1-5 路灯高度为h,人高度为l,步行速度为v_0. 试求：（1）人影中头顶的移动速度；（2）影子长度增长的速率。

解：$\dfrac{h}{x+b}=\dfrac{l}{b}$ ⟶ $hb=l\,(x+b)$

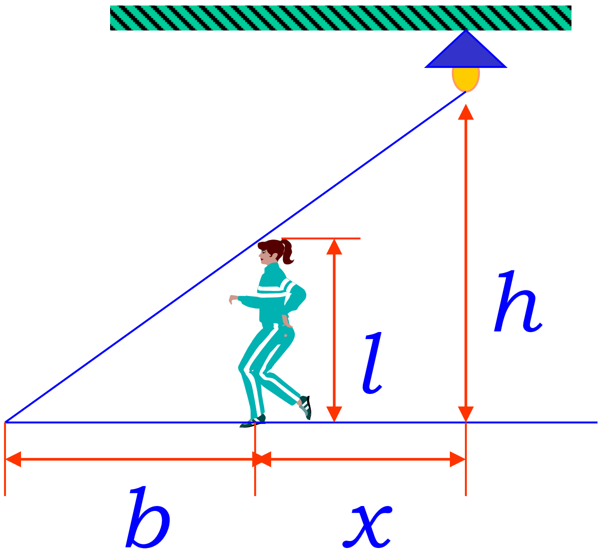
上式两边微分得到：

$$h\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}=l\,\frac{\mathrm{d}\,(x+b)}{\mathrm{d}t}=l\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+l\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$

影子长度增长速率为：

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{h-l}v_0$$



$\because \quad hb = l\,(x+b) \qquad \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \dfrac{l}{h-l}v_0$

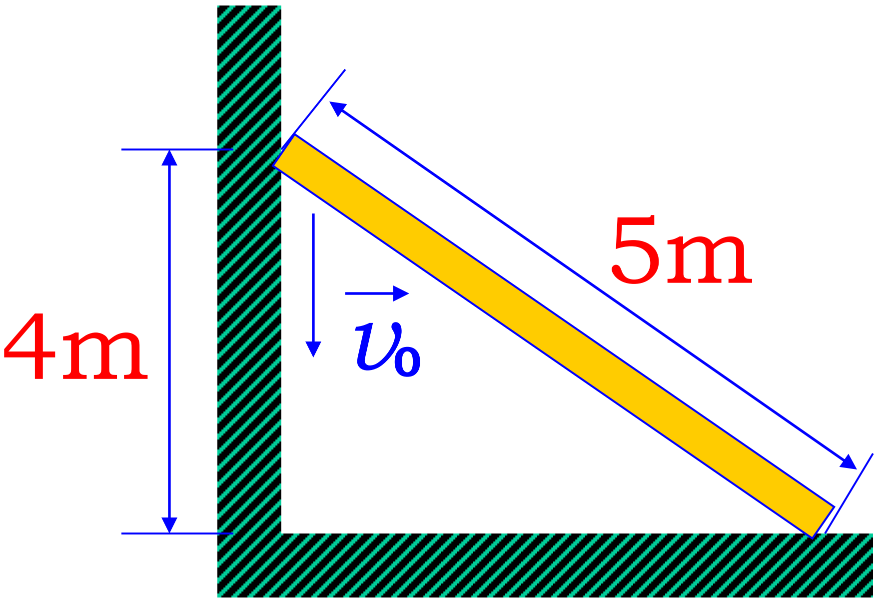
所以人影头顶移动速度为:

$$\frac{\mathrm{d}\,(x+b)}{\mathrm{d}t} = \frac{h\,\mathrm{d}b}{l\,\mathrm{d}t} = \frac{h}{h-l}v_0$$

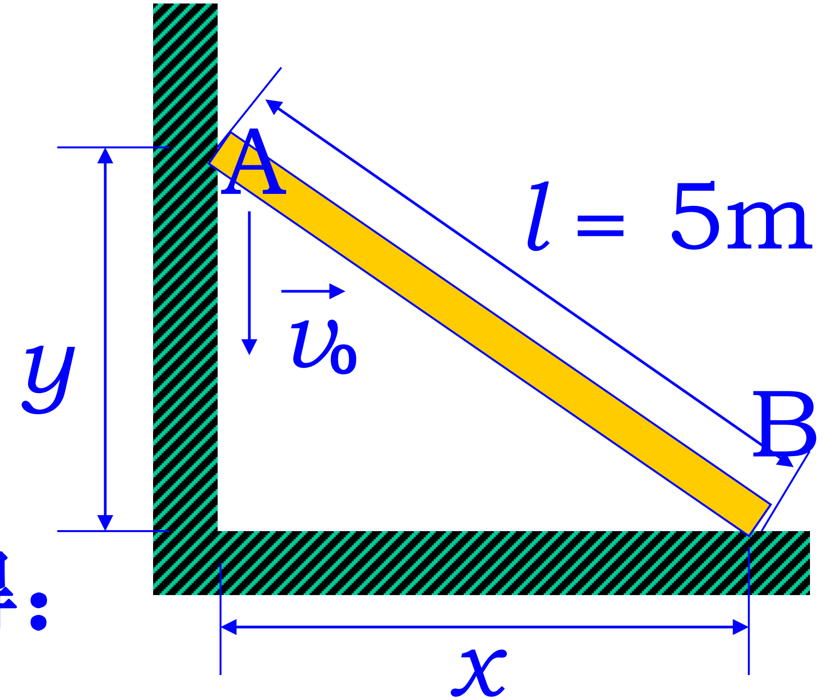
1-6 长度为5m的梯子，顶端斜靠在竖直的墙上。设 t =0 时，顶端离地面4m,当顶端以2m/s的速度沿墙面匀速下滑时，求：

（1）梯子下端的运动方程；并画出x~t 图和v~t图（设梯子下端与上端离墙角的距离分别为 x 和 y ）。

（2）在 t =1s 时，下端的速度。



$$t=0\begin{cases}y=y_0=4\\ \dfrac{dy}{dt}=-v_0\end{cases}$$



$$y=y_0-v_0t$$

$x^2+y^2=l^2$ 将此式微分得：

$$2y\,dy+2x\,dx=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{y\,dy}{x\,dt}=-\frac{y}{x}(-v_0)$$

用 $y_0=4$，$v_0=2$，$t=1$代入，得B端的速度。

$$=\frac{(y_0-v_0t)v_0}{\sqrt{l^2-(y_0-v_0t)^2}}=\frac{4}{\sqrt{21}}=0.87\text{m/s}$$

$$x=\int \mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{(y_0-v_0t)v_0}{\sqrt{l^2-(y_0-v_0t)^2}}\,\mathrm{d}t+c$$

$$=\int \frac{8-4t}{\sqrt{9-4t^2+16t}}\,\mathrm{d}t+c$$

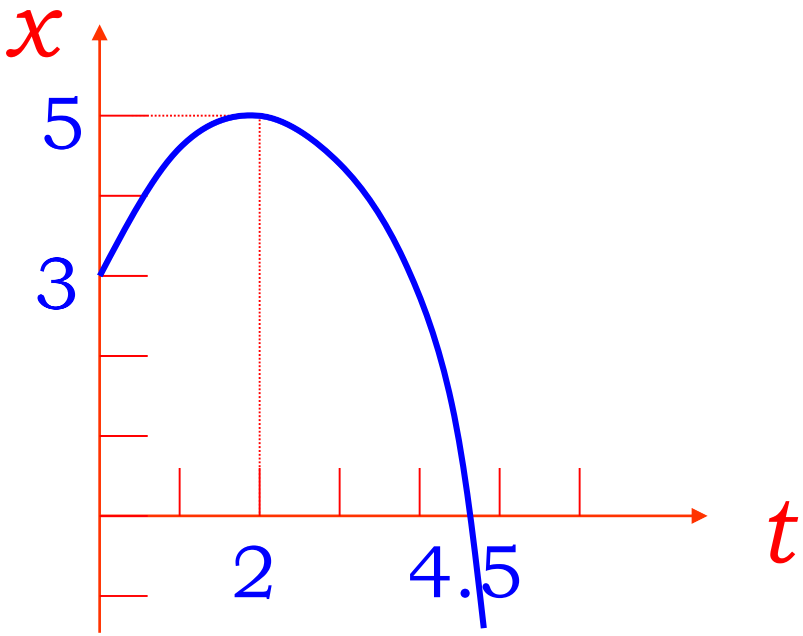
$$=\sqrt{9-4t^2+16t}+c$$

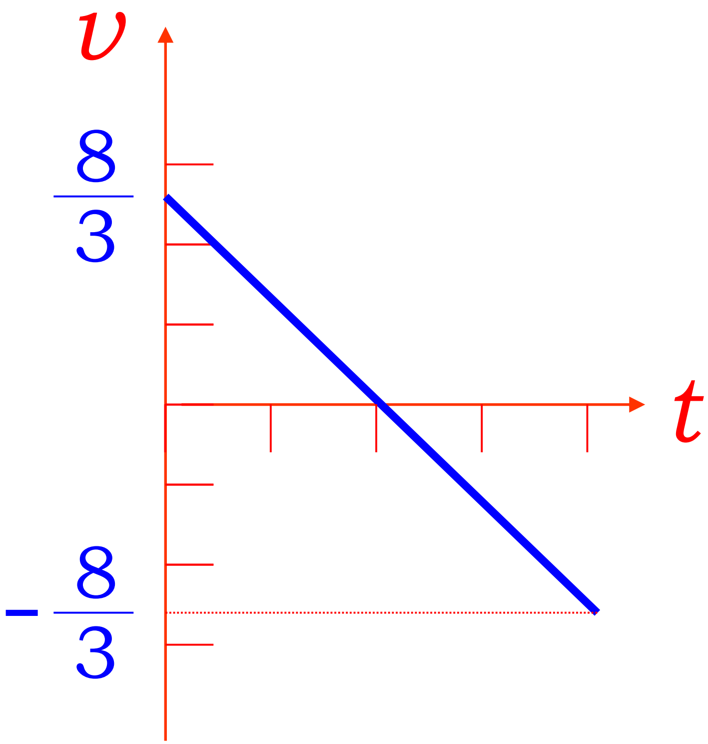
$t=0\quad x=\sqrt{9-4t^2+16t}+c=x_0=3$

$\therefore\quad c=0$

$$x=\sqrt{9-4t^2+16t}$$

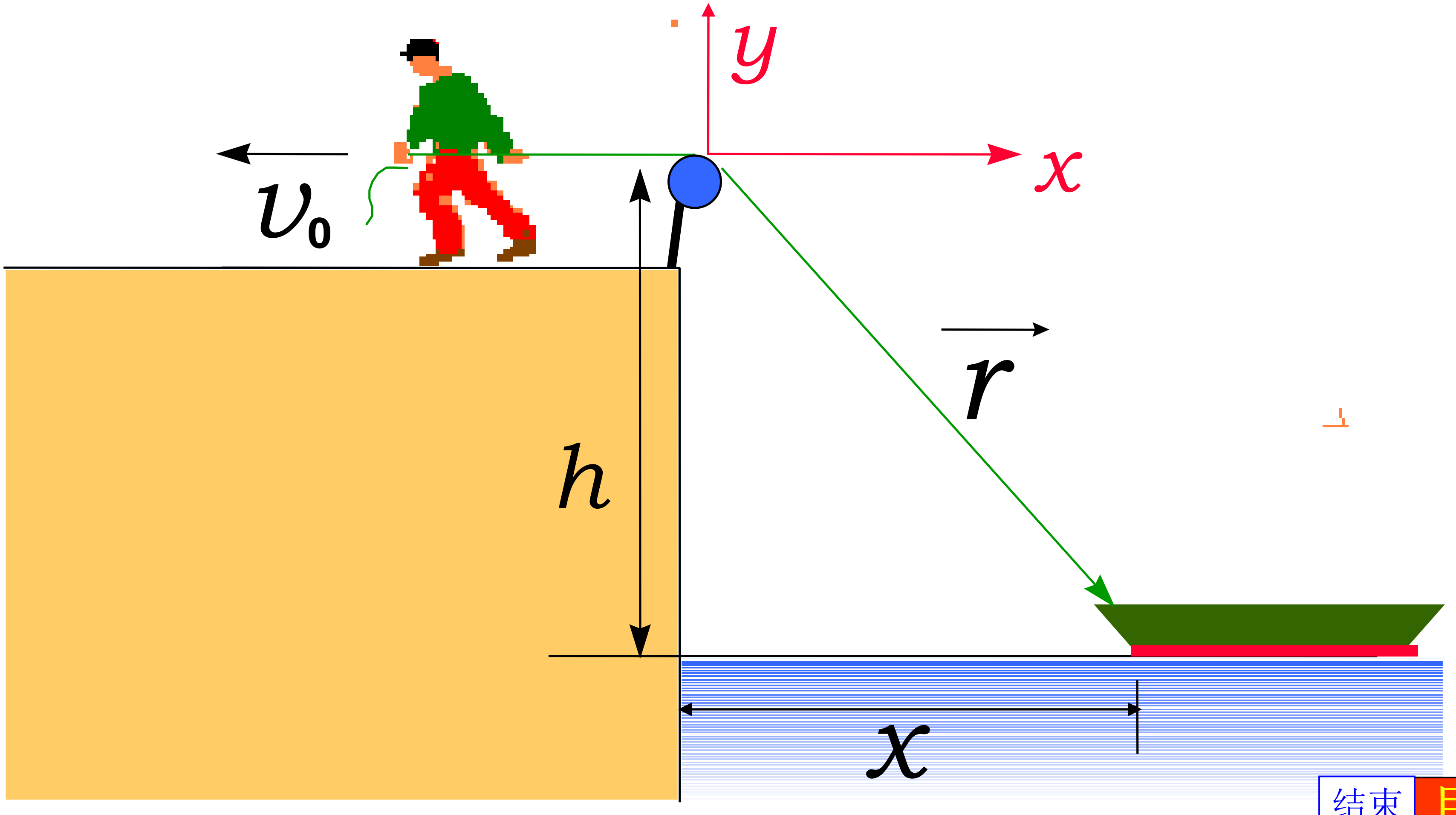
$$x=\sqrt{9-4t^2+16t}\qquad v=\frac{8-4t}{\sqrt{9-4t^2+16t}}$$





结束 目录

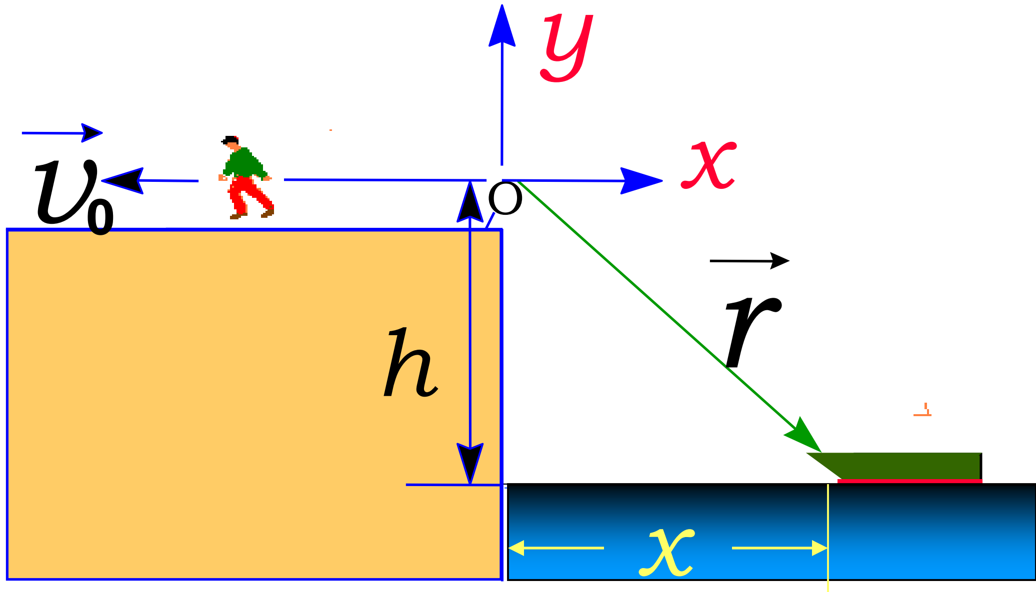
1-7.人以恒定的速率v_0运动，船之初速为0，求：任以位置船之速度加速度。



$$\vec{r} = x\vec{i} - h\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + h^2}$$



$$\frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{d\sqrt{x^2 + h^2}}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{dx}{dt} = -v_0$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -\frac{v_0}{x}\sqrt{x^2+h^2}\,\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = -\frac{v_0^2h^2}{x^3}\vec{i}$$

1-8 在质点运动中，已知 $x = a\mathrm{e}^{kt}$ ，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -bk\mathrm{e}^{-kt}$， 当 $t = 0$, $y=y_0=b$
求：质点的速度和轨道方程。

已知：$x = ae^{kt}$ $\dfrac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$ $y\Big|_{t=0} = b$

解：$dy = -bke^{-kt}dt$

$$y = \int dy = \int -bke^{-kt}dt + c = be^{-kt} + c$$

当 $t=0$ $y\Big|_{t=0} = b + c = b$ $\therefore c = 0$

轨迹方程：$\begin{cases} x = ae^{kt} \\ y = be^{-kt} \end{cases} \Rightarrow xy = ab$

$$\frac{dx}{dt} = ake^{kt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = ak^2e^{kt} \qquad \frac{d^2y}{dt} = bk^2e^{-kt}$$

$$\therefore \vec{a} = ak^2e^{kt}\vec{i} + bk^2e^{-kt}\vec{j}$$

结束 目录

1-9一质点的运动方程为 $\vec{r}=\vec{i}+4t^2\vec{j}+t\vec{k}$

式中r、t分别以m、s为单位.试求：

（1）它的速度与加速度；

（2）它的轨迹方程。

解： $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=8t\vec{j}+\vec{k}$ $\quad\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=8\vec{j}$

$$x=1\quad y=4t^2\quad z=t$$

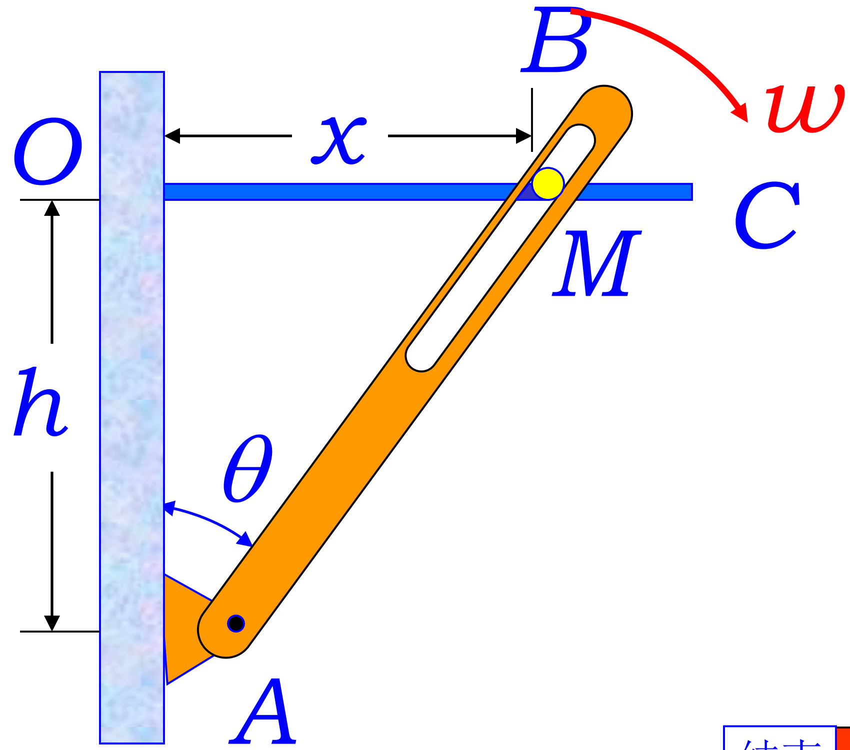
轨迹方程： $y=4z^2\quad x=1$

轨迹为在 $x=1$ 平面的一条抛物线。

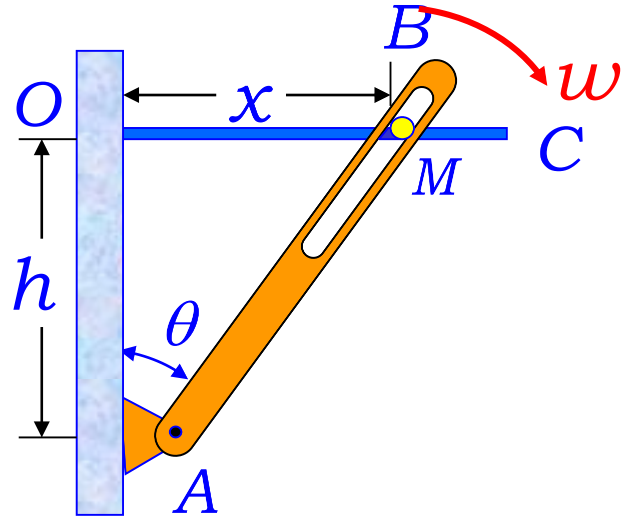
1-13 如图所示，杆AB以匀角速度绕A点转动，并带动水平杆OC上的质点M运动。设起始时刻杆在竖直位置，OA= h 。

（1）列出质点M沿水平杆OC的运动方程；

（2）求质点M沿杆OC沿动的速度和加速度的大小。



已知： $OA = h \quad \theta_0 = 0$



解： $\theta = \theta_0 + wt = wt$

$$x = h\,\mathrm{tg}\,\theta = h\,\mathrm{tg}\,wt$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = hw\sec^2 wt$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2hw^2\sec^2 wt\,\mathrm{tg}\,wt$$

1-15一个人扔石头的最大出手速率为 v=25m/s，他能击中一个与他的手水平距离为L = 50m而高h =13m的一个目标吗？在这个距离上他能击中的最大高度是多少？

解：
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t \\ y = v_0 \sin\theta\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

轨迹方程为：$y = x\,\mathrm{tg}\theta - \dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$

即：$$y = x\,\mathrm{tg}\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\theta\right) \qquad (1)$$

结束 目录

即： $y = x\mathrm{tg}\theta - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\theta)$ ……（1）

由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d\,tg}\theta} = 0 \Rightarrow x - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}2\mathrm{tg}\theta = 0$

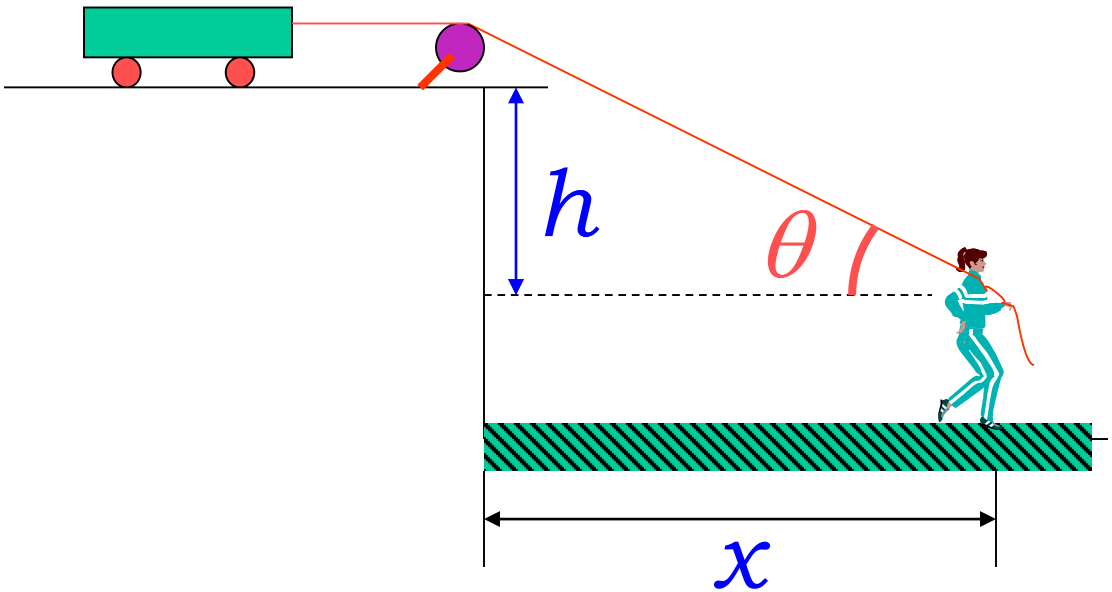
得： $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{v_0^2}{gx}$ 代入式（1）可得：

$$y = x\frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\frac{v_0^4}{g^2x^2}$$

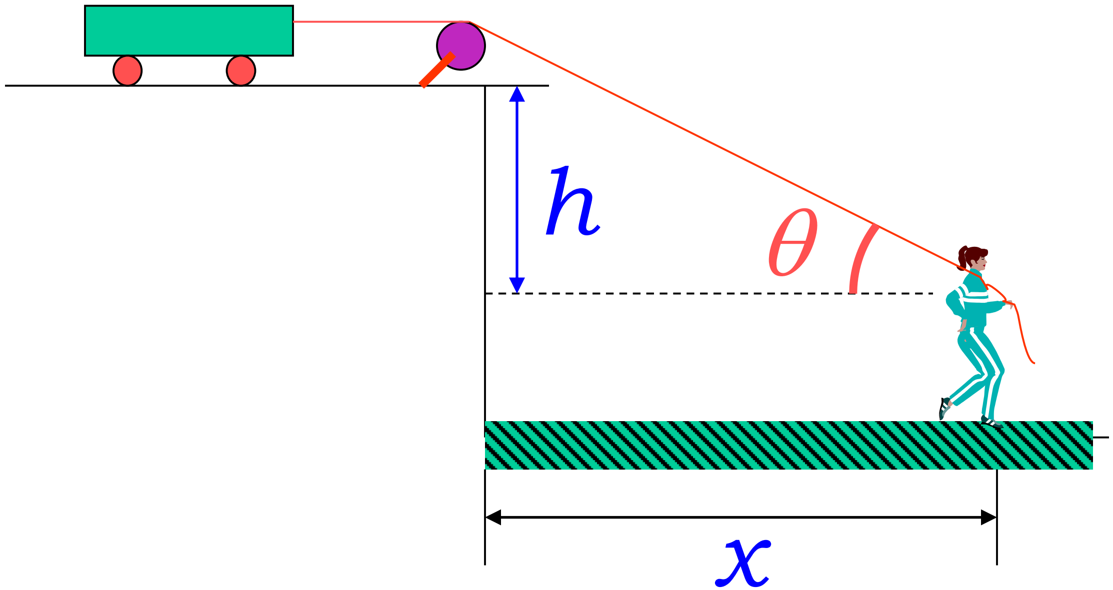
$$= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$= \frac{25^2}{2\times 9.8} - \frac{9.8\times 50^2}{2\times 25^2} = 12.3\mathrm{m}$$

1-22 一人拉小车以不变的速率v_0前进，小车位于高出绳端h的平台上。求小车的速度及加速度。



解:



$$\vec{r} = x\vec{\mathrm{i}} - h\vec{\mathrm{j}}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}v_0$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0^2 h^2}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2-25 一质点沿半径为0.10m的圆周运动,其角位置θ(以弧度表示)可以用下式表示:

$$\theta = 2+4t^3$$

式中t以秒计。问:

(1)质点在 t =2s时及 t =4s时的法向加速度和切向加速度;

(2)当切向加速度的大小为总加速度的一半时，$\boldsymbol{\theta}$的值为多少?

(4)在哪一时刻，切向加速度和法向加速度的值相等。

已知：$\theta = 2+4t^3$

解：(1)质点在 t =2s时及 t =4s时的法向加速度和切向加速度；

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2 \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 24t$$

$$a_t = R\beta = 24Rt = 2.4t$$

$$v = R\omega = 12Rt^2 \qquad a_n = R\omega^2 = 14.4t^4$$

$$a_{t,t=2} = 4.8\mathrm{m/s^2} \qquad a_{t,t=4} = 9.6\mathrm{m/s^2}$$

$$a_{n,t=2} = 230.4\mathrm{m/s^2}$$

(2)当切向加速度的大小为总加速度的一半时，$\boldsymbol{\theta}$的值为多少？

解：$a_t = 2.4t \quad a_n = 14.4t^4$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2.4t)^2 + (14.4t^4)^2}$$

$$a_t = \frac{a}{2}$$

$$2.4t = \frac{1}{2}\sqrt{(2.4t)^2 + (14.4t^4)^2}$$

$$t^6 = 0.083 \qquad t = 0.66\text{s}$$

$$\theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4\times 0.66^3 = 3.15\text{rad}$$

(4)在哪一时刻，切向加速度和法向加速度的值相等。

解：$a_t = 2.4t \quad a_n = 14.4\,t^4$

$$a_t = a_n$$

$$2.4t = 14.4\,t^4$$

$$t^3 = 0.166\text{S}$$

$$t = 0.55\text{S}$$

1-26 飞轮的角速度在 5s 内由 900rev/min均匀减到800rev/m。求：(1)角速度；

(2)在此5s内的总转数；

(3)再经过几秒飞轮将停止转动。

解：

(1) $n_0 = 900\text{rev/min} = 15\text{rev/min}$

$n = 800\text{rev/min} = 13.3\text{rev/min}$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi(n - n_0)}{\Delta t}$$

$$= \frac{2\pi(13.3 - 15)}{5} = -2.09\text{rad/s}^2$$

(2) $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = 2\pi n_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$

$$= 2\pi\times 13.3\times 5 + \frac{1}{2}(-2.09)\times 5^2$$

$$= 445\text{rad}$$

$$\Delta N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 71\text{rev}$$

(3) $\omega = \omega_0 + \beta t = 0$

$$t_2 = -\frac{\omega_0}{\beta} = -\frac{2\pi n_0}{\beta} = -\frac{2\pi\times 13.3}{-2.09} = 45\text{s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 45 - 5 = 40\text{s}$$

1-28 一质点沿着一圆周运动，其路程与时间的关系为：$s = A+Bt+C\ t^2$ 其中 $B=-2m/s$, $C=1m/s^2$。若 $t_2=1s$ 时，质点的法向角速度为$a_{n2}=0.5m/s^2$。试求：

(1)圆周半径；

(2) t =3s时质点的速率；

(3)t =3s时质点的法向角速度、切向角速度及总角速度。

已知：$s = A+Bt+Ct^2$； $B=-2\,\mathrm{m/s}$, $C=1\,\mathrm{m/s^2}$

$t_2=2\,\mathrm{s}$ 时，$a_{n2}=0.5\,\mathrm{m/s^2}$

求:(1)R, (2) $t=3\,\mathrm{s}$时的v,(3) $t=3\,\mathrm{s}$时的a_n、a_t

解:

(1) $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=B+2Ct=-2-2t$

$$v_2=-2-2t=2\,\mathrm{m/s} \quad R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{2^2}{0.5}=8\,\mathrm{m}$$

(2) $v_3=-2-2t=4\,\mathrm{m/s}$

(3) $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2 \qquad a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(-2-2t)^2}{R}=\dfrac{4^2}{8}=2$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=2\sqrt{2}$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{a_n}{a_t}=\mathrm{arctg}\frac{2}{2}=45^0$$