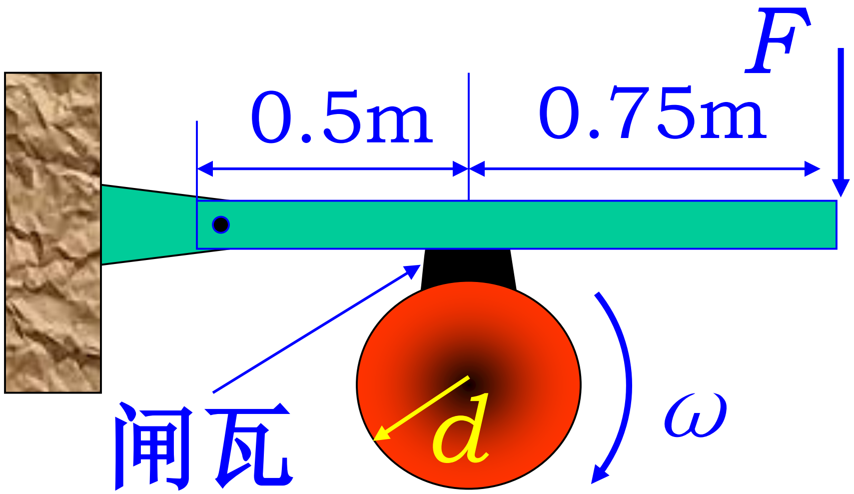
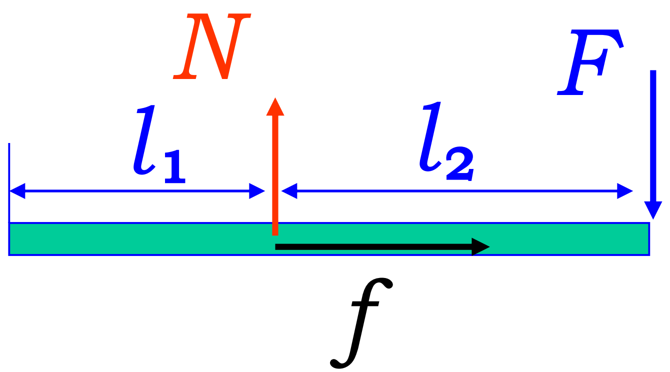
4-2 飞轮的质量为60kg，直径为0.50m，转速为1000r / min，现要求在 5s内使其制动，求制动力 F ,假定闸瓦与飞轮之间的摩擦系数μ= 0.4，飞轮的质量全部分布在轮的外周上。尺寸如图所示。



结束 目录

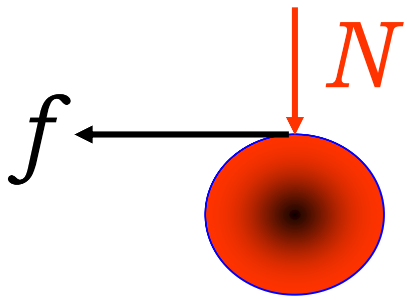
解： $J=mR^2=60\times(0.25)^2$

$=3.75\text{kg.m}^2$



$t=0 \quad \omega_0=2\pi n=2\pi\times\frac{1000}{60}$

$=104.7 \text{ r/s}$



$t=5 \quad \omega=0$

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{0-104.7}{5}=-20.9 \text{ r/s}^2$$

$$F(l_1+l_2)-Nl_1=0$$

$$fR=J\alpha=\mu NR \Rightarrow N=\frac{J\alpha}{\mu R}$$

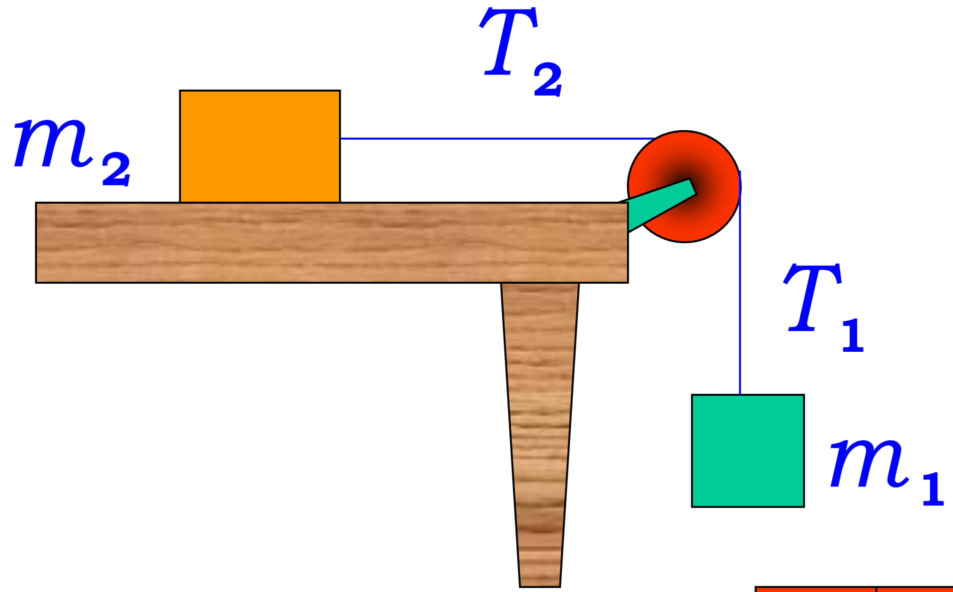
$$F=\frac{l_1}{l_1+l_2}\frac{J\alpha}{\mu R}=314\text{N}$$

结束 目录

4-3 如图所示，两物体1和2的质量分别为m_1与m_2，滑轮的转动惯量为J,半径为 r。

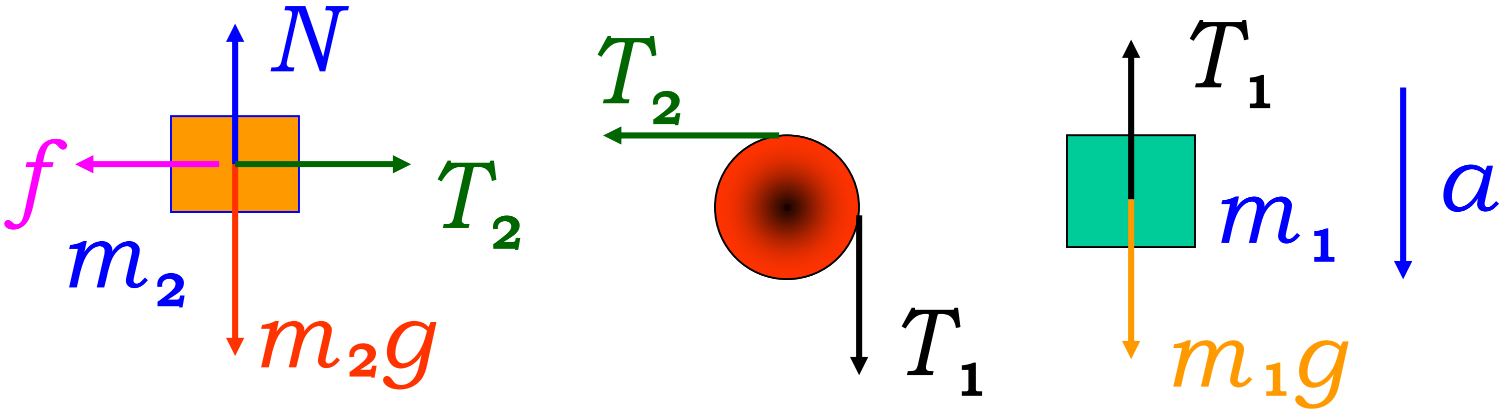
（**1**）如物体2与桌面间的摩擦系数为μ，求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_2 与 T_2（设绳子与滑轮间无相对猾动）；

（**2**）如物体2与桌面间为光滑接触，求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1与 T_2。



结束 目录

解：(1)



$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a \\ T_2 - f = m_2a \\ N - m_2g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = r\alpha \\ f = \mu N = \mu m_2 g \\ T_1 r - T_2 r = J\alpha \end{cases}$$

解得：

$$a = \frac{m_1g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$T_1 = \frac{m_1 g\left(m_2 + \mu m_2 + J/r^2\right)}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$T_2 = \frac{m_2 g\left(m_1 + \mu m_1 + \mu J/r^2\right)}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

结束 目录

(2) $\mu = 0$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$T_1 = \frac{m_1 g\,(m_2 + J/r^2)}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

4-4 电动机带动一个转动惯量为$J = 50$ $\mathrm{kg \cdot m^2}$ 的系统作定轴转动。在 0.5s 内由静止开始最后达到 120 r / min的转速。假定在这一过程中转速是均匀增加的，求电动机对转动系统施加的力矩。

解：由已知 $t = 0.5\text{s}$ $\omega_0 = 0$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t}$$

$$= \frac{2\times 3.14\times \frac{120}{60}}{0.5} = 8\pi \ \text{r/s}^2$$

$$M = J\alpha = 50\times 8\pi = 1.26\times 10^3\ \text{N.m}$$

4-5 求题4-2中制动力矩在制动过程中所作的功。

解：由转动动能定理

$$A=\frac{1}{2}J\left(\omega^{2}-\omega_{0}^{2}\right)=-\frac{1}{2}J\omega_{0}^{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\times 3.75\times\left(104.7\right)^{2}$$

$$=-2.05\times 10^{4}\ \mathrm{J}$$

4-6 某冲床上飞轮的转动惯量为4.00×10^{3}kg·m^{2}．当它的转速达到 30 r/min时，它的转动动能是多少？每冲一次，其转速降为10 r / min转。求每冲一次飞轮对外所作的功。

解：

(1) $$E_{k1}=\frac{1}{2}J\omega_1^2=\frac{1}{2}\times 4.0\times 10^3\left(2\pi\frac{30}{60}\right)^2$$

$$=1.96\times 10^4\ \mathrm{J}$$

(2) $$A=E_{k2}-E_{k1} \qquad E_{k2}=\frac{1}{2}J\omega_2^2$$

$$E_{k2}=\frac{1}{2}J\omega_2^2=\frac{1}{2}\times 4.0\times 10^3\left(2\pi\frac{10}{60}\right)^2$$

$$=2.06\times 10^3\ \mathrm{J}$$

$$A=E_{k2}-E_{k1}=2.06\times 10^3-1.96\times 10^4$$

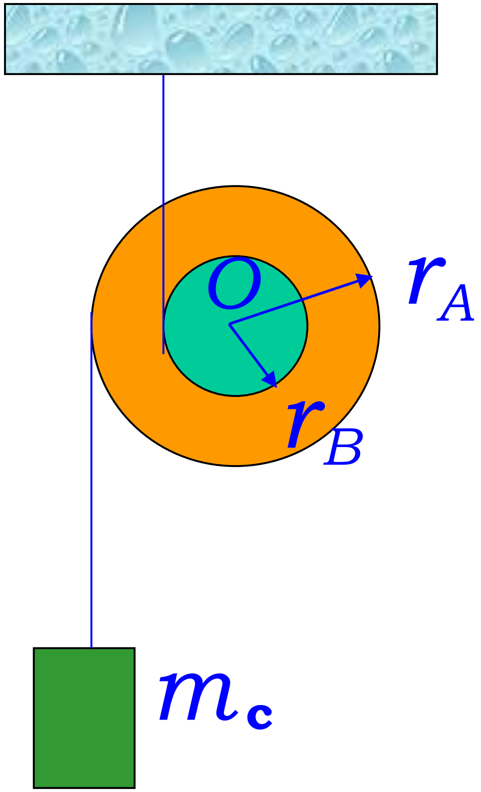
$$=-1.7\times 10^4\ \mathrm{J}$$

飞轮作功为：$1.7\times 10^4\ \mathrm{J}$

4-8 有质量为 m_A与 m_B，的两圆盘同心地粘在一起，半径分别为 r_A与 r_B 。小圆盘边缘绕有绳子，上端固定在天花板上，大圆盘边缘也绕有绳子，下端挂一物体，质量为 m_C（见图）试求：

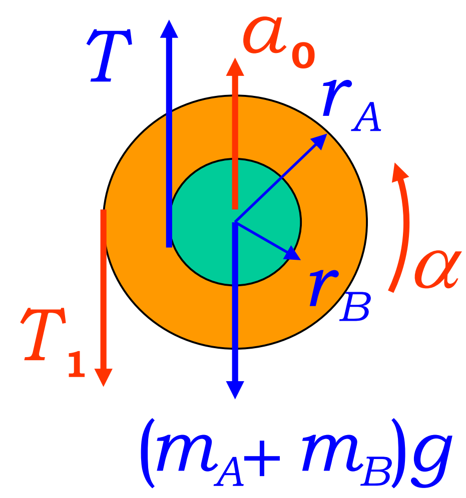
（1）要使圆盘向上加速、向下加速、静止或匀速运动的条件；

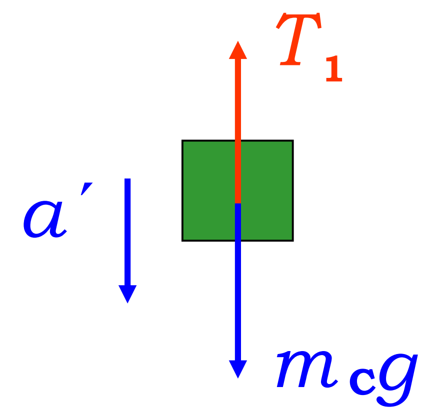
（2）在静止情形下，两段绳子中的张力。



解:(1)

$$\begin{cases} T - T_1 - (m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a_0 \\ T_1 r_A - T r_B = (J_A + J_B)\alpha = J\alpha \\ m_C g - T_1 = m_C a' \\ a_0 = r_B \alpha \\ a' = r_A\alpha - a_0 = r_A\alpha - r_B\alpha \end{cases}$$





解得:

$$a_0 = \frac{(r_A - r_B)m_C g - r_B(m_A + m_B)g}{r_B(m_A + m_B)g + \dfrac{J}{r_B} + \dfrac{(r_A - r_B)^2}{r_B} m_C}$$

$$a_0=\frac{(r_A-r_B)m_C g-r_B(m_A+m_B)g}{r_B(m_A+m_B)g+\frac{J}{r_B}+\frac{(r_A-r_B)^2}{r_B}m_C}$$

若：上升 $a_0>0$

要求： $(r_A-r_B)m_C g>r_B(m_A+m_B)g$

若：下降 $a_0<0$

要求： $(r_A-r_B)m_C g<r_B(m_A+m_B)g$

若：静止 $a_0=0$

要求： $(r_A-r_B)m_C g=r_B(m_A+m_B)g$

(2)
$$\begin{cases} T - T_1 - (m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a_0 \\ T_1 r_A - T r_B = (J_A + J_B)\alpha = J\alpha \\ m_C g - T_1 = m_C a' \\ a_0 = r_B \alpha \\ a' = r_A \alpha - a_0 = r_A \alpha - r_B \alpha \end{cases}$$

静止时，$a_0=0$，上述方程变为：

$$\begin{cases} T - T_1 - (m_A + m_B)g = 0 \\ T_1 r_A - T r_B = (J_A + J_B)\alpha = J\alpha \\ m_C g - T_1 = m_C a' \\ a' = r_A \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - T_1 - (m_A + m_B)g = 0 \\ T_1 r_A - T r_B = (J_A + J_B)\alpha = J\alpha \\ m_c g - T_1 = m_c a' \\ a' = r_A \alpha \end{cases}$$

解得:

$$T_1 = \frac{m_c g\left[J - m_c(m_A + m_B) r_A r_B\right]}{m_c r_A^2 - m_c r_A r_B + J}$$

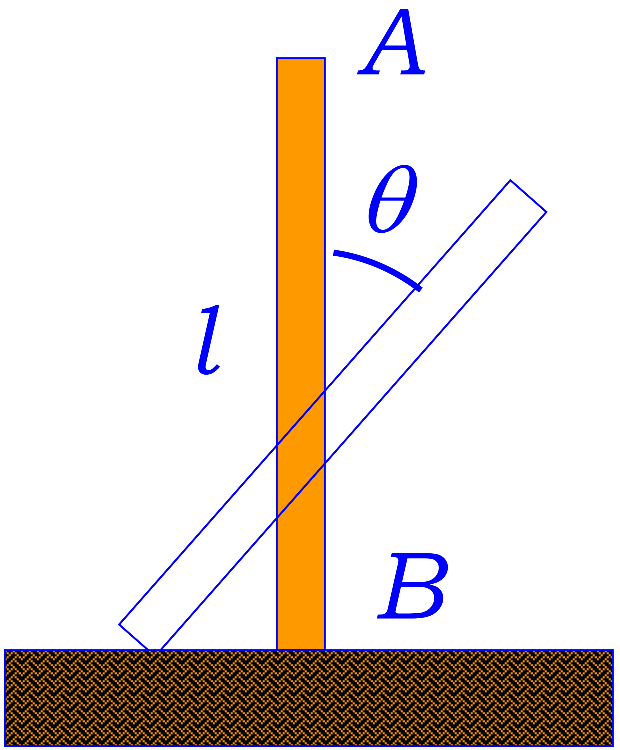
$$T = T_1 + (m_A + m_B)g$$

$$= \frac{m_c g\left[J - m_c(m_A + m_B) r_A r_B\right]}{m_c r_A^2 - m_c r_A r_B + J} + (m_A + m_B)g$$

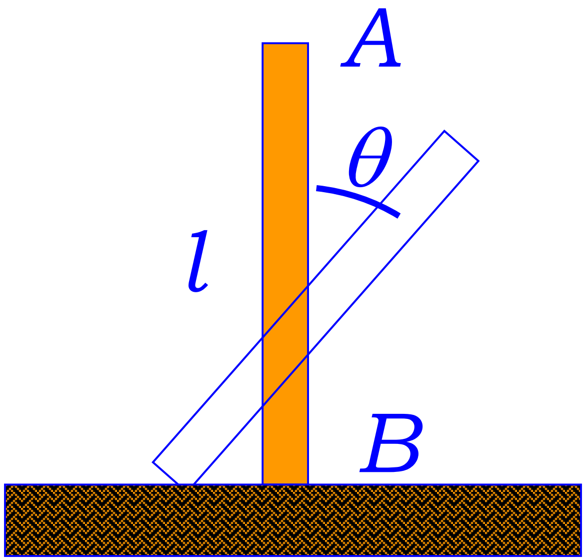
4-11 长为 l 质量为 m 的均匀杆，在光滑桌面上由竖直位置自然倒下，当夹角为θ时（见图），求：

（1）质心的速度；

（2）杆的角速度。



解：选质心坐标系



$$\begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = \dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{cx} = 0 \\ v_{cy} = \dfrac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{l}{2}\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{cases} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$$

$$v_c = v_{cy} = \frac{l}{2}\sin\theta\,\omega$$

由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m l^2\right)\omega^2 = mg\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{c}}^{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^{2}\right)\omega^{2}=mg\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

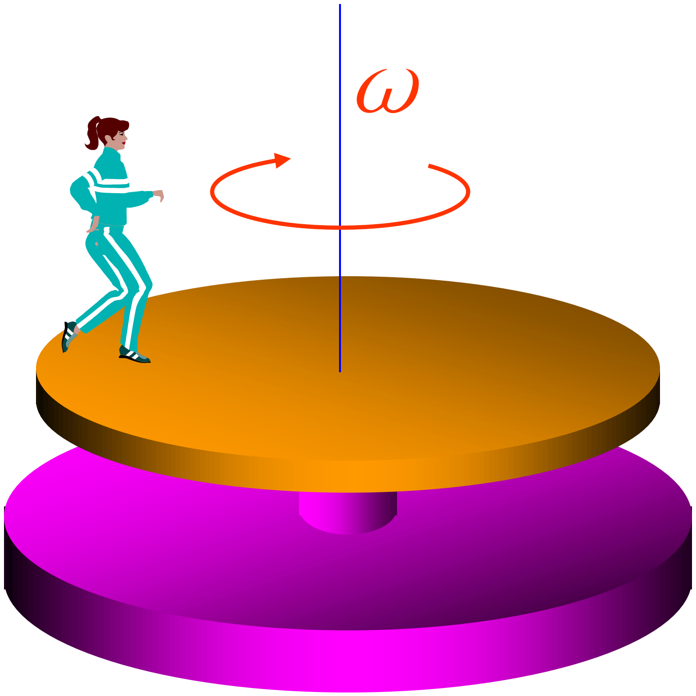
将v_{c}代入得：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{l^{2}}{4}\sin^{2}\theta\,\omega^{2}\right)+\frac{1}{24}ml^{2}\omega^{2}=mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

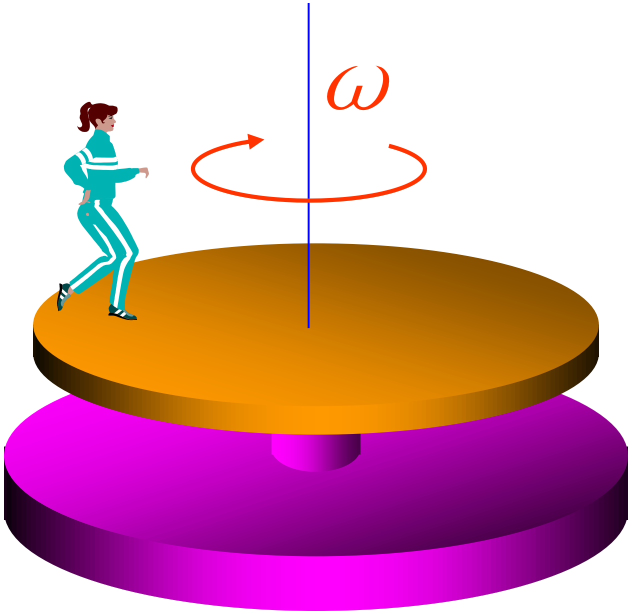
$$\omega=\sqrt{\frac{12g(1-\cos\theta)}{(1+3\sin^{2}\theta)\,l}}$$

$$v_{\mathrm{c}}=\frac{l}{2}\sin\theta\,\omega=\frac{l}{2}\sin\theta\sqrt{\frac{12g(1-\cos\theta)}{(1+3\sin^{2}\theta)\,l}}$$

4-13 在自由旋转的水平圆盘边上，站一质量为 m 的人。圆盘的半径为，转动惯量为 J，角速度为 ω。如果这人由盘边走到盘心，求角速度的变化及此系统动能的变化。



解：系统角动量守恒



(1) $$(mR^2+J)\omega = J\omega'$$

$$\omega' = \frac{mR^2+J}{J}\omega$$

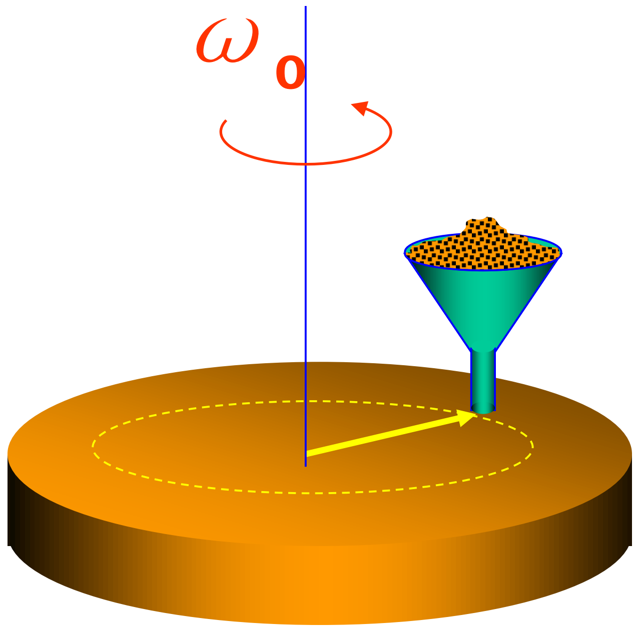
$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \frac{mR^2}{J}\omega$$

(2) $$E_k' = \frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J\frac{(mR^2+J)^2}{J^2}\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(mR^2+J)^2}{J}\omega^2$$

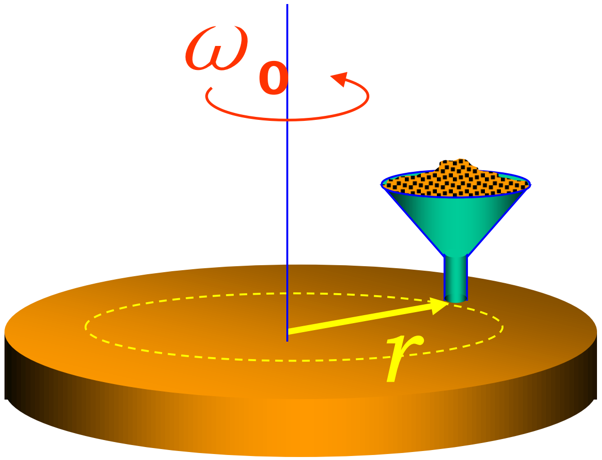
$$\Delta E_k = E_k' - E_k = \frac{1}{2J}(mR^2+2J)\,mR^2$$

4-15 如图所示，转台绕中心竖直轴以角速度ω 作匀速转动。转台对该轴的转动惯量$J = 5\times10^{-5}$ kg.m。现有砂粒以 1 g/s 的速度落到转台，并粘在台面形成一半径 r=0.1 m的圆。试求砂粒落到转台，使转台角速度变为$\omega_0/2$所花的时间。



已知：$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 1\times10^{-3}\,\mathrm{kg/s}$

$J = 5\times10^{-5}\ \mathrm{kg.m^2}$



解：由角动量守恒

$$J\omega_0 = J'\omega' = (J+mr^2)\frac{1}{2}\omega_0$$

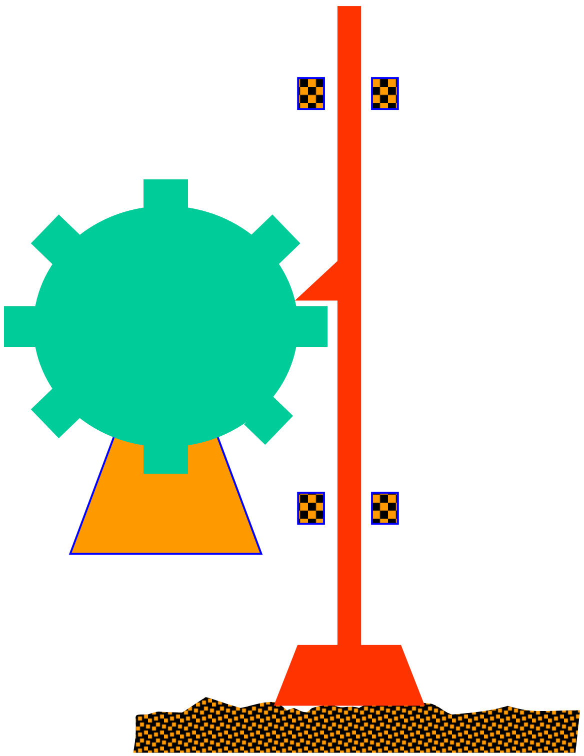
$$\frac{1}{2}mr^2\omega_0 = \frac{1}{2}J\omega_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{J}{r^2}$$

$$t = \frac{m}{\mathrm{d}m/\mathrm{d}t} = \frac{J}{r^2\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{5\times10^{-5}}{(0.1)^2\times1\times10^{-3}} = 5\mathrm{s}$$

结束 目录

4-19 如图所示的打桩装置，半径为 R 的带齿轮转盘绕中心轴的转动惯量为 J 转动角速度为ω_0，夯锤的质量为M，开始处于静止状态，当转盘与夯锤碰撞后，问夯锤的速度能有多大?



结束 目录

解：

$$J\omega_0 = (J + MR^2)\omega'$$

$$\omega' = \frac{J\omega_0}{J + MR^2}$$

$$v = R\omega' = \frac{J\omega_0 R}{J + MR^2}$$

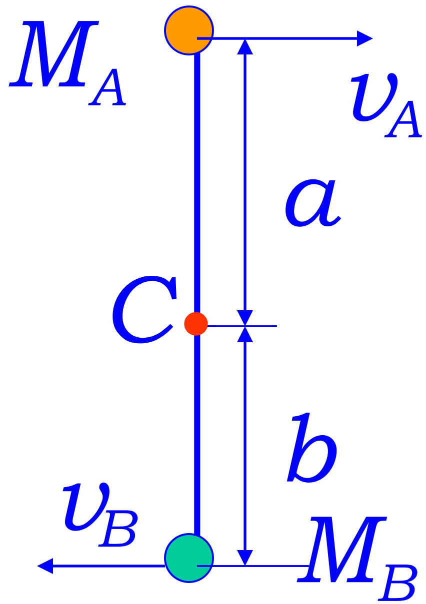
4-21 两滑冰运动员，质量分别为 M_A= 60kg，M_B= 70kg，它们的速率 v_A= 7m/s v_B= 6m / s，在相距1.5m的两平行线上相向而行，当两者最接近时，便拉起手来，开始绕质心作圆周运动并保持两者间的距离为1.5 m。求该瞬时：

（**1**）系统的总角动量；

（**2**）系统的角速度；

（**3**）两人拉手前、后的总动能。这一过程中能量是否守恒，为什么？

解：设C为质心



$$M_A a = M_B b \Rightarrow \frac{M_A}{M_B} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{M_A}{M_A + M_B} = \frac{b}{a+b}$$

$$b = \frac{M_A}{M_A + M_B}(a+b) = \frac{60}{60+70} \times 1.5 = 0.69\text{m}$$

$$a = 1.5 - 0.69 = 0.81\text{m}$$

(1)系统的总动量矩为：

$$M_A a v_A + M_B b v_B = 630\ \text{N.m/s}$$

(2)系统对质心C的转动惯量为：

$$J_C = M_A a^2 + M_B b^2 = 72.7\ \mathrm{kg.m^2}$$

由角动量守恒：

$$J_C \omega = M_A a\,v_A + M_B b\,v_B$$

$$\omega = \frac{M_A a\,v_A + M_B b\,v_B}{J_C} = \frac{630}{72.7} = 8.67\ \mathrm{rad/s}$$

(3)拉手前的总动能

$$E_{k1} = \frac{1}{2} M_A v_A^2 + \frac{1}{2} M_B v_B^2 = 2.73\times 10^2\mathrm{J}$$

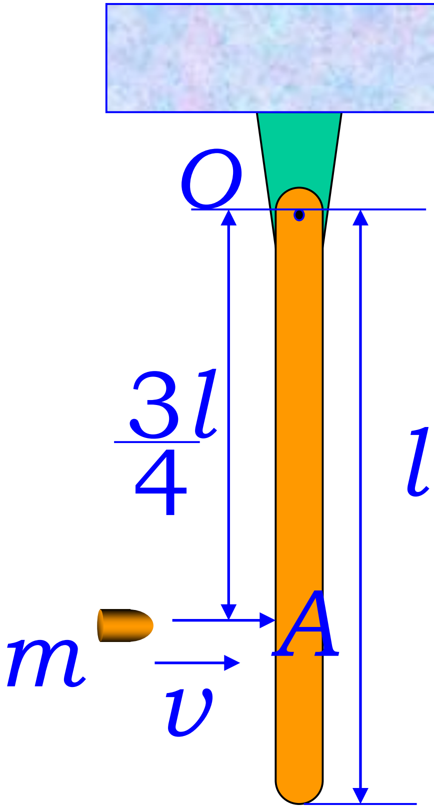
由机械能守恒，拉手后的动能为：

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J\omega^2 = E_{k1} = 2.73\times 10^2\mathrm{J}$$

4-25 一长为 l =0.40m 的均匀木棒，质量 M =1.00kg，可绕水平轴 O在竖直平面内转动，开始时棒自然地竖直悬垂。现有质量 m = 8g 的子弹以 v =200m / s的速率从A点射入棒中假定A点与O点的距离为 $3l/4$，如图。求：

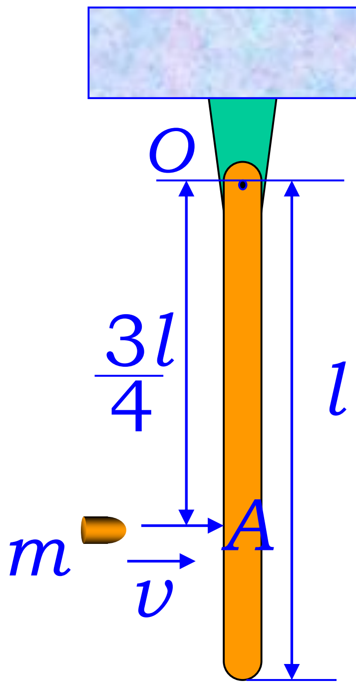
（**1**）棒开始运动时的角速度；

（**2**）棒的最大偏转角。



解：子弹射入后系统的转动惯量为：

$$J=\frac{1}{3}Ml^{2}+m(\frac{3}{4}l)^{2}=0.054$$



(1)系统角动量守恒

$$mv(\frac{3}{4}l)=J\omega$$

$$\omega=\frac{mv(\frac{3}{4}l)}{J}=\frac{0.008\times200\times(\frac{3}{4}\times0.4)}{0.054}$$

$$=8.87\ \mathrm{rad/s}$$

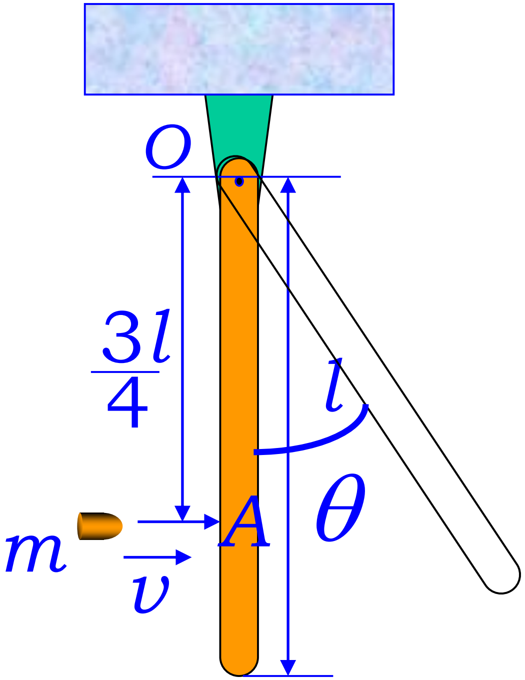
(2)系统机械能守恒，设最大偏角为θ

$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)+mg\frac{3}{4}l(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\cos\theta=\frac{Mgl+\frac{3}{2}mgl-J\omega^2}{Mgl+\frac{3}{2}mgl}$$

$$=-0.078$$

$$\theta=94.06^0$$

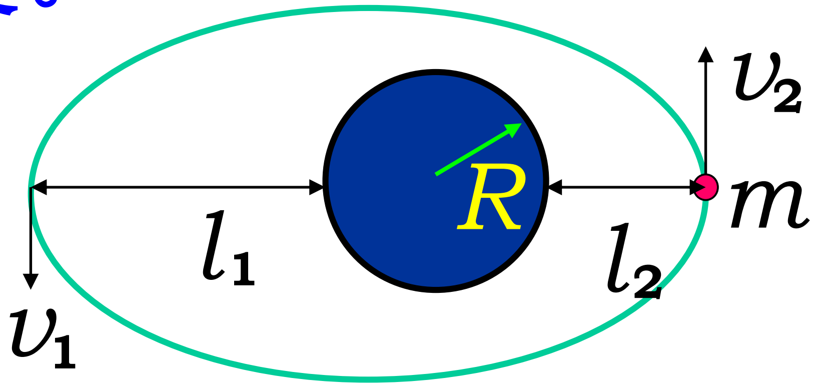


结束 目录

29.地球半径R=6378km, 卫星离地面最近距离为l_1 = 439km,最远距离为l_2 = 2384km ,设近地点卫星速度为 υ_2 = 8.1km/s。

求：远地点卫星速度。

解:



由角动量守恒得:

$$m\upsilon_1(l_1+R) = m\upsilon_2(l_2+R)$$

$$\upsilon_2 = \frac{(l_1+R)}{(l_2+R)}\upsilon_1 = 6.3(\mathrm{km.s^{-1}})$$

结束 目录