振荡在空间的传播—**电磁波**。

不同种类的波其产生和传播的机制不同，但有着波动的共性：有相似的**波动方程**，有**反射**、**折射**、**干涉**、**衍射**等**波动性**。

本章主要讨论**机械波**。

主要内容：

- (1) 平面简谐波方程（波函数）；
- (2) 波的能量和能流密度；
- (3) 波的干涉和驻波；
- (4) 多普勒效应。

§7-1 机械波的产生和传播

2、横波和纵波：

横波—介质中质元的振动方向垂直于波的传播方向。

如：绳波 **横波只能在固体中传播。**

纵波—介质中质元的振动方向平行于波的传播方向。

如：声波 **纵波可在任何介质中传播。**

水面波—水表面除受张（压）应力外，还受重力和表面张力的作用。水面波为横波和纵波的叠加。

➤ **波传播的是振动的状态和能量，而不是质量。**

1、产生机械波的必要条件：

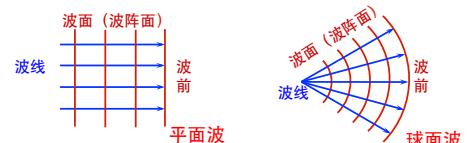
- **波源（振源）**：波动的形式和能量的来源。
- **弹性介质**：机械波只能在介质（气体、液体、固体）中传播。介质内各质元间当有相对位移时，能互相施以弹性恢复力，使各质元能在平衡位置附近按波源的形式振动，并将波源的振动形式（和能量）传播开去。

3、波线和波面：

波线—沿波的传播方向所画的射线。

波面—介质中振动相位相同的点所构成的面。

在各向同性的均匀介质中，波线恒与波面垂直。



球面波传到足够远时，在一小范围内可看作平面波。
(如：传到地球上的太阳光波)

4、波长、周期、频率、波速：

波长 λ — 同一波线上相位差为 2π 的两质元间的距离。

周期 T — 波传播一个波长的距离所需要的时间。

频率 ν — 单位时间内传出的完整波形的个数。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

波的周期、频率和波源的相同。

波速（相速） u — 单位时间内，某振动状态（相位）传播的距离。

$$u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$

波速的大小决定于弹性介质的性质，与波源无关。

固体中：
$$\begin{cases} u_{\text{横}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} & G: \text{固体的切变弹性模量} \\ u_{\text{纵}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} & Y: \text{固体的杨氏弹性模量} \end{cases}$$

张紧的软绳中： $u_{\text{绳}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T : 张力； μ : 质量线密度

流体中： $u = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ B : 流体的容变弹性模量

空气中的声波： $u_{\text{声}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \approx 331 \text{ m/s}$

波的频率决定于波源，波速决定于介质。所以：
同一列波在不同介质中的波长不同。

§7-2 平面简谐波及其波函数

最简单、最基本的波动形式为简谐波。

简谐波：介质中各质元作余弦（或正弦）运动的波。

任意复杂的波总可以表示为若干简谐波的叠加。

波面为平面且向前传播的简谐波称为平面简谐行波。

本节讨论**均匀无限大、无吸收**（没有能量损失）介质中平面简谐波的表达式。

1、平面简谐波方程：

设平面简谐波以波速 u 沿波线 x 传播。

波线上 o 点的振动方程为： $y_o = A \cos(\omega t + \phi)$

波从 o 点传到 p 点需要时间： $At = \frac{x}{u}$

即 p 点质元 t 时刻的振动状态（相位）为 o 点质元 $t-At$ 时刻的振动状态（相位）。

p 点质元的振动方程： $y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi]$

称为（沿 x 正向传播的）平面简谐波方程或波函数。

若波沿 x 轴**负方向**传播，则波函数为：

$$y = A \cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \phi]$$

波沿 x 轴传播，波函数为：

$$y = A \cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \phi]$$

考虑到 $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ 和 $u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$ 波函数还可写成：

$$y = A \cos[2\pi(vt \mp \frac{x}{\lambda}) + \phi]$$

$$y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \phi]$$

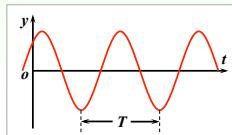
2、对波函数的讨论：

(1) 当 x 一定时，波函数为 x 点处质元的振动方程：

$$y = A \cos[2\pi v t + (\varphi - \frac{2\pi}{\lambda} x)]$$

$$\text{式中: } \varphi - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

为 x 点处质元的振动初相位。



而: $-\frac{2\pi}{\lambda} x$ 为 x 点处振动落后于 o 点处振动的相位。

位移-时间图上相邻两个同相点的间隔即为周期 T 。

(2) 当 t 一定时，波函数为 t 时刻各质元的位移分布情况：

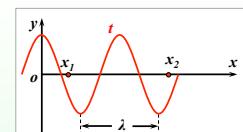
波形图上相位差为 2π 的两点的间隔为波长 λ 。

同一时刻 t ，同一波线上 x_1 、 x_2 两点处振动的相位差：

$$\Delta\varphi = [2\pi(vt - \frac{x_2}{\lambda}) + \varphi] - [2\pi(vt - \frac{x_1}{\lambda}) + \varphi]$$

$$= -2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

$\Delta x = x_2 - x_1$ 称为 **波程差**。

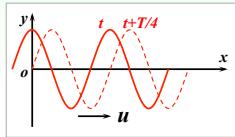


波形图

(3) 当 t 、 x 都变化时，波函数表示波线上所有质元的位移随时间的变化情况。

实线: t 时刻波形。

虚线: $t + \frac{T}{4}$ 时刻波形。



整个波形随时间向 x 正方向运动 —— **行波**

例 7-1: 声波: $v = 3000\text{Hz}$, $u = 1560\text{m/s}$, 沿一波线从 A 传播到 B 。
 $\Delta x = x_B - x_A = 0.13\text{m}$ 。求: (1) 波的周期和波长; (2) B 点振动比 A 点落后多少时间; (3) A 、 B 两点的相位差; (4) 若 $A = 0.1\text{mm}$, 则波线上各质元振动速度的最大值为多少?

$$(1) T = \frac{1}{v} = 3.33 \times 10^{-4} \text{s}, \lambda = \frac{u}{v} = 0.52 \text{m} = 4\Delta x$$

$$(2) \Delta t_{A \rightarrow B} = \frac{\Delta x}{u} = \frac{T}{4} = 8.33 \times 10^{-5} \text{s}$$

$$(3) \Delta\varphi = -2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = -\frac{\pi}{2}$$

$$(4) v_m = A\omega = 18.8 \text{ m/s}$$

► 波的传播速度与介质中质元的振动速度是两个不相同的概念。

例 7-2: 沿 x 轴正向传播的平面简谐波: $u = 1.0\text{m/s}$, $x = 0$ 点处质元的振动方程为 $y_0 = 0.1\cos(\pi t + \varphi)$ (m), $t = 0$ 时, 该质元振动速度 $v_0 = 0.1\pi(\text{m/s})$ 。求: (1) 平面简谐波方程; (2) $t = 1\text{s}$ 时, x 轴上各质元的位移分布; (3) $x = 0.5\text{m}$ 处质元的振动方程。

(1) $x = 0$ 处质元振动的速度:

$$v = \frac{dy_0}{dt} = -0.1\pi \sin(\pi t + \varphi)$$

$$t = 0 \text{ 时: } 0.1\pi = -0.1\pi \sin \varphi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$x = 0$ 处质元的振动方程:

$$y_0 = 0.1 \cos \pi(t - \frac{1}{2}) \text{ (m)}$$

$$\text{波函数: } y = 0.1 \cos \pi(t - x - \frac{1}{2}) = 0.1 \sin \pi(t - x) \text{ (m)}$$

例 7-2: 沿 x 轴正向传播的平面简谐波: $u = 1.0\text{m/s}$, $x = 0$ 点处质元的振动方程为 $y_0 = 0.1\cos(\pi t + \varphi)$ (m), $t = 0$ 时, 该质元振动速度 $v_0 = 0.1\pi(\text{m/s})$ 。求: (1) 平面简谐波方程; (2) $t = 1\text{s}$ 时, x 轴上各质元的位移分布; (3) $x = 0.5\text{m}$ 处质元的振动方程。

$$y = 0.1 \cos \left[\pi(t - \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2} \right] = 0.1 \sin \pi(t - x) \text{ (m)}$$

(2) $t = 1\text{s}$ 时:

$$y = 0.1 \sin \pi(1 - x) = 0.1 \sin \pi x \text{ (m)}$$

(3) $x = 0.5\text{m}$ 处质元的振动方程:

$$y|_{x=0.5m} = 0.1 \sin \pi(t - \frac{1}{2}) = -0.1 \cos \pi t \text{ (m)}$$

§7-3 波的能量和能流密度

1、波的能量、能量密度：

设一列简谐纵波沿均匀细杆传播，波的表达式：

$$y = A \cos \omega(t - \frac{x}{u}) \quad \text{图中: } \frac{\Delta x}{S} \text{ 为 } \Delta x \text{, } x \text{ 为 } x$$

细杆上任取体积元 $\Delta V = S \Delta x$ ，其质量为 $\Delta m = \rho \Delta V$ 。

动能： $E_k = \frac{1}{2} (\Delta m) (\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$

势能： $E_p = \frac{1}{2} (\Delta m) (\frac{\partial y}{\partial x})^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$

机械能（不守恒）：

$$E = E_k + E_p = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

波的能量密度：单位体积介质内的能量。

$$w = \frac{E}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) \quad (\text{J/m}^3)$$

波的平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值。

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

➤ E_k 、 E_p 随时间周期性变化且 $E_k = E_p$ 。它们同时达到最大值(过平衡位置时)；同时为零(最大位移时)，介质内任一体积元的机械能不守恒。

➤ E 增大时，体积元从一侧吸收能量； E 减小时，从另一侧输出能量，从而实现能量的传递。

2、波的能流、能流密度：

能流：单位时间内通过某一面积的波的能量。

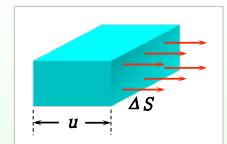
平均能流： $\bar{E} = \bar{w} u \Delta S = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cdot u \cdot \Delta S$

能流密度（波的强度）：

通过垂直于波传播方向单位面积的平均能流。

$$I = \frac{\bar{E}}{\Delta S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cdot u$$

或： $\bar{I} = \bar{w} \cdot u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \bar{u}$



单位： (W/m^2)

3、声强和声强级：

声波的能流密度称为声强。

正常听觉反应的声强范围 ($v = 1000 \text{ Hz}$)：

$$\begin{cases} \text{最低 (闻域)} : & 10^{-12} \text{ (W/m}^2\text{)} \\ \text{最高 (痛感域)} : & 1 \text{ (W/m}^2\text{)} \end{cases}$$

响度：人耳对声音强弱的主观感觉。

响度大致正比于声强的对数。

声强级：按对数标度的声强。

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (\text{单位: 贝尔})$$

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (\text{单位: 分贝 dB})$$

式中 I_0 为闻域的声强 ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$)。

➤ 声强增大 9 倍，声强级增加 10 dB。

➤ 声强增大 1 倍，声强级增加 3 dB。

例7-4: 狗叫声功率约为 $1mW$, 设叫声向四周均匀传播, 求 $5m$ 远处的声强级; 若两只狗在同一地方同时叫, 则 $5m$ 处的声强级为多少?

若不计空气对声波的吸收, 则:

$$P = I \times 4\pi r^2$$

$r = 5m$ 处声波的强度 (平均能流密度) :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = 3.18 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

$$\therefore L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 65 \text{ dB}$$

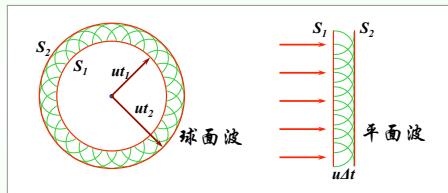
两只狗同时叫时:

$$L' = 10 \lg \frac{2I}{I_0} = 68 \text{ dB}$$

§7-4 惠更斯原理与波的传播

1、惠更斯原理:

波前上每一个点都可看作产生球面次波的波源, 而后一时刻新的波前就是这些球面次波的包络面。



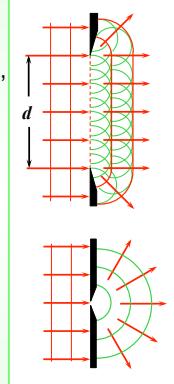
惠更斯原理可用于定性解释波的反射、折射和光在各向异性介质中的传播, 但不能解释: (1)子波为何不会向后传; (2)波的强度分布问题。

2、波的衍射:

当平面波在传播过程中遇到障碍物时, 波将改变传播方向—波的衍射。

- (1) 当 $d \gg \lambda$ 时, 衍射不明显, 波仍沿原方向传播;
- (2) 当 $d \sim \lambda$ 时, 衍射较明显;
- (3) 当 $d \ll \lambda$ 时, 衍射很明显。

声波波长: $16.5m \sim 1.65cm$
如: 无线电中波: $180 \sim 560m$



§7-5 波的干涉、驻波

1、波的叠加原理:

(1) **波的独立传播原理:** 几列波在传播时, 无论是否相遇, 都将保持各自原有特性 (频率、波长、振幅、振动方向) 不变, 互不影响。

(2) **波的叠加原理:** 几列波相遇处质元的位移为各列波单独存在时在该点引起位移的矢量和。

2、波的干涉：

任意两列波在空间的叠加情况是很复杂的，但当两列简谐波满足**相干条件**时，可在波场中得到稳定的干涉图样。

相干条件：

- (1) 两列波具有**相同的频率**；
- (2) 两列波具有**相同的振动方向**；
- (3) 两列波的**相位相同或相位差保持恒定**。

满足相干条件的两列波称为**相干波**，它们的波源称为**相干波源**。

定量分析：

设产生简谐波的两波源 S_1 、 S_2 的振动方程为：

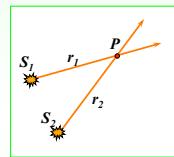
$$y_{10} = A_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_{20} = A_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

两列波在波场中 P 点引起的振动为：

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$



这是两个同方向、同频率的振动，相位差为：

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

波源相位差

波程差引起的相位差

由同方向、同频率振动的合成规律， P 点振动表达式为：

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其振幅和初相位为：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

两列相干波在空间叠加时，波场中各质元的振幅 A 保持不变，有些点处振动始终被加强（**相长干涉**）、有些点处始终被减弱（**相消干涉**），得到稳定的干涉图样，称为**干涉现象**。

讨论：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

(1) $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ 时， $A = A_1 + A_2 \rightarrow$ 相长干涉
 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ 时， $A = |A_1 - A_2| \rightarrow$ 相消干涉

(2) $\varphi_2 = \varphi_1$ 时：

当 $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \pm 2k\pi$ 时：

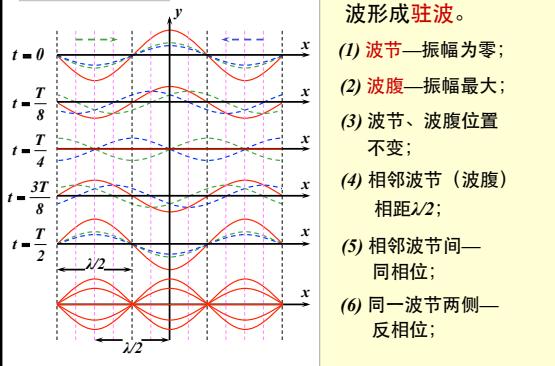
即： $\delta = r_1 - r_2 = \pm k\lambda$ 时 \rightarrow 相长干涉

当 $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi$ 时：

即： $\delta = r_1 - r_2 = \pm(2k+1)\lambda/2$ 时 \rightarrow 相消干涉

不满足相干条件的两列波不能产生干涉现象。

3、驻波：



两列反向传播的相干波形成**驻波**。

- (1) **波节**—振幅为零；
- (2) **波腹**—振幅最大；
- (3) 波节、波腹位置不变；
- (4) 相邻波节（波腹）相距 $\lambda/2$ ；
- (5) 相邻波节间—同相位；
- (6) 同一波节两侧—反相位；

两行波方程：

$$y_1 = A \cos 2\pi(vt - \frac{x}{\lambda}), \quad y_2 = A \cos 2\pi(vt + \frac{x}{\lambda})$$

则驻波方程：

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi v t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$$

(1) 驻波的振幅： $|2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}|$

$$\text{波节处: } 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(2k+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{波腹处: } 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm k\pi \Rightarrow x = \pm k \frac{\lambda}{2}$$

测得波节、波腹位置可求出波长。

$$y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$$

(2) 驻波的相位:

- ☞ 同一时刻 t , 相邻波节间 $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ 符号相同,
所以: 相邻波节间所有质元相位相同;
 - ☞ 同一时刻 t , 同一波节两侧 $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ 符号相反,
所以: 同一波节两侧的质元相位相反。
- 形成驻波的两列行波能流密度等值、反向, 所以:
驻波不传播能量, 只是介质的一种特殊振动形式。

4、半波损失:

一列行波遇到两种介质的分界面时, 会发生反射。
入射波与反射波叠加可形成驻波。

定义: 介质密度与波速的乘积 ρu 称为波阻。

ρu 大称为波密介质; ρu 小称为波疏介质。

➤ 波从波密介质射到波疏介质表面时, 入射波与反射波在反射点处相位相同, 形成波腹。称为全波反射。

➤ 波从波疏介质射到波密介质表面时, 入射波与反射波在反射点处相位相反, 形成波节。称为半波反射。在反射点处反射波相位突变 π 的现象称为半波损失。

例7-5: 分析两端固定, 长为 L 的弦可能产生的振动频率。

弦的两端固定, 所以均为波节, 故仅当弦长为半波长的整数倍时才能形成稳定的驻波。即:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

波速: $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda_n v_n$

所以: $v_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

可见: 当弦的线密度和弦长一定时, 调节张力可改变弦发出声音的频率。当 $n=1$ 时, v_1 称为基频; $n>1$ 时, v_n 称为倍频。

§7-6 多普勒效应

波源与观察者相对静止时, 观察者测得的频率与波源相同; 但当波源和观察者相对介质运动时, 观察者测得的频率与波源频率不同。这种现象称为多普勒效应。

设波源频率为 v (与运动无关); 波相对介质的传播速度为 u (与运动无关); 波源相对介质的速度为 $v_{\text{源}}$; 观察者相对介质的速度为 $v_{\text{观}}$ 。

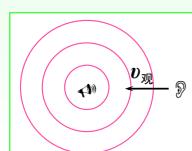
以波源和观察者沿两者连线方向运动为例讨论。

1、波源静止、观察者运动 ($v_{\text{源}} = 0, v_{\text{观}} \neq 0$):

(1) 观察者向着波源运动:

波以 $u + v_{\text{观}}$ 通过观察者, 波长不变。

$$v' = \frac{u + v_{\text{观}}}{\lambda} = \frac{u + v_{\text{观}}}{u} \cdot v \quad (> v)$$



(2) 观察者离开波源运动: ($v_{\text{观}} < u$)

波以 $u - v_{\text{观}}$ 通过观察者, 波长不变。

$$v' = \frac{u - v_{\text{观}}}{\lambda} = \frac{u - v_{\text{观}}}{u} \cdot v \quad (< v)$$

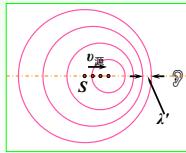
2、观察者静止、波源运动 ($v_{\text{观}} = 0$ 、 $v_{\text{源}} \neq 0$) :

(1) 波源向着观察者运动:

波速不变, 波长变短:

$$\lambda' = \lambda - v_{\text{源}} T = (u - v_{\text{源}}) T$$

$$v' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - v_{\text{源}}} \cdot \frac{1}{T} = \frac{u}{u - v_{\text{源}}} \cdot v \quad (> v)$$



(2) 波源离开观察者运动:

波速不变, 波长变长:

$$v' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u + v_{\text{源}}} \cdot \frac{1}{T} = \frac{u}{u + v_{\text{源}}} \cdot v \quad (< v)$$

3、波源和观察者同时运动 ($v_{\text{源}} \neq 0$ 、 $v_{\text{观}} \neq 0$) :

$$v' = \frac{u \pm v_{\text{观}}}{u \mp v_{\text{源}}} \cdot v$$

➤ 波源、观察者相互接近时, 观测频率高于波源频率; 相互远离时, 观测频率低于波源频率。

➤ 波源运动和观察者运动对观测频率的影响不同。即使当 $v_{\text{源}} = v_{\text{观}}$ 时, 对频率的影响也不同。

➤ 当运动不沿两者的连线时, 只需考虑速度沿两者连线的分量即可。

➤ 电磁波、光波也有多普勒效应。