

第 10 章

直 流 电 路

电流是由导体中大量自由电荷做定向运动而形成的,本章主要讨论导体内形成的不随时间变化的恒定电流。要在导体内维持恒定的电流分布,必须在其中建立一恒定电场。恒定电场与电流分布之间的定量关系由欧姆定律的微分形式所确定。导体内的恒定电场与静电场有相同的性质,它是依靠电源(如化学电池、发电机等)提供的非静电力来维持的。电源中的非静电力产生的电动势是本章的重要内容。电路中的电源一方面要不断做功,将其他形式的能量(如化学能、机械能等)转化为电能;另一方面,电流在电路中产生热效应或以其他形式消耗电能。因此,电路中的功能关系也是本章的内容之一。直流电路是由电阻和电源组成的,当电路中各电阻之间没有简单的串并联关系时,此电路称为复杂电路。本章最后讨论基尔霍夫定律及其在求解复杂电路时的应用。

10.1 恒定电流

► 10.1.1 电流和电流密度

微观上,金属导体内的自由电子总是在不停地做无规则热运动。在没有外电场的情况下,它们朝任一方向运动的概率都是相等的,因此并不形成电流。如果在导体两端加上电压,即导体内出现了电场,这时自由电子除了参加无规则热运动,还要在电场作用下,逆着电场方向运动。

电荷的这种定向运动形成宏观的电流。有时把导体中自由电荷在电场作用下的定向运动形成的电流称为传导电流,以与电荷由于机械运动形成的电流相区别。历史上把正电荷定向运动的方向规定为电流的方向。应当指出,就电流激发磁场,以及磁场对载流导线的作用,正电荷的定向运动与负电荷的反向定向运动是等效的,我们不必去区分是何种电荷做定向运动。但是,对于其他许多现象,如霍耳效应、电流的化学效应等,就需要考虑是何种电荷做定向运动了。

单位时间内通过导体任一截面的电荷量称为电流强度,简称电流,用 I 表示,即

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

式中 Δq 是时间 Δt 内通过所考虑截面的电荷量.

如果电流的大小和方向不随时间而变,这种电流称为恒定电流.在实际问题中,有时除了要知道电流的大小外,还要了解导体内任一点处电荷的流动情况,即要知道电流的分布情况,因此就需要有一个描述电流分布特征的物理量,这个物理量就是电流密度.

电流密度是矢量,用 j 表示.其方向为正电荷在该点的流动方向,也就是该点的电场 E 的方向.其数值为通过该点的单位垂直面积的电流,如图 10-1 所示,即

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

式中 dI 为流过与电流方向垂直的面元 dS_{\perp} 的电流.

由上式可以得到

$$dI = j dS_{\perp}.$$

上式可以这样理解,它是已知 j ,求通过与 j 方向垂直的面元 dS_{\perp} 的电流的计算式.如果面元 dS 的方向与该点的 j 方向成 θ 角,如图 10-2 所示,则流过 dS 的电流应按下式计算

$$dI = j dS \cos \theta = j \cdot dS. \quad (10.1-1)$$

由上式可以计算通过任一面积的电流 I ,

$$I = \iint j \cdot dS. \quad (10.1-2)$$

式(10.1-1)和式(10.1-2)表明电流密度 j 与电流 I 的关系是矢量与它的通量的关系.

有了电流密度 j 的概念,就可以描述大块导体中各点的电流分布.一般而言,各点的 j 有不同的数值和方向,它们构成的矢量场称为电流场.电流场也可以直观地用电流线来描绘.电流线是指这样的曲线:曲线上每点的切线方向都和该点的电流密度矢量的方向一致.

国际单位制中,电流的单位是安培,简称安,用 A 表示;电流密度的单位是安/米²,用 A/m² 表示.

► 10.1.2 电流的连续性方程 恒定条件

电荷在流动过程中也应服从电荷守恒定律.设想在导体内取闭合曲面 S ,规定其外法线方向为面元的正方向.闭合曲面 j 的通量 $\oint j \cdot dS$,表示在单位时间内通过曲面流出的电荷量.按照电荷守恒定律它应该等于同一时间内 S 面内正电荷的减少 $-\frac{dq}{dt}$,即

$$\oint j \cdot dS = -\frac{dq}{dt}. \quad (10.1-3)$$

上式称为电流的连续性方程,其实质为电荷守恒定律.

对于恒定电流,它要求导体内任一处都不能有电荷的积累,否则必然引起电场的变化,

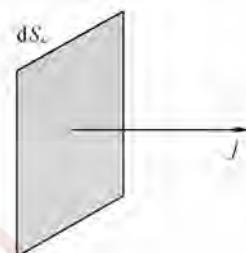


图 10-1

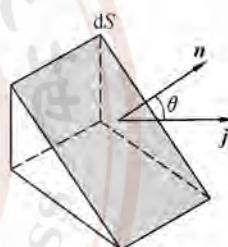


图 10-2

苏州大学出版社电子教材

电流就不能维持恒定,这样,任一闭合面内 $\frac{dq}{dt}=0$,由此

$$\oint j \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (10.1-4)$$

上式称为电流恒定条件。它表明在恒定条件下,通过闭合曲面一侧流进的电流必等于从另一侧流出的电流。电流的恒定条件也表明,恒定电流必须是闭合的,恒定电路也必须是闭合的。

应该指出,在恒定电流的情形中,虽然电荷在做定向运动,但是电荷的分布是不随时间而变的,不随时间而变的电荷分布产生的电场也不随时间而变,这种电场叫作恒定电场,恒定电场与静电场相似,它也是一个有势场,即也应有 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。因此也可以引进电势的概念,恒定电场中常把电势差称为电压。

例 10-1 在电场作用下,金属导体内的自由电子获得定向“漂移”运动。设电子电荷量的绝对值为 e ,电子“漂移”运动速率的平均值为 \bar{v} ,单位体积内自由电子数为 n 。试证: 电流密度 $j = ne\bar{v}$ 。

解 在金属导体中,取一小截面 ΔS , ΔS 的法线方向与电场 \mathbf{E} 平行,通过 ΔS 的电流 ΔI 等于每秒内通过截面 ΔS 的所有自由电子的总电荷量。以 ΔS 为底面积,以 \bar{v} 为高作一小柱体,小柱体内的自由电子总数 $n\bar{v}\Delta S$ 将在 1 s 内全部通过截面 ΔS 。这样,

$$\Delta I = (n\bar{v}\Delta S)e = ne\bar{v}\Delta S,$$

电流密度

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S},$$

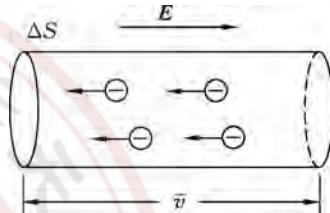
所以

$$j = ne\bar{v}. \quad (10.1-5)$$

例如,一般铜导线 $n = 8.5 \times 10^{28}$ 个/立方米,正常使用中 $j = 200 \times 10^4$ A/m²,则电子的定向漂移速率

$$\bar{v} = \frac{j}{ne} = \frac{200 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}}{8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 0.15 \text{ mm/s.}$$

可见,电子的定向漂移速率是十分小的。



例 10-1 图

10.2 欧姆定律 电阻

► 10.2.1 欧姆定律

要研究金属导体内自由电子在电场作用下的定向运动,要用到量子力学知识。理想的金属晶体点阵是指所有正离子都处在固定不动的位置上做有规则排列。量子力学已证明自由电子在外电场作用下可以不受阻挡地通过这种理想的晶体点阵。然而任何实际金属的点阵

都偏离理想的有规则排列.这是由于离子不可能静止在它的平衡位置,它要在平衡位置附近做热振动,而且该振动不可能是同相的.同时杂质和缺陷的存在也会造成对理想点阵的偏离.所有这些使电子的运动受到阻碍,电子在这些偏离理想晶体点阵中的运动要受到多次散射,甚至向相反方向运动.因此电子一方面从电场获取能量,另一方面又要把能量转移给晶体点阵.最终电子的定向运动会成为恒定状态,即电子具有恒定的定向运动速度(所谓漂移速度),从而形成恒定电流.从以上分析可知,形成电流的大小,除与电场有关外还与导体本身的性质有密切关系.

1826年,德国物理学家欧姆(G. S. Ohm 1787—1854)通过大量实验发现:在恒定条件下,通过一段导体的电流 I 与导体两端的电压 U 成正比,即

$$I \propto U.$$

如果写成等式

$$I = \frac{U}{R} \text{ 或 } U = IR.$$

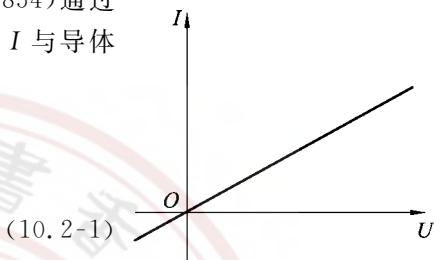


图 10-3

式中的比例系数由导体的性质决定,叫作导体的电阻.这一规律就是欧姆定律.图 10-3 所示是一段金属导体的电压与电流的关系曲线,它是一条直线.

► 10.2.2 电阻

一个元件的电阻的定义式为

$$R = \frac{U}{I}, \quad (10.2-2)$$

即加在该元件两端的电压与流过电流的比值.欧姆定律说明,在恒定条件下金属导体的电阻是常量.

欧姆定律对于金属导体和电解质溶液是十分精确的,但它不适用于半导体、气体的导电情况.半导体二极管中电流与电压的关系不是线性关系,如图 10-4 所示.半导体二极管的正负极接反时,电流几乎减小到零,这种元件通常称为非线性元件.欧姆定律对它们虽不适用,但仍可以按 $R = \frac{U}{I}$ 来定义它的电阻,只不过它的电阻不是常量.通常把遵守欧姆定律的元件叫作线性元件,其电阻叫作线性电阻或欧姆电阻.

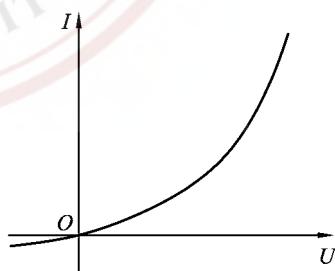


图 10-4

在国际单位制中,电阻的单位为欧姆,简称欧,用 Ω 表示, $\Omega = V/A$.

电阻 R 的倒数称为电导,用 G 表示,

$$G = \frac{1}{R}. \quad (10.2-3)$$

电导的单位称为西门子,简称西,用 S 表示, $S = \frac{1}{\Omega}$.

苏州大学出版社电子教材

导体的电阻由导体的材料及几何形状决定。实验表明，对于由一定材料制成的粗细均匀的导体，它的电阻 R 与长度 l 成正比，与横截面积 S 成反比，写成等式有

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

式中比例系数 ρ 称为电阻率，它由导体的材料决定。电阻率 ρ 的倒数称为电导率 σ ，

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (10.2-4)$$

国际单位制中，电阻率 ρ 的单位为 $\Omega \cdot m$ ，电导率 σ 的单位为 S/m 。

当导线的截面积 S 或电阻率 ρ 不均匀时，就不能用 $R = \rho \frac{l}{S}$ 来计算电阻，需用下式计算

$$R = \int \rho \frac{dl}{S}. \quad (10.2-5)$$

实验表明，导体的电阻率随温度而改变，所有纯金属的电阻率都随温度升高而增大。在 $0^\circ C$ 附近，电阻率与温度之间满足线性关系

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t). \quad (10.2-6)$$

其中 ρ_t 和 ρ_0 分别为 $t^\circ C$ 及 $0^\circ C$ 时的电阻率， α 称为电阻温度系数。各种材料的电阻率 ρ_0 及电阻温度系数 α 见表 10-1。

表 10-1 几种材料 $0^\circ C$ 时的电阻率 ρ_0 及温度系数 α

材 料	$\rho_0 / \Omega \cdot m$	$\alpha / ^\circ C^{-1}$
银	1.5×10^{-8}	4.0×10^{-3}
铜	1.6×10^{-8}	4.3×10^{-3}
铝	2.5×10^{-8}	4.7×10^{-3}
钨	5.5×10^{-8}	4.6×10^{-3}
铁	8.7×10^{-8}	5.0×10^{-3}
铂	9.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
汞	94×10^{-8}	8.8×10^{-4}
碳	3.500×10^{-8}	-5×10^{-4}
镍铬合金 (60%Ni, 15%Cr, 25%Fe)	110×10^{-8}	1.6×10^{-4}
镍铜合金 (54%Cu, 46%Ni)	50×10^{-8}	4×10^{-4}
锰铜合金 (84%Cu, 12%Mn, 4%Ni)	48×10^{-8}	1×10^{-5}

从表 10-1 中可以看出，一般金属的电阻温度系数 α 近似为 $4 \times 10^{-3}/^\circ C$ ，注意到金属的线胀系数约为 $10^{-5}/^\circ C$ ，因此在考虑金属导体的电阻随温度变化时，可以忽略导体长度和截面面积随温度变化的因素，得到

$$R = R_0 (1 + \alpha t). \quad (10.2-7)$$

其中 R_0 为 $0^\circ C$ 时的电阻。

利用金属电阻随温度变化的性质，可以制成电阻温度计。例如，各种类型的铂电阻温度

并可用于测试低温 14 K 直到几百摄氏度的各个温区. 利用半导体电阻率随温度降低而急剧增大的特性, 可以制成适用于低温区的半导体温度计.

有许多材料具有超导电性. 当温度降低时, 电阻率先是有规律地下降, 如同一般金属一样. 但是, 到达临界温度, 电阻率突然下降到零. 图 10-5 所示是汞在 6 K 以下时电阻变化的情况. 大约在 4.2 K 左右, 汞的电阻突然消失, 这种现象叫作超导电性. 这时导体从正常导体转变为超导体. 它是 1911 年荷兰科学家昂纳斯(K. Onnes)发现的. 在超导电状态中, 材料的电阻几乎为零. 在闭合的超导电路中电流一经建立起来, 它会维持几个星期而不减小.

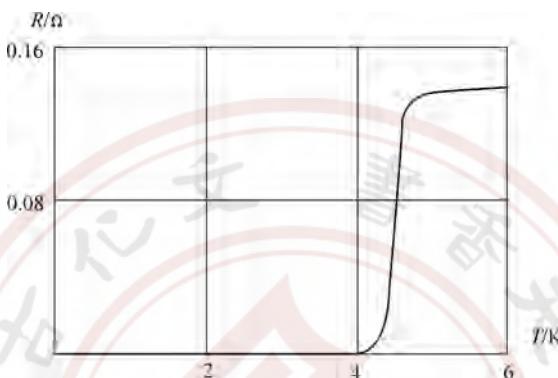


图 10-5

超导材料除了电阻消失外还具有一系列其他独特的物理性质(详见本书下册). 目前, 人们正从多方面探索超导电性的实际应用.

例 10-2 两个半径分别为 R_1 与 R_2 的共轴金属圆柱面之间的空间充以电阻率为 ρ 的导电材料, 圆柱面高度为 l , 求两圆柱面间的电阻.

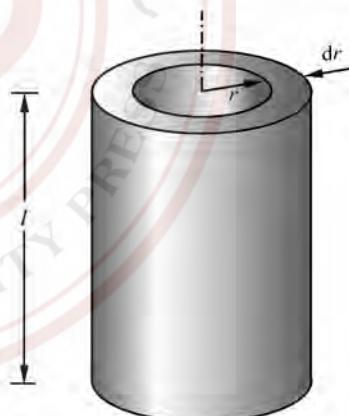
解 因为电荷流动所通过的截面是从内圆柱面的 $2\pi R_1 l$ 变化到外圆柱面的 $2\pi R_2 l$.

考虑半径为 r 、厚度为 dr 的薄圆柱体壳, 其面积 $S=2\pi r l$, 电流流过此壳的长度为 dr , 此部分电阻为

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r l}.$$

两个金属圆柱面之间的总电阻为

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$



例 10-2 图

► 10.2.3 欧姆定律的微分形式

前面已提到电荷的流动是由电场来推动的, 因而描述电流分布的电流密度 j 应该和它所在点的电场 E 密切相关. 下面用欧姆定律来推导这一关系式.

图 10-6 为一段长为 Δl 的均匀导体, 载有恒定电流 I . 电流 I 与电压 ΔU 的关系为 $I=\frac{\Delta U}{R}$. 这段导体的电阻 $R=\rho \frac{\Delta l}{S}$, 注意到 $\frac{I}{S}=j$, 而这段导体中的电场强度 $E=\frac{\Delta U}{\Delta l}$, 因而

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\Delta U}{RS} = \frac{\Delta U}{\rho \frac{\Delta l}{S} \cdot S} = \frac{1}{\rho} E,$$

即

$$j = \sigma E.$$

由于 j 的方向与 E 的方向一致,

$$j = \sigma E.$$

(10. 2-8)

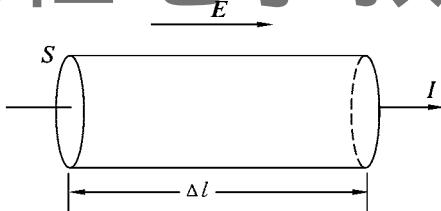


图 10-6

这是欧姆定律的微分形式, 它给出了电流密度 j 与电场强度 E 之间的逐点对应关系. 此式是在稳恒条件下推得的, 但是在变化不太快的非稳恒情形下仍然适用.

10.3 电流的功

► 10.3.1 电功 电功率

图 10-7 是接在电路中的用电器, 该用电器可能是灯泡, 可能是电炉, 也可能是电动机或其他电器. 电流 I 从高电势 U_1 进入, 从低电势 U_2 流出, 这样在时间 t 内有电荷量 $q = It$ 流过用电器. 从能量观点, 时间 t 内有电场能量 $q(U_1 - U_2) = I(U_1 - U_2)t$ 通过用电器转变成其他形式的能量, 这称为电流做功, 简称电功. 显然电功的计算式为

$$W = (U_1 - U_2)It.$$

单位时间内电流做的功, 称为电功率, 用 P 表示,

$$P = \frac{W}{t} = (U_1 - U_2)I.$$

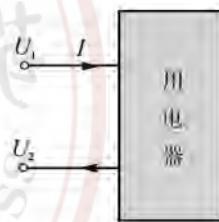
 $U_1 > U_2$

图 10-7

► 10.3.2 焦耳定律

如果用电器是纯电阻元件, 其电阻是 R , 电流做的功将全部转化成热能 Q , 根据欧姆定律, 有

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R},$$

则 Q 及热功率 P 的表达式为

$$Q = (U_1 - U_2)It = I^2 Rt, \quad P = (U_1 - U_2)I = I^2 R.$$

这就是焦耳定律, 是 1840 年英国物理学家焦耳(J. P. Joule 1818—1889)由实验发现的.

焦耳定律的微分形式为

$$p = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2. \quad (10.3-1)$$

式中 p 为单位体积的热功率, 即热功率密度, 单位为瓦/米³ (W/m³). 上式的推导方式与推导欧姆定律的微分形式相同.

应该指出, 所谓电流做功, 实质是电场力做功.

10.4 电动势

► 10.4.1 电动势

现以电容器放电来说明恒定电流形成的条件。为了叙述方便，把自由电子的移动说成是正电荷的移动。当用导线把充了电的电容器正负极板A和B连接起来，导线中正电荷在电场力“推动”下从高电势的A板移动到低电势的B板，如图10-8所示。这种电流是一种瞬变电流。因为放电过程中两极板上带电荷量要减少，两极板的电势差也逐渐减小而趋于零，导线中电场也会减小到零，导线中电流也会减小直到零。这表明仅有静电力的作用是不能维持恒定电流的。

设想如果能把电容器负极板上的正电荷源源不断地移到正极板，以维持两极板的电势差不变，这样就能在导线中维持恒定电流了。显然必须依靠起源于非静电场的非静电力才能把正电荷从低电势的B板“搬回”高电势的A板。

能够提供非静电力的装置称为电源。电源是一种能量转换的装置，它把化学能、热能、太阳能、机械能等形式的能转化成电能。不同的电源，提供非静电力的机制不同。电源的电势高的一端称为正极，电势低的一端称为负极。

我们用**K**表示作用在单位正电荷上的非静电力（注意**K**的单位与电场强度**E**的单位相同，也是N/C）。在电源外部只有静电场**E**。在电源内部，除了静电场**E**外，还有非静电力**K**。由于**K**指向电势升高的方向，所以在电源内部**K**的方向与**E**的方向相反。这样，普遍的欧姆定律的微分形式应为

$$j = \sigma(E + K). \quad (10.4-1)$$

此式表明恒定电流是静电力和非静电力共同作用的结果。

对于同一个电源，非静电力把一定量的正电荷从负极移到正极所做的功是一定的。电源的这种本领，用电动势这个物理量来表示。电源的电动势 \mathcal{E} 定义为把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时非静电力做的功，

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (10.4-2)$$

如果整个电路中都存在非静电力，

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (10.4-3)$$

电动势是标量。在解电路问题中，本书将电源电动势标上带圈的箭头($\circ\rightarrow$)以示非静电力**K**的方向（即指向电势升高的方向）。一个电源的电动势具有一定的数值，它与外电路的性质，以及电路是否接通都没有关系。

电动势的单位与电势单位相同，也是伏(V)。

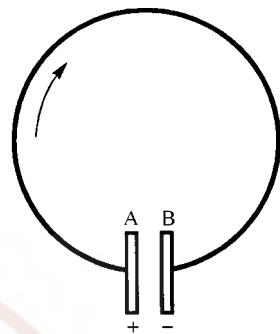


图 10-8

苏州大学出版社电子教材

► 10.4.2 电源的端电压

在直流电路计算中遇到的电源大多是可逆电源. 对它们说来既能放电又能充电. 图 10-9 所示是某一闭合回路中含有电源的一段电路, 它可以分为两种情形. 对图(a), 电源内部电流方向与电动势方向(即 **K** 指向)一致, 电源在放电. 在图(b)中, 电源内部电流方向与电动势方向相反, 电源在充电. 对于内阻 $r=0$ 的理想电源, 不管是放电还是充电, 电源正负极板的电势差都等于电动势. 如果图 10-9 中的电源是理想电源, 则电源的端电压 $U_1 - U_2 = \mathcal{E}$.



图 10-9

内阻 r 不为零的实际电源, 可以看成是电动势 \mathcal{E} 的理想电源与电阻 r 的串联组合, 如图 10-10 所示. 不难证明, 对于图 10-10(a)所示的放电情形, 电源的端电压

$$U_1 - U_2 = \mathcal{E} - Ir. \quad (10.4-4)$$

对于图 10-10(b)所示的充电情形, 电源的端电压

$$U_1 - U_2 = \mathcal{E} + Ir. \quad (10.4-5)$$

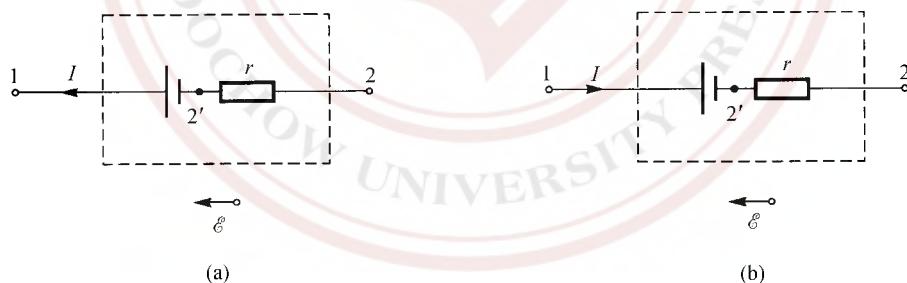


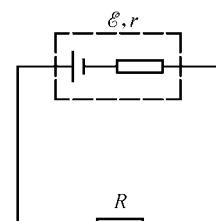
图 10-10

例 10-3 电路如图所示, 设有一电动势为 \mathcal{E} 、内电阻为 r 的电源, 求输出功率及其效率 η (输出功率与总功率之比)与外电阻 R 的关系.

解 输出功率 $P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$, 由 $\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{r-R}{(R+r)^3} = 0$, 可知, 当

$$R = r \quad ①$$

时输出的功率最大, 此时功率为 $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.



例 10-3 图

电源的效率为

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{RI^2}{\epsilon I} = 1 - \frac{r}{R+r}.$$

当 $R \gg r$ 时, $\eta \rightarrow 1$; 当 $R \rightarrow 0$ 时, $\eta \rightarrow 0$; 当 $R = r$ 时, $\eta = \frac{1}{2}$.

式①称作负载电阻与电源的匹配条件. 应当指出, “匹配”的概念只在电子电路中才使用. 因为那里电源的内阻一般是较高的, 并且输出信号的功率很弱, 需要负载与电源匹配以提高输出功率. 而在低内阻大功率的电路中, 不需要考虑匹配. 因为匹配的结果将会导致电流过大, 引起事故.

10.5 基尔霍夫定律

► 10.5.1 复杂网络

并非所有的电路都能简化为串联和并联的组合, 图 10-11 就是一例. 图 10-11(a)是一个交叉连接的电阻网络, 图 10-11(b)中两条并联通路中各含有一个电源. 计算这些网络中的电流并不需要新的原理, 只要有些技巧, 就能解决这些问题. 本节所讲的求解这类复杂网络问题的方法由德国物理学家基尔霍夫(G. R. Kirchhoff 1824—1887)首先提出的.

在网络中把电源与电阻或电阻与电阻串联而成的通路称为支路. 在同一支路内电流处处相等. 凡三个或三个以上支路连接的一点称为节点. 几条支路构成的闭合通路称为回路. 例如, 在图 10-11(a)中有四个节点, a, b, f, e 各点都是节点, 在图 10-11(b)中只有 a, b 两个节点; 在图 10-11(a)中, 闭合路径 $acfea, efdbe, aebhga$ 以及 $gacfdbhg$ 等都是回路.

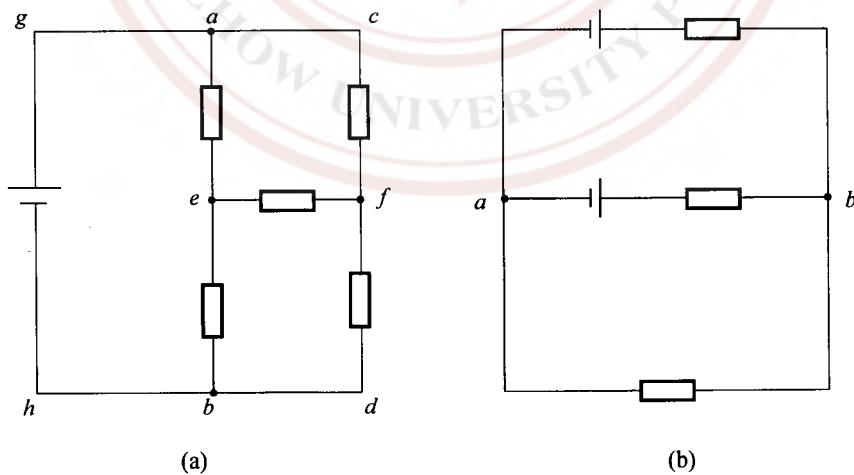


图 10-11

► 10.5.2 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律包含两部分内容.

苏州大学出版社电子教材

基尔霍夫第一定律,亦称节点电流定律——网络中任一节点,流向节点的电流与流出节点的电流的代数和为零,

$$\sum I = 0. \quad (10.5-1)$$

基尔霍夫第二定律,亦称回路电压定律——任一回路的电动势的代数和,等于在这个回路中的 IR 乘积的代数和,

$$\sum IR = \sum \mathcal{E}. \quad (10.5-2)$$

基尔霍夫第一定律,说明在网络的节点上不会有电荷积累. 实际上就是电流的恒定条件,它体现了电荷守恒. 基尔霍夫第二定律,可以用静电场的环路定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 以及普遍的欧姆定律 $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{K})$ 来导出. 它表明把单位正电荷沿回路移动一周,非静电力做功等于电场力做的功. 这一点体现了能量守恒.

应用基尔霍夫定律解复杂网络的困难,不在于对定律本身物理内涵的理解,而在于对其中涉及代数和的各量,电流、电动势的正负的取法.

节点电流定律中,依照通常的惯例,规定从节点流出的电流取正,流进节点的电流取负(或者相反,把流进节点的电流取正,流出节点的电流取负).

应用回路电压定律对回路列方程时:

(1) 先设定回路的绕行方向(譬如顺时针或逆时针).

(2) 如果支路电流流向与绕行方向相同, I 取正值;反之, I 取负值.

(3) 如果电动势的方向与绕行方向相同, \mathcal{E} 取正值;反之, \mathcal{E} 取负值.

以图 10-11(b) 电路为例,如果各元件的参量为已知,对所要求的三条支路的电流 I_1, I_2, I_3 标出假设的方向,再对两个闭合回路选定绕行方向,如图 10-12 所示. 应用基尔霍夫定律有

$$\text{对节点 } a: I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$\text{对节点 } b: -I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

对于两个回路,相对于标出的绕行方向,回路电压方程分别为

$$I_1(R_1 + r_1) - I_2(R_2 + r_2) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2;$$

$$I_2(R_2 + r_2) + I_3R_3 = \mathcal{E}_2.$$

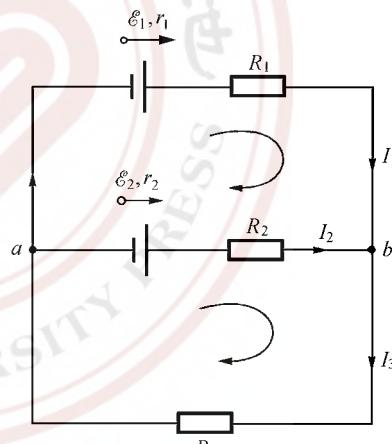


图 10-12

► 10.5.3 基尔霍夫定律的应用

复杂网络的典型问题是已知各电源和电阻求解各支路的电流. 理论上应用基尔霍夫定律完全能解复杂网络问题. 在应用基尔霍夫定律时,必须注意到下列几点:

(1) 对于有 n 个节点的复杂网络,其中只有 $n-1$ 个节点的电流方程是独立的,另剩余 1 个节点的电流方程必然是这 $n-1$ 个节点电流方程的相加.

苏州大学出版社电子教材

(2) 取回路写回路电压方程时, 必须注意回路的独立性, 即要选独立回路. 独立回路是指在新选定的回路中, 至少有一条支路在已选过的回路中未曾出现过. 这样的回路电压方程才是独立的.

(3) 独立方程的个数应等于所求未知数的个数. 可以证明对于一个具有 p 条支路 n 个节点组成的复杂网络, 独立回路数为 $p-(n-1)$ 个.

(4) 支路上电流方向可以任意假定, 计算结果电流如为负值, 说明该支路中电流的实际方向与原假定方向相反.

在某些实际的电路网络计算中, 运用由基尔霍夫定律导出的一些定理, 如等效电源定理、叠加定理、 $Y-\Delta$ 变换等, 计算可以大为简化. 有关这方面的内容, 可参考有关电路分析书籍.

例 10-4 考虑两个直流电源并联起来给一个负载供电的实例, 如图 10-11(b) 所示. 设 $\mathcal{E}_1=220\text{ V}$, $\mathcal{E}_2=200\text{ V}$, 各电源内阻归入相应串联电阻中, $R_1=R_2=10\Omega$, $R_3=145\Omega$, 试求每一支路中的电流.

解 标出每一支路的电流 I_1, I_2, I_3 , 并选定其方向, 再对两闭合回路选定绕行方向, 如图 10-12 所示. 本网络有三条支路(三个未知数), 两个节点.

对节点 a , 电流方程为

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

所选的两个回路均是独立回路, 回路电压方程为

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$$

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2.$$

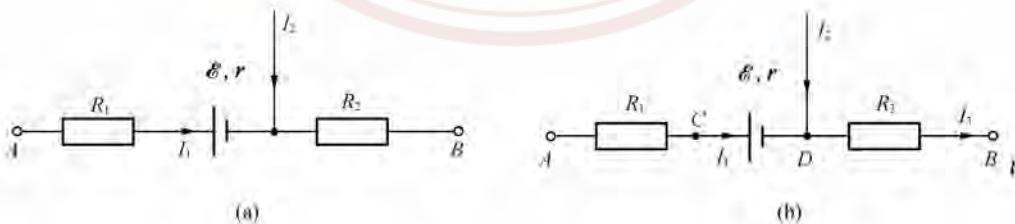
三个未知数, 三个联立方程, 方程有解. 代入数字后解得电流

$$I_1 = 1.7\text{ A}, I_2 = -0.3\text{ A}, I_3 = 1.4\text{ A}.$$

其中 $I_2 = -0.3\text{ A}$, 表明 I_2 的实际流向与图中标定方向相反, 电源 2 处于充电状态.

两个电源电动势不相等时, 在并联供电情形下, 并不一定是两个电源同时向负载供电, 有可能一个电源输出功率, 另一个电源输入功率(即“充电”).

例 10-5 已知复杂网络中一段电路中各量, 如图(a)所示, 求出这段电路的 U_{AB} ($=U_A-U_B$).



例 10-5 图

解 在此电路上, 添加字母 C, D 以及流过 R_2 的电流 I_3 , 如图(b)所示.

由节点电流方程可得 $I_3 = I_1 + I_2$. 这样, $U_D - U_B = (I_1 + I_2)R_2$, $U_A - U_C = I_1 R_1$.

电源充电, 其端电压

$$U_C - U_D = \mathcal{E} + I_1 r,$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = U_A - U_C + (U_C - U_D) + (U_D - U_B) = I_1 (R_1 + r) + (I_1 + I_2) R_2 + \mathcal{E}.$$

苏州大学出版社电子教材

内容提要

1. 电流密度: $j = nqv$; 电流强度: $I = \iint j \cdot d\mathbf{S}$.

2. 电流连续性方程: $\oint j \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$.

恒定电流: $\oint j \cdot d\mathbf{S} = 0$.

恒定电场: 恒定电荷分布产生的电场, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

3. 欧姆定律: $I = \frac{U}{R}$, $j = \sigma E$.

电阻: $R = \frac{U}{I}$, $R = \rho \frac{l}{S}$, $R = \int \rho \frac{dl}{S}$.

4. 焦耳定律: $P = I^2 R$, $P = \sigma E^2$.

5. 电动势: 把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时, 非静电力做的功,

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l}$$

普遍的欧姆定律: $j = \sigma(E + k)$.

6. 基尔霍夫定律.

基尔霍夫第一定律(节点电流定律): $\sum I = 0$.

基尔霍夫第二定律(回路电压定律): $\sum IR = \sum \mathcal{E}$.

习题

10-1 金属材料的温度降低时, 它的电阻

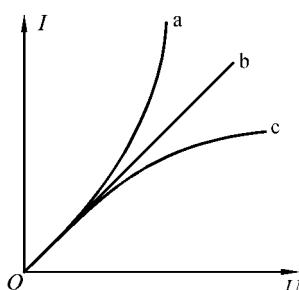
- (A) 总是增大
- (B) 总是减小
- (C) 可能增大也可能减小, 视材料而定
- (D) 先增大后减小

10-2 元件 a, b, c 的伏安曲线如图所示

- (A) 三元件串联后接入电路, a 元件发热更多些
- (B) 三元件串联后接入电路, c 元件发热更多些
- (C) 三元件并联后接入电路, c 元件发热更多些
- (D) 以上三种说法均不正确

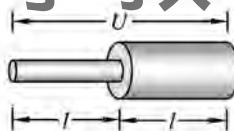
10-3 两个截面不同的铜棒串接在一起, 如图所示. 在

两端加一定的电压 U, 设两棒的长度相同, 则



习题 10-2 图

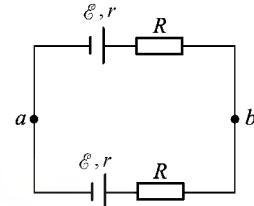
- (A) 通过两棒的电流、电流密度、棒内的电场强度均相同
 (B) 通过两棒的电流密度不相同,但是两棒内的电场强度相同
 (C) 通过两棒的电流、两棒两端的电压均相同
 (D) 只有通过两棒的电流相同



习题 10-3 图

10-4 两个相同的电源和两个相同的电阻如图连接起来. 电路中电流 I 和 a, b 两点的电压 U_{ab} 分别为

- (A) $I=0, U_{ab}=\mathcal{E}$
 (B) $I=\frac{2\mathcal{E}}{R+r}, U_{ab}=\frac{\mathcal{E}}{2}$
 (C) $I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}, U_{ab}=0$
 (D) $I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}, U_{ab}$ 无法求出



习题 10-4 图

10-5 对于图示的电路,以下方程正确的是

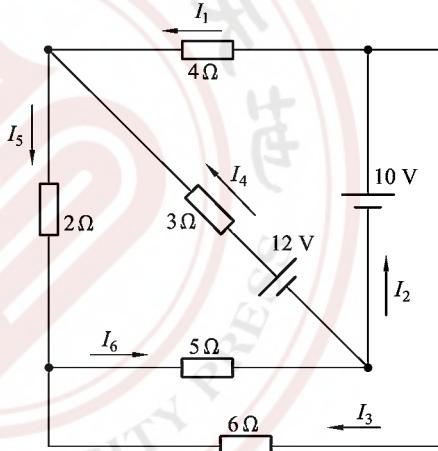
- (A) $I_3+I_6=I_5$
 (B) $I_1+I_2=I_3$
 (C) $I_1+I_4=I_5$
 (D) $I_1+I_2=I_5+I_6$

10-6 参考题 10-5 图,以下方程正确的是

- (A) $4I_1+2I_5+6I_3=10$
 (B) $3I_4+2I_5-5I_6=12$
 (C) $3I_4-4I_1=2$
 (D) $4I_1+2I_5+6I_3=0$

10-7 一根直径为 1 mm 的银导线,在 75 min 内通过电荷 90 C. 已知银的自由电子数密度为 5.8×10^{28} 个/ m^3 ,求:

- (1) 导线中电流的大小;
 (2) 导线中电子的漂移速率.



习题 10-5 图

10-8 范德格拉夫起电机的传送带宽 1 m,以 25 m/s 的速率运行.
 (1) 当进入大球面的电流为 10^{-4} A 时,每秒需将多少电荷量喷射在传送带的一个面上?
 (2) 求传送带上面电荷密度.

10-9 边长为 1 mm 的正方形截面的铜导线,假定导线中每立方米的自由电子数为 1×10^{29} 个,导线中电流为 10 A,求:

- (1) 导线中的电流密度;
 (2) 电场强度;
 (3) 电子通过全长 100 m 的导线所需的时间.

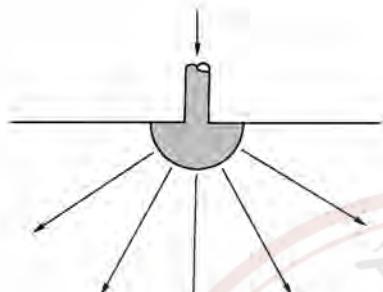
10-10 导线中的电流随时间的变化关系是 $i=4+2t^2$,式中 i 的单位是 A, t 的单位是 s,问:

- (1) 从 $t=5$ s 到 $t=10$ s 的时间间隔内,有多少库电荷通过此导线的截面?
 (2) 如果在相同的时间间隔内,输送相同的电荷,需要多大的恒定电流?

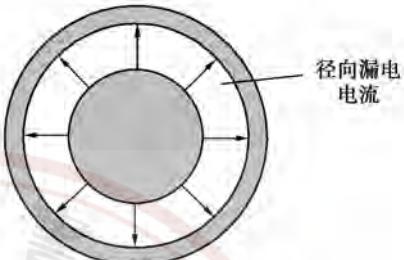
10-11 平行板电容器带有电荷 Q , 平行板间充以电介质, 设其相对介电常数为 ϵ_r , 电阻

率为 ρ , 试证: 电介质中“漏泄”电流为 $i = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 \rho}$.

10-12 如图所示, 有一个半径为 a 的半球形电极与大地接触, 大地的电阻率为 ρ . 假设电流通过接地电极均匀地向无穷远处流散, 试求接地电阻.



习题 10-12 图



习题 10-13 图

10-13 长度为 100 m 的同轴电缆, 芯线是半径为 r_1 的铜导线, 铜线外是一层同轴绝缘层, 绝缘层的外半径为 r_2 , 绝缘层外面又用铅层保护起来, 图示是这种电缆的横截面. 设 $r_1 = 0.5$ cm, $r_2 = 1.0$ cm, 绝缘层的漏电电阻率 $\rho = 1 \times 10^8 \Omega \cdot \text{m}$.

(1) 芯线与铅层间电势差为 100 V 时, 这 100 m 长度的电缆中漏去的电流有多大?

(2) 这种电缆的径向漏电电阻有多大?

10-14 有两个同心导体球壳, 半径分别为 r_a 和 r_b , 其间充以电阻率为 ρ 的导电材料.

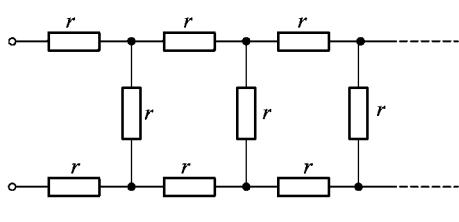
(1) 试证两球壳间的电阻为 $R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$;

(2) 如果两球壳间电势差为 U_{ab} , 试求离球心 r 处的电流密度.

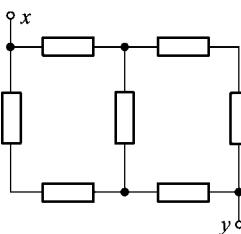
10-15 同样粗细的碳棒和铁棒串联起来, 如果这样的组合其总电阻不随温度而变化, 这两棒的长度之比应该是多少? ($\rho_{碳} = 3.5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\alpha = -5 \times 10^{-4}/\text{K}$; $\rho_{铁} = 10 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\alpha = 5 \times 10^{-3}/\text{K}$)

10-16 一铜线圈在 20 °C 时的电阻为 200 Ω, 问在 50 °C 时其电阻为多少?

10-17 证明图示的无穷电阻网络的等效电阻 $R = (1 + \sqrt{3})r$.



习题 10-17 图



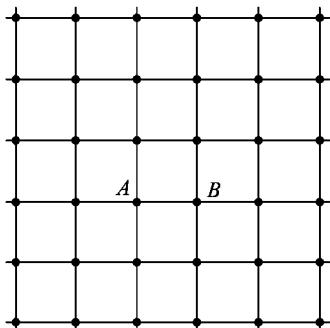
习题 10-18 图

10-18 图示电阻网络中每个电阻均为 10Ω , 试求 x 与 y 两端之间的等效电阻.

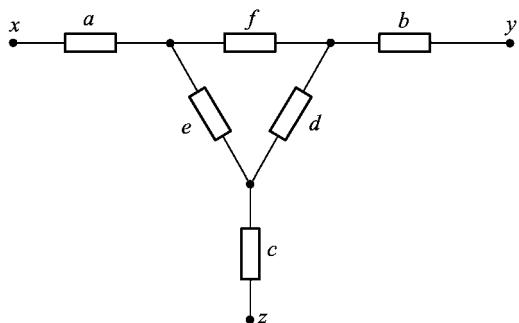
10-19 (1) 如图所示为由电阻丝构成的平面正方形无穷网络, 每小段电阻丝的电阻均为 R , 求 A, B 间的等效电阻;

苏州大学出版社电子教材

(2) 今将 A,B 之间电阻丝换成阻值 R_0 的另一小段电阻丝,再求 A,B 之间的等效电阻.



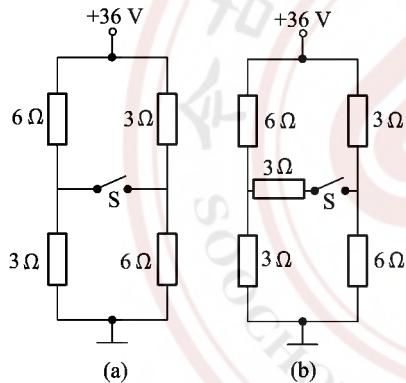
习题 10-19 图



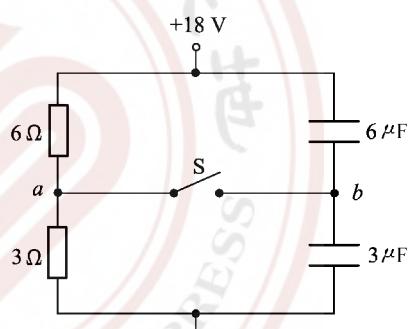
习题 10-20 图

- 10-20** 将阻值分别为 $1\Omega, 2\Omega, 3\Omega, 4\Omega, 5\Omega$ 和 6Ω 的六个电阻器连接成如图所示的网络, 已测得 $R_{xy} = 7 \frac{3}{13}\Omega$, $R_{yz} = 10 \frac{1}{13}\Omega$, $R_{zx} = 6 \frac{9}{13}\Omega$, 试求网络中六个电阻器 a,b,c,d,e 和 f 的阻值.

- 10-21** 图示的两个电路中, 当开关 S 闭合时, 分别求通过开关 S 的电流.



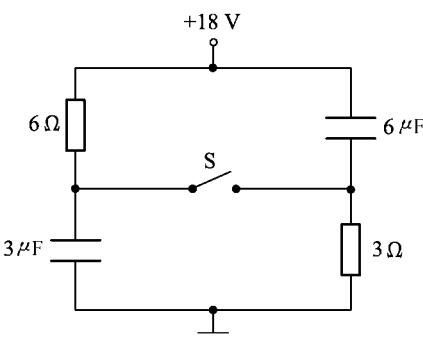
习题 10-21 图



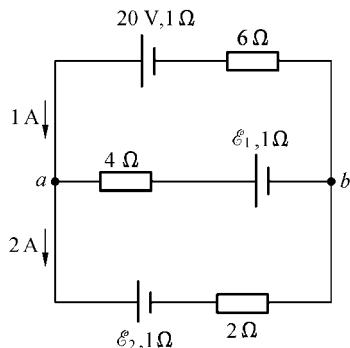
习题 10-22 图

- 10-22** (1) 图示的电路中, 当开关 S 开启时, 求 a,b 两点间的电势差;
 (2) 当开关 S 闭合时, b 点的最终电势是多少? 流经 S 的电荷量是多少?

- 10-23** (1) 图示的电路中, 开关 S 开启时, 求 a,b 两点间的电势差;



习题 10-23 图



习题 10-24 图

(2) 当开关 S 闭合时,求 b 点的最终电势,以及每一电容器上电荷量的变化.

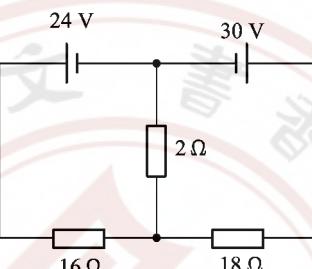
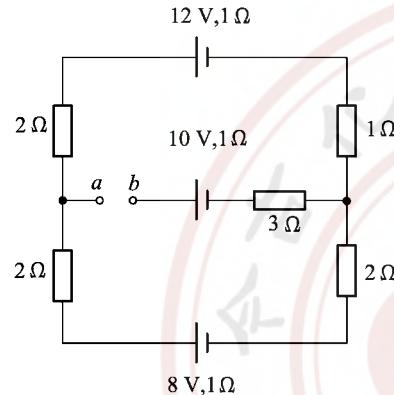
10-24 图示电路中已知参数已注明,求电路中两只电池的电动势 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ 以及 U_{ab} .

10-25 图示电路中各已知量已标明.

(1) 求 a,b 两点间的电势差;

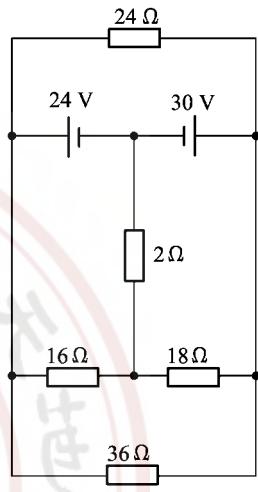
(2) 将 a,b 连接起来,求通过 12 V 电池的电流.

10-26 求图(a)和图(b)中通过每个电阻的电流.



(a)

习题 10-25 图

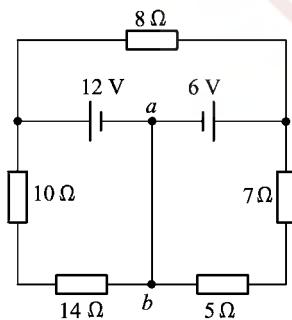


(b)

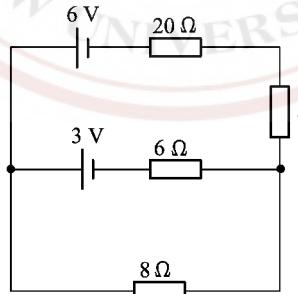
习题 10-26 图

10-27 求图示网络中通过每个电阻的电流,以及 a,b 连线中的电流.

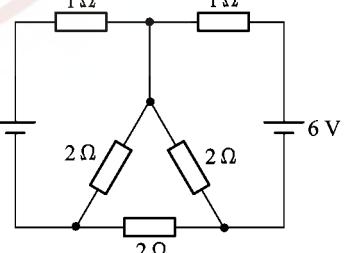
10-28 求图示网络中各条支路中的电流.



习题 10-27 图



习题 10-28 图



习题 10-29 图

10-29 求图示网络中通过每个电阻的电流.

第11章

恒定磁场

静止电荷在其周围空间激发电场,电场对引入其中的电荷施加电场力.如果电荷在运动,那么在它的周围就不仅有电场,运动电荷还会在其周围空间激发磁场.磁场也是物质存在的一种形态,但它只对运动电荷施加作用力(洛伦兹力),对静止电荷则毫无影响.因此,通过测定运动电荷所受的磁场所力,可以定义和描述磁场的重要物理量,即磁感应强度.本章主要讨论的是电荷在导体中做恒定流动(恒定电流)时在它周围所激发的磁场,这时场中各点的磁感应强度都不随时间而变化,称为恒定磁场.本章首先引入磁感应强度矢量,之后研究磁场对运动电荷和恒定电流的作用.在电流分布给定的情况下,利用毕奥-萨伐尔定律求磁场的分布.最后讨论磁场的高斯定理和安培环路定理,并利用安培环路定理求解一些具有一定对称性分布电流的磁场.

11.1 磁感应强度

► 11.1.1 基本磁现象

远在电流发现以前,人们很早就发现了磁现象.

我国是世界上最早发现并应用磁现象的国家之一.早在公元前300年,我国就发现了磁铁矿(Fe_3O_4)吸引铁片的现象,在11世纪已把指南针用于航海.

早期有关磁现象的认识可以概述如下:

- (1) 条形磁铁或磁针的两端磁性特别强,称为磁极.磁体两极共存,不可分割.
 - (2) 如设法让条形磁铁或磁针能在水平面内自由转动,它总有一端指向北,称为北极(N极);另一端指向南,称为南极(S极).
 - (3) 磁极间有相互作用,同名磁极相互排斥,异名磁极相互吸引.
 - (4) 地球是大磁体,地球磁场简称为地磁场,它的N极位于地理南极附近,S极位于地理北极附近.
- 现代研究表明,一切电磁现象都起因于电荷及其运动.电荷在其周围激发电场,电场对电场中的电荷施以作用力.运动电荷在其周围除了激发电场外还要激发磁场,磁场对磁场中

的运动电荷施以作用力。因此从本质上来看，磁现象与电现象是紧密联系在一起的，电相互作用和磁相互作用放在一起统称电磁相互作用。然而，由于人们认识上的限制，在历史上很长一段时间里，电学和磁学被认为是互不相关、彼此独立地发展着。直到 1820 年，丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted 1777~1851)发现放在载流导线周围的磁针会发生偏转，人们才认识到磁与电之间的联系，认识到磁起源于电荷的运动。从奥斯特的发现以后，电磁学便进入了一个崭新的发展时期。

► 11.1.2 磁感应强度 \mathbf{B}

实验发现，磁场对静止电荷没有作用力，对运动电荷却有作用力，这是磁场的基本性质。进一步研究表明磁场作用在运动电荷上的力的大小，与该电荷的电荷量以及速度的大小、方向均有关，当然也与该点的磁场的性质有关。

用来定量描述磁场强弱和方向的物理量称为磁感应强度。它是矢量，用 \mathbf{B} 表示。有多种方式来定义磁感应强度 \mathbf{B} ，本书采用磁场对运动电荷的作用力来定义。

实验表明，磁场对运动电荷的作用力有如下特点：

(1) 当运动电荷以同一速率、不同方向通过磁场中某一场点 P 时，运动电荷受磁力的大小是不同的，而且方向也不相同。

(2) P 点的磁场存在一个特殊方向，当运动电荷沿着这一特殊方向(或其反方向)运动时，磁力为零(暂称它为零磁力方向)，如图 11-1(a)所示。当电荷运动方向与该零磁力方向垂直时，受磁力最大[图 11-1(b)]，用 F_{\max} 表示，而且 F_{\max} 与运动电荷的电荷量与速率的乘积 qv 成正比。比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 定义为该点磁感应强度 \mathbf{B} 的大小，即磁场的强弱，

$$B = \frac{F_{\max}}{qv}.$$

(3) 研究磁力 \mathbf{F} 方向时发现， \mathbf{F} 既与速度 v 垂直，又与零磁力方向垂直。我们就把零磁力方向中的一个指向定义为 \mathbf{B} 的方向，亦即磁场的方向[图 11-1(c)]。

由此，磁感应强度 \mathbf{B} 的完整定义为：正电荷 q 以速度 v 通过场点 P ，如果有侧向力 \mathbf{F} 作用在运动电荷上，则 P 点有磁感应强度 \mathbf{B} 存在，并满足下述关系

$$\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B}. \quad (11.1-1)$$

上述关于 \mathbf{B} 的方向的定义，与用该处的小磁针静止时 N 极指向来定义磁场方向是一致的。

国际单位制中，磁感应强度 B 的单位是特斯拉，简称特，用 T 表示，

$$1 \text{ T} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}}.$$

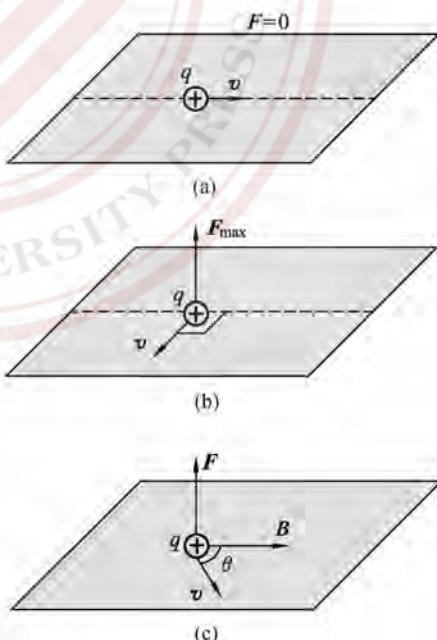


图 11-1

B 较早使用的单位是高斯,用 G 表示,它与 T 的关系为

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}.$$

这里给出一些磁感应强度的数据: 地球磁场的水平分量在磁赤道处约为 $(0.3 \sim 0.4) \times 10^{-4}$ T; 地球磁场的竖直分量在南北极地区为 $(0.6 \sim 0.7) \times 10^{-4}$ T; 普通永久磁铁在两极附近磁场为 $(0.4 \sim 0.7)$ T; 电动机、变压器铁芯的磁场为 $(0.9 \sim 1.7)$ T; 超导脉冲磁场为 $(10 \sim 100)$ T; 某些原子核外运动的电子在核附近产生的磁场约为 100 T.

► 11.1.3 磁感线

与电场中引进电场线来形象描绘电场分布一样,磁场也可用一些线来表示,每条线上任一点的切线方向都与该点的磁感应强度的方向相同,这些线称为磁感线. 图 11-2 是用铁屑演示的磁铁磁场的磁感线以及一些电流磁场的磁感线.

其中图(a)为永磁铁磁场的磁感线,图(b)为直线电流,图(c)为载流圆线圈以及图(d)为载流螺线管磁场的磁感线.

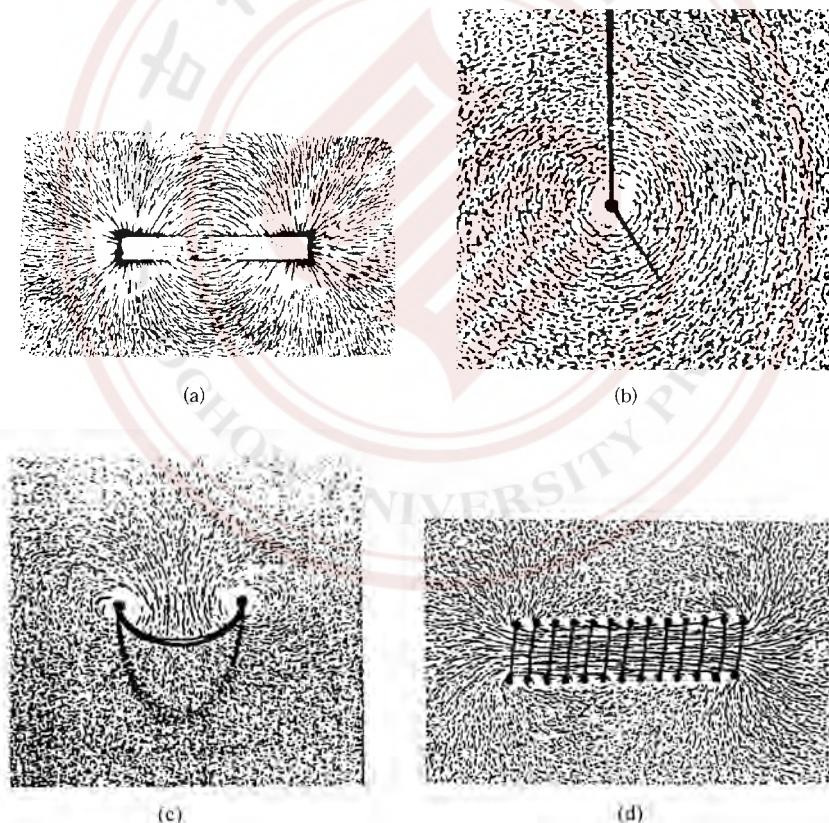


图 11-2

11.2 带电粒子在磁场中的运动

► 11.2.1 洛伦兹力

运动电荷在磁场中受到的磁场所力,称为洛伦兹力,由(11.1-1)式可知

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (11.2-1)$$

在普遍的情形下,带电粒子在既有电场 \mathbf{E} 又有磁场 \mathbf{B} 的区域里运动,作用在带电粒子上的力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (11.2-2)$$

这是普遍情况下的洛伦兹力公式,它不论粒子速度有多大,也不论场是否恒定,这个洛伦兹力公式都适用. 静电场对电荷的作用力与带电粒子的运动速度无关,已由无数实验所证实(一般电磁学书中,仅将 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 称为洛伦兹力).

由(11.2-1)式可知,洛伦兹力的方向与运动带电粒子电荷的符号有关,如图 11-3 所示.

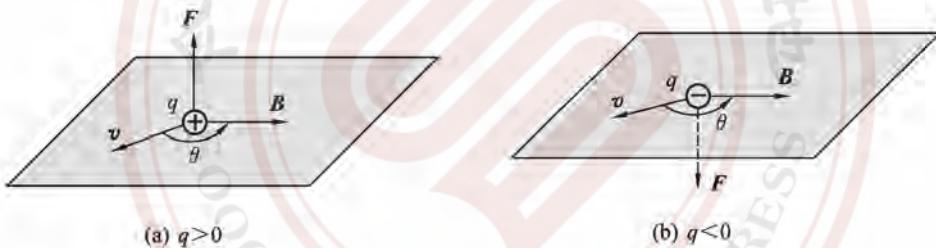


图 11-3

洛伦兹力总是与带电粒子运动方向相垂直,这表明磁场对运动带电粒子所做的功为零. 因此磁场不能改变运动带电粒子的动能,只能改变带电粒子运动的方向,使运动带电粒子向侧向偏转.

► 11.2.2 带电粒子在均匀磁场中的运动

均匀磁场 \mathbf{B} 中,质量为 m 、电荷量为 q 的粒子以初速度 \mathbf{v}_0 进入磁场,可以分三种情形讨论它的运动(忽略重力).

(1) 如果 \mathbf{v}_0 与 \mathbf{B} 在同一直线上,因为 \mathbf{B} 与 \mathbf{v}_0 夹角为 0 或 π ,所以带电粒子受洛伦兹力为零. 带电粒子仍做匀速直线运动,不受磁场影响,如图 11-4 所示.

(2) 如果 \mathbf{v}_0 与 \mathbf{B} 垂直,如图 11-5 所示,这时粒子受到大小不变的洛伦兹力 $F = qv_0 B$, 此力作为向心力,带电粒子将在垂直于 \mathbf{B} 的平面内做匀速圆周运动. 利用圆周运动的知识,可以算得带电粒子做匀速圆周运动的半径

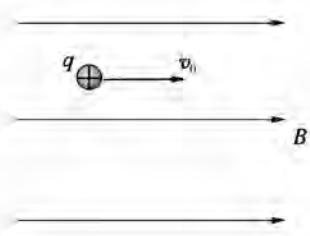


图 11-4

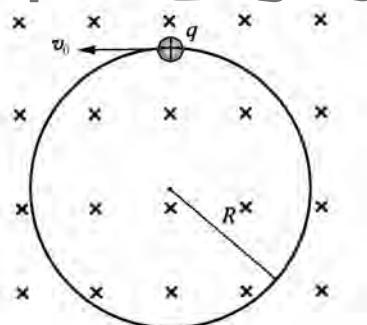


图 11-5

$$R = \frac{mv_0}{qB}. \quad (11.2-3)$$

轨道半径与带电粒子运动速度的大小成正比,与磁感应强度 B 的大小成反比.

带电粒子做圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (11.2-4)$$

单位时间内所绕的圈数(称为回旋共振频率)

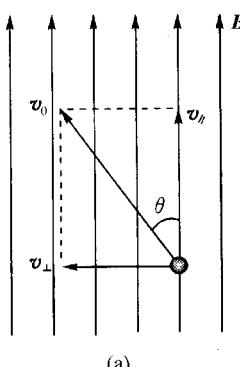
$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (11.2-5)$$

周期或回旋共振频率对于同一种带电粒子来说,与其速度大小无关,这一点被应用在回旋加速器中.

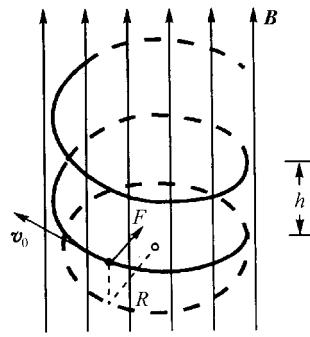
(3) 一般情形下, v_0 与 \mathbf{B} 的夹角为 θ ,如图 11-6 所示. 把 v_0 分解成与 \mathbf{B} 平行的分量 $v_{\parallel} = v_0 \cos\theta$ 和与 \mathbf{B} 垂直的分量 $v_{\perp} = v_0 \sin\theta$. 带电粒子一方面在磁场 \mathbf{B} 的方向上做以 v_{\parallel} 为速度的匀速直线运动,另一方面又在与 \mathbf{B} 垂直方向做半径 $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ 的圆周运动. 这样带电粒子的轨迹将是一条等螺距的螺旋线,其螺距为

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}.$$

上式表明带电粒子每回旋一周所前进的距离,即螺距 h 与带电粒子的 v_{\parallel} 无关.



(a)



(b)

图 11-6

运动电荷在磁场中的螺旋运动,被应用于磁聚焦技术.从电子枪出来的电子都有相同速率 v_0 ,但 v_0 与 \mathbf{B} 所成的发散角 θ 很小,这就使得 $v_{\parallel} = v_0 \cos\theta \approx v_0$. 这样它们经过同一周期,在相同地方 $h = \frac{2\pi m v_0}{qB}$ 相遇. 这就是均匀磁场对带电粒子流的磁聚焦原理. 它广泛应用于电真空器件,特别是电子显微镜. 实际应用中是用短线圈产生的非均匀磁场来完成对带电粒子流的磁聚焦作用,通常称这种短线圈为磁透镜.

► * 11.2.3 回旋加速器

回旋加速器于 1932 年首先由美国物理学家劳伦斯(E. Lawrence 1902—1958)提出并付诸应用. 利用回旋加速器来加速质子或氘核之类的带电粒子,使它们得到高能量,以便在原子轰击实验中能利用这些高能粒子. 虽然回旋加速器的结构很复杂,但其基本原理就是利用带电粒子在均匀磁场中的回旋共振频率与带电粒子速率大小无关的性质.

回旋加速器的核心部分是 D 形盒,它的形状有如扁圆的金属盒沿直径剖开的两半,如图 11-7 所示. 这两半的扁金属空盒称为 D 形盒. 两 D 形盒之间留有间隙,中心附近放离子源(质子、氘核或 α 粒子). 在 D 形盒间接上频率极高的交流电压(频率 10^6 Hz 数量级),在两 D 形盒的间隙形成频率极高的交变电场.

两 D 形盒密封在一个抽成真空的容器内,整套装置放在一强大的电磁铁两极间的均匀磁场中,磁场方向与 D 形盒底面相垂直.

设想有一电荷为 $+q$ 、质量为 m 的离子,在 D_1 盒为正电势的瞬间从离子源射出,该离子被 D 形盒间隙缝中的电场加速,并以速率 v_1 进入 D_2 内部的无电场区,在这里离子在磁场作用下经回旋半径 $R_1 = \frac{mv_1}{qB}$ 的半个圆周而回到间隙. 如果此时间隙的电场恰好反向,粒子通过间隙又被加速,它以较大速率 v_2 进入 D_1 盒内部,在其中绕过回旋半径 $R_2 = \frac{mv_2}{qB}$ 的半个圆周再次回到间隙. 虽然带电粒子绕过半圆

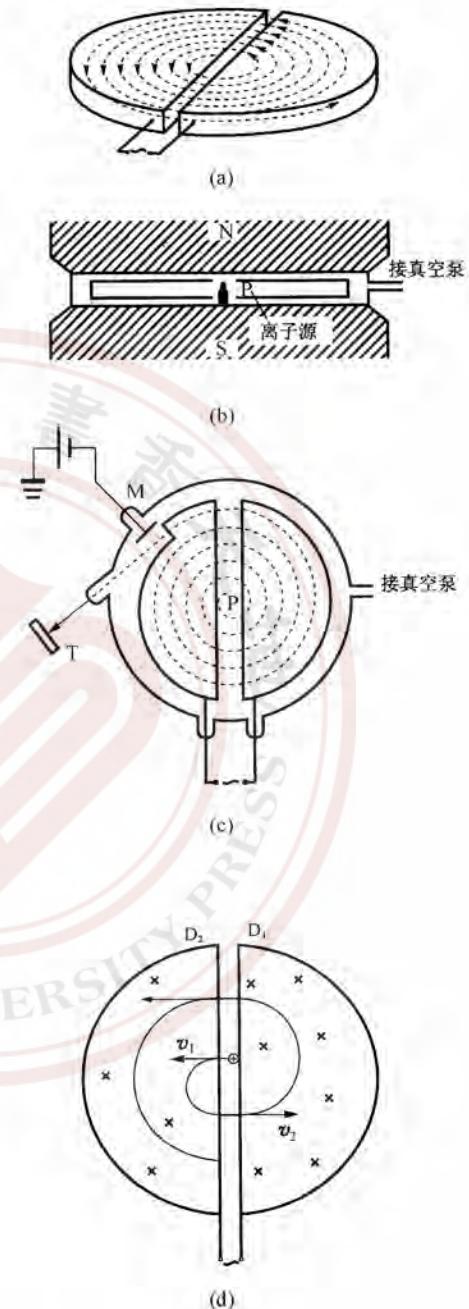


图 11-7

苏州大学出版社电子教材

周的半径不同,但是所用的时间都等于回旋共振周期的一半, $\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$. 只要加在间隙的交变

电场频率 ν_0 等于回旋共振频率 $f = \frac{qB}{2\pi m}$, 便可保证离子每次经过电场时都被加速. 这样, 不

断被加速的离子在 D 形盒内运动半径越来越大, 最后其轨道趋于 D 形盒的边缘, 再用特殊的装置将它们引出.

回旋加速器加速带电粒子要受到相对论效应的限制. 当离子速率相当大时, 其质量按 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 增大, 这使得离子做半圆周运动的时间 $\frac{T}{2} = \frac{\pi m_0}{qB \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 增大. 如果交变电场的频率不变时, 粒子将出现“迟到”现象, 从而不能保证粒子在间隙中被电场加速.

应当指出, 为了保证粒子每次在间隙中仍被交变电场加速, 可以采取措施减小交变电场的频率 ν_0 , 以保持 $\nu_0 = \frac{qB}{2\pi m}$ 仍然成立. 利用这种技术的加速器叫作同步回旋加速器. 如果再采用技术, 使粒子的轨道半径 r 也固定, 这便是同步加速器.

例 11-1 有一台回旋加速器, 其回旋共振频率为 12×10^6 Hz, D 形盒的半径为 53.34 cm, 问:

- (1) 加速氘核所需的磁感应强度为多大?
- (2) 氘核能量能加速到多大?

解 氘核所带电荷量与质子所带电荷量相同, 其质量接近质子质量的 2 倍.

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, m = 3.3 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

(1) 由回旋共振频率 $f = \frac{qB}{2\pi m}$ 得

$$B = \frac{2\pi f m}{q} = \frac{2\pi \times 12 \times 10^6 \times 3.3 \times 10^{-27}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ T} = 1.6 \text{ T}.$$

(2) 氘核的最终速率 v_m 由 D 形盒的半径决定,

$$v_m = \frac{qBR}{m},$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2(1.6)^2(0.5334)^2}{2(3.3 \times 10^{-27})} \text{ J} = 2.8 \times 10^{-12} \text{ J} = 17 \text{ MeV}.$$

► 11.2.4 霍耳效应

把导电板制成一块较小尺寸的长方体样品, 对它建立如图 11-8 所示的坐标系. 沿 x 轴正方向通恒定电流 I , 当平行 z 轴的负方向加上均匀磁场 \mathbf{B} 时, 在其 y 轴上两侧面 A, A' 会出现横向电势差 $U_{AA'}$, 这种现象称为霍耳效应. 它是 1879 年霍耳(E. H. Hall 1855—1929)发现的. 电势差 $U_{AA'}$ 又称为霍耳电势差. 实验发现霍耳电势差 $U_{AA'}$ 与所加的磁场 \mathbf{B} 、电流 I 以及板的厚度 b (沿 z 轴方向)有如下关系

$$U_{AA'} = k \frac{BI}{b}. \quad (11.2-6a)$$

其中比例系数 k 称为霍耳系数, 它与导电材料的性质有关. 霍耳电势差 $U_{AA'}$ 与电流 I 之比定

苏州大学出版社电子教材

义为霍耳电阻 R_H , 从上式可知

$$R_H = \frac{U_{AA'}}{I} = \frac{kB}{b}. \quad (11.2-6b)$$

这表明霍耳电阻 R_H 与所加的磁场 B 有线性关系. 最早, 霍耳效应是在金属导体中发现的, 现在知道在半导体和导电流体(如等离子体)中也会产生.

下面以金属自由电子模型来定量讨论霍耳效应. 导电板中沿 x 轴正方向流动的电流为 I . 如果参加导电的带电粒子(又称载流子)所带电荷量为 $+q$, 它们沿 x 轴正方向运动的平均定向速率为 u , 则它们在磁场中受到的洛伦兹力为 quB , 方向为 y 轴正方向[图 11-8(b)]. 该力使导电板内定向移动的 $+q$ 电荷发生偏转. 结果在 A 侧面上聚集了正电荷, A' 侧面上聚集了负电荷, 从而形成电势差 $U_{AA'}$. 导电板内沿 y 轴负方向形成电场 E_H , $E_H = \frac{U_{AA'}}{d}$. 于是载流子除了受到 y 轴正方向的洛伦兹力还要受到与它反向的静电力 qE_H 作用. 最后, 这两个力平衡,

$$quB = q \frac{U_{AA'}}{d}.$$

设单位体积内带电粒子数为 n , 即载流子浓度为 n , 电流 I 可以表示成 $I = nqubd$. 这样,

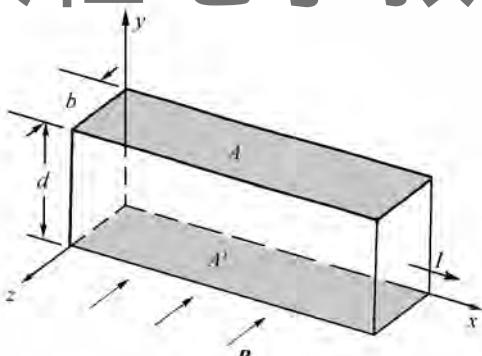
$$U_{AA'} = \frac{IB}{nqb}.$$

其中 $\frac{1}{nq}$ 就是霍耳系数 k ,

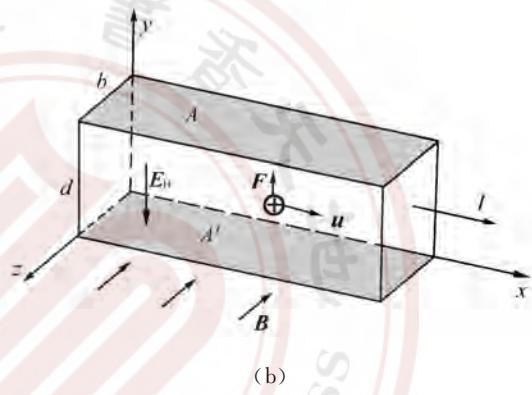
$$k = \frac{1}{nq}. \quad (11.2-7)$$

以上讨论的载流子是正电荷, 如果电流 I 流向不变, 而载流子是负电荷, 这时它的定向漂移运动方向要与电流 I 流向相反. 可以分析, 这时霍耳电势差 $U_{AA'}$ 为负, 上侧面 A 带负电, 下侧面 A' 带正电, 得到霍耳系数 $k = \frac{1}{nq}$ 为负.

(11.2-7)式表明, 霍耳系数的符号决定于载流子所带电荷的符号. 对于单价金属来说, 实验测定的霍耳系数为负值, 与(11.2-7)式相一致. 但是有些金属具有相反符号的霍耳系数(表 11-1). 这说明对于非单价金属、铁及其他铁磁质, 用金属的自由电子模型对霍耳效应所做的简单解释并不正确, 只有用量子物理对这些金属的霍耳效应所做的理论解释才与所有各种情形中的实验结果相符.



(a)



(b)

图 11-8

苏州大学出版社教材

表 11-1 部分金属的霍耳系数 $k/\times 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$

材料	实验值	理论值	材料	实验值	理论值
Li	-1.70	-1.31	Cu	-0.55	-0.74
Na	-2.50	-2.44	Be	+2.44	-0.25
K	-4.20	-4.70	Zn	+0.33	-0.46
Cs	-7.8	-7.30	Cd	+0.60	-0.65

(11.2-7)式说明霍耳系数与载流子浓度 n 有关. 对于半导体材料, 可以通过对霍耳系数的测定来确定载流子浓度 n . 因为半导体载流子浓度受温度、杂质以及其他因素的影响很大, 霍耳系数的测量为研究半导体材料的载流子浓度变化提供了重要的依据. 同时, 根据霍耳系数的正负号的确定还可以判定半导体的导电类型. 半导体有电子型(n 型)和空穴型(p 型)两种, 前者的载流子为电子, 后者的载流子为空穴(相当于带正电的粒子).

近年来, 利用半导体的霍耳系数大的特点, 制成多种霍耳元件, 广泛应用于测量磁场、交直流电路中的电流和功率, 以及转换和放大信号等.

例 11-2 如图 11-8 所示, 把一块宽 $d=2.0 \text{ cm}$ 、厚 $b=1.0 \text{ mm}$ 的铜片, 放在 $B=1.5 \text{ T}$ 的磁场中, 如果铜片上载有 200 A 的电流, 铜片两侧间的霍耳电势差有多大?

解 铜每立方米体积中自由电子数的理论值 $n=8.4 \times 10^{28}$ 个.

$$U = \frac{IB}{nqb} = \frac{200 \times 1.5}{8.4 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^{-3}} \text{ V} = 2.2 \times 10^{-5} \text{ V}.$$

如果铜的霍耳系数用实际测量值 $-0.55 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{C}$, 则

$$U = k \frac{IB}{b} = 0.55 \times 10^{-10} \times \frac{200 \times 1.5}{1.0 \times 10^{-3}} \text{ V} = 1.65 \times 10^{-5} \text{ V}.$$

► * 11.2.5 量子霍耳效应

霍耳当年的实验是在室温下和较弱的磁场(小于 1 T)中完成的. 到了 20 世纪 70 年代末, 科学家在极低温(1 K)和非常强的磁场($\sim 15 \text{ T}$)条件下研究半导体材料中的霍耳效应, 以便能制造出低噪声的晶体管.

1980 年初德国物理学家冯·克利青(L. V. Klitzing)在这样的实验中发现霍耳电阻 R_H ($= \frac{U_{AA'}}{I}$) 并不按磁场做线性变化, 而是随着磁场 B 的增大做台阶式的变化, 如图 11-9 所示. R_H 由下式决定

$$R_H = \frac{h}{fe^2} = \frac{25\,812\,81}{f} \Omega. \quad (11.2-8)$$

上式中 h 是普朗克常量, e 是基元电荷, f 称为填充因子, 它取正整数, $f=1, 2, 3, \dots$, 人们称之为量子霍耳效应, 后又根据填充因子都是整数, 又取名为整数量子霍耳效应, 以与日后发现的分数量子霍耳效应相区别. 要理解整数量子霍耳效应要用到二维电子系统的朗道量子态, 以及局域化的概念. 整数量子霍耳效应提供了电阻的新国际标准. 通过整数量子霍耳效应的实验能精确地测定普适常数 $\frac{h}{e^2}$. 这一常量可以用来作为电阻标准. 冯·克利青由于发现了整数量子霍耳效应而获得了 1985 年的诺贝尔物理学奖.

苏州大学出版社电子教材

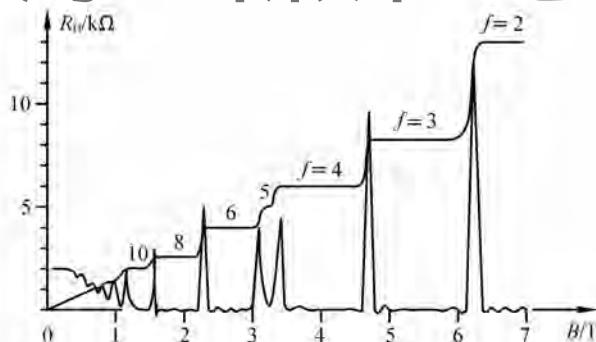


图 11-9

整数量子霍耳效应发现两年后,美国的 AT&T 贝尔实验室的崔琦(D. C. Tsui)和施特默(H. L. Störmer)用纯度极高的砷为基片的镓样品做霍耳实验. 实验在极低的温度(0.1 K)和极强的磁场(20 T)下进行,发现所得霍耳电阻平台相当于填充因子 f 取分数值. 最初公布的 $f=\frac{1}{3}$, 以后他们又发现了 $f=\frac{2}{3}$, 称之为分数量子霍耳效应. 这个发现震惊了凝聚态物理学界. 它的发现以及用新的分数电荷激发的不可压缩量子液体做出的理论解释, 导致了人们对宏观量子现象认识上的一次突破, 并且引发了一系列对基本理论具有深刻意义的现象出现, 其中包括电荷的分裂.

1998 年的诺贝尔物理学奖为美籍华人崔琦, 以及芬克林、施特默所得.

11.3 磁场对电流的作用

► 11.3.1 安培定律

如前所述, 磁场对运动电荷施以作用力, 考虑到在载流导线中电流是自由电子的定向运动形成的, 因此, 磁场中载流导线内做定向运动的自由电子将会受到洛伦兹力的作用, 并通过导线内部的自由电子与晶体点阵的相互作用, 使导体在宏观上表现受到力的作用.

讨论磁场对载流导线的作用, 以及载流导线产生磁场的规律, 都要用到电流元的概念. 载流导线的各个微小线段称为电流元.

电流元 $I dl$ 可看成是矢量, 其大小为流过导线的电流 I 与导线的线元 dl 的乘积, 其方向为线元所在处的电流的方向. 这样, 任意形状的载流导线可划分成许多电流元的集合, 如图 11-10 所示. 磁场对载流导线的作用就等于组成该载流导线的无数电流元在磁场中受力的叠加.

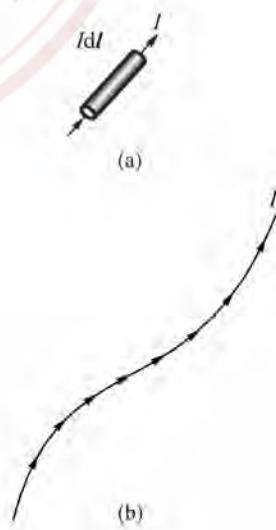


图 11-10

载流导线在磁场中所受的力称为安培力. 法国物理学家安培(Andre Marie Ampere 1775~1836)通过精心设计的实验和推理于 1820 年得到电流元受磁场力的公式, 称为安培定律: 放在磁场中 P 处的电流元 Idl 受磁场作用的力可表示为

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}. \quad (11.3-1)$$

式中 \mathbf{B} 是电流元所在点 P 的磁感应强度.

其方向间的关系如图 11-11 所示. 因为洛伦兹力和安培力有必然的内在联系, 所以也可以从载流导线内自由电子受洛伦兹力来推得安培力公式(11.3-1).

整个载流回路在磁场中受的安培力就是各电流元受的安培力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int Idl \times \mathbf{B}. \quad (11.3-2)$$

上式是矢量积分, 积分是对受安培力的那个载流回路.

应该指出, (11.3-2) 式仅能算出载流回路所受安培力的合力, 而不能从它来求出合力的作用点.

如果要求出图 11-12 所示的任意形状的载流导线在均匀磁场 \mathbf{B} 中受的力, 从(11.3-2)式可以得到

$$\mathbf{F} = \int Idl \times \mathbf{B} = I \left(\int dl \right) \times \mathbf{B} = Il \times \mathbf{B}. \quad (11.3-3)$$

上式中 l 是载流导线的始端 a 指向末端的矢量. 利用(11.3-3) 式可以很方便地计算均匀磁场中载流导线受的磁力. 显然, 闭合载流回路在均匀磁场 \mathbf{B} 中受(合) 力为零, 即

$$\mathbf{F} = \oint Idl \times \mathbf{B} = I \left(\oint dl \right) \times \mathbf{B} = 0.$$

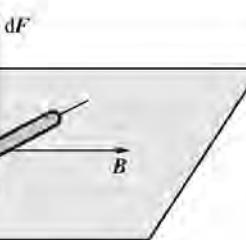


图 11-11

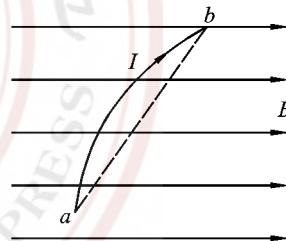


图 11-12

例 11-3 半径为 $R=5$ cm 的铅丝圆环, 铅丝的截面积 $S=7 \times 10^{-7}$ m², 圆环载有电流 $I=7$ A. 现把此圆环放在 $B=1$ T 的均匀磁场中, 环的平面与磁场垂直, 如图(a)所示. 问铅丝内所受张力为多大? 由此引起的拉应力为多大?

解 应用(11.3-3)式直接求出均匀磁场中载流半圆环受的安培力[图(b)], $F=2IBR$.

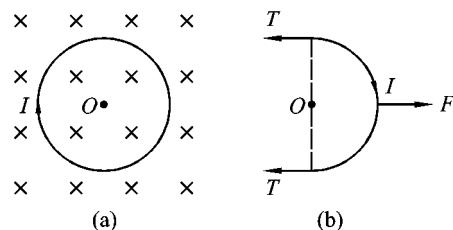
再由载流半圆环在安培力 F 以及两边张力 T 作用下平衡, 来求得张力. 这样, 张力

$$T = \frac{F}{2} = BIR.$$

把题中数据代入, 算得铅丝内张力

$$T = BIR = 1 \times 7 \times 5 \times 10^{-2} \text{ N} = 0.35 \text{ N}.$$

铅丝的截面积 $S=7 \times 10^{-7}$ m², 单位面积上的张力, 称为拉应力.



例 11-3 图

$$\sigma = \frac{T}{S} = \frac{0.33}{7 \times 10^{-7}} \text{ N/m}^2 = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

当拉应力过大时,铅丝被拉断.

► 11.3.2 磁场对载流平面线圈的作用

设有一刚性的长方形平面线圈 $abcd$, $ab = l_1$, $bc = l_2$, 线圈上通有电流 I . 用如图 11-13 所示来规定载流线圈平面的正法线方向 n : 使 n 指向与 I 在线圈上的流向成右螺旋(即弯曲的右手四指代表线圈中电流流向,伸直的大拇指的指向为平面载流线圈的正法向 n).

要计算载流线圈在磁场中所受力矩,先计算两种特殊情形中载流线圈受的磁力矩.

(1) 载流线圈正法向 n 与均匀磁场 B 垂直,且 ad, bc 边与 B 平行,如图 11-14(a)所示. 显然 ad 边和 bc 边均不受安培力. 可以算得 ab 边和 cd 边受安培力大小相等,

$$F_1 = F_2 = IBl_1.$$

F_1, F_2 方向相反, F_1 垂直纸面向外, F_2 垂直纸面向里,其合力为零. 但是 F_1, F_2 不在同一直线上,它们构成功偶,力偶矩为

$$M = F_1 l_2 = IBl_1 l_2 = IBS.$$

式中 S 为线圈的面积. 在此力矩作用下,载流线圈将发生转动,线圈的 n 将转向 B 的方向.

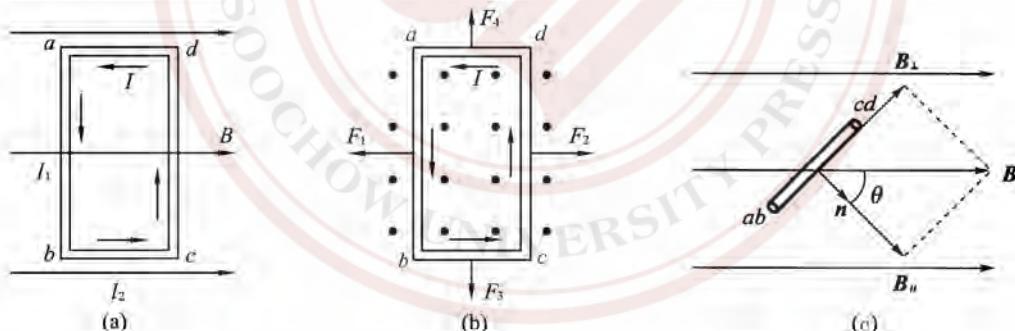


图 11-14

(2) 载流线圈正法向 n 与 B 方向一致[图 11-14(b)]. 这时, ab 和 cd 边受的安培力大小相等、方向相反,

$$F_1 = F_2 = IBl_1.$$

同样, bc 和 da 边受的安培力也大小相等、方向相反,

$$F_3 = F_4 = IBl_2.$$

四个力均在线圈平面内,这样合力为零,力矩也为零. 对于载流线圈 n 与 B 成 π 角,可以计算得出其受力情况,并且合力为零,力矩也为零.

对于载流线圈的正法向 n 与 B 的夹角 θ 的情况[图 11-14(c)]. 可以把 B 分解成与 n 垂直的分量 $B_{\perp} = B \sin \theta$, 以及与 n 平行的分量 $B_{\parallel} = B \cos \theta$. 其中对载流线圈转动有贡献的只是

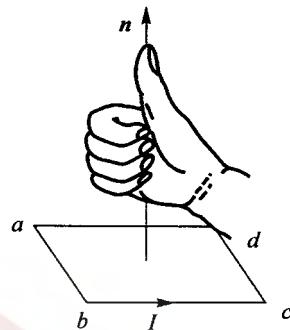


图 11-13

苏州大学出版社教材

B_{\perp} ,运用(1)中计算结果求得此时力矩

$$M = ISB \sin \theta.$$

考虑到力矩是使载流线圈的正法向 n 转向 B ,可以把上式写成矢量式

$$\mathbf{M} = ISn \times \mathbf{B}. \quad (11.3-4)$$

其中 ISn 是由载流线圈决定的量,称为线圈的磁矩,用 m 表示(m 的单位,在国际单位制中为安·米²,即 A·m²),于是

$$\mathbf{m} = ISn. \quad (11.3-5)$$

(11.3-4)式可写成

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (11.3-6)$$

对于均匀磁场中的任意形状的平面载流线圈,上式也是成立的.

综上所述,平面载流线圈作为整体在均匀磁场中受的合力为零,因而不会发生平动.但是它在磁力矩作用下要发生转动,而且磁力矩 M 总是力图使平面载流线圈的磁矩 m 转到和外场 B 一致的方向上.当 m 与 B 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,磁力矩 M 为最大;当 $\theta=0$ 或 π 时,磁力矩 M 为零.

处在非均匀磁场中的载流线圈,除了受磁力矩作用外还受到合力作用,线圈将向磁场强的地方运动.

载流线圈在磁场中受磁力矩作用而转动,是电动机以及测量电流与电压的大多数电学仪表的工作原理.

► * 11.3.3 载流线圈在磁场中转动时磁力做的功

设有一载流线圈在匀强磁场 B 内转动.若线圈中的电流维持不变,当线圈转过极小角度 $d\theta$ (图 11-15),使 n 与 B 的夹角从 θ 增为 $\theta+d\theta$,磁力矩 M 做的功为

$$dW = -Md\theta.$$

式中的“-”,表示磁力矩做正功时, θ 角减小.把磁力矩 $M = BIS \sin \theta$ 代入上式,得

$$dW = -BIS \sin \theta d\theta = Id(BS \cos \theta).$$

因为 $BS \cos \theta$ 表示通过线圈的磁通量 Φ (磁通量概念见 11.5.1 节), $\Phi = BS \cos \theta$,所以上式也可以写成

$$dW = Id\Phi.$$

当载流线圈的正法向 n 从 θ_1 转到 θ_2 时,磁力矩做的总功

$$W = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (11.3-7)$$

式中的 Φ_1 和 Φ_2 分别表示线圈的正法向 n 与磁场 B 的夹角在 θ_1 和 θ_2 位置时,通过线圈的磁通量.如果电流是随时间变化的,这时磁力矩做的总功要用下式计算,

$$W = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi. \quad (11.3-8)$$

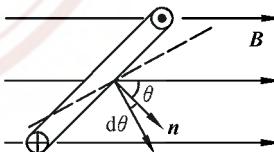


图 11-15

11.4 电流的磁场

本节所讨论的电流磁场是指恒定电流的磁场。本章不考虑介质的影响，因此所研究的磁场都是指真空中的磁场。

► 11.4.1 毕奥—萨伐尔定律

实验证明，磁场和电场一样都遵守叠加原理，载流导线可以分成许多电流元，载流导线所产生的磁场就是这些电流元所产生的磁场的叠加。

19世纪20年代法国科学家毕奥(Jean Baptistic Biot 1774—1862)和萨伐尔(Felix Savart 1791—1841)两人做了大量的实验工作来研究无限长载流直导线产生磁场的规律，证明了直导线周围离导线距离 r_0 处的磁场 $B \propto \frac{1}{r_0}$ 。在此基础上，法国大数学家拉普拉斯(Laplace)进一步用数学方法进行了分析归纳，得出了电流元产生磁场的表达式，称为毕奥—萨伐尔定律。其内容为：

真空中，任一电流元 Idl 在空间某点 P 产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元 Idl 的小成正比，与电流元 Idl 和它到 P 点的矢径 \mathbf{r} 之间夹角 θ 的正弦成正比，与 r 的平方成反比。 $d\mathbf{B}$ 的方向与 $Idl \times \mathbf{r}$ 的方向相同(图11-16)。

毕奥—萨伐尔定律的数学表达式为

$$dB = k \frac{Idl \sin \theta}{r^2},$$

写成矢量式

$$d\mathbf{B} = k \frac{Idl \times \mathbf{r}^0}{r^2}.$$

式中 \mathbf{r}^0 为单位矢量， $\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ， k 为比例系数。在国际单位制

中，取 $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ， μ_0 称为真空磁导率，它具有选定的数值，取

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A.} \quad (11.4-1)$$

采用国际单位制，毕奥—萨伐尔定律可以写成

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Idl \times \mathbf{r}^0. \quad (11.4-2)$$

由(11.4-2)式可知，电流元 Idl 产生的磁场是轴对称的，其磁感线是围绕此轴线的同心圆。

► 11.4.2 某些电流回路的磁场

利用磁场的叠加原理，对(11.4-2)式进行积分，便可以求出任意形状的载流导线产生的磁感应强度，即

$$\mathbf{B} = \oint d\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{r}^0}{r^2}. \quad (11.4-3)$$

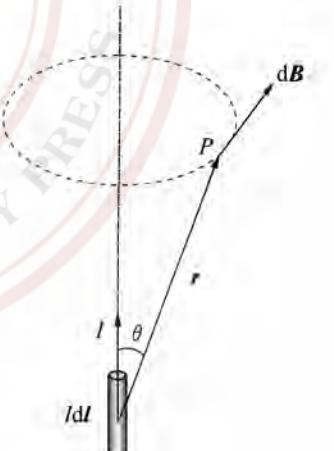


图 11-16

苏州大学出版社教材

1. 载流直导线的磁场

如图 11-17 所示,载流直导线中的一段 A_1A_2 ,其上电流为 I .根据毕奥—萨伐尔定律,可以分析得出任意电流元 Idl 在场点 P 产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的方向都是一致的. $d\mathbf{B}$ 的值为

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}.$$

一段有限长度的载流直导线 A_1A_2 ,在场点 P 的磁感应强度为

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}.$$

设场点 P 到直导线距离为 r_0 ,由图 11-17 可知

$$r = \frac{r_0}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{r_0}{\sin \theta},$$

$$l = r_0 \cot(\pi - \theta) = -r_0 \cot \theta.$$

取微分得 $dl = \frac{r_0 d\theta}{\sin^2 \theta}$,代入积分式得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin \theta}{r_0} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (11.4-4)$$

式中 θ_1, θ_2 的意义如图 11-17 所示.

对于无限长载流直导线, $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (11.4-5)$$

由此可见,无限长载流直导线周围的磁感应强度 B 与距离 r_0 的一次方成反比,与电流 I 成正比,这正是毕奥和萨伐尔两人的实验结果.

无限长载流直导线的磁场 \mathbf{B} 的方向与电流 I 的流向成右手螺旋关系.在与直导线垂直的平面内磁感线的分布如图 11-18 及图 11-2(b)所示.

2. 载流圆线圈轴线上的磁场

如图 11-19(a)所示,设圆线圈的半径为 R ,圆心为 O ,圆线圈上任意点 A 处的电流元在轴线上 P 点产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

由于轴对称性,在通过 A 点的直径另一端 A' 电流元的磁场 $d\mathbf{B}'$ 与 $d\mathbf{B}$ 对称,它们的垂直轴线方向的分量相抵消.因此对整个圆周来说,总的磁感应强度 \mathbf{B} 将沿着轴线方向.它的大小为 $d\mathbf{B}$ 的轴线分量之和,

$$B = \oint dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cos \alpha \oint dl.$$

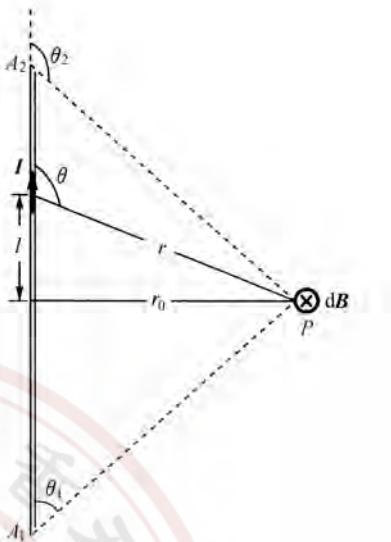


图 11-17

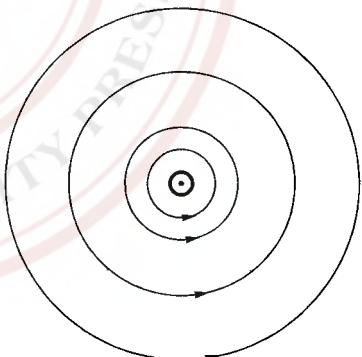


图 11-18

苏州大学出版社电子教材

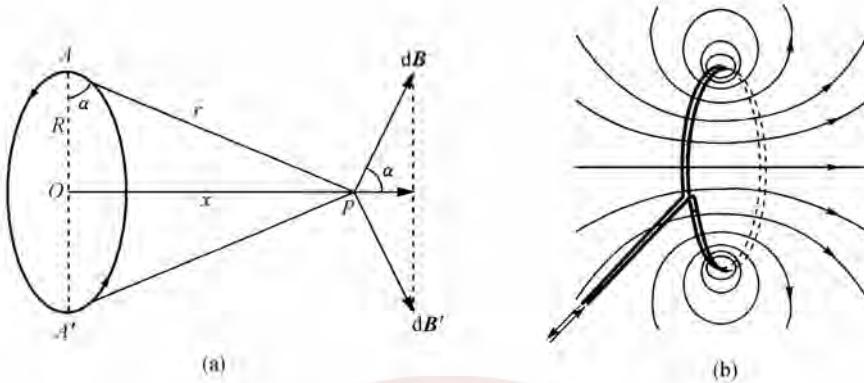


图 11-19

因为 $\oint dl = 2\pi R$, $\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, 所以

$$B = \frac{2\pi\mu_0 R^2 I}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (11.4-6)$$

B 的方向与 **I** 的流向成右手螺旋关系, 其磁感线的分布如图 11-19(b) 及图 11-2(c) 所示.

从(11.4-6)式, 考虑两个特殊情形中的磁场:

(1) 圆心 $x=0$, 则圆心处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}; \quad (11.4-7)$$

(2) 对于离开圆心足够远处, 有 $x \gg R$, 则

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2x^3}.$$

将载流线圈磁矩计算式 $m = IS = I\pi R^2$ 代入上式得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{x^3}. \quad (11.4-8)$$

这与电偶极子轴线上一点的电场公式相似.

3. 载流螺线管内部的磁场

绕在圆柱面上的螺旋形线圈叫作螺线管[图 11-20(a)]. 对于密绕的螺线管, 在计算轴线上的磁感应强度时, 可以把螺线管近似地看成由一系列的圆线圈紧密地排列起来组成. 设螺线管的半径为 R , 单位长度的线圈匝数为 n .

根据计算, P 点的场强 B 为

$$B = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos\beta_1 - \cos\beta_2). \quad (11.4-9)$$

式中 β_1, β_2 分别表示该点 P 到螺线管两端的连线与轴线之间的夹角, 如图 11-20(b) 所示. 载流螺线管磁感线的分布如图 11-20(c) 及图 11-2(d) 所示.

对于无限长螺线管 $\beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow \pi$, 管内轴线上磁感应强度由(11.4-9)式可得

$$B = \mu_0 nI. \quad (11.4-10)$$

这表明, 绕得紧密的长螺线管内部的磁场是均匀磁场.

苏州大学出版社电子教材

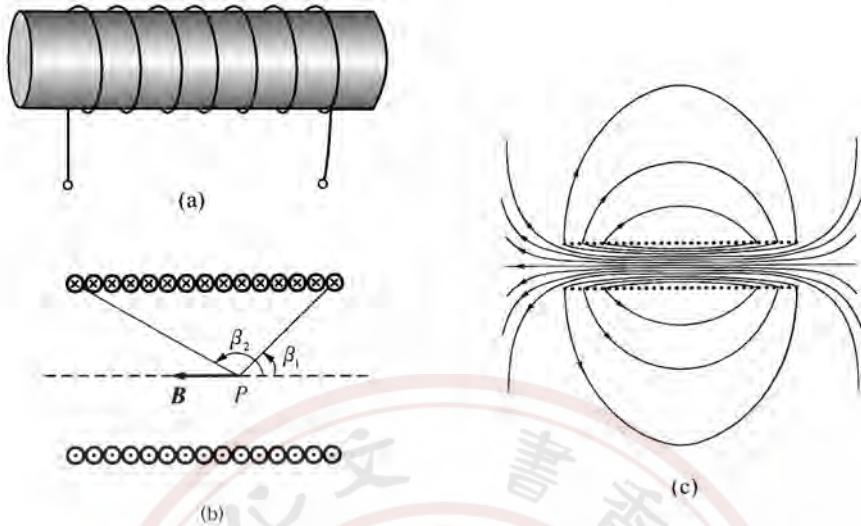


图 11-20

对于半无限长螺线管的一端, $\beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 按(11.4-9)式可得

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I, \quad (11.4-11)$$

即在半无限长螺线管端点轴上的磁感应强度比中间少了一半. 轴线上各处 B 的大小变化情况如图 11-21 所示. 无限长螺线管在轴线上所产生的磁感应强度方向沿着螺线管轴线, 指向按右手螺旋确定. 右手握住螺线管, 右手四指表示电流的方向, 大拇指就是磁场 B 的指向.

例 11-4 如图所示, 载有电流 I 的正方形线圈, 边长为 L , 求正方形中心磁感应强度 B .

解 载流正方形线圈每条边对中心产生的磁场的贡献是相等的, 每条边在中心产生的磁场 B_1 可以由(11.4-4)式来计算, 其中 $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 135^\circ$.

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{L} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi L}.$$

载流正方形线圈中心的 $B = 4B_1$,

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi L}.$$

B 的方向与 I 流向成右手螺旋关系.

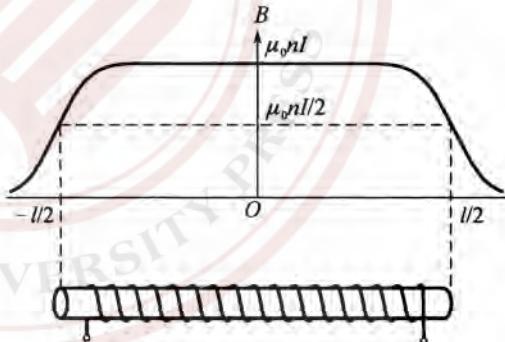
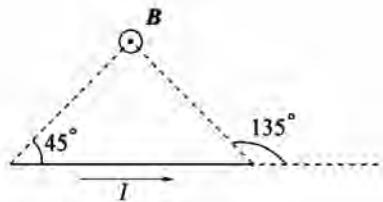
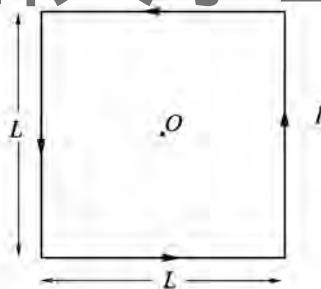


图 11-21

苏州大学出版社电子教材



例 11-4 图

例 11-5 载有电流 I 的回路由图示组成, 其弯曲部分是半径为 R 的一段弧, 对圆心 O 的张角为 θ , 求中心 O 的 B 的大小.

解 由毕奥—萨伐尔定律可分析出其载流直线部分在 O 点的磁场为 0. 对磁场有贡献的只是弯曲部分 \widehat{AC} . \widehat{AC} 上取电流元 Ids , 它在 O 点的元磁场 dB 为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Ids}{R^2}.$$

因为 \widehat{AC} 上所有电流元 Ids 在 O 点的元磁场 dB 方向相同, 垂直纸面向里, 所以载流弧 \widehat{AC} 在 O 点产生磁场

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \quad (\text{其中利用了弧长 } s = R\theta).$$

上式可作为公式用, 如 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即载有电流的 $\frac{1}{4}$ 圆周, 其在圆心处磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

例 11-6 玻尔氢原子模型中, 电子绕原子核做圆轨道运动, 圆轨道半径 $R = 5.3 \times 10^{-11}$ m, 频率 $f = 6.8 \times 10^{15}$ Hz, 求:

(1) 做圆周运动的电子在轨道中心产生的 B 的大小.

(2) 做圆周运动电子的等效磁矩.

解 (1) 由电流的定义可得与电子圆轨道运动相对应的等效电流 i ,

$$i = ef = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 6.8 \times 10^{15} \text{ Hz} = 1.1 \times 10^{-3} \text{ A}.$$

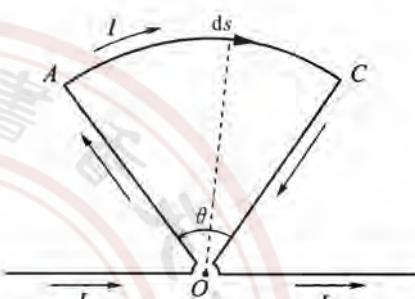
利用(11.4-7)式算得轨道中心的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1.1 \times 10^{-3}}{2 \times 5.3 \times 10^{-11}} \text{ T} = 13 \text{ T}.$$

(2) 由磁矩的计算式可得

$$\mu = iS = 1.1 \times 10^{-3} \text{ A} \times \pi \times (5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2 = 9.7 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

例 11-7 在某实验装置中, 要用到一根细长螺线管, 其长度为 19 cm, 绕有 180 匝. 当通有电流 $I = 5.0 \text{ A}$ 时, 管内中央的磁场 B 有多大?



例 11-5 图

解 该螺线管单位长度的匝数

$$n = \frac{180}{0.19} \text{ 匝} = 9.5 \times 10^2 \text{ 匝}.$$

管内中央

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \times 10^{-7} \times 9.5 \times 10^2 \times 5 \text{ T} = 6.0 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

► 11.4.3 电流单位安培的定义

设真空中两平行载流直导线的电流分别为 I_1 和 I_2 , 方向相同, 两者距离为 a (图 11-22).

根据前面的公式可知, 无限长直线电流 I_1 在导线 2 处产生的磁场 B_1 大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}.$$

B_1 的方向与导线 2 垂直.

载流导线 2 的单位长度受到的安培力 f 为

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a},$$

方向在两平行载流导线决定的平面上并指向 I_1 . 同样可以计算无限长载流导线 2 在导线 1 处产

生的磁场 $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$, 则载流导线 1 的单位长度受

的安培力亦为 $f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$, 方向指向 I_2 . 由此, 可以分析得到两平行直线电流的相互作用力:

当导线中电流同向时, 磁相互作用力是吸引力; 当电流沿相反方向时, 磁相互作用力是排斥力.

若两导线中电流相等 ($I_1 = I_2$), 则 $f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$, 电流 I 可以表示成

$$I = \sqrt{\frac{2\pi a f}{\mu_0}}.$$

取 $a = 1 \text{ m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$, 改变 I 的大小使 $f = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$, 则在这些条件下 $I = 1 \text{ A}$.

电流单位安(A)就是根据载流导线间的相互作用力定义的. 国际单位制中关于电流的单位安培的定义为: 真空中两条平行的无限长载流细直导线, 各通有相等的恒定电流, 当两导线相距 1 m 且任一导线上每米长度上受力为 $2 \times 10^{-7} \text{ N}$, 则各导线上的电流为 1 A.

顺便指出, 国际单位制的电磁学单位规定 4 个基本量, 它们是长度、质量、时间以及电流. 与此对应的 4 个基本单位分别为米、千克、秒及安培, 用字母表示为 m, kg, s, A. 其他单位均是导出单位. 从定义安培单位的过程中看到真空磁导率 μ_0 值规定为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$, 是因为由此规定后得到的电流单位的大小正好符合实际应用的需要.

► * 11.4.4 运动电荷的磁场

这里的运动电荷是指其运动速度 v 远小于光速. 考虑到电流是电荷的定向移动形成的,

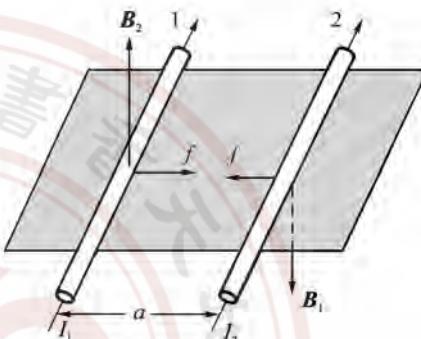


图 11-22

可以就从毕奥—萨伐尔定律来求运动电荷的磁场. 直导线上电流元 Idl 产生的磁场 $d\mathbf{B}$ 的大小(图 11-23)为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin(Idl, \mathbf{r})}{r^2}.$$

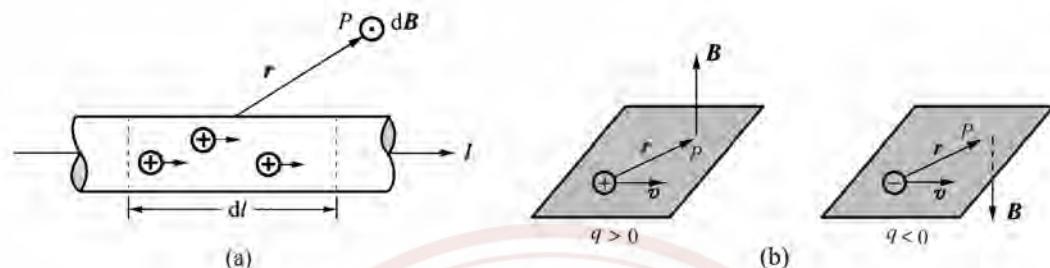


图 11-23

设导线内单位体积的带电粒子数 n , 每个粒子带电荷量 q , 它的定向漂移速率 v , 则电流 $I = nqvS$. 其中 S 为导线截面积. 由此, 磁场 $d\mathbf{B}$ 可以写成

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(nqvS)dl \sin(v, r^0)}{r^2}.$$

在 dl 长度的导线内有 $nSdl$ 个带电粒子, 每一个以速度 v 运动的带电粒子产生的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv \sin(v, r^0)}{r^2}.$$

再把 \mathbf{B} 的方向考虑进去,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv \times r^0}{r^2}, \quad (11.4-12)$$

这是非相对论的运动电荷的磁场公式. 式中 r^0 为从运动点电荷指向场点的单位矢径, 式中电荷量的正负, 在计算时应代入. 图(b)中的平面是运动电荷的速度矢量 v 与矢径 r 组成的平面, 运动正电荷在场点 P 的磁场方向垂直平面向上, 而运动负电荷在 P 点的磁场方向垂直平面向下.

11.5 磁场的高斯定理

► 11.5.1 磁通量

仿照引入电场 \mathbf{E} 通量的办法, 对于磁场 \mathbf{B} 也引进通量概念. 规定磁场中通过一曲面 S 的磁感通量(简称磁通量, 用 Φ_B 表示, 如图 11-24 所示)为

$$\Phi_B = \iint B \cos \theta dS = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.5-1)$$

式中 θ 为磁感应强度 \mathbf{B} 与面元 $d\mathbf{S}$ 之间的夹角.

国际单位制中, 磁感通量 Φ_B 的单位是特·米², 称为韦伯, 简称韦, 用 Wb 表示, $Wb = T \cdot m^2$.

因此磁感应强度 B 也可以看成是通过单位面积的磁通量,亦称磁通密度. 所以韦伯/米² 就是特,

$$\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T.}$$

正如电通量 Φ_E 代表通过曲面 S 的电场线的数目一样, 磁通量 Φ_B 也可以理解为通过曲面 S 的磁感线的数目. 对于闭合曲面, 规定由里向外为面元法线的正方向. 这样规定以后, 如果闭合曲面某处磁通量为正, 表示该处有磁感线穿出; 如果某处的磁通量为负, 表示该处有磁感线穿进. 闭合曲面的总磁通量 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 表示为穿出闭合曲面的磁感线条数减去穿进磁感线的条数.

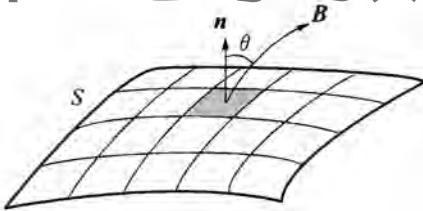


图 11-24

► 11.5.2 磁场的高斯定理

从毕奥—萨伐尔定律来看, 电流元 Idl 的磁场, 是以 Idl 为轴的轴对称分布. 磁感线都是以 Idl 为轴的同心圆. 在这种场内, 通过任意闭合曲面 S 的磁通量必等于零. 根据磁场的叠加原理, 对于任一电流分布产生的磁场, 可以看成无数电流元磁场的叠加. 这样, 对于任一电流分布的磁场中, 通过任一闭合曲面的磁通量也必等于零, 即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (11.5-2)$$

这就是磁场的高斯定理, 它是电磁场的一条基本规律. 实验证明(11.5-2)式对于随时间变化的磁场仍然成立.

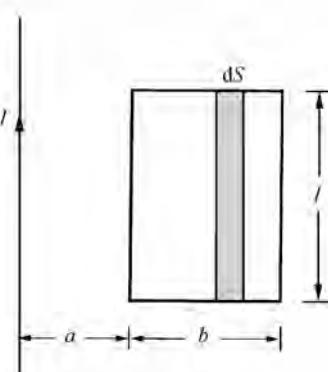
磁场的高斯定理表明, 磁感线是无始无终的闭合曲线, 或从无穷远来又伸向无穷远去. (11.5-2)式还表明, 磁场是无源场, 即磁场不是由与自由电荷对应的自由磁荷即磁单极产生的, 而是由运动电荷产生的.

1931 年, 英国物理学家狄拉克(P. A. Dirac 1902—1984)首先从理论上探讨了磁单极存在的可能性. 他指出, 如果自然界有磁单极存在, 则任何粒子的电荷必须是量子化的, 即必须是电子电荷的整数倍. 宇宙大爆炸理论认为, 超重的磁单极粒子只能在诞生宇宙大爆炸之后 10^{-35} s 产生, 这时它的合适温度为 10^{30} K.

根据计算, 今天的宇宙中若有磁单极存在, 其数量相当于在足球场大小的面上, 一年可能有一个磁单极穿过. 在理论预言的同时, 不少人致力于捕捉磁单极子工作, 其中最近的一次工作是 1982 年美国人在直径 5 cm 镍超导线圈(9 K)中突然测到磁通量升高. 负责此项工作的 Cabrera 认为这是磁单极进入金属线圈引起的变化, 但是他再也没有测量到第二个磁单极.

例 11-8 长直电流旁有一与它共面的长方形平面, 如果 $I=20$ A, $a=10$ cm, $b=20$ cm, $l=25$ cm, 求通过长方形的磁通量.

解 取如图所示的面积元 $dS=ldr$, 它与导线相距 r ,



例 11-8 图

该处的 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, 通过 dS 的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr.$$

通过长方形的磁通量

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I \int_a^{a+b} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I \ln \frac{a+b}{a}.$$

代入数据后得到

$$\Phi = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.25 \times 20}{2\pi} \ln \frac{0.3}{0.1} \text{ Wb} = 1.1 \times 10^{-6} \text{ Wb}.$$

11.6 磁场的安培环路定理

► 11.6.1 安培环路定理

静电场的场强 \mathbf{E} 沿闭合环路的线积分为零, 这反映了静电场是保守场的性质, 那么磁场 \mathbf{B} 沿闭合曲线环路的线积分等于多少呢? 它又反映了磁场的什么性质呢?

恒定电流磁场的安培环路定理指出: 恒定磁场的磁感应强度 \mathbf{B} 沿任意闭合曲线的线积分, 等于穿过闭合曲线的全部电流的代数和的 μ_0 倍, 即

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I. \quad (11.6-1)$$

闭合曲线又称安培环路.

磁场安培环路定理的严格证明是用毕奥—萨伐尔定律来完成的. 这里用一个无限长的直线电流磁场的特例来证明.

设一闭合曲线包围一根无限长直线电流 I . 为简单起见, 闭合曲线就在垂直于直线电流 I 的平面内(图 11-25).

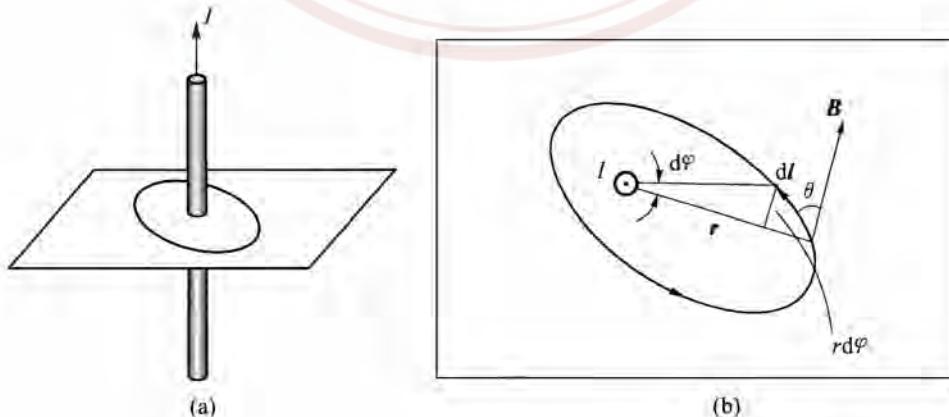


图 11-25

苏州大学出版社教材

直线电流磁场 $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$. 这样

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \cos\theta,$$

而 $dl \cos\theta = r d\varphi$, 所以

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I r d\varphi.$$

沿闭合曲线 l 的线积分为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mu_0}{2\pi} I r d\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint d\varphi = \mu_0 I.$$

如果改变曲线的绕行方向, $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 为负, 可以算得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I.$$

如果闭合曲线 l 不包围电流 I , 如图 11-26 所示, 这时加图示一段路径 l' , 闭合曲线 l 的 l_1 段与 l' 段构成一闭合曲线 1, 闭合曲线 l 的另一段 l_2 与 l' 段构成另一闭合曲线 2. 这两闭合曲线的绕行方向一个为逆时针, 另一个为顺时针, 而且它们都包围电流 I . 由此

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_{l_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{l_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \mu_0 I - \mu_0 I = 0. \end{aligned}$$

这说明对于不包围直线电流 I 的闭合曲

线, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$. 利用磁场的叠加原理可

以证明对于几根无限长直线电流的合磁场, (11.6-1)式是成立的.

(11.6-1)式中, 电流的流向与闭合环路绕行方向组成右手螺旋关系, 则电流 I 取正; 电流与环路绕行方向组成左手螺旋关系, 则电流 I 取负. 安培环路定理对恒定磁场中的任意闭合环路都是成立的, 它是恒定磁场的基本定理之一. 它说明磁场是涡旋场, 不能引进“势”的概念. 对于随时间变化的磁场, (11.6-1)式要修正. 磁场的高斯定理以及修正后的安培环路定理是普遍电磁理论的麦克斯韦方程组的一部分.

在恒定电流的磁场中, 当电流具有一定对称分布时, 利用安培环路定理可以很方便地求出磁场分布.

► 11.6.2 安培环路定理的应用

1. 载流长直螺线管的磁场

当螺线管的长度远大于管的半径时, 就可以把螺线管看成无限长螺线管. 由于是密绕螺线管, 每匝线圈的电流激发磁场在管内叠加为均匀场, 而在管外磁场很弱, 可略去不计.

过螺线管内某点作一矩形回路 $abcd$, 如图 11-27 所示. 因为管内磁场是均匀的, 所以

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot \overline{ab} + 0 + 0 + 0.$$

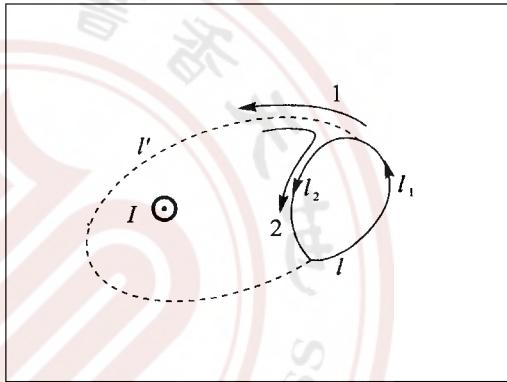


图 11-26

苏州大学出版社电子教材

穿过闭合环路的电流 $\sum I = nI ab$, 所以按照安培

环路定理 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$, 有

$$B = \mu_0 nI. \quad (11.6-2)$$

与前面得到的结果相同.

2. 无限长载流圆柱体内外磁场

设圆柱体半径为 R , 通有电流 I , 且电流沿截面均匀分布(图 11-28).

由于电流均匀分布在圆截面上, 磁感应强度 \mathbf{B} 的大小只与场点到轴线的垂直距离有关. 考察在与轴垂直的一横截面内且以轴线与截面交点为圆心、 r 为半径的圆周上各点的 \mathbf{B} . 各点的 \mathbf{B} 的大小相等, 而方向沿圆周的切向并与电流流向成右手螺旋关系.

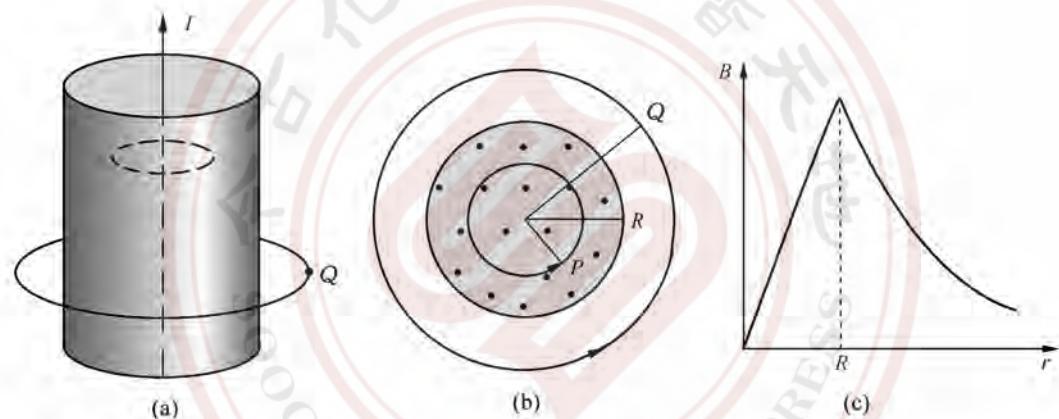


图 11-28

当场点 P 在导体内时, 沿着过 P 点的圆周环路, \mathbf{B} 的环流 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$, 而

$$\sum I = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I = \frac{r^2}{R^2} I,$$

按照安培环路定理(11.6-1) 式有

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I,$$

即

$$B = \mu_0 \frac{r}{2\pi R^2} I. \quad (11.6-3)$$

圆柱体内磁场 B 与 r 成正比. 利用电流密度 $j = \frac{I}{\pi R^2}$, 上式还可以改写成

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r. \quad (11.6-4)$$

当场点 Q 在圆柱体外时, 沿着过场点 Q 的圆周环路, \mathbf{B} 的环流 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$. 此时

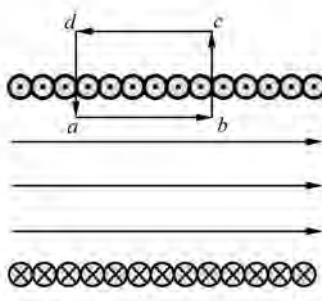


图 11-27

$\sum I = I$, 由安培环路定理得到

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I. \quad (11.6-5)$$

圆柱体外部磁场分布与全部电流 I 集中在轴线上的直长电流的磁场分布相同, B 与 r 成反比.

\mathbf{B} 的大小沿矢径 r 的分布如图 11-28(c) 所示. 在圆柱体表面, B 取最大.

3. 载流螺绕环内外的磁场

绕在环形管上的螺旋形线圈称为螺绕环, 如图 11-29(a) 所示. 当螺绕环密绕时, 磁场几乎全部集中在螺绕环内, 环外磁场接近于零. 设螺绕环的内、外半径分别为 r_1 和 r_2 , 线圈总匝数为 N , 线圈中通过的电流为 I [图 11-29(b)]. 根据对称性, 螺绕环内磁场的磁感线都是些与螺绕环同心的圆, 在同一条磁感线上各点磁感应强度 \mathbf{B} 的大小相等, 方向处处沿圆的切线方向, 并和环面平行.

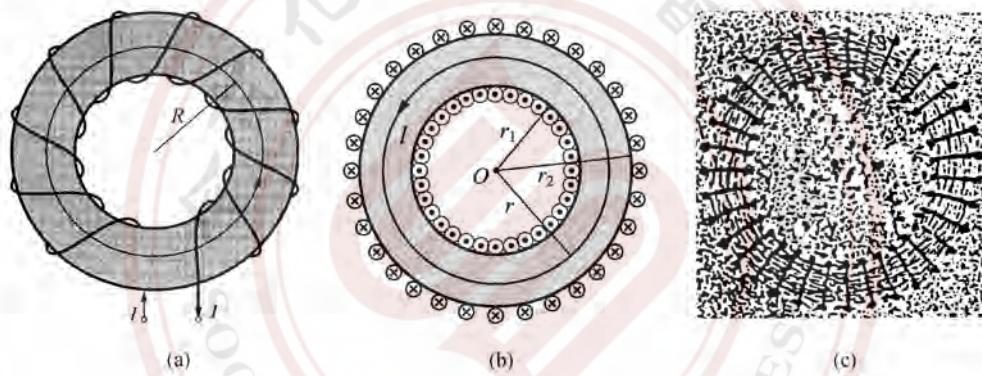


图 11-29

为了计算螺绕环内某点的磁感应强度, 可选通过该点的磁感线 l 作为积分回路. 由于回路上各点磁感应强度 \mathbf{B} 的大小相等, 方向都与 dl 同向, 所以 \mathbf{B} 沿此环路的线积分

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_l dl = 2\pi r B.$$

根据安培环路定理 $2\pi r B = \mu_0 N I$, 因此

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (r_1 < r < r_2). \quad (11.6-6)$$

即螺绕环内磁感应强度的大小与 r 成反比.

当螺绕环的截面积很小, 即螺绕环的孔径 $r_2 - r_1$ 远小于 r_1, r_2 时, 管内各点磁场大小基本相等. 若取螺绕环平均半径为 R , 则

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} I = \mu_0 n I. \quad (11.6-7)$$

式中 $n = \frac{N}{2\pi R}$ 为螺绕环单位长度上的平均匝数.

图 11-29(c) 显示载流螺线环磁场的磁感线分布.

苏州大学出版社电子教材

内容提要

1. 磁感应强度 \mathbf{B} 的定义式: $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
2. 磁场对运动电荷的作用.
 - (1) 洛伦兹力: $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
 - (2) 回旋运动: $R = \frac{mv}{qB}$, $T = \frac{2\pi m}{qB}$, $f = \frac{qB}{2\pi m}$.
 - (3) 螺旋运动: $h = \frac{2\pi mv_{||}}{qB}$.
 - (4) 霍耳效应: $U_{AA'} \propto \frac{BI}{b}$.

3. 磁场对电流的作用.

- (1) 安培定律: $d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}$, $\mathbf{F} = \int Idl \times \mathbf{B}$.
- (2) 对平面载流线圈的转矩: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$.
- (3) 磁矩: $\mathbf{m} = ISn$.

4. 毕奥—萨伐尔定律.

- (1) 电流元的磁场: $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}$; 真空磁导率: $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.
- (2) 一组公式: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B = \mu_0 nI$, $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$, $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, $B = \mu_0 \bar{n}I$.

5. 高斯定理: $\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

磁场是无源场, 磁感线是闭合曲线.“磁单极”至今未曾找到.

磁通量: $\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 单位为 Wb = T · m².

6. 安培环路定理: $\oint \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0 \sum I$ (适用于恒定电流的磁场).

- (1) 磁场是涡旋场, 不能引进“势”的概念.
- (2) 利用环路定理计算具有对称电流分布的磁场.

习题

11-1 两个带电粒子在均匀磁场 B 中做图示的圆周运动. 如果该两粒子具有相同的质量和相同的动能, 则下列正确的为

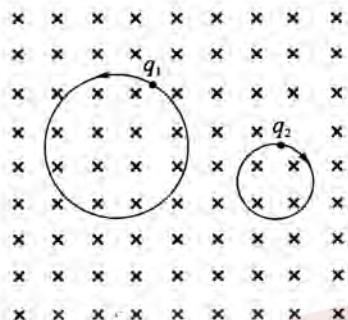
- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (A) $q_1 > 0, q_2 < 0; q_1 > q_2 $ | (B) $q_1 > 0, q_2 < 0; q_1 = q_2 $ |
| (C) $q_1 > 0, q_2 < 0; q_1 < q_2 $ | (D) $q_1 < 0, q_2 > 0; q_1 > q_2 $ |
| (E) $q_1 < 0, q_2 > 0; q_1 < q_2 $ | |

11-2 细长载流直导线平行放置在图示的正方形的四个顶点, 如果通过它们的电流大

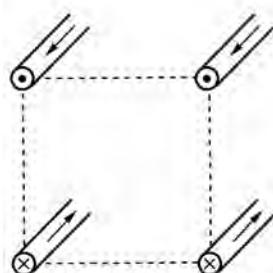
苏州大学出版社电子教材

亦相等,电流方向如图所示,则在正方形中心的磁场 \mathbf{B}

- (A) 指向上方 (B) 指向下方 (C) 指向左方 (D) 指向右方 (E) $B=0$



习题 11-1 图

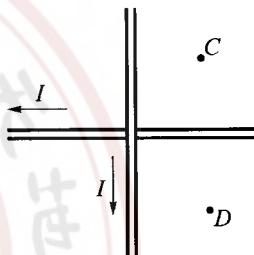


习题 11-2 图

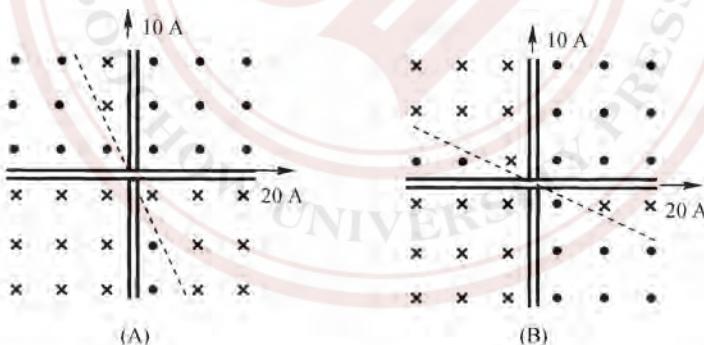
11-3 两根长直载流导线相交如图所示,如果它们的电流大小相等而方向如图所示,则 C 点和 D 点处的磁场 $\mathbf{B}_C, \mathbf{B}_D$ 间有如下关系(C,D 两点离开两导线距离均为 d):

- (A) $B_C = -B_D$ (B) $B_C = B_D$
 (C) $B_C < B_D$ (D) $B_C > B_D$
 (E) $B_C = B_D = 0$

11-4 两根长直导线分别载有电流 20 A 和 10 A,它们彼此相交 90°,放在图示的纸面上,纸面上的磁场分布正确的是

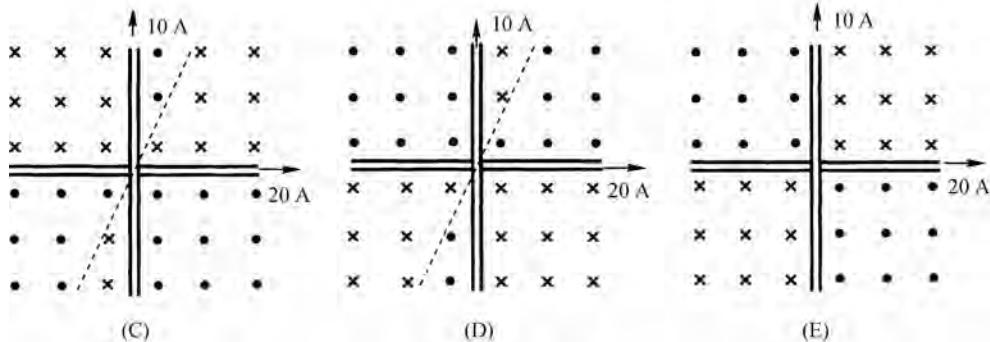


习题 11-3 图



(A)

(B)



(C)

(D)

(E)

习题 11-4 图

11-5 载流线圈放置在一长直载流导线附近,如图所示.

下列叙述正确的为

- (A) 导线吸引线圈
- (B) 线圈作用一斥力在导线上
- (C) 直导线在线圈内部空间的磁场垂直纸面向外
- (D) 载流线圈在导线所在处产生的磁场为零
- (E) 线圈与导线的相互作用力为零,所以载流线圈不发生转动

11-6 估算地磁场对电视机显像管中电子束的影响.设加速电压为 20 000 V,电子枪到屏的距离为 0.4 m,地磁场大小取 0.5×10^{-4} T,试计算电子束在该地磁场中的偏转距离.

11-7 质子、氘核与 α 粒子通过相同的电势差而进入均匀磁场做匀速圆周运动.

- (1) 比较这些粒子动能的大小;
- (2) 已知质子圆轨道的半径为 10 cm,求氘核和 α 粒子的轨道半径.

11-8 一个动能为 2 000 eV 的正电子,射入磁感应强度 $B=0.1$ T 的均匀磁场中,正电子的速度与 \mathbf{B} 成 89° 角,试求正电子螺旋运动的周期、螺距和半径.

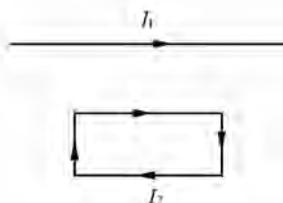
11-9 在回旋加速器中,一个氘核在 $B=1.5$ T 的磁场中做轨道半径 $R=2$ m 的圆周运动.由于同一个靶做拂掠碰撞,氘核破裂成一个质子和一个中子.假设破裂中氘核的能量均分给质子和中子,讨论质子和中子的运动情形.

11-10 具有电荷为 q 的正离子,质量为 m ,通过电势差 U 从静止开始沿水平方向加速,以后进入一均匀磁场 \mathbf{B} 的区域, \mathbf{B} 的方向与轨道平面垂直.如果该离子沿 x 轴方向进入该磁场,试证任何时刻离子的 y 坐标约为

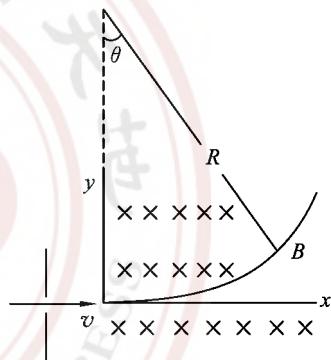
$$y = Bx^2 \left(\frac{q}{8mU} \right)^{1/2}.$$

11-11 如图所示为磁聚焦装置.电子束经电压 U 加速后通过一小孔进入由通电螺线管产生的均匀磁场.从小孔中射出的电子会有很小角度的发散,使电子沿磁场方向做不同半径的螺旋线运动.但因各电子平行于磁场方向的速度分量近似相等,使散开的电子经过整数螺距后又重新汇聚,在荧光屏上产生一个细小的亮点.这和透镜汇聚光线相似,故称为磁聚焦.设电子在磁场中通过的距离 l 为螺距的 n 倍,磁场的磁感应强度为 \mathbf{B} ,求电子的比荷 e/m (e 为电子的电荷量, m 为电子的质量).

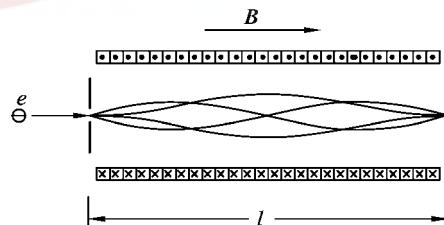
11-12 如图所示,银质的长方形样品, $z_1=2$ cm, $y_1=1$ mm, 有沿 x 轴正方向的电流 $I=200$ A 通过它.现 y 轴正方向上有 $B=1.5$ T 的均匀磁场.已知银每立方米中有 $7.4 \times$



习题 11-5 图



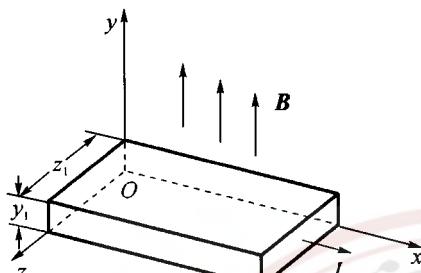
习题 11-10 图



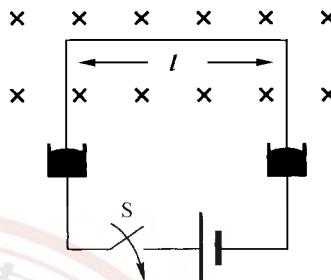
习题 11-11 图

10^{28} 个自由电子,求:

- (1) 沿 x 轴方向电子漂移的速率;
- (2) 沿 z 轴方向的霍耳电场的大小;
- (3) 霍耳电势差.



习题 11-12 图

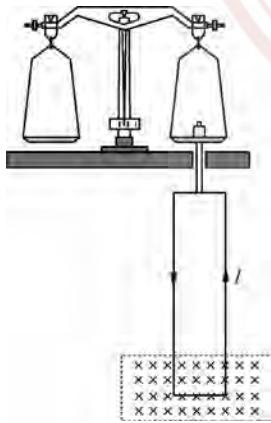


习题 11-13 图

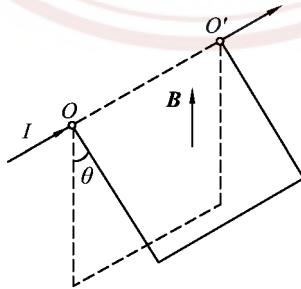
11-13 一根质量为 m 、长为 l 的 U 形导线, 其两端浸没在水银槽中(见图). 这根导线处在图示的均匀磁场 \mathbf{B} 中, 如果有电荷 q 亦即电流脉冲通过导线, 该导线就会跳起来. 假定电流脉冲时间同导线上升时间相比是非常小的, 试根据 $B=0.1\text{ T}$, $m=10\text{ g}$, $l=20\text{ cm}$ 和导线达到的高度 $h=3\text{ m}$, 计算 q 的量值.

11-14 当回旋加速器中的氘核恰好从 D 形盒出来前, 其运动的圆半径是 32.0 cm . 已知加在 D 形盒上的交变电压的频率是 10 MHz , 试求磁场的大小、氘核最终的能量及其速率.

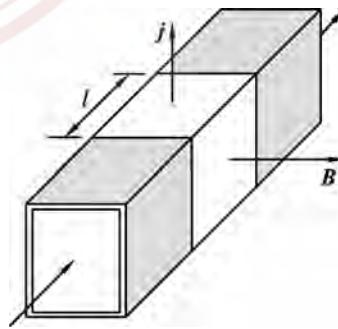
11-15 如图所示为测量磁感应强度的实验装置——磁秤. 天平的一臂下面挂有一矩形线圈, 线圈宽为 b , 共绕有 N 匝, 其平面与磁感应强度 \mathbf{B} 垂直. 当线圈中通有电流 I 时, 线圈受到向上的作用力, 使天平失去平衡. 调节砝码的质量 m 使两臂重新达到平衡. 设 $N=9$, $b=10.0\text{ cm}$, $I=0.10\text{ A}$, $m=4.40\text{ g}$, 求待测磁场的磁感应强度的大小.



习题 11-15 图



习题 11-16 图



习题 11-17 图

11-16 截面积 $S=2\text{ mm}^2$ 、密度 $\rho=8.9\text{ g/cm}^3$ 的铜导线被弯成正方形的三边, 可以绕水平轴转动, 如图所示. 导线放在竖直向上的均匀磁场中, 当导线中的电流 $I=10\text{ A}$ 时, 导线离开原来的竖直位置偏转一角度 $\theta=15^\circ$ 而平衡. 求磁感应强度 \mathbf{B} 的大小.

11-17 磁力可用来输送如液体金属、血液等导电液体. 如图所示为输送液体钠的管

苏州大学出版社电子教材

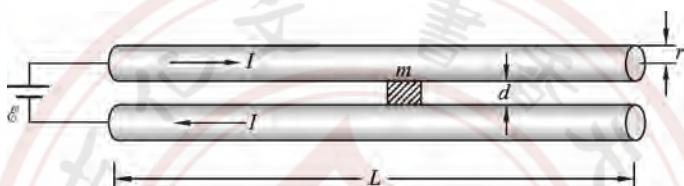
道. 在长为 l 的部分加一横向磁场 \mathbf{B} , 同时垂直于磁场和管道通以电流, 其电流密度为 j .

(1) 证明: 在管内长为 l 段的液体两端由磁力产生的压强差为 $\Delta p = jIB$, 此压强差将驱动液体沿管道流动;

(2) 设 $B = 1.50 \text{ T}$, $l = 2.00 \text{ cm}$, 要在 l 段的两端产生 1.00 atm 的压强差, 电流密度应为多大?

11-18 如图所示为一种电磁炮的原理图. 子弹置于两条平行圆柱导轨之间, 导轨中通以电流后子弹会被磁力加速而以很高的速度从导轨端口射出. 以 I 表示电流, r 表示圆柱形导轨的半径, d 表示两轨面之间的距离. 将导轨近似地看作无限长, 证明子弹所受的磁力近似地可以表示为

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln \frac{d+r}{r}.$$



习题 11-18 图

设导轨长度 $L = 5.0 \text{ m}$, $r = 6.7 \text{ cm}$, $d = 1.2 \text{ cm}$, 子弹的质量 $m = 317 \text{ g}$, 发射速度 $v = 4.2 \text{ km/s}$.

(1) 忽略导轨的摩擦, 问子弹在导轨内的平均加速度是其重力加速度的几倍?

(2) 通过导轨的电流为多大?

(3) 如果能量的转换效率为 40% , 发射子弹需要多少千瓦功率的电源?

11-19 如图所示, 载流 $I = 10 \text{ A}$ 的矩形线圈, 可绕 y 轴转动.

(1) 如果有一均匀磁场 $B = 0.2 \text{ T}$, 方向平行于 x 轴, 则要维持线圈在这一位置所需的转矩为多大?

(2) 均匀磁场 $B = 0.2 \text{ T}$, 沿 z 轴正方向, 求要维持线圈在这一位置所需的转矩.

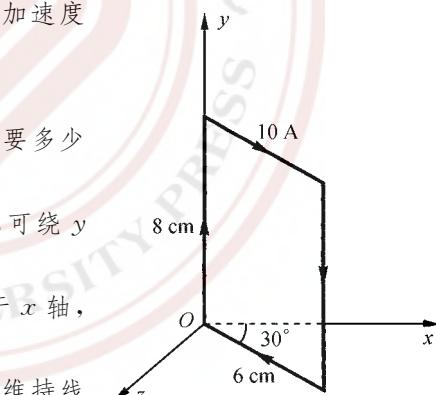
(3) 如果转轴通过线圈中心, 且平行于 y 轴, 再求解(1)和(2).

11-20 直径为 8 cm 的圆形线圈, 共有 12 匝, 载有电流 $i = 5 \text{ A}$, 线圈放在均匀磁场 $B = 0.6 \text{ T}$ 中.

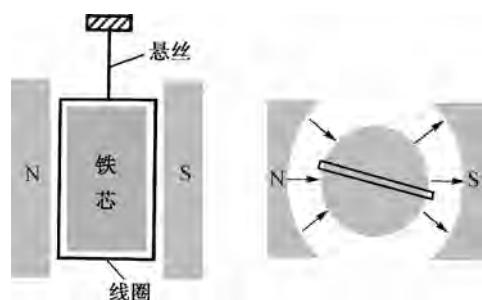
(1) 求线圈所受的最大转矩;

(2) 线圈在什么位置上转矩等于最大转矩的一半?

11-21 电流计的矩形线圈的尺寸为 $4 \text{ mm} \times$



习题 11-19 图



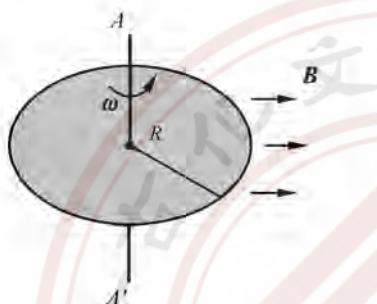
习题 11-21 图

苏州大学出版社教材

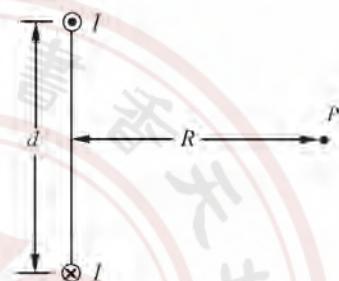
3 mm , 它由细导线绕制而成, 共有 1 000 匝, 悬丝的扭转系数为 $1 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{deg}$, 线圈两边在磁铁两极与铁芯之间的缝隙中, 该处的磁场呈辐射状, 即线圈的长边在任何位置时, 磁场方向总与长边垂直, 如图所示. 如果磁感应强度 $B = 0.1 \text{ T}$, 当线圈中载有电流 0.1 mA 时, 求线圈偏转的角度.

11-22 半径为 R 的带电塑料圆盘, 面电荷密度 σ 为一常数. 假定圆盘绕其轴 AA' 以角速度 ω 旋转, 磁场 \mathbf{B} 的方向垂直于转轴 AA' , 证明磁场作用于圆盘的力矩为 $M = \frac{\pi\sigma\omega R^4 B}{4}$.

11-23 两根平行直导线, 相距为 d , 载有大小相等、方向相反的电流 I , 如图所示. 点 P 与这两根导线等距离, 试证 P 点的磁感应强度为 $B = \frac{2\mu_0 I d}{\pi(4R^2 + d^2)}$.



习题 11-22 图



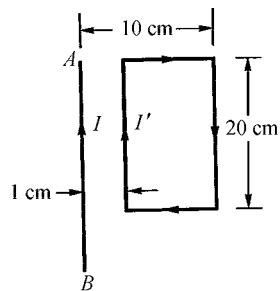
习题 11-23 图

11-24 如图所示, 两条长直平行载流导线相距 $d = 100 \text{ cm}$, 上面的导线通过的电流 $I_1 = 6 \text{ A}$, 方向为流入纸面.

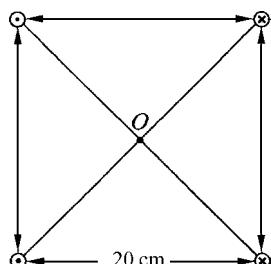
- (1) 要使 P 点的磁场为 0, 求电流 I_2 的大小和方向;
- (2) 在上述 I_1 和 I_2 的数值下, 求 Q 点磁场的大小和方向;
- (3) 求 S 点磁场的大小和方向.

11-25 图示中长直导线 AB 载有 $I = 20 \text{ A}$ 的电流, 长边平行于导线 AB 的矩形线圈载有电流 $I' = 10 \text{ A}$, 求直导线 AB 的磁场作用于矩形线圈每边的力以及合力.

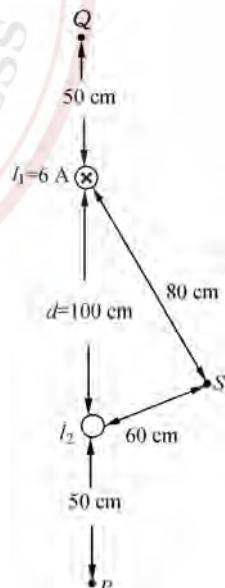
11-26 四根长直导线相互平行, 这四根导线的横截面排成一个边长为 20 cm 的正方形, 每根导线中载有电流 20 A, 电流方向如图所示. 求正方形中心处的 \mathbf{B} .



习题 11-25 图



习题 11-26 图

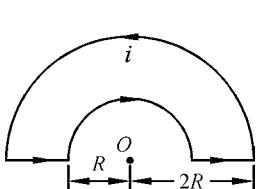


习题 11-24 图

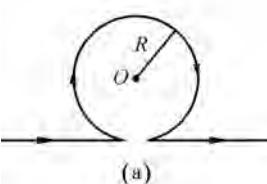
苏州大学出版社电子教材

11-27 图示导线载有电流 i , 试求图中各段载流导线在半圆圆心 O 产生的磁感应强度, 以及载流回路在圆心 O 产生的总磁感应强度.

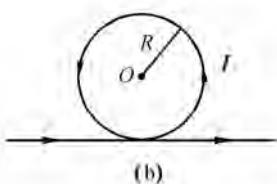
11-28 求图示(a)和(b)中电流分布在中心 O 处的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小和方向.



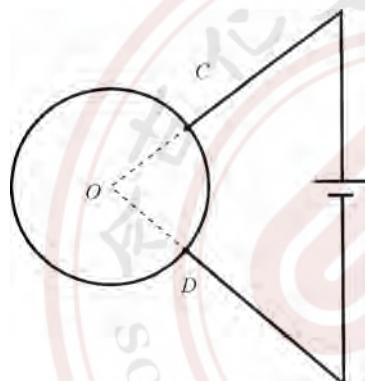
习题 11-27 图



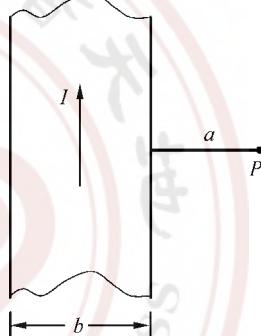
习题 11-28 图



11-29 如图所示, 两根导线沿半径方向引到铁环上的 C, D 两点, 并在远处与电源相连, 求环心 O 的磁感应强度 \mathbf{B} .



习题 11-29 图



习题 11-30 图

11-30 电流 I 均匀地流过宽为 b 的无限长平面导体薄板, 如图所示. 求在板的平面内, 距板的一边为 a 的 P 点处的磁感应强度的大小.

11-31 一半径 $a=1$ cm 的无限长半圆柱形金属薄片载有图示的电流 $I=5$ A, 求圆柱轴线上一点 P 的磁感应强度 \mathbf{B} .

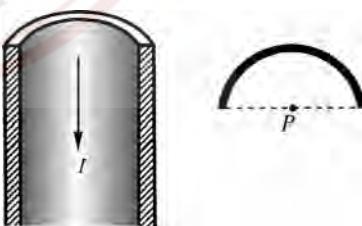
11-32 半径为 R 的薄圆盘上均匀带电, 总电荷量为 q . 如果此盘绕其通过盘面的轴线以角速度 ω 转动, 试证轴线上距盘心 x 处的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 q}{2\pi R^2} \left[\frac{R^2 + 2x^2}{(R^2 + x^2)^{1/2}} - 2x \right] \omega.$$

11-33 螺管线圈的直径是它的轴长的 4 倍, 每厘米长度内的匝数 $n=200$, 通有电流 $I=0.1$ A, 试用(11.4-9)式求:

- (1) 螺线管内中点 \mathbf{B} 的大小;
- (2) 螺线管一端处 \mathbf{B} 的大小.

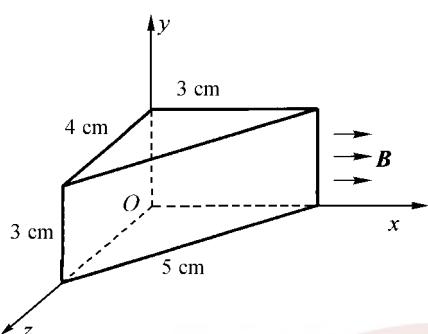
11-34 长度为 20 cm、半径为 2 cm 的螺线管密绕 200 匝导线, 绕组通有电流为 5 A, 试计算螺线管内中心附近的磁场大小.



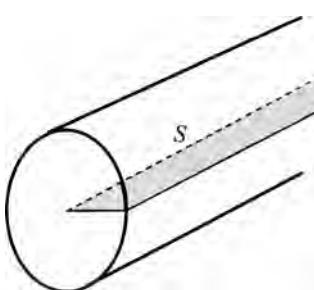
习题 11-31 图

苏州大学出版社电子教材

11-35 均匀磁场 $B=2\text{ T}$, 方向沿 x 轴正方向, 试求通过图示闭合面的各个表面的磁感应强度通量.



习题 11-35 图



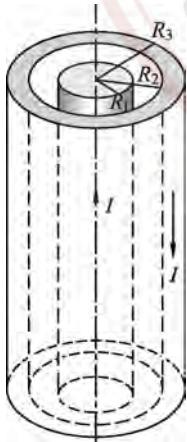
习题 11-36 图

11-36 长直导线均匀载有电流 I . 今在导线内部作一平面 S , 如图所示. 试计算通过 S 平面的磁通量(沿导线长度方向取 1 m). 取磁导率 $\mu=\mu_0$.

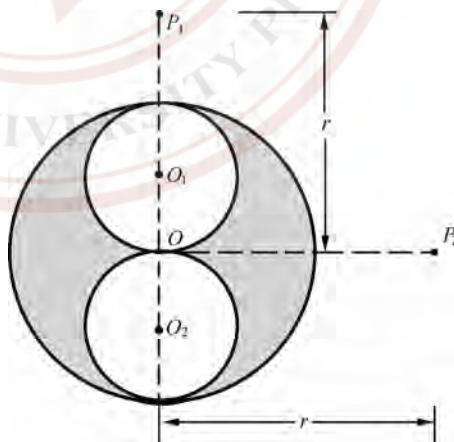
11-37 内外径分别为 a 和 b 的中空长导体圆柱, 载有电流 I , 电流均匀分布于截面, 求出在 $r < a, a < r < b$ 和 $r > b$ 区域的磁感应强度的大小.

11-38 有一根很长的同轴电缆, 由一圆柱形导体和一同轴圆筒状导体组成, 圆柱的半径为 R_1 , 圆筒的内、外半径分别为 R_2 和 R_3 , 如图所示. 在这两个导体中, 有大小相等而方向相反的电流 I 通过, 电流均匀分布在各导体的截面上. 求:

- (1) 圆柱导体内各点($r < R_1$)的磁感应强度的大小;
- (2) 两导体之间各点($R_1 < r < R_2$)的磁感应强度的大小;
- (3) 外圆筒导体内各点($R_2 < r < R_3$)的磁感应强度的大小;
- (4) 同轴电缆外各点($r > R_3$)的磁感应强度的大小.



习题 11-38 图



习题 11-39 图

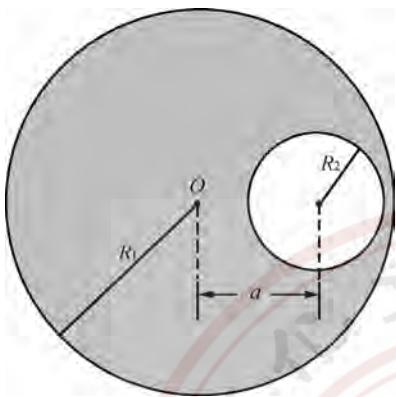
11-39 半径为 a 的长导体圆柱, 内部有两个直径为 a 的圆柱形空腔, 如图所示. 电流 I 从纸面流出并均匀分布在导体截面上, 试求 P_1 点和 P_2 点的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小.

11-40 如图所示, 一无限长圆柱形导体管外半径为 R_1 , 管内空心部分的半径为 R_2 , 空心部分的轴与圆柱的轴相平行, 且相距为 a . 现有电流 I 沿导体管流动, 电流均匀分布在管

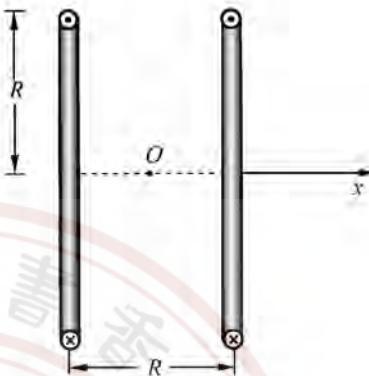
苏州大学出版社电子教材

的横截面上,求:

- (1) 圆柱轴线上磁感应强度 B 的大小;
- (2) 空心部分轴线上 B 的大小;
- (3) 空心部分各点磁感应强度 B 的大小.



习题 11-40 图



习题 11-41 图

- 11-41** 设亥姆霍兹线圈有各绕 300 匝的两个相同线圈, 相互距离为 R . R 等于线圈共同半径, 如图所示. 线圈中电流均为 $i=50$ A, 流向相同. 取线圈半径 $R=5$ cm, 取两线圈的公共轴上的中点 O 为 x 轴的原点, 试在 x 轴上从 $x=-5$ cm 到 $x=+5$ cm 范围内逐点算出 B 的值, 并且画出 B 随 x 变化的曲线. (这样的线圈在 O 点附近提供了一个均匀磁场)