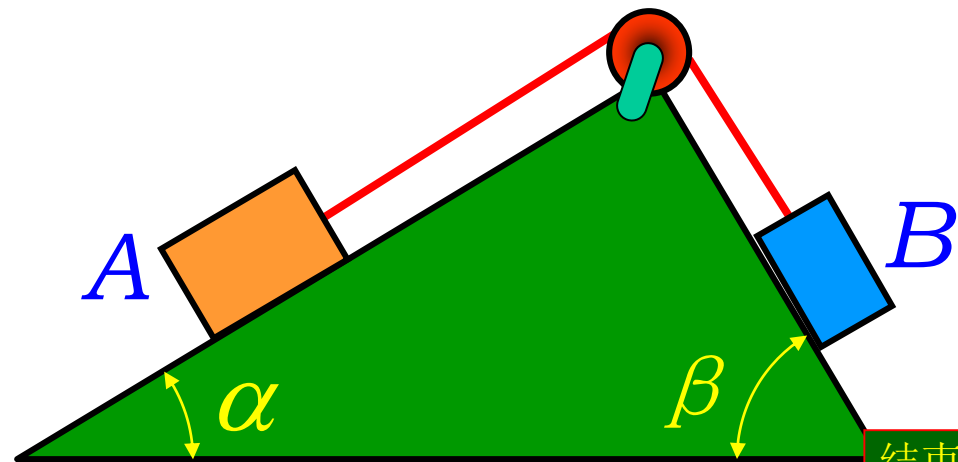


2-2 A、B两个物体，质量分别为 $m_A=100\text{kg}$ ， $m_B=60\text{kg}$ ，装置如图所示。两斜面的倾角分别为 $\alpha=30^\circ$ 和 $\beta=60^\circ$ 。如果物体与斜面间无摩擦，滑轮和绳的质量忽略不计，问：

- (1) 系统将向哪边运动？
- (2) 系统的加速度是多大？
- (3) 绳中的张力多大？



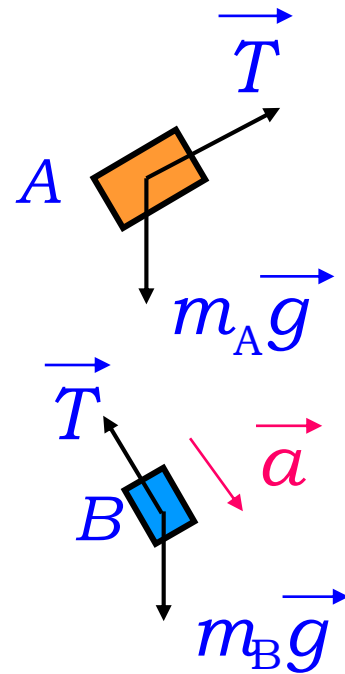
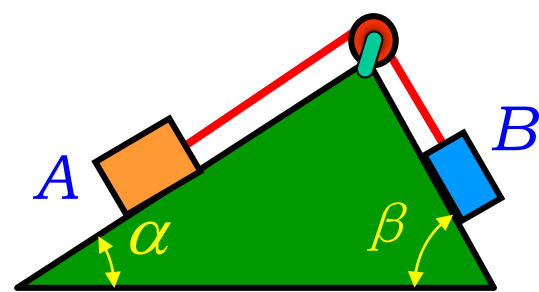
已知: $m_A=100\text{kg}$ $m_B=60\text{kg}$
 $\alpha=30^\circ$ $\beta=60^\circ$

求: a T

解: (1)
$$\begin{cases} T - m_A g \sin \alpha = m_A a \\ m_B g \sin \beta - T = m_B a \end{cases}$$

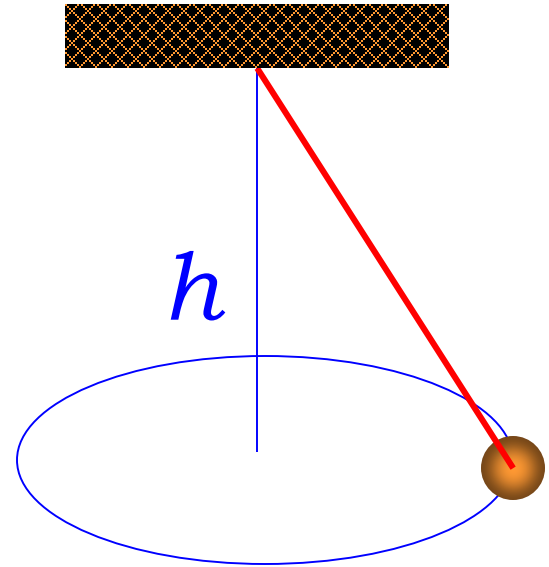
$$a = \frac{m_B g \sin \beta - m_A g \sin \alpha}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 100 \times \frac{1}{2}}{60 + 100} \times 9.8 = 0.12 \text{m/s}^2$$



$$\begin{aligned}(2) \quad T &= m_A a + m_A g \sin \alpha \\ &= 100 \times 0.2 + 100 \times 9.8 \times \frac{1}{2} \\ &= 12 + 490 = 520 \text{ N}\end{aligned}$$

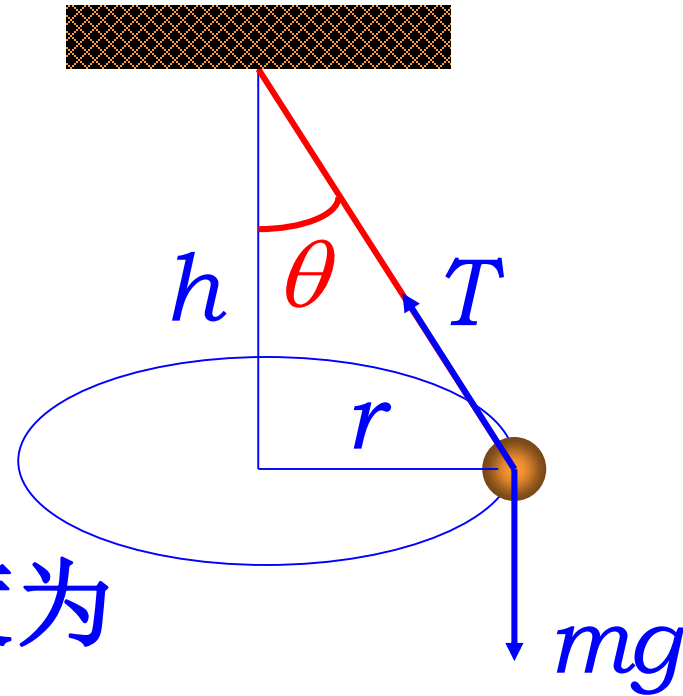
2-15 (1) 试证长度不同的圆锥摆只要其高度相等，则其周期也相等。
(2) 如果某圆锥摆的高度为1.5m，求其周期。



(1) 试证长度不同的圆锥摆只要其高度相等，则其周期也相等。

证： $mg \tan \theta = mr \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{r}} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$



(2) 如果某圆锥摆的高度为 1.5m，求其周期。

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{9.8}{1.5}} = 2.45 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{2.56} = 2.45 \text{ s}$$

2-16 质量为 m 的小球沿半球形碗的光滑的内面，正以角速度 ω 在一水平面内作匀速圆周运动，碗的半径为 R ，求该小球作匀速圆周运动的水平面离碗底的高度。

已知: ω R

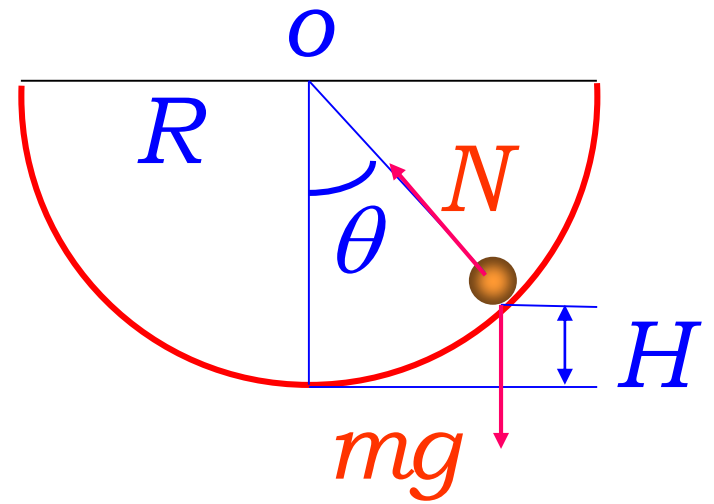
求: H

解:
$$N \sin \theta = m R' \omega^2$$
$$= m R \omega^2 \sin \theta$$

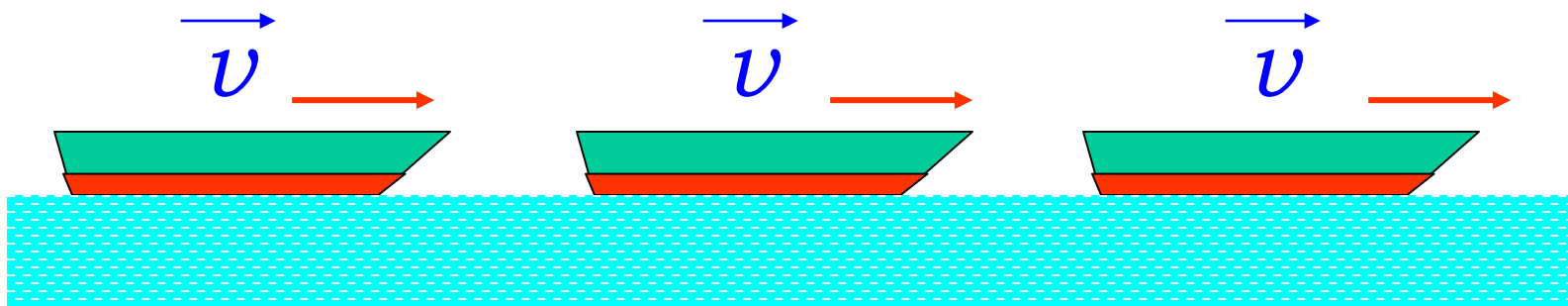
$$N \cos \theta = mg$$

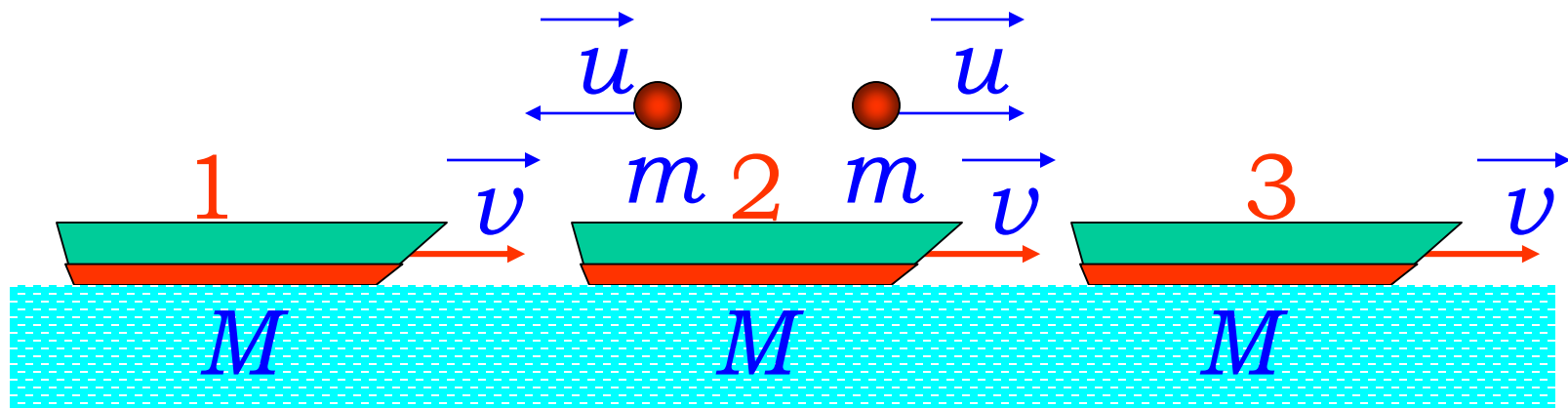
$$\cos \theta = \frac{mg}{N} = \frac{g}{R \omega^2}$$

$$H = R(1 - \cos \theta) = R\left(1 - \frac{g}{R \omega^2}\right)$$



2-20 三艘质量相等的小船鱼贯而行，速度均等于 v 。如果从中间船上同时以速度 u 把两个质量均为 m 的物体分别抛到前后两船上，速度 u 的方向和 v 在同一直线上。问抛掷物体后，这三艘船的速度如何变化？





解：设船的质量为 M ，沿 x 方向前进
 (第二艘船的质量 M 中包括两抛出物的质量 $2m$)
 设第二艘船抛出物体 m 后的速度为 v_2 ，
 以第二艘船和抛出物为系统，则抛出物体
 前后，系统的动量守恒：

$$Mv = (M - 2m)v_2 + m(v_2 + u) + m(v_2 - u)$$

$$v_2 = v$$

以第三艘船与抛来物为系统，其动量守恒

$$Mv + m(v + u) = (M + m)v_1$$

$$v_3 = v + \frac{mu}{(M + m)}$$

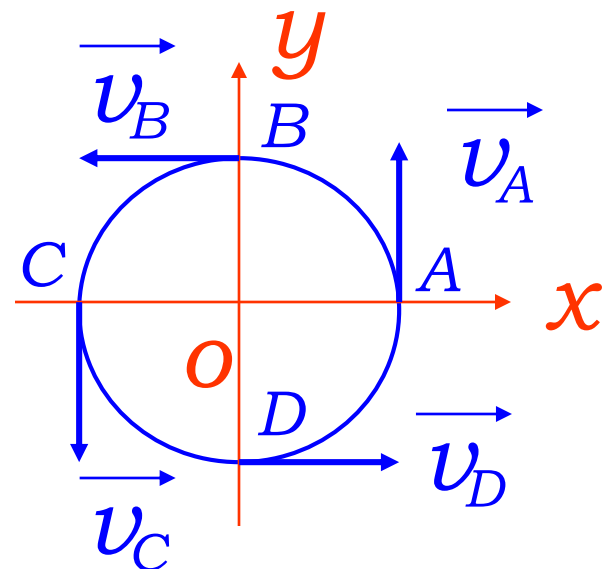
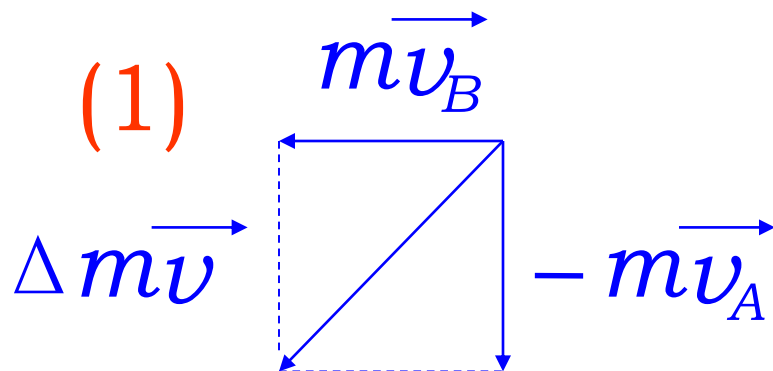
同理：

$$Mv + m(v - u) = (M + m)v_3$$

$$v_1 = v - \frac{mu}{(M + m)}$$

2-21 质量为 m 的小球在水平面内作速率为 v_0 的匀速圆周运动, 试求小球经过(1)1/4圆周, (2)1/2圆周, (3)3/4圆周, (4)整个圆周的过程中的动量改变量, 试从冲量计算得出结果。

解: (1) 1/4圆周A→B

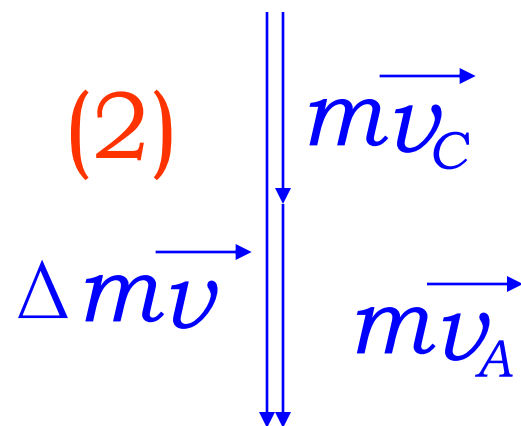


$$|\Delta m\vec{v}| = m\sqrt{v_0^2 + v_0^2 + 2v_0v_0\cos 90^\circ}$$

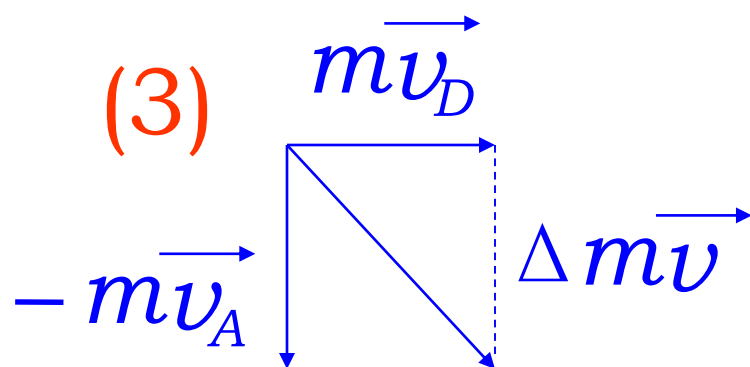
$$= mv_0\sqrt{2}$$

(2) 1/2圆周A→C

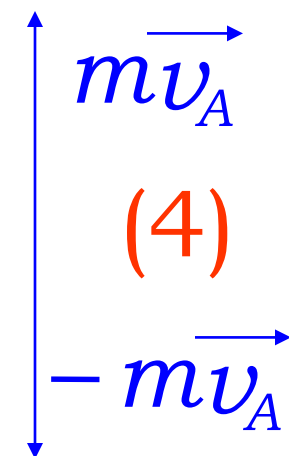
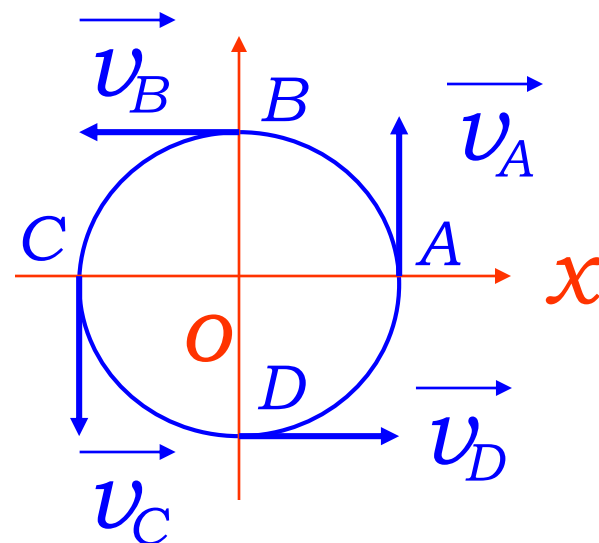
$$|\Delta m\vec{v}| = -2mv_0$$



(3) 3/2圆周A→D



$$|\Delta m\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = mv_0\sqrt{2}$$



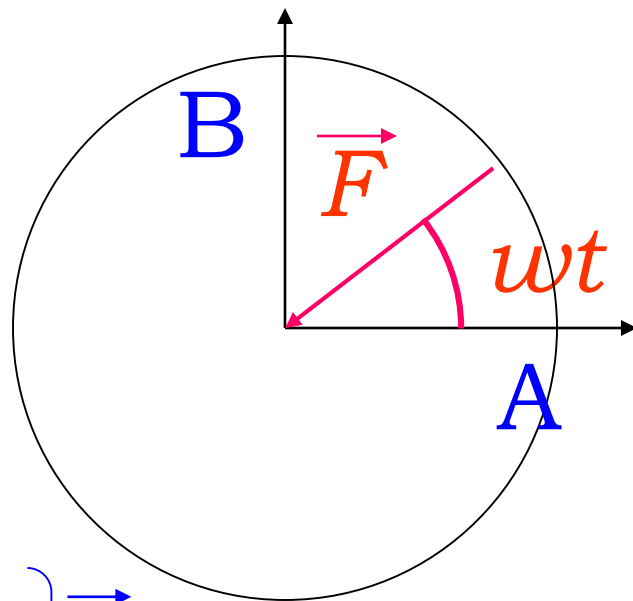
(4) 整个圆周A→A

$$|\Delta m\vec{v}| = m\sqrt{v_0^2 + v_0^2 + 2v_0v_0\cos 180^\circ} = 0$$

解：(1) 1/4圆周A→B

$$\vec{F} = -F \cos \omega t \vec{i} - F \sin \omega t \vec{j}$$

$$F = mR\omega^2$$



$$\begin{aligned} \int_0^{T/4} \vec{F} dt &= \left[\int_0^{T/4} -F \cos \omega t dt \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[\int_0^{T/4} -F \sin \omega t dt \right] \vec{j} \end{aligned}$$

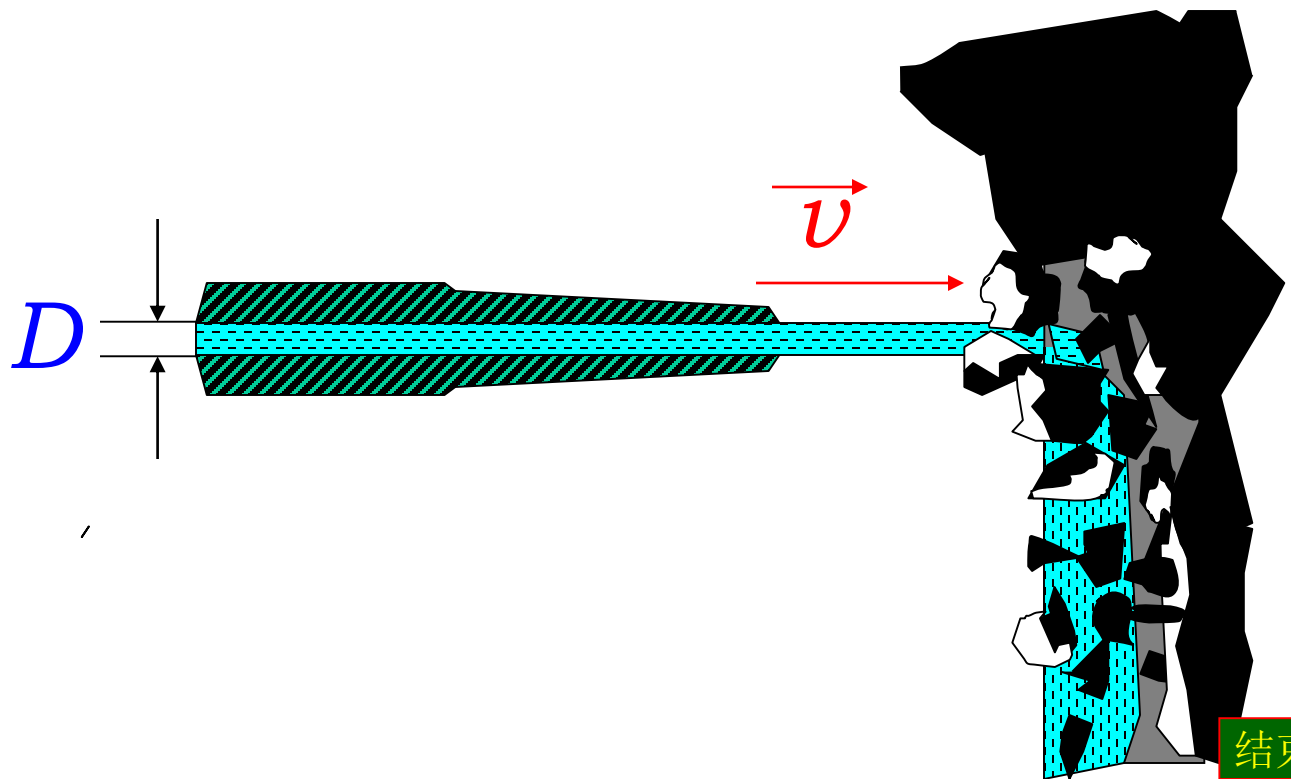
$$\begin{aligned} \int_0^{T/4} -F \cos \omega t dt &= -\frac{F}{\omega} [\sin \omega t]_0^{T/4} = -\frac{F}{\omega} \\ &= -mR\omega = -mv \end{aligned}$$

$$\int_0^{T/4} -F \sin \omega t dt = \frac{F}{\omega} [\cos \omega t]_0^{T/4} = -\frac{F}{\omega} \\ = -mv$$

$$\therefore \int_0^{T/4} \vec{F} dt = -mv\vec{i} - mv\vec{j}$$

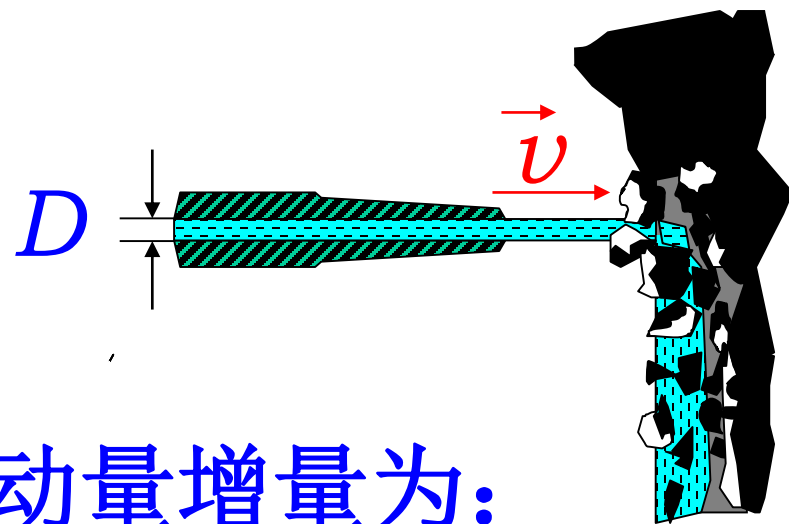
至于(2)、(3)、(4)的情况都可以用同样的方法得到动量的增量。

2-24 水力采煤，是用高压水枪喷出的强力水柱冲击煤层，如图所示。 设水柱直径 $D=30\text{mm}$ ，水速 $v=56/\text{s}$ 水柱垂直射在煤层表面上，冲击煤层后的速度为零，求水柱对煤的平均冲力。



解：每秒射在煤层上的
水柱质量为：

$$m = \frac{1}{4} \pi D^2 v_1 \rho$$



水柱每秒沿 x 轴方向的动量增量为：

$$\Delta mv_x = mv_{2x} - mv_{1x} = -mv_{1x}$$

$$\overline{f} = \frac{\Delta mv_x}{\Delta t} = -mv_{1x} = -\frac{1}{4} \pi D^2 v_1^2 \rho$$

$$= -\frac{1}{4} \times 3.14 \times (3 \times 10^{-2})^2 \times (56)^2 \times 1 \times 10^3$$

$$= -2.22 \times 10^3 \text{ N}$$

水柱对煤层的平均冲力为 $2.22 \times 10^3 \text{ N}$

2-25 将一空盒放在秤盘上，并将秤的读数调整到零。然后从高出盒底 $h = 4.9 \text{ m}$ 处，将小石子流以每秒 $n = 100$ 个的速率注入盒中。假设每一石子的质量 $m = 0.02 \text{ kg}$ ，都从同一高度落下，且落到盒内后就停止运动，求石子从开始注入盒内到 $t = 10 \text{ s}$ 时秤的读数。

解：石子落入称盘时的速度为：

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.9} = 9.8 \text{ m/s}$$

每秒落入的石子质量为：

$$M = nm = 100 \times 0.02 = 2 \text{ kg/s}$$

每秒由石子给称盘的平均冲力为：

$$f = nmv_1 = 2 \times 9.8 = 19.6 \text{ N}$$

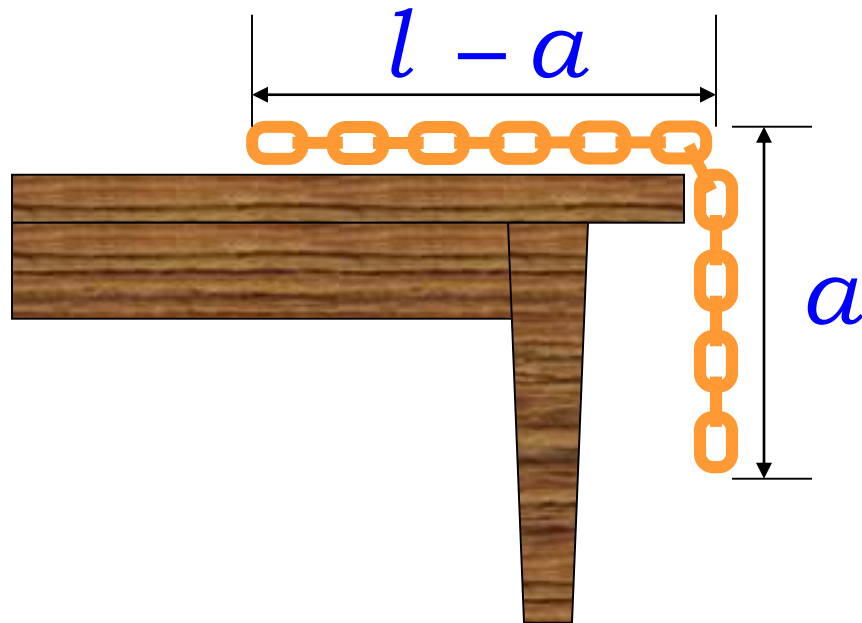
10秒内落入的石子重量为：

$$G = Mgt = 2 \times 9.8 \times 10 = 196 \text{ N}$$

称盘读数为：

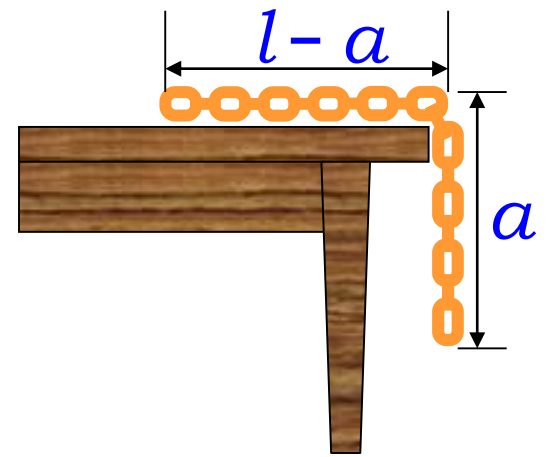
$$N = G + f = 196 + 19.6 = 215.6 \text{ N}$$

2-29 一链条，总长为 l ，放在光滑的桌面上，其中一端下垂，长度为 a ，如图所示。假定开始时链条静止。求链条刚刚离开桌边时的速度。



解：选桌面为零势能点。

由机械能守恒得：

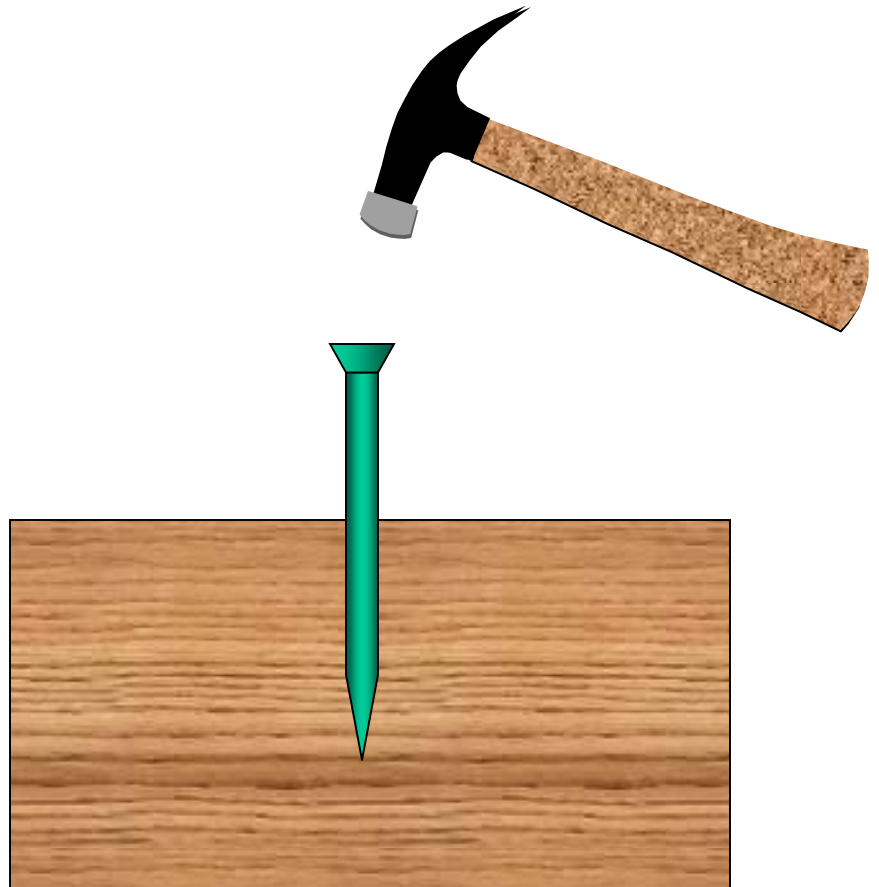


$$-\frac{m}{l}ag\frac{a}{2} = -\frac{m}{l}lg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{g}{l}(l^2 - a^2)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - a^2)}$$

2-30 以铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比。在铁锤击第一次时，能将小钉击入木板内1cm，问击第二次时能击入多深。假定铁锤两次打击铁钉时的速度相同。



解：

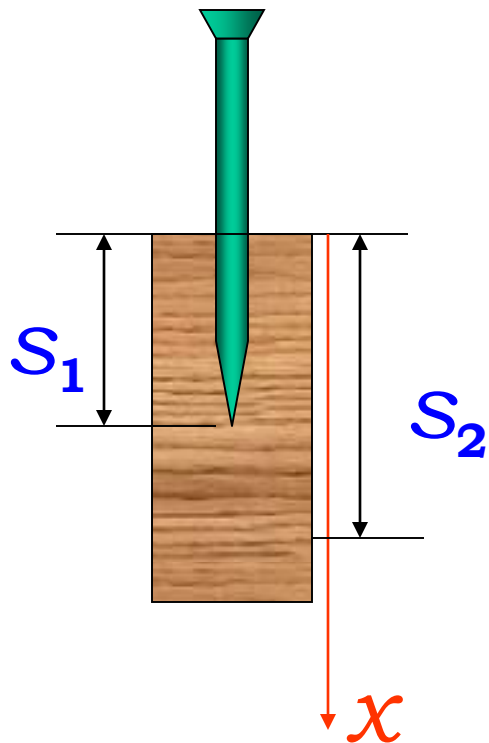
设铁锤的质量为 M ，钉子的
质量为 m

铁锤前后两次与钉接触前
速度为 v_0

铁锤与钉子碰撞时动量守恒，得：

$$M v_0 = (M + m) v$$

$$\because m \ll M \quad \therefore v = v_0$$



设第一次击入深度为 s_1 ，由功能原理：

$$A_1 = -\int_0^{s_1} kx dx = -\frac{1}{2}k s_1^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$\frac{1}{2}k s_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{----- (1)}$$

设第二次击入深度从 s_1 到 s_2 ，由功能原理：

$$A = -\int_{s_1}^{s_2} kx dx$$
$$= -\frac{1}{2}k s_2^2 + \frac{1}{2}k s_1^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{----- (2)}$$

由(1)、(2)得到： $s_2 = \sqrt{2} s_1$ $s_2^2 = 2s_1^2$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (\sqrt{2} - 1)s_1 = 0.41\text{cm}$$