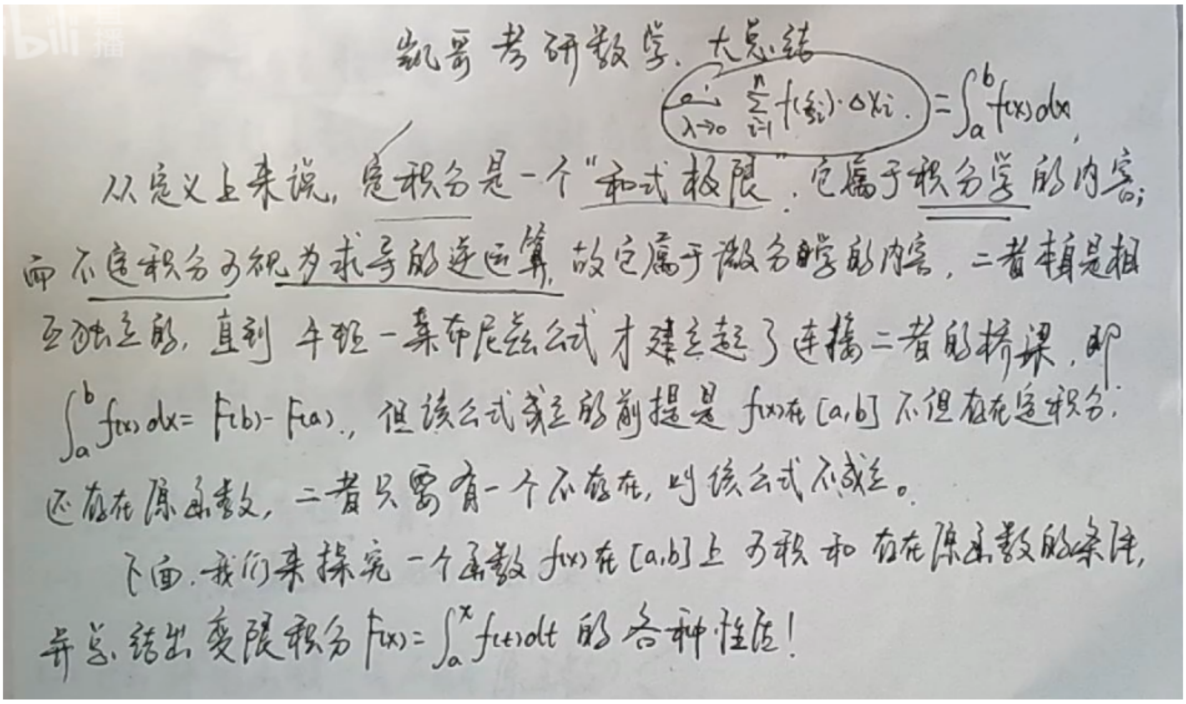
凯哥8.22定积分总结

该部分不考虑反常积分



凯哥考研数学 大总结

$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$

从定义上来说，定积分是一个"和式极限"，它属于积分学的内容；而不定积分多视为求导的逆运算，故它属于微分学的内容，二者本是相互独立的，直到牛顿-莱布尼兹公式才建立起了连接二者的桥梁，即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，但该公式成立的前提是 $f(x)$在$[a,b]$不但存在定积分，还存在原函数，二者只要有一个不存在，则该公式不成立。

下面，我们来探究一个函数$f(x)$在$[a,b]$上可积和存在原函数的条件，并总结出变限积分$F(x)=\int_a^x f(t)dt$的各种性质！

可积 ->存在定积分

存在原函数->存在不定积分

什么样的函数一定可积

1. 闭区间上的连续函数
2. 闭区间上的单调函数
3. 闭区间上有界且只有有限个间断点的函数

什么样的函数一定不可积

无界函数

原函数的存在性

什么样的函数一定存在原函数

闭区间上的连续函数

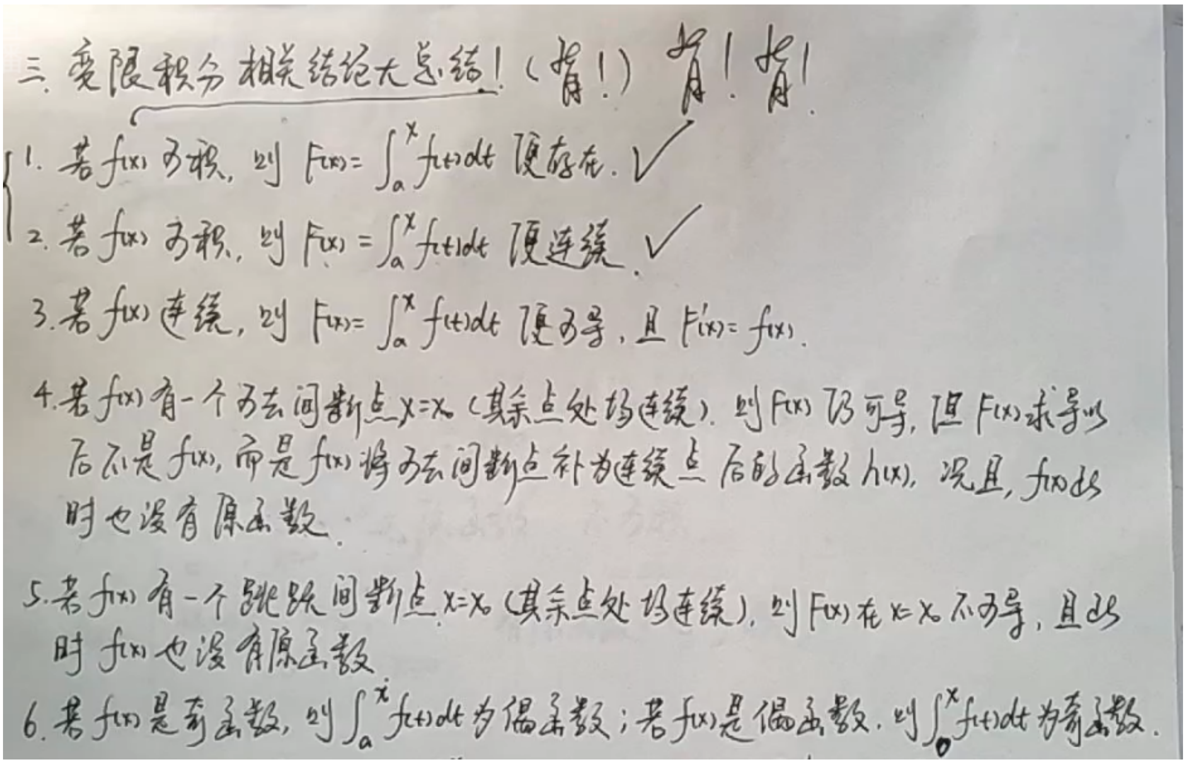
什么样的函数一定不存在原函数

1. 有第一类间断点的函数（导函数无第一类间断点）
2. 有无穷间断点的函数（在该点有定义）

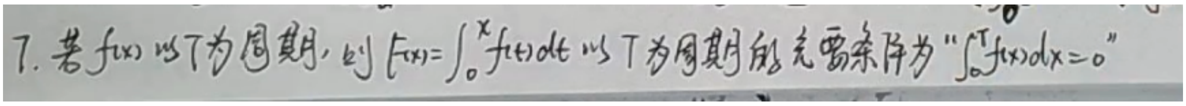
变限积分相关结论

1. 若$f(x)$可积，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$存在
2. 若$f(x)$可积，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$连续
3. 若$f(x)$连续，则可$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$可导，且$F'(x)=f(x)$

4. f(x)有一个可去间断点，其余均连续，则f(x)仍可导，单$F(x)$求导以后$f(x)$，而是$f(x)$将可去间断点补为连续间断点的函数$h(x)$,$f(x)$依然没有原函数
5. 若$f(x)$有一个跳跃间断点$x=x_0$其余点连续，则$F(x)$不可导，且$f(x)$也没有原函数
6. 若$f(x)$是奇函数，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为偶函数，若$f(x)$是偶函数，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为奇函数
7. 若$f(x)$以T为周期，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$以T为周期，充要条件是$\int_0^T f(x)dx=0$

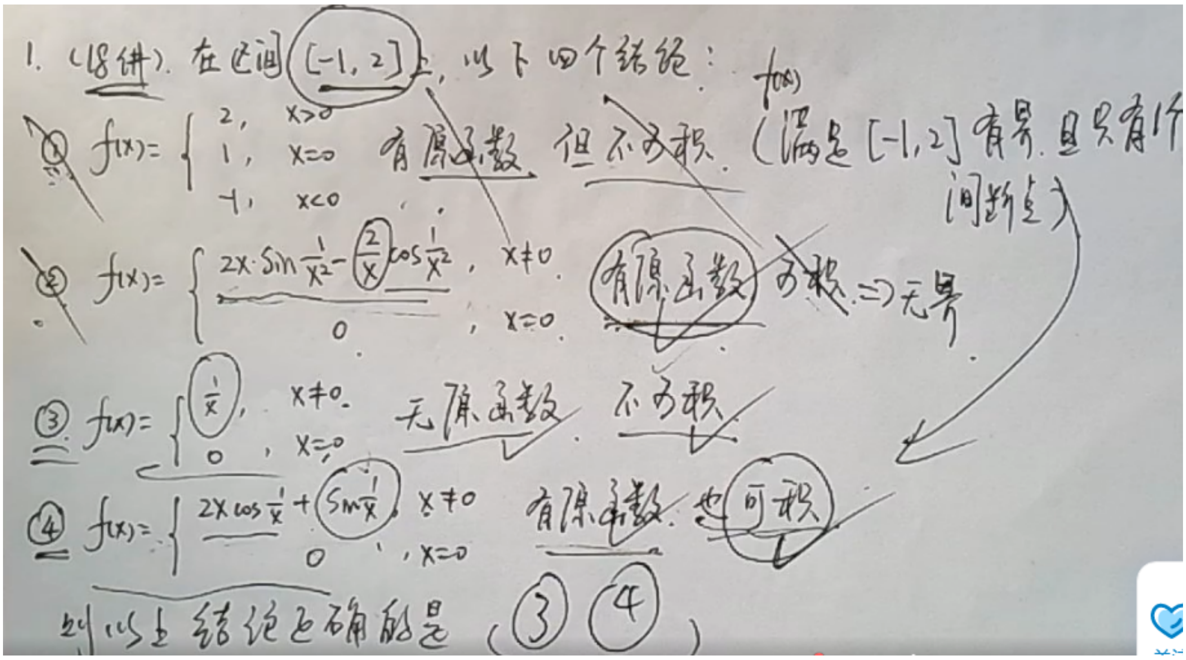

三、变限积分相关结论大总结！（背！）背！背！

1. 若f(x)可积，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 必存在。
2. 若f(x)可积，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 必连续。
3. 若f(x)连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 必可导，且$F'(x)=f(x)$。
4. 若f(x)有一个可去间断点$x=x_0$（其余点处均连续），则F(x)仍可导，但F(x)求导以后不是f(x)，而是f(x)将可去间断点补为连续点后的函数h(x)，况且，f(x)此时也没有原函数。
5. 若f(x)有一个跳跃间断点$x=x_0$（其余点处均连续），则F(x)在$x=x_0$不可导，且此时f(x)也没有原函数
6. 若f(x)是奇函数，则$\int_a^x f(t)dt$为偶函数；若f(x)是偶函数，则$\int_0^x f(t)dt$为奇函数。


7. 若f(x)以T为周期，则$F(x)=\int_0^x f(t)dt$以T为周期的充要条件为"$\int_0^T f(x)dx=0$"

题目

例一


1.（18研）在区间[-1,2]上，以下四个结论：

① $f(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ 1, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 有原函数 但不可积。（满足[-1,2]有界，且只有个间断点）

② $f(x)=\begin{cases}2x\cdot\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数 可积 ⇒ 无界

③ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 无原函数 不可积

④ $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数 也可积

则以上结论正确的是（③④）

①不连续，没有原函数，但是是有界且有限个间断点，所以可积

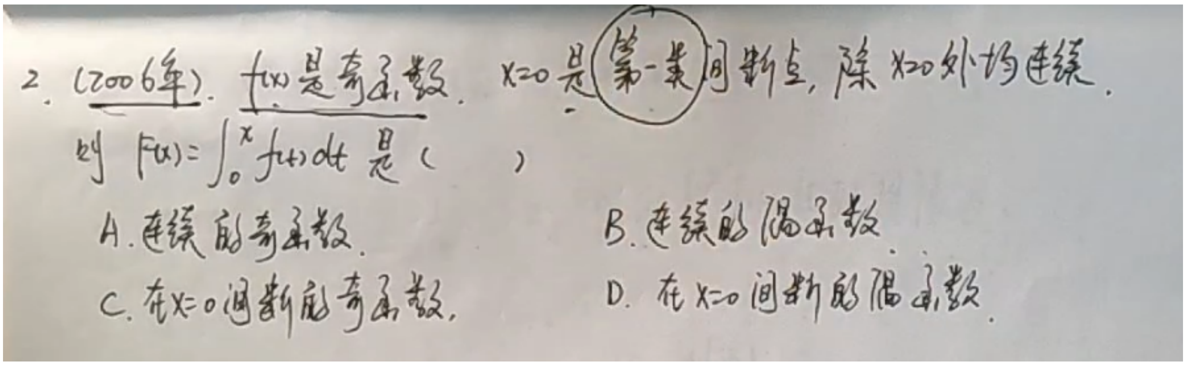
②是震荡间断点，不能通过判别法，但是原函数可以直接算出来所以有原函数但是不可积

③0是无穷间断点，没有原函数，无穷必定无界，所以不可积

④有界震荡间断点，要通过找原函数来进行判断 是闭区间上的有界且有有限个间断点的函数，所以可积，$\int\left(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx$原函数是 $x^2cos\frac{1}{x}$

有界震荡间断点的函数大概率是有原函数的

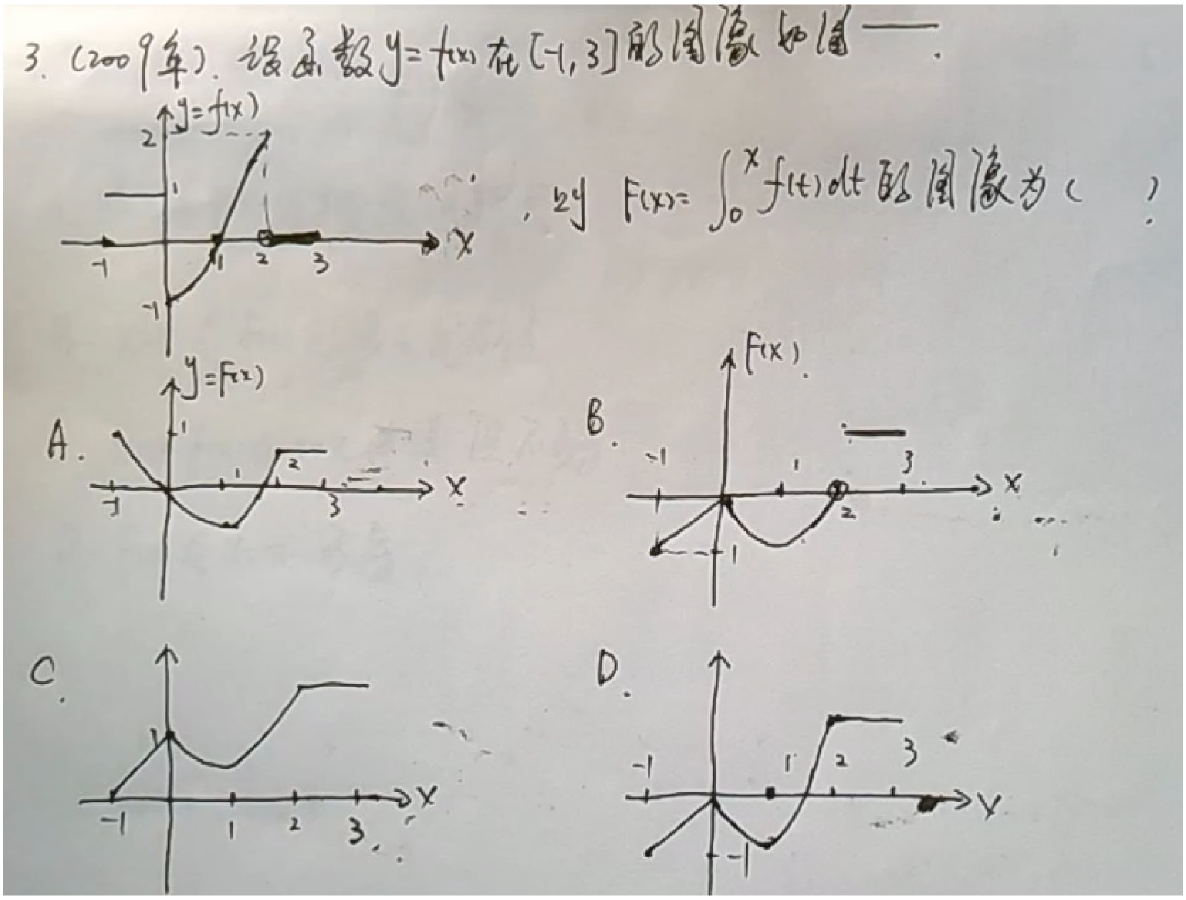
例二


2. (2006年). f(x)是奇函数. x=0是第一类间断点, 除x=0外均连续.
则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是( )
A. 连续的奇函数. B. 连续的偶函数.
C. 在x=0间断的奇函数. D. 在x=0间断的偶函数.

C、D变限积分存在必定连续

选B

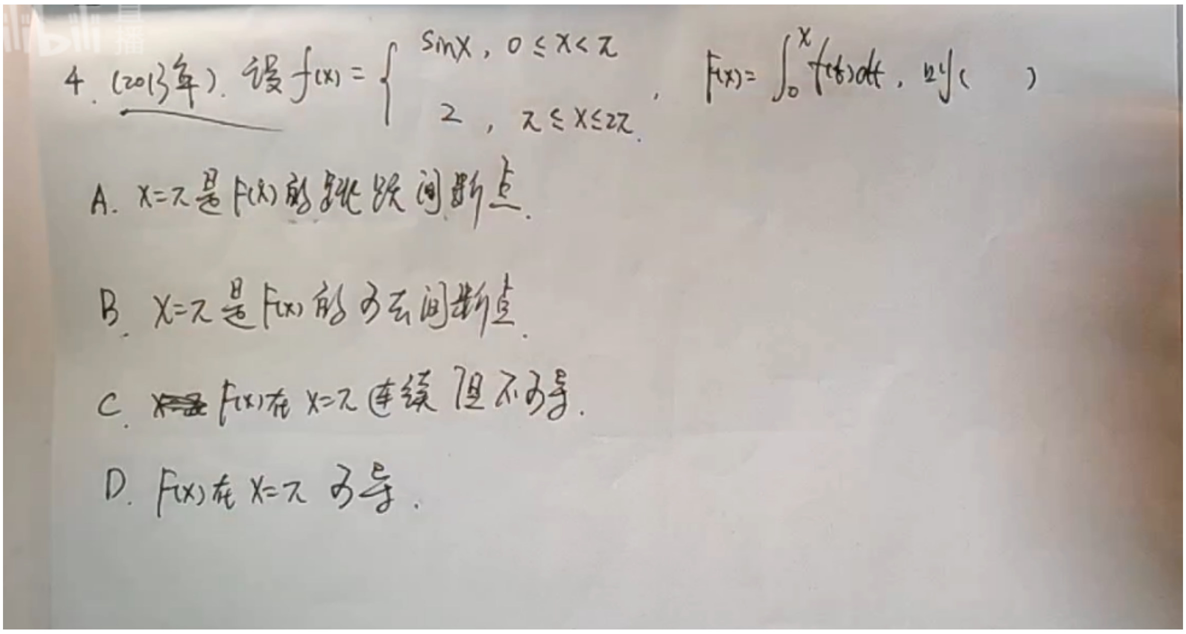
例三


3. (2009年). 设函数y=f(x)在[-1,3]的图像如图—. 则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图像为( )

1. 变限积分一定连续 排除B
2. 必定过原点 排除C

3. 0 和 2 是不可导点（跳跃间断点必定不可导）

例四



4.（2013年）. 设 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x<\pi \\ 2, & \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则（ ）

A. $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的跳跃间断点.

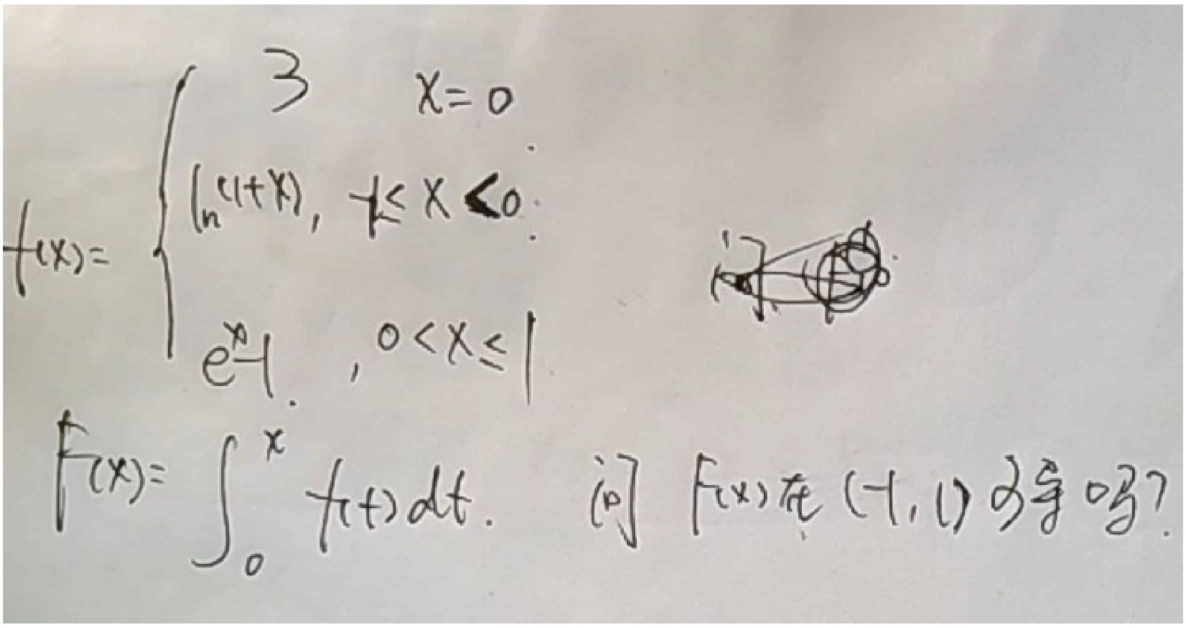
B. $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可去间断点.

C. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 连续但不可导.

D. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 可导.

0处跳跃间断点，必定连续不可导

例5

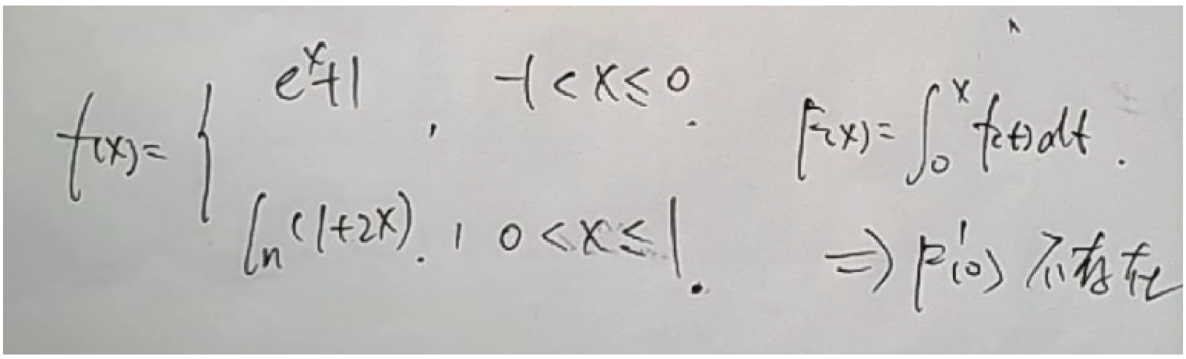


$$f(x)=\begin{cases} 3, & x=0 \\ \ln(1+x), & -1\le x<0 \\ e^x-1, & 0<x\le 1 \end{cases}$$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. 问 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 可导吗?

0处是可去间断点，是可导的

例六



$$f(x)=\begin{cases} e^x+1, & -1<x\le 0 \\ \ln(1+2x), & 0<x\le 1 \end{cases}$$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

$\Rightarrow F'(0)$ 不存在

跳跃间断点，不存在