§8.1 直角坐标系下的二重积分

一、填空题：

1. 根据二重积分的几何意义，可知：$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{d}\sigma =$ ________________；

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma =$ ________________.

2. 已知 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则$I_1, I_2, I_3$的大小关系为__________.

3. 设 D 是三角形闭区域，三个顶点分别为$(1,0)$，$(1,1)$，$(\mathrm{e},0)$，则 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小关系为__________.

4. 变换二次积分$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序：____________________.

5. 变换二次积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序：____________________.

6. 设 $D=\{(x,y)\mid -3\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则 $I=\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma =$ ________________.

二、试估计二重积分 $I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$.

三、计算下列二重积分：

1. $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x$，$x=1$ 及 x 轴所围成.

2. $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x$，$y=x+1$，$y=1$，$y=2$ 所围成.

3. $I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$ 所围成.

4. $I=\iint\limits_D x^2\sin y^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是曲线 $y=x^3$ 和直线 $y=1$，$x=0$ 所围成的位于第一象限的闭区域.

四、计算下列二次积分：

1. $I=\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$.

2. $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x\sin y^3 dy$.

五、若 $f(x,y)$ 在两坐标轴与直线 $x+y=1$ 所围区域 D 上连续，且 $x\iint\limits_D f(x,y)dxdy=f(x,y)-y$，求 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

六、计算：

1. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三个坐标面所截得的有限部分的面积.

2. 曲面 $x^2+y^2-z+1=0$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截得部分的面积.

七、求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=x$ 所截得部分的曲面面积.