Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK Technische Universität München Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss	**DYNAMISCHE SYSTEME** (Regelungs- und Steuerungstechnik 2) Kurzlösung zur 3. Übung

1. Aufgabe:

1.1 Bedingung für Ruhelage: $\underline{\dot{x}}_R = \underline{0}$
$\Longrightarrow x_2 = 0$
$\Longrightarrow -Dx_2 - f(x_1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0$
$\Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$

1.2 Lyapunov-Funktion

$$V(\underline{x}) = F(x_1) + \frac{mx_2^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\underline{x}) &= \frac{dF(x_1)}{dx_1}\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 \\ &= f(x_1)\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 \\ &= f(x_1)x_2 + mx_2\left(-\frac{D}{m}x_2 - \frac{1}{m}f(x_1)\right) \\ &= -Dx_2^2\end{aligned}$$

1. $V(\underline{x})$ ist pdf, denn $V(\underline{0}) = 0$ und $V(\underline{x}) > 0$ sonst.
2. $-\dot{V}(\underline{x})$ ist psdf, denn $\dot{V}(\underline{0}) = 0$ und $-\dot{V}(\underline{x}) \geq 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$ ($-\dot{V}(\underline{x}) = 0$ für $x_2 = 0$ und x_1 beliebig).
3. $V(\underline{x})$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab $\Longrightarrow$ abnehmend
4. $\Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$ ist global uniform stabil.

1.3 Die asymptotische Stabilität kann mit Hilfe des Invarianzprinzips von LaSalle untersucht werden: (Korollar von Krasovskii)

$V(\underline{x})$ stetig differenzierbar, pdf, radial unbeschränkt; $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$; $\mathcal{S} = \{\underline{x} \mid \dot{V}(\underline{x}) = 0\}$.

Für Zustände $\underline{x}_s \neq \underline{0}$ gilt

$$\dot{x}_{S2} = \frac{1}{m}(-Dx_{S2} - f(x_{S1})) = -\frac{f(x_{S1})}{m}$$

$\dot{x}_S \neq 0 \Longrightarrow$ keine Trajektorie des Systems außer $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ bleibt in $\mathcal{S}$
$\Longrightarrow \underline{x}_R = \underline{0}$ ist asymptotisch stabil.

2. Aufgabe:

2.1 $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix}$; $\quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ M^{-1}(\underline{q})(-C(\underline{q}, \underline{\dot{q}})\,\underline{\dot{q}} - K_D\underline{\dot{q}} - K_P\underline{q}) \end{bmatrix}$

Ruhelage: $\underline{x}^* = \begin{bmatrix} \underline{q}^* \\ \underline{\dot{q}}^* \end{bmatrix} = \underline{0}$

2.2 $V = \underbrace{\frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T M \underline{\dot{q}}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2}\underline{q}^T K_P \underline{q}}_{\text{künstliche potentielle Energie in der Feder}}$.

2.3 Bei der Berechnung der Ableitung von V kann man man das Theorem der Mechanik nutzen, das besagt, dass die Änderungsrate der kinetischen Energie in einem System der Kraft entspricht, die auf das System wirkt:

$$\dot{V} = \underline{\dot{q}}^T(\underline{\tau} - \underline{g}) + \underline{\dot{q}}^T K_P \underline{q}\,.$$

Durch Einsetzen des Regelgesetzes ergibt sich

$$\dot{V} = -\underline{\dot{q}} K_D \underline{\dot{q}}\,.$$

o.B.d.A. wird die Ruhelage $[\underline{q}^* \ \underline{\dot{q}}^*]^T = \underline{0}$ untersucht.

1. $V(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ ist pdf, denn $V(\underline{0}) = 0$ und $V(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) > 0$ für $[\underline{q} \ \underline{\dot{q}}]^T \neq \underline{0}$.
2. $-\dot{V}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ ist psdf, denn $\dot{V}(\underline{0}) = 0$ und $-\dot{V}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \geq 0$ für $[\underline{q} \ \underline{\dot{q}}]^T \neq \underline{0}$ ($-\dot{V}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = 0$ für $\underline{\dot{q}} = \underline{0}$ und $\underline{q}$ beliebig).
3. $V(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab $\Longrightarrow$ abnehmend
4. $\Longrightarrow [\underline{q}^* \ \underline{\dot{q}}^*] = \underline{0}$ ist global uniform stabil.

2.4 Die asymptotische Stabilität kann mit Hilfe des Invarianzprinzips von LaSalle untersucht werden: (Korollar von Krasovskii)

$V(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ stetig differenzierbar, pdf, radial unbeschränkt, $\dot{V}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \leq 0$; $\mathcal{S} = \{[\underline{q} \ \underline{\dot{q}}] \mid \dot{V}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = 0\}$.

Für Zustände $[\underline{q}_s \ \underline{\dot{q}}_s]^T \neq \underline{0}$ gilt $\underline{\ddot{q}}_s \neq \underline{0}$
$\Longrightarrow$ keine Trajektorie des Systems außer $\underline{q}(t) \equiv \underline{0}$ bleibt in $\mathcal{S}$
$\Longrightarrow [\underline{q}^* \ \underline{\dot{q}}^*]^T = \underline{0}$ ist global asymptotisch stabil.