

§1.1 实数集与函数

一、选择、填空题：

1. 下列说法不正确的是 (C).

A. 区间 $(2.97, 3.03)$ 和 $(0, 6)$ 都是数 3 的一个邻域

B. 集合 $(2.97, 3) \cup (3, 0.03)$ 和 $(0, 3) \cup (3, 6)$ 都是数 3 的一个去心邻域

C. $U_{-}(3, 0.03) \cup U_{+}(3, 0.03) = U(3, 0.03)$

D. 集合 $\{x \mid |x| > 3\}$ 和 $\{x \mid |x| > 3000\}$ 都是 ∞ 的一个邻域

2. 函数 $y = x - \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是 (C).

A. 有界函数

B. 递减函数

C. 奇函数

D. 周期函数

3. 若函数 $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ 表示同一函数, 则它们的定义域是 $[1, +\infty)$.

4. 函数 $y = \pi + \arctan \frac{x}{2}$ 的反函数是 $y = 2 \tan(x - \pi)$, $\arctan \frac{x}{2} = y - \pi$

二、求下列函数的定义域: $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ $\frac{x}{2} = \tan(y - \pi)$

1. $y = \arccos(x-2)$.

$x = 2 \tan(y - \pi)$

$$-1 \leq x-2 \leq 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$1 \leq x \leq 3$$

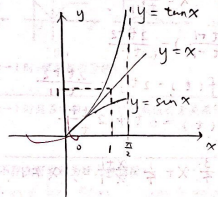
定义域 $[1, 3]$.

$$2. y = \sqrt{1-2x} + \sqrt{e - e^{(\frac{1}{2}x)^2}}.$$

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ (\frac{3x-1}{2})^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ -1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1 \end{cases}$$

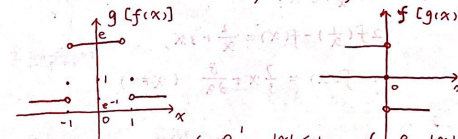
定义域 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

三、试用函数的图形(画草图)表示不等式 $\sin x < x < \tan x$ 的几何意义; $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
这个不等式成立的变量的范围是 $(0, \frac{\pi}{2})$.



四、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

$$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$



$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$



班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

五、1. 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3f(x) - 2x$, 求 $f(x)$.

$$\text{令 } \frac{x+1}{x-1} = t, \quad x = \frac{t+1}{t-1},$$

$$f(t) = 3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - \frac{2t+2}{t-1}$$

$$= 3\left[3f(t) - 2t\right] - \frac{2t+2}{t-1}$$

$$\text{整理, } 8f(t) = 6t + 2 \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

$$\left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{4(x-1)} \right)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{4}$$

2. 设 $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{3}{x}$, 求 $f(x)$.

$$\text{由 } 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{3}{x},$$

$$\text{令 } \frac{1}{x} = t, \quad x = \frac{1}{t},$$

$$2f\left(\frac{1}{t}\right) - f(t) = \frac{2}{t} + 3t,$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3x} \quad (x \neq 0).$$

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

六、下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

1. $y = e^{u^2}$.

$$y = e^u, \quad u = v^2, \quad v = \tan x$$

$$2. y = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}}.$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

七、证明: 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

$$|f(x)| = \left| \frac{x+2}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$



§ 1.2 极限的概念和运算法则(数列极限、函数极限的基本性质)

一、选择、填空题:

1. 下列四个数列收敛的是(B).

A. $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

B. $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots$

C. $1, 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{4}{3}, \dots$

D. $\cos 0, \cos \pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \dots$

2. 下列与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 等价的叙述是(C, D). (提示: 可多选)

A. 对于任给的 ε 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n - a < \varepsilon$ 成立

B. 对于任给的 ε 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有无穷多项 x_n 使不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立

C. 对于任给的 ε 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < c\varepsilon$ 成立, 其中 c 为正常数

D. 对于任给的 $m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{m}$ 成立

3. “函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界”是“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在”的 必要 条件.

4. “函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义”是“当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 有极限”的 无关 条件.

二、设 $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n=1, 2, \dots$

(1) 对 $\varepsilon_1=0.1, \varepsilon_2=0.03, \varepsilon_3=0.007$, 分别求出极限定义中相应的 N ;

(2) 是否对 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 找到相应的 N , 就可以证明 x_n 趋于 0?

(3) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$|x_n - 0| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{2}{\varepsilon}, \quad N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1.$$

(1) $\varepsilon_1 = 0.1, N = 21$

$\varepsilon_2 = 0.03, N = 67$

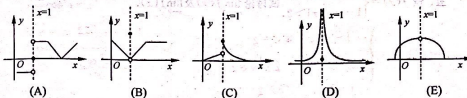
$\varepsilon_3 = 0.007, N = 286$

(2) 不可

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$ 成立, 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$,
当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 0| < \varepsilon$ 恒成立.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

三、观察下列 $f(x)$ 的图形, 请回答:



1. $f(x)$ 在 $x \rightarrow 1$ 时, 哪些是收敛的?

答: B, E

2. $f(x)$ 在 $x \rightarrow 1$ 时是否收敛, 与 $f(1)$ 的取值有无关系? 与 $f(x)$ 在区间 $[1.5, 3]$ 上的取值有无关系?

答: 无

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在可表现为哪几种情况?

答: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, 振荡

四、根据函数极限的定义证明:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 要使 } \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} - (-1) \right| = |x - 2| < \varepsilon.$$

只要取 $\delta = \varepsilon > 0$, 则当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} - (-1) \right| < \varepsilon \text{ 恒成立. 故 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 要使 } \left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{x^2} < \varepsilon,$$

只要 $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 取 $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$, 则当 $|x| > M$ 时,

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon \text{ 恒成立.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1.$$



扫描全能王 创建

五、设 $f(x) = \begin{cases} x-3, & |x| \leq 2, \\ 1-x, & |x| > 2, \end{cases}$ 试讨论 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < -2 \\ x-3, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1-x, & x > 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (1-x) = 3, \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x-3) = -5, \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &\text{不存在.} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = -1, \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= -1. \end{aligned}$$

六、证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &\neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}, \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} &\text{不存在.} \end{aligned}$$

七、按极限定义证明:
1. 若 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 则 $|x_n| \rightarrow |a| (n \rightarrow \infty)$, 并举例说明反之未必成立.

$$\begin{aligned} \because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= a \\ \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon. \\ \text{而 } |x_n - a| < \varepsilon &\Rightarrow |x_n| - |a| < \varepsilon. \\ \text{即对同样的 } \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时,} \\ \text{总有 } |x_n| - |a| < \varepsilon. \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| &= |a|. \\ \text{反之不成立. 如 } |(-1)^n| &\rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \\ \text{但 } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n &\text{不存在.} \end{aligned}$$

2. 若 $|x_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

$$\begin{aligned} \because \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| &= 0 \\ \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时} \\ |x_n| - 0 &< \varepsilon. \\ \text{而 } |x_n - 0| &= |x_n| < \varepsilon. \\ \text{即对同样的 } \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时,} \\ \text{总有 } |x_n - 0| &< \varepsilon. \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \end{aligned}$$

