

# **Grundzüge der probabilistischen Datenfusion**

Zusatzunterlage zur Vorlesung

*Advanced Robot Perception*

Georg von Wichert, Siemens Corporate Technology

München, 2014

1.	Grundlegende Zusammenhänge und Techniken	3
1.1.	Die bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes	3
1.2.	Grundzüge der probabilistischen Sensordatenfusion	3
1.3.	Das Kalman-Filter	6
1.4.	Multi-Target-Tracking und Data Association	7
1.4.1.	Validierung von Messdaten	8
1.4.2.	Zur Lösung des Korrespondenzproblems	8
1.4.3.	Joint Probabilistic Data Association	9
	Literaturverzeichnis	12

.

# 1. Grundlegende Zusammenhänge und Techniken

Im der Vorlesung ist bereits auf die Notwendigkeit zur Fusion von (Sensor-)Information aus unterschiedliche Quellen und dabei der expliziten Repräsentation unsicheren Wissens verwiesen worden. In diesem Dokument sollen, als Basis für weitergehende Überlegungen einige einschlägige Techniken diskutiert werden. Dazu werden zunächst einige ausgewählte grundlegende Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung rekapituliert. Danach werden die Grundzüge der probabilistischen Sensordatenfusion beschrieben. Anhand des Kalmanfilters wird ferner das Problem der Datenassoziation eingeführt und einige Lösungswege dazu diskutiert.

## 1.1. Die bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes

Betrachtet man zwei nicht statistisch unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$ , so läßt sich deren Verbundwahrscheinlichkeit  $P(A,B)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse gemeinsam eintreten, wie folgt berechnen:

$$P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \quad (1)$$

Dabei ist  $P(A|B)$  die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $A$  eintritt, wenn bekannt ist, daß  $B$  eingetreten ist. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \quad (2)$$

Auf diese Weise werden  $P(B|A)$  und  $P(A|B)$  zueinander in Beziehung gesetzt, wovon im folgenden intensiv Gebrauch gemacht werden wird. Für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse  $B_i$  mit  $\sum_i P(B_i) = 1$  gilt außerdem der *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit*:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \quad (3)$$

Damit ergibt sich aus dem vorhergehenden der *Satz von Bayes*:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)} \quad (4)$$

Für den Fall, dass  $A$  und  $B$  zusätzlich von einem den Kontext beschreibenden Ereignis  $C$  abhängig sind, ergibt sich (durch wiederholtes Anwenden des Bayes'schen Satzes):

$$P(B_k|A,C) = \frac{P(A|B_k,C) \cdot P(B_k|C)}{\sum_i P(A|B_i,C)P(B_i|C)} \quad (5)$$

## 1.2. Grundzüge der probabilistischen Sensordatenfusion

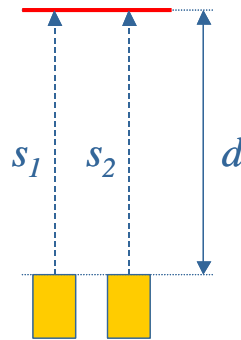
Die bisher für diskrete Ereignisse formulierten Zusammenhänge gelten analog auch für (kontinuierliche) Zufallsvariablen. Umgekehrt gilt das im folgenden Gesagte auch für diskrete Ereignisse und gemischt kontinuierlich-diskrete Probleme. Der Satz von Bayes liest sich für kontinuierliche Zufallsvariablen wie folgt:

$$p(x|z) = \frac{p(z|x) \cdot p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(z|x)p(x)dx} = \alpha \cdot p(z|x) \cdot p(x) \quad (6)$$

Dabei ist  $p(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $x$ .  $\alpha$  ist eine Konstante, die dafür sorgt, dass  $p(x/z)$  sich definitionsgemäß zu eins integriert.

Dieser Zusammenhang bildet die Basis für etliche Methoden zur Parameterschätzung: Repräsentiert  $z$  eine Messung und  $x$  ist der gesuchte Parameter, dann repräsentiert  $p(z/x)$  die Abhängigkeit der Messung vom wahren Wert des Parameters, also das Sensormodell. Die Dichte  $p(x)$ , welche nicht von der Messung abhängt, spiegelt das *a priori*-Wissen über den Wert von  $x$  vor Berücksichtigung der Messung wieder. Diese beiden Informationen erlauben es, mit der Hilfe des Bayes'schen Satzes auf  $p(x|z)$  zu schließen, die *aposteriori*-Dichte von  $x$  gegeben  $z$ , also das Wissen über den Parameter *nach* der Messung.

Auf die skizzierte Art und Weise wird das gesamte Wissen über das betrachtete Problem in der Form von Dichtefunktionen repräsentiert. Insbesondere sind dies das Sensormodell  $p(z/x)$  und  $p(x)$ , das Wissen über den Wert von  $x$ . Der Satz von Bayes stellt das Framework zur Verfügung, um in diesem Rahmen Messungen zu interpretieren und daraus auf die gemessenen Größen zu schließen. Dies soll zum Abschluss an einem kleinen Beispiel illustriert werden. Dazu sei angenommen, dass mit Hilfe zweier Distanzsensoren  $s_1$  und  $s_2$ , gemäß Abbildung 1, der Abstand zu einer senkrechten Wand gemessen werden soll.



**Abbildung 1: Zwei Sensoren messen den Abstand zu einer Wand.**

Die Dichte der Zufallsvariablen  $s_1$  und  $s_2$  hängt dann, sofern die Sensoren funktionieren, vom wirklichen Abstand  $d$  ab. Für dieses Beispiel sei angenommen, dass die beiden Messungen jeweils über ein normalverteiltes Messrauschen  $v$  verfügen:

$$s_i = d + v_i \quad (7)$$

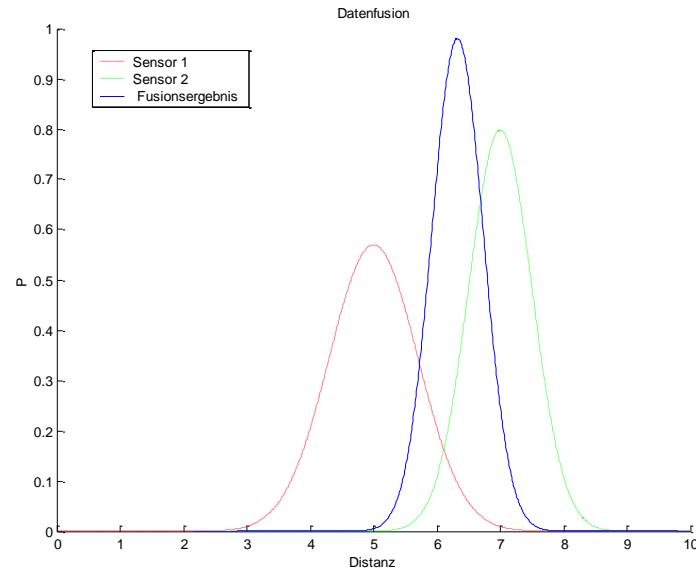
Dann ergibt sich, mit der Standardabweichung  $\sigma_i$ , die Dichte  $p(s_i/d)$  als:

$$p(s_i / d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(s_i-d)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (8)$$

Der Satz von Bayes ergibt in diesem Fall das folgende.

$$p(d | s_1, s_2) = \frac{p(s_1, s_2 | d) \cdot p(d)}{p(s_1, s_2)} = \frac{p(s_1, s_2 | d) \cdot p(d)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(s_1, s_2 | d) p(d) dd} = \alpha \cdot p(s_1 | d) \cdot p(s_2 | d) \cdot p(d) \quad (9)$$

Die Faktorisierung von  $p(s_1, s_2/d)$  in  $p(s_1/d)$  und  $p(s_2/d)$  basiert auf der Annahme, dass die Rauschanteile  $v_i$  der Messungen von einander unabhängig sind. In diesem Fall kann für die Messungen die bedingte (konditioniert durch  $d$ ) Unabhängigkeit angenommen werden. Es sei darauf hingewiesen, dass  $s_1$  und  $s_2$  ohne die Konditionierung durch  $d$  nicht unabhängig sind.



**Abbildung 2: Bayes'sche Inferenz zum Zweck der Fusion zweier Sensormessungen.** Gestrichelt sind die Sensormodelle  $p(d/s_i)$  für  $s_1=5, \sigma_1=0.7$  und  $s_2=7, \sigma_2=0.5$  dargestellt. Die durchgezogene Kurve zeigt den Verlauf der aposteriori-Dichte  $p(d/s_1, s_2)$ , das heißt das Wissen über den Ort der Wand nach Berücksichtigung der Messungen  $s_1$  und  $s_2$ .

Die Abbildung 2 zeigt ein Beispiel für das Ergebnis der Nutzung der Bayes'schen Inferenz. Die Sensoren messen die Abstände  $s_1=5$  und  $s_2=7$ . Als a priori-Dichte  $p(d)$  wurde eine Gleichverteilung im Intervall  $[0,10]$  angenommen, die in der Abbildung nicht dargestellt ist. Es liegt also bisher keine Information vor.

Man erkennt, dass bei gauß'schem Messrauschen die aposteriori-Dichte  $p(d/s_1, s_2)$  des Abstands  $d$  ebenfalls normalverteilt ist (was sich auch nachweisen lässt) und eine geringere Varianz aufweist, als die Sensormodelle. Dies reflektiert die Tatsache, dass zwei unabhängige Messungen die Unsicherheit des Ergebnisses verringern. Darüber hinaus erkennt man eine mit der Varianz gewichtete Mittelung der beiden Messergebnisse, wobei die Messung  $s_2$  mit dem geringeren Rauschen höher bewertet wird. Das Maximum der Dichtefunktion liegt dementsprechend näher bei 7. Abschließend sei auf die dieser Berechnung implizit und explizit zugrundeliegenden Annahmen hingewiesen. Die Annahme der bedingten Unabhängigkeit der Messergebnisse wurde bereits diskutiert. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass nur ein Objekt die Messungen beeinflusst und damit auch dass die beiden Messungen genau diesem Objekt zugeordnet werden können.

Auf den ersten Blick verwundert, dass man dem Ergebnis der Berechnung nicht ansehen kann, ob die Messungen „gut“ (konsistent) sind. Auch bei – wie in diesem Fall – eigentlich nicht besonders konsistenten Messungen, verringert sich die Varianz des Ergebnisses. Unter den obigen Annahmen ist dies jedoch richtig. Mathematisch ist hierfür der Nenner  $1/\alpha = p(s_1, s_2)$  verantwortlich. Er gibt an, wie wahrscheinlich es (unabhängig vom wahren Wert von  $d$ ) ist, dieses Messergebnis  $s_1, s_2$  zu erhalten. Der Term

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s/d) p(d) dd \quad (10)$$

wird daher häufig auch als *Evidenz* bezeichnet.

Eine optimale Schätzung  $\hat{d}$  des gesuchten Parameters  $d$  im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Schätzfehlers liefert der aposteriori-Erwartungswert

$$\hat{d} = E[d | s] = \int_{-\infty}^{\infty} d p(d | s) dd \quad (11)$$

In diesem Beispiel wurde nur die Fusion zweier zeitgleicher Messungen betrachtet. Selbstverständlich lässt sich das Ergebnis dieser Fusion im weiteren Verlauf der Zeit durch wiederholte Messungen verbessern, wenn man das Ergebnis beim nächsten Schritt als a priori-Dichte  $p(d)$  einsetzt. Das im folgenden Abschnitt kurz andiskutierte Kalman-Filter leistet genau dieses für eine bestimmte Klasse von dynamischen Vorgängen.

### 1.3. Das Kalman-Filter

Auf eine detaillierte Diskussion des Kalman-Filters oder gar eine Herleitung des Kalman-Filter-Gleichungen soll an dieser Stelle zugunsten des Hinweises auf die umfangreiche Literatur (unter vielen anderen [Bar-Shalom, 1988] und [Gelb, 1999]) hierzu verzichtet werden. Es soll lediglich darauf hingewiesen werden, dass das Kalmanfilter letztlich das im vorigen Abschnitt beschriebene bayes'sche Kalkül (Gleichung 6) zur Verfolgung des Zustandes  $\mathbf{x}$  eines gesteuerten linearen dynamischen Systems verwendet – unter der Annahme, dass alle beteiligten Zufallsvariablen normalverteilt und Systemrauschen und Messrauschen darüber hinaus weiß sind. Es existieren mehrere Erweiterungen des Kalman-Filters für nichtlineare Systeme (siehe u.a. [Bar-Shalom, 1988][Wan, 2001]).

Als Basis für eine Einschätzung des Kalman-Filters soll dennoch kurz der Algorithmus für das diskrete lineare Kalman-Filter beschrieben werden.

Ausgangspunkt ist das diskrete *lineare* Prozessmodell:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (12)$$

Hier ist, zum Zeitschritt  $k$ ,  $\mathbf{x}_k$  der Zustandsvektor des Systems,  $\mathbf{A}$  ist die Systemmatrix, die Matrix  $\mathbf{B}$  koppelt den Vektor der Stellgrößen  $\mathbf{u}_k$  in das System ein. Das vektorielle Systemrauschen  $\mathbf{w}_k$  ist weiß, mittelwertfrei und normalverteilt mit Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_k$ . Für das Messrauschen  $\mathbf{v}_k$  gilt analoges, es hat die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}_k$ . Die Matrix  $\mathbf{H}_k$  bildet den aktuellen Zustand auf den Messvektor  $\mathbf{z}_k$  ab.

Das Kalmanfilter berechnet nun in jedem Zeitschritt eine Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_k$  des Zustandsvektors und eine Schätzung der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  des aktuellen Schätzfehlers.

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (13)$$

Im folgenden wird ein hochgestelltes Minus verwendet, um deutlich zu machen, dass es sich um die apriori-Schätzung bzw. Prädiktion der betreffenden Größen handelt, also die Schätzung ohne Berücksichtigung der aktuellen Messung  $\mathbf{z}_k$ .

Der Kalmanfilteralgorithmus besteht im wesentlichen aus zwei Schritten. Erstens einer Fortschreibung der Schätzungen für  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{P}_k$  über die Zeit. In diesen Schritt geht im wesentlichen das dynamische Prozessmodell ein.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k\mathbf{P}_k\mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (14)$$

Die Schätzung des Prozesszustands entwickelt sich entsprechend des verwendeten Prozessmodells, die Unsicherheit der Schätzung wächst durch die Unsicherheit des Prozesses. Im zweiten Schritt werden die a priori-Schätzungen mit Hilfe der Messung korrigiert.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\
\mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-
\end{aligned} \tag{15}$$

Dabei wird zunächst die sogenannte Kalman-Verstärkung  $\mathbf{K}_k$  berechnet. Mit Hilfe einer Gewichtung durch diese Matrix werden außerdem die Schätzungen für  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{P}_k$  abhängig von der Messung  $\mathbf{z}_k$  sowie der Schätzung der Unsicherheit der gegenwärtigen Zustandsschätzung und dem Messrauschen korrigiert. Ist das Messrauschen gering im Vergleich mit dem vermuteten Schätzfehler, vertraut das Filter, analog zum Beispiel aus Abbildung 2, eher der Messung und umgekehrt.

Detailliertere Herleitungen und Diskussionen des Kalmanfilters können der Literatur entnommen werden [Bar-Shalom, 1988]. Die dort beschriebenen Erweiterungen für den Fall nichtlinearer Prozesse behalten die Annahmen über eine (unimodale) Gaußverteilung der beteiligten Zufallsvariablen bei. Diese Einschränkung wird erst durch die Ansätze aus der Klasse der „Particle Filter“ aufgehoben [Doucet, 2001].

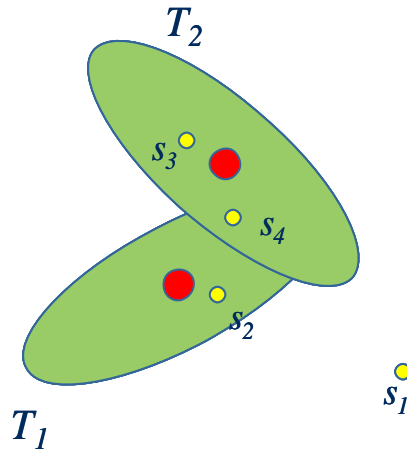
Diese Methoden verwenden nichtparametrische Repräsentationen der Dichtefunktionen, indem sie diese stochastisch abtasten („sampling“). Das hat vor allem auf das Konvergenzverhalten Auswirkungen, sofern die tatsächlich auftretenden Verteilungen stark von einer Gaußverteilung abweichen. Mit der unimodalen Gaußverteilung lässt sich nur eine einzige Hypothese beschreiben, gibt es mehrere Alternativen, so können diese nicht angemessen repräsentiert werden, sodass das Kalmanfilter hier nicht geeignet ist.

#### 1.4. Multi-Target-Tracking und Data Association

Das im vorhergehenden Abschnitt kurz eingeführte Kalmanfilter bestimmt Mittelwert  $\hat{\mathbf{x}}_k$  und Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  einer als normalverteilt angenommenen Schätzung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  eines dynamischen Systems. Beispielsweise enthält der Zustandsvektor die Lage und Geschwindigkeit eines zu greifenden Objekts in der Umgebung eines Roboters. Im Idealfall wird nur ein Objekt Einfluss auf die Sensormessungen haben, sodass alle Messwerte eindeutig diesem Objekt zugeordnet und in den Trackingprozess einbezogen werden können.

In Wirklichkeit wird es jedoch eine Reihe von Gründen geben, eine bestimmte Messung nicht für das Tracking zu verwenden. Schon wenn nur ein einziges dynamisches Objekt verfolgt werden soll, werden sich in realen Umwelten auch andere Objekte in dem Sichtfeld der Sensoren befinden und damit zu Messungen führen, welche nicht oder – beispielsweise im Fall von Mehrfachreflexionen – nicht nur von vom zu trackenden Objekt stammen. Im Fall eines Trackings mehrerer Objekte verschärft sich dieses Problem einerseits, andererseits hat man zumindest über die getrackten Objekte Informationen, welche sich für eine Messdaten-Objekt-Zuordnung (Data Association) nutzen lassen.

Die Abbildung 3 verdeutlicht die Situation am Beispiel zweier Tracks  $T_1$  und  $T_2$ . Dargestellt ist die Zustandsinformation, wie sie das Kalmanfilter bereitstellt, also die geschätzten Zustände (rote Kreise, geschätzte Mittelwerte der Zustandsschätzung) sowie deren Kovarianzmatrizen, dargestellt als grüne Ellipsen, die z.B. den  $1\sigma$ -Bereich angeben, in welchem sich die Objekte mit einer Wahrscheinlichkeit etwa 68% befinden. Als kleine gelbe Kreise sind die Messdaten dargestellt.



**Abbildung 3: Zum Data Association Problem (siehe Text).**

Beantwortet werden muss nun die Frage, welche Messdaten welchem Track zuzuordnen sind. Offensichtlich ist die Messung  $s_1$  so weit von beiden Hypothesen entfernt, dass man sie besser ignorieren sollte, weil ansonsten die Gefahr besteht, die bestehenden Hypothesen zu verschlechtern<sup>1</sup>. Die Messungen  $s_2$  und  $s_3$  sollten sicherlich  $T_1$  bzw.  $T_2$  zugeordnet werden. Unklar ist die Zuordnung von  $s_4$ .

Neben diesem *Korrespondenzproblem* ergibt sich im Fall des Multi-Target-Trackings zusätzlich die Notwendigkeit, zu entscheiden, wann neue Objekte in den mit den Sensoren erfassten Bereich eintreten, d.h. wann neue Tracks zu initialisieren sind, und wann getrackte Objekte das Blickfeld verlassen, sodass die entsprechenden Tracks zu löschen sind.

Für die Lösung dieser Probleme wurden mittlerweile etliche Lösungswege vorgeschlagen, eine schöne Zusammenstellung findet sich bei [Cox,1993].

#### 1.4.1. Validierung von Messdaten

In jedem Fall wird man zunächst die Messungen in der Form vorsortieren, dass man diejenigen Messungen  $\mathbf{z}_{i,k}$  verwirft, deren Abstand  $\mathbf{f}_{i,k}$

$$\mathbf{f}_{i,k} = \mathbf{z}_{i,k} - \mathbf{z}_k^- = \mathbf{z}_{i,k} - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^-$$

von der Prädiktion der Messung eine gewisse Schwelle übersteigt. Als Basis für diese Entscheidung dient die Schätzung der Kovarianz dieser Vorhersage

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

Das verwendete Abstandsmaß ist dann der Mahalanobis-Abstand  $\eta_{i,k}$  der jeweiligen Messung  $\mathbf{z}_{i,k}$  von der Prädiktion gemäß

$$\eta_{i,k} = \mathbf{f}_{i,k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{f}_{i,k}$$

Dieser Vorgang wird auch als *Validation* bezeichnet, die verwendete Schwelle als *Validation Gate* bzw. *Expectation Gate*.

#### 1.4.2. Zur Lösung des Korrespondenzproblems

Die nach diesem Schritt verbleibenden Messungen sind dann den einzelnen Tracks zuzuordnen. Der einfachste Algorithmus, der dennoch gerade aufgrund seiner Einfachheit oft verwendet wird, ist die **Nächster-Nachbar-Zuordnung**. Die Nähe wird dabei ebenfalls anhand des Mahalanobis-Abstandes

<sup>1</sup> Dabei wird davon ausgegangen, dass bekannt ist, dass es Fehlmessungen (durch Störungen) geben kann. Wäre dies nicht der Fall müsste man natürlich annehmen, dass die Hypothesen fehlerhaft sind und die Messung verwenden!



bestimmt. Problematisch ist hier, dass eine endliche Chance dafür besteht, dass die resultierende Zuordnung falsch ist. Solche Fehlzusordnungen können zu ernsthaften Konvergenzproblemen führen [Cox, 1993]. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn mehrere Tracks einander sehr nahe kommen. Damit hängt die Notwendigkeit eines komplexeren Zuordnungsverfahrens stark von den Gegebenheiten der Anwendung ab. Ob im jeweils interessierenden Anwendungskontext ein komplexeres Verfahren gewählt werden muss, lässt sich abschließend erst nach Vorliegen realer Sensordaten beurteilen.

Aus diesem Grund sei hier zunächst erwähnt, dass viele der existierenden Verfahren sehr aufwendige Zuordnungshypothesenbäume verwalten und eine exponentielle Komplexität aufweisen. Um diese Bäume im Hinblick auf Speicher und Rechenzeit überhaupt handhaben zu können, ist ein aufwendiges Beschneiden der Bäume erforderlich [Cox, 1993] und dies führt zu über die Zeit stark variierenden Rechenzeitanforderungen.

Gleichzeitig existiert eine Klasse von suboptimalen Methoden, die über nahezu konstanten Rechenzeitbedarf pro Zyklus verfügen. Zu diesen Ansätzen gehört der *Joint Probabilistic Data Association Algorithmus (JPDA)*, der ebenfalls dem Übersichtsartikel von Cox [Cox, 1993] beziehungsweise dem Buch von Bar-Shalom und Fortmann [Bar-Shalom, 1988] entnommen werden kann. Für den Fall, dass für den Stauassistenten die einfache Nächster-Nachbar-Zuordnung nicht ausreicht, erscheint der JPDA-Ansatz sehr geeignet, weshalb er in Abschnitt 1.4.3 genauer diskutiert werden wird. Anders als manche der komplexeren Methoden, geht dieser Ansatz davon aus, dass die Anzahl der zu trackenden Objekte bekannt ist. Die Instantiierung neuer Tracks und das Löschen von solchen Tracks, deren zugehöriges Objekt den Messbereich der Sensoren verlassen hat, muss daher separat betrachtet werden.

### 1.4.3. Joint Probabilistic Data Association

Zunächst wird, wie im Abschnitt 1.4 angekündigt, ein Ansatz zur Lösung des Problems der Zuordnung von Messdaten zu den aktuellen Tracks beschrieben. Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass aufgrund der bisherigen Nichtverfügbarkeit von realen Sensordaten nicht abschließend entschieden werden kann, ob eventuell nicht doch ein einfacher Nächster-Nachbar-Ansatz für die Zuordnung ausreichend ist.

Das Korrespondenzproblem wird beim JPDA-Ansatz im Prinzip dadurch gelöst, dass (fast) alle Messungen – ihrer Relevanz entsprechend gewichtet – sämtlichen Tracks zugeordnet werden. Der Algorithmus soll hier nicht hergeleitet werden, da dies bei Cox und Bar-Shalom [Cox, 1993] [Bar-Shalom, 1988] detailliert nachzulesen ist. Die dort beschriebene formal exakte Herleitung soll ferner um eine etwas funktionalere Beschreibung und Diskussion ergänzt werden.

Die Zuordnung erfolgt trackweise. Die folgenden Schritte müssen daher für jeden der  $N$  aktuellen Tracks durchgeführt werden. Die Gleichungen für das rekursive Update der Schätzungen müssen dazu wie folgt angepasst werden. Zunächst ändert sich der Prädiktionsschritt nicht:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\tag{16}$$

Die Korrektur durch die Messungen muss allerdings modifiziert werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\
\mathbf{f}_{i,k} &= \mathbf{z}_{i,k} - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \\
\mathbf{f}_k &= \sum_1^{m_k} \beta_{i,j,k} \mathbf{f}_{i,k} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{f}_k \\
\mathbf{P}_k &= \beta_{0,k} \mathbf{P}_k^- + (1 - \beta_{0,k}) \mathbf{P}_k^c + \tilde{\mathbf{P}}_k \\
\tilde{\mathbf{P}}_k &= \mathbf{K}_k \left[ \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{i,j,k} \mathbf{f}_{i,k} \mathbf{f}_{i,k}^T - \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \right] \mathbf{K}_k^T \\
\mathbf{P}_k^c &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-
\end{aligned} \tag{17}$$

Dabei ist<sup>2</sup>  $\beta_{i,j}$  der Gewichtungsfaktor, der die Messung  $\mathbf{z}_i$  dem hier betrachteten Track  $j$  zuordnet. Die Gewichtung erfolgt mit der a posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass die Messung  $\mathbf{z}_i$  korrekterweise dem Track  $j$  zuzuordnen ist.  $\beta_0$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass keins der getrackten Objekte durch die Messungen detektiert wurde, d.h. keine der  $m_k$  Messungen einem der  $N$  Tracks zugeordnet werden kann.

Um  $\beta_{i,j}$  zu berechnen, werden zunächst alle möglichen Zuordnungen von Messungen und Tracks bestimmt. Dabei werden nur diejenigen Messungen betrachtet, die im Validation Gate (vgl. Abschnitt 1.4) des jeweiligen Tracks liegen, um die Anzahl der möglichen Zuordnungen möglichst zu reduzieren. Für die Zuordnung wird davon ausgegangen, dass jeder Track nur eine Messung erzeugt und jede Messung nur von einem der getrackten Objekte stammt. Dies ist vermutlich nicht immer zutreffend, aber erforderlich um die mathematischen Zusammenhänge handhabbar zu machen. Überzählige Messungen werden als Störungen modelliert.

Jede Zuordnung wird formal durch ein Zuordnungsereignis  $\theta$  repräsentiert. Der Gewichtungsfaktor  $\beta_{i,j}$  ergibt sich dann als Summe der Wahrscheinlichkeiten aller der Zuordnungen, die das elementare Zuordnungsereignis  $\{i,j\}$  enthalten, welches die Messung  $\mathbf{z}_i$  dem Track  $j$  zuordnet.

$$\beta_{i,j} = \sum_{\{i,j\} \in \theta} P(\theta / Z^k) \tag{18}$$

Dabei ist  $Z_k$  die Menge der  $m_k$  zum gegenwärtigen Zeitpunkt  $k$  betrachteten Messungen  $\mathbf{z}_i$ ,  $Z^k$  die Menge aller Messungen bis zum Zeitpunkt  $k$  und  $X_k$  die Gesamtheit der Zustände  $\mathbf{x}_k$  aller getrackten Objekte. Die Wahrscheinlichkeit einer Zuordnung ergibt sich dann mit dem Satz von Bayes und einer Markov-Annahme (Markov: „Alles Wissen aus der Vergangenheit ist im aktuellen Zustand enthalten“) als

$$\begin{aligned}
P(\theta / Z^k) &= P(\theta / Z_k, Z^{k-1}) \stackrel{\text{Markov}}{=} P(\theta / Z_k, X_k) \\
&= \alpha p(Z_k / \theta, X_k) P(\theta / X_k)
\end{aligned} \tag{19}$$

Das Problem wird dadurch so umgewandelt, dass nun die Wahrscheinlichkeit der aktuellen Messungen, bei bekannter Zuordnung und auf Basis der aktuell geschätzten Objektzustände zu bestimmen ist. Diese ergibt sich zu

$$p(Z_k / \theta_n, X_k) = \prod_1^{m_k} p(\mathbf{z}_i / \mathbf{x}_j) = \gamma^{\phi(\theta)} \prod_{\{i,j\} \in \theta_n} N[\mathbf{z}_i; \mathbf{z}_k^-, \mathbf{S}_k] \tag{20}$$

<sup>2</sup> Im folgenden wird zur Übersicht der zeitliche Index  $k$  fallengelassen, da sich die Betrachtung nur auf den aktuellen Zeitschritt beschränkt.

dabei steht  $N[\cdot]$  für die Dichte einer Normalverteilung und es wird angenommen, dass den  $\phi(\theta)$  nicht zugeordneten Messungen unter Annahme einer Gleichverteilung eine feste Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  zugewiesen wird und alle anderen Messungen um ihre auf den von den jeweiligen Kalmanfiltern geschätzten Zuständen basierenden Prädiktionen herum normalverteilt mit der zugehörigen Kovarianz  $\mathbf{S}_k$  sind (siehe Abschnitt 1.4).

Übrig bleibt dann der Term  $P(\theta / X_k)$ , die Wahrscheinlichkeit der Zuordnung  $\theta$  in Abhängigkeit der aktuellen Zustandsschätzungen aller Objekte. [Schulz, 2001] berichtet für seine Partikel-Version JPDA-Algorithmus, dass die Annahme einer Gleichverteilung in der Praxis (Personentracking durch einen mobilen Roboter) problemlos war. Bar-Shalom [Bar-Shalom, 1988] zeigt, wie sich dieser konstante Wert berechnen lässt: Er hängt von  $\mu_f(\phi)$ , der Wahrscheinlichkeit  $\phi$  Störmessungen zu erhalten, den Detektionswahrscheinlichkeiten der beteiligten Objekte  $P_D$  und der Anzahl der durch  $\theta_n$  nicht zugeordneten Messungen  $\phi(\theta)$  ab. Der Vollständigkeit halber sei der Zusammenhang hier abschließend angegeben ( $\xi(\theta)$  ist die Anzahl der Tracks, denen Messdaten zugeordnet wurden):

$$P(\theta / X^k) = \frac{(\phi(\theta))!}{m_k!} \mu_f(\phi(\theta)) P_D^{\xi(\theta)} (1 - P_D)^{T - \xi(\theta)} \quad (21)$$

Eine detaillierte Herleitung findet sich bei Bar-Shalom [Bar-Shalom, 1988].

## Literaturverzeichnis

1. Y. Bar-Shalom, T. E. Fortmann, *Tracking and Data Association*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1988.
2. I. J. Cox, A Review of Statistical Data Association Techniques for Motion Correspondence, *International Journal of Computer Vision*, 10:1, 53-66, 1993
3. A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag, 2001
4. A. Gelb (ed.), *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, MA, 1999.
5. J. Manyika, H. Durant-Whyte, *Data Fusion and Sensor Management: A Decentralized Information-Theoretic Approach*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1994.
6. D. Schulz, W. Burgard, D. Fox, A. B. Cremers, *Tracking Multiple Moving Objects with a Mobile Robot*, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'01), Dezember, 2001.
7. E. Wan, R. van der Merve, *The Unscented Kalman Filter*, in: *Kalman Filtering and Neural Networks*, pp. 221-280., Wiley Publishing, 2001.