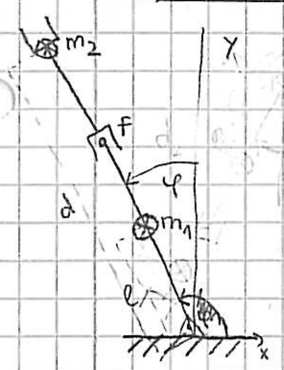
d) 2DoF Manipulator mit Punktmassen



gen. Koordinaten	φ, d
gen. Kraft	τ, f
Massen	m_1, m_2
Längen	l, d

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} -l \sin\varphi \\ l \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{r}}_1 = \begin{pmatrix} -l\cos\varphi\,\dot\varphi \\ -l\sin\varphi\,\dot\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} -d \sin\varphi \\ d \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{r}}_2 = \begin{pmatrix} -\dot d \sin\varphi - d\cos\varphi\,\dot\varphi \\ \dot d \cos\varphi - d \sin\varphi\,\dot\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kinetische Energie:

$$T = T_1 + T_2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m_2 \overbrace{\dot{\underline{r}}_2^T \dot{\underline{r}}_2}^{\dot d^2 + d^2\dot\varphi^2}$$

Potentielle Energie:

$$V = V_1 + V_2$$

$$= m_1 g l \cos\varphi + m_2 g d \cos\varphi$$

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot d^2 + \frac{1}{2} m_2 d^2 \dot\varphi^2 - m_1 g l \cos\varphi - m_2 g d \cos\varphi$$

Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 l^2 \dot\varphi + m_2 d^2 \dot\varphi \\ m_2 \dot d \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} = \begin{pmatrix} m_1 l^2 \ddot\varphi + m_2 d^2 \ddot\varphi + 2 d m_2 \dot\varphi \dot d \\ m_2 \ddot d \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{q}} = \begin{pmatrix} + m_1 g l \sin\varphi + m_2 g d \sin\varphi \\ m_2 d \dot\varphi^2 - m_2 g \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 l^2 + m_2 d^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{M(\underline{q})} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot d \end{pmatrix}}_{\ddot{\underline{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 d m_2 \dot\varphi \dot d \\ - m_2 d \dot\varphi^2 \end{pmatrix}}_{\underline{N}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})} + \underbrace{\begin{pmatrix} -m_1 g l \sin\varphi - m_2 g d \sin\varphi \\ m_2 g \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\underline{G}(\underline{q})} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau \\ f \end{pmatrix}}_{\underline{\tau}}$$