第四章 刚体的运动

实际物体都是有形状、大小的。当需要研究物体的自身运动时，物体不能被看作质点。但很多情况下，可忽略物体在运动过程中的形变。

刚体： 物体内任意两点间的距离在运动中保持不变。

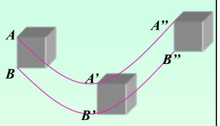
研究方法： 视刚体为无穷多质点组成的质点系。每一质点的运动服从牛顿定律。而整个刚体的运动规律是所有质点运动规律的叠加。

- 刚体的一般运动
  - 平动（可看作质点）
  - 转动
    - 定轴转动
    - 非定轴转动

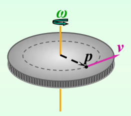
主要内容：

（1）刚体的角动量、转动惯量；
（2）刚体的转动定理及其应用；
（3）刚体的角动量定理和角动量守恒定律；
（4）力矩的功、转动动能、刚体的动能定理。

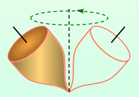
§ 4-1 刚体的运动



平动： 刚体内任意两点连线的方向在运动中保持不变。



定轴转动： 刚体上所有质点均绕一固定直线作圆周运动，该直线称为**转轴**。



非定轴转动： 刚体上所有质点绕一直线作圆周运动，该轴也在空间运动.

本章主要讨论刚体的定轴转动。

§ 4-2 质心、质心运动定理

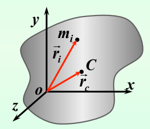
在讨论质点系的运动时，引入质心（或质心参照系）的概念，常可简化计算。

设质点系各质点质量m_1、m_2、… m_i、 … m_n，它们的位矢r_1、r_2、… r_i、 … r_n。

则质心的位矢定义为：

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}}$$

其中：$M = \sum m_i$ 为质点系总质量。



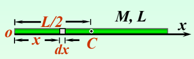
对质量连续分布的物体：

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}dm}{M}} \qquad 或：\quad x_c = \frac{\int xdm}{M},\quad y_c = \frac{\int ydm}{M},\quad z_c = \frac{\int zdm}{M}$$

- 质心相对于质点系中各质点的位置是确定的，该位置不因坐标系的不同选择而不同。

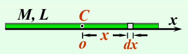
例：质量均匀的细杆，坐标原点选在一端。

$$x_c = \frac{\int xdm}{M} = \frac{1}{M}\int x\frac{M}{L}dx = \frac{1}{L}\int_0^L xdx = \frac{1}{2}L$$



例：质量均匀的细杆，坐标原点选在杆中央。

$$x_c = \frac{\int xdm}{M} = \frac{1}{M}\int x\frac{M}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} xdx = 0$$



- 对质量分布均匀，形状对称的物体，质心就在其几何中心。
- 质心、重心是两个不同的概念，但物体不太大时，质心和重心位置重合。
- 当以质心为参照系时，质点系总动量为零。

质心运动定理：

由质点系的动量定理：

$$\vec{F}_{外} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) = M\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{r}_i}{M}\right)$$

$$= M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = M\vec{a}_c$$

即： $\boxed{\vec{F}_{外} = M\vec{a}_c}$ 称为**质心运动定理**。

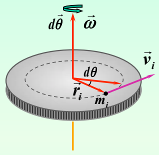
可见：一个质点系质心的运动，就好象一个质点的运动。该质点的质量等于质点系的总质量，而该质点所受的力等于整个质点系所受外力之和。

§ 4-3 刚体的角动量、转动惯量

1、刚体定轴转动的角量描述：

➢**角位移矢量**：dt时间内位矢转过的角度。

$d\vec{\theta}$　　(rad)　　方向沿转轴



➢**角速度矢量**：角位移的时间变化率。

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}\qquad (rad/s)$$

定轴转动刚体上任一质元的线速度和角速度的关系为：

$$\boxed{\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i}$$

➢**角加速度矢量**：角速度的时间变化率。

$$\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\qquad (rad/s^2)$$

$\vec{\beta}$与$d\vec{\omega}$同方向。刚体加速转动 时$\vec{\beta}$、$\vec{\omega}$同方向，反之$\vec{\beta}$、$\vec{\omega}$反方向。

➢刚体定轴转动时转轴固定不动，所以各角量可用标量表示。

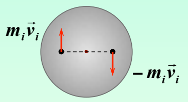
➢刚体定轴转动时，各质元角量 $d\vec{\theta},\vec{\omega},\vec{\beta}$均相同，但各质元线量 $d\vec{r}_i,\vec{v}_i,\vec{a}_i$均不同。

➢ 角量与线量的关系：

$$v_i=\omega r_i\,,\quad a_{ti}=\beta r_i\,,\quad a_{ni}=r_i\,\omega^2$$

可见：研究刚体定轴转动时用角量描述比用线量描述方便得多。

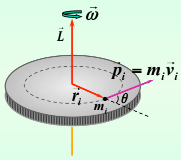
2、刚体的角动量：



刚体定轴转动不能用动量进行描述，而要用角动量进行描述。

定义：刚体上任一质元对转轴的角动量：

$$\boxed{\vec{L}_i=\vec{r}_i\times\vec{p}_i=m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i=m_i r_i^2\vec{\omega}}$$



整个刚体对转轴的角动量为：

$$\vec{L}=\sum\vec{L}_i=(\sum m_i r_i^2)\vec{\omega}$$

定义：刚体绕某定轴的转动惯量：

$$\boxed{I=\sum m_i r_i^2}\qquad 单位：kg{\cdot}m^2$$

所以，刚体对某转轴的**角动量**：

$$\boxed{\vec{L}=I\vec{\omega}}$$

3、转动惯量的计算：

转动惯量是刚体转动时惯性大小的量度，它的大小取决于：

(1) 刚体质量；(2) 质量的分布；(3) 转轴的位置。

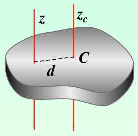
对质量连续分布的刚体：

$$\boxed{I=\int r^2dm}$$

质量体分布时：	$dm=\rho\, dV$	ρ 为质量体密度
质量面分布时：	$dm=\sigma\, dS$	σ为质量面密度
质量线分布时：	$dm=\lambda\, dl$	λ为质量线密度

应用以下两个定理，往往可简化转动惯量的计算：

(1) 平行轴定理：



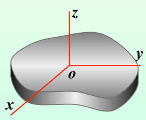
设z_c为通过刚体质心的转轴，z为与z_c平行的另一转轴。两转轴相距d，则：

$$\boxed{I=I_c+md^2}$$

其中：md^2相当于质量全部集中于c时，对z轴的转动惯量。

➢ 刚体对通过质心转轴的转动惯量最小。

(2) 正交轴定理：



薄板形刚体对板内两正交轴的转动惯量之和等于刚体对过两轴交点并垂直于板面的转轴的转动惯量。

$$\boxed{I_z=I_x+I_y}$$

例题4-1：

求质量为M、长为l的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量：

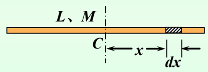
（1）转轴通过棒的中心并和棒垂直；

（2）转轴通过棒的一端并和棒垂直；

（3）转轴通过棒上距中心为h的一点并和棒垂直。

（1）棒上任取线元dx，其质量为dm。

该线元对转轴的转动惯量为：



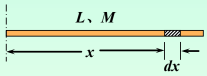
$$dI=x^2\cdot\frac{M}{L}dx$$

整根棒对转轴的转动惯量为：

$$I=\int dI=\frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2}x^2dx=\frac{1}{12}ML^2$$

（2）当转轴取在棒的一端时：

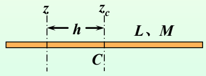
$$I=\int dI=\frac{M}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{1}{3}ML^2$$



（3）当转轴通过棒上距中心为h的一点并和棒垂直时：

由平行轴定理：

$$I=I_c+Mh^2=\frac{1}{12}ML^2+Mh^2$$



当$h=L/2$时，与(1)的情况相同，由上式：

$$I=\frac{1}{12}ML^2+Mh^2=\frac{1}{12}ML^2+M(\frac{1}{2}L)^2=\frac{1}{3}ML^2$$

例题4-2：

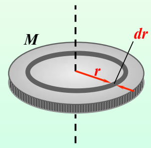
求密度均匀的圆盘对通过中心并与盘面垂直的转轴的转动惯量。设圆盘的半径为R，质量为M。

在圆盘上取一半径为r、宽度为dr的圆环，环的面积为$2\pi rdr$，环的质量为：

$$dm=\sigma\times2\pi rdr=\frac{M}{\pi R^2}\cdot2\pi rdr=\frac{2M}{R^2}rdr$$

转动惯量：

$$I=\int r^2dm=\frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3dr=\frac{1}{2}MR^2$$



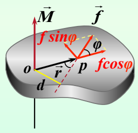
§ 4-4 刚体的转动定理

1、力矩：

外力对刚体定轴转动的影响，与力的大小、方向、作用点的位置都有关。但外力在平行于转轴方向的分力对刚体定轴转动不起作用，所以只需考虑外力在垂直于轴的平面内的分力。

定义：外力相对于某固定轴的**力矩**为：

$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{f}\qquad(N\cdot m)}$$



力矩的大小：

$$M=|\vec{M}|=f\,r\sin\varphi=f\cdot d$$

其中：　$d=r\sin\varphi$　称为外力对转轴的**力臂**。

力矩的大小也可以写作：

$$M=r(f\sin\varphi)$$

可见：只有垂直于位矢方向的分力$f\sin\varphi$才对刚体定轴转动起作用。

当有几个外力同时作用于刚体时，合外力矩等于各外力力矩的矢量和：

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\cdots+\vec{M}_n=\sum_{i=1}^n\vec{M}_i$$

但对于作定轴转动的刚体，合外力矩可用代数和表示：

$$M=M_1+M_2+\cdots+M_n=\sum_{i=1}^n M_i$$

➢ 刚体所受合外力为零时，合外力矩不一定为零，反之亦然。

2、刚体的转动定理：

刚体中第i个质元对转轴的角动量为：

$$\vec{L}_i=\vec{r}_i\times\vec{p}_i$$

对时间求导：$\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)=\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i+\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}$

$$=\vec{v}_i\times m_i\vec{v}_i+\vec{r}_i\times\vec{f}_i=\vec{r}_i\times\vec{f}_i=\vec{M}_i$$

其中：　$\vec{f}_i=\frac{d\vec{p}_i}{dt}$　为第i个质元所受的作用力；

$\vec{M}_i=\vec{r}_i\times\vec{f}_i$　为f_i对转轴的力矩。

对整个刚体：$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{M}_i$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{M}_i$$

$\sum_i\vec{M}_i$　为所有质元所受外力矩和内力矩的矢量和：

$$\sum_i\vec{M}_i=\sum_i\vec{M}_{i外}+\sum_i\vec{M}_{i内}$$

因为刚体内每一对内力的力矩均等值、反向，所以内力矩对定轴转动刚体的运动无影响。

设$\vec{M}$为刚体所受的合外力矩，则：

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}}$$

刚体的转动定理：刚体所受的合外力矩等于刚体对同一转轴角动量对时间的变化率。

非相对论情况下，转动惯量I为常量：

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

所以，经典力学中刚体的**转动定理**可表示为：

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\beta}}$$

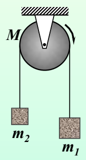
➢当外力矩一定时，转动惯量越大，则角加速度越小。说明转动惯量I是刚体转动惯性大小的量度。

例题 4-5

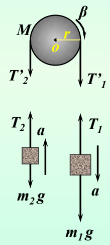
设 $m_1 > m_2$，定滑轮可看作匀质圆盘，其质量为M而半径为r。绳的质量不计且与滑轮无相对滑动，滑轮轴的摩擦力不计。求：m_1、m_2的加速度及绳中的张力。

隔离滑轮及重物，画受力分析图。

因绳的质量不计，所以：$T_1' = T_1$，$T_2' = T_2$。



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 r - T_2 r = I\beta = \dfrac{1}{2}Mr^2\beta \\ a = r\beta \end{cases}$$



解方程：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}} g \\ T_1 = \dfrac{2m_2 + \dfrac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}} m_1 g \\ T_2 = \dfrac{2m_1 + \dfrac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}} m_2 g \end{cases}$$

➢若滑轮质量不计，即$M=0$，则：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T_1 = T_2 = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

§ 4-5 刚体的角动量定理和角动量守恒定律

1、刚体的角动量定理：

外力矩持续作用一段时间后，刚体的角速度才会改变。

由转动定理： $\vec{M}dt = d\vec{L}$

$$\boxed{\therefore \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1}$$

式中 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt$ 称为合外力矩在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内的**冲量矩**$(N\cdot m\cdot s)$。

角动量定理：刚体所受合外力矩的冲量矩等于刚体在同一时间内角动量的增量。

➢角动量定理对非刚体也成立，此时：

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = I_2\vec{\omega}_2 - I_1\vec{\omega}_1}$$

2、角动量守恒定律：

当物体所受合外力矩为零时，有：

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{常矢量} \qquad (\text{当}\vec{M} = 0\text{时})}$$

即：**当物体所受合外力矩为零时，物体的角动量保持不变。**

➢角动量守恒的两种情况：

(1) 转动惯量和角速度都不变；

(2) 转动惯量和角速度都改变，但两者的乘积保持不变。

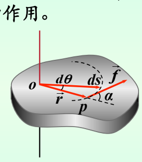
§ 4-6 刚体的动能定理

1、力矩的功：

刚体定轴转动时，刚体内每一对质元间内力的合力矩为零，所以研究刚体定轴转动时只需考虑外力矩的作用。

设刚体在外力作用下产生元位移ds，则外力对刚体所作的元功为：

$$dW = f\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot ds = f\,r\sin\alpha \cdot d\theta$$



式中：$M = f\,r\sin\alpha$ 为外力对转轴的力矩。

所以： $dW = Md\theta$

当刚体在外力矩作用下由角位置θ_0转到θ时，**外力矩作功**：

$$\boxed{W = \int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta}$$

外力矩的功率为: $\boxed{P=\frac{dW}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega \quad (N\cdot m/_s)}$

可见：功率一定时，转速越低则外力矩越大。

2、刚体的转动动能:

刚体定轴转动时，某质元m_i的动能为:

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}(m_ir_i^2)\omega^2$$

整个刚体的动能为:

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}(m_ir_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}\sum_i(m_ir_i^2)\omega^2$$

即: $\boxed{E_k=\frac{1}{2}I\omega^2}$

➢转动动能是刚体转动时动能的角量表示，而不是区别于平动动能的另一种形式的能量。

3、刚体定轴转动的动能定理:

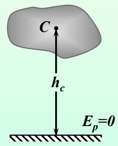
由转动定理: $M=I\beta=I\frac{d\omega}{dt}=I\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

得: $Md\theta=I\omega d\omega$

$$\boxed{\therefore\ W=\int_{\theta_0}^{\theta}Md\theta=\int_{\omega_0}^{\omega}I\omega d\omega=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2}$$

即: 合外力矩对定轴转动刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

4、刚体的重力势能:



将刚体的全部质量集中于质心时，该质心所拥有的重力势能，即为整个刚体的重力势能。

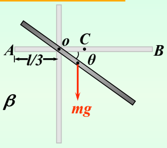
$\boxed{E_p=mgh_c}$

若转轴通过质心，则刚体的重力势能在刚体转动时保持不变。

	质点直线运动（刚体平动）	刚体定轴转动
运动学	$v=\frac{dx}{dt},\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$	$\omega=\frac{d\theta}{dt},\quad \beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$
	匀变速直线运动 $\begin{cases}v=v_0+at\\ x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2\\ v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\end{cases}$	匀变速转动 $\begin{cases}\omega=\omega_0+\beta t\\ \theta-\theta_0=\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)\end{cases}$
动力学	牛顿第二定律 $F=ma$	转动定律 $M=I\beta$
	动量定理 $\int Fdt=mv-mv_0$	角动量定理 $\int M\,dt=I\omega-I\omega_0$
	动量守恒 $\sum mv=$常量	角动量守恒 $\sum I\omega=$常量
	动能定理 $\int F\,dx=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $\int M\,d\theta=\frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_0^2$

例题4-7 质量为m，长为l的均匀细杆，可绕水平转轴在竖直平面内无摩擦转动。转轴离杆一端$l/3$，设杆由水平位置自由转下，求：(1)杆在水平位置时的角加速度；(2)杆在竖直位置时的角速度和角加速度；(4)杆在竖直位置时对转轴的作用力。

(1)重力的作用点在质心C。 $\overline{OC}=\frac{l}{6}$



由转动定理:

$$\frac{1}{6}mgl=I_o\beta=\left[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{6})^2\right]\beta=\frac{1}{9}ml^2\cdot\beta$$

得: $\beta=\frac{3g}{2l}$

(2)由机械能守恒:

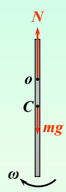
$$\frac{1}{6}mgl=\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}ml^2\times\omega^2$$

得: $\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$, $\beta=0$（合外力矩为零）

(4)由质心运动定理:

$$N-mg=ma_c=m\frac{v_c^2}{l/6}=\frac{6m}{l}\cdot(\frac{l}{6}\omega)^2$$

$$=\frac{l}{6}m\cdot\frac{3g}{l}=\frac{1}{2}mg$$



所以: $N=mg+\frac{1}{2}mg=\frac{3}{2}mg$

而杆对转轴的作用力大小等于N，但方向向下。

§ 4-7 刚体的平面平行运动

当刚体运动时，它的质心始终在某一平面上运动，而且刚体上各点绕之转动的转轴既通过质心，又始终和该平面平行，这种运动就称为刚体的平面平行运动.

比如，汽车在平直的道路上沿直线行驶时，其车轮的运动就是平面平行运动．这时车轮的运动可以看作是车轮轴的平动和车轮绕轮轴转动的叠加。

例4-10