<u>Übung 1</u>

<u>1.1</u>

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

hergeleitet von $s\underline{X} = A\underline{X} + B\underline{U}$

$\underline{Y} = C\underline{X} + D\underline{U}$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \hat{=} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+4)+2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s+3 & s+3 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+5s+6} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & s+3 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ 1 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}}}$$

<u>1.2</u>

$\det(\lambda - IA) \stackrel{!}{=} 0$ Bestimmung der EW

$$\det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -1 & \lambda+4 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3) \stackrel{!}{=} 0$$

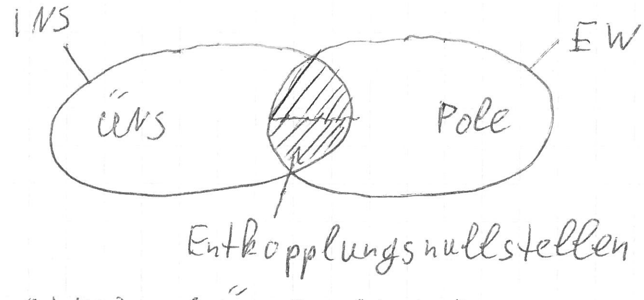
$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -3$

Pole aus $G(s)$: $s_1 = -2, \ s_2 = -3$

Pole entsprechen voll den EW $\Rightarrow$ System vollst. steuer- & beobachtbar

$\Leftrightarrow$ Keine Entkopplungsnullstellen

<u>1.3</u>



$\{INS\} = \{ÜNS\} + \{ENS\}$

ÜNS:

$\det(G(s)) \overset{!}{=} 0$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ 1 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{(s+2)(s+3)} - \frac{1}{s+2} = 0$$

$\Rightarrow 1-(s+3)=0 \quad \Leftrightarrow s=-2$

Problem: Nullstelle entspricht EW von A

↳ Für $s=-2$ ist A nicht definiert

→ Allgemeiner: μ ist EW von A, dann muss, wenn μ eine ÜNS ist, gelten:
- $\underline{u}(s=\mu)$ endlich und $\neq 0$
- $\lim\limits_{s\to\mu} G(s)\underline{u}(s) = \underline{0}$

$$\lim_{s\to -2}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ 1 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underline{0} \quad \Rightarrow u_1 \overset{!}{=} -u_2 \quad \text{z.B. } u_1=1, u_2=-1$$

✓ Bedingungen erfüllt

$\Rightarrow$ {ÜNS} = {2} $\Rightarrow$ Da keine ENS, {INS} = {ÜNS}

2. Steuerbarkeit: (n Zustände)

Kalman: $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \overset{!}{=} n \Leftrightarrow$ voll. steuerbar

Hautus: $\text{rang}(\lambda_i I - A, B) \overset{!}{=} n \Leftrightarrow$ EW steuerbar

Gilbert: s. Skript

Beobachtbarkeit:

Kalman: $\text{rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} n \Leftrightarrow$ voll. beobachtbar

Hautus: $\text{rang}\begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} \overset{!}{=} n \Leftrightarrow$ EW beobachtbar

Gilbert: s. Skript

Stabilisierbarkeit: Wenn alle λ_i mit $Re\{\lambda_i\} \geq 0$ steuerbar sind.

Entdeckbarkeit: Wenn alle λ_i mit $Re\{\lambda_i\} \geq 0$ beobachtbar sind.

2.1 Reihe:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} u \qquad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} x_1 \qquad y = [0 \;\; 1] \underline{x}$$

$$y = x_2$$

$$\text{rang}(B, AB) = \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_1 T_2} \end{bmatrix} = 2 = n \Rightarrow \text{voll. steuerbar}$$

Parallel:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} u \qquad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} u \qquad y = [1 \;\; 1] \underline{x}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix} = 1 < n \Rightarrow \text{nicht voll. steuerbar}$$

2.2

$$\underline{\dot{x}}_1 = A \underline{x}_1 + B \underline{u} \qquad \underline{\dot{x}}_2 = A \underline{x}_2 + B \underline{u}$$

$$y_1 = C \underline{x}_1 + D \underline{u} \qquad y_2 = C \underline{x}_2 + D \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}}_1 \\ \underline{\dot{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$y = y_1 + y_2 = [C \;\; C] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + [D \;\; D] \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{u} \end{bmatrix}$$

Steuerbarkeit: (2n Zustände)

$$\text{rang}(Q_S) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{rang} \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{2n-1} B \\ B & AB & \ldots & A^{2n-1} B \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2n \times 2nr}} = n < 2n$$

$\Rightarrow$ nicht voll steuerbar

Beobachtbarkeit:

$$\text{rang}(Q_B) = \text{rang}\begin{pmatrix} [C \quad C] \\ [C \quad C]\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \\ \vdots \\ [C \quad C]\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}^{2n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \text{rang}\underbrace{\begin{bmatrix} C & C \\ CA & CA \\ \vdots & \\ CA^{2n-1} & CA^{2n-1} \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2nq \times 2n}} = n < 2n$$

↳ Nicht voll. beobachtbar

Alternativ: Zeilenrang durch Cayley-Hamilton-Theorem bestimmen. (CA^i ist für $i \geq n$ durch kleinere Potenzen darstellbar)

3.1

SISO System → Nur ein Ein-/Ausgang

Nach Gilbert würden zwei lin. unab. Zeilen/Spalten für die Steuer-/Beobachtbarkeit eines 2-fachen EW benötigt.

Eingangsvektor $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\text{rang}(b) = 1$

⇒ nicht steuer-/beobachtbar

3.2 $\text{rang}(Q_s) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & c \end{bmatrix} AB\right) \overset{!}{=} 2$

falls $v[1 \ 2] \neq [3 \ c] \Leftrightarrow$ vollst. steuerbar

$v \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow v = 3$

$3 \cdot 2 = c \Leftrightarrow c = 6$

⇒ für $c \neq 6$ vollst. steuerbar

4.1 $\det(\lambda I - A) \overset{!}{=} 0$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -6 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$$

Hautus: $\text{rang}(\lambda_1 I - A, B) = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 = n$

$\text{rang}(\lambda_2 I - A, B) = \text{rang}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 < n$ ⇒ nicht steuerbarer EW

4.2 $\text{rang}(Q_B) = \text{rang}\begin{pmatrix} 3 & c \\ -3+6c & 3-2c \end{pmatrix} \overset{!}{=} 2$

$\det\begin{pmatrix} 3 & c \\ -3+6c & 3-2c \end{pmatrix} = 9-6c-(-3c+6c^2)$

$= -6c^2-3c+9 \overset{!}{=} 0 \iff c^2+0{,}5c-1{,}5 \overset{!}{=} 0$

$\iff c_1 = 1\ ,\ c_2 = -1{,}5$

Für $c \neq 1 \wedge c \neq -1{,}5$ vollst. beobachtbar

4.3 Aus 4.1 → $\lambda_2 = -4$ nicht steuerbar

Aus 4.2 → vollst. beobachtbar

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ ist einziger Pol

INS:

Rangabfall → Eingangsentkopplungs-NS

$\det(R) = \det\begin{pmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

Rangabfall → Ausgangsentkopplungs-NS

sonst ÜNS

$\lambda_2 = -4$ ist INS, da nicht steuerbar.

Restliche INS über $\det(R) \overset{!}{=} 0$

$\det(R) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & -1 \\ -6 & s+2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ | z.B. $c=2$

$= (s+1)\det\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ s+2 & -2 \end{bmatrix}$

$= 4(s+1)+6\cdot 2+3\cdot(s+2+2) = 4s+4+12+12+3s$

$= 7s+28 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow s = -4$

→ Keine weitere INS

4.4

ÜNS sind Nullstellen, bei denen das stationäre Verhalten, für eine bestimmte, anregende Frequenz s_0, verschwindet. ($G(s_0)\underline{u}_{s0} = \underline{0}$).

INS, die keine ÜNS sind, werden EntkopplungsNS bezeichnet. Falls diese vorhanden sind, kann entweder der Eigenvorgang $e^{s_0 t}$ nicht angeregt werden (Eingangsentk.NS) oder ist am Ausgang nicht sichtbar (Ausgangsentk.NS).