Technik Autonomer Systeme: Kalman Filter

Dirk Wollherr

Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik
Technische Universität München

Rückblick: Bayes Filter

- Schätzung

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

- Korrektur

$$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$$

Discrete Kalman Filter

Schätze den Zustand x eines zeit-diskreten, geregelten Porzesses, der durch die lineare zeitdiskrete Differenzgleichung

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

beschrieben wird, mit einer Messung

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

6

Components of a Kalman Filter

A_t Matrix (nxn), die beschreibt, wie sich der Zustand von t-1 bis t entwickelt ohne Eingriff und Rauschen.

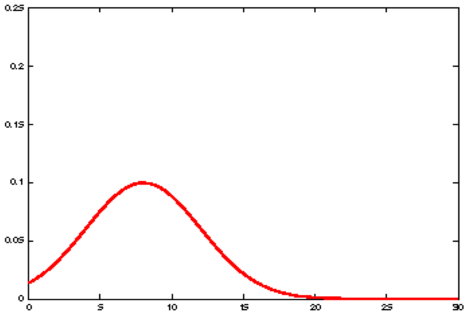
B_t Matrix (nxl), die beschreibt, wie u_t den Zustand von t bis t-1 verändert.

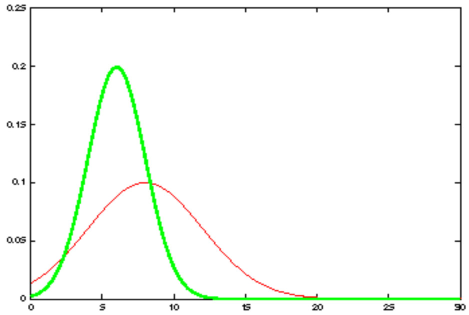
C_t Matrix (kxn), die beschreibt, wie der Zustand x_t auf die Messung z_t abgebildet wird.

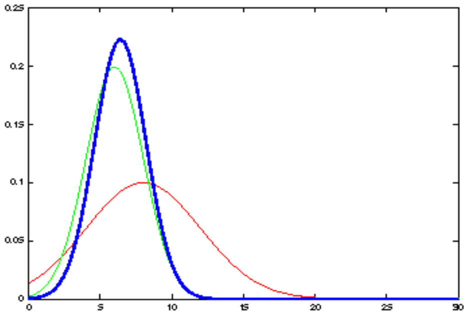
ε_t δ_t Zufallsvariablen ,die das Porzess- und Messrauschen darstellen, die als unabhängig und normalverteilt angenommen werden mit den Kovarianzmatritzen R_t und Q_t.

7

Kalman Filter Updates in 1D





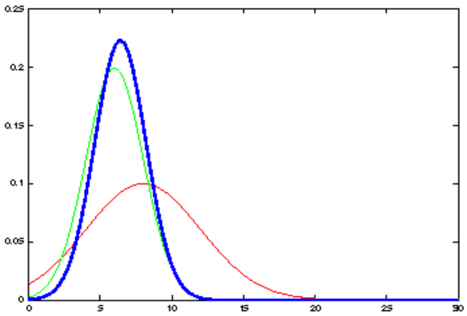


8

Kalman Filter Updates in 1D

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{cases} \quad \text{with} \quad K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs,t}^2}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases} \quad \text{with} \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

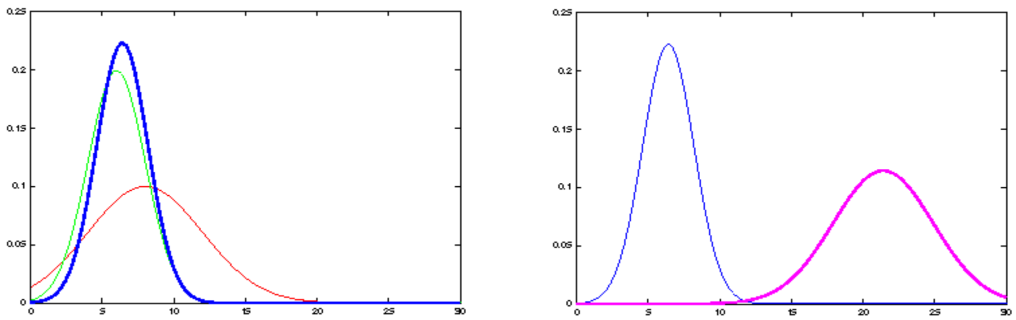


9

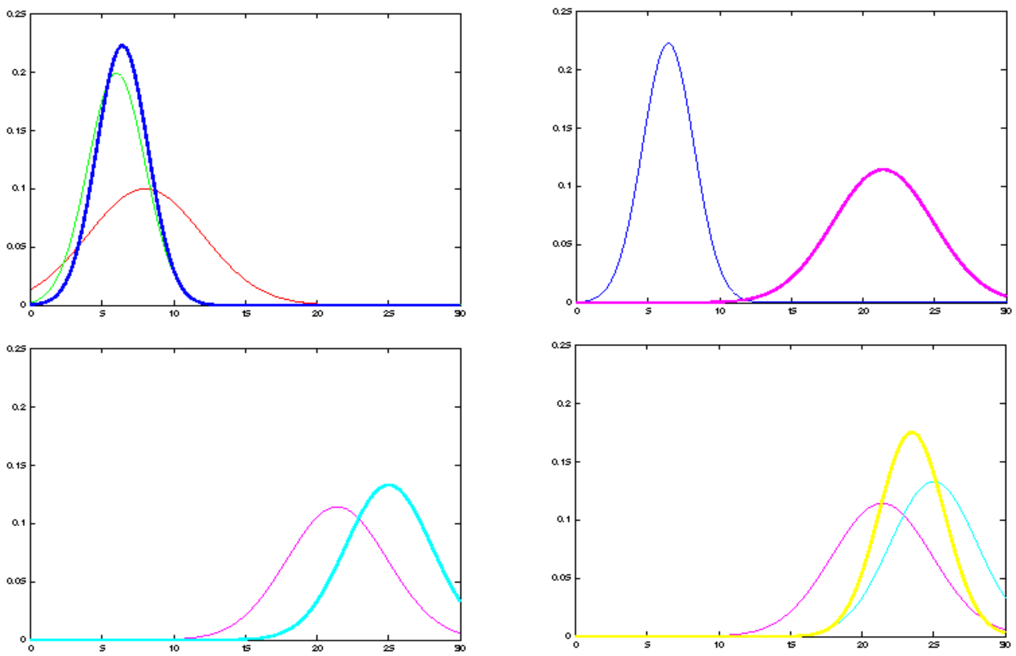
Kalman Filter Updates in 1D

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \bar{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$



Kalman Filter Updates



Lineare Gauss'sche Systeme: Initialisierung

- Initialer belief ist normalverteilt:

$$bel(x_0) = N\left(x_0; \mu_0, \Sigma_0\right)$$

Lineare Gauss'sche Systeme: Dynamik

- Dynamik ist eine lineare Funktion des Zustands und des Eingriffs mit additivem Rauschen:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right)$$

$$\begin{array}{ll} \overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) & bel(x_{t-1})\, dx_{t-1} \\ \qquad\qquad\Downarrow & \qquad\Downarrow \\ \sim N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right) & \sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}\right) \end{array}$$

Lineare Gauss'sche Systeme: Dynamik

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \qquad bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \quad \sim N(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1})\right\} dx_{t-1}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

Lineare Gauss'sche Systeme: Messung

- Messungen sind lineare Funktionen einen Zustands mit additivem Rauschen:

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

$$p(z_t \mid x_t) = N(z_t; C_t x_t, Q_t)$$

$$bel(x_t) = \quad \eta \quad p(z_t \mid x_t) \qquad \overline{bel}(x_t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N(z_t; C_t x_t, Q_t) \qquad \sim N(x_t; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t)$$

Linear Gauss'sche Systeme: Messung

$$bel(x_t) = \eta \quad p(z_t \mid x_t) \qquad \overline{bel}(x_t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N(z_t; C_t x_t, Q_t) \qquad \sim N\left(x_t; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$bel(x_t) = \eta \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1}(z_t - C_t x_t)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - \bar{\mu}_t)^T \bar{\Sigma}_t^{-1}(x_t - \bar{\mu}_t)\right\}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases} \quad \text{with} \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

Kalman Filter Algorithmus

1. Algorithmus **Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):
2. Schätzung:
3. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
5. Korrektur:
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t$
9. Return μ_t, Σ_t

Kalman Filter: Grundlagen

Voraussetzungen:
- lineares, zeitdiskretes Modell
- Gaußsches, weißes Rauschen

Interne Variablen:
- Systemzustand
- Kovarianz-Matrix des Zustands

Time-Update (Prädiktion):
- Schätzung des Systemzustands aufgrund von Eingangsdaten

Measurement Update (Korrektur):
- Korrektur des Systemszustands mittels Messung des Ausgangs

Modell:

$$x_{k+1} = A_k\, x_k + B\, u_k + w_k$$

$$z_k = H_k\, x_k + v_k$$

Time-Update Gleichungen:

$$\hat{x}_{k+1}^- = A_k\, \hat{x}_k + B\, u_k$$

$$P_{k+1}^- = A_k\, P_k\, A_k^T + Q_k$$

Measurement-Update Gleichungen:

$$K_k = P_k^-\, H_k^T\, (H_k\, P_k^-\, H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k\, \hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - K_k\, H_k)\, P_k^-$$

Kalman Filter

Initial estimates for $\hat{x}_k^-$ and P_k^-

Measurement update ("Correct")

(1) Compute the Kalman gain

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$$

(2) Update estimate with measurement z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

(3) Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

Time update ("Predict")

(1) Project the state ahead

$$\hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x}_k + B u_k$$

(2) Project the error covariance ahead

$$P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + Q_k$$

Beispiel

Sensorfusion mit Kalman-Filter

Fahrzeug ausgestattet mit

- Odometrie
- Gyroskop
- Global Positioning System

Beispiel

Odometriemodell

Funktionsprinzip:

- Messung der eigenen Fortbewegung durch Erfassung der Radwinkel
- optische oder magnetische Encoder

Modellierung der Messfehler:

$$\Delta s^o = \frac{1}{1+\epsilon} \cdot \Delta s + \Delta s_{noise}$$

- systematische Fehler:
  - fehlerhafter Radradius
  - fehlerhafte Radstellung
- stochastische Fehler:
  - Radschlupf

Beispiel

Gyroskop

Funktionsprinzip:

- Messung der Drehrate um die Vertikalachse
- Glasfaser-Gyroskop (FOG *fiber optical gyroscope*)

Modellierung der Messfehler:

$$\dot{\psi}^g = K^g\,\dot{\psi}\,(\cos\alpha + \delta_1) + \delta_2 + \delta_{noise}$$

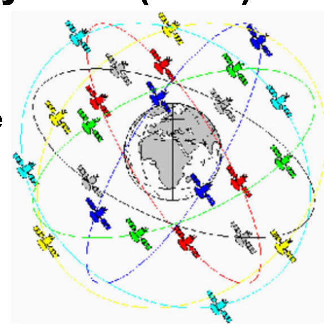
systematische Fehler:

- Verkippung von Sensorachse zur Drehrichtung α
- Schwankung des Skalierungsfaktors δ_1
- Abgleichfehler (Offset) δ_2

- stochastische Fehler:
  - (thermisches) Messrauschen δ_{noise}

Beispiel

Global Positioning System (GPS)



Satellitengestützte Navigation:

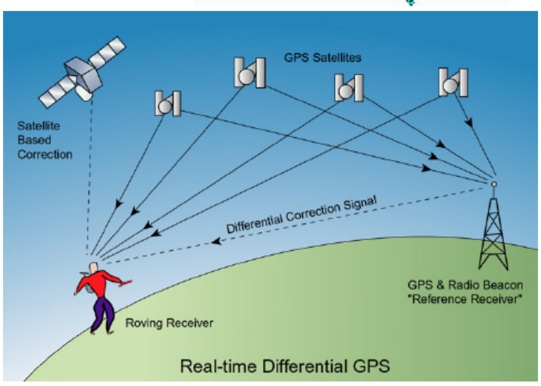
- absolute Messung über 24 GPS-Satelliten
- Positionsbestimmung aus Laufzeitdifferenz der Signale
- mindestens 3 bzw. 4 Satelliten müssen sichtbar sein

Messfehler:

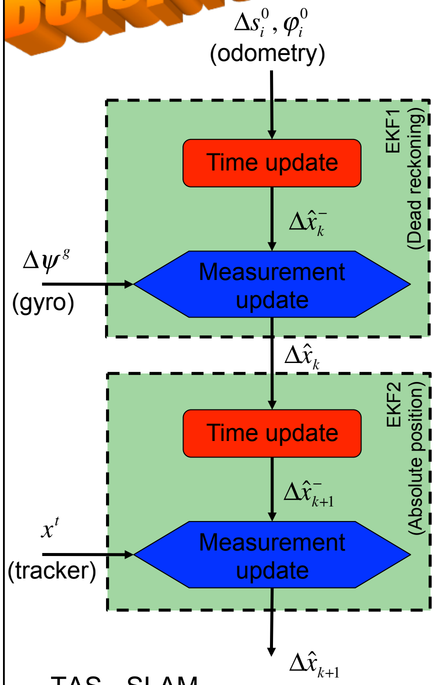
- Quantisierungseffekte
- Rauschen, Interferenzen (mehrere Signalpfade)
- Langzeitdrift durch atmosphärische Schwankungen

Erweiterung:

- DGPS (*differential GPS*)
- Korrektursignale durch terrestrische Sender



Kalmanfilter



Aufbau:

- kaskadierte Architektur
- Kalmanfilter 1: schätzen des Positionsinkrements
- Kalmanfilter 2: schätzen der absoluten Position

Implementierung:

- zeitdiskrete Berechnung
- verschiedene Sensorraten

Abtastraten:

- Odometrie: 125 Hz
- Gyroskop: 125 Hz
- Tracker: 10 Hz
- GPS: 1 Hz

Beispieltrajektorie

Testbedingungen:

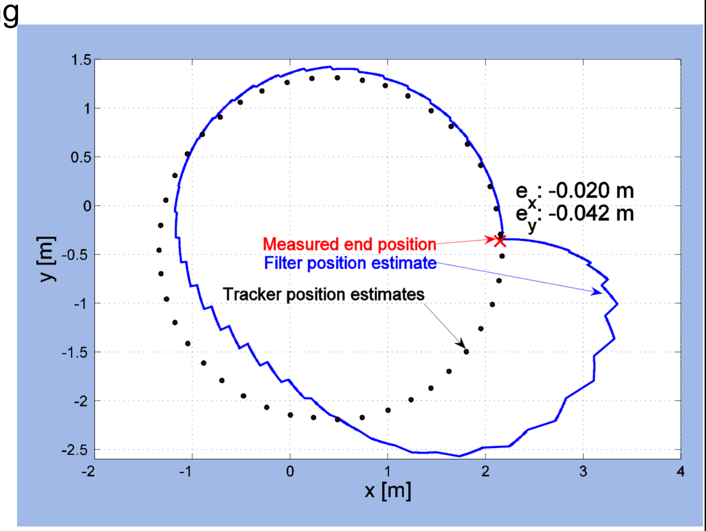
- ungeregelte Kreisbahn
- fehlerhafte Initialisierung der Orientierung: +90°

Signale:

- Odometrie
- Gyroskop
- Positionstracker

Schätzwerte:

- Position
- Orientierung



Kalman Filter Zusammenfassung

- Sehr effizient: Polinomial mit Dimension der Messungen k und des Zustands n:

  $O(k^{2.376} + n^2)$

- Optimal für lineare Gauss'sche Systeme!

- Die meisten Probleme in der Robotik sind nichtlinear!

Going non-linear

EXTENDED KALMAN FILTER

30

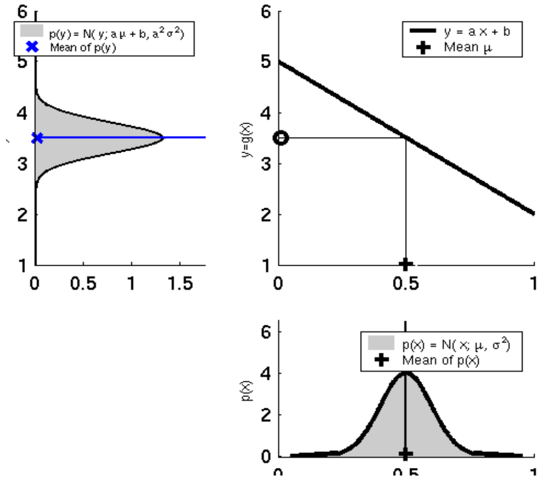
Nichtlineare dynamische Systeme

- Die meisten Probleme in der Robotik sind nichtlinear

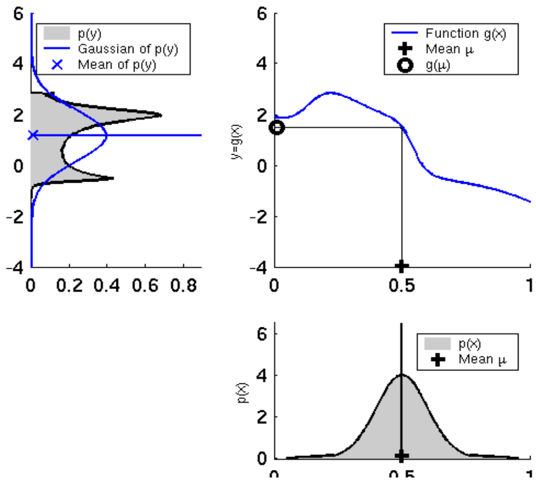
$$x_t = g(u_t, x_{t-1})$$

$$z_t = h(x_t)$$

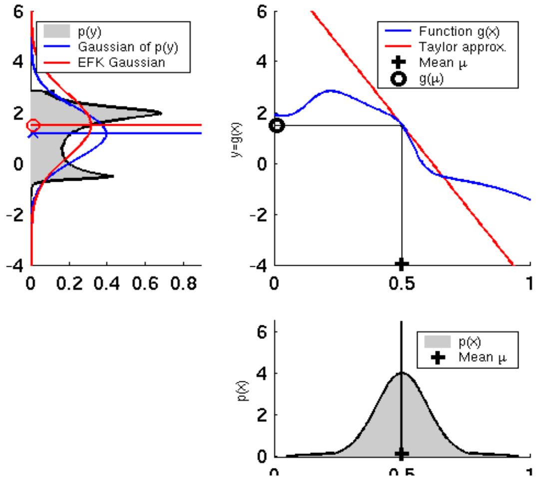
Annahme der Linerität



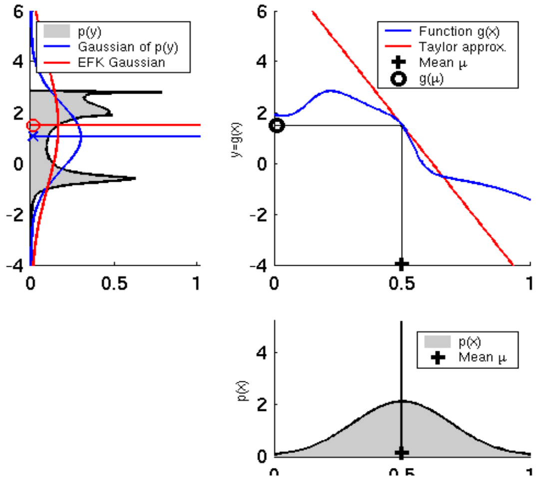
Nichtlineare Abbildungsfunktion



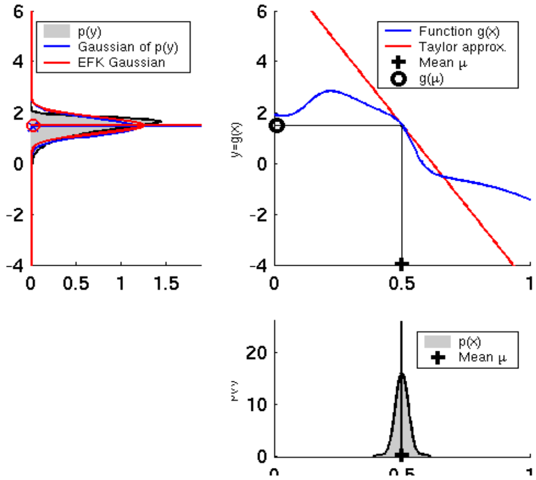
EKF Linearisierung (1)



EKF Linearisierung (2)



EKF Linearisierung (3)



EKF Linearisierung: Taylor Reihe erster Ordnung

- Schätzung:

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t\ (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

- Korrektur:

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t\ (x_t - \bar{\mu}_t)$$

EKF Algorithmus

1. **Extended_Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):
2. Schätzung:
3. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1}) \quad \longleftarrow \quad \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t \quad \longleftarrow \quad \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
5. Korrektur:
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1} \quad \longleftarrow \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t)) \quad \longleftarrow \quad \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t \quad \longleftarrow \quad \Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$
9. Return μ_t, Σ_t

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} \qquad G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

Lokalisierung

"Using sensory information to locate the robot in its environment is the most fundamental problem to providing a mobile robot with autonomous capabilities." [Cox '91]

- **Gegeben**
  - Umgebungskarte
  - Folge von Messungen
- **Gesucht**
  - Schätzung der Position des Roboters
- **Problemklassifikation**
  - Position tracking
  - Globale Lokalisierung
  - Kidnapped robot problem (recovery)

EKF Zusammenfassung

- Sehr effizient: Polinomial mit Dimension des Messungen k und des Zustands n:

  $$O(k^{2.376} + n^2)$$

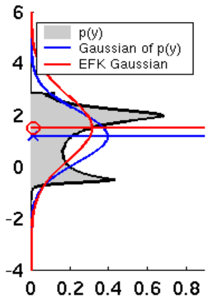
- Nicht optimal!
- Kann divergieren wenn nichtlinearitäten zu groß!
- Funktioniert überraschend gut, auch wenn Annahmen verletzt sind!

Going unscented

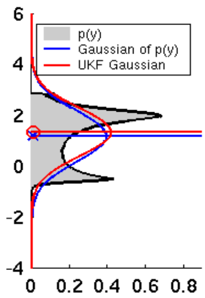
UNSCENTED KALMAN FILTER

50

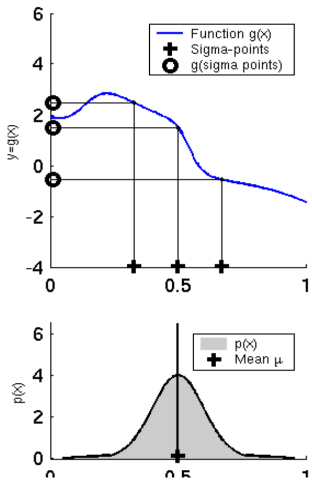
Linearisierung mit der Unscented Transformation



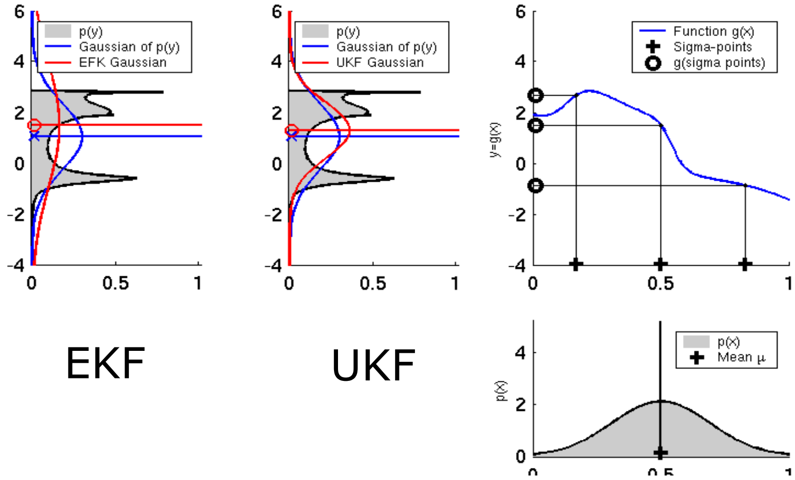
EKF



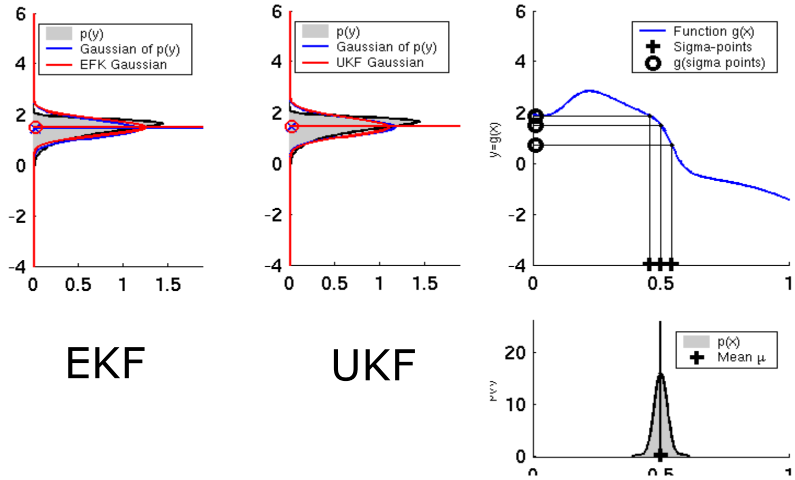
UKF



UKF Sigma-Point Estimate (2)



UKF Sigma-Point Estimate (3)



UKF Zusammenfassung

- Sehr effizient: Gleiche Komplexität wie EKF, um konstanten Faktor langsamer in typischen praktischen Anwendungen
- Bessere Linearisierung als EKF: Genau in den ersten zwei Termen der Taylor Entwicklung (EKF nur erster Term)
- Frei von Ableitungen: Keine Jacobi-Matritzen notwendig
- Auch nicht optimal!

63