

第5章 流体力学

流体力学是人类在与自然界的斗争和生产实践中逐步发展起来的,中国古代就有大禹治水疏通江河的传说.物质通常可分为固体和流体,流体是指能够流动的物质,包括液体和气体.流体力学是研究流体的力学行为的科学,按照流体的运动方式又可分为流体静力学和流体动力学.通常,流体流动性的好坏、流体的密度和黏滞性等除了与流体的种类有关外,还与温度等因素有关(如沥青).最简单的流体模型称为理想流体,是指完全不可压缩和无黏滞(无内摩擦)的流体.本章首先讨论流体静力学,之后以理想流体为对象,从质量守恒和能量守恒出发,得到流体的连续性原理和伯努利方程等规律,最后简单讨论黏滞流体的力学规律.

5.1 流体静力学



► 5.1.1 静止流体中的压强

液体和气体都是具有流动性的连续介质,统称**流体**.流体内部不同部分之间存在着相互作用力,设想流体内有一面积元 ΔS ,面积元两边的流体之间存在着相互作用力.如果作用力沿面积元的表面有切向分量,那么,面积元两侧的相邻的流层之间将要发生滑动.对于静止流体,流体中的任何一个部分都处于静止状态.所以静止流体中任何一个面积元受到的作用力不存在切向分量,作用力必沿面积元的法线方向,且指向 ΔS ,是一种压力.面积元 ΔS 上所受压力的大小定义为该面积元上的平均压强,

$$\bar{p} = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (5.1-1)$$

当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时,平均压强的极限就是液体中该点处的压强,

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (5.1-2)$$

在 SI 制中,压强的单位是牛/米² (N/m²),称帕斯卡,简称帕,记作 Pa,量纲是 L⁻¹MT⁻².

通过流体中某一点,可以有不同的小面元,与这些小面元相应的压强之间有什么关系呢?设想在流体中某一点周围作一个三棱直角体元[图 5-1(a)],体元侧面受到的压强如图 5-1(b)所示.若流体密度为 ρ ,体元重 $\Delta G = \rho g \Delta V = \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$.因为体积元处于平衡状态,在 x, y 轴方向,有

$$p_l \Delta l \Delta z \sin \theta = p_x \Delta y \Delta z,$$

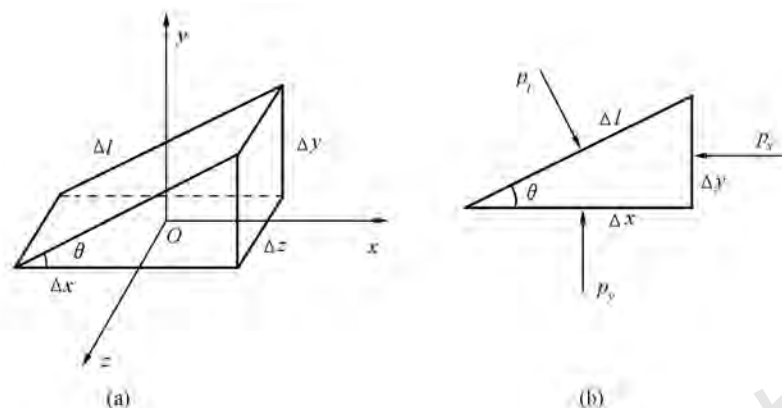


图 5-1 流体压强各向同性

$$p_y \Delta x \Delta z = p_l \Delta l \Delta z \cos \theta + \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z.$$

因为 $\Delta l \sin \theta = \Delta y$, $\Delta l \cos \theta = \Delta x$, 两式化简, 有

$$p_l = p_x, \quad p_y = p_l + \frac{1}{2} \rho g \Delta y.$$

当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$, 所以

$$p_x = p_y = p_l.$$

同理可证,

$$p_x = p_y = p_z.$$

因此, 静止流体中任一点处的压强有一定值, 与所取面元的方位无关, 它是各向同性的. 无论对于静止或流动的流体, 这结论都成立.

在静止流体中, 取一水平柱体(图 5-2). 设柱体截面积 ΔS 极小, 两端的压强分别为 p_A 和 p_B . 由于流体静止, 所以柱体两端的作用力平衡, 有 $p_A \Delta S = p_B \Delta S$, 即

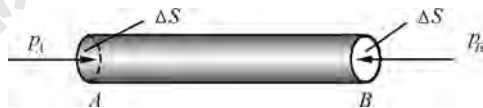


图 5-2 同一水平面上各点压强相等

$$p_A = p_B.$$

上式说明, 在静止流体中, 同一水平面上各点的压强相等.

如果上面取的柱体在竖直方向, 两端相距 h (图 5-3), 柱体上端受向下的压力 $p_A \Delta S$, 下端受向上的压力 $p_B \Delta S$, 柱体重 $\rho g \Delta V = \rho g \Delta S h$. 柱体静止时, 三个力平衡, 有

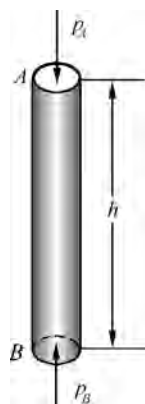
$$p_A \Delta S + \rho g \Delta S h = p_B \Delta S.$$

化简得

$$p_B - p_A = \rho g h. \quad (5.1-3)$$

就是说, 静止流体中同一竖直线上相距 h 的两点之间的压强差为 $\rho g h$. 如果液柱上端面为自由液面, 则 p_A 即为大气压强 p_0 , 于是液面下深度 h 处的压强为

$$p = p_0 + \rho g h. \quad (5.1-4)$$

图 5-3 竖直相距 h 两点的压强

► 5.1.2 帕斯卡原理

如果一个装有流体的容器上方用一个可以移动的轻活塞封住,活塞上除受大气压强 p_0 作用外,如果还附加一个压强 Δp (图 5-4),则活塞下深度 h 处的压强变为

$$p' = p_0 + \Delta p + \rho gh. \quad (5.1-5)$$

就是说,通过活塞作用在液体表面的压强 $p_0 + \Delta p$,被等量地传到流体中,这就是**帕斯卡原理**,即作用在密封容器中流体上的压强,被等量地传到流体中各处及器壁上.



图 5-4 帕斯卡原理

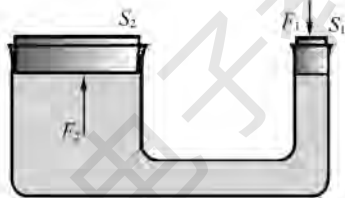


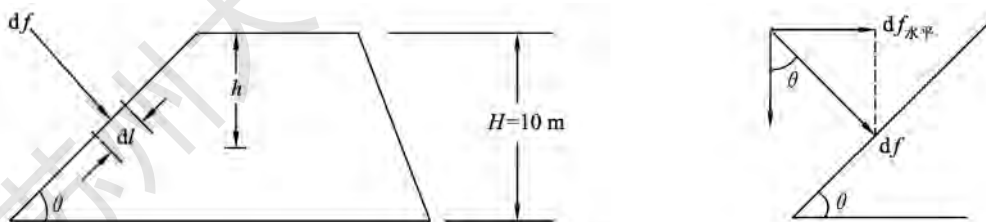
图 5-5 液压机原理

帕斯卡原理的一个重要应用是液压机(图 5-5). 一个 U 形容器的两端用活塞密封, 活塞面积分别是 S_1, S_2 . 若 S_1 上有作用力 F_1 , 在液体中产生压强 $p = \frac{F_1}{S_1}$. 此压强等量地传到另一端活塞 S_2 上, 产生一个向上的作用力 F_2 ,

$$F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1.$$

如果 $S_2 \gg S_1$, 则 $F_2 \gg F_1$. 所以, 可以通过液压机, 用较小的作用力产生巨大的动力.

例 5-1 一大坝迎水一面与水平方向夹角 θ , 水深 10 m. 每米长大坝受水的压力有多大?



例 5-1 图

解 设大坝横截面如图所示, 在迎水的坝面上取面元 dS . 面元长为 1 m, 宽 dl , 离水面距离 h , 则面元上受作用力 $df = p dS = \rho gh dl$.

此作用力与坝面垂直, 水平分量为 $df_{\text{水平}} = df \sin \theta = \rho gh dl \sin \theta$.

因为 $dl \sin \theta = dh$, 所以 $df_{\text{水平}} = \rho gh dh$.

大坝每米长度受水平压力为

$$f_{\text{水平}} = \int df_{\text{水平}} = \int_0^H \rho gh dh = \frac{1}{2} \rho g H^2.$$

代入数据得

$$f_{\text{水平}} = 4.9 \times 10^5 \text{ N}.$$

► 5.1.3 流体中的浮力 阿基米德原理

考虑一个形状不规则的物体浸没在流体中,物体表面将受到液体的压力.由于液体中的压强随着深度的增加而增加,因此,液体作用在物体下方的向上的压力要大于作用在物体上方的向下的压力,总的效果是有一个向上的作用力,这个作用力称作**浮力**.

如果浸没在流体中的物体与流体是同种物质,具有相同的密度,那么,物体将在流体中保持静止,也就是说,作用在物体上的浮力就等于物体所受的重力,即

$$F = \rho g V. \quad (5.1-6)$$

其中 ρ 是流体密度, V 是物体浸没在流体中的体积,也是物体排开液体的体积.上式表明,物体在流体中所受的浮力,相当于物体浸没在流体中同体积液体受的重力,而且只与流体密度、物体浸没在流体中的体积有关,与物体的材料和形状无关.因此,上式也是任何物体在流体中浮力的表达式.物体在流体中所受的浮力等于该物体排开同体积流体受的重力,这就是**阿基米德原理**.它是公元前3世纪由希腊的阿基米德(Archimedes)提出的.

5.2 流体的流动



► 5.2.1 理想流体

流体的运动往往是非常复杂的,为了便于讨论,有必要对流体作一些简化.

首先,假定流体是不可压缩的,即流体的密度是个常量.实际上任何流体都是可以压缩的.液体的可压缩性较小,可以近似地看作不可压缩.气体的可压缩性较大,流动性也大,只要有很小的压强差,就可以使气体迅速地流动起来,从而使各处的密度差减小到最小.因此,在研究气体流动时,也可以把气体近似地看作是**不可压缩的**.其次,假定流体内部的摩擦力为零,即流体流动中没有能量的损耗.实际的流体由于内部各部分的流速不同,存在内摩擦力,从而阻碍流体内部各部分之间的相对运动,这种性质称作**黏滞性**.有些流体,像水、酒精等,内摩擦力很小,气体的内摩擦力更小.我们把不可压缩的、无黏滞性的流体,称作**理想流体**.

流体的运动,可以看成是组成流体的所有质点的运动总和.在流体流动的过程中,流体流过空间某一点的速度,通常随时间而变化,是时间的函数.如果这个速度不随时间而变,那么,流体的这种流动称作**稳定流动**,或**定常流动**.因此,流体做稳定流动时,虽然空间各点的流速各不相同,但流速的空间分布是不随时间变化的.流速的空间分布称**流速场**.

► 5.2.2 流线和流管

为了形象地描述流体的流动情况,设想流体流动的区域中有这样的一些曲线,在每一时刻,线上每一点的切线方向都是该处流体质点的速度方向,这种曲线称作**流线**.对于稳定流动,流线的形状和分布不随时间改变,并且流线和流体质点的运动径迹重合.如图5-6所示是流体流过圆筒管道和球形物体以及流线型物体时的流线.

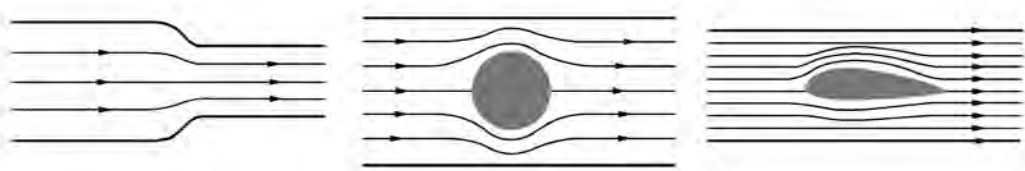


图 5-6 流线

如果在流体内取一个面元,该面元的法向与流经面元的流线平行,过面元周界上各点的流线就在流体内形成一根**流管**(图 5-7). 对于稳定流动,流管内的流体不会流出管外,同样,流管外的流体也不会流入管内. 因此,稳定流动的流管形状不随时间而改变. 整个流体可以看作由若干流管组成,流体在流管中的流动规律代表了整个流体的运动规律,这就为研究流体的运动提供了方便.

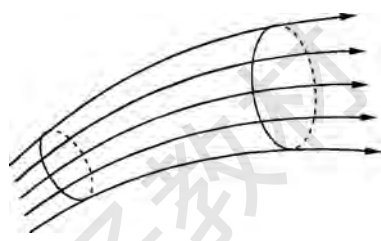


图 5-7 流管

► 5.2.3 流体的连续性原理

在做稳定流动的流体中取一流管(图 5-8),假定流管两端的横截面积分别为 $\Delta S_1, \Delta S_2$, 两端的流速分别为 v_1, v_2 . 由于流体的不可压缩性,故在任何一个时间间隔 Δt 内,从一端流入的流体等于从另一端流出的流体,即

$$\rho v_1 \Delta S_1 \Delta t = \rho v_2 \Delta S_2 \Delta t = \text{常量}.$$

化简得

$$v_1 \Delta S_1 = v_2 \Delta S_2 = \text{常量}, \quad (5.2-1)$$

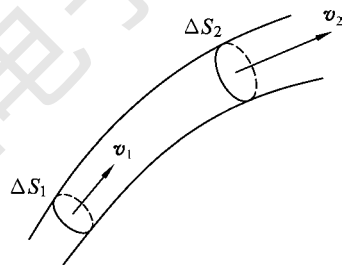


图 5-8 连续性原理

即理想流体做稳定流动时,流管中任一横截面积与该处流速之积是个常量,这就是**流体的连续性原理**. 式中 $v\Delta S$ 表示单位时间内流过某截面的流体体积,称为**流量**. 上式也表示,沿同一流管流量守恒.

SI 制中流量的单位为米³/秒(m³/s). 流量的单位也可以用千克/秒(kg/s).

5.3 伯努利方程

伯努利方程是惯性系中研究理想流体在重力场中做定常流动时,一流管(或流线)上的压强、流速和高度的关系.

在流体中取一流管(图 5-9),设在 A, B 两处的横截面积分别是 S_1, S_2 . 流速分别是 v_1, v_2 , 压强分别是 p_1, p_2 , 对于同一参照平面,它们的高度分别是 h_1, h_2 . 经过一时间间隔,位于 A, B 处的流体分别流到 A', B' 处. 在所考虑的时间间隔前后,管内的流体有了变化,位于 A, A' 之间的流体流入管内,位于 B, B' 之间的流体流出管外. 但对于 A'B 这一段流管,流体的运动状态没有变化,流体的质量也没有发生变化,因而动能和势能都没有变化. 所以,此时间间隔前后 AB 段流体能量的变化,只要考虑此间流出管外的流体和流入管内的流体的能量变化.



令 $\overline{AA'} = \Delta l_1$, $\overline{BB'} = \Delta l_2$, 流出管外的流体的体积 $\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2$, 流入管内的流体的体积 $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1$. 由于理想流体不可压缩, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. 流出和流入的流体动能的差值为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2.$$

重力势能的差值为

$$\Delta E_p = \rho g \Delta V h_2 - \rho g \Delta V h_1.$$

外力对流入流体做的功为

$$W_1 = f_1 \Delta l_1 = p_1 S_1 \Delta l_1 = p_1 \Delta V.$$

外力对流出流体做的功为

$$W_2 = -f_2 \Delta l_2 = -p_2 S_2 \Delta l_2 = -p_2 \Delta V.$$

根据功能原理, $W_1 + W_2 = \Delta E_k + \Delta E_p$, 即

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 + \rho g \Delta V h_2 - \rho g \Delta V h_1.$$

整理得

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

或

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{常量}. \quad (5.3-1)$$

这就是**伯努利方程**. 从上面的推导过程可以看出, (5.3-1) 式中等式左边的三项分别是单位体积流体所受压力所做的功, 以及单位体积流体的动能和势能. 因此, 伯努利方程是机械能守恒定律应用在流体力学中的一种形式. 伯努利方程还可表达为

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{常量}. \quad (5.3-2)$$

式中 $\frac{p}{\rho g}$, $\frac{v^2}{2g}$ 和 h 都具有长度的量纲, 分别称作压力头、速度头和水头(高度头).

在上面的推导中, 我们选取一定流体并沿一流管运动, 所涉及的压强 p 和流速 v 实际上是流管截面上的平均值. 如果令流管的截面积 S_1, S_2 缩小, 使流管变为流线, 则(5.3-1)式和(5.3-2)式仍然成立. 因此, 伯努利方程可以表述为理想流体做稳定流动时, 在同一流线上任一点 $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h$ 为一常量.

伯努利方程在水利工程、化工工程以及造船、航空等领域有广泛的应用.

例 5-2 设有一大容器装满水, 在水面下方 h 处的器壁上有一个小孔, 水从孔中流出, 试求水的流速.

解 由于容器较大, 水从小孔流出, 液面下降极慢, 可以看作是稳定流动. 取任一流线, 一端在液面上 A 处, 该处压强是大气压强 p_0 , 流速为零. 若以小孔处作为参照面, 高度为 h , 流线另一端取小孔 B 处, 该处压强也是 p_0 , 高度为零, 流速为 v , 则

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2.$$

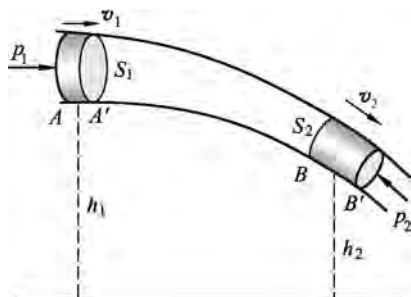


图 5-9 伯努利方程

由此解得 $v = \sqrt{2gh}$.

结果表明,小孔处流速和物体自高度 h 处自由下落得到的速度是相同的.

例 5-3 图示是文丘里流量计示意图,若管道入口处和窄口处的截面积分别为 S_1 和 S_2 ,压强分别是 p_1 和 p_2 ;U 形管中水银密度为 ρ' ,两端高度差为 h ;流量计管中流体密度为 ρ . 设管道中流体是理想流体,求其流量.

解 取管道为流管,在图中 1 和 2 处,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (1)$$

根据连续性方程

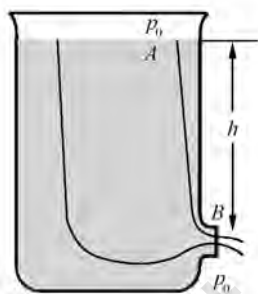
$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

U 形管中水银柱高度差 h 与两端压强 p_1 和 p_2 有关,

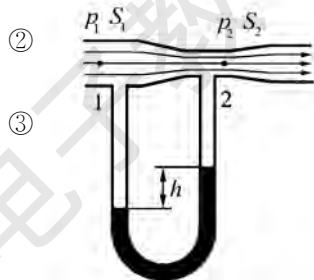
$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho)gh.$$

由①②③式,可解得流量

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2 = \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} S_1 S_2.$$



例 5-2 图



例 5-3 图

* 5.4 黏滯流体

► 5.4.1 流体的黏滯性

在以上的讨论中,流体都被当作理想流体来处理.实际上,流动的流体或多或少地存在内摩擦力.例如,在圆形管道中流动的流体,在管道的横截面上,各点的流速并不都相同.通常离中心轴越近,流速越快;离中心轴越远,流速越慢.于是,在管道中流动的流体出现了分层流动,各层流体只做相对滑动而彼此不相混合,这种流动称为层流.在任意两个流层之间,流速快的要带动流速慢的,流速慢的要阻碍流速快的,这就是内摩擦力.内摩擦力与流层平行,是切向力.流体内部具有内摩擦力的性质,就是流体的黏滯性.

假定流体流层沿 x 轴方向,层面与 z 轴正交,有不同 z 值的流层具有不同的流速(图 5-10).若 z 层的流速为 v , $z+dz$ 层的流速为 $v+dv$,那么, $\frac{dv}{dz}$ 称为 z 层的速度梯度,它表示流速沿 z 方向的变化率.实验证明,两层流体之间的内摩擦力和流层的面积 ΔS 以及该处的速度梯度成正比,即

$$f = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S. \quad (5.4-1)$$

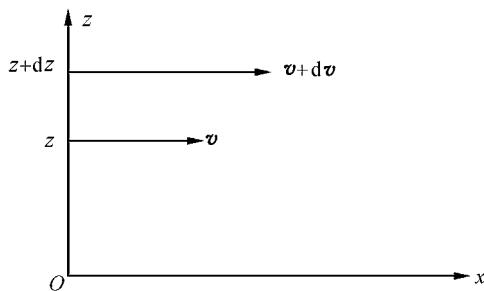


图 5-10 层流的速度梯度

其中 η 称流体的黏滯系数,也称流体的黏度,在 SI 制中,它的单位为帕·秒(Pa·s),量纲为

$\text{L}^{-1}\text{MT}^{-1}$. 黏滞系数除了与流体的性质有关外,还与温度有关.表 5-1 给出了几种流体在不同温度时的黏滞系数.

表 5-1 几种流体在不同温度下的黏滞系数

液体	温度/ $^{\circ}\text{C}$	$\eta/10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	气体	温度/ $^{\circ}\text{C}$	$\eta/10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
水	0	1.79	空气	20	1.82
	20	1.01		671	4.2
	50	0.55	水蒸气	0	0.9
	100	0.25		100	1.27
水银	0	1.69	CO_2	20	1.47
	20	1.55		302	2.7
酒精	0	1.84	氢	20	0.89
	20	1.20		251	1.30
轻机油	15	11.3	氮	20	1.96
重机油	15	66	CH_4	20	1.10

► 5.4.2 湍流和雷诺数

流体在管道中流动并不总是保持层流,由于流速和其他条件的不同,流动会出现沿垂直于管轴方向的不规则流动.层流被破坏,流动呈现混杂、紊乱的特征,这样的流动称作湍流.

实验表明,发出湍流的临界流速与一个无量纲的量 R_e 相对应. R_e 由下式表示

$$R_e = \frac{\rho v r}{\eta}. \quad (5.4-2)$$

式中 ρ , η 和 v 分别是流体的密度、黏滞系数和速度, r 是流管半径, R_e 称作雷诺数. 由层流过渡到湍流的雷诺数,称为临界雷诺数,记作 R_{ec} .

在光滑的金属圆管中, R_{ec} 在 2 000~2 300 范围内,当 $R_e < R_{ec}$ 时,流动表现为层流;当 $R_e > R_{ec}$ 时,流动表现为湍流.

► 5.4.3 泊肃叶公式

在流速不大或管径较小、流体做分层流动的条件下,可以证明,流体流经长为 l 的水平细管时,离中心轴 r 处的流速是

$$v = \frac{1}{4\eta l} (p_1 - p_2) (R^2 - r^2).$$

式中 R 是管径, p_1 和 p_2 是细管两端流体的压强. 通过细管的流量为

$$Q = \int v dS = \int_0^R 2\pi v r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

可得

$$Q = \frac{1}{8\eta l} \pi R^4 (p_1 - p_2). \quad (5.4-3)$$

此式即泊肃叶公式. 根据(5.4-3)式测定了 l , R , p_1 , p_2 和 Q , 就可以求得 η . 这里提供了一个测定黏滞系数的方法.

► 5.4.4 斯托克斯公式

固体在黏滞流体中运动时,会有两种阻力:一种是附在固体表面的流体与邻层流体之间的内摩擦力,称黏滞阻力;另一种是固体运动时,固体前后压力差引起的压差阻力. 当固体运动速度较小时,压差阻力可以忽略. 在这种情况下,半径为 r 的球形物体在黏滞系数为 η

的流体中以速度 v 运动时所受的阻力 f 为

$$f = 6\pi\eta rv. \quad (5.4-4)$$

这就是斯托克斯公式.

例 5-4 有一半径为 r 、密度为 ρ 的小球, 在密度为 ρ_0 ($\rho_0 < \rho$)、黏滞系数为 η 的静止流体中下落. 若所受阻力满足斯托克斯公式, 试求小球在流体中的收尾速度.

解 小球重 $G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$, 在流体中所受浮力 $F = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g$, 因 $G > F$, 小球在流体中加速下落, 随着速度的增大, 黏滞阻力 f 也增大. 当三力平衡时, 即 $G = F + f$ 时小球不再加速, 以速度 v_T 下落, 此即收尾速度.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_T,$$

由此解得

$$v_T = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} g r^2.$$

内容提要

1. 流体静力学.

压强分布: 各向同性(无论对静止流体或流动流体该结论都成立), 高度相差 h 的两点压强差为 $\Delta p = \rho g h$.

帕斯卡原理: 作用在密闭容器中流体上的压强等值地传到流体各处和器壁上.

阿基米德原理: 物体在流体中所受的浮力等于该物体排开同体积流体所受的重力.

2. 理想流体: 不可压缩、无黏滞性.

定常流动: 流体流过空间任一点的速度不随时间而变. 流场可用流线或流管描绘.

流量: 体积流量(m^3/s)、质量流量(kg/s).

3. 连续性原理: 流体不可压缩. 定常流动时, 通过流管横截面的流量相等,

$$v\Delta S = \text{常量}.$$

4. 伯努利方程: 在理想流体的定常流动中沿任一流线有

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{常量}, \text{ 或 } \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{常量}.$$

习 题

5-1 有一水平管子, 由左向右横截面积逐渐缩小, 液体由左向右做稳定流动. 流速沿管子如何变化? 加速度在什么方向? 如果在流体中分隔出一个小方块部分, 左、右两边哪边压力大? 压强沿管轴如何变化?

5-2 把题 5-1 中的管子竖直放置, 截面积上大下小, 水由上向下流. 流速如何变化? 压强怎样变化? 如果截面上小下大, 情况又怎样?

5-3 用手拉住一根细绳, 细绳另一端系住一细棒的一端, 慢慢把细棒放入水中. 如果是木棒, 棒在水中要倾斜, 最后横着浮在水面上; 如果是铁棒, 它就竖直浸入水中, 直到与水

底接触. 为什么?

5-4 自来水龙头流出的水流, 水流往下是越来越粗还是越来越细? 为什么?

5-5 一根横截面积为 1 cm^2 的管子, 连在一个容器上面, 容器高度为 1 cm , 横截面积为 100 cm^2 . 往管内注水, 使水对容器底部的深度为 100 cm (如图).

- (1) 水对容器底面的作用力是多少?
- (2) 系统内水受的重力是多少?
- (3) 解释(1)(2)求得的数值为什么不同?

5-6 在弹簧测力计 D 下端系一物块 A, 使 A 浸没在烧杯 B 的液体 C 中 (如图), 烧杯重 7.3 N , 液体重 11.0 N , 弹簧测力计的读数是 18.3 N , 台秤 E 的读数是 54.8 N , 物块 A 的体积是 $2.83 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 问:

- (1) 液体的密度是多少?
- (2) 把物块 A 拉到液体之外, 弹簧测力计 D 的读数是多少?

5-7 一水坝闸门的上边缘与水面齐平, 闸门宽度 $L=3 \text{ m}$, 高 $H=5 \text{ m}$.

- (1) 水对闸门的压力是多少?
- (2) 如果闸门转轴安装在闸门下底边上, 水压对闸门转轴的力矩是多少?
- (3) 如果闸门转轴安装在过闸门中心的水平线上, 水压对转轴的力矩是多少?
- (4) 如果闸门转轴安装在闸门的一个竖直边上, 水压对闸门的力矩是多少?

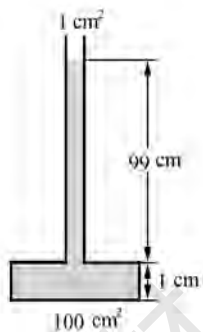
5-8 均匀地将水注入一容器中, 注入的流量为 $Q=150 \text{ cm}^3/\text{s}$, 容器底有个面积为 $S=0.5 \text{ cm}^2$ 的小孔, 使水不断流出, 求达到稳定状态时, 容器中水的深度.

5-9 一个开口的柱形水池, 水深 H , 在水池一侧水面下 h 处开一小孔 (如图).

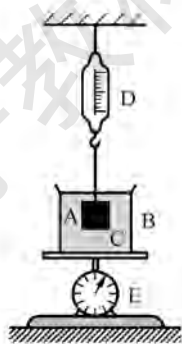
- (1) 从小孔射出的水流到地面后距池壁的距离 R 是多少?
- (2) 在池壁上多高处开一个小孔, 使射出的水流与(1)有相同的射程?
- (3) 在什么地方开孔, 可以使水流有最大的射程? 最大射程是多少?

5-10 一水平管子, 其中一段的横截面积为 0.1 m^2 , 另一段的横截面积为 0.05 m^2 , 第一段中水的流速为 5 m/s , 第二段中的压强为 $2 \times 10^5 \text{ Pa}$, 求:

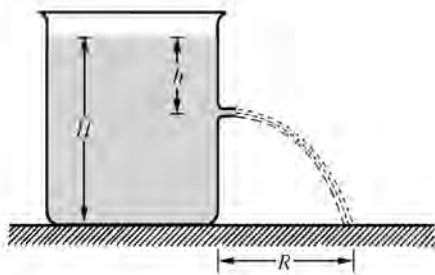
- (1) 第二段中水的流速和第一段中水的压强;
- (2) 通过管子的流量.



习题 5-5 图



习题 5-6 图



习题 5-9 图

* 5-11 在一直径为 0.10 m、高为 0.20 m 的圆筒形容器的底上, 开一个截面积为 1 cm^2 的小孔, 水注入容器内的流量为 $1.4 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

(1) 容器内水面能上升多高?

(2) 达到这个高度后, 停止向容器内注水, 容器内水全部流出所需时间是多少?

5-12 在一横截面积为 10 cm^2 的水平管内有水流动, 在管的另一段横截面积减小为 5 cm^2 , 两处压力差为 300 Pa, 问 60 s 内从管中流出多少立方米水?

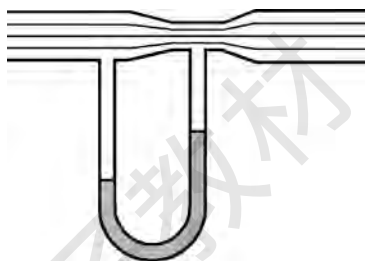
5-13 从一水平管中排水的流量是 $0.004 \text{ m}^3/\text{s}$, 管的横截面积是 0.001 m^2 , 该处压强是 $1.2 \times 10^5 \text{ Pa}$, 要使压强减小为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 管的横截面积应为多少?

5-14 水管的横截面积在粗处为 40 cm^2 , 细处为 10 cm^2 (如图), 流量为 $3000 \text{ cm}^3/\text{s}$, 求:

(1) 粗处和细处水的流速;

(2) 粗处和细处的压强差;

(3) U 形管中水银柱高度差.



习题 5-14 图

* 5-15 20°C 的水在半径为 1.0 cm 的管内流动, 如果在管的中心处流速为 10 cm/s , 则由于黏滞性使得沿管长为 2 m 的两个截面间的压强下降多少? 已知 20°C 时水的黏滞系数为 $\eta = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

* 5-16 有一黏滞流体以层流流过一管子, 试证明该流体中的流量与截面各点速度均为轴线处速度一半时的流量相等.

* 5-17 在液体中有一个空气泡, 直径为 1 mm, 设液体黏滞系数为 $0.15 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 密度为 $0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 求空气泡在该液体中上升的收尾速度的大小. 如果这个气泡在水中上升, 收尾速度是多少?

* 5-18 一个半径为 1 mm 的钢球在盛有甘油的容器中下落, 在某一时刻, 钢球的加速度恰好为自由落体加速度的一半. 求:

(1) 这时钢球的速度大小;

(2) 钢球在甘油中的收尾速度的大小. (钢球的密度是 $8.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 甘油密度是 $1.32 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 甘油黏滞系数取 $0.83 \text{ Pa} \cdot \text{s}$)

第6章 振 动

物体在一定位置附近做重复的往返运动称为机械振动,如钟摆的摆动、琴弦的振动、心脏的跳动和机器运转时的振动等.但对振动问题的讨论并不仅仅局限于机械振动,如交流电路中的电压和电流、LC电路中的电磁振荡等都是电压和电流等物理量在某一数值附近做周期性变化.广义地说,任何一个物理量随时间的周期性变化都可以称为振动.本章主要讨论做机械振动物体的运动规律.首先以理想的简谐运动为对象,研究其运动学和动力学方程以及简谐运动的能量,然后介绍振动的合成规律,最后讨论实际的振动形式——阻尼振动和受迫振动.

虽然机械振动和电磁振动产生和传播的机制有着本质的不同,但它们随时间变化的情况以及其他的许多性质在形式上都遵从着相同的规律.因此,研究机械振动和机械波的规律有助于了解其他各种振动和波的规律.学好本章和下一章,对以后学习电磁波和光学意义重大.

6.1 简谐运动的运动学



► 6.1.1 简谐运动的运动学方程

广义地说,凡是描述物质运动状态的物理量在某一定值附近的反复变化都称作振动.简谐运动是最简单、最基本的一种振动,一切复杂的振动都可以分解为若干简谐运动的叠加.

一个沿 x 轴运动的质点,取其平衡位置为坐标原点,当它相对于坐标原点的位移 x 与时间的关系由以下方程描述

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.1-1)$$

它的运动就是简谐运动.上式就是简谐运动的运动学方程.简谐运动也可以用正弦函数来表示,本书用余弦函数表示.

由于余弦(或正弦)函数在 -1 和 $+1$ 之间变化,所以质点的位移在 $x = -A$ 和 $x = +A$ 之间.(6.1-1)式中的 A 为质点离开原点的最大位移的绝对值,称作简谐运动的振幅.

余弦(或正弦)函数是周期函数,从(6.1-1)式可以看出,经过一个时间间隔 $\frac{2\pi}{\omega}$,质点的运动就重复一次,因此,简谐运动是周期性的,其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.1-2)$$

每单位时间内完全振动的次数称为**简谐运动的频率** ν , 它的单位是赫(Hz). 频率与周期的关系为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (6.1-3)$$

或者

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (6.1-4)$$

ω 称作**圆频率**. 应用式(6.1-2), 简谐运动的运动学方程也可以表示为

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right). \quad (6.1-5)$$

(6.1-1)式中 $(\omega t + \varphi)$ 称作简谐运动的**相位**、**周相**或**相位角**. 相位是决定质点在时刻 t 的运动状态(位置和速度)的重要物理量. φ 表示 $t=0$ 时的相位, 叫作**初相位**或**初相**. 质点在一个周期内所经历的运动状态没有一个相同的, 这相当于相位从 0 到 2π 的变化.

► 6.1.2 简谐运动的矢量表示法

为了直观地表示简谐运动方程(6.1-1)中 A , ω 和 φ 的意义, 现介绍简谐运动的矢量表示.

如图 6-1(a)所示, \mathbf{A} 是一个长度不变的矢量, 起点在 x 轴的原点处. $t=0$ 时, \mathbf{A} 与 x 轴的夹角为 φ , 矢量 \mathbf{A} 以匀角速度 ω 做逆时针转动. 因此, 矢量 \mathbf{A} 在任意时刻 t 与 x 轴的夹角为 $\omega t + \varphi$. 矢量 \mathbf{A} 在 x 轴上的投影为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

可见, 匀速旋转矢量在坐标轴上的投影代表一个简谐运动. 旋转矢量 \mathbf{A} 的长度就是简谐运动的振幅. \mathbf{A} 的角速度 ω 就是简谐运动的圆频率. \mathbf{A} 的矢端轨迹是个以 A 为半径的圆, 称为**简谐运动的参考圆**. \mathbf{A} 与 x 轴的夹角就是简谐运动的相位, 因而也称**相角**. $t=0$ 时的初相角就是简谐运动的初相位 φ . 相角 $\omega t + \varphi$ 决定 \mathbf{A} 的端点在参考圆上的位置, 从而也决定了 \mathbf{A} 在 x 轴上的投影. 因此, 相位是决定简谐运动状态的物理量.

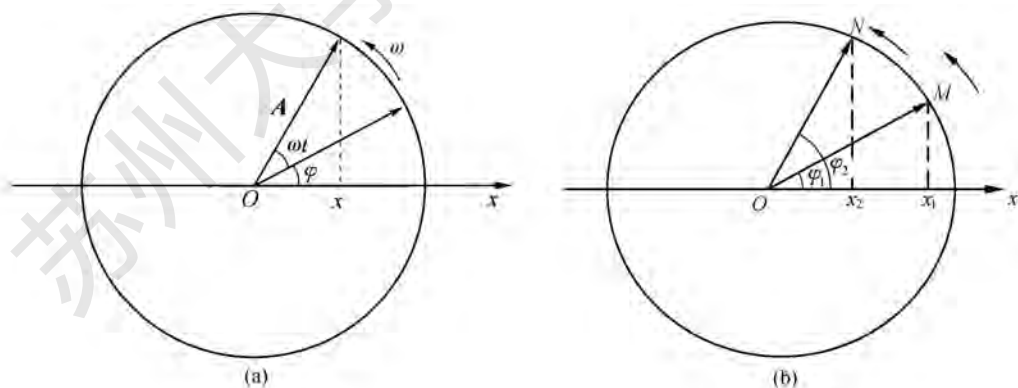


图 6-1 简谐运动的矢量表示

为了进一步理解相位、初相的概念, 利用旋转矢量来研究两个频率相同而初相不同的简谐运动的“步调”(设它们的振幅相同). 设 $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2)$. 在图 6-1 (b)中旋转矢量 \overrightarrow{OM} 代表振动 x_1 , \overrightarrow{ON} 代表振动 x_2 . 两振动的相位差

$$(\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1.$$

这表示任何时刻旋转矢量 \overrightarrow{ON} 运动比 \overrightarrow{OM} 超前角度 $\varphi_2 - \varphi_1$. 在振动的步调上 x_2 比 x_1 超前恒定的相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$, 或者说 x_2 比 x_1 超前一段时间 $\Delta t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega}$.

一般而言, 相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 可以为正也可以为负. 相应地, 表示振动 x_2 比振动 x_1 超前或者落后. 当 $\varphi_2 = \varphi_1$ 时, 这两个振动为同相或同步. 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 时, 两个振动是反相的. 我们常把相位差 $|\Delta\varphi|$ 限制在 π 内, 如 $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$, 我们不说 x_2 超前 x_1 为 $\frac{3}{2}\pi$, 而说 x_2 比 x_1 落后 $\frac{\pi}{2}$, 或者说 x_1 比 x_2 超前 $\frac{\pi}{2}$.

► 6.1.3 简谐运动的速度和加速度

由(6.1-1)式, 质点做简谐运动的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = v_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.1-6)$$

加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi). \quad (6.1-7)$$

式中 $v_m = \omega A$ 是振动速度的最大值, 称作速度振幅; $a_m = \omega^2 A$ 是加速度的最大值, 称作加速度振幅. 从(6.1-6)式和(6.1-7)式可以看出, 简谐运动中, 速度的相位比位移的相位超前 $\frac{\pi}{2}$, 加速度的相位比位移的相位超前 π , 即反相. 图6-2(a)画出了初相 $\varphi = 0$ 的简谐运动的 x, v 和 a 对 t 的曲线.

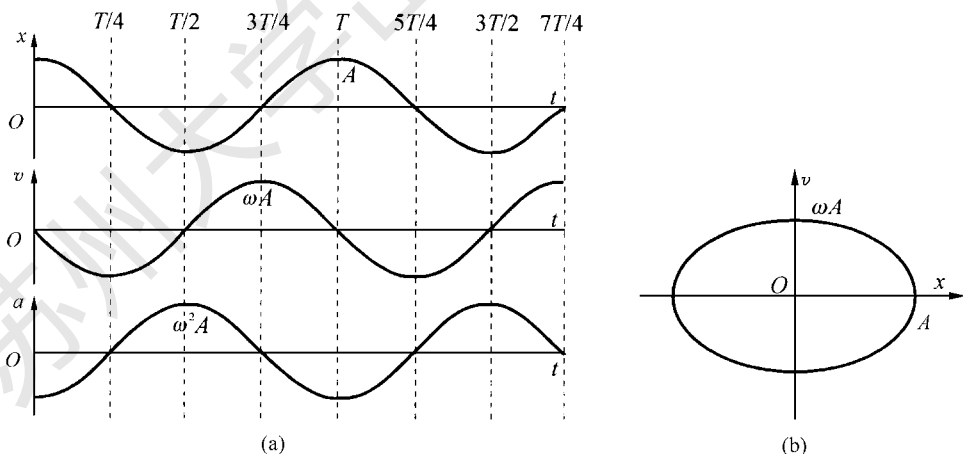


图 6-2 简谐运动的运动曲线与相图

► 6.1.4 振幅 A 和初相位 φ 的确定

如果简谐运动的圆频率 ω 已知, 其振幅 A 和初相位 φ 可由运动的初始条件: $t=0$ 时的位移 x_0 以及速度 v_0 来决定. 在(6.1-1)式和(6.1-6)式中代入 $t=0$, 得

$$x_0 = A \cos \varphi, \quad v_0 = -\omega A \sin \varphi.$$

由此两式可解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad (6.1-8a)$$

$$\tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0}. \quad (6.1-8b)$$

φ 所在的象限可由 x_0, v_0 的正负号来确定.

振幅 A 、初相 φ 以及圆频率 ω 是简谐运动的三个特征量. 应该指出, 振动系统的 ω 由系统本身的性质决定, 而 A, φ 由初始条件确定.

► * 6.1.5 简谐运动的相图

质点在某时刻的运动状态, 由该时刻的位置和速度来表示. 以位置为横轴, 以速度为纵轴所构成的坐标系, 称作**相平面**. 相平面上的一点就代表了质点的一个运动状态. 随着时间的变化, 质点的运动状态相应地改变, 在相平面上描出的曲线称作**相轨迹**或**相图**. 对于做简谐运动的质点, 从(6.1-1)式、(6.1-6)式中消去 t , 得

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1. \quad (6.1-9)$$

显然, 简谐运动的相图是如图 6-2(b)所示的椭圆.

例 6-1 一质点沿 x 轴做简谐运动, 振幅 $A=0.1 \text{ m}$, 周期 $T=2 \text{ s}$. 当 $t=0$ 时位移 $x=0.05 \text{ m}$, 且向 x 轴正方向运动.

(1) 求质点的振动方程;

(2) 求 $t=0.5 \text{ s}$ 时质点的位置、速度和加速度的大小;

(3) 若质点在 $x=-0.05 \text{ m}$ 处且向 x 轴负方向运动, 质点从这一位置第一次回到平衡位置的时间是多少?

解 (1) 设质点的运动学方程是

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

由题意知, $A=0.1 \text{ m}$, $T=2 \text{ s}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 运动学方程为

$$x = 0.1 \cos(\pi t + \varphi).$$

根据初始条件, $t=0, x=0.05 \text{ m}$ 得

$$0.05 = 0.1 \cos \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{3}.$$

因为 $t=0$ 时, 质点沿 x 轴正方向运动, 即 $v>0$, 而质点速度的表达式为

$$v = -0.1\pi \sin(\pi t + \varphi).$$

当 $t=0$ 时,

$$v_0 = -0.1\pi \sin \varphi.$$

要使 $v_0>0$, φ 必须小于零, 所以, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

初相 φ 也可以由旋转矢量来确定. 按题意, $t=0$ 时刻, 旋转矢量 A 在 x 轴上的投影为 $\frac{A}{2} = 0.05 \text{ m}$. 这时旋转矢量 A 与 x 轴的夹角(即初相)有 $\frac{\pi}{3}$ 和 $-\frac{\pi}{3}$ 两种可能, 如图(a)所示. 但

因为 $v_0 > 0$ 并考虑到旋转矢量总是沿逆时针方向转动, 所以正确的选择应该是 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. 于是质点的运动学方程为

$$x = 0.1 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right).$$

(2) $t = 0.5$ s 时,

$$x = 0.1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m} = 0.1 \cos \frac{\pi}{6} \text{ m} = 0.087 \text{ m},$$

$$v = -0.1\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m} = -0.1\pi \sin \frac{\pi}{6} \text{ m} \\ = -0.157 \text{ m/s},$$

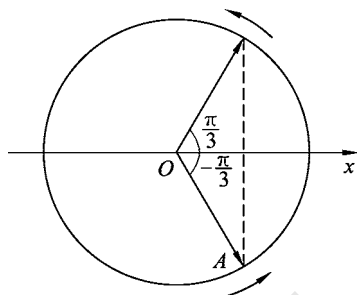
$$a = -0.1\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m/s}^2 = -0.1\pi^2 \cos \frac{\pi}{6} \text{ m/s}^2 \\ = -0.855 \text{ m/s}^2.$$

(3) 这里涉及质点的两个运动状态, 利用旋转矢量来解答比较方便. 如图(b)所示, 当 $x = -0.05$ m 且向 x 轴负方向运动时, 旋转矢量位于图中 M 处, 相角 $\omega t_1 + \varphi = \frac{2}{3}\pi$; 当第一次回到平衡位置时, 旋转矢量位于图中 N 处, 相角 $\omega t_2 + \varphi = \frac{3}{2}\pi$. 两状态之间相应的相角之差

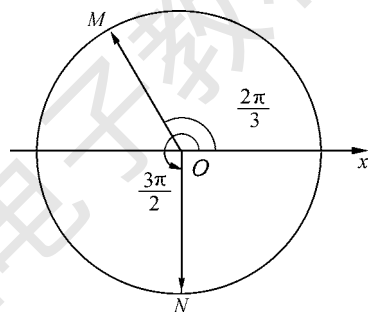
$$\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi.$$

因为矢量以角速度 $\omega = \pi/\text{s}$ 旋转, 故需时间

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5\pi}{6\pi} \text{ s} = \frac{5}{6} \text{ s}.$$



例 6-1(a)图



例 6-1(b)图

6.2 简谐运动的动力学

► 6.2.1 简谐运动的动力学方程

由(6.1-1)式和(6.1-7)式, 质点做简谐运动的加速度为

$$a = -\omega^2 x. \quad (6.2-1)$$

设质点的质量为 m , 由牛顿第二定律得, 做简谐运动的质点所受的力为

$$f = -m\omega^2 x = -kx.$$

上式表示, 质点做简谐运动时, 作用力与位移成正比, 与位移方向相反. 这是简谐运动的动力学特征. 具有以上性质的作用力称作**线性回复力**. 因此, 从动力学角度讲, 质点在线性回复力作用下围绕平衡位置的运动叫作简谐运动.

因为 $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$, 所以(6.2-1)式也可以表达为



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

或者

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (6.2-2)$$

这是一个二阶微分方程,可以验证,(6.1-1)式就是它的解.因此(6.2-2)式就是简谐运动的动力学方程.如果质点的动力学方程可以表达成(6.2-2)式的形式,质点的运动就是简谐运动.

广义地说,任何一个物理量如果满足(6.1-1)式或(6.2-2)式,那么,不管这个物理量是位移、速度、加速度、角位移等力学量,或者是电流、电势差、电场强度等电学量,这物理量就在做简谐运动.尽管这些物理量表达的内容有所区别,但它们随时间而变化的数学规律是广泛适用的.

► 6.2.2 弹簧振子

在研究振动时,弹簧振子是个重要的模型.例如,火车、汽车的车厢是安装在弹簧上的,整个车厢和弹簧组成的振动系统可以简化为一个系在弹簧一端的重物.由于重物的质量比弹簧的质量大得多,因此,可令弹簧质量为零.这样一个由质量可以忽略的轻弹簧和一个刚体所组成的振动系统,称为弹簧振子.做简谐运动的物体,通常称为谐振子.

如果将弹簧振子水平放置在光滑的桌面上,如图6-3所示,当弹簧为原长时,物体所处的位置就是平衡位置.如果把物体略加移动后释放,便有指向平衡位置的弹性力作用在物体上,物体就在其平衡位置附近做往复运动.

若取物体的平衡位置为坐标原点,物体的运动轨迹为 x 轴,以向右为正方向,按照胡克定律,物体所受的弹性力 f 与弹簧的伸长(即物体相对于平衡位置的位移 x)成正比,即 $f = -kx$. 式中 k 是弹簧的劲度系数,负号表示力与位移的方向相反.根据牛顿第二定律,物体的加速度为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{f}{m} = -\frac{k}{m}x.$$

设 $\frac{k}{m} = \omega^2$, 上式可以写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

这就是弹簧振子的动力学方程.它的解就是(6.1-1)式, $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. 如果初始条件 v_0 , x_0 已知,就可以求得振幅 A 和初相位 φ .

由(6.1-2)式,可以求得弹簧振子的周期和频率分别为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (6.2-3)$$

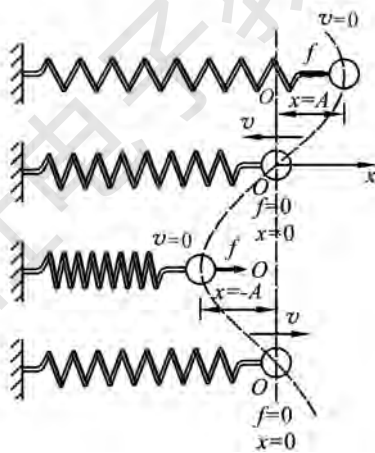


图 6-3 弹簧振子的振动

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(6.2-4)

对于一个质量 m 和劲度系数 k 都确定的弹簧振子, 周期和频率由其本身的结构特性决定, 因此 T 和 ν 也称为弹簧振子的固有周期和固有频率.

例 6-2 一劲度系数为 k 的轻弹簧上端固定, 下端挂一质量为 m 的物体, 使物体上下振动, 试证明物体做简谐运动.

解 设弹簧原长 l_0 , 当挂上的重物处于静止状态, 弹簧伸长 Δl , 由力的平衡可知

$$mg = k\Delta l.$$

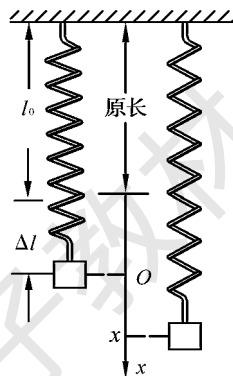
现取重物平衡位置为坐标原点 O , x 轴向下为正, 则物体位于 x 处, 它受合力

$$f = mg - k(x + \Delta l) = -kx.$$

这表明物体将以平衡位置为中心做简谐运动. 振动的圆频率和周期与水平放置的弹簧振子一样,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

可见, 恒力只影响振子的平衡位置, 而不影响振子的固有频率和固有周期.



例 6-2 图

► 6.2.3 单摆

一质量为 m 的小球, 悬挂在上端固定于 O 点的细绳的下端, 细绳长 l , 其质量可以忽略. 如果使小球偏离平衡位置 C 再释放, 小球将在竖直面内来回摆动, 这样的装置称为单摆(图 6-4).

单摆可以作为一个绕悬挂点 O 转动的物体来处理. 设运动中质点位于图中 A 处, 细绳与竖直线 OC 的夹角为 θ , 作用在质点上的力是质点受的重力 mg 和细绳张力 T . 单摆所受到的对于 O 轴的力矩为

$$M = -mgl \sin \theta.$$

式中负号是因为力矩转向与 θ 角的方向相反. 质点对于 O 轴的转动惯量为 $I = ml^2$, 由转动定理得

$$ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta,$$

或

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

(6.2-5)

这就是单摆的动力学方程. 由于 $\sin \theta$ 的存在, 它与(6.2-2)式有区别. 如果 θ 较小, $\sin \theta \approx \theta$, 则(6.2-5)式变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

(6.2-6)

这就是简谐运动的动力学方程. 因此, 当单摆的幅角较小时, 单摆振动是简谐的, 其圆频率的平方

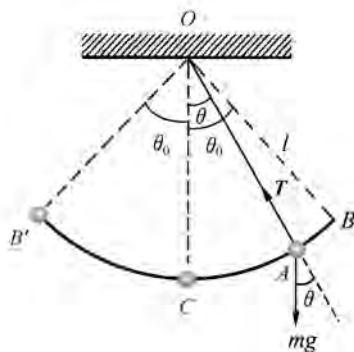


图 6-4 单摆

$$\omega^2 = \frac{g}{l}.$$

任意时刻的摆角 θ 可以表达为

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.2-7)$$

其中的幅角 θ_0 和初相位 φ 由初始条件决定. 单摆的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.2-8)$$

周期与单摆的质量无关, 而且与幅角无关.

对于较大的幅角 θ_0 , $\sin\theta \approx \theta$ 这个近似不再成立. 方程(6.2-5)是非线性的, 因而振动也不是简谐的. 数学上可以证明, 非线性单摆的振动周期可表达为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \theta_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2} \theta_0 + \dots \right). \quad (6.2-9)$$

周期随 θ_0 而变化, 如图 6-5(a) 所示. 如果把单摆的细绳换成质量可以忽略的刚性细杆, 这样的单摆称作**刚性摆**. 刚性摆的摆角可以超过 $\frac{\pi}{2}$, 达到 π . 利用数值解法, 可以求得刚性摆在不同幅角时的振动状态, 相应的相图如图 6-5(b) 所示.

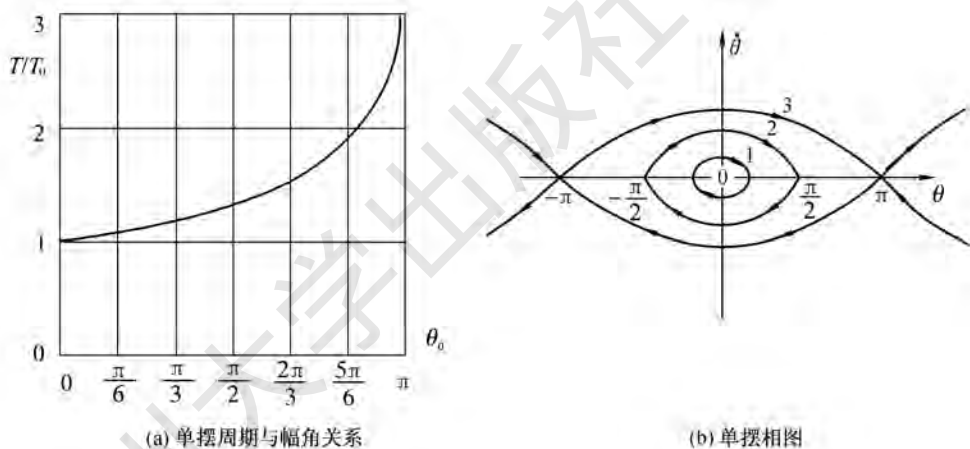


图 6-5

图 6-5(b) 中 1 是小角度摆动, 相图接近椭圆; 2 是幅角为 $\frac{\pi}{2}$ 的相图, 在 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 处略呈尖角; 3 是幅角为 π 时的相图, 介于往复摆动和单向旋转之间的临界状态, 在 $\theta = \pm \pi$ 处交叉成尖角, 对应于小球在正上方时的不稳定状态.

例 6-3 一单摆摆长 $l = 0.8 \text{ m}$, 质点质量 $m = 0.30 \text{ kg}$, 把单摆向右拉离平衡位置 15° , 自由释放, 假定振动是简谐的,

- (1) 求角频率 ω 和振动周期 T ;
- (2) 求幅角 θ_0 、初相位 φ 和振动方程;
- (3) 求最大角速度;
- (4) 什么时候, 细绳中张力最大? 最大张力是多少?

(5) 单摆的实际振动周期是多少?

解 (1) 假定单摆振动是简谐的, 则

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.8}} \text{ rad/s} = 3.500 \text{ rad/s}.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.8}{9.8}} \text{ s} = 1.795 \text{ s}.$$

(2) 设单摆振动方程为

$$\theta = \theta_0 \cos(3.500t + \varphi),$$

以 $\dot{\theta}$ 表示振动角速度,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -3.500\theta_0 \sin(3.500t + \varphi_0).$$

将初始条件 $t=0$ 时, $\theta=15^\circ=0.262 \text{ rad}$, $\dot{\theta}=0$ 代入以上两式有

$$0.262 = \theta_0 \cos \varphi,$$

$$0 = -3.500\theta_0 \sin \varphi.$$

解得

$$\varphi = 0, \theta_0 = 0.262 \text{ rad}.$$

于是振动方程为

$$\theta = 0.262 \cos(3.500t) \text{ rad}.$$

$$(3) \quad \dot{\theta}_{\max} = \omega\theta_0 = 3.500 \times 0.262 \text{ rad/s} = 0.917 \text{ rad/s}.$$

(4) 单摆经平衡位置时, 细绳中张力最大, 此时摆动的角速度 $\dot{\theta}$ 为最大, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\max}$,

$$\begin{aligned} F_{\max} &= mg + m\dot{\theta}_{\max}^2 l = m(g + \dot{\theta}_{\max}^2 l) \\ &= 0.30[9.8 + (0.917)^2 \times 0.8] \text{ N} = 3.14 \text{ N}. \end{aligned}$$

(5) 由(6.2-10)式, 单摆实际的周期为

$$\begin{aligned} T &= 1.795 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 7.5^\circ + \frac{9}{64} \sin^4 7.5^\circ + \cdots \right) \text{ s} \\ &= 1.795(1 + 0.00426 + 0.00004 + \cdots) \text{ s} = 1.803 \text{ s}. \end{aligned}$$

在幅角是 15° 时, 如果把单摆仍当作简谐运动, 周期误差仅约 0.44% . 这一点, 从图 6-5(a) 也可以估计到.

► 6.2.4 复摆

复摆是在重力作用下在竖直平面内绕水平轴自由摆动的刚体. 取 O 为水平转轴, C 为刚体质心(图 6-6). 当直线 OC 与竖直线成 θ 角时, 重力对于转轴的力矩为

$$M = -mgbsin\theta.$$

式中 b 为质心与转轴间的距离. 如果刚体对于转轴的转动惯量为 I , 则有

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgbsin\theta.$$

如果摆角较小, $\sin\theta \approx \theta$, 上式可表达为

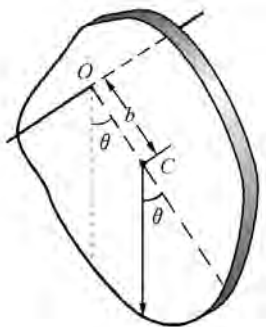


图 6-6 复摆

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0. \quad (6.2-10)$$

显然,当刚体做小角度振动时,振动是简谐的,振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}. \quad (6.2-11)$$

与(6.2-8)式比较可以看出,摆长为 $l_0 = \frac{I}{mb}$ 的单摆与复摆有相同的振动周期, l_0 称为复摆的等值摆长.

例 6-4 半径为 R 的圆环悬挂在一细杆上,如图所示. 求圆环的振动周期和等值摆长.

解 圆环对于过质心、垂直于环面的转轴的转动惯量为

$$I_C = mR^2.$$

由平行轴定理,圆环对于细杆的转动惯量为

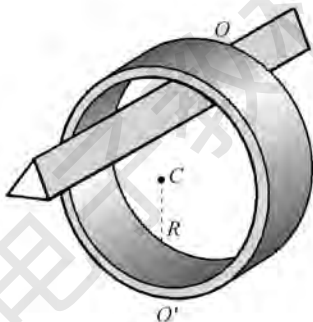
$$I = I_C + mR^2 = 2mR^2.$$

周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}} = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}},$$

等值摆长为

$$l_0 = \frac{I}{mb} = \frac{2mR^2}{mR} = 2R.$$



例 6-4 图

6.3 简谐运动的能量

以弹簧振子为例讨论简谐运动的能量. 设弹簧振子的运动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

则弹簧振子的弹性势能为 $E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (6.3-1)$

弹簧振子的速度为 $v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$

可得弹簧振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (6.3-2)$$

因为 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, 所以上式又可以写成

$$E_k = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (6.3-3)$$

总能量

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2, \quad (6.3-4)$$

这是一个常量. 弹簧振子在运动中总能量保持不变, 而动能和势能在不断转换. 当质点离开



平衡位置运动时,势能增加,动能减少;当质点向平衡位置运动时,动能增加,势能减少. 这一结论对任何一种简谐运动都是正确的. 弹簧振子的动能、势能、总能量随时间的变化曲线如图6-7所示. 从图中可以看出,动能和势能的变化频率是谐振动频率的两倍. 在一个周期内,动能的平均值和势能的平均值相等,都等于总能量的一半,即

$$\overline{E_k} = \overline{E_p} = \frac{1}{2} E.$$

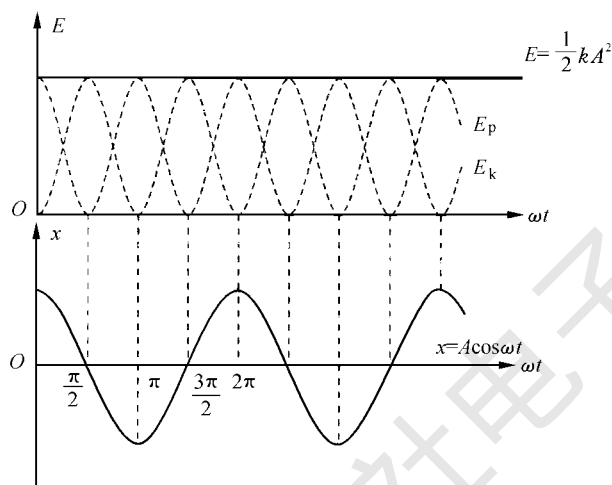


图 6-7 简谐运动的能量曲线

例 6-5 一质量 $m=3\text{ kg}$ 的物体与轻质弹簧组成一弹簧振子,振幅 $A=0.04\text{ m}$,周期 $T=2\text{ s}$,求振子总能量及物体的最大速率.

解 振子的总能量为 $E = \frac{1}{2} k A^2$.

其中 k 是弹簧的劲度系数. 因为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, 所以

$$k = \frac{(2\pi)^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 3}{2^2} \text{ N/m} = 29.6 \text{ N/m}.$$

因此,总能量为 $E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (29.6 \times 0.04^2) \text{ J} = 2.37 \times 10^{-2} \text{ J}.$

因为 $E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$, 所以

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2.37 \times 10^{-2})}{3}} \text{ m/s} = 0.126 \text{ m/s}.$$

也可以用 $v_{\max} = \omega A$ 求振子的最大速度. 因为 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 所以

$$v_{\max} = \frac{2\pi A}{T} = \frac{2\pi \times 0.04}{2} \text{ m/s} = 0.126 \text{ m/s}.$$



6.4 同方向简谐运动的合成

► 6.4.1 同方向、同频率的简谐运动的合成

在讨论光波、声波以及电磁波的干涉和衍射时,就要应用到同方向、同频率的简谐运动的合成.

设一质点在 x 轴方向同时参与两个独立的但是具有相同频率 ω 的简谐运动,

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

质点的合位移为两个分位移的代数和

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

应用三角函数恒等关系式将上式展开,可以得到

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

其中合振动的振幅 A 和初相位 φ , 分别为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (6.4-1)$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6.4-2)$$

因此,同方向、同频率的两个简谐运动的合成,仍然是个同频率的简谐运动,它的振幅和初相位由(6.4-1)(6.4-2)两式决定.

应用旋转矢量也可以得到相同的结果. 它们相应的旋转矢量如图 6-8(a)所示. 矢量 A_1 , A_2 以相同的角速度 ω 旋转,在时刻 t , 它们的相角分别是 $\omega t + \varphi_1$ 和 $\omega t + \varphi_2$, 它们在 x 轴上的投影分别是 x_1 和 x_2 , A_1 和 A_2 的合成矢量 A 在 x 轴上的投影, 就是合振动的位移. 因为 A_1 , A_2 旋转的角速度相同, 两者的夹角 $\varphi_2 - \varphi_1$ 是个恒量, 图中的平行四边形形状在旋转中保持不变. 所以, 合矢量 A 也以角速度 ω 旋转, 且长度不变, 因而 A 在 x 轴上的投影, 即合振动, 也是简谐运动, 振动方程为 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

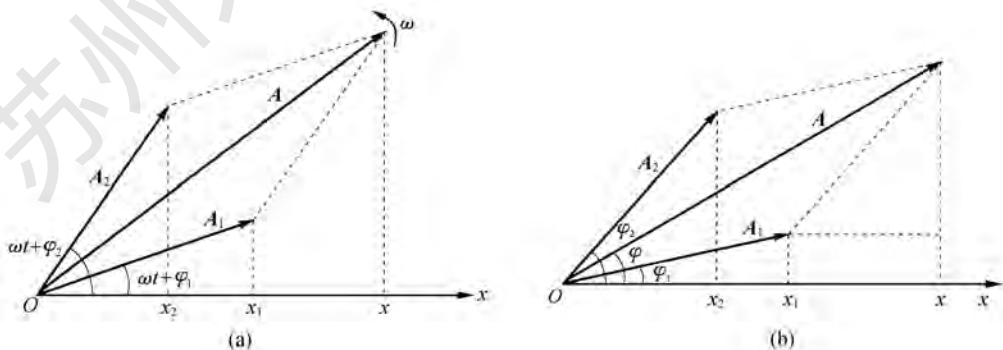


图 6-8 旋转矢量的合成

图 6-8(b)中 A 的长度即合振动的振幅, 在 $t=0$ 时的 A 与 x 轴的夹角 φ 即为合振动的初相, 根据几何关系, 对于 A 和 φ 也可以得到(6.4-1)式和(6.4-2)式.

从(6.4-1)式和(6.4-2)式可以看出,两个分振动的相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$,对合振动起着决定性的作用.考虑两种特殊情况:

(1) 如果 $\varphi_2 - \varphi_1$ 是 2π 的整数倍,即两个分振动同相,由(6.4-1)式得

$$A = A_1 + A_2,$$

即合振幅是两个分振幅之和(图 6-9).

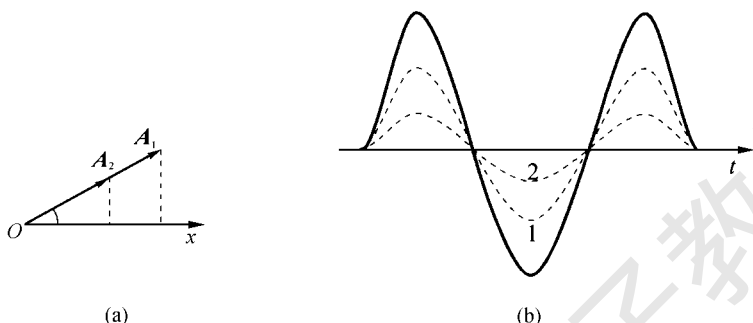


图 6-9 两个同相位简谐运动的合成

(2) 如果 $\varphi_2 - \varphi_1$ 是 π 的奇数倍,两个分振动反相,则

$$A = |A_1 - A_2|,$$

即合振幅是两个分振幅之差(图 6-10). 如果 $A_1 = A_2$, 则 $A = 0$, 两个简谐运动相互抵消.

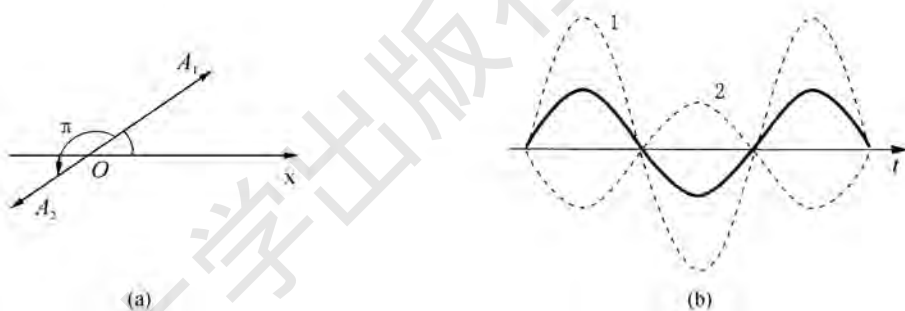


图 6-10 两个反相位简谐运动的合成

在一般情况下,相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 取值在 0 与 π 之间,合振幅则在 $A_1 + A_2$ 和 $|A_1 - A_2|$ 之间.

► 6.4.2 同方向、不同频率的简谐运动的合成拍

如果两个分振动具有不同的振动频率 ω_1 和 ω_2 , 根据旋转矢量法,与它们相应的两个旋转矢量 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 将以不同的角速度 ω_1, ω_2 旋转,它们之间的夹角(即两分振动的相位差)将随时间而变化.这样,由 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 构成的平行四边形的形状不再保持恒定,合矢量 \mathbf{A} 的长度和角速度也将随时间而改变.因此, \mathbf{A} 代表的合振动虽然与原来的振动方向相同,但不再是简谐运动,而是比较复杂的运动.

为方便起见,假定两个振动具有相同的振幅,初相位都为零,两分振动为

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t.$$

它们的合振动为 $x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t$, 利用三角恒等式,有

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right). \quad (6.4-3)$$

当 ω_1 与 ω_2 相近, 且 $|\omega_2 - \omega_1|$ 比 ω_1 (或 ω_2) 小得多时, 上式中第一个因子 $2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$ 是随时间缓慢变化的量, 第二个因子 $\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$ 是圆频率接近于 ω_1 (或 ω_2) 的简谐函数. 因此, 合振动可以看作是圆频率为 $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1$ 或 ω_2 、振幅为 $\left|2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\right|$ 的简谐运动, 而振幅的大小在做周期性的变化. 这种振幅被调制而出现合振幅时强时弱的现象称为拍, 振幅的变化频率称为拍频. 图 6-11 说明两个振幅相同而频率稍有差别同方向简谐运动的合成. 图中 (a) (b) 分别表示两个分振动, 图 (c) 是两振动的叠加, 图 (d) 是两振动的合成结果.

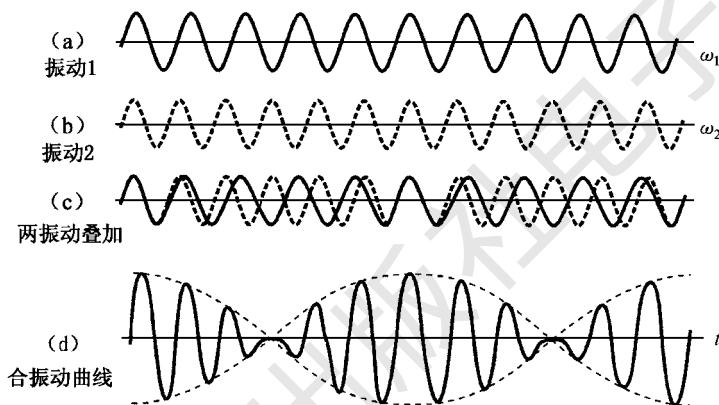


图 6-11 拍的形成

由于余弦函数绝对值的变化周期是 π , 所以合振动振幅的变化周期 T 由下式决定,

$$\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right| T = \pi.$$

因此, 拍频为

$$\nu = \frac{1}{T} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1|, \quad (6.4-4)$$

即拍频等于两分振动频率之差的绝对值.

例如, 如果两个音叉分别以频率 438 Hz 和 442 Hz 振动着, 结果合成的声音具有 440 Hz 的平均频率和 $442 \text{ Hz} - 438 \text{ Hz} = 4 \text{ Hz}$ 的拍频, 也就是说我们能听到频率为 440 Hz 的声音, 而该声音强度在 1 s 内有 4 次是最大.

拍是一种重要的物理现象, 在声学和电子技术中有许多应用. 例如, 让标准音叉与待调整的钢琴某一键同时发音, 如果出现拍音, 就表示该键的频率与标准音叉的频率有差异. 调整该键直到拍音消失, 该键频率就被校准了. 超外差收音机是利用拍现象的又一典型例子, 它是将接收信号与本机振荡所产生的拍频信号进行放大、检波, 从而提高整机灵敏度的.



6.5 相互垂直的简谐运动的合成

► 6.5.1 相互垂直、相同频率的简谐运动的合成

如果两个简谐运动以相同的频率分别沿相互垂直的 x 轴、 y 轴方向振动, 方程如下

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

那么, 合振动在 $x-y$ 平面内的运动范围限制在 $x = \pm A_1$ 和 $y = \pm A_2$ 的矩形区域内. 从上面方程中消去 t , 得合振动的轨迹方程

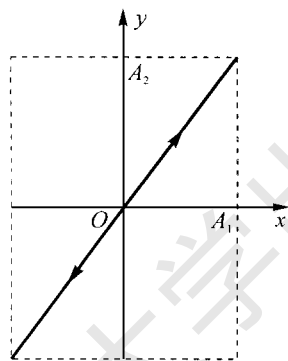
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.5-1)$$

这是一个椭圆轨道方程, 下面讨论几个特殊情况.

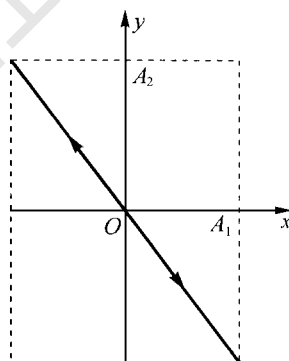
(1) 若两个分振动同相, 即 $\varphi_2 - \varphi_1$ 等于 2π 的整数倍, (6.5-1) 式可简化为

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (6.5-2)$$

合振动的轨迹为通过原点且在第一、第三象限中的直线[图 6-12(a)].



(a) 频率相同、相位相同



(b) 频率相同、相位相反

图 6-12

(2) 若两个分振动反相, 即 $\varphi_2 - \varphi_1$ 等于 π 的奇数倍, (6.5-1) 式可简化为

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (6.5-3)$$

合振动的轨迹为通过原点且在第二、第四象限的直线[图 6-12(b)].

(3) 若两个分振动的相位相差 $\frac{\pi}{2}$, (6.5-1) 式可简化为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (6.5-4)$$

合振动的轨迹是以 x 和 y 为轴的椭圆(图 6-13). 如果 $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, 即 x 轴方向振动比 y 轴

方向振动超前 $\frac{\pi}{2}$,质点沿逆时针方向运动[图 6-13(a)].可以设想当 x 轴方向振动相位是零时, x 轴方向位移在 A_1 处,此刻 y 轴方向振动相位是 $-\frac{\pi}{2}$,位移是零,且向正向运动,所以合振动做逆时针运动.相反,若 $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$,即 x 轴方向振动比 y 轴方向振动落后 $\frac{\pi}{2}$,质点沿顺时针方向转动.设想当 x 轴方向振动相位是零时, x 轴方向位移在 A_1 处,此刻 y 轴方向振动相位是 $\frac{\pi}{2}$,位移是零,且向负方向运动,所以合振动做顺时针运动[图 6-13(b)].

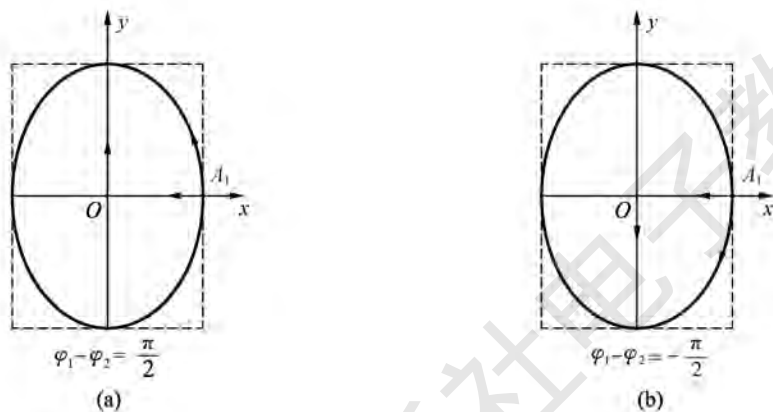


图 6-13 频率相同、相位相差 $\frac{\pi}{2}$

(4) 若相位差取其他数值,合振动的轨迹仍是椭圆,但椭圆的方位、形状、走向各不相同,如图 6-14 所示.

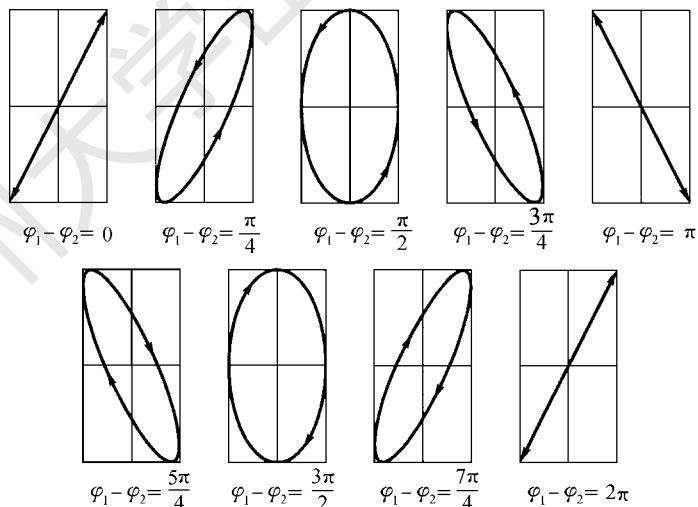


图 6-14 同频率的李萨如图形

应该指出,与合成相反,一个圆运动或椭圆运动可以分解为相互垂直的两个简谐运动.

► 6.5.2 相互垂直、不同频率的简谐的合成

如果两个分振动的频率不同,则合振动的轨迹与分振动的频率和分振动的初相位有关. 若两个分振动的振动方程为

$$x = A_1 \cos \omega_1 t,$$

$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta).$$

当两个分振动的频率 ω_1, ω_2 成简单整数比时,将合成稳定的封闭轨道,称李萨如图,如图 6-15 所示.

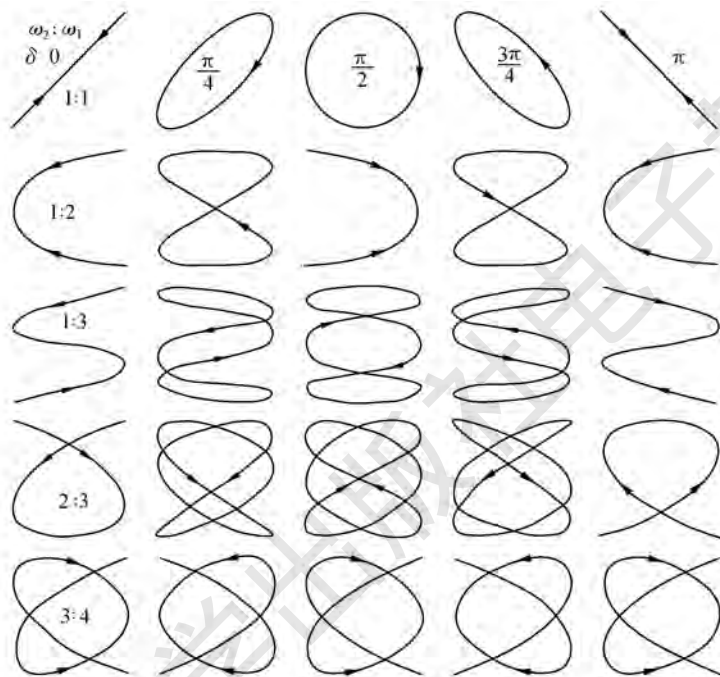


图 6-15 不同频率、不同相位差的李萨如图形

由于李萨如图形与分振动的频率比有关,因此可以通过李萨如图形来精确地比较频率. 在数字频率计广泛采用之前,这是测量电信号频率的最简便的方法.

6.6 阻尼振动

简谐运动是一种等幅振动,振动的能量不变. 实际上由于阻力的存在或能量的辐射,振动能量逐渐减少,振幅也逐渐减小,这种振动称阻尼振动.

如果振动物体的速度不大,阻力与速度成正比,即

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt},$$

其中 γ 为阻力系数,阻尼振动的动力学方程为



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}. \quad (6.6-1)$$

令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m}, \quad (6.6-2)$$

ω_0 即无阻尼时系统做简谐运动时的圆频率, 称系统的固有圆频率, β 称阻尼因数. 于是方程可改写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.6-3)$$

它与简谐运动方程(6.2-2)的不同之处是多了个附加项 $2\beta \frac{dx}{dt}$. 对于不同的阻尼因数 β , 方程有不同的解.

当 $\beta < \omega_0$ 时, 方程(6.6-3)的解为

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (6.6-4)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (6.6-5)$$

式中 A, φ 为待定常数, 由初始条件决定. 因子 $\cos(\omega' t + \varphi)$ 表示质点的运动以 ω' 为圆频率做振动, 振动圆频率比固有圆频率小. 因子 $Ae^{-\beta t}$ 表示振幅不再恒定, 按指数规律衰减, 这种振动状态称欠阻尼状态 [图 6-16(a)]. 阻尼振动的相图呈螺旋状, 逐步向中心收缩 [图 6-16(b)].

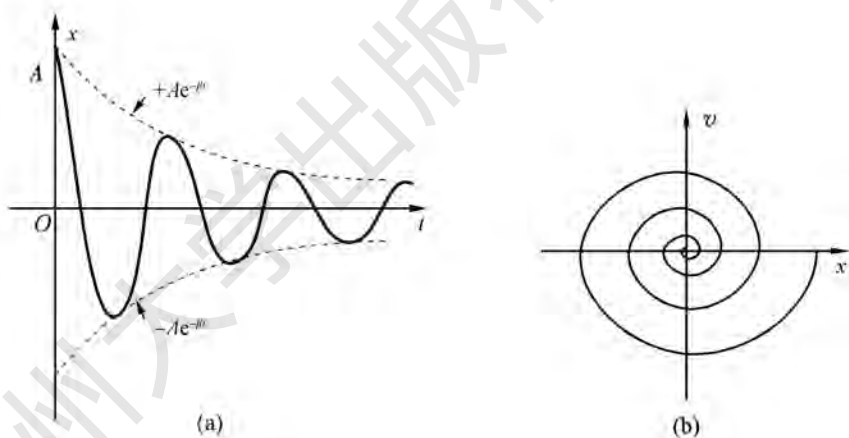


图 6-16 阻尼振动的振动曲线和相图

从图 6-16(a) 可以看到, 阻尼振动的位移不能在一个周期后恢复原值, 所以, 阻尼振动不是严格的周期运动, 是一种准周期运动. 如果把振动物体相继两次通过极大(或极小)位置所经历的时间叫作阻尼振动的周期 T' , 则

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.6-6)$$

可见, 由于阻尼, 振动变慢了.

若 $\beta > \omega_0$, 方程(6.6-3)的解为

$$x = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (6.6-7)$$

式中 c_1, c_2 为由初始条件决定的常数. 上式说明, 此时质点不再做往复运动, 如果将质点移开平衡位置后释放, 质点便慢慢回到平衡位置停下来, 这种运动状态称过阻尼状态[图 6-17(b)].

若 $\beta = \omega_0$, 阻力的影响介于欠阻尼和过阻尼之间, 方程(6.6-3)的解为

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}. \quad (6.6-8)$$

常数 c_1, c_2 同样由初始条件决定. 上式表示质点仍不做往复运动, 由于阻力较前者为小, 所以质点较快地回到平衡位置, 这种运动状态称临界阻尼状态[图 6-17(c)]. 临界阻尼应用于实际的一个例子是电流表的指针, 为了使指针尽快地稳定下来停止摆动, 必须使指针的运动处于临界阻尼状态.

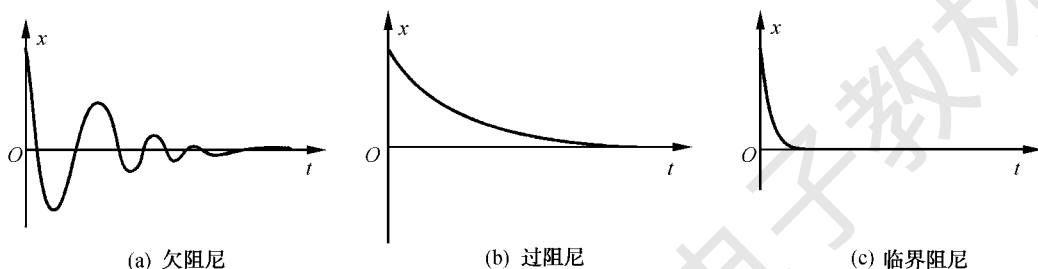


图 6-17

6.7 受迫振动 共振

► 6.7.1 受迫振动的运动特征



一个振动系统由于不可避免地要受到阻尼作用, 振动能量不断减小. 若没有能量的补充, 系统的运动将以阻尼振动的形式, 逐渐衰减并停止下来. 为了获得稳定的振动, 必须对系统施加一周期性的外力, 系统在周期性外力作用下所进行的振动称为受迫振动, 这种周期性的外力称为驱动力. 例如, 扬声器中纸盆的振动、机器运转时引起基座的振动等都是受迫振动.

为简单起见, 设驱动力为

$$F(t) = F_0 \cos \omega t, \quad (6.7-1)$$

则受迫振动的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (6.7-2)$$

令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{\gamma}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (6.7-3)$$

这个微分方程(6.7-3)的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi') + A \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.7-4)$$

其中第一项即减幅的阻尼振动,它随着时间衰减到可以忽略.第二项振幅不变的振动,开始时,系统的振动比较复杂,有一段暂态过程,经过一段时间后,暂态消失,进入稳定振动状态,

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.7-5)$$

把(6.7-5)式代入(6.7-3)式,可以解得稳态解的振幅和初相位

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (6.7-6)$$

$$\tan \varphi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.7-7)$$

(6.7-6)式和(6.7-7)式反映了受迫振动稳态解的特征,其振动频率与驱动力的频率相同,其振幅及初相位与初始条件无关,完全由驱动力和系统的固有参数决定.

► 6.7.2 共振

(6.7-6)式表明,如果驱动力的幅值一定,则受迫振动稳态时的位移振幅随驱动力的频率而改变,图 6-18 画出了不同阻尼时位移振幅与驱动力圆频率之间的关系曲线.可以看出,当驱动力的圆频率为某个特定值时,位移振幅达到极大值.这种位移振幅达到极大值的现象叫作**位移共振**.发生共振时驱动力的圆频率称为共振圆频率.用求极值的方法,可得,共振圆频率满足下式

$$\omega_{\text{共振}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (6.7-8)$$

即系统的共振圆频率与系统自身性质有关,也与阻尼常量有关,且略小于系统的固有圆频率 ω_0 . 阻尼越小, $\omega_{\text{共振}}$ 越接近 ω_0 , 共振的振幅也越大.

由(6.7-5)式,可以求得受迫振动稳态时的振动速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.7-9)$$

其中 ωA 称为速度幅值 v_0 , 由(6.7-6)式,

$$v_0 = \omega A = \frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (6.7-10)$$

由上式可以看出,受迫振动的速度在一定条件下也可以发生共振,称速度共振.也可用求极值的方法,求得当驱动力的圆频率与系统的固有圆频率 ω_0 相等,即

$$\omega_{\text{共振}} = \omega_0 \quad (6.7-11)$$

时,振动速度的幅值达到最大值.另外,在驱动力确定的情况下,阻尼越小,速度振幅的极大值也越大,共振曲线也越尖锐(图 6-19).

在阻尼很小的情况下,位移共振圆频率接近于速度共振圆频率,位移共振与速度共振可以不加区分.

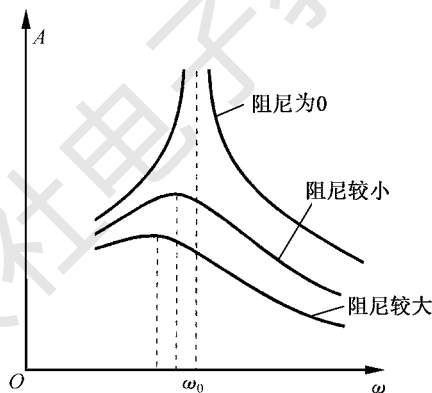


图 6-18 位移振幅与驱动频率的关系

共振现象极为普遍,在声、光、电子学、原子物理及核物理和工程技术等领域都有应用.例如,顺磁共振、核磁共振和铁磁共振等,已经成为研究物质结构的重要手段.收音机、电视接收机的调谐,就是利用电磁共振来接收某一频率的电磁波.在设计桥梁和其他建筑物时,必须避免由于车辆行驶、风浪袭击等周期性冲击而引起的共振,当这种共振发生时,振幅可能达到使桥梁和建筑物破坏的程度.

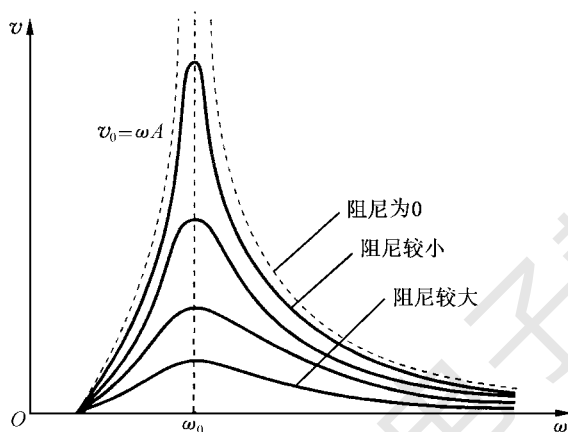


图 6-19 速度振幅与驱动频率的关系

► * 6.7.3 混沌

考虑一个刚性摆,对于转轴,除了重力矩 $M_0 = -mgl\sin\theta$ 之外,还有阻力矩 $M_1 = -c_1 \frac{d\theta}{dt}$,驱动力矩 $M_2 = c_2 \cos\omega t$. 作适当变换,刚性摆的动力学方程可以表达为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin\theta = f_0 \cos\omega t. \quad (6.7-12)$$

上式中 $\sin\theta$ 是非线性项,因而这种刚性摆也称**非线性振子**. 在线性受迫振动的(6.7-3)式所示的线性振子,在达到稳定状态后按(6.7-5)式的规律振动,只要初始条件 v_0, x_0 以及参量 f_0, β, ω_0 和 ω 的值确定,振子具有完全确定的运动状态. 也就是说,振子在任意时刻的状态都是可以预测的,即使初始条件稍有不同,运动状态不会有大的变化. 但是,(6.7-12)式所示的非线性振子却不同,当参量 f_0, β, ω_0 和 ω 取某些值时,如果两次运动的初始条件 ω_0 和 θ_0 有细微的差异,振子的运动会变得完全不同,其行为显示出明显的不可预测性. 这样的行为称**混沌**(Chaos). 应当指出,混沌不是由于初始条件不同而引起的误差积累,也不是一般的随机性,而是由于系统本身的非线性从而导致运动对初始条件的敏感,即所谓**蝴蝶效应**.

随着对非线性系统和混沌研究的进展,对混沌特征的认识将进一步深化,人们期望着混沌理论有助于揭示从流体、气象、地震直到心脏和神经生理这样一些高度非线性问题的本质. 而且对混沌现象的研究,已经从自然科学领域扩展到人文科学、经济学、社会学等领域.

内容提要

1. 简谐运动.

$$(1) x = A \cos(\omega t + \varphi), \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, F = -kx.$$

简谐运动可以用旋转矢量表示.

$$(2) v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

$$(3) \text{机械能 } E_{\text{总}} = \frac{1}{2} k A^2, \text{势能 } E_p = \frac{1}{2} k x^2, \text{动能 } E_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

2. 简谐运动的三个特征量.

(1) 振幅(偏离平衡位置最大距离) A 取决于振动的能量.

(2) 频率(单位时间内振动次数) $\nu = \frac{1}{T}$, 由振动系统本身性质决定.

$$\text{周期(振动一次的时间)} T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

圆频率(单位时间内相位变化): $\omega = 2\pi\nu$.

$$T_{\text{单摆}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, T_{\text{弹簧振子}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, T_{\text{复摆}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgb}}.$$

(3) 初相位 φ : 由计时起点决定.

相位差(反映振动步调):

$$\text{同相 } \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots);$$

$$\text{反相 } \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

3. 阻尼振动.

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 (\omega_0 \text{—系统的固有圆频率}, \beta \text{—阻尼因数}).$$

(1) 欠阻尼($\beta < \omega_0$): $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, 振幅按指数衰减.

(2) 过阻尼($\beta > \omega_0$).

(3) 临界阻尼($\beta = \omega_0$): 停到平衡位置时间最短.

4. 受迫振动.

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

运动过程: 暂态+稳态. 稳态: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

共振: 位移共振 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, A \rightarrow A_m$; 速度共振 $\omega = \omega_0, v \rightarrow v_m$.

5. 两同方向、同频率的简谐运动合成, 合振动的振幅取决于分振动的振幅和相位差.

6. 拍: 两同方向简谐运动合成, 因周期微小差别而造成合振幅时而加强, 时而减弱的现象. 合振动的单位时间加强或减弱次数, 称为拍频. $\nu = \nu_2 - \nu_1$.

7. (1) 相互垂直的两个同频率的简谐运动合成, 合运动轨迹一般为椭圆. 其具体形状取决于分振动的振幅和相位差.

(2) 李萨如图形(不同频率垂直振动的合成): 频率比 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 为有理数时轨迹闭合, 为无理数时轨迹不闭合. 图形不仅与 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 有关, 且与 φ_2, φ_1 有关.

习 题

6-1 如果作用在质点上的力 $F=kx(k>0)$, 那么质点所做的运动是不是周期性的? 如果 $F=-kx^2$, 又怎样?

6-2 把一单摆向右拉开一小角度 φ , 然后释放让其振动. 以释放作计时起点, φ 是否就是初相位? 小球绕悬挂点的角速度是否就是圆频率?

6-3 振幅 A 是个代数量吗? A 能不能取负值? $x=-A$ 是什么意思?

6-4 一重物挂在弹簧上, 拉离平衡位置释放后做简谐运动. 若第一次拉开的距离比第二次拉开的距离短, 两次振动的周期和振幅是否相同?

6-5 在同一弹簧上分别挂不同质量的小球, 使之做振动. 两小球的振动周期和振幅是否相同?

6-6 设有一质量未知的物体和一劲度系数未知的弹簧, 为了测定这一系统的振动周期, 把重物挂在弹簧下, 只要测出平衡时弹簧的伸长量 x 即可. 为什么?

6-7 如果把简谐运动方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

改写为

$$x = A \cos \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right),$$

那么, 量值 $\frac{\varphi}{\omega}$ 的物理意义是什么?

6-8 弹簧振子在水平方向做简谐运动时, 弹性力在 1 个周期内做功多少? $\frac{1}{2}$ 个周期内呢? $\frac{1}{4}$ 个周期内呢?

6-9 小孩坐在树枝上, 静止时树枝不会折断. 如果小孩做周期性摇晃, 树枝有可能折断, 为什么?

6-10 一简谐振子由下列方程描述(x, t 的单位分别为 m, s)

$$x = 4 \cos(0.1t + 0.5).$$

- (1) 求振动的振幅、周期、频率和初相位;
- (2) 求振动速度和加速度的表达式;
- (3) 求 $t=0$ 时的位移、速度和加速度;
- (4) 求 $t=5$ s 时的位移、速度和加速度;
- (5) 画出位移、速度和加速度作为时间的函数曲线.

6-11 一物体做简谐运动, 振幅为 15 cm, 频率为 4 Hz, 试计算:

- (1) 物体的最大速度和最大加速度;
- (2) 位移为 9 cm 时物体的速度和加速度;

(3) 物体从平衡位置运动到相距平衡位置 12 cm 处所需的时间。

6-12 一质量为 $1 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的质点做简谐运动, 其振幅为 $2 \times 10^{-4} \text{ m}$, 质点在其轨道末端的加速度的大小为 $8.0 \times 10^3 \text{ m/s}^2$ 。

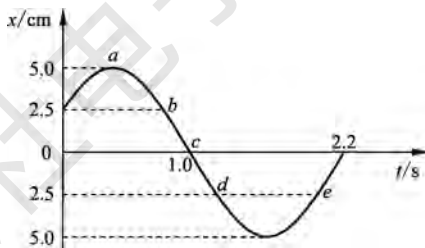
- (1) 试计算该质点的振动频率;
- (2) 求当质点通过平衡位置和位移为 $1.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 时的速度;
- (3) 写出作用在该质点上的力作为坐标的函数和作为时间的函数。

6-13 一个沿 x 轴做简谐运动的弹簧振子, 振幅为 A , 周期为 T , 其振动方程用余弦函数表达. 如果 $t=0$ 时, 振子的状态分别是以下几种情况, 试写出振子的振动方程。

- (1) $x_0 = -A$;
- (2) 过平衡位置向正方向运动;
- (3) 过 $x = \frac{A}{2}$ 处向负方向运动;
- (4) 过 $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正方向运动。

6-14 已知一个谐振子的振动曲线如图所示。

- (1) 求和 a, b, c, d, e 各状态相应的相位;
- (2) 写出振动表达式。

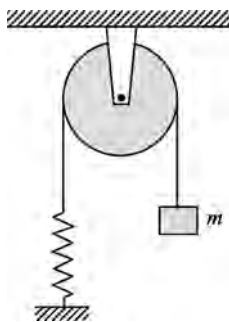


习题 6-14 图

6-15 质量为 m 的物体在光滑的水平面上做简谐运动, 振幅为 12 cm, 在距平衡位置 6 cm 处时的速度为 24 cm/s, 求:

- (1) 振动的周期 T ;
- (2) 当速度等于 12 cm/s 时的位移。

6-16 一定滑轮的半径为 R , 转动惯量为 I , 其上挂一轻绳, 绳的一端系一质量为 m 的物体, 另一端与一固定的轻弹簧相连, 如图所示. 设弹簧的劲度系数为 k , 绳与滑轮间无相对滑动, 忽略轴的摩擦力及空气阻力. 现将物体 m 从平衡位置向下拉一微小距离后放手, 证明物体做简谐运动, 并求其振动的圆频率。



习题 6-16 图

6-17 在直立的 U 形管中装有质量为 $m = 240 \text{ g}$ 的水银 (密度 $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$), 管的截面积为 $S = 30 \text{ cm}^2$, 忽略水银与管壁的摩擦. 当水银面上下振动时,

- (1) 求其振动方程;
- (2) 计算振动周期。

6-18 一摆钟的摆动周期为 2 s, 如果摆长增加 $1 \times 10^{-4} \text{ m}$, 求 24 h 后该钟的误差. g 取 9.80 m/s^2 。

6-19 一棒长 1 m, 一端悬挂, 构成一复摆。

- (1) 求振动周期和等值摆长;
- (2) 在棒上取一悬挂点, 此悬挂点距棒一端的距离等于 (1) 中求出的等值摆长, 求棒以该悬挂点作为复摆的振动周期。

6-20 一半径 $R = 12 \text{ cm}$ 的圆盘, 转轴与盘面垂直, 与盘心相距 $r (r < R)$. 圆盘绕轴转动

形成一复摆. 当 $r=0, \frac{R}{4}, \frac{R}{2}, \frac{3R}{4}, R$ 时, 分别求复摆小角度振动的周期.

6-21 一根米尺, 挂在通过它一端的水平轴上作为复摆而振动, 一体积很小而质量和米尺相同的物体固定在米尺上, 此物体与转轴相距 h . 设系统振动周期为 T , 米尺单独振动时的周期为 T_0 .

(1) 试求 $h=0.5 \text{ m}, h=1.0 \text{ m}$ 时的比值 $\frac{T}{T_0}$;

(2) 是否存在一个 h , 使 $T=T_0$? 如存在, 试解释周期相同的原因.

6-22 一弹簧下悬挂质量为 50 g 的物体, 物体沿竖直方向的运动方程为

$$x=2\sin 10t.$$

其中时间单位为 s , 长度单位为 cm . 平衡位置取为零势能点. 求

(1) 弹簧的劲度系数;

(2) 最大动能;

(3) 振动系统的总机械能.

6-23 在水平光滑的桌面上用轻弹簧连接两个质量都是 $m=0.05 \text{ kg}$ 的小球, 如图所示. 弹簧的劲度系数 $k=1\times 10^3 \text{ N/m}$. 今沿弹簧轴线向相反方向拉开两球然后释放, 求此后两球的振动频率.



习题 6-23 图

6-24 一物体质量为 0.25 kg , 在弹性力作用下做简谐运动, 弹簧的劲度系数为 25 N/m . 如果开始振动时系统具有势能 0.06 J 和动能 0.02 J , 求:

(1) 振动的振幅;

(2) 动能等于势能时物体的位移;

(3) 经过平衡位置时物体的速度.

6-25 质量为 $10\times 10^{-3} \text{ kg}$ 的小球与轻弹簧组成弹簧振子, 运动方程为

$$x=0.1\cos\left(8\pi t+\frac{2\pi}{3}\right).$$

其中 t 以 s 为单位, x 以 m 为单位.

(1) 求 $t=1 \text{ s}, 2 \text{ s}, 5 \text{ s}, 10 \text{ s}$ 等各时刻小球的相位;

(2) 分别画出振动的 $x-t$ 图线、 $v-t$ 图线和 $a-t$ 图线;

(3) 求最大回复力、振动能量、平均动能和平均势能.

6-26 质量为 0.10 kg 的物体, 以振幅 $1.0\times 10^{-2} \text{ m}$ 做简谐运动, 其最大加速度为 4.0 m/s^2 . 求:

(1) 振动的周期;

(2) 物体通过平衡位置时的总能量与动能;

(3) 物体的动能与势能相等的位置;

(4) 当物体的位移为振幅的一半时, 其动能、势能与总能量的比例.

6-27 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐运动, 其表达式为

$$x_1=4\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$x_2=3\cos\left(2t-\frac{5\pi}{6}\right).$$

试求其合振动的振幅和初相位.

6-28 一质点同时参与两个同方向的简谐运动,振动方程分别为

$$x_1 = 5 \times 10^{-2} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$x_2 = 3 \times 10^{-2} \sin\left(4t - \frac{\pi}{6}\right).$$

画出两振动的旋转矢量图,并求合振动的振动方程.(题中涉及的物理量均采用国际单位制)

6-29 一物体同时参与两个同方向的简谐运动:

$$x_1 = 0.04 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x_2 = 0.03 \cos(2\pi t + \pi).$$

求此物体的振动方程.(题中涉及的物理量均采用国际单位制)

6-30 有两个同方向、同频率的简谐运动,其合成振动的振幅为 0.20 m,相位与第一振动的相位差为 $\frac{\pi}{6}$. 已知第一振动的振幅为 0.173 m,求第二振动的振幅以及第一、第二振动之间的相位差.

第7章 波 动

振动在空间的传播称为波动,简称波.激发波动的振动系统称为波源.机械振动在介质中的传播称为机械波,如声波、水波、地震波等都是机械波.机械波只能在弹性介质中传播,在真空中无法传播.电场和磁场的变化在空间的传播称为电磁波,如无线电波、微波、光波、X射线等都属于电磁波.电磁波的传播无需介质,它们可以在真空中传播.近代物理学认为,物质粒子也具有波动性,这种波动性在像电子、质子等基本粒子,甚至在原子和分子的运动过程中都可以找到其存在的证据,此类波称为物质波.各种不同的波产生和传播的机制各不相同,但它们都具有波动的共同特性.例如,它们都是一定的振动状态和能量以一定的速度在空间的传播,都有反射和折射等传播特性,都有干涉和衍射等波动特性.本章主要以机械波为例,首先讨论最简单、最基本的平面简谐波的波动方程和传播的特征及规律;其次,讨论波的能量和能流密度;然后讨论波的叠加、干涉和驻波;最后讨论波源和观察者相对于介质运动时产生的多普勒效应.

7.1 机械波的产生和传播

► 7.1.1 机械波的产生

由无数质点组成的连续系统,如果其各部分之间有相互作用,这个系统就称为连续介质.如果相互作用是弹性的,这种介质就称为弹性介质.弹性介质中,每个质点都有一个平衡位置.当介质中某一质点离开了它的平衡位置,该处介质就发生形变,邻近质点将对它施加弹性回复力,使它回到平衡位置,由于质点具有惯性,质点就在平衡位置附近振动起来.与此同时,振动的质点也对邻近的质点施加反作用力,迫使它们也在各自的平衡位置附近振动起来.这样,振动便在介质中传播开去.机械振动在弹性介质中传播形成的波叫作**机械波**.机械波的产生,一是要有做机械振动的物体,即波源;二是要有具有弹性的介质.

► 7.1.2 横波和纵波

按照质点振动方向和波的传播方向的关系,波可分为横波和纵波两种最基本的形式.

在波动中,如果质点的振动方向和波的传播方向相互垂直,这种波称为横波,如图 7-1(a)所示.抖动绳子的一端,绳子上交替出现波峰和波谷,它们以一定的速度沿绳传播,这就是横波的外形特征.

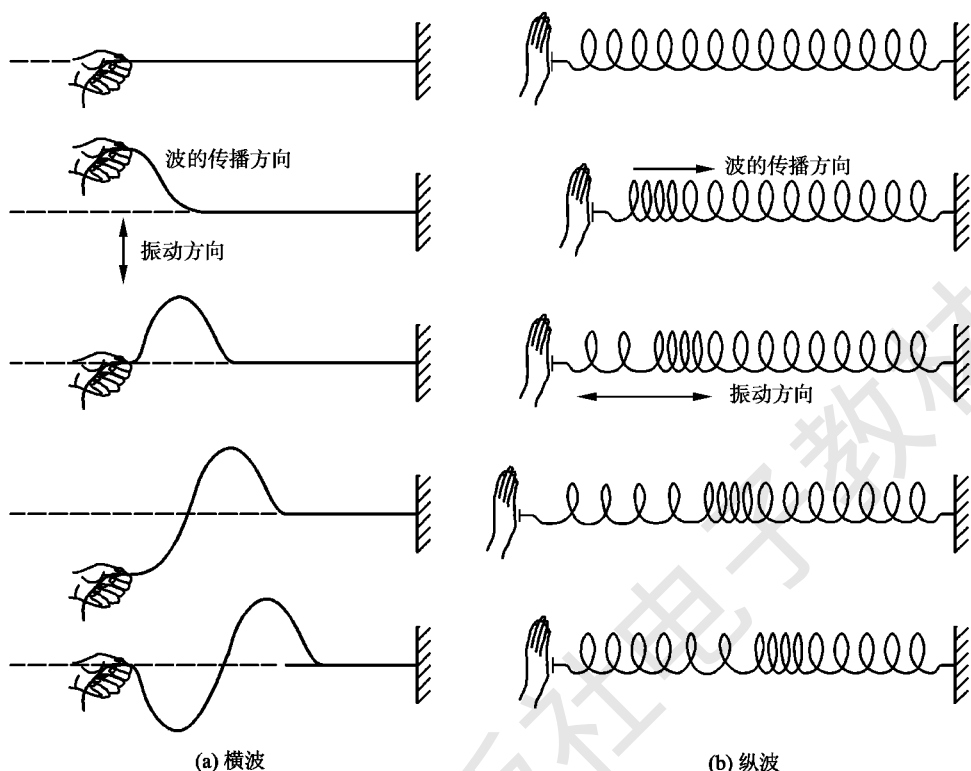


图 7-1 机械波的形成

如果质点的振动方向和波的传播方向平行,这种波称为纵波,如图 7-1(b)所示. 拍打弹簧的一端,各部分弹簧依次左右振动起来,在弹簧上交替出现疏和密的区域,并且以一定的速度沿弹簧传播,这就是纵波的外形特征.

从图 7-1 还可以看出,无论是横波还是纵波,它们都只是振动状态的传播,弹性介质中各质点仅在它们各自的平衡位置附近振动,并没有随波前进.

一般来说,介质中质点的振动情况是很复杂的,由此产生的波动也很复杂. 例如,水面上传播的水面波,水质点既有上下运动,也有前后运动. 因此,既不是纯粹的横波,也不是纯粹的纵波. 但任何复杂的波都可以分解为横波和纵波来进行研究.

► 7.1.3 波阵面和波射线

当波从波源出发,向外传播时,离波源稍远的质点的振动状态比离波源稍近的质点的振动状态要滞后一些,或者说,振动的相位落后. 在某一时刻,波动传到的地方,各质点具有相同的振动状态或相位,这些具有相同振动状态或相位的质点构成的同相面,也称**波阵面**或**波面**. 波在传播过程中,最前面的一个波阵面称为**波前**.

波阵面是平面的波动称为平面波,如图 7-2(a)所示. 波阵面是球面的波称为球面波,如图 7-2(b)所示.

波的传播方向称为**波射线**,也称**波线**. 在各向同性介质中,波线总是和波阵面相垂直. 平面波的波线是一系列垂直于波阵面的平行线,球面波的波线是以波源为中心向外的径向射线.

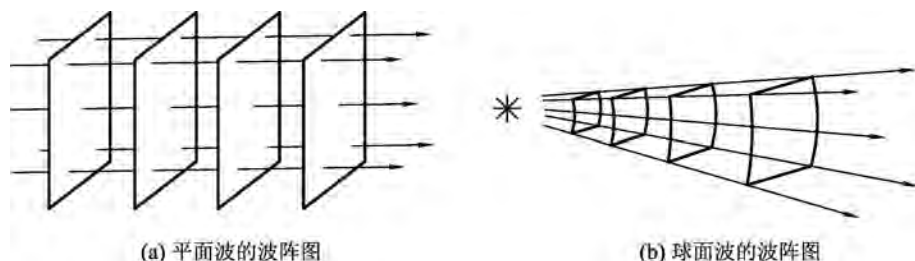


图 7-2 波阵面

平面波和球面波是两种常见的理想的波. 当波源的大小和形状可视为点波源时, 它在各向同性均匀介质中传播的波阵面是以波源为中心的同心球面, 即球面波. 在远离波源的地方, 波阵面的一个小部分可以看作是平面, 故可作平面波处理.

► * 7.1.4 物体的弹性形变

前面已指出, 机械波都在弹性介质内传播, 为了说明机械波的传播, 先介绍有关物体弹性形变的几个物理量.

1. 体变弹性模量

设有一立方体受到各方向的压力[图 7-3(a)]. 如果用 f 表示正压力, S 表示受力的面积, 量值 $p = \frac{f}{S}$ 叫作**正应力**. 在正应力 p 作用下, 立方体的体积由 V 变化到 V' , 体积的相对变化 $\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V}$ 称作**体应变**. 实验发现, 正应力与体应变成正比, 即

$$p = -B \frac{\Delta V}{V}. \quad (7.1-1)$$

式中比例系数 B 为**体变弹性模量**. 因为 ΔV 是个负值, 所以式中要有一个负号.

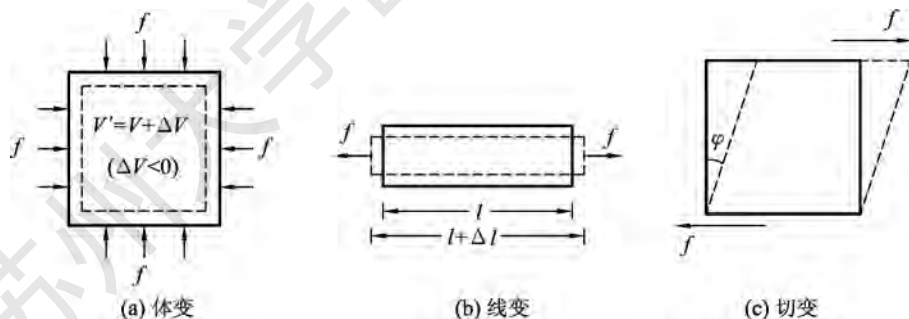


图 7-3 形变

2. 杨氏弹性模量

设有一柱体, 两端受拉力作用[图 7-3(b)]. 如果柱体的横截面积为 S , 长为 l , 受力 f 作用时, 伸长 Δl , 则用 $\sigma = \frac{f}{S}$ 表示**正应力**, 相对伸长 $\frac{\Delta l}{l}$ 称为**线应变**. 胡克定律指出, 在固体的弹性范围内, 正应力与线应变成正比, 即

$$\sigma = Y \frac{\Delta l}{l}. \quad (7.1-2)$$

式中比例系数 Y 为杨氏弹性模量.

3. 切变弹性模量

设有一柱体, 两端底面上受切向力 f 作用, 这时柱体产生一切变[图 7-3(c)], 切变中切应变的量值可用角 φ 表示, 切应力以 $\sigma = \frac{f}{S}$ 表示, S 为柱体底面面积. 胡克定律指出, 在固体弹性范围内, 切应力与切应变成正比, 即

$$\sigma = G\varphi. \quad (7.1-3)$$

式中 G 为切变弹性模量.

上述的弹性模量均与材料的性质有关. SI 制中, 体变弹性模量 B 、杨氏弹性模量 Y 以及切变弹性模量 G 的单位均为牛/米² (N/m²).

► 7.1.5 波的传播速度

在波动过程中, 某振动状态(即振动相位)在单位时间内传播的距离叫作波速, 也称相速, 用字母 u 表示. 波速的大小取决于介质的性质. 具体地说, 就是取决于介质的密度和弹性模量.

流体中, 只有体变弹性, 没有切变弹性, 所以流体内部只能传播弹性纵波. 理论证明, 在流体内部, 纵波波速为

$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (7.1-4)$$

式中 B 是流体的体变弹性模量, ρ 是流体的密度.

对于固体, 能产生切变、体变、线应变等弹性形变, 所以固体中能传播与切变有关的横波, 又能传播与体变、线应变有关的纵波, 波速分别为

$$u_{\text{横}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (7.1-5)$$

$$u_{\text{纵}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \quad (7.1-6)$$

式中 G, Y 分别是固体的切变弹性模量和杨氏弹性模量.

对于一根张紧的细绳, 横波波速为

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (7.1-7)$$

式中 T 为细绳的张力, μ 为细绳的线密度.

当把空气视为理想气体时, 根据分子动理论和热力学, 可推导出声波在空气中的传播速率为

$$u_{\text{声}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (7.1-8)$$

式中, γ 是气体的比热容比, 对空气 $\gamma = 1.40$. p 是空气的压强, ρ 为空气的密度. 标准状态下, $p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\rho = 1.293 \text{ kg/m}^3$. 由这些数据求得空气中的声速 $u \approx 332 \text{ m/s}$.



7.2 平面简谐波方程

► 7.2.1 简谐波

当波源在均匀、无吸收的介质中做频率为 ω 的简谐振动时, 介质中各质点也做相同频率 ω 的简谐振动, 这样形成的波称简谐波. 简谐波是一种最简单、最基本的波, 任何一种复杂的波, 都可以表示为若干不同频率、不同振幅的简谐波的合成. 因此, 研究简谐波具有特别重要的意义.

波阵面是平面的简谐波称平面简谐波. 在传播平面简谐波的介质中, 所有质点都做与波源同频率、同振幅的简谐运动, 只是振动相位沿传播方向依次落后而已.

► 7.2.2 平面简谐波方程

如图 7-4 所示, 一平面简谐波在无吸收的均匀无限大介质中传播, 波速为 u . 取任一波线为 x 轴, 波沿 x 轴的正方向传播. 设在原点 O 处质点做简谐运动的振动方程为

$$y_O = A \cos(\omega t + \varphi).$$

式中 y_O 表示 O 处质点在时刻 t 相对于平衡位置的位移, A 是振幅, ω 是圆频率, φ 为初相. 沿波线任取一点 P , 距原点的距离为 x . 当振动从 O 点传播到 P 点时, P 点以相同的频率和振幅做相同的简谐运动, 只是振动状态落后于 O 点的振动状态. P 点落后于 O 点的时间是 $\frac{x}{u}$, 也就是说, P 点在 t 时刻的振动状态

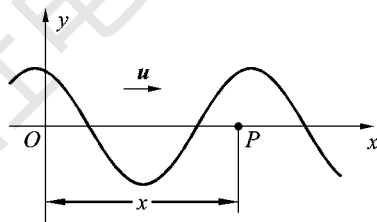


图 7-4 P 的振动比原点落后时间 $\frac{x}{u}$

就是 O 点在 $t - \frac{x}{u}$ 时刻的振动状态. 用 $t - \frac{x}{u}$ 代替 O 点振动方程中的 t , 就可以得到任意时刻 t , 任意点 P 的振动方程

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]. \quad (7.2-1)$$

此式表示的是波线上任一点的振动, 反映了波线上(也即介质中)各点位移随时间变化的整体图像. 因此, (7.2-1)式即为沿 x 轴正向传播的平面简谐波的运动学方程, 简称平面简谐波方程, 又称波函数.

波函数(7.2-1)式含有两个自变量 x 和 t . 如果 x 给定, (7.2-1)式表示的是位于 x 处的质点在任意时刻的位移, 相应的 $y-t$ 图就是该点的振动曲线, 完成一次完整振动的时间间隔, 即振动周期 T , 如图 7-5 所示.

如果 t 给定, (7.2-1)式表示的是波线上各质点在时刻 t 的位移, 相应的 $y-x$ 图就是在该时刻的波形, 如图 7-6 所示.

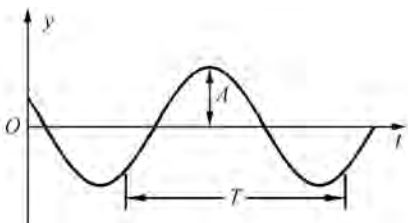


图 7-5 振动质点的位移时间曲线

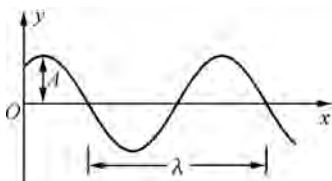


图 7-6 在给定时刻各质点的位移与平衡位置的关系

如果 x 和 t 都变化, (7.2-1) 式表示波线上所有质点的位移随时间而变化的整体情况, 即表示不同时刻的波形. 图 7-7 画出了 t 时刻和 $t + \Delta t$ 时刻的两个波形图. 图中 t 时刻的波形 (实线) 经过时间 Δt 传到了图中的虚线的位置. 传播的速度就是波速 u .

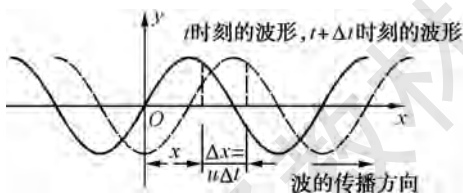


图 7-7 波的传播

► 7.2.3 波长和频率

同一波线上两个相邻的相位差为 2π 的质点间的距离, 即一个完整波的长度称为**波长**, 用 λ 表示. 显然横波上相邻两个波峰或相邻两个波谷之间的距离, 就是一个波长; 纵波上相邻两个密部或相邻两个疏部对应点之间的距离, 也是一个波长.

波前进一个波长所需要的时间, 或一个完整波形通过波线上某点所需要的时间, 称为**波的周期**, 用 T 表示. 显然, 波速 u 、波长 λ 和周期 T 三者之间有如下关系:

$$u = \frac{\lambda}{T}. \quad (7.2-2)$$

单位时间内波动传播的完整波的数目称为**波的频率**, 用 ν 表示. 因此, 频率也就是周期的倒数, 即 $\nu = \frac{1}{T}$. 所以

$$u = \lambda \nu. \quad (7.2-3)$$

在周期 T 内波线上所有质点都完成一次完整振动. 所以波具有时空双重周期性, 这也是一切波动的基本特征. (7.2-2) 式和 (7.2-3) 式对各类波都适用, 具有普遍意义. 应该指出, 波速虽由介质的性质决定, 但波的频率是波源振动的频率, 与介质无关. 因此, 同一频率的波, 其波长将随介质的不同而不同.

► 7.2.4 简谐波方程的其他形式

利用关系式 $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, $u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$, (7.2-1) 式也可以表示为

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right], \quad (7.2-4)$$

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right], \quad (7.2-5)$$

$$y = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ut - x) + \varphi \right]. \quad (7.2-6)$$

如果波沿 x 轴负方向传播, 则 P 点的振动比 O 点的振动早了时间 $\frac{x}{u}$, 因此, 沿 x 轴负方向传播的平面简谐波方程为

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right], \quad (7.2-7)$$

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right], \quad (7.2-8)$$

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right], \quad (7.2-9)$$

$$y = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ut + x) + \varphi \right]. \quad (7.2-10)$$

► 7.2.5 波动方程

把平面简谐波方程(7.2-1)式分别对 t 及 x 偏微分两次, 分别得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right], \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -A \frac{\omega^2}{u^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]. \end{aligned}$$

比较上两式可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (7.2-11)$$

这个方程称为平面波的波动方程. 任一平面波, 即使不是简谐波, 也可以把它分解成许多不同频率的简谐波的合成. 在对 t 及 x 偏微分两次后仍能得到(7.2-11)式. 所以式(7.2-11)是反映一切平面波的共同特征. 任何物理量, 不管是力学量和电学量, 只要它与时间和坐标的关系满足(7.2-11)式. 这一物理量就以波的形式传播.

应当指出, 从沿 x 轴负方向传播的平面简谐波方程(7.2-7)也可以得到相同的波动方程(7.2-11). 以上是按运动学来推导波动方程, 此外, 还可以从动力学的观点来推导波动方程.

例 7-1 频率为 3 000 Hz 的声波, 在海水中以 1 560 m/s 的速度沿一波线传播, 波从波线上的 A 点传到 B 点, 两点间距离 $\Delta x = 0.13$ m.

- (1) 求波的周期和波长;
- (2) B 点的振动比 A 点落后多长时间? 相当于多少个周期?
- (3) A, B 间的距离相当于多少个波长?

解 (1) 周期 $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{3\,000}$ s. 由(7.2-3)式, 波长

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{1\,560}{3\,000} \text{ m} = 0.52 \text{ m}.$$

(2) B 点的振动比 A 点落后的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{0.13}{1\,560} \text{ s} = \frac{1}{12\,000} \text{ s} = \frac{T}{4},$$

相当于落后 $\frac{1}{4}$ 个周期.

(3) A, B 间的距离 Δx 相当的波长数为

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{0.13}{0.52} = \frac{1}{4}.$$

计算表明, 振动由 A 点传播到 B 点, 用时为 $\frac{1}{4}$ 周期, 波前进了 $\frac{1}{4}$ 波长的距离.

例 7-2 有一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 波速 $u=1.0 \text{ m/s}$. 已知位于坐标原点处的质点的振动规律为 $y=0.1\cos(\pi t+\varphi)$ (单位为 m), 在 $t=0$ 时, 该质点的振动速度 $v_0=0.1\pi \text{ m/s}$, 试求

(1) 波动表达式;

(2) $t=1 \text{ s}$ 时 x 轴上各质点的位移分布规律;

(3) $x=0.5 \text{ m}$ 处质点的振动规律.

解 (1) 由初始条件, 求未知初相位 φ .

$$\begin{aligned} \text{质点的振动速率} \quad v &= \frac{dy}{dt} = -0.1\pi \sin(\pi t + \varphi), \\ v_0 &= -0.1\pi \sin\varphi = 0.1\pi. \end{aligned}$$

由此得到,

$$\sin\varphi = -1, \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

所以, 原点处质点振动规律为

$$y = 0.1\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 0.1\cos\pi\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

简谐波方程为

$$y = 0.1\cos\pi\left(t - \frac{1}{2} - \frac{x}{u}\right) = 0.1\sin\pi(t - x). \quad \textcircled{1}$$

(2) 把 $t=1 \text{ s}$ 代入 $\textcircled{1}$ 式得

$$y = 0.1\sin\pi(1 - x) = 0.1\sin\pi x.$$

(3) 将 $x=0.5 \text{ m}$ 代入 $\textcircled{1}$ 式得

$$y = 0.1\cos\pi\left(t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.1\cos\pi(t - 1) = -0.1\cos\pi t.$$

例 7-3 某波动可由下式表示 (时间单位为 s , 长度单位为 m),

$$y = 5\cos(9t + 7x).$$

求振动周期 T 、波长 λ 和波速 u .

解 把波动表达式改写为 (7.2-8) 式的形式,

$$y = 5\cos 2\pi\left(\frac{t}{2\pi/9} + \frac{x}{2\pi/7}\right),$$

可得

$$T = \frac{2\pi}{9} \text{ s}, \lambda = \frac{2\pi}{7} \text{ m}, u = \frac{\lambda}{T} = \frac{9}{7} \text{ m/s}.$$

波动沿 x 轴负方向传播.



7.3 波的能量和能流密度

7.3.1 波的能量

当波在弹性介质中传到某处时,该处的质点开始振动,因而具有动能.同时该处的介质也发生了形变,因而也具有弹性势能.波传播时,介质中质点依次振动,能量也依次传播,下面以均匀细杆中的纵波为例,来分析能量传播的特征.

考虑细杆中位于 x 处的体积元 ΔV [图7-8(a)],若细杆密度为 ρ ,则质量元 $\Delta m = \rho \Delta V$.纵波方程采用(7.2-1)式(为简单起见,设初相 $\varphi = 0$),可以证明,体积元具有的动能 E_k 和势能 E_p 相等,为

$$E_k = E_p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right). \quad (7.3-1)$$

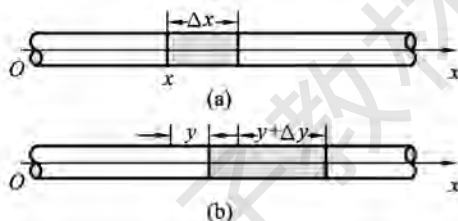


图 7-8 细杆中的体积元形变

体积元总的机械能为

$$E = E_k + E_p = \rho \omega^2 A^2 \Delta V \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right). \quad (7.3-2)$$

(7.3-1)式表明在任何时刻,体积元的动能和势能同相,而且相等.当体积元通过平衡位置时,速度最大,形变也最大,动能和势能都达到最大值;当体积元达到最大位移时,速度和形变都为零,这时动能和势能都是零.(7.3-2)式指出,体积元的总机械能随时间 t 作周期性变化,说明体积元的总能量不守恒,它在不断地接收和放出能量.

单位体积介质中波动的总能量称为**波的能量密度**,用 w 表示.由(7.3-2)式得

$$w = \frac{E}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right). \quad (7.3-3)$$

能量密度表示介质中能量的分布情况.波的平均能量密度 \bar{w} ,即能量密度在一个周期内的平均值为

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (7.3-4)$$

上式表明,机械波的能量密度与振幅平方、频率平方以及介质的密度都成正比.

* 7.3.2 波动能量公式的推导

由纵波方程(7.2-1)式,体积元的振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right),$$

则体积元的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \Delta V \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

体积元的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta y^2.$$

式中 k 为介质弹性系数, Δy 为体积元的形变长度[见图 7-8(b)]. 若细杆中体积元受作用力为 f , 根据胡克定律(7.1-2)式有

$$f = \frac{YS}{\Delta x} \Delta y.$$

其中 Y 是细杆杨氏弹性模量, S 为细杆横截面积, Δx 为体积元长度, 所以 $k = \frac{YS}{\Delta x}$, 体积元势能可表示为

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{YS}{\Delta x} \right) \Delta y^2 = \frac{1}{2} YS \Delta x \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = \frac{1}{2} Y \Delta V \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

式中 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 即体积元的相对伸长. 由(7.2-1)式, 有

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega A}{u} \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right),$$

弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2} Y \Delta V \frac{\omega^2 A^2}{u^2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

由 $u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ 得

$$E_p = \frac{1}{2} \Delta V \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right),$$

体积元的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \rho A^2 \omega^2 \Delta V \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

如果是平面弹性横波, 只要把上面的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 和 f 分别理解为体积元的切变和切向力, 用切变弹性模量 G 代替杨氏弹性模量 Y , 可以得到同样的结果.

► 7.3.3 能流和能流密度

从(7.3-1)式可以看出, 波动的能量和简谐运动的能量有显著的不同. 在简谐运动中, 动能和势能有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差. 动能达到最大时势能为零, 势能达到最大时动能为零, 两者相互转化, 使总机械能保持守恒. 在波动中, 动能和势能的变化是同相的. 它们同时达到最大值, 又同时达到最小值. 因此, 对任意一个体积元, 其机械能不守恒. 沿着波动前进的方向, 该体积元不断地从后面的介质获得能量, 又不断地把能量传递给前面的介质, 这样, 能量就伴随着波动向前传播.

为此, 我们引入能流的概念. 单位时间内通过波面上某面积的能量称为通过该面积的能量. 这能流是周期性变化的, 通常取平均值, 即平均能流. 在某一波面上取面元 ΔS (图 7-9), 单位时间内通过 ΔS 的平均能流, 就是以 ΔS 为底、 u 为高的柱体中的平均能量,

$$\Delta E = \bar{w} \Delta V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u \Delta S.$$

单位时间内通过垂直于波线方向的单位面积上的平均能流,称能流密度或波的强度,用 I 表示,

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u. \quad (7.3-5a)$$

能流密度的单位为瓦/米² (W/m²),量纲为 MT⁻³.

能流密度是矢量,与波速同向,因此,可表达为

$$\mathbf{I} = \bar{w} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \mathbf{u}. \quad (7.3-5b)$$

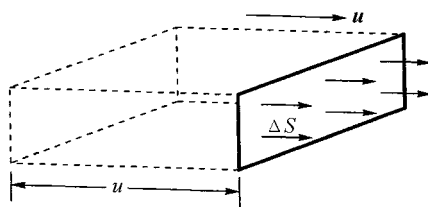


图 7-9 流过面元 ΔS 的能量

► 7.3.4 声强与声强级

频率在 $20 \sim 2 \times 10^4$ Hz 之间的能引起人的听觉的机械波,叫作声波. 频率在 $10^{-4} \sim 20$ Hz 之间的,称次声波;频率在 $2 \times 10^4 \sim 5 \times 10^8$ Hz 之间的,称超声波. 声波的能流密度,称声强. 实验表明,人耳的灵敏度对于声波的每一个频率都有一个声强范围,就是声强上下两个限值,低于下限的声强不能引起听觉,人就感觉不到声音,高于上限的声强只能引起痛觉,也不能引起听觉. 人耳对声音强弱的主观感觉称为响度. 实验表明响度近似地与声强的对数成正比,声强级 L 用声强的对数来表示,

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (7.3-6)$$

式中 I_0 是频率为 1 000 Hz 时人耳能感觉到的最低声强, $I_0 = 10^{-12}$ W/m². 声强的单位是分贝,记作 dB.

表 7-1 列出了日常生活中几种声音的声强级.

表 7-1

声 源	声强级/dB	声强/(W · m ⁻²)
引起听觉伤害的声音	140	100
听觉有痛感	120	1
响 雷	110	0.1
地 铁	100	10^{-2}
交通干线旁的噪声	80	10^{-4}
交谈声	60	10^{-6}
静 室	40	10^{-8}
悄悄话	20	10^{-10}
落 叶	10	10^{-11}

表 7-2 列出了城市五类环境噪声值.

表 7-2

类 别	白天声强级/dB	夜间声强级/dB	适 用 区 域
0	50	40	疗养区、宾馆
1	55	45	居住区、文教机关
2	60	50	居住区、商业区
3	65	55	工业区
4	70	55	交通干线、河道两侧

例 7-4 狗叫声的功率约为 1 mW, 如果这叫声均匀地向四周传播, 5 m 远处的声强级是多少? 如果两只狗在同一地方同时叫, 则 5 m 处的声强级又是多少?

解 声音均匀地分布在球状波阵面上, 离声源 5 m 处的声强为

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3} \text{ W}}{4\pi \times 25 \text{ m}^2} = 3.18 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2,$$

声强级为

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg \frac{3.18 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \text{ dB} = 65 \text{ dB}.$$

两只狗同时叫时, 离声源 5 m 处的声强为

$$I' = 2I = 6.36 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

声强级为

$$L' = 10 \lg \frac{I'}{I_0} = 10 \lg \frac{6.36 \times 10^{-6}}{10^{-12}} \text{ dB} = 68 \text{ dB}.$$

7.4 惠更斯原理与波的传播



当观察水面上的波时, 如果这波遇到带有一小孔的障碍物, 就可以看到在小孔的后面出现了圆形的波, 它好像是以小孔为波源产生的, 如图 7-10 所示. 惠更斯总结了上述现象, 于 1690 年提出, 介质中任一波阵面上的各点, 都可以看作是发射子波的波源, 在其后的任一时刻, 这些子波的包迹就是新的波阵面. 这就是**惠更斯原理**.

惠更斯原理适用于任何波动过程, 无论是机械波还是电磁波, 也不论波动经过的介质是均匀或非均匀的, 只要知道某一时刻的波阵面, 就可以依据惠更斯原理, 用几何作图的方法来确定下一时刻的波阵面, 因而它在很大范围内解决了波的传播问题.

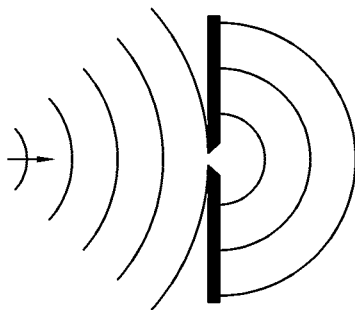


图 7-10 惠更斯原理

下面举例说明惠更斯原理的应用. 图 7-11(a) 是以 O 为中心的球面波以波速 u 在各向同性的均匀介质中传播, t_1 时刻的波阵面是以 O 为圆心、半径 $R_1 = ut_1$ 的球面 S_1 . 现以 S_1 上各点为中心、 $r = u(t_2 - t_1)$ 为半径画出许多球形子波, 这些子波在波行进方向的包迹面 S_2 , 就是下一时刻 t_2 的新的波阵面. 可知, S_2 就是以 O 为中心、 $R_2 = ut_2$ 为半径的球面.

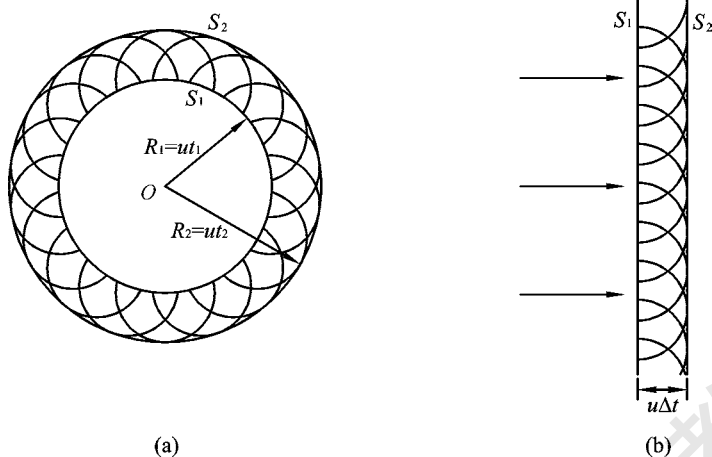


图 7-11 波阵面

如图 7-11(b)所示,是利用惠更斯原理,已知平面波在某一时刻的波阵面 S_1 ,用几何作图求出下一时刻的波阵面 S_2 。

当波在各向同性的均匀介质内传播时,用上述作图法所求出波阵面的形状总是保持不变的.当波在不均匀介质中或在各向异性的介质中传播,同样可以用惠更斯原理求出波阵面,但波阵面的形状和波的传播方向都可以发生变化.这一点,在讨论光在各向异性的晶体中传播的双折射现象中得到应用。

应当指出,惠更斯原理没有说明子波的强度分布,它只解决了波的传播方向问题.对此,菲涅耳对惠更斯原理作了重要补充,形成惠更斯-菲涅耳原理,定量地计算了光的衍射。

利用惠更斯原理还可以导出波的反射定律和折射定律。

7.5 波的叠加原理 波的干涉和驻波

► 7.5.1 波的叠加原理

几列波同时在介质中传播,不管它们是否相遇,都各自以原有的振幅、波长和频率独立传播,彼此互不影响.在相遇处质点的位移,等于各列波单独传播时在该处位移的矢量和,这就是**波的叠加原理**.例如,在欣赏管弦乐时,乐队中各种乐器发出的声波,并不相互干扰而使音乐旋律发生变化,我们照样能辨别出各种乐器的声音。

► 7.5.2 波的干涉

一般情况下,振幅、频率、相位都不同的几列波在某一点叠加时,合振动是很复杂的.下面讨论一种最简单又最重要的情况。

如果有两列波,波源的频率和振动方向相同,并且具有恒定的相位差,这样两列波称**相干波**,相应的波源称**相干波源**.两列相干波在介质中的叠加,产生波强度有强有弱的稳定的分布的现象称为**干涉**.设两相干波波长为 λ , S_1 和 S_2 处两个相干波源的振动方程分别为



$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

式中 ω 为圆频率, A_1, A_2 为波源的振幅, φ_1, φ_2 为波源的初相位. 设介质中一点 P 与两波源的距离分别为 r_1, r_2 (图 7-12), 则两相干波在 P 处的分振动为

$$y_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right),$$

$$y_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right).$$

由 (6.4-1) 式和 (6.4-2) 式, 可知 P 点的合振动为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi).$$

其中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)},$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}.$$

因为两相干波在 P 处的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ 是个恒量, 所以两波相遇处的合振幅是个恒量.

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2\pi k, k=0, 1, 2, \dots$ 时, 合振幅最大, $A = A_1 + A_2$;

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right), k=0, 1, 2, \dots$ 时, 合振幅最小, $A = |A_1 - A_2|$.

如果两相干波源的初相位相同, $\varphi_1 = \varphi_2$, 上述条件可简化为

$\delta = r_1 - r_2 = \pm k\lambda, k=0, 1, 2, \dots$ 时, 合振动振幅最大;

$\delta = r_1 - r_2 = \pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k=0, 1, 2, \dots$ 时, 合振动振幅最小.

式中 $\delta = r_1 - r_2$ 是两相干波源到相遇处 P 的路程之差, 称为波程差.

图 7-13(a) 是两个相干波干涉的示意图. S_1, S_2 处相干点波源发出的球面波, 实线代表离波源整数倍波长的波阵面, 虚线代表离波源奇数倍半波长的波阵面. 在两实线或两虚线

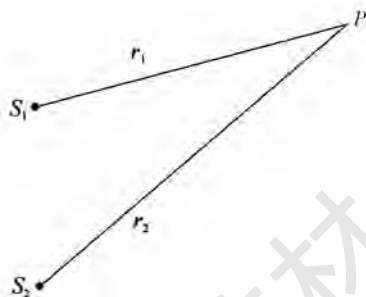


图 7-12 相干波的叠加

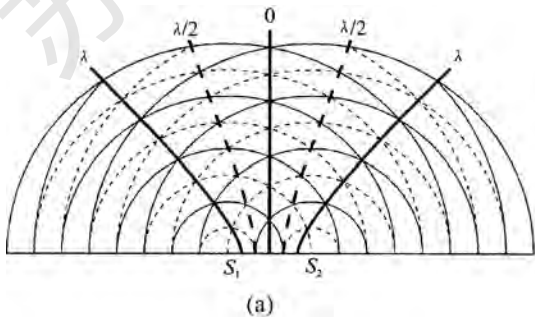


图 7-13 波的干涉

相交处,两振动同相,振幅最大;在实线与虚线相交处,两振动反相,振幅最小.图 7-13(b)是在水槽内用两个同相位的点波源产生的圆形水波所产生的干涉现象.

干涉现象是波动所特有的现象.对于光学、声学和许多工程学科都非常重要,并且有广泛的实际应用.

► 7.5.3 驻波

设有两列振幅相同的相干波,沿相反的方向传播.为方便计,取两波重合的某一时刻为计时起点,任一波峰处为原点,则两列波的表达式分别为

$$y_1 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right).$$

两波相遇处的合位移为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right).$$

应用三角恒等式,由上式化可得

$$y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (7.5-1)$$

此式称为驻波方程,它和波动方程(7.2-1)式不同,这里 x 和 t 两个变量分开了.

此式说明,两波相遇处的质点在做圆频率为 ω 、振幅为 $\left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ 的简谐运动.不同质点的振幅随其位置 x 作周期性变化.当 $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, k=0,1,2,\dots$, 即 $x = \pm k \frac{\lambda}{2}, k=0,1,2,\dots$ 时,该处质点具有最大振幅,这些点称波腹,相邻两个波腹之间的间隔为 $\frac{\lambda}{2}$; 当 $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \frac{2k+1}{2}\pi, k=0,1,2,\dots$, 即 $x = \pm \frac{2k+1}{4}\lambda, k=0,1,2,\dots$ 时,该处质点的振幅为零,这些点称波节,相邻两个波节之间的间隔为 $\frac{\lambda}{2}$. 相邻的波腹、波节之间的间隔为 $\frac{\lambda}{4}$.

图 7-14 显示了在 $\frac{1}{2}$ 个周期内,以周期的 $\frac{1}{8}$ 为时间间隔的驻波的波形.从图中可以看出,两波节之间各点的振动是同相的;在波节的两侧,振动是反相的;波节处质点静止,不振动.因此,随着时间的变化,波形只作上下的变化而不在 x 方向移动,这种波称驻波,以区别于波形前进的行波.

驻波中,波节不参加振动,因而能量不能流过波节.因此,驻波不能像行波一样传播能量.

驻波可以由入射波和反射波叠加而成.在反射处是波腹还是波节,取决于反射处两侧介质的性质.具体地说,与介质密度 ρ 和波在该介质中的波速的大小 u 的乘积有关, ρu 称为波阻.对反射处两侧的介质而言,波阻 ρu 大的称为波密介质,波阻 ρu 小的称为波疏介质.可以证明,当第一介质中的行波在第二介质处反射时,如果 $\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$, 在界面处反射波与入射波同相,形成波腹;如果 $\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$, 界面处反射波与入射波反相,反射波有相位突变 π , 相当于反射波损失了半个波长(称半波损失),形成波节.

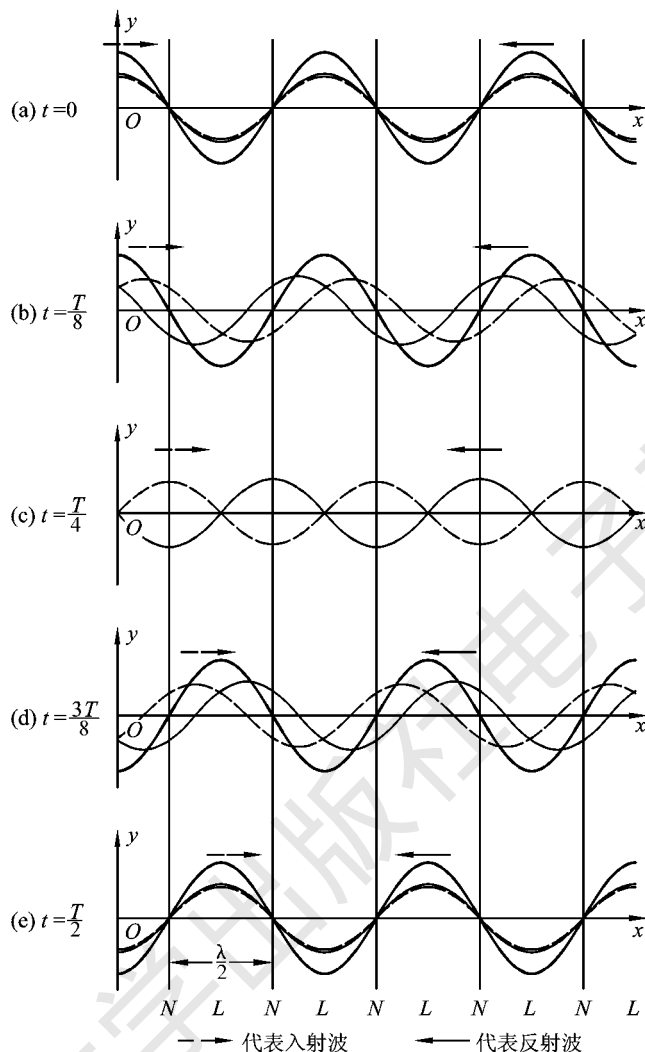


图 7-14 驻波

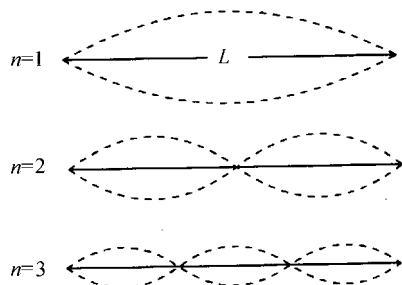
例 7-5 试分析两端固定、长 L 的弦产生的振动频率.

解 把两端固定的弦拨动一下, 就形成横波. 横波在两固定端反射, 形成驻波, 但并不是所有波长的波都能形成驻波. 两固定端点必须为波节, 相邻两个波节之间的距离是 $\frac{\lambda}{2}$. 驻波的波长必须满足下列条件: 设弦线上有 n 个 $\frac{\lambda}{2}$, 则有

$$n \frac{\lambda}{2} = L, \quad n=1, 2, \dots,$$

或

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n=1, 2, \dots.$$



例 7-5 图

弦上波速为

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

弦上频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

两端固定的弦的驻波形态如图所示. 可见, 弦线可能产生的频率是不连续的, 这些频率称固有频率, 其中最低的频率($n=1$)称基频, 其他频率是基频的整数倍, 称倍频.

7.6 多普勒效应



► 7.6.1 多普勒效应

当人们站在铁道旁听列车的汽笛声能够感受到, 列车快速迎面而来时, 音调会变高; 当列车快速离去时, 音调会变低. 如果声源静止而观察者运动, 或者声源和观察者都运动, 也会发生观察频率与声源频率不一致的现象. 这种由于波源或观察者的运动而出现观察频率与波源频率不一致的现象, 称为多普勒效应. 它是奥地利物理学家多普勒(J. C. Doppler 1803—1853)在 1842 年发现的. 对机械波, 所谓运动或静止都是相对于介质的. 下面分几种情况进行讨论.

1. 波源静止而观察者运动

静止点波源的振动在均匀各向同性介质中传播. 设波源频率为 ν , 波长为 λ , 波相对于静止介质的波速为 u , 则

$$\nu = \frac{u}{\lambda}.$$

若观察者以速率 $v_{\text{观}}$ 向波源运动, 则波对观察者的速率为 $u + v_{\text{观}}$, 而观察者测量上述球面波的波长仍为 λ , 观察者感受的频率为

$$\nu' = \frac{u + v_{\text{观}}}{\lambda} = \left(\frac{u + v_{\text{观}}}{u} \right) \nu. \quad (7.6-1)$$

因此, 当观察者向波源运动时, 感觉到的频率会升高; 若观察者以 $v_{\text{观}}$ 离开波源运动, 他观测到的波速为 $u - v_{\text{观}}$, 同样可以证明观察者感受到的频率会下降, 即

$$\nu' = \left(\frac{u - v_{\text{观}}}{u} \right) \nu. \quad (7.6-2)$$

2. 观察者静止而波源运动

若观察者相对介质静止, 波源以速率 $v_{\text{源}}$ 向观察者运动, 则波源发出的球形波阵面不再同心, 相隔 1 个周期的两个波阵面中心之间的距离为 $v_{\text{源}}T$ (图 7-15). 对于观察者来说, 有效波长 λ' 为

$$\lambda' = \lambda - v_{\text{源}}T.$$

由于观察者相对介质不动, 所以他观察到的波速就是介质中的波速 u , 于是观察者感受到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - v_{\text{源}}T} = \frac{u}{u - v_{\text{源}}} \nu. \quad (7.6-3)$$

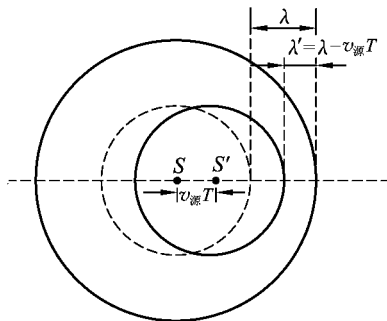


图 7-15 波源运动

因此,当波源向静止的观察者运动时,观察者感受到频率升高;同样可以证明,当波源以 $v_{\text{源}}$ 离观察者运动时,观察者感受到频率会降低为

$$\nu' = \frac{u}{u + v_{\text{源}}} \nu. \quad (7.6-4)$$

由此可知,这里观测频率和波源频率之所以不同,是由于介质中波长发生了变化.

3. 波源和观察者同时在一条直线上运动

综合以上两种分析,可得当波源和观察者相向运动时,观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u + v_{\text{观}}}{\lambda - v_{\text{源}} T} = \frac{u + v_{\text{观}}}{u - v_{\text{源}}} \nu. \quad (7.6-5)$$

当波源和观察者背向运动时,观察者接收到的频率

$$\nu' = \frac{u - v_{\text{观}}}{u + v_{\text{源}}} \nu. \quad (7.6-6)$$

若波源和观察者的速度不在两者的连线上,上式中的 $v_{\text{源}}$ 和 $v_{\text{观}}$ 应取它们在连线上的投影.

例 7-6 (1) 一辆汽车的喇叭声频率为 400 Hz,以 34 m/s 的速度在一笔直的公路上行驶.站在公路边的观察者测得这辆汽车的喇叭声的频率是多少?声音在空气中传播的速度为 340 m/s.

(2) 如果上述汽车停在公路旁,观察者乘坐汽车的速度是 34 m/s,那么,观察者测得这辆汽车喇叭声的频率是多少?

解 (1) 如果汽车驶向观察者,观察者测得的频率为

$$\nu' = \frac{u}{u - v_{\text{源}}} \nu_0 = \frac{340}{340 - 34} \times 400 \text{ Hz} = 444 \text{ Hz}.$$

如果汽车驶离观察者,测得的频率为

$$\nu' = \frac{u}{u + v_{\text{源}}} \nu_0 = \frac{340}{340 + 34} \times 400 \text{ Hz} = 364 \text{ Hz}.$$

(2) 如果观察者驶向停在路旁的汽车,观察者测得的频率为

$$\nu' = \left(\frac{u + v_{\text{观}}}{u} \right) \nu_0 = \left(\frac{340 + 34}{340} \right) \times 400 \text{ Hz} = 440 \text{ Hz}.$$

如果观察者驶过停在路旁的汽车,测得的频率为

$$\nu' = \left(\frac{u - v_{\text{观}}}{u} \right) \nu_0 = \left(\frac{340 - 34}{340} \right) \times 400 \text{ Hz} = 360 \text{ Hz}.$$

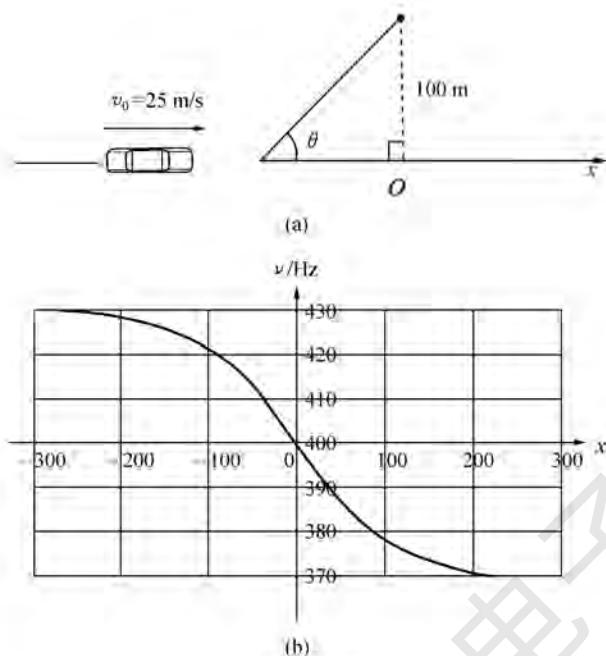
*** 例 7-7** 一汽车以 $v_0 = 25 \text{ m/s}$ 的速率在一笔直的公路上前进,公路外 100 m 处有一个静止的观察者,见图(a).如果汽车的喇叭声的频率 $\nu_0 = 400 \text{ Hz}$,观察者听到汽车喇叭的频率是多少?

解 汽车相对于观察者的速率为

$$v_{\text{源}} = v_0 \cos \theta.$$

其中 θ 为汽车前进方向与汽车和观察者连线的夹角,如图(a)所示.观察者听到的汽车喇叭声的频率为

$$\nu = \frac{u}{u - v_{\text{源}}} \nu_0 = \frac{u}{u - v_0 \cos \theta} \nu_0.$$



例 7-7 图

其中 u 为空气中声速, $u=343.4$ m/s. 如果以汽车在公路上的前进方向为 x 轴, 以观察者在公路上的投影点为原点, 汽车的位置用 x 表示, 则

$$\nu = \frac{u}{u - \frac{v_0 x}{\sqrt{x^2 + 100^2}}} \nu_0.$$

按上式计算出汽车在各位置时观察者听到的频率如图(b)所示. 当汽车在很远处驶向观察者时, $\theta \approx 0$,

$$\nu = \frac{343.4}{343.4 - 25} \times 400 \text{ Hz} = 431.5 \text{ Hz}.$$

当汽车与观察者相距最近时, $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\nu = \nu_0 = 400 \text{ Hz}.$$

当汽车驶离观察者很远时, $\theta \approx 180^\circ$,

$$\nu = \frac{343.4}{343.4 + 25} \times 400 \text{ Hz} = 372.9 \text{ Hz}.$$

由于光波的传播不需要介质, 光在真空中传播的速率是个恒量 c , 因此在光的多普勒效应中, 由光源和观察者的相对速率 v_s 来决定观测到的频率. 光波的多普勒效应公式要用相对论来证明, 这里我们只给出结果, 当光源和观察者在同一直线上运动时,

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c \pm v_s}{c \mp v_s}}. \quad (7.6-7)$$

其中 c 是真空中光速, 分子和分母上的上标号对应着光源和观察者在接近, 这时接收到的频率变大; 分子和分母的下标号对应着光源和观察者背离运动, 这时接收到的光波频率变

小,相应的波长变长,这种现象称之为“(多普勒)红移”.20世纪30~40年代的天体物理学家依靠“红移”的测定来确定其他星球背离我们而去的速度,从而为“大爆炸”的宇宙学理论提供了重要的论据.

目前,多普勒效应已在科学研究、工程技术、交通管理、医疗诊断等各方面有着十分广泛的应用.例如,分子、原子和离子由热运动产生的多普勒效应使其发射和吸收的谱线增宽.在天体物理和受控热核聚变实验装置中谱线的多普勒增宽已成为一种分析恒星大气、等离子体物理状态的重要手段.基于反射波多普勒效应原理的雷达系统已广泛应用于车辆、导弹、人造卫星等运动目标的速度监测.在医学上所谓的“D超”,是利用超声波的多普勒效应来检查人体内脏、血管的运动和血液的流速、流量情况.在工矿企业中常利用多普勒效应来测量管道中有悬浮物液体的流速.

► * 7.6.2 马赫锥 冲击波

图7-16是相对于介质运动点波源的波面图,其中图(a)波源静止,球形波面是同心的,图(b)中波源运动,其速度 $v_{\text{源}}$ 小于波速,波面的中心错开了.图(c)中波源速度 $v_{\text{源}}$ 超过波速 u .这时,任一时刻波源本身超过它此前发出的波前.当波源在 S_1 位置时发出的波在其后 t 时刻的波阵面,半径为 ut ,而此时刻波源已前进了 $v_{\text{源}}t$ 的距离,到达 S_2 位置.在波源的前方,没有任何波动产生.在时间 t 内,系列波面的包络面形成圆锥面,这个圆锥面叫**马赫锥**,其半顶角 α 由下式决定

$$\sin \alpha = \frac{u}{v_{\text{源}}}. \quad (7.6-8)$$

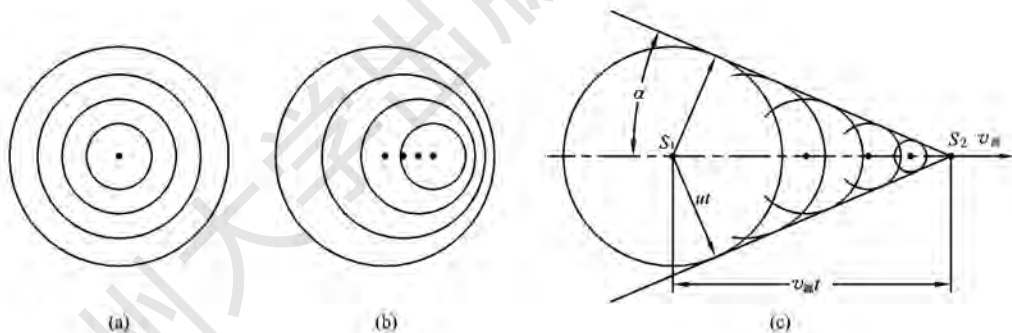


图 7-16 马赫锥

飞机或炮弹超音速飞行时,就会在空气中激起圆锥形的波,这就是**冲击波**.冲击波掠过物体时会产生破坏作用.当船速超过水波的波速,就会在船后激起以船为顶端的V形波,这波称为**艏波**.当带电粒子在介质中高速运动,当其速度超过该介质中的光速,辐射锥形的电磁波,这称为**切伦科夫辐射**(见15.3节)

顺便指出波源的运动速度与波速之比 $\frac{v_{\text{源}}}{u}$,称为**马赫数**,它是空气动力学中一个有用的参数.

内容提要

1. 平面简谐波方程

$$y(x, t) = A \cos \omega \left(t \mp \frac{x}{u} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos \left(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = A \cos(\omega t \mp kx).$$

取负号朝 $+x$ 方向传播,取正号朝 $-x$ 方向传播,沿传播方向看去,相位逐点落后.

2. 波的时空参量: 周期 T 、圆频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 表征时间周期性; 波长 λ 表征空间周期性.

$$\text{波速(相速): } u = \frac{\lambda}{T} = \nu \lambda.$$

$$3. \text{ 波的能量: } E_k = E_p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

$$(1) \text{ 能量密度: } w = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right).$$

$$(2) \text{ 平均能量密度: } \bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

$$(3) \text{ 能流密度: } I = wu.$$

$$(4) \text{ 波的强度: } \bar{I} = \bar{w}u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u.$$

4. 声波: 频率范围为 $20 \sim 20\,000$ Hz.

$$(1) \text{ 声强(平均能流密度): 标准 } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2.$$

$$(2) \text{ 声强级: } L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB}.$$

5. 惠更斯原理.

6. 相干波: 频率相等、振动方向相同、有恒定的相位差.

7. 波的干涉(相干波的迭加)

$$(1) \text{ 振幅: } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta \varphi}.$$

$$(2) \text{ 相位差: } \Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1).$$

$$\Delta \varphi = 2k\pi \quad A = A_1 + A_2 \quad \text{相长干涉;}$$

$$\Delta \varphi = (2k+1)\pi \quad A = |A_1 - A_2| \quad \text{相消干涉.}$$

$$\text{当 } \varphi_1 = \varphi_2 \text{ 时, } \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2).$$

$$(3) \text{ 波程差 } \delta = r_1 - r_2 = k\lambda \quad \text{相长干涉;}$$

$$\delta = r_1 - r_2 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{相消干涉.}$$

8. 驻波: 入射波+反射波, 平均能流为零,

$$y(x, t) = A \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \right) + A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t.$$

波腹为振幅最大处, 波节为振幅为 0 处.

相邻波节之间(或波腹之间)相距 $\frac{\lambda}{2}$, 相邻波节与波腹之间距离 $\frac{\lambda}{4}$. 反射点处, 自由端为同相位, 全波反射. 固定端为反相位, 半波损失.

9. 多普勒效应: 波源、观察者运动, 波动频率 $\nu \rightarrow \nu'$,

$$\nu' = \frac{u \pm v_{\text{观}}}{u \mp v_{\text{源}}} \nu.$$

u 为波相对于静止介质的波速.

习 题

7-1 设在介质中有某一波源做简谐运动, 并产生平面余弦波, 问:

- (1) 振动的周期与波动的周期是否一样?
- (2) 振动的速度与波动的速度大小是否相等? 方向是否相同?

7-2 以下三种关于波长的说法是否正确?

- (1) 同一波线上两个相邻的相位相差 2π 的点之间的距离;
- (2) 在一个周期内波传播的距离;
- (3) 在一波线上相邻波峰(或波谷)之间的距离.

7-3 机械波通过不同的介质时, 波长 λ 、频率 ν 、周期 T 和波速 u 四个量, 哪些会改变? 哪些不改变?

7-4 波函数 $y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ 中的 $\frac{x}{v}$ 表示什么? 如果把方程改写为 $y = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right)$, $\frac{\omega x}{v}$ 又表示什么?

7-5 波的能量与振幅平方成正比, 在其他条件都相同时, 在两个振幅相同的波的互加强点, 合成振幅是单个振幅的 2 倍, 能量增为单个振动的 4 倍. 这与能量守恒是否矛盾?

7-6 两相干波波源振动的相位差为 π 的奇数倍, 到达某相遇点 P 的波程差为半波长的偶数倍.

- (1) P 点的合振动是加强还是减弱?
- (2) 如果到 P 点的波程差为半波长的奇数倍, P 点的合振动又如何?

7-7 一横波的波函数为

$$y = 0.05 \cos(10\pi t - 4\pi x).$$

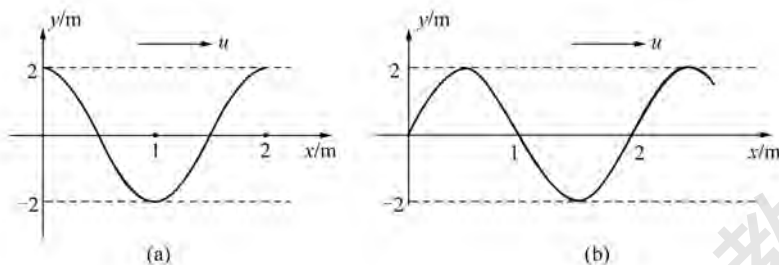
式中 x, y 以 m 计, t 以 s 计. 求:

- (1) 它的振幅、波速、频率和波长;
- (2) 介质中质点振动的最大速度和最大加速度;
- (3) $x = 0.2$ m 处的质点在 $t = 1$ s 时的相位, 它是原点处质点在哪一时刻的相位? 这个相位所代表的运动状态在 1.25 s 时到达哪一点? 在 $t = 1.5$ s 时到达哪一点?
- (4) 分别画出 $t = 1$ s, 1.25 s, 1.5 s 时的波形.

7-8 已知平面余弦波波源的振动周期为 $T = \frac{1}{2}$ s、振幅 $A = 0.1$ m、余弦波的波长 $\lambda = 10$ m. 当 $t = 0$ 时, 波源处振动的位移为正方向最大值, 取波源为原点, 波沿 x 轴正方向传播.

- (1) 求波方程;
 (2) 画出 $t = \frac{T}{4}$ 和 $\frac{T}{2}$ 时的波形.

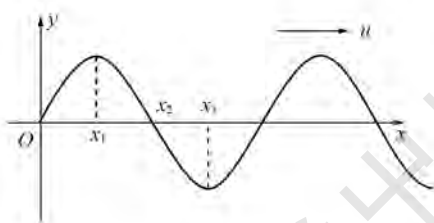
7-9 图(a)(b)分别表示 $t=0$ 和 $t=2$ s 时某一平面简谐波的波形,试写出此平面简谐波方程.



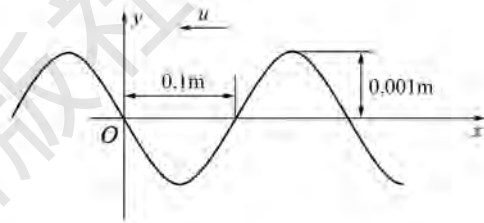
习题 7-9 图

7-10 平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形如图所示.

- (1) 试画出 $t = \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}$ 时刻的 $y-x$ 曲线;
 (2) 试画出 $x=0, x_1, x_2, x_3$ 处的 $y-t$ 曲线.



习题 7-10 图



习题 7-11 图

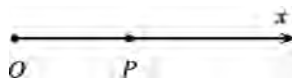
7-11 一平面简谐波在 $t=0$ 时的波形如图,波沿 x 轴负方向传播,波速 $u=330$ m/s,试写出波方程.

7-12 振幅为 10 cm、波长为 200 cm 的一正弦横波,以 100 cm/s 的速率,沿一拉紧的弦从左向右传播,坐标原点取在弦的左端. $t=0$ 时,弦的左端经平衡位置向下运动,求:

- (1) 弦左端的振动方程;
 (2) 波方程;
 (3) 离左端右方 150 cm 处质点的振动方程;
 (4) 弦上质点的最大振动速度;
 (5) $t=3.25$ s 时, (3) 中质点的位移和速度.

7-13 一平面简谐波以速度 u 沿 x 轴正方向传播, O 为坐标原点, $\overline{OP}=l$, P 点的振动方程为

$$y_P = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$



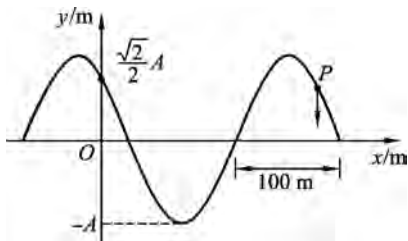
习题 7-13 图

- (1) 求 O 点的振动方程;
 (2) 写出波的表达式.

7-14 如图所示为一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图. 设此简谐波的频率为 250 Hz , 且此时质点 P 的运动方向向下. 写出:

(1) 该波的波动表达式;

(2) 在距原点 O 为 100 m 处质点的振动方程和振动的速度方程.



习题 7-14 图

7-15 质量为 0.5 kg 、长 50 m 的细绳, 用 400 N 的张力拉紧, 使绳的一端做周期性的横向振动, 频率为 10 Hz .

(1) 求波速和波长;

(2) 若将张力加倍, 要使波长不变, 频率应如何变化?

7-16 一正弦空气波, 沿直径为 0.14 m 的圆柱形管传播, 波的频率为 300 Hz , 平均强度为 $1.8 \times 10^{-2}\text{ J/s} \cdot \text{m}^2$, 波速为 300 m/s , 求:

(1) 波的平均能量密度和最大能量密度;

(2) 在两个相邻的同相波面之间的波段中的平均能量.

7-17 一平面简谐波, 频率为 300 Hz , 波速为 340 m/s , 在截面面积为 $3.00 \times 10^{-2}\text{ m}^2$ 的管内空气中传播, 若在 10 s 内通过截面的能量为 $2.70 \times 10^{-2}\text{ J}$, 求:

(1) 通过截面的平均能流;

(2) 波的平均能流密度;

(3) 波的平均能量密度.

7-18 在临街的窗口测得噪声的声强级为 60 dB , 假如窗口面积为 40 m^2 , 传入室内的声波功率是多少?

7-19 离一点声源 10 m 的地方, 声音的声强级为 20 dB .

(1) 求离声源 5 m 处的声强级;

(2) 离声源多远的地方, 就听不见 1000 Hz 的声音了?

7-20 有一频率为 500 Hz 的平面简谐波, 在空气 ($\rho=1.3\text{ kg/m}^3$) 中以 $u=340\text{ m/s}$ 的速度传播, 到达人耳时, 振幅 $A=10^{-6}\text{ m}$, 求波在耳中的平均能量密度和声强.

7-21 A, B 为两平面简谐波的波源, 振动表达式分别为

$$x_1 = 0.2 \times 10^{-2} \cos 2\pi t,$$

$$x_2 = 0.2 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + \pi).$$

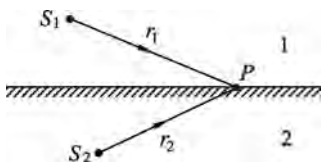
它们传到 P 处时相遇, 产生叠加. 已知波速 $u=0.2\text{ m/s}$, $\overline{PA}=0.4\text{ m}$, $\overline{PB}=0.5\text{ m}$, 试求:

(1) 两波传到 P 处的相位差;

(2) P 处合振动的振幅;

(3) 如果在 P 处相遇的是两横波, 振动方向相互垂直, 则合振动的振幅是多大?

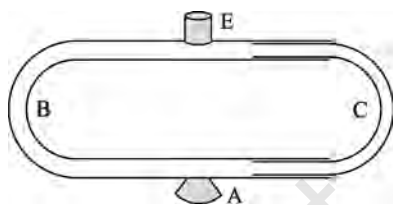
7-22 如图所示, 两列平面相干波在两种不同的介质 1, 2 中传播, 在分界面上的 P 点相遇. 两列波的频率均为 $\nu=100\text{ Hz}$, 振幅 $A_1=A_2=1.00 \times 10^{-3}\text{ m}$, S_1 处波源的相位比 S_2 处的相位



习题 7-22 图

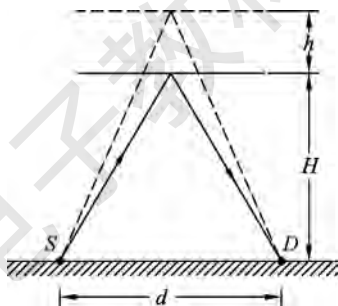
超前 $\frac{\pi}{2}$. 在介质 1 中的波速 $u_1 = 400 \text{ m/s}$, 在介质 2 中的波速 $u_2 = 500 \text{ m/s}$, $r_1 = 4.00 \text{ m}$, $r_2 = 3.75 \text{ m}$, 求 P 点合振动的振幅.

7-23 如图所示为一种声波干涉仪, 声波从入口 E 进入仪器, 分 B, C 两路在管中传播至喇叭口 A 汇合传出. 弯管 C 可以伸缩, 当它渐渐移动时从喇叭口发出的声音周期性地增强和减弱. 设 C 管每移动 10 cm , 声音减弱一次. 求该声波的频率. (空气中的声速取 340 m/s)



习题 7-23 图

7-24 波源放在地面上 S 点, 探测器放在地面上 D 点. S, D 之间的距离为 d , 从 S 直接发出的波与从 S 发出经高度为 H 的水平层反射后的波在 D 处加强, 反射线及入射线与水平层所成的角度相同, 如图所示. 当水平层逐渐升高 h 时, 在 D 处测不到信号. 不考虑大气的吸收, 求此波源发出的波长.



习题 7-24 图

7-25 P, Q 为两个以同相位、同频率、同振幅振动的相干波源, 它们在同一介质中, 设频率为 ν , 波长为 λ , P 与 Q 之间相距 $\frac{3}{2}\lambda$, R 为 P, Q 连线上除 P, Q 之外的任意一点, 求:

- (1) P, Q 发出的波在 R 点的相位差;
- (2) R 点的合振动的振幅.

7-26 同一介质中的两个波源位于 A, B 两点, 其振幅相等, 频率都是 100 Hz , 相位差为 π . 若 A, B 两点相距 30 m , 两波传播速率为 400 m/s , 求 A, B 连线上因干涉而静止的位置.

7-27 设入射波为 $y = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$, 在 $x=0$ 处发生反射, 反射点为一自由端.

- (1) 写出反射波的表达式;
- (2) 合成的驻波的表达式, 并说明哪里是波腹? 哪里是波节?

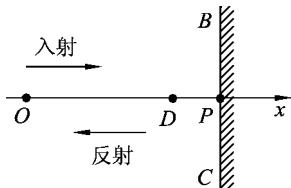
7-28 一弦振动的振动规律为 (相应的单位为 m, s)

$$y = 0.02 \cos 0.16x \cos 750t.$$

- (1) 组成此振动的各分振动的振幅及波速为多少?
- (2) 节点间的距离为多大?

7-29 一琴弦长 50 cm , 两端固定, 不用手指按时, 发出声音的频率是 A 调 440 Hz , 若要发出 C 调 528 Hz 的声音, 手应按在什么位置?

7-30 如图所示, 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播, BC 为波密介质的反射面. 波由 P 点反射, $\overline{OP} = \frac{3\lambda}{4}$, $\overline{DP} = \frac{\lambda}{6}$. 在 $t=0$ 时, 入射波在 O 点处引起的振动是经过平衡位置向负方向运动. 设入射波和反射波的振幅都为 A , 频率为 ν , 求:



习题 7-30 图

- (1) 入射波的表达式;
- (2) 反射波的表达式;

(3) 入射波和反射波在 D 点处引起的合振动方程.

7-31 两观察者 A 和 B 携带频率均为 $1\,000\text{ Hz}$ 的声源. 如果 A 静止, B 以 10 m/s 的速率向 A 运动, 那么 A 和 B 听到的拍各是多少? 设声速为 340 m/s .

7-32 一音叉以 2.5 m/s 的速率接近墙壁, 观察者在音叉后面听到的拍频为 3 Hz , 求音叉振动的频率. 声速取 340 m/s .

7-33 一艘潜艇向着一固定的超声波探测器驶来, 为测量潜艇的速率, 探测器在海水中发出一束频率 $\nu=30\,000\text{ Hz}$ 的超声波, 被潜艇反射回来的超声波与原来的波合成后, 得到频率为 241 Hz 的拍频, 求潜艇的速率. (设超声波在海水中的波速为 $1\,500\text{ m/s}$)