第9章 静电场中的导体和电介质

静电场+ → 导　体 ⟹ 自由电荷重新分布 → 产生附加电场

静电场+ → 电介质 ⟹ 产生极化电荷 → 产生附加电场

空间电场分布：$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'}$

$\vec{E}_0$：外电场（原来的电场）；　$\vec{E}'$：附加电场。

主要内容：

(1) 导体的静电平衡条件；

(2) 电介质的极化、有电介质时的高斯定理；

(3) 电容和电容器；

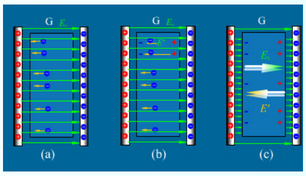
(4) 电场的能量。

---

§9-1　静电场中的导体

1、导体的静电平衡条件：

导体不带电或不受外电场作用时，因电子的无规则热运动，导体内任一体积内无净电荷—电中性。



(a) 在外电场E_0作用下，电子逆电场方向运动；

(b) 导体表面出现感应电荷，导体内产生附加电场E'；

(c) 外电场与附加场等值而反向时，电荷运动停止，导体处于静电平衡状态。

导体内：$\boxed{E=E_0-E'=0}$

导体的静电平衡条件：

(a) 导体内电场强度处处为零；

(b) 导体是个等势体，导体表面为等势面；

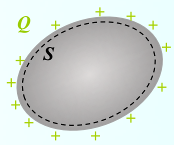
(c) 导体表面场强处处与导体表面正交。

2、导体上电荷的分布：

(1) 实心导体：

导体内任取高斯面。

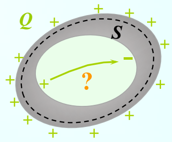
$\because\ \vec{E}=0,\ \therefore\ \sum q_{内}=0$



(2) 空腔导体（腔内无电荷）：

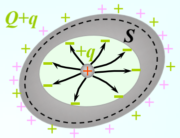
导体内任取高斯面，则：$\sum q_{内}=0$

内表面上也不可能有等量异号电荷，否则：$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}\neq 0$



与导体是等势体的结论不符。

(3) 空腔导体（腔内有电荷）：



导体内、外表面间任取高斯面。

$\because\ \vec{E}=0$，$\therefore\ \sum q_{内}=0$

空腔内表面感应出电量 $-q$，而外表面电量为$Q+q$。

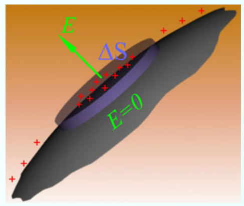
结论：导体静电平衡时，电荷只分布在表面上。

导体表面电荷面密度与表面曲率半径的关系：

$$\boxed{\sigma\propto\frac{1}{\rho}}\qquad \text{（近似）}$$

3、导体表面外附近的场强：

在导体表面取柱状高斯面，则其侧面和导体内底面的电通量为零。



$$E\Delta S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S$$

即：$\boxed{E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

$\because E\propto\sigma\propto\dfrac{1}{\rho}$，所以：导体表面曲率半径小的地方，电场强度大。

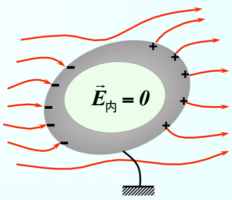
4、静电屏蔽：

利用空腔导体可消除腔内、腔外电场的相互影响。

(1) 对腔外电场的屏蔽：

由静电平衡条件，导体内和导体内表面均无电荷。

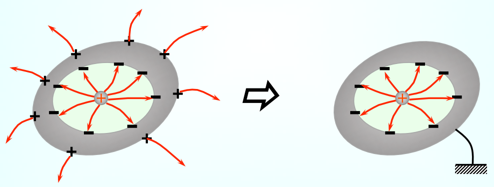
$$\therefore\quad \vec{E}_{内}=0$$



但外电场变化时，将使腔内电势发生变化，可通过“接地”解决。

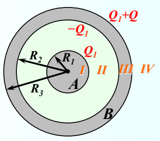
(2) 对腔内电场的屏蔽：

腔内电荷q在腔内表面感应出电荷$-q$，同时外表面感应出电荷$+q$。若将导体空腔接地，则腔外空间的电场、电势不受腔内电场的影响。

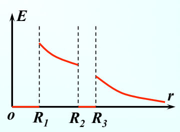


例9-1：半径R_1，带电Q_1的金属球A，外面有一内、外半径分别为R_2、R_3，带电Q的同心球壳B。求：*(1)*电场的分布；*(2)*球与球壳间的电势差。

(1) 电场分布：



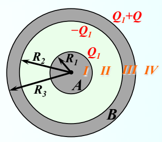
$$\begin{cases} E_I=0 & (r<R_1)\\ E_{II}=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1<r<R_2)\\ E_{III}=0 & (R_2<r<R_3)\\ E_{IV}=\dfrac{Q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R_3)\end{cases}$$



电场分布不连续。

例9-1：半径R_1，带电Q_1的金属球A，外面有一内、外半径分别为R_2、R_3，带电Q的同心球壳B。求：*(1)*电场的分布；*(2)*球与球壳间的电势差。

*(2)*球与球壳间的电势差。



由场势法：

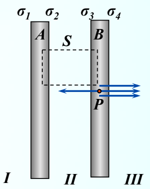
$$U_{AB}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_{II}\cdot d\vec{r}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

例9-2：面积均为S的两块大金属平板 A、B平行放置，A带电Q，B不带电，求：静电平衡时A、B板上电荷分布及周围电场分布。（忽略边缘效应）

由电荷守恒：
$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{Q}{S} \quad ❶$$
$$\sigma_3+\sigma_4=0 \quad ❷$$

作高斯面S，得：
$$\sigma_2+\sigma_3=0 \quad ❸$$

对P点：
$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

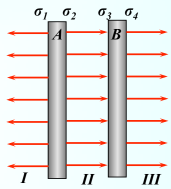


例9-2：面积均为S的两块大金属平板 A、B平行放置，A带电Q，B不带电，求：静电平衡时A、B板上电荷分布及周围电场分布。（忽略边缘效应）

由电荷守恒：
$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{Q}{S} \quad ❶$$
$$\sigma_3+\sigma_4=0 \quad ❷$$

作高斯面S，得：
$$\sigma_2+\sigma_3=0 \quad ❸$$

对P点：
$$\sigma_1-\sigma_4=0 \quad ❹$$



$$\Rightarrow \begin{cases}\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\dfrac{Q}{2S}\\ \sigma_3=-\dfrac{Q}{2S}\end{cases} \qquad \begin{cases}E_I=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\text{（向左）}\\ E_{II}=E_{III}=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\text{（向右）}\end{cases}$$

§9-2　电容和电容器

1、孤立导体的电容：

一导体周围无其他导体、电介质、带电体时，该导体称为孤立导体。

孤立导体的电容：

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}} \qquad \text{单位：法拉} \quad F=\frac{C}{V}$$

如：半径为R，带电量为Q的球形导体的电容为：

$$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$$

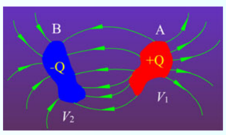
C与Q、U无关，只决定于导体本身性质。

2、电容器的电容：

带等量异号电荷的两个导体（极板）组成的系统称为电容器。

电容器的电容：

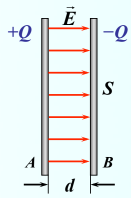
$$\boxed{C=\frac{Q}{U_A-U_B}}$$



- 当两极板之一移到无穷远时，$C=Q/U$即为孤立导体的电容。
- C取决于电容器的结构及周围电介质的电学性质。

(1) 平行板电容器：

当两极板间的距离远小于极板的线度时，极板间电场可近似看作匀强电场。



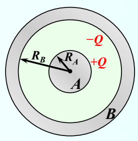
$$U_A-U_B=Ed=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}d$$

所以：

$$\boxed{C_{平}=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

(2) 球形电容器：

球形电容器的两极板由球形导体 A 和同心球壳 B 组成。



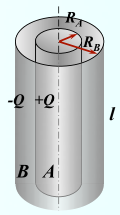
$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)=\frac{Q(R_B-R_A)}{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}$$

所以：
$$\boxed{C_{球}=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{(R_B-R_A)}}$$

若 $d=R_B-R_A<<R_A$、R_B，则：$C\approx\frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

(3) 圆柱形电容器：

当 $l>>R_B-R_A$ 时：



$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

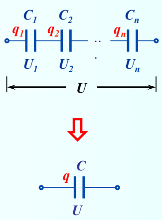
所以：
$$\boxed{C_{柱}=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}}$$

若 $d=R_B-R_A<<R_A$、R_B，则：

$$\ln\frac{R_B}{R_A}=\ln\left(1+\frac{d}{R_A}\right)\approx\frac{d}{R_A}\quad\Rightarrow\quad C\approx\frac{2\pi\varepsilon_0 l R_A}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

3、电容器的串联和并联：

(1) 串联：
$$\begin{cases}q_1=q_2=\cdots=q_n=q\\ U_1+U_2+\cdots+U_n=U\end{cases}$$

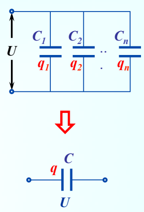


得：
$$\begin{cases}\boxed{\frac{1}{C}=\frac{U}{q}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}}\\ U_1:U_2:\cdots:U_n=\frac{1}{C_1}:\frac{1}{C_2}:\cdots:\frac{1}{C_n}\end{cases}$$

两个电容器串联时：
$$\boxed{C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2},\quad U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}U,\quad U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}U}$$

➢ 电容器串联时，等值电容变小，但耐压增大。

(2) 并联：
$$\begin{cases}U_1=U_2=\cdots=U_n=U\\ q_1+q_2+\cdots+q_n=q\end{cases}$$



得：
$$\begin{cases}\boxed{C=\frac{q}{U}=C_1+C_2+\cdots+C_n}\\ q_1:q_2:\cdots:q_n=C_1:C_2:\cdots:C_n\end{cases}$$

两个电容器并联时：
$$\boxed{C=C_1+C_2,\quad q_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}q,\quad q_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}q}$$

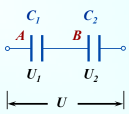
➢ 电容器并联时，等值电容变大，耐压与耐压值最小的电容器相等。

例9-3： A、B 两电容器参数分别为 $200pF/500V$，$300pF/900V$，将它们串联。求：(1)等值电容 C；(2)加上 $1000V$ 电压时，是否会被击穿？(3)此电容器组的最大耐压值。

(1)等值电容：
$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=120pF$$

(2) $U_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}U=600V$，$U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}U=400V$　　击穿！

(3) 取 $U_1=U_{1max}=500\ V$，则：



$$U_2=\frac{C_1}{C_2}U_{1max}=333V$$

$$\therefore\ U_{max}=U_{1max}+U_2=833V$$

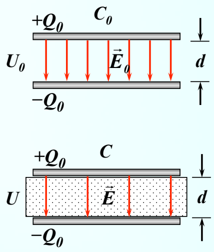
§9-3　静电场中的电介质

1、电介质对电场的影响：

空气平行板电容器的电容为C_0，极板充电至Q_0，极板间电势差为U_0。

插入介质板（充满）后，保持极板上电量不变，极板间电势差为U。

则：$U < U_0$，即：$\varepsilon_r = \dfrac{U_0}{U} > 1$

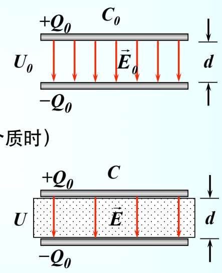


ε_r：相对介电常数（相对电容率），为无量纲纯数。

$$\varepsilon_r = \frac{U_0}{U} > 1$$ （充满电介质时）

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\varepsilon_r d} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\varepsilon_r Q_0}{U_0} = \varepsilon_r C_0$$ （充满电介质时）



可见：当空气（真空）电容器极板间充满电介质后，极板间电场强度减小、电势差下降、电容增大。

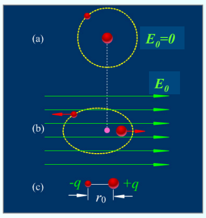
2、电介质的极化：

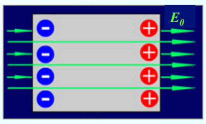
(1) 无极分子的位移极化：

无极分子：无外电场时，分子正、负电荷中心重合。

在外电场作用下，分子正、负电荷中心产生位移，形成取向外电场方向的分子电矩，使介质表面出现极化电荷（束缚电荷）。极化电荷产生的附加场方向与外电场方向相反。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad E = E_0 - E' < E_0$$

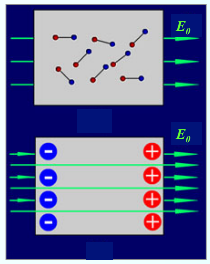




(2) 有极分子的取向极化：

有极分子：无外电场时，分子正、负电荷中心不重合。

在外电场作用下，分子电矩受外电场力矩作用而取向外电场方向，使介质表面出现极化电荷（束缚电荷）。附加电场方向仍与外电场方向相反。



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad E = E_0 - E' < E_0$$

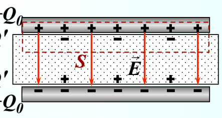
讨论：

- 取向极化只发生在有极分子电介质中，而位移极化则发生在任何电介质中。通常，取向极化效应 >> 位移极化效应，在有极分子电介质中，可不计位移极化。但在高频电场作用下，位移极化效应可大于取向极化效应。
- 两种极化产生的宏观效果完全相同，在实际问题中，常不加以区别。

3、有电介质时的高斯定理：以平行板电容器为例

取图示高斯面S，则：

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_0 - Q')$$



$$\because \quad E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Q_0：自由电荷

Q'：束缚电荷

$$\therefore \quad \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES = \frac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

即：$$\oint\!\!\oint \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_0$$

$$\oint\!\!\oint \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

定义：电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$　　单位：C/m^2

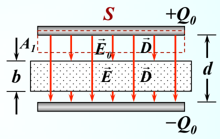
有电介质时的高斯定理：

$$\oint\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$$　　Q_0：自由电荷

- 引入电位移矢量的好处是无须知道束缚电荷的分布也可以求电场；
- 电位移矢量是一个辅助矢量，电场的基本性质仍由电场强度矢量描述。

例题9-5：一平行板电容器：$S = 100cm^2$，$d = 1.0cm$，充电到极板间电压$U_0 = 100V$，将电源断开后插入厚$b = 0.5cm$，$\varepsilon_r = 7$的电介质板，求：(1)电容器内空隙间和电介质板中的场强；(2)插入介质板后，极板间的电势差；(3)插入介质板后的电容。

空气平行板电容器：



$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 8.85\ pF$$

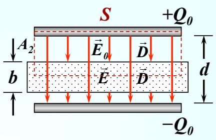
$$Q_0 = C_0 U_0 = 8.85 \times 10^{-10} C$$

(1) 空隙间：取高斯面A_1

$$\oint\!\!\oint_{A_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = DS = Q_0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{Q_0}{S}$$

$$E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} = 1.0 \times 10^4\ V/m$$

电介质板内：取高斯面A_2



$$\oint\!\!\oint_{A_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = DS = Q_0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{Q_0}{S}$$

（与空隙内相同！）

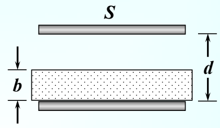
$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = 0.14 \times 10^4\ V/m$$

(2) 极板间电势差：

$$U = E_0(d - b) + Eb = 57V$$

插入电介质板后，电势差下降。

(3) 插入电介质板后的电容：



❶ 按定义：

$$C = \frac{Q_0}{U} = 15.5\ pF$$

❷ 看作两个电容器的串联：

介质板位置不影响电容的大小。

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d-b} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{b}}{\frac{\varepsilon_0 S}{d-b} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{b}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r d + b(1 - \varepsilon_r)} = 15.5\ pF$$

讨论：

❶ 若电介质充满电容器内部：

$$U = Ed = 14V$$

$$C = \frac{Q_0}{U} = 62\ pF$$

或：$C = \varepsilon_r C_0 = 62\ pF$

❷ 若插入厚度为$d/2$的金属板：

$$U = E_0 \frac{d}{2} = 50V$$

$$C = \frac{Q_0}{U} = 2C_0 = 17.7\ pF$$

§9-4 电场的能量

电荷之间存在电场力的相互作用。因此，使物体带电的过程（电场的建立过程）是外力克服电场力作功的过程。

由能量守恒与转化定律：

外力克服电场力所作的功＝带电系统的静电能。

（如：电容器的充电过程）

反过来，带电系统的静电能也可以转化为其它形式的能量。

（如：闪光灯内电容器的放电过程将电能转化为光的能量）

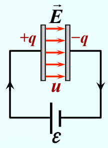
1、电容器的储能公式：

电容器的充电过程中，电源克服电场力作功将其它形式的能量（如：化学能）转化为电场能量。

t时刻，极板上电量为q，极板间电势差为u，电量dq由负极板移至正极板过程中电源作功为：

$$dA = udq = \frac{q}{C}dq$$

充电至Q时，电容器内电场的能量为：



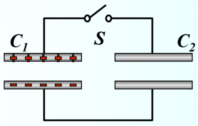
$$\boxed{W = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2}$$

称为电容器的储能公式。

例9-6：电容器$C_1 = 8\mu F$，充电到$U_0 = 120V$，移去电源，再将C_1与$C_2 = 4\mu F$相连接。求：(1) 电容器组的电压；(2) 接通开关前后系统的能量。

C_1充电后的电量：

$$Q_0 = C_1U_0 = 960\mu C$$

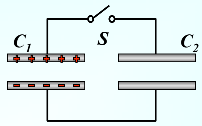


(1) C_1与C_2并联：

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}Q_0 = 640\mu C$$

$$\therefore \quad U = U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 80V$$

(2) 开关接通前C_1的能量：



$$W_0 = \frac{1}{2}C_1U_0^2 = 5.76\times 10^{-2}J$$

开关接通后系统的能量：

$$W_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 = 3.84\times 10^{-2}J$$

系统损失能量：

$$\Delta W = W_0 - W_1 = 1.92\times 10^{-2}J$$

损失的能量部分被导线电阻所消耗，部分以电磁波的形式被辐射出去。

2、电场的能量和能量密度：

近代物理学指出：电场能量的携带者是电场而非电荷。在非稳恒情况下，电场可以脱离电荷单独存在。

由电容器储能公式：

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}U^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{2d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2(Sd)$$

即：$\boxed{W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\cdot V}$　　V：电容器极板间体积。

对空气平行板电容器：

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot V}$$

电场的能量密度：单位体积内电场的能量。

$$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \quad (J/m^3)$$

上式对非均匀、非稳恒电场也成立。

当电场分布不均匀时：

$$\boxed{W = \iiint wdV = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 dV}$$

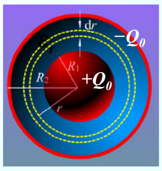
例9-7：球形电容器当电量为Q时所储存的能量。

球形电容器内的场强为： $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

取图示同心薄球壳为体积元：

$$dW=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2)^2}4\pi r^2 dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{dr}{r^2}$$

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



与 $W=\dfrac{Q^2}{2C}$ 比较得：

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

例：用电场能量的方法求空气圆柱形电容器的电容。

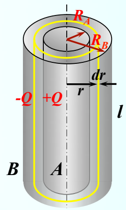
圆柱形电容器内的场强为： $E=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$

取图示同轴薄圆柱壳为体积元：

$$dW=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 r^2 l^2}2\pi r l\cdot dr$$

$$=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r}$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_A}{R_B}$$



与 $W=\dfrac{Q^2}{2C}$ 比较得： $C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$