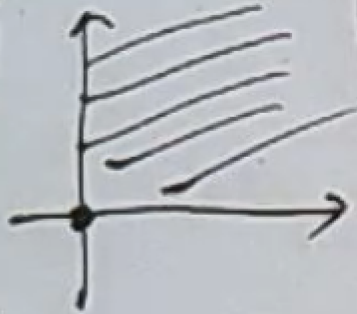
反常积分8.28

求反常积分$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^{x} e^{-t^2}\,dt\right]dx$

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \Rightarrow I^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$$



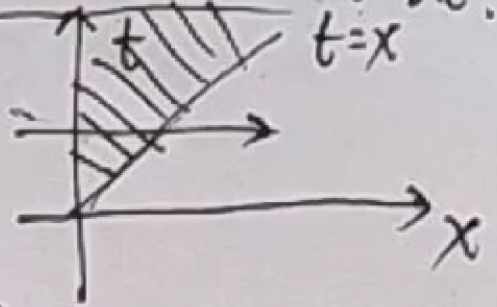
$$=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$\overset{极}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr\right]d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr=-\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

【解】：原式 $=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]$ 统一：

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)dx$$



$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t e^{-t^2}dx\right]dt$$

$$=\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-t^2}dt=\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty}e^{-t^2}d(-t^2).$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$ #

类题1

设$'f(x)\in C[0,1],\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx,$证明 $\exists\xi\in(0,1).$ s.t. $\int_0^\varepsilon f(t)dt=0$

有条件出发构造辅助函数用罗尔定理解决

令$F(x)=\int_0^x f(x)dt-\int_0^x tf(t)dt$，$F(0)=F(1)$

【尝试】：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$，$F(0)=F(1)=0$

由罗尔得，$\exists\xi\in(0,1)$. s.t. $F'(\xi)=0\Rightarrow \boxed{f(\xi)-\xi f(\xi)=0}$

【解】：令 $F(x)=x\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$.（目的：强行凑到半路了）.

$\Rightarrow F(0)=F(1)=0$. $F'(x)=\int_0^x f(t)dt+\cancel{xf(x)}-\cancel{xf(x)}$.

类题二

$f(x)\in C[0,1]$. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2f(x)dx$，证：$\exists\xi\in(0,1)$. s.t. $\int_0^\xi f(x)dx=0$

（330题原题）.

$f(x)\in C[0,1]. \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2 f(x)dx,$ 证明：$\exists\xi\in(0,1).$ s.t. $\int_0^\xi f(x)dx=0$

令 $F(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$. $F(0)=F(1)=0$.

$F'(x)=\underline{2x\cdot\int_0^x f(t)dt}+\cancel{x^2f(x)}-\cancel{x^2f(x)}$

由罗尔得. $\exists\xi\in(0,1)$. s.t. $F'(\xi)=0$，即 $2\xi\cdot\int_0^\xi f(x)dx=0$.

类题三

令 $F(x)=\int_0^x tf(t)dt-\frac{2}{3}x\cdot\int_0^x f(t)dt$. $F(0)=0$. (目标. 证 $F(1)\geq0$)

$\Rightarrow F'(x)=xf(x)-\frac{2}{3}\left[\int_0^x f(t)dt+xf(x)\right]=\frac{1}{3}xf(x)-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)dt$. $F'(0)=0$

$\Rightarrow F''(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}\cdot xf'(x)-\frac{2}{3}f(x)=-\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}xf'(x)\Rightarrow F''(0)=0$

$\Rightarrow F'''(x)=-\cancel{\frac{1}{3}f'(x)}+\cancel{\frac{1}{3}f'(x)}+\frac{1}{3}\cdot xf''(x)=\frac{1}{3}xf''(x)\geq0$

类题4

类题4. 设 $f(x)$ 连续. $f(x)>0$. 证: $\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\geq1$

$f(x)$连续，$f(x)>0,$ 证明：$\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\geqslant1$

【解】令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt\cdot\int_0^x\frac{1}{f(t)}dt-x^2$, $F(0)=0$

(目标：是证明 $F(1)\geq0$)

$\Rightarrow F'(x)=f(x)\int_0^x\frac{1}{f(t)}dt+\frac{1}{f(x)}\int_0^x f(t)dt-2x$. (统一)

$=\int_0^x\left[\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}\right]dt-2x$ (均值不等式!)

$\geq\int_0^x 2\,dt-2x=0$ 即 $F'(x)\geq0\Rightarrow F(x)\uparrow$.