自测题一

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 若 $f(x+1)=-f(x)$,则(C). $f(x+2)=f(x+1+1)=-f(x+1)=f(x)$

A. $f(x)$不一定是周期函数　　B. $f(x)$一定不是周期函数

C. $f(x)$是周期为 2 的周期函数　　D. $f(x)$是周期函数,也是奇函数

2. 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中阶数最高的是(D).

A. x　　B. $\sin^2 x \sim x^2$　　C. $\tan x^2 \sim x^2$　　D. $x^2-\sin x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=1-1=0$ $\therefore x^2-\sin x^2=o(x^2)$

3. $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的(C).

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

4. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$,则当 n 充分大时,下列不等式正确的是(A). $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$,当 $n>N$,有 $|a_n-a|<\varepsilon$

而 $||a_n|-|a||\leq |a_n-a|<\varepsilon$

$\therefore |a|-\varepsilon<|a_n|<|a|+\varepsilon$ 取 $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$

A. $|a_n|>\frac{|a|}{2}$　　B. $|a_n|<\frac{|a|}{2}$

C. $a_n>a-\frac{1}{n}$　　D. $a_n<a-\frac{1}{n}$

注 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ 任一确定实数　C, D 错

5. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,则下列说法正确的是(B).

A. 若$\{x_n\}$收敛,则 $f(x_n)$收敛　反例 $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$, $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\to 0$　$\{f(x_n)\}$: 1, -1, 1, -1, …

B. 若$\{x_n\}$单调,则 $f(x_n)$收敛　因 $\{x_n\}$单调,所以 $f(x_n)$单调,且 $f(x_n)$有界,应用单调有界准则

C. 若 $f(x_n)$收敛,则$\{x_n\}$收敛　反例 $f(x)=\arctan x$, $x_n=n$, $f(x_n)=\arctan n\to\frac{\pi}{2}$,但 $x_n=n\to+\infty$ $(n\to\infty)$

D. 若 $f(x_n)$单调,则$\{x_n\}$收敛　反例 $f(x)=\arctan x$, $x_n=n$, $f(x_n)=\arctan n$单调,但 $x_n=n\to\infty$

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=$ 1 . $1\leq\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\leq\frac{(n-2)\cdot(n-2)!}{n!}+\frac{1}{n}+1=\frac{n-2}{n(n-1)}+\frac{1}{n}+1$

2. 当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$关于 x 的无穷小的阶数是 $\frac{1}{8}$. $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$ (抓"小头")

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x+\sqrt{\sqrt{x}}}\sim\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{8}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x^2+1}=$ 0 . $x\to\infty$ $\tan\frac{1}{x^2+1}\sim\frac{1}{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}=$ $-2\sqrt{2}$. (分母有理化)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=$ 1 .

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-x}\right]^{\frac{\sqrt{x}}{-x}}=e^0=1$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{-x}=0$.

三、计算题(每小题 10 分,共 40 分)

1. 若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2019}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}$是一个非零的有限数,求此极限.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2019}}{n^{\alpha}\left[1-\frac{(n-1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\right]}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^{2019-\alpha}}{(1-\frac{1}{n})^{\alpha}-1}$

$=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2019-\alpha}}{\alpha\cdot(-\frac{1}{n})}=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{n\to\infty}n^{2020-\alpha}$ 存在且不为 0

故 $2020-\alpha=0\Rightarrow\alpha=2020$. 从而原式 $=\frac{1}{2020}$

另解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2019}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2019}}{n^{\alpha}-[n^{\alpha}+C_{\alpha}^{1}n^{\alpha-1}(-1)+C_{\alpha}^{2}n^{\alpha-2}(-1)^2+\cdots]}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2019}}{\alpha n^{\alpha-1}-C_{\alpha}^{2}n^{\alpha-2}+\cdots}$　$\alpha-1=2019$　$\therefore\alpha=2020$

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax(x+1)-b(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$

$\therefore\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2^2}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2^2}\cdots\cos\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{2^n}}{2\sin\frac{1}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2^2}\cdots\sin\frac{1}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{1}{2^n}}$

$=\cdots$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 1}{2^n\cdot\sin\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 1}{\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}}=\sin 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+2^x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}\cdot\frac{2^x-1}{2x}} = e^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln 2}{2x} = \dfrac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}$.

四、解答题(每小题 10 分,共 30 分)

1. 已知 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(0)>0, f(1)<1$,试证:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=\xi$.

令 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(x) \in C[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = f(0) - 0 > 0 \\ F(1) = f(1) - 1 < 0 \end{array}\right\} F(0)\cdot F(1) < 0$$

由零点定理 $\exists\ \xi \in (0,1)$，使 $F(\xi) = 0$

即 $f(\xi) = \xi$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$,求 $f(x)$的间断点及其类型.

$f(x) = \dfrac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}$ 间断点 $x=0$, $x=1$, $x=-1$

对 $x=-1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)} = \infty$

$\therefore$ $x=-1$为第二类无穷间断点.

对 $x=0$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-1)}{(-x)(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x+1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ $x=0$为第一类跳跃间断点

对 $x=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{|x|(x+1)} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $x=1$为第一类可去间断点.

3. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$,$a$ 为常数,求 $f(x)$的分段表达式,并确定常数 a 的值,使 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续.

$|x|<1$, $x^{2n+1}, x^{2n}, x^n \to 0\ (n\to\infty)$ $\therefore f(x) = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$|x|>1$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+(a-1)x^{-n}-x^{-2n}}{1-ax^{-n}-x^{-2n}} = \cancel{x} = x$

$x=1$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(a-1)-1}{1-a-1} = \dfrac{a-1}{-a} = -1+\dfrac{1}{a}$.

$x=-1$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+(a-1)(-1)^n-1}{1-a\cdot(-1)^n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2+(-1)^n\cdot(a-1)}{-a\cdot(-1)^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a}-1\right]$ 不存在

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<1 \\ x, & |x|>1 \\ \dfrac{1}{a}-1, & x=1 \end{cases}$$

$\because$ $f(x)$在$[0,+\infty)$连续 $\therefore$ $f(x)$在 $x=1$处连续

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$

$\therefore$ $\dfrac{1}{a}-1 = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.