Technik Autonomer Systeme: Nichtkooperative Spieltheorie Teil 2

Dirk Wollherr

Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik
Technische Universität München

Dominanz

- Notationen:
  - $s_i,\ s_i'$: zwei verschiedene Strategien von Spieler P_i
  - $\mathcal{S}_{-i}$: die Menge aller möglichen Strategie Kombinationen der anderen Spieler
  - $J_i : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}$: Auszahlungsfunktion für P_i
- Definition (strikte Dominanz):
  s_i **dominiert** s_i' **strikt**, wenn gilt, dass
  $\forall s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i},\ J_i(s_i, s_{-i}) > J_i(s_i', s_{-i})$.
- Definition (sehr schwache Dominanz):
  s_i **dominiert** s_i' **sehr schwach**, wenn gilt, dass
  $\forall s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i},\ J_i(s_i, s_{-i}) \geq J_i(s_i', s_{-i})$.

2

Dominanz

- Dominiert eine Strategie s_i **alle** anderen Strategien eines Spielers ist diese **dominant**.
- Eine Strategie Kombination bestehend aus dominanten Strategien für alle Spieler ist ein Nash Gleichgewicht.
- Ein Nash Gleichgewicht aus **strikt** dominanten Strategien ist eindeutig (das Einzige im Spiel).

3

Wiederholung - Gefangenendilemma

- Zwei Täter, eine Straftat, aber keine Zeugen…

- Mögliche Ergebnisse des „Spiels“ (ohne Absprache!):
  - **Beide gestehen:** 8 Jahre Gefängnis für beide
  - **Beide schweigen:** 1 Jahr Gefängnis für beide
  - **Einer schweigt, einer gesteht:** 10 Jahr für schweigen, 0 Jahre für gestehen

4

Nash Gleichgewicht im Gefangenendilemma

Verdächtiger A \ Verdächtiger B	S	G
S	-1 | -1	-10 | 0
G	0 | -10	-8 | -8

Strategien:
S = Schweigen
G = Gestehen

- Analyse Spieler A (B äquivalent):
  Spalte 1: $J_{\mathrm{A}}(G,S) > J_{\mathrm{A}}(S,S)$, Spalte 2: $J_{\mathrm{A}}(G,G) > J_{\mathrm{A}}(S,G)$

- Strikt dominantes und reines Nash Gleichgewicht bei
  $s_{\mathrm{A}}^{*}(\mathrm{S},\mathrm{G}) = (0,1)$, $s_{\mathrm{B}}^{*}(\mathrm{S},\mathrm{G}) = (0,1)$

5

Nash Gleichgewicht im Gefangenendilemma

Verdächtiger A \ Verdächtiger B	S	G
S	-1 | -1	-10 | 0
G	0 | -10	-8 | -8

Strategien:
S = Schweigen
G = Gestehen

- Strikt dominantes und reines Nash Gleichgewicht bei:
  $s_{\mathrm{A}}^{*}(\mathrm{S},\mathrm{G}) = (0,1)$, $s_{\mathrm{B}}^{*}(\mathrm{S},\mathrm{G}) = (0,1)$

- Dilemma für Beobachter:
  $J_i(S,S) > J_i(G,G) \quad \forall P_i \in \mathcal{P}$

6

Pareto Dominanz

- Definition (Pareto Dominanz):
  Eine Strategie Kombination $s = (s_1, \dots, s_N) \in \mathcal{S}$ **Pareto dominiert** ein andere Strategie Kombination s', wenn **für alle** Spieler $P_i \in \mathcal{P}$ gilt, dass $J_i(s) \geq J_i(s') \, \forall P_i \in \mathcal{P}$
  und **mindestens ein** Spieler P_j existiert, für den gilt, dass $J_j(s) > J_j(s')$.

- Beispiel:

Spieler 2

	…	…	…
Spieler 1	5|9	…	…
	…	…	4|9

→ s mit Auszahlung (5|9) Pareto dominiert s' mit Auszahlung (4|9).

→ Vergleich zw. Zellen, nicht nur innerhalb Spalten/Zeilen.

Pareto Effizienz

- Definition (Pareto Effizienz):
  Eine Strategie Kombination s ist **Pareto effizient**, wenn sie von keiner anderen Strategie Kombination s' Pareto dominiert wird.

- Ein Spiel kann mehrere Pareto effiziente Strategie Kombination besitzen.

- Jedes Spiel besitzt mindestens eine Pareto effiziente Strategie Kombination.

Pareto Effizienz - Beispiele

- Kampf der Geschlechter

		Mann: F	Mann: K
Frau	F	2 | 1	0 | 0
	K	0 | 0	1 | 2

Strategien:
F = Fußball
K = Konzert

→ 2 Pareto effiziente Gleichgewichte

9

Pareto Effizienz - Beispiele

- Kopf oder Zahl

		Spieler 2: K	Spieler 2: Z
Spieler 1	K	1 | -1	-1 | 1
	Z	-1 | 1	1 | -1

Strategien:
K = Kopf
Z = Zahl

→ Keine Kombi wird Pareto dominiert,
4 Pareto effiziente Gleichgewichte

10

Dilemma im Gefangenendilemma

		Verdächtiger B S	Verdächtiger B G
Verdächtiger A	S	-1 | -1	-10 | 0
	G	0 | -10	-8 | -8

Strategien:
S = Schweigen
G = Gestehen

→Nash Gleichgewicht ist die einzige, nicht Pareto effiziente Kombination im Spiel, obwohl es strikt dominant ist.

11

Andere Lösungsverfahren

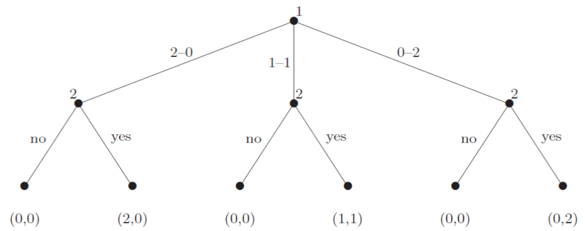
- Minmax bzw. Maxmin Strategien
- Eleminieren dominierter Strategien
- Gleichgewicht in korrelierten Strategien
- Stackelberg Gleichgewicht
- ε-Nash Gleichgewicht
- …

12

Extensivform

- Was wäre wenn Spieler sich nacheinander/sequentiell entscheiden können?
  - Dynamisches statt statisches Spiel
  - Spieler können reagieren
  - Vgl. Kampf der Geschlechter, Gefangenendilemma, etc.

- Formalisierung dynamischer Spiele
  - Extensivform
  - Spielbaum



13

Extensivform - Komponenten

- N-Spieler, Extensiveform Spiel mit **perfekter Information**
  1. Eine endliche Menge von N **Spielern** $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_N\}$
  2. Eine (einzelne) Menge von **Aktionen** $\mathcal{A}$
  3. Entscheidungsknoten und Labels:
     - Menge an inneren **Entscheidungskonten** $\mathcal{H}$
     - Aktions-Funktion $\chi : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{A}}$; weist jedem Knoten aus $\mathcal{H}$ die möglichen Aktion aus $\mathcal{A}$ zu.
     - Spieler-Funktion $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$; weist jedem Knoten aus $\mathcal{H}$ den Spieler aus $\mathcal{P}$ zu, der entscheidet.

14

Extensivform - Komponenten

- Endliches, N-Spieler, Extensivform Spiel
  4. Menge an **Endknoten** $\mathcal{Z}$

  5. Nachfolge-Funktion $\sigma : \mathcal{H} \times \mathcal{A} \to \mathcal{H} \cup \mathcal{Z}$; weist jedem Knoten und einer Aktion eindeutig einen neuen Knoten oder Endknoten zu.

  6. Für jeden Spieler $P_i \in \mathcal{P}$ eine **Auszahlungsfunktion** $J_i : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}$; weist jedem Endknoten die Auszahlung aller Spieler zu.

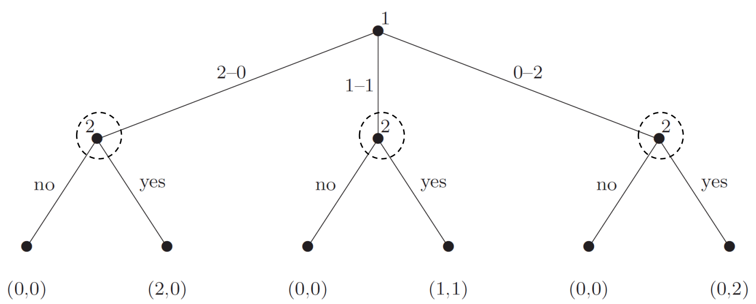
→ Komponenten definieren einen Baum.

→ Perfekte Information: Der entscheidende Spieler kennt die gesamten, vorhergegangenen Aktionen des Spiels (z.B. Schach, Brettspiele).

15

Beispiel – das Spiel vom Teilen

- Die Spieler sind zwei Kinder.
- Jemand schenkt ihnen 2 Kekse, aber nur unter der Bedingung, dass die Kinder sich darauf einigen, wie sie die Kekse aufteilen.
- Das erste Kind entscheidet wie die Kekse geteilt werden.
- Das zweite Kind kann zustimmen oder ablehnen.

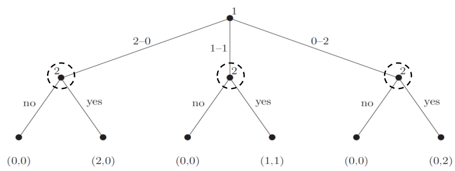


16

Reine Strategien bei perfekter Information

- Reine Strategien in dynamischen Spielen:
  Eine reine Strategie eines Spielers in einem Spiel mit **perfekten** Informationen ist eine komplette Spezifikation, welche Aktion **an jedem Knoten** des Spielers gespielt wird.

- Beispiel: Spiel vom Teilen
  - Kind 1 hat 3 reine Strategien: $\mathcal{S}_1 = \{2-2, 1-1, 0-2\}$
  - Kind 2 hat 8 reine Strategien:
    $\mathcal{S}_2 = \{(y,y,y),(y,y,n),(y,n,y),(y,n,n),(n,y,y),(n,y,n),(n,n,y),(n,n,n)\}$



17

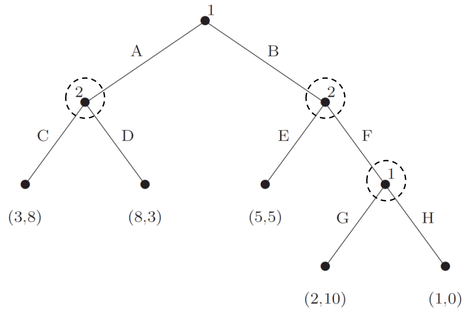
Nash Gleichgewichte in Extensivform

- Definitionen für statische Spiele gelten auch für Extensivform
  - Gemischte Strategien
  - Nash Gleichgewicht

- Finden von Nash Gleichgewichten
  - Transformieren der Extensivform in die Normalform
  - Rekursives Vorgehen (Rückwärtsinduktion)

18

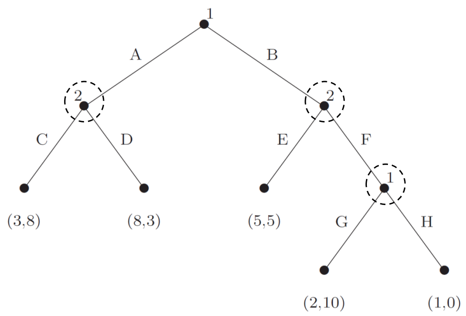
Beispiel – Transformation in Normalform



- Reine Strategien:
  - Spieler 1: $\mathcal{S}_1 = \{(B,G),(B,H),(A,G),(A,H)\}$
  - Spieler 2: $\mathcal{S}_2 = \{(C,E),(C,F),(D,E),(D,F)\}$

19

Beispiel – Transformation in Normalform



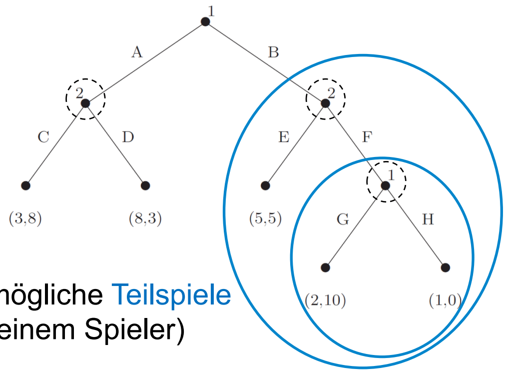
	C,E	C,F	D,E	D,F
A,G	3|8	3|8	8|3	8|3
A,H	3|8	3|8	8|3	8|3
B,G	5|5	2|10	5|5	2|10
B,H	5|5	1|0	5|5	1|0

- 3 reine Nash Gleichgewichte
- Nachteile:
  - Alle Strategiekombinationen müssen berücksichtigt werden (vgl. „Blowup“ von Kosten-Paar 3|8).
  - Unglaubwürdiges Nash Gleichgewicht bei $s^* = ((B,H),(C,E))$ („Drohung“ H nicht glaubhaft).

20

Teilspiel

- Definition (Teilspiel):
  Ein **Teilspeil** ist ein Spiel, das in einem einzelnen Entscheidungsknoten aus $\mathcal{H}$ beginnt und alle Knoten enthält, die diesem Knoten nachfolgen.



Beispiele für mögliche Teilspiele
(auch mit nur einem Spieler)

21

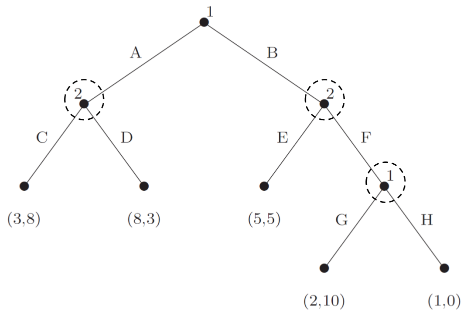
Teilspielperfektes Gleichgewicht

- Definition (Teilspielperfektes Gleichgewicht):
  Ein Strategie Kombination ist ein **teilspielperfektes Gleichgewicht**, wenn es ein Nash Gleichgewicht in jedem Teilspiel des Gesamtspiels induziert.

- Jedes teilspielperfekte Gleichgewicht ist ein Nash Gleichgewicht (aber nicht umgekehrt).

22

Beispiel – teilspielperfektes Gleichgewicht



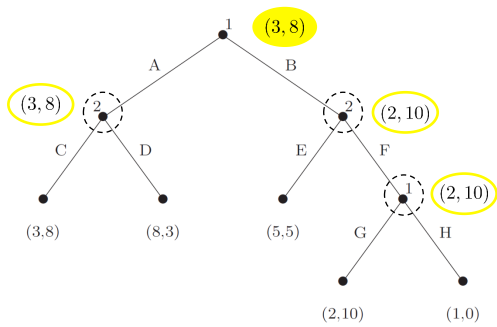
	C,E	C,F	D,E	D,F
A,G	3|8	3|8	8|3	8|3
A,H	3|8	3|8	8|3	8|3
B,G	5|5	2|10	5|5	2|10
B,H	5|5	1|0	5|5	1|0

- Welche der Nash Gleichgewichte sind teilspielperfekt?
  - $s^* = ((B,H),(C,E))$: nicht teilspielperfekt wegen (B,H)
  - $s^* = ((A,H),(C,F))$: nicht teilspielperfekt wegen (A,H)
  - $s^* = ((A,G),(C,F))$: teilspielperfekt

23

Rückwärtsinduktion

- Teilspielperfekte Nash Gleichgewichte können durch Rückwärtsinduktion identifiziert werden
  → Identifizieren des Gleichgewichts des „untersten" Teilspiels und schrittweises hocharbeiten



24

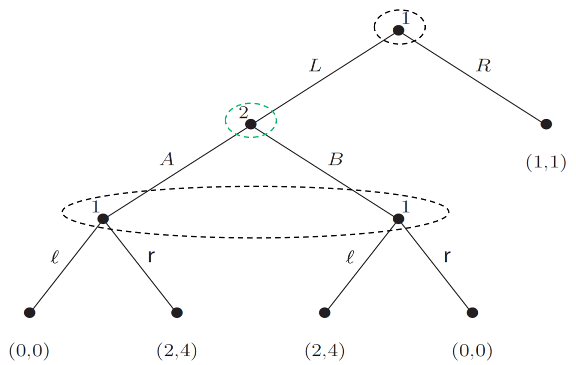
Spiele mit imperfekter Information

- Was ist mit Spielen wie Skat oder Poker?
  → Extensiveform Spiel mit **imperfekter Information**
  1. $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{Z}, \chi, \rho, \sigma, J)$ definiert ein dynamisches Spiel mit perfekter Information
  2. Menge an Informationssets $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_N)$; für jeden Spieler ein Informationsset, das Äquivalenzklassen enthält $\mathcal{I}_i = (I_{i,1}, \ldots, I_{i,K_i})$.
     Jede Äquivalenzklasse enthält die Nummern der Knoten, zwischen denen der Spieler nicht unterschieden kann. Der Spieler kann aber zwischen den einzelnen Äquivalenzklassen unterscheiden.

     Formal: $\mathcal{I}_i$ ist eine Äquivalenzklasse auf $\{h \in \mathcal{H} : \rho(h) = i\}$ mit der Eigenschaft, das $\chi(h) = \chi(h')$ und $\rho(h) = \rho(h')$, wenn ein j existiert, so dass $h \in I_{i,j}$ und $h' \in I_{i,j}$.

25

Beispiel - Spiel mit imperfekter Information



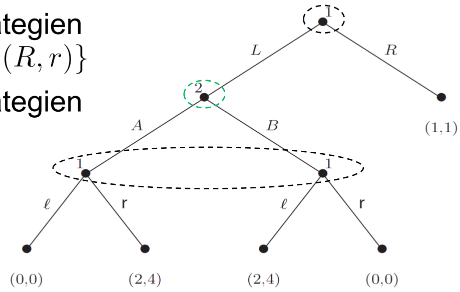
- Spieler 1 hat zwei Äquivalenzklassen und kann nicht unterscheiden, was Spieler 2 wählt.
- Spieler 2 hat eine Äquivalenzklasse.

26

Reine Strategien bei imperfekter Information

- Reine Strategien in dynamischen Spielen:
  Eine reine Strategie eines Spielers in einem Spiel mit **imperfekten** Informationen ist eine komplette Spezifikation, welche Aktion **an jeder Äquivalenzklasse** des Spielers gespielt wird.

- Beispiel:
  - Spieler 1 hat 4 reine Strategien
    $\mathcal{S}_1 = \{(L,l),(L,r),(R,l),(R,r)\}$
  - Spieler 2 hat 2 reine Strategien
    $\mathcal{S}_2 = \{A, B\}$



27

Nash Gleichgewichte bei imperfekter Info

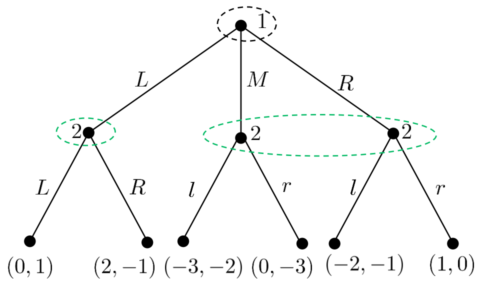
- Lösungskonzepte äquivalent zu perfekter Information
  - Transformation in Normalform
  - Rückwärtsinduktion

- Existenz eines reines Nash Gleichgewichts bei imperfekter Information nicht mehr garantiert → berücksichtigen gemischter Strategien nötig

28

Nash Gleichgewichte bei imperfekter Info

- Beispiel:



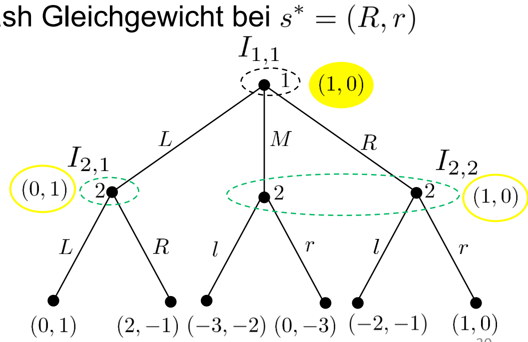
- Reine Strategien:
  - Spieler 1 hat 3 reine Strategien: $\mathcal{S}_2 = \{L, M, R\}$
  - Spieler 2 hat 4 reine Strategien: $\mathcal{S}_2 = \{(L, l), (L, r), (R, l), (R, r)\}$

29

Rückwärtsinduktion bei imperfekter Info

- Gleichgewichte der Teilspiele:
  - Unterste Stufe:
    - $I_{2,1}$: Eindeutiges Gleichgewicht bei $s_2^* = (L)$
    - $I_{2,2}$: Transformation in Normalform $s_2^* = (r)$
  - $I_{1,1}$: Eindeutiges Gleichgewicht bei $s_1^* = (R)$
  - → Teilspielperfektes Nash Gleichgewicht bei $s^* = (R, r)$

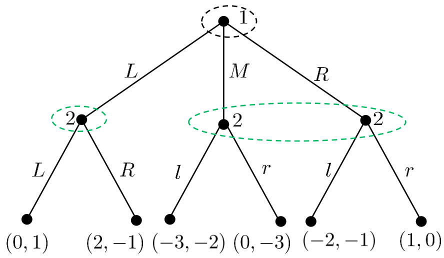
	l	r
M	-3 | -2	0 | -3
R	-2 | -1	1 | 0



30

Transformation in Normalform

	L,l	L,r	R,l	R,r
L	0 | 1	0 | 1	2 | -1	2 | -1
M	-3 | -2	0 | -3	-3 | -2	0 | -3
R	-2 | -1	1 | 0	-2 | -1	1 | 0



- 2 Nash Gleichgewichte
  - $s^* = (L, (L, l))$
  - $s^* = (R, (L, r))$ (teilspielperfekt)

31

Mögliche Erweiterungen

- Infinite Spiele (Aktionen sind kontinuierlich, Aktionsset nicht endlich)
- Wiederholte und stochastische Spiele
- Bayes-Spiele (Unsicherheit über Auszahlungen)
- …

32