Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik / Lehrstuhl für Informationstechnische Regelung	Einführung in die Roboterregelung (ERR)
Technische Universität München	Kurzlösung zur 2. Übung

Aufgabe 1:

1.1
$$
{}^{a}T_b = \left[\begin{array}{ccc|c} n_x & s_x & a_x & 0 \\ n_y & s_y & a_y & 0 \\ n_z & s_z & a_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -s\Psi c\Theta s\Phi + c\Psi c\Phi & -s\Psi c\Theta c\Phi - c\Psi s\Phi & s\Psi s\Theta & 0 \\ c\Psi c\Theta s\Phi + s\Psi c\Phi & c\Psi c\Theta c\Phi - s\Psi s\Phi & -c\Psi s\Theta & 0 \\ s\Theta s\Phi & s\Theta c\Phi & c\Theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

1.2
$$
{}^{a}T_b(\Theta=0) = \left[\begin{array}{ccc|c} c(\Psi+\Phi) & -s(\Psi+\Phi) & 0 & 0 \\ s(\Psi+\Phi) & c(\Psi+\Phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
{}^{a}T_b(\Theta=\pi) = \left[\begin{array}{ccc|c} c(\Psi-\Phi) & s(\Psi-\Phi) & 0 & 0 \\ s(\Psi-\Phi) & -c(\Psi-\Phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

1.3 $\Theta = 0 \longrightarrow \Psi + \Phi := \operatorname{atan2}(n_y, n_x)$ D.h. Ψ, Φ sind nicht eindeutig bestimmbar.
$\Theta = \pi \longrightarrow \Psi - \Phi := \operatorname{atan2}(n_y, n_x)$

Um Eindeutigkeit zu erzielen wird festgesetzt: $\Phi = 0$
Somit ergibt sich: $\Psi = \operatorname{atan2}(n_y, n_x)$

1.4.1 In der Übung wird ein allgemeines Verfahren besprochen, hier soll jedoch ein direkter Weg angegeben werden:

$\Theta = \arccos(a_z) \longrightarrow$ 2 Lösungen: $+/-\ \Theta_{\text{Hauptwert}}$

Numerisch günstiger als die Auswertung des Arcuscosinus ist:

$$\sin\Theta = \sqrt{1-a_z^2} \longrightarrow 0 \le \Theta \le \pi\ ;\quad \Theta = \operatorname{atan2}(\sqrt{1-a_z^2},\ a_z),\ \text{bzw:}$$
$$\sin\Theta = -\sqrt{1-a_z^2} \longrightarrow -\pi \le \Theta \le 0\ ;\quad \Theta = \operatorname{atan2}(-\sqrt{1-a_z^2},\ a_z)$$

1.4.2
$$\sin\Theta = \sqrt{1-a_z^2} \longrightarrow \Psi = \operatorname{atan2}(a_x, -a_y);\quad \Phi = \operatorname{atan2}(n_z, s_z),\ \text{bzw:}$$
$$\sin\Theta = -\sqrt{1-a_z^2} \longrightarrow \Psi = \operatorname{atan2}(-a_x, a_y);\quad \Phi = \operatorname{atan2}(-n_z, -s_z)$$

Aufgabe 2:

2.1 $\underline{k}^T = [\,0,\ 1,\ 0\,]\ ; \quad \longrightarrow \quad R(\underline{k},\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} = R(y,\Theta)$

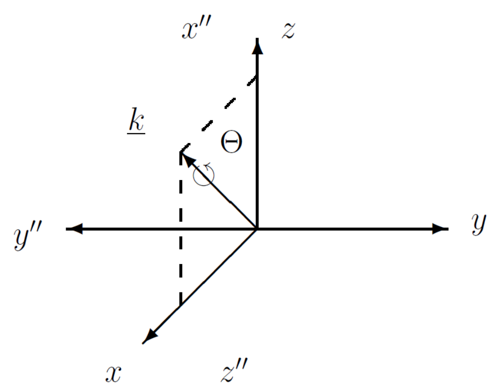
2.2

$$R(\underline{k},\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.Schritt: $\cos\Theta = 0,5 \cdot (n_x + s_y + a_z - 1) = -1\ ;\ \sin\Theta = 0$
daraus folgt: $\mathrm{atan2}(0,-1) = \pi$

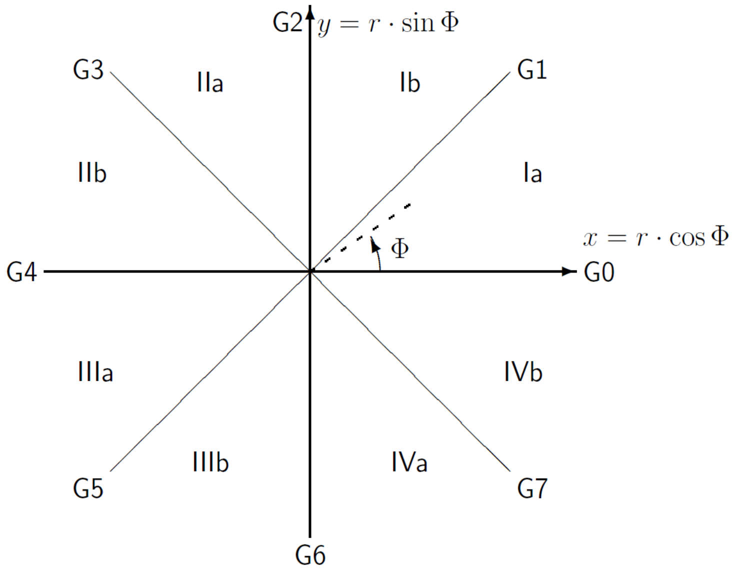
2.Schritt: Aus den Diagonalelementen der allgemeinen Rotationsmatrix ergeben sich die Elemente von $\underline{k}$.

$$\begin{aligned} k_x^2 \cdot \mathrm{vers}\Theta + \cos\Theta &= n_x = 0 \longrightarrow k_x = \pm 0,5 \cdot \sqrt{2} \\ k_y^2 \cdot \mathrm{vers}\Theta + \cos\Theta &= s_y = -1 \longrightarrow k_y = 0 \\ k_z^2 \cdot \mathrm{vers}\Theta + \cos\Theta &= a_z = 0 \longrightarrow k_z = \pm 0,5 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$



Zusatzaufgabe:

Z.1



Bereich	Definitionsbereich $\lvert y/x\rvert$	x	y	Wertebereich in Grad	Berechnungsvorschrift
G0	$= 0$	> 0	$= 0$	$\Phi = 0$	
Ia	< 1	> 0	> 0	$0 < \Phi < 45$	$\Phi := \arctan(y/x)$
G1	$= 1$	> 0	> 0	$\Phi = 45$	
Ib	> 1	> 0	> 0	$45 < \Phi < 90$	
G2	∞	$= 0$	> 0	$\Phi = 90$	$\Phi := 90 - \arctan(x/y)$
IIa	> 1	< 0	> 0	$90 < \Phi < 135$	
G3	$= 1$	< 0	> 0	$\Phi = 135$	
IIb	< 1	< 0	> 0	$135 < \Phi < 180$	$\Phi := 180 + \arctan(y/x)$
G4	$= 0$	< 0	$= 0$	$\Phi = 180$	
IIIa	< 1	< 0	< 0	$-180 < \Phi < -135$	$\Phi := -180 + \arctan(y/x)$
G5	$= 1$	< 0	< 0	$\Phi = -135$	
IIIb	> 1	< 0	< 0	$-135 < \Phi < -90$	
G6	∞	$= 0$	< 0	$\Phi = -90$	$\Phi := -90 - \arctan(x/y)$
IVa	> 1	> 0	< 0	$-90 < \Phi < -45$	
G7	$= 1$	> 0	< 0	$\Phi = -45$	
IVb	< 1	> 0	< 0	$-45 < \Phi < 0$	$\Phi := \arctan(y/x)$
S1		$= 0$	$= 0$		$\Phi := 0;$ per def.

Z.2

Fall	Teilbereiche		Bedingungen			Winkelbereich		
			$\lvert y/x \rvert$	x	y	in Grad		
A		S1		$x = y = 0$			$\Phi =$	0
B	IIIa	G5	≤ 1	< 0	< 0	-180	$< \Phi \leq$	-135
C	IIIb, IVa	G6	> 1		< 0	-135	$< \Phi <$	-45
D	IVb, Ia	G0, G1, G7	≤ 1	> 0		-45	$\leq \Phi \leq$	45
E	Ib, IIa	G2	> 1		> 0	45	$< \Phi <$	135
F	IIb	G3, G4	≤ 1	< 0	≥ 0	135	$\leq \Phi \leq$	180

Z.3 Algorithmus

Funktion: $\mathrm{atan2}(y, x)$
gegeben: x, y
gesucht: $-\pi < \Phi \leq \pi$

1. a) $|y| \leq |x| \wedge |x| \neq 0\,;$ $\longrightarrow$ $\Phi := \arctan(y/x)\,;$ $H := x\,;$ (B,D,F)
   b) $|y| \leq |x| \wedge |x| = 0\,;$ $\longrightarrow$ $\Phi := 0\,;$ $H := x\,;$ (A)

2. $|y| > |x|$ $\longrightarrow$ $\Phi := \pi/2 - \arctan(x/y)\,;$ $H := y\,;$ (C,E)

3. Korrektur für die Fälle B,C,F:

   a) $H < 0 \wedge y > 0$ $\longrightarrow$ $\Phi := \Phi + \pi$
   b) $H < 0 \wedge y \leq 0$ $\longrightarrow$ $\Phi := \Phi - \pi$

Z.4 Auswerten von $\arctan(y/x)$ mittels Tabelle

a) Berechnung von y/x, danach nächsten Tabellenwert suchen bzw. interpolieren
   Beispiel: Winkelauflösung $0,02^0$ $\longrightarrow$ Tabelle mit 2250 Winkelwerten

b) x und y als Eingangsgrößen einer Matrixtabelle, dadurch entfällt die Berechnung von y/x.
   (Voraussetzung: $0 \leq x \leq y \leq 1 \;\longrightarrow\; 0 \leq \Phi \leq \pi/4$)

   Beispiel: 128 Werte für x, y ergibt eine Tabelle der Dimension $128 \cdot 128 = 16384$.
   Wegen der Symmetrie der Tabelle müssen aber nur 8192 Werte gespeichert werden.