

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 题号_____

§ 1.1 实数集与函数

一、选择、填空题：

1. 下列说法不正确的是 (C).

A. 区间(2, 97, 3, 03)和(0, 6)都是数3的一个邻域

B. 集合(2, 97, 3) \cup (3, 0, 03)和(0, 3) \cup (3, 6)都是数3的一个去心邻域

C. $U_{-}(3, 0, 03) \cup U_{+}(3, 0, 03) = U(3, 0, 03) \cup \{3\}$

D. 集合 $\{x | |x| > 3\}$ 和 $\{x | |x| > 3000\}$ 都是 ∞ 的一个邻域

2. 函数 $y = x - \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是 (C).

A. 有界函数

B. 递减函数

C. 奇函数

D. 周期函数

3. 若函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ 表示同一函数，则它们的定义域是 $[1, +\infty)$.

4. 函数 $y = \pi + \arctan \frac{x}{2}$ 的反函数是 $y = 2 \tan(\frac{y-\pi}{2})$, $\arctan \frac{x}{2} = y - \pi$

二、求下列函数的定义域： $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, $\frac{x}{2} = \tan(y - \pi)$

1. $y = \arccos(x-2)$.

$$-1 \leq x-2 \leq 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$1 \leq x \leq 3$$

$$\text{这变成 } [1, 3]$$

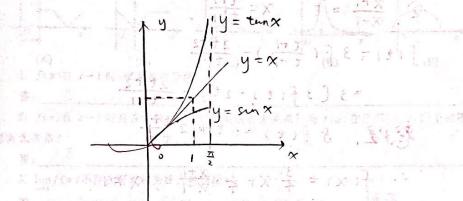
2. $y = \sqrt{1-2x} + \sqrt{e-(\frac{1-x}{2})^2}$.

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ (\frac{1-x}{2})^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ -1 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{这变成 } [-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$$

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 题号_____

三、试用函数的图形(画草图)表示不等式 $\sin x < x < \tan x$ 的几何意义。这个不等式成立的变量的范围是 _____.



四、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形。

$$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| \geq 1, \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0, \end{cases}$$

$$g[f(x)] = g(f(x)) = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$



班级_____ 学号_____ 姓名_____

五、1. 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3f(x) - 2x$, 求 $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{x+1}{x-1} &= t, \quad x = \frac{t+1}{t-1}, \\ f(t) &= 3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - \frac{2t+2}{t-1} \\ &= 3[3f(t) - 2t] - \frac{2t+2}{t+1} \end{aligned}$$

$$\text{整理, 得 } f(t) = 6t + 2 \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

$$\left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{4(x-1)} \right)$$

$$\text{例题 5. 两函数的和 } f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \text{ 和 } g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{x}$$

$$2. \text{ 设 } 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{3}{x}, \text{ 求 } f(x).$$

$$\text{由 } 2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{3}{x}, \quad (x \neq 0)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2f(x) - \frac{1}{x}f(x) = 2x + \frac{3}{x}, \\ &2f(x) - \frac{2}{x}f(x) = \frac{2}{x} + 3x, \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}, \quad (x \neq 0)$$

例题 6. 证明: 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

班级_____ 学号_____ 姓名_____

六、下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

$$1. y = e^{ax^2}, \quad \text{由 } y = e^u, u = v^2, v = \tan x$$

$$y = e^u, \quad u = v^2, \quad v = \tan x$$

$$2. y = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}}, \quad \text{由 } y = \sqrt{u}, u = \arcsin v, v = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arcsin v, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x+2}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x+2}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x+2}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x+2}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{x+2}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$



§1.2 极限的概念和运算法则(数列极限、函数极限的基本性质)

一、选择、填空题：

1. 下列四个数列收敛的是(B)。

A. $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

B. $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots$

C. $1, 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{4}{3}, \dots$

D. $\cos 0, \cos \pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \dots$

2. 下列与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 等价的叙述是(C,D)。(提示：可多选)

A. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立

B. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有无穷多项 x_n 使不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立

C. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < ce$ 成立, 其中 c 为正常数

D. 对于任给的 $m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{m}$ 成立

3. “函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界”是“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在”的(A)条件。

4. “函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义”是“当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 有极限”的(B)条件。

二、设 $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n=1, 2, \dots$.

(1) 对 $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.03$, $\epsilon_3 = 0.007$, 分别求出极限定义中相应的 N ;

(2) 是否对 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 找到相应的 N , 就可以证明 x_n 趋于 0?

(3) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$|x_n - 0| \leq \frac{2}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{2}{\epsilon}. \quad N = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil + 1.$$

(1) $\epsilon_1 = 0.1, N = 21$

$\epsilon_2 = 0.03, N = 67$

$\epsilon_3 = 0.007, N = 286$

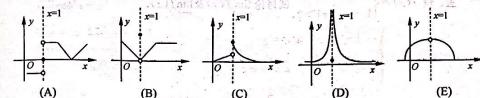
(2) 不可以

(3) $\forall \epsilon > 0$, 假设 $|x_n - 0| \leq \frac{2}{n} < \epsilon$ 成立, 则 $N = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil + 1$,

当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 0| < \epsilon$ 未必成立。

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

三、观察下列 $f(x)$ 的图形, 请回答:



1. $f(x)$ 在 $x=1$ 时, 哪些是收敛的?

答: (B), (E)

2. $f(x)$ 在 $x=1$ 时是否收敛, 与 $f(1)$ 的取值有无关系? 与 $f(x)$ 在区间 $[1.5, 3]$ 上的取值有无关系?

答: 无关

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在可表现为哪几种情况?

答: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, 无关

四、根据函数极限的定义证明:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = -1$.

$$\forall \epsilon > 0, \text{ 假设 } \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} - (-1) \right| = |x-2| < \epsilon.$$

取 $\delta = \epsilon > 0$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} - (-1) \right| < \epsilon \text{ 恒成立. 由 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = -1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

$$\forall \epsilon > 0, \text{ 假设 } \left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{x^2} < \epsilon,$$

设 $|x| > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, 取 $M = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} > 0$, 则当 $|x| > M$,

有 $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \epsilon$ 成立。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$$



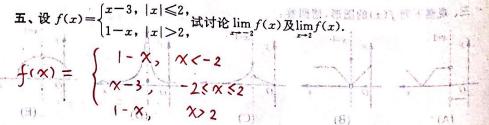
扫描全能王 创建

班级

学号

姓名

成绩



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-3) = -5, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) + f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-3) = -5, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \text{ 不存在.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1.$$

六、证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ 不存在.}$$

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

七、按极限定义证明: 若 $x_n \rightarrow a(n \rightarrow \infty)$, 则 $|x_n| \rightarrow |a|(n \rightarrow \infty)$.1. 若 $x_n \rightarrow a(n \rightarrow \infty)$, 则 $|x_n| \rightarrow |a|(n \rightarrow \infty)$, 并举例说明反之未必成立.

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时}, |x_n - a| < \varepsilon.$$

$$\text{而 } |x_n| - |a| < |x_n - a| < \varepsilon.$$

即对同样给定的 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时}.$

$$\text{总有 } |x_n| - |a| < \varepsilon < |a|. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

反之不成立. 如 $|-1|^n \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)$ 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ 不存在.}$$

2. 若 $|x_n| \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 则 $x_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0, \quad \text{即 } |x_n| \text{ 趋近于 0, 即 } x_n \text{ 趋近于 0.}$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时}$$

$$|x_n| - 0 < \varepsilon.$$

$$\text{而 } |x_n - 0| = |x_n| - 0 < \varepsilon.$$

即对同样给定的 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时}.$

$$\text{总有 } |x_n - 0| < \varepsilon. \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

