$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2$

§1.3 极限的计算

一、选择、填空题：

1. 下列极限正确的是(C).

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1}=1\end{cases}$

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ 不存在 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$ 无穷小 有界

2. 当 $x\to0$ 时，在下列 4 个无穷小量中，比其他 3 个更高阶的无穷小量是(D).

A. $\ln(1+x^2)\sim x^2$ B. $e^x-1\sim x$ C. $\tan x-\sin x$ D. $1-\cos x^2\sim\frac{1}{2}(x^2)^2$

3. 若 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ -4.

4. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{2}{x}=$ 0 ，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}=$ 2 ，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{\tan5x}=$ $\frac{2}{5}$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}(-ax^2)}{x^2}=1$

5. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=$ e^2 ，$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$ e^2 ，

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}=$ e^{-2} .

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x\cdot(1-\cos x)}{\sqrt{1+x^3}-1}=$ 1 ，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{\arctan x\cdot(e^x-1)}=$ -1 .

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cdot(1+\cos x)}{\sqrt[5]{1+2x}-1}=$ 5 .

二、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}$.

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=2$

注 $x\to\infty$ 时 $\frac{2x}{x^2+1}\to0$

$\sin\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2x}{x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\sin\frac{x+a}{2}$

$=-\sin a$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$.

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{(1+\cos x)\cdot x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot x}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{x}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times0=\frac{3}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{-1}\cdot\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{-1}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{-1}$

$=e^{-1}\cdot1=e^{-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

$=\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{2\cdot3x}{\sin x}}$ $\left[\because\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot3x}{\sin x}=6.\right]$

$=e^6$.

班级________ 学号________ 姓名________

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\arcsin x^2\cdot\ln(1+\sin x)}$.

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\cdot x^2\cdot\sin x}$

$x\to 0$

$\arcsin x^2 \sim x^2$

$\ln(1+\sin x)\sim \sin x$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

三、利用极限存在准则证明或计算：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-1}\right)$.

$\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{2}{n^2+n-1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-1}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-1}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{2}{n^2+n-1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n-1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$

由夹逼定理. 原式 $=\frac{1}{2}$.

2. 设 $b>0, b_1>0, b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{b}{b_n}\right), n=1,2,3,\cdots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在；

(2) 求出 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(1) $b_n=\frac{1}{2}\left(b_{n-1}+\frac{b}{b_{n-1}}\right)\ge\sqrt{b_{n-1}\cdot\frac{b}{b_{n-1}}}=\sqrt{b}$.

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{b_n^2}\right)\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{b}\right)=1$

$\therefore \{b_n\}$ 单调减少. 且有下界. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$. 则 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{b}{A}\right)$

$\therefore A=\sqrt{b}$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{b}$.

四、确定 k 的值，使下列函数与 x^k，当 $x\to 0$ 时是同阶无穷小：

1. $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}\cdot\dfrac{\tan x+\sin x}{x^k}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1+\cos x)}{\cos x\cdot x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^k}=c\ne 0$

$\therefore k=1$.

2. $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{x^k}=\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x^3}{x^{5k}}}=c\ne 0$.

$\therefore 5k=2$. $k=\frac{2}{5}$.

无穷小

"抓小头"原则.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx^3}{cx^2}=\frac{a}{c}$ 抓小

无穷大

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx^3}{cx^3}=\frac{b}{c}$ 抓大

"抓大头"原则.

§1.4 函数的连续性

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{-\frac{1}{x-1}}=+\infty.\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{-\frac{1}{x-1}}=0=f(1)\ \text{右连续}\end{cases}$$

一、选择、填空题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x-1}}, & x\neq1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处(B).

A. 连续　　B. 不连续，但右连续
C. 不连续，但左连续　　D. 左、右都不连续

2. $x=1$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{1-x}$ 的(B).

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to1^+}\arctan\frac{1}{1-x}=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

A. 连续点　B. 跳跃间断点　C. 可去间断点　D. 无穷间断点

3. 方程 $x^5-3x-1=0$ 在区间(A)内至少有一个实根.

A. $(-2,-1)$　B. $(-3,-2)$　C. $(0,1)$　D. $(2,3)$

4. 函数 $y=\frac{1}{\ln|x|}$ 的间断点有__3__个.

$x=0$ 可去间断点
$x=\pm1$，无穷间断点.

5. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$__2__.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}\cdot\boxed{\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sin x}}}$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2.$

二、指出下列函数的间断点，并判定其类型，如果是可去间断点，请补充或者改变函数的定义使它连续：

1. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$.

间断点 $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}$

$\therefore x=-1$ 是第一类，可去间断点.

补充定义 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{1+x^3}, & x\neq-1\\ \frac{1}{3}, & x=-1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 连续.

2. $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义. $x=0$ 为间断点.

又 $\lim\limits_{x\to0}\cos^2\frac{1}{x}$ 不存在.(振荡)

$\therefore x=0$ 是第二类振荡间断点.

3. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}$.

$f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=-1$ 无定义.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2(x+1)}=\frac{1}{2}$. $\therefore x=0$ 是第一类 可去间断点.

补充定义 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}, & x\neq0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-\cos x}{x^2(x+1)}=\infty$ $\therefore x=-1$ 是第二类无穷间断点.

4. $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

间断点：使 $\sin x=0$ 的点 即 $x=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$ $\therefore x=0$ 是第一类可去间断点.

补充定义 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\because \lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}=\infty\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$

$\therefore x=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类无穷间断点.

三、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{3}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ae^{2x}=a.\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{3}}=-3\end{cases}$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ $\therefore a=-3$.

四、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}$ 的连续性.

$|x|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}=x^2$，

$|x|>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n-1}=\infty$. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}$ 同除 x^{2n}

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-2}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}$.

$x=1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+1}=1$

$x=-1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+1}{1+1}=0$.

$\therefore f(x)=\begin{cases}1/x, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ x^2, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 1/x, & x>1\end{cases}$

$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$内连续.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1,\\ \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x^2=1\end{cases}$

$\therefore x=-1$是跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$

$\therefore f(x)$在$x=1$连续

综上 $f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$内连续.

五、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任何 x_1,x_2，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，证明：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x+\Delta x)-f(x)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x)+f(\Delta x)-f(x)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)$

令 $x_1=x_2=0$

$f(0)=2f(0)$

$\therefore f(0)=0$.

$f(x)$在$x=0$连续 $f(0)=0$

$\therefore f(x)$在 x 点连续.

由 x 的任意性知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 则 $F(x)$在$[0,a]$上连续.

$F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$.

(1) 当 $f(0)=f(a)$ 时. $F(0)=0$. 取 $\xi=0$，则 $f(\xi)=f(\xi+a)$

(2) 当 $f(0)\neq f(a)$ 时 $F(0)\cdot F(a)<0$

由零点定理在$(0,a)$内至少存在一点 ξ，使 $F(\xi)=0$

即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

$m\leq F(0)\leq M$，$m\leq F(a)\leq M$.

$m\leq\dfrac{F(0)+F(a)}{2}\leq M$

由介值 $\exists\xi\in[0,a]$ 使 $F(\xi)=\dfrac{F(0)+F(a)}{2}=0$

七、a 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln^3(1+x)}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right], & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在定义域上连续？

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln^3(1+x)}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{6}, & x\neq0\\ a. & x=0\end{cases}$ $\therefore a=-\dfrac{1}{6}$.