Lehrstuhl für INFORMATIONSTECHNISCHE REGELUNG Prof. Dr.-Ing. Sandra Hirche **Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK** Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss Technische Universität München	**DYNAMISCHE SYSTEME** Kurzlösung zur 1. Übung

1. Aufgabe: Linearisierung um Ruhelagen

1.1 • Ruhelage: mit $\underline{u}^* = [\, u_1^* \,,\, u_2^*]^T$ und $\underline{\dot{x}} = \underline{0} \Longrightarrow \underline{x}^* = [\, u_1^* \,,\, \dfrac{u_1^*}{u_2^*} \,,\, x_3^* \,]^T \,; z^* = u_1^*$ mit $x_3^* \neq 0$;

oder: $\underline{x}^* = [\, S_v^* p_k^* \,,\, p_k^* \,,\, y^* \,]^T \;;\; z^* = S_v^* \cdot p_k^*$

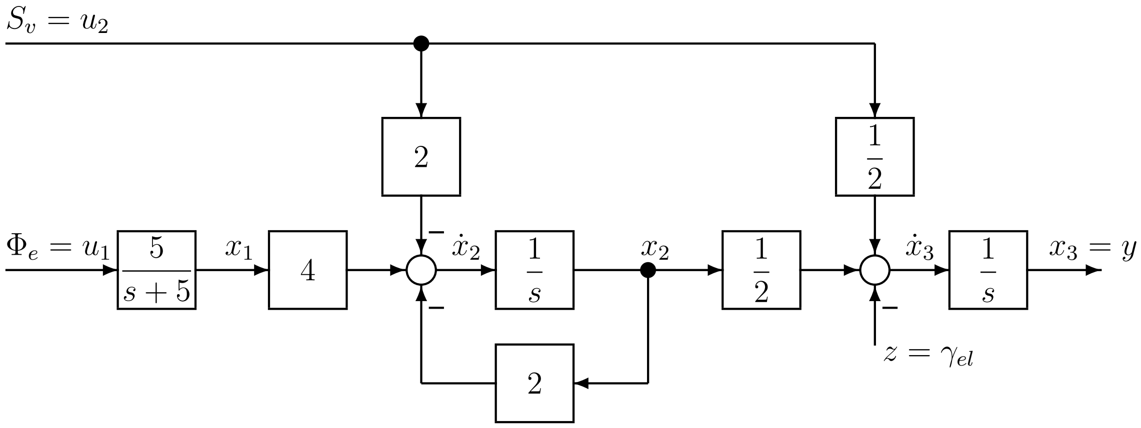
• Zustandsdarstellung nach Linearisierung um die Ruhelage

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{T_k} & -\dfrac{2S_v^*}{T_k} & 0 \\ 0 & \dfrac{kS_v^*}{\Theta y^*} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2p_k^*}{T_k} \\ 0 & \dfrac{kp_k^*}{\Theta y^*} \end{bmatrix} \cdot \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{k}{\Theta y^*} \end{bmatrix} \cdot z$$

$$y = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,] \cdot \underline{x}$$

1.2 Signalflussplan

Zustandsdarstellung mit Zahlenwerten: $\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} z$



2.Aufgabe: Linearisierung entlang einer Referenztrajektorie

2.1 Zustandsdarstellung:
$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{a}{m} x_2^2 - \frac{1}{m} u \cdot x_2 + \frac{1}{m} \cdot V \cdot u \\ y &= -\frac{a}{m} x_2^2 - \frac{1}{m} u \cdot x_2 + \frac{1}{m} \cdot V \cdot u \end{aligned}$$

2.2 Linearisierte Zustandsdarstellung (Δ weggelassen)

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m}\,(2ax_2^* + u^*) \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}\,(V - x_2^*) \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m}\,(2ax_2^* + u^*) \end{bmatrix} \underline{x} + \frac{1}{m}\,(V - x_2^*) \quad u
\end{aligned}
$$

2.3 Referenztrajektorie: $\underline{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 1 - \cos\Omega t \\ \Omega \sin \Omega t \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$ Steuerfunktion: $u^*(t) = \dfrac{m\Omega^2[\cos\Omega t + \frac{a}{m}\sin^2\Omega t]}{V - \Omega\sin\Omega t}$

Einsetzen dieser Größen in die Lösung von 2.2 ergibt die zeitvariante linearisierte Zustandsdarstellung

3.Aufgabe: Analyse eines dynamischen Systems mittles Phasenportrait

3.1 Vorgehen zur Klassifizierung:

1. Gleichgewichtspunkte berechnen
2. Linearisieren im allgemeinen Gleichgewichtspunkt
3. Eigenwerte der linearisierten Systeme ausrechnen, Eigenschaften der Gleichgewichtspunkte bestimmen
4. Zum Zeichnen: Eigenvektoren ausrechnen

- Gleichgewichtspunkte: $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0} \Rightarrow$

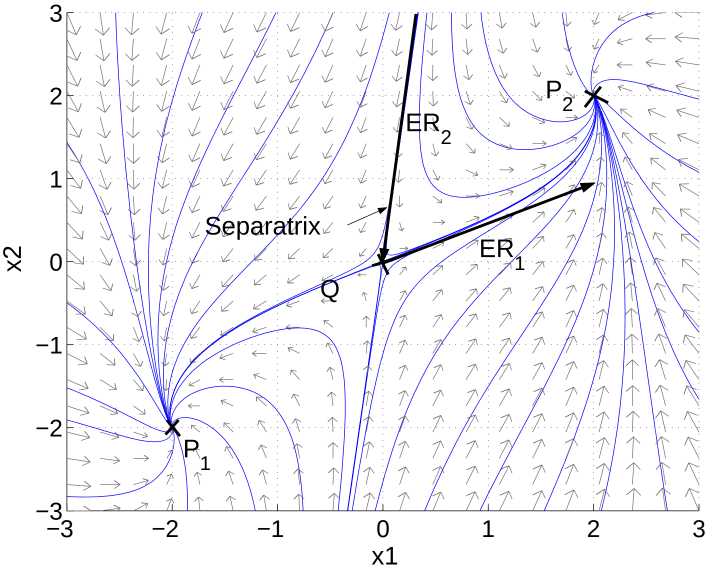
  $Q = (0,0)$
  $P_1 = (-2,-2)$
  $P_2 = (2,2)$

- Linearisieren: Jakobi-Matrix $J = \dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$

  $$J = \begin{bmatrix} -6x_1^2 + 10 & -2 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

- Eigenwerte ausrechnen:
  * Q: $\det(J(Q) - \lambda I) = (10-\lambda)(-9-\lambda) + 18 = 0$
    $\Rightarrow \lambda \in \{-8, 9\}$ $\Rightarrow Q$ ist Sattelpunkt
  * P_1, P_2: $\lambda = -11.5 \pm j\sqrt{11.75}$ $\Rightarrow P_1$ und P_2 sind stabile Strudel
- Eigenvektoren von $J(Q)$: $k_1 = [2 \quad 1]^T$, $k_2 = [1 \quad 9]^T$

3.2 Phasenportrait



3.3 Bistabiles System: für $t \to \infty$ befindet sich der Systemzustand entweder in P_1 oder P_2.