Übung Nr. 5

Störentkopplungregelung nach dem Invarianzprinzip:

- Abbildung der Störung auf den nicht beobachtbaren Unterraum
- Annahme: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + N\underline{d}$, $\underline{y} = C\underline{x}$, $\underline{u} = -K\underline{x}$

Der nicht beobachtbare Unterraum wird durch die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}_{\bar{B},i}$ beschrieben.

- Wenn die Einkopplungsmatrix N in diesem Raum liegt, der durch die $\underline{v}_{\bar{B},i}$ aufgespannt wird, dann ist die Störung $\underline{d}$ nicht beobachtbar.
- Versuche $\underline{v}_{K,i}$ auf $\underline{v}_{\bar{B},i}$ und $\lambda_{K,i}$ auf $\lambda_{\bar{B},i}$ zu legen um den Raum von N aufzuspannen (Roppenecker Formel)

1. Bed

Nur wenn $\lambda_{K_i} = \eta_j$ (Inv. Nullstelle) existiert eine nichttriviale Lösung für v_{K_i} und p_i

$$\det\begin{bmatrix} \eta I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda_{K_i}$$

- andere EW sind frei wählbar

2. Bed

$C v_{K_i} \overset{!}{=} 0$ ($\hat{=}$ nicht beobachtbaren Unterraum)

und $N = \left[\sum_i a_i v_{K_i}, \sum_i b_i v_{K_i}, \dots, \sum_i z_i v_{K_i} \right]$

- v_{K_i} müssen Basis aufspannen, aus der N entsteht

$\Rightarrow \underline{v}_{K_i}$

Falls Bed. 1 oder Bed. 2 nicht erfüllbar $\Rightarrow$ keine Lösung möglich

Wenn erfüllt:

$(\lambda_{K_i} I - A)\underline{v}_{K,i} \overset{!}{=} -B p_i \Rightarrow p_i$

$\Rightarrow K = [p_1, \dots, p_n][v_1, \dots, v_n]^{-1}$

1.1

1. $$\det\begin{bmatrix} \eta+6 & -4 & -2 \\ 2 & \eta & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (\eta+6)2 - 2\cdot 4 + 4 + 2\eta = 4\eta + 8 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \eta = -2$$

2. $$C \cdot v_{K_i} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x + 2v_y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow v_x = -2v_y$$
$$\Rightarrow v_{K_1} = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$N \overset{!}{=} c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Nicht erfüllbar

$\Rightarrow$ Es ist keine Störentkopplung möglich, da N nicht im möglichen nicht beobachtbaren Raum liegt.

1.2

aus 1.1 : $\eta = -2 = \lambda_{K_1}$
$$v_{K_1} = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow c = -2 \Rightarrow$ Störentkoppelung möglich

3. $$(\lambda_{K_1} I - A)v_{K_1} \overset{!}{=} -Bp_1$$

$$\left(-2I - \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} p_1$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} p_1 \Rightarrow p_1 = 6$$

EW:
$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+6 & -4 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+2)(\lambda+4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = -4$$

Gefordert: EW soll möglichst gleich bleiben.

Nötig: Schiebe EW auf invariante Nullstelle -2

$\rightarrow \lambda_1$ ist schon -2

$\Rightarrow$ EW müssen nicht verschoben werden

$\lambda_{K1} = \lambda_1$, $\lambda_{K2} = \lambda_2$

EV: $\underline{v}_{K1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(\lambda_2 I - A)\, v_{K2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \underline{v}_{K2} = 0 \quad \Rightarrow \underline{v}_{K2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

PV: $p_1 = 6$, $p_2 = 0$

Trotz $p_1 \neq 0$ bleiben die EW unverändert, da $\lambda_1 = \eta_1$

$$K = [6 \;\; 0] \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [6 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{-4}$$

$$= [6 \;\; -12] \frac{1}{-4} = [-1{,}5 \;\; 3]$$

Test: $G_d = C(sI - (A - BK))^{-1} N$

$$= [1 \;\; 2] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [-1{,}5 \;\; 3] \right) \right)^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \;\; 2] \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 0{,}5 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \;\; 2] \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ -0{,}5 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)^2 - 1}$$

$$= (s+2 \;\;\; 2s+4) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+3)^2 - 1}$$

$$= \frac{4s + 8 - 4s - 8}{(s+3)^2 - 1} = \underline{0} \quad \checkmark$$

Entkopplungsregelung nach Falb-Wolovich:

- MIMO-System zu q SISO-Systemen mit vorgegebener Dynamik

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ $\quad C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_q^T \end{bmatrix}$

$y = C\underline{x}$

$u = -K\underline{x} + L\underline{w}$ $\quad y_{i,soll} = \dfrac{\gamma_i}{s^{\delta_i} + a_{\delta_i - 1} s^{\delta_i - 1} + \ldots + a_0}$

Voraussetzung: Entkopplungsmatrix E muss regulär sein ($\det E \neq 0$)

1. Schritt:

Bestimme Relativgrad δ_i für y_i

Falls $\delta = \sum_i \delta_i < n$ müssen nicht beob./steuerbare EW stabil sein.

2. Schritt

$$E = \begin{bmatrix} c_1^T A^{(\delta_1 - 1)} B \\ \vdots \\ c_q^T A^{(\delta_q - 1)} B \end{bmatrix} \Rightarrow L = E^{-1} T \quad \text{mit } T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \gamma_q \end{bmatrix}$$

3. Schritt

$$K = E^{-1} \begin{bmatrix} c_1^T A^{\delta_1} + \sum_{j=0}^{\delta_1 - 1} a_{j,1} c_1^T A^j \\ \vdots \\ c_q^T A^{\delta_q} + \sum_{j=0}^{\delta_q - 1} a_{j,q} c_q^T A^j \end{bmatrix}$$

<u>Relativgrad</u>

- Aus ÜF Zählergrad - Nennergrad
- Aus Zustandsraumdarstellung:

y_i so oft ableiten (δ_i-mal) bis $y_i^{(\delta_i)} = f(\underline{u})$ wobei $\underline{u}$ nicht integriert wird sondern direkt auf $y_i^{(\delta_i)}$ wirkt. Beginne mit $y_i = c_i \underline{x}$

<u>2.1</u> $y_1 = \underline{c}_1^T \underline{x} = [1 \; 0 \; 0] \underline{x} = x_1$

$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = [1 \; 1 \; 0] \underline{x} + [1 \; 1] \underline{u} \qquad \Rightarrow \delta_1 = 1$

$y_2 = \underline{c}_2^T \underline{x} = x_3$

$\dot{y}_2 = \dot{x}_3 = [0 \; 1 \; 3] \underline{x}$

$\ddot{y}_2 = \dot{x}_2 + 3\dot{x}_3 = [0 \; 2 \; 0] \underline{x} + [-1 \; 1] \underline{u} + 3 [0 \; 1 \; 3] \underline{x}$

$= x_2 - u_1 + u_2 + 3x_2 + 9x_3 \qquad \Rightarrow \delta_2 = 2$

<u>2.2</u>

1.

$$E = \begin{bmatrix} c_1^T A^0 B \\ c_2^T A^1 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \; 0 \; 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [0 \; 0 \; 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det E = 2 \neq 0$ ✓

2. $\delta_1 + \delta_2 = 3 = n$

Alle EW sind Pole und damit durch eine Regelung beeinflussbar.

<u>2.3</u>

$y_{1,soll}$: $s_1 \overset{!}{=} -2$ $\quad \lim\limits_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot y_{1,soll} \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{2}{s+2}$

$y_{2,soll}$: $s_{2,3} \overset{!}{=} -2$ $\quad$ " $\quad$ "

$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{4}{(s+2)^2}$

<u>2.4</u>

$$L = E^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = E^{-1} \begin{bmatrix} c_1^T A + c_1^T 2 \\ c_2^T A^2 + c_2^T 4 + c_2^T A 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [1\ 1\ 0] + [2\ 0\ 0] \\ [0\ 5\ 9] + [0\ 0\ 4] + [0\ 4\ 12] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}5 & -4 & -12{,}5 \\ 1{,}5 & 5 & 12{,}5 \end{bmatrix}$$