自测题二

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ 且 $\varphi(a)=2$,则 $f'(a)=$(C).

A. 2　B. a　C. 0　D. 不存在

2. 设 $f(x)$ 可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$.若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则必有(A).

A. $f(0)=0$　B. $f'(0)=0$

C. $f(0)+f'(0)=0$　D. $f(0)-f'(0)=0$

3. 设 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续,则"$\varphi(1)=0$"是"$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导"的(A).

A. 充要条件　B. 必要非充分条件　C. 充分非必要条件　D. 无关条件

4. 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,则 $f'(0)=$(A).

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　B. $(-1)^n(n-1)!$

C. $(-1)^{n-1}n!$　D. $(-1)^n n!$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导,则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 在 $x=x_0$ 处(D).

A. 一定都有导数　B. 恰有一个有导数

C. 至少有一个有导数　D. 都没有导数

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. $(a^x)^{(n)}=$ $a^x\cdot(\ln a)^n$ $(a>0,a\neq1)$.

2. $(\sin kx)^{(n)}=$ $k^n\cdot\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

3. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=$ $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

4. 若 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,则 $f^{(n)}(x)=$ $\frac{(-1)^n\cdot 2n!}{(1+x)^{n+1}}$

$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(\frac{2}{1+x}-1\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot 2n!}{(1+x)^{n+1}}$

5. 设 $f(x)$ 可导,若 $y=f(x^2)$,则 $dy=$ $2x f'(x^2)dx$

三、计算题(每小题 10 分,共 40 分)

1. 设 $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos x\ln\tan\frac{x}{2}$,求 y'.

$y=(1-\cos x)\cdot\ln\tan\frac{x}{2}$

$y'=\sin x\cdot\ln\tan\frac{x}{2}+(1-\cos x)\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}$

$=\sin x\cdot\ln\tan\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\sin x\cdot\ln\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}$.

2. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 f 可微,求 dy.

$dy=y'dx$

$=\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)\right]dx$.

3. 设 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$,求 y'.

$\ln y=\sin\frac{1}{x}\ln x$

$\frac{1}{y}\cdot y'=(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}\cdot\ln x+(\sin\frac{1}{x})\cdot(\frac{1}{x})$

$y'=x^{\sin\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\ln x\right]$.

4. 设 $y=(x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}}$,求 y'.

$\ln|y|=2\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+3|+\frac{4}{3}\ln|3-2x^2|-\frac{1}{3}\ln(1+x^2)$

$-\frac{1}{3}\ln|5-3x^3|$.

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{x-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{-4x}{3-2x^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{-9x^2}{5-3x^3}$

$y'=(x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}}\left[\frac{2}{x-2}+\frac{2}{3(x+3)}-\frac{16x}{3(3-2x^2)}-\frac{2x}{3(1+x^2)}+\frac{3x^2}{5-3x^3}\right]$.

班级__________ 学号__________ 姓名__________

四、解答题(每小题 10 分,共 30 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$,求 $f'(2)$.

由 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 知 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0=f(2)$

$\therefore f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3.$

2. 设 $f(x)=x\sin x\sin 3x\sin 5x\sin 7x$,求 $f''(0)$.

令 $g(x)=\sin x\sin 3x\sin 5x\sin 7x$

则 $f(x)=x\cdot g(x)$

$f'(x)=g(x)+x\cdot g'(x)$

$f''(x)=g'(x)+g'(x)+x\cdot g''(x)$

$=2g'(x)+xg''(x)$

$\therefore f''(0)=2g'(0)+0=2g'(0)$

而 $g'(x)=\cos x\cdot\sin 3x\cdot\sin 5x\cdot\sin 7x$

$+3\sin x\cdot\cos 3x\cdot\sin 5x\cdot\sin 7x$

$+5\sin x\cdot\sin 3x\cdot\cos 5x\cdot\sin 7x$

$+7\sin x\cdot\sin 3x\cdot\sin 5x\cdot\cos 7x$

$\therefore g'(0)=0$

$\therefore f''(0)=0.$

班级__________ 学号__________ 姓名__________

3. 已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数,对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x+y)=f(x)f(y)$,且 $f'(0)=1$,试证:$f'(x)=f(x)$.

$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$, $x\neq 0$

由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

$\therefore f(x)=f(x+0)=f(x)\cdot f(0)$

$\therefore f(0)=1$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)\cdot 1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=f(x)\cdot f'(0)=f(x).$