第六章　振　动

物体在一定位置附近作重复的往返运动称为机械振动。如：钟摆的摆动、琴弦的振动、心脏的跳动、机器运转时的振动等。

广义地说，任何一个物理量随时间的周期性变化都可以称为振动。如：交变电流、电磁震荡等。

最简单、最基本的周期性振动是简谐振动，因为：

(1) 它出现在许多物理现象中；

(2) 任何复杂的振动形式都可分解为若干简谐振动之和。

振动与波动的关系：

振动是产生波动的根源，而波动是振动的传播。

主要内容

（1） 简谐振动的运动学方程和特征量；

（2） 简谐振动的矢量表示法；

（3） 简谐振动的动力学方程；

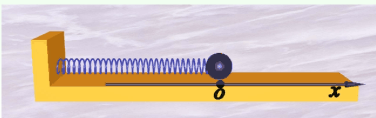
（4） 简谐振动的能量；

（5） 简谐振动的合成；

（6） 阻尼振动、受迫振动、共振。

§6-1　简谐振动的运动学

1、弹簧振子：



弹簧质量不计，小球与水平面间无摩擦。

小球在弹性力和惯性作用下运动

—— 无阻尼自由振动 —— 简谐振动。

2、简谐振动的运动方程：

以时间的余弦（或正弦）函数表示位移（或角位移）的运动称为简谐振动。

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

若令：$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ，则上式也可写成：

$$x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

3、简谐振动的特征量：

(1) 由系统性质决定的特征量：

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos(\omega t+\varphi+2\pi) = A\cos\left[\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi\right]$$

周期T： 完成一次完全振动所需时间。

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad (单位：s)$$

频率ν： 单位时间内完成完全振动的次数。

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}} \qquad (单位：Hz = 1/s)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

简谐振动的周期T和频率ν决定于ω。

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

ω称为圆频率或角频率。

简谐振动的运动方程也可写成：

$$\boxed{x = A\cos(2\pi\nu t+\varphi)}$$

或

$$\boxed{x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)}$$

(2) 由初始条件决定的特征量：

振幅A：

振动物体离开平衡点最大位移的绝对值。

相位$(\omega t+\varphi)$：

决定振动物体运动状态的重要物理量。

初相位 φ：

$t=0$ 时的相位。

4、简谐振动的速度和加速度：

速度 $$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) = \upsilon_m\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

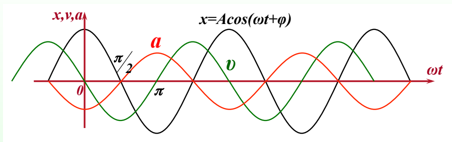
比x超前$\pi/2$

加速度 $$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

$$= a_m\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

比x超前π

$\upsilon_m = A\omega$ 速度振幅 $\qquad a_m = A\omega^2$ 加速度振幅



5、由初始条件确定振幅A和初相位φ：

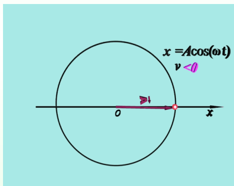
设 $t=0$ 时，$x = x_0$、$\upsilon = \upsilon_0$，

则：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} \boxed{A = \sqrt{x_0^2+\dfrac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = -\dfrac{\upsilon_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

6、简谐振动的矢量表示法：

设一质点绕圆心O作半径为A、角速度为ω的匀速圆周运动。$t=0$时，位矢A与x轴夹角为φ。t时刻A与x轴夹角（相角）为$\omega t+\varphi$则该质点在轴上的投影的坐标：



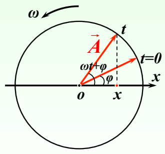
$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

即为简谐振动的运动方程。

$\vec{A}$ 振幅矢量或旋转矢量

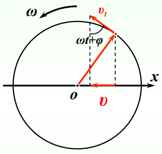
$\vec{A}$ 的端点轨迹称为参考圆

位移、速度、加速度的参考圆表示法



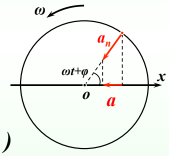
$x_0 = A\cos\varphi$

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$



$v_t = A\omega$

$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

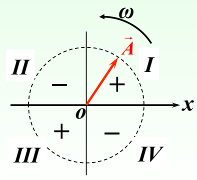


$a_n = A\omega^2$

$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$

由矢量表示法确定初相位:

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}}$$



$\tan\varphi > 0$ 时，φ在I、III象限内。

- 当$x_0>0$或$v_0<0$时，φ在第I象限内；
- 当$x_0<0$或$v_0>0$时，　φ在第III象限内。

$\tan\varphi < 0$ 时，φ在II、IV象限内。

- 当$x_0<0$或$v_0<0$时，φ在第II象限内；
- 当$x_0>0$或$v_0>0$时，　φ在第IV象限内。

7、两同频简谐振动间的相位差:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

相位差：$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) = \varphi_2-\varphi_1}$

两同频简谐振动的相位差等于它们的初相位之差。

$\Delta\varphi > 0$	$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi < 0$	$\Delta\varphi = \pi$
x_2超前于x_1	x_2、x_1同相位	x_2落后于x_1	x_2、x_1反相位

例6-1： 一质点沿x轴作简谐振动，$A=0.1m$，$T=2s$ 。$t=0$时$x_0=0.05m$，且$v_0>0$，求：(1) 质点的振动方程；(2) t=0.5s时质点的位置、速度和加速度；(3) 若某时刻质点在 $x=-0.05$m处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少?

(1) 设振动方程为：$x = A\cos(\omega t+\varphi)$　　方法一

$0.05 = 0.1\cos\varphi$　　$\cos\varphi = \frac{1}{2}$　　$\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$

$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

$v_0 = -A\omega\sin\varphi > 0$　　$\varphi < 0$　　$\varphi = -\frac{\pi}{3}$

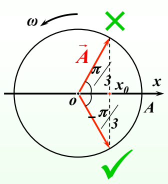
$\therefore\ x = 0.1\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\ \ m$

例6-1： 一质点沿x轴作简谐振动，$A=0.1m$，$T=2s$ 。$t=0$时$x_0=0.05m$，且$v_0>0$，求：(1) 质点的振动方程；(2) t=0.5s时质点的位置、速度和加速度；(3) 若某时刻质点在 $x=-0.05$m处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少?

(1) 设振动方程为：$x = A\cos(\omega t+\varphi)$　　方法二

已知：$A=0.1m$，$\omega = {2\pi}/{T} = \pi\ {rad}/{s}$，

$t=0$时，$x_0 = {A}/{2}$，$v_0 > 0$

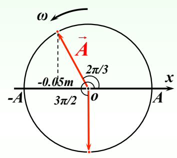


由旋转矢量图：$\varphi = -{\pi}/{3}$

$\therefore\ x = 0.1\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\ \ m$

(3) 若某时刻质点在 $x=-0.05m$处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间是多少?

$x=-0.05m$，$v<0$ 时，$\varphi_1 = 2\pi/3$



第一次回到平衡位置时：$\varphi_2 = 3\pi/2$

两位置相角之差：

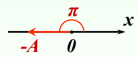
$$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

旋转矢量转过$\Delta\varphi$需时：

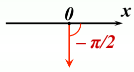
$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5\pi}{6}\times\frac{1}{\pi} = \frac{5}{6}\ \ (s)$$

习题6-13：沿x轴做简谐振动的弹簧振子，振幅为A，周期为T。振动方程用余弦函数表示。$t=0$时，振子处于下列状态。求振动方程。

振动方程 $\boxed{x = A\cos(2\pi\frac{t}{T}+\varphi)}$

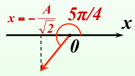


(1) $x_0=-A$：　$\varphi=\pi$



(2) 过平衡位置向正方向运动：$\varphi=-\frac{\pi}{2}$

(3) 过$x=A/2$ 处向负方向运动：$\varphi=\frac{\pi}{3}$



(4) 过 $x=-\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正方向运动：

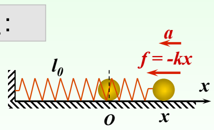
$\varphi=\frac{5\pi}{4}$ 或 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$

§6-2 简谐振动的动力学

1、简谐振动的动力学方程：

由胡克定律和牛顿第二定律：

$f=-kx=ma$



$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

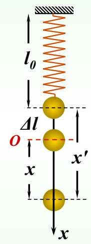
$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$　式中：$\boxed{\omega^2=\frac{k}{m}}$

此微分方程的解为：

$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$　(ω即为圆频率)

弹簧振子的周期和频率：$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$

例6-2：一劲度系数为k的轻弹簧上端固定，下端挂一质量为m的物体，使物体上下振动。证明该物体作简谐振动。



$$mg-kx'=m\frac{d^2x'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+\omega^2x'-g=0\qquad \omega^2=\frac{k}{m}$$

当物体处在平衡位置时：

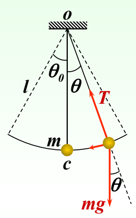
$$mg=k\Delta l=k(x'-x)$$

$$g=\omega^2(x'-x)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$$

可见：取平衡位置为坐标原点时，该物体作简谐振动。

2、单摆（数学摆）：



(1) $l>>d$（小球直径）；

(2) 忽略所有摩擦力的作用。

重力产生的恢复力矩：

$$M=-mgl\sin\theta$$

“–”号表示力矩与角位移方向相反。

由转动定理：$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\sin\theta$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$　单摆的动力学方程

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$　单摆的动力学方程

当单摆做小角度摆动（$\theta<5°$）时：　$\sin\theta\approx\theta$

$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0}$　$\boxed{\omega^2=\frac{g}{l}}$

方程的解：$\boxed{\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi)}$

可见：当摆角很小时，单摆的运动近似为简谐振动。

振动的周期：$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

单摆振动周期与摆锤质量无关，只和摆线长度有关。

例6-3：单摆，l=0.8m，m=0.30kg．向右拉离平衡位置15°后自由释放（设仍做简谐振动）．求：(1) ω、T；(2) θ_0、 φ、振动方程；(3) ω_{max}；(4) 绳中最大张力T_{max}．

(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = 3.5 rad/s$， $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1.795 s$

(2) 由旋转矢量图：$\varphi=0$， $\theta_0 = 15° = 0.262\ rad$

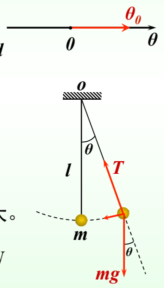
$\theta = 0.262 \cos 3.5t \quad (rad)$

(3) $\omega_{max} = \theta_0\,\omega = 0.917 \quad (rad/s)$

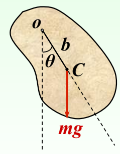
(4) 张力 $T = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{l}$

当$\theta=0$，即单摆处于平衡位置时，张力最大。

$$T_{max} = mg + m\frac{v_{max}^2}{l} = mg + ml\omega_{max}^2 = 3.14 N$$



3、复摆（物理摆）：



重力产生的恢复力矩：

$$M = -mgb\sin\theta$$

由转动定理，并考虑小角度摆动（θ<5°）：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\sin\theta \approx -mgb\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0} \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{mbg}{I}}$$

当摆角很小时，复摆的运动近似为简谐振动。

复摆：$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mbg}}$

单摆： $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$

$l_0 = \dfrac{I}{mb}$ 等值摆长

§6-3 简 谐 振 动 的 能 量

以弹簧振子为例：

任意时刻 t：

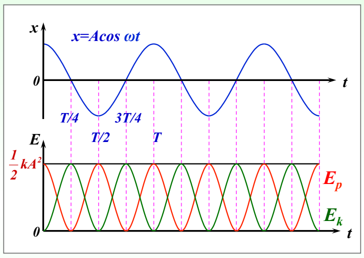
弹性势能： $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

动 能： $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$= \dfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

总机械能：

$$\boxed{E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}mv_m^2}$$



(1) E_k、E_p周期性变化的频率为简谐振动的两倍。

(2) 总机械能 $E = E_k + E_p$ = 常量 。

(3) $\overline{E_k} = \overline{E_p} = \dfrac{1}{2}E$

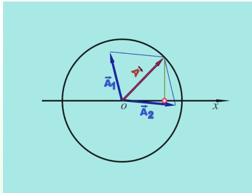
§6-4　同方向简谐振动的合成

1、同方向、同频率简谐振动的合成：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

合位移：$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

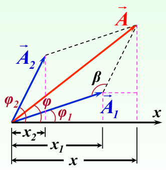


合振动仍为简谐振动：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

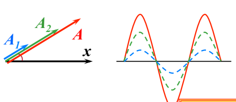
由 $t = 0$ 时的旋转矢量图：

$$\begin{cases} \boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \\ \boxed{\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}} \end{cases}$$



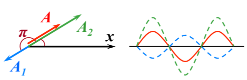
合振动振幅决定于**分振动振幅**和两分振动**相位差**。

(1) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$



$A_{max} = A_1 + A_2$　**同相**

(2) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$



$A_{min} = |A_1 - A_2|$　**反相**

2、同方向、不同频率简谐振动的合成：

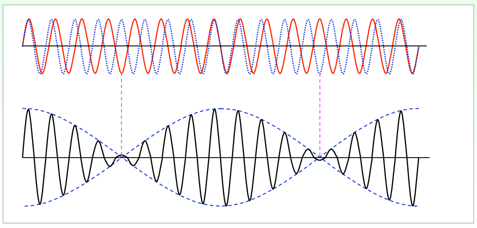
当两个分振动频率不同时，$\Delta\varphi$ 将不断变化。所以合振动振幅也将不断变化。此时，合振动不是简谐振动。

设：
$$x_1 = A\cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

合振动：
$$x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$
$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)$$

若将 $\left|2A\cos(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\right|$ 作为合振动的振幅，则：

合振动振幅在 $0 \sim 2A$ 之间变化



因两个分振动频率不同而使合振动振幅时而加强，时而减弱的现象称为**拍**，合振动变化的频率称为**拍频**。

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

§6-5　相互垂直简谐振动的合成

1、同频率垂直简谐振动的合成：

设两个同频率简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

消去 t 后得轨迹方程：

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}$$

合振动轨迹为椭圆。

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

- $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$ $\boxed{y=\frac{A_2}{A_1}x}$ I、III象限中直线
- $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$ $\boxed{y=-\frac{A_2}{A_1}x}$ II、IV象限中直线
- $\varphi_2-\varphi_1=\pm(k+\frac{1}{2})\pi$ $\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1}$ 正椭圆
- 其他情况：斜椭圆

2、不同频率垂直简谐振动的合成：

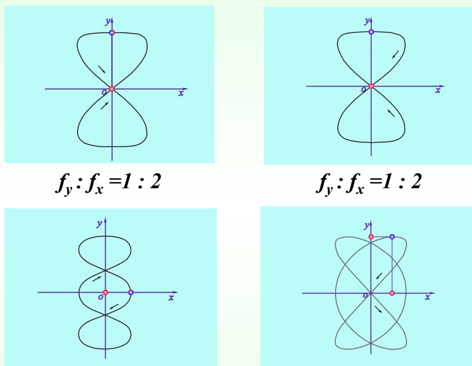
设两个频率不同的简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1\cos\omega_1 t \\ y = A_2\cos(\omega_2 t+\delta) \end{cases}$$

则相位差：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(\omega_2-\omega_1)t+\delta$$

当两个分振动频率ω_1、ω_2成简单整数比时，合振动轨迹是稳定的封闭曲线。称为李萨如图线。



$f_y:f_x=1:2$ $f_y:f_x=1:2$

$f_y:f_x=1:3$ $f_y:f_x=2:3$

§6-6 阻 尼 振 动

振动系统在阻尼力作用下，振幅（能量）不断减小的振动称为阻尼振动。

阻尼的两种形式：摩擦阻尼、辐射阻尼。

振动物体速度不太大时，阻尼力与速度成正比。

$$f=-\gamma v=-\gamma\frac{dx}{dt}$$ γ：阻力系数

动力学方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx$$

令：$\boxed{\omega_0^2=\frac{k}{m}}$ ω_0:固有圆频率；$\boxed{\beta=\frac{\gamma}{2m}}$ 阻尼因数

阻尼振动方程:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

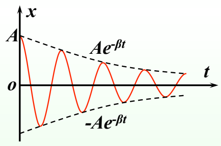
(1) 欠阻尼状态（阻尼较小）： $\beta<\omega_0$

$$\boxed{x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega' t+\varphi)}$$

其中:

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}<\omega_0$$

$$\therefore\ T=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}>T_0$$



阻尼越大，振幅衰减越快，周期越长。

(2) 过阻尼状态（阻尼较大）： $\beta>\omega_0$

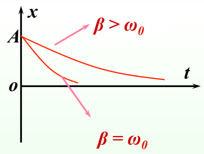
$$\boxed{x=C_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}}$$

振动不会发生，物体缓慢回到平衡位置。

(3) 临界阻尼状态: $\beta=\omega_0$

$$\boxed{x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}}$$

振动不会发生，物体很快回到平衡位置。



阻尼的应用：阻尼天平、灵敏检流计 。

§6-7 受迫振动、共振

阻尼的存在使振幅减小，若对系统施加一持续的周期性外力，则系统将做振幅不变的振动—受迫振动。

设周期性外力: $F(t)=F_0\cos\omega t$

则: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx+F_0\cos\omega t$

令: $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, $2\beta=\frac{\gamma}{m}$, $f_0=\frac{F_0}{m}$

得: $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t}$

解: $\boxed{x=A_0e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi')+A\cos(\omega t+\varphi)}$

即：受迫振动为阻尼振动和“简谐振动”之和。

$$\boxed{x=A_0e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi')+A\cos(\omega t+\varphi)}$$

(1) 经足够长时间，受迫振动为稳定振动，其周期即为外力的周期。

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$$

(2) 稳定受迫振动与周期性外力有一相位差 φ 。

(3) $\boxed{A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)+4\beta^2\omega^2}},\quad \tan\varphi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$

位移共振:

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)+4\beta^2\omega^2}}$$

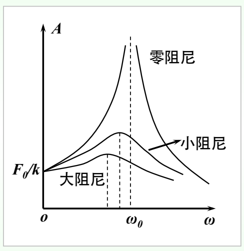
令: $\frac{dA}{d\omega}=0$

得：当周期性外力圆频率为

$$\boxed{\omega_m=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

时，振幅有最大值:

$$\boxed{A_m=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$



当: $\beta\to0$时，$\omega_m\to\omega_0$，$A_m\to\infty$ 。