Lehrstuhl für INFORMATIONSTECHNISCHE REGELUNG Prof. Dr.-Ing. Sandra Hirche **Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK** Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss Technische Universität München	**DYNAMISCHE SYSTEME** Kurzlösung zur 4. Übung

1.Aufgabe:

1.1 Zustandsdarstellung des Systems:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{c_\mu}{ml^2}x_2$$

1.2 Bedingung für Ruhelage: $\underline{\dot{x}} = \underline{0}$
$\Longrightarrow lmg\sin x_1 = 0$
$\Longrightarrow \underline{x}_R^T = \begin{bmatrix} k\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.3 Lyapunov-Funktion

$$\begin{aligned} V &= E_{kin} + E_{pot} \\ E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(lx_2)^2 \\ E_{pot} &= mgh = mgl(1-\cos x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}m(lx_2)^2 + mgl(1-\cos x_1) \\ \dot{V} &= \frac{1}{2}ml^2 2x_2\dot{x}_2 + mgl\sin x_1\dot{x}_1 \\ &= -c_\mu x_2^2 \end{aligned}$$

1. $V(\underline{x})$ ist lpdf, denn $V(\underline{0}) = 0$ und $V(\underline{x}) > 0$ für $x_1 \neq 0$, $|x_1| < 2\pi$ und $x_2 \neq 0$.
2. $-\dot{V}(\underline{x})$ ist psdf, denn für $\dot{V}(\underline{0}) = 0$ und $-\dot{V}(\underline{x}) \geq 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$
   ($-\dot{V}(\underline{x}) = 0$ für $x_2 = 0$ und x_1 beliebig).
3. $V(\underline{x})$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab $\Longrightarrow$ abnehmend.
4. $\Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$ ist lokal uniform stabil.

1.4 Lyapunov-Funktion

$$\begin{aligned} V(\underline{x}) &= \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{c_\mu}{ml^2}x_1\right)^2 + \frac{2g}{l}(1-\cos x_1). \\ \dot{V}(\underline{x}) &= -\frac{c_\mu}{ml^2}(x_2^2 + \frac{g}{l}x_1\sin x_1) \end{aligned}$$

1. $V(\underline{x})$ ist pdf, denn $V(\underline{0}) = 0$ und $V(\underline{x}) > 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$.
2. $-\dot{V}(\underline{x})$ ist lpdf, denn $\dot{V}(\underline{0}) = 0$ und $-\dot{V}(\underline{0}) > 0$ für $x_2^2 > -\frac{g}{l}x_1\sin(x_1)$.
3. $V(\underline{x})$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab $\Longrightarrow$ abnehmend.
4. $\Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$ ist lokal uniform asymptotisch stabil.

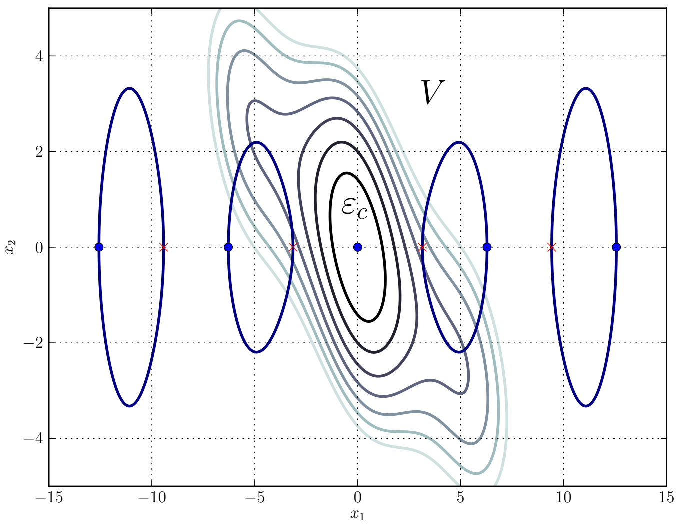

Abbildung 1: Geometrische Veranschaulichung des Einzugsgebiet zu Aufgabe 1.5. ($m = l = g = c_\mu = 1$)

2.Aufgabe:

2.1 Bedingung für Ruhelage: $\underline{\dot{x}}_R = \underline{0}$

$$\Longrightarrow x_{2R} = 0$$
$$\Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$$

2.2 um $\underline{x}_R$ linearisiertes System:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{\dot{x}} &= \left[\begin{array}{cc} -1 + 6x_1^2 x_2 & 2x^3 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \Bigg|_{x_{1R}=x_{2R}=0} \Delta \underline{x} \\
&= \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \Delta \underline{x} \\
&= A \Delta \underline{x}
\end{aligned}$$

EW von A: $\lambda_{1,2} = -1 \quad \Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$ ist lokal asymptotisch stabil

2.3 Lyapunov-Funktion

$$\begin{aligned}
V(\underline{x}) &= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \qquad c_1, c_2 > 0 \\
-\dot{V}(\underline{x}) &= +\underbrace{2c_1 x_1^2}_{\geq 0} \underbrace{(1 - 2x_1^2 x_2)}_{\overset{!}{>} 0} + \underbrace{2c_2 x_2^2}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

$$2x_1^2 x_2 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 < \frac{1}{2x_1^2}$$

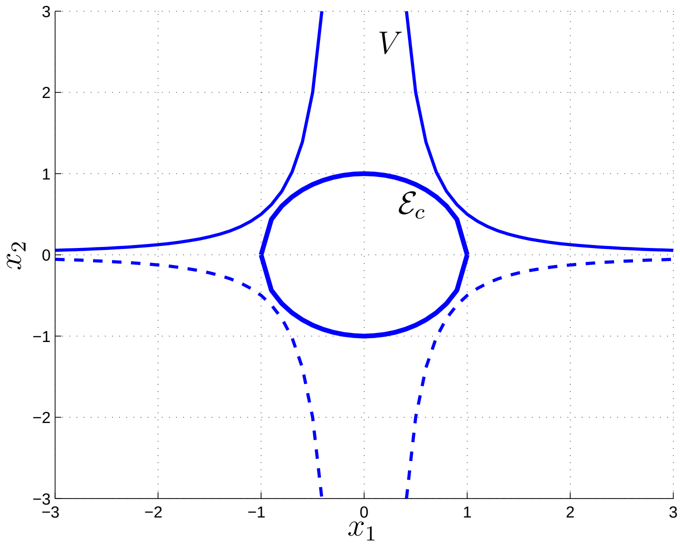

Abbildung 2: Geometrische Veranschaulichung des Einzugsgebiet zu Aufgabe 2.3. ($c_1 = c_2 = 1$)