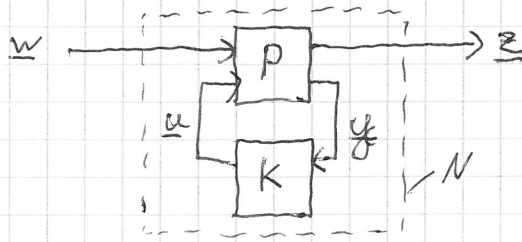


# Übung 7

$H_\infty$ -Regelungsdesign

PK-Struktur



Eingänge      Performanzausgänge

Generalisierte       $\begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{y} \end{bmatrix}$

Strecke  $\rightarrow P$       Reglerausgang      Reglereingang

$$\underline{z} = N W$$

Ziel: Performanz von  $N$  soll garantiert werden mit stabilisierendem Regler  $K$ .

Ansatz: Bestimme  $P$  um  $K$  zu errechnen und  $\|N\|_\infty$  zu minimieren ( $\|N\|_\infty \leq \gamma$ ).

Wenn  $\|N\|_\infty \leq 1$  wird die vorgegebene Performanz eingehalten.

Linear Fractional Transformation

$$N = P * K = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}$$

$$\underline{z} = P_{11} \underline{w} + P_{12} \underline{u}$$

$$\underline{y} = P_{21} \underline{w} + P_{22} \underline{u}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Generalisierte Strecke  $P$  im Zustandsraum:

$$P_{ss} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$\underline{z} = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$\underline{y} = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$$

Reglereingang

1.1

$$S(s) = (1 + GK)^{-1}$$

$$S + T = I$$

$$T(s) = (1 + GK)^{-1} GK$$

Polstelle:  $GK \rightarrow \infty \Rightarrow S(p_i) = 0, T(p_i) = 1$

NST :  $GK \rightarrow 0 \Rightarrow S(z_i) = 1, T(z_i) = 0$

1.2

$$1 \geq \|S(s)w_s(s)\|_{\infty} \geq \underbrace{|S(z)|}_{=1} w_s(z) = |w_s(z)|$$

$$\Rightarrow |w_s(z)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{reelle NST}}}{=} w_s(z) \leq 1$$

$$1 \geq \left\| \frac{T(s)}{w_s(s)} \right\|_{\infty} \geq \left| \frac{T(p)}{w_s(p)} \right| = \left| \frac{1}{w_s(p)} \right|$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{|w_s(p)|} \Rightarrow \underset{\text{reeller Pol}}{|w_s(p)|} \geq 1$$

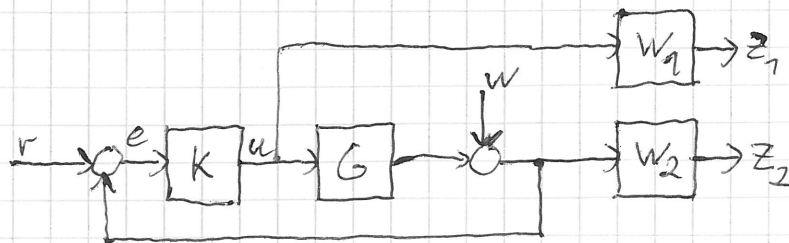
$$w_s(s) = \frac{s}{2} + w_B$$

$$1 \leq w_s(p) = \frac{\frac{p}{2} + w_B}{p} \Rightarrow \frac{p}{2} \leq w_B$$

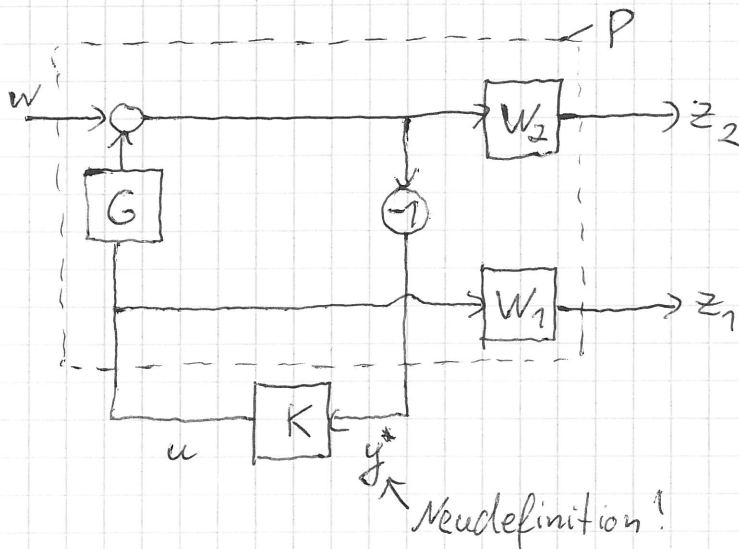
$$1 \geq w_s(z) = \frac{\frac{z}{2} + w_B}{z} \Rightarrow \frac{z}{2} \geq w_B$$

$$\Rightarrow w_B \in \left[ \frac{p}{2}, \frac{z}{2} \right]$$

2.1



2.2



2.3

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= W_1 u \\ z_2 &= W_2 (w + Gu) \\ y &= -(w + Gu) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & W_2 G \\ -I & -G \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 G \end{bmatrix} \quad P_{21} = -I \quad P_{22} = -G$$

$$\begin{aligned} N = P * K &= \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 G \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} (-I) \\ &= \begin{bmatrix} -W_1 K(I + GK)^{-1} \\ W_2 - W_2 GK(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{2.4} \quad (I+GK)^{-1} GK &= ((GK)^{-1} + (GK)^{-1} GK)^{-1} = ((GK)^{-1} + I)^{-1} \\
 &= (GK)(GK)^{-1}((GK)^{-1} + I)^{-1} \\
 &= GK(I+GK)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\underline{2.5} \quad N = \begin{bmatrix} -W_1 K S \\ W_2 - W_2 T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 K S \\ W_2(I-T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 K S \\ W_2 S \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{3.1} \quad z_1 &= W_T(d_2 + G(d_1 + u)) = W_T d_2 + W_T G d_1 + W_T G u \\
 z_2 &= W_u \cdot u
 \end{aligned}$$

$$y^* = e = -(d_2 + G(d_1 + u)) = -d_2 - G d_1 - G u$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y^* \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ u \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} W_T G & W_T & W_T G \\ 0 & 0 & W_u \\ -G & -I & -G \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_T G & W_T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} W_T G \\ W_u \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} -G & -I \end{bmatrix} \quad P_{22} = -G$$

$$N = \begin{bmatrix} W_T G & W_T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_T G \\ W_u \end{bmatrix} K (I+GK)^{-1} \begin{bmatrix} -G & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} W_T G & W_T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_T G K (I+GK)^{-1} G & -W_T G K (I+GK)^{-1} \\ -W_u K (I+GK)^{-1} G & -W_u K (I+GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{W_T (I - G K (I+GK)^{-1} G)}^{=I-T=S} & \overbrace{W_T (I - G K (I+GK)^{-1})}^{=I-T=S} \\ \underbrace{-W_u K (I+GK)^{-1} G}_{=S} & \underbrace{-W_u K (I+GK)^{-1}}_{=S} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} W_T S G & W_T S \\ -W_u K S G & -W_u K S \end{bmatrix}$$

3.2

Die Optimierungsfkt. ist  $\|N\|_\infty$

3.3

- $H_\infty$ -Norm  $< 1 \Rightarrow$  Performance wird erfüllt
- NST bei  $-1,39$  liegt nahe an Polstelle  $-1,4$   
 $\Rightarrow$  wahrscheinlich künzbar wegen Parameterunsicherheit
- Zeitkonstante von  $PT_1$ -Glied  $\frac{1}{s+4111}$  viel kleiner als  
restliche Zeitkonstanten, u.U. vernachlässigbar  
(Kausalität beachten).

$$\Rightarrow K_{red} = \frac{3201(s+7,3)(s+10)}{(s+0,2)(s+22)4111}$$

Zu überprüfen:

1. Performanzen noch erfüllt?
2. System stabil/robust?

