Übung 4

Vorfilter für Zustandsregler

- zuständig für stationäre Genauigkeit
- kein Einfluss auf die Dynamik
- Existiert wenn:
  - geregeltes System asymp. stabil (alle EW $(A-BK)$ haben Realteil <0)
  - es gibt <u>keine</u> invarianten NST in Null
- $L = (C'(BK-A)^{-1}B)^{-1}$

Modale Synthese nach Roppenecker

- Vorgabe der EW λ_{Ki} und der Richtung der EW ($=$EV $\underline{v}_{Ki}$) des geschl. Regelkreises

$$\underline{v}_{Ki} = (A - \lambda_{Ki} I)^{-1} B \underbrace{\underline{p}_i}_{K\underline{v}_{Ki}} \quad \text{für } \lambda_{Ki} \neq \lambda_i$$

p_i: Parametervektor

$$\lambda_{Ki} = \lambda_i \Rightarrow \underline{p}_i = 0, \quad \underline{v}_{Ki} = \underline{v}_i$$

$$K = [\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n][\underline{v}_{K1}, \dots, \underline{v}_{Kn}]^{-1}$$

$\Rightarrow \underline{v}_{K1}, \dots, \underline{v}_{Kn}$ müssen lin. unabhängig sein!

<u>1.1</u>

EW einer Dreiecksmatrix sind die Elemente der Hauptdiag.

$$\Rightarrow \lambda_3 = -2 \quad , \quad \lambda_{K3} = \lambda_3 \Rightarrow \underline{v}_{K3} \overset{!}{=} \underline{v}_3$$

① $\Rightarrow (\lambda_3 I - A)\underline{v}_3 \overset{!}{=} 0$

$$(\lambda_3 I - A)\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \checkmark$$

② $\underline{v}_{K1}, \underline{v}_{K2}, \underline{v}_{K3}$ lin. unab. Erzeugendensystem

$$c_0 \underline{v}_{K1} \neq \underline{v}_{K2} \quad \forall c_0 \in \mathbb{R}$$

$$c_1 \underline{v}_{K1} + c_2 \underline{v}_{K2} \overset{!}{=} \underline{v}_{K3} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$c_1 6 + c_2 9{,}5 = 1$

$-c_1 6 + c_2 0{,}5 = 0$

$c_1 12 + \quad 0 \quad = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{9{,}5} \quad , c_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \underline{v}_{K_i}$ lin. unab.

2. Möglichkeit:

$\det(\underline{v}_{K_3}\ \underline{v}_{K_2}\ \underline{v}_{K_1}) \overset{!}{\neq} 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 9{,}5 & 6 \\ 0 & 0{,}5 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0{,}5 & -6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow \underline{v}_{K_1}, \underline{v}_{K_2}, \underline{v}_{K_3}$ lin. unab.

$\Rightarrow \underline{v}_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist zulässig

1.2 $(A - \lambda_{K_i} I)\underline{v}_{K_i} = B\underline{p}_i$

$$B\underline{p}_i = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} p_{i,x} + p_{i,y} \\ \frac{1}{4} p_{i,x} - p_{i,y} \\ 2p_{i,y} \end{bmatrix}$$

λ_{K_1}:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} \overset{!}{=} B\underline{p}_1$$

$\Rightarrow p_{1,y} = 12 \quad , \frac{1}{4} p_{1,x} = p_{1,y} - 12 \Rightarrow p_{1,x} = 0$

$\frac{3}{4} p_{1,x} + p_{1,y} = \frac{3}{4} \cdot 0 + 12 = 12$ ✓

$\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

λ_{K_2}:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} B\underline{p}_2$$

$\Rightarrow p_{2,y} = 0 \quad , p_{2,x} = 4 \cdot 2{,}5 = 10 \quad , \frac{3}{4} p_{2,x} = 7{,}5$ ✓

$\underline{p}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

λ_{K_3}: Da $\lambda_{K_3} = \lambda_3 \Rightarrow \underline{p}_3 \overset{!}{=} \underline{0}$

1.3

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9{,}5 & 1 \\ -6 & 0{,}5 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -19 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 EW des geschl. RK sind EW von $A-BK$

$$A-BK = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -19 & -10{,}5 \\ 0 & -3 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ EW sind $\{-2, -3, -4\} = \{\lambda_{K3}, \lambda_{K2}, \lambda_{K1}\}$

1.5

1. Alle EW von $A-BK$ haben negativen Realteil (aus 1.4)
2. Invariante NST des geregelten System sind die des ungeregelten Systems und müssen $\neq 0$ sein.

$$\det \begin{bmatrix} \eta I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta+2 & 4 & 2 & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & \eta-2 & -2 & -\frac{1}{4} & +1 \\ 0 & 0 & \eta+2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\eta+2) \det \begin{bmatrix} \eta-2 & -2 & -\frac{1}{4} & +1 \\ 0 & \eta+2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\eta+2)\left(\underbrace{(\eta-2) \det \begin{bmatrix} \eta+2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=0} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{4} & +1 \\ \eta+2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (\eta+2)\, 2 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & +1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = (\eta+2)\, 4 \cdot \frac{1}{2} = 2(\eta+2) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \eta = -2 \neq 0 \Rightarrow L$ existiert

1.6

$$L = (C(BK-A)^{-1}B)^{-1}$$

Aus 1.4

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 19 & 10{,}5 \\ 0 & 3 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 1/4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -76 & -41 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \frac{1}{24} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 1/4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 1 \\ 1/4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= 24 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$