Technik Autonomer Systeme: Bayes

Dirk Wollherr

Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik
Technische Universität München

Problembeschreibung

Localization:

- Bestimmung der eigenen Position und Orientierung in einer physikalischen Umgebung

Mapping:

- Erstellung einer Karte der physikalischen Umgebung
- geeignete Wahl der Metrik

Exploration:

- Erkundung einer unbekannten Umgebung
- gleichzeitiger Aufbau einer Karte und Bestimmung der eigenen Position

Navigation:

- Planung eines Pfads von der aktuellen Position zu einem Ziel

Lokalisierung (Localization)

Problemstellung:

- Bestimmung der eigenen Position und Orientierung in einer physikalischen Umgebung

Voraussetzungen:

- Umgebung bekannt
- Karte existiert
- Roboter verfügt über Sensoren zur Positionsbestimmung

Schwierigkeiten/Anforderungen:

- Sensorsignale sind fehlerhaft bzw. verrauscht
- erforderliche Genauigkeit der Daten
- erforderliche Datenrate

Klassifikation der Sensoren zur Lokalisierung

Lokalisierungsmethoden

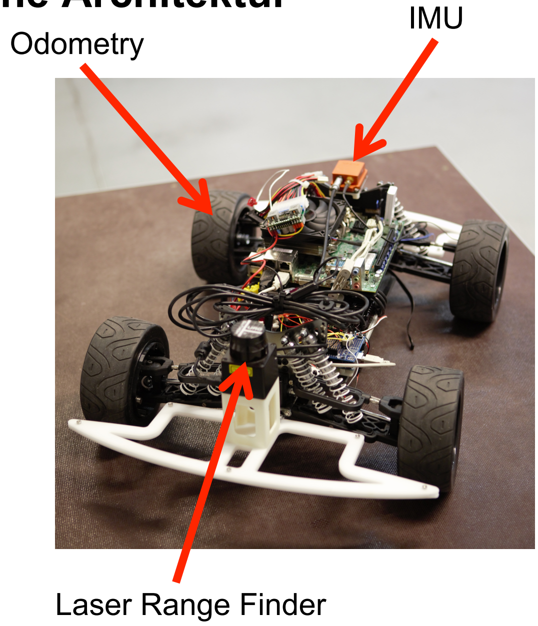
- Onboard Sensorik
  - absolut
    - *Landmarken*
    - *GPS*
  - relativ
    - *Odometrie*
    - *Inertiale Systeme*
    - *Landmarken*
- Offboard Sensorik
  - aktiv
    - *Infrarotscanner*
    - *Magnetfelder*
    - *Schallfelder*
  - passiv
    - *CCD Kamera*
    - *Sonar*

Klassische Architektur

Positionsbestimmung:
- Position im Raum
- Orientierung

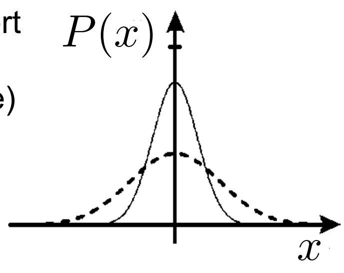
Sensorsysteme:
- Odometrie
- Gyrometer/IMU
- absolutes Trackingsystem (GPS/Landmarken)

Sensorfusion:
- Vorteile kombinieren → Gesamtleistung höher als die Leistung einzelner Sensoren
- Kalman Filter



Stochastische Methoden

Einsatz zur Lokalisierung/Kartenerstellung:
- stochastische (wahrscheinlichkeitstheoretische) Methoden weit verbreitet
- Nutzdaten von Sensoren sind mit Rauschen überlagert
- Rauschen kann als Zufallsprozess modelliert werden
- Positionsbestimmung (Roboter und Objekte) unterliegt Unsicherheiten



Stochastische Methoden und Modelle:
- Satz von Bayes
- Kalman Filter
- Markov Modelle

Diskrete Zufallsvariablen

- *X* bezeichnet eine Zufallsvariable.
- *X* kann eine abzählbare Anzahl von Werten $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ annehmen.
- $P(X=x_i)$ oder $P(x_i)$, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Zufallsvariable *X* den Wert x_i annimmt.
- *P(*X*)* heisst Wahrscheinlichkeitesfunktion.

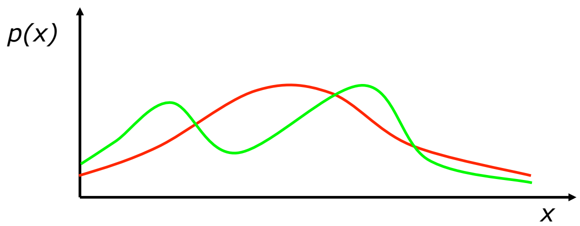
- Z.B. *P*(*Room*) = 0.7 (oder 0.2 oder 0.08 …)

Kontinuierliche Zufallsvariablen

- *X* nimmt kontinuierliche Werte an.
- *p(X=x)*, oder *p(x)*, ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

$$\mathrm{P}(x \in (a,b)) = \int_a^b p(x)\,dx$$

- Z.B.



Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeit

- *P(X=x* und *Y=y) = P(x,y)*
- Wenn X und Y unabhängig sind:

  P(x,y) = P(x) P(y)
- *P(x | y)* ist die Wahrscheinlichkeit für *x* unter Voraussetzung *y*

  P(x | y) = P(x,y) / P(y)

  P(x,y) = P(x | y) P(y)
- Wenn X und Y unabhängig sind

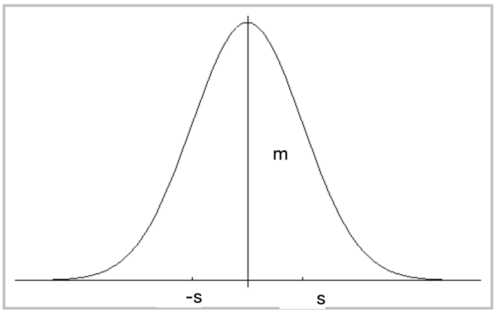
  P(x | y) = P(x)

Gaussians

Univariate

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2):$$

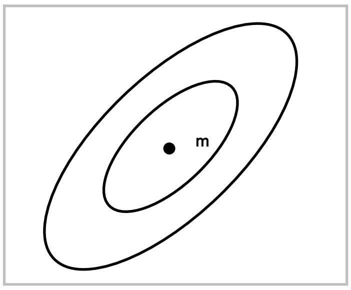
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



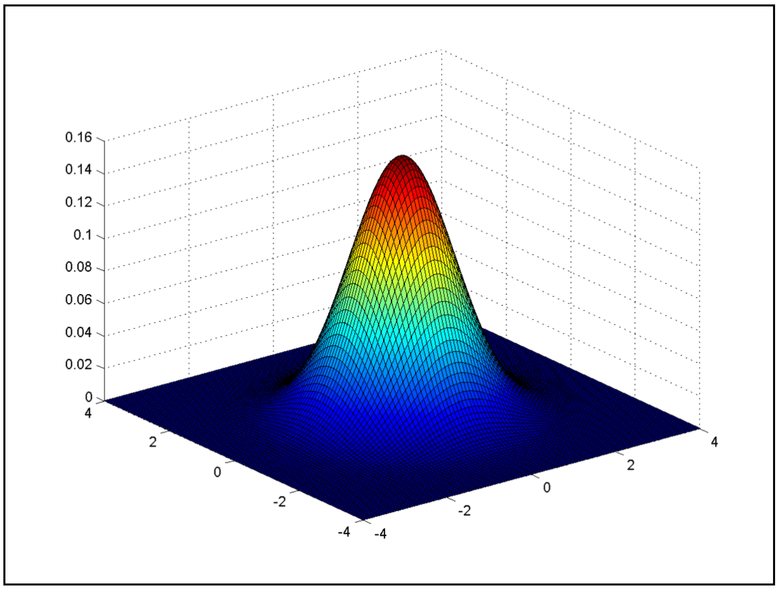
Multivariate

$$p(\boldsymbol{x}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}):$$

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$



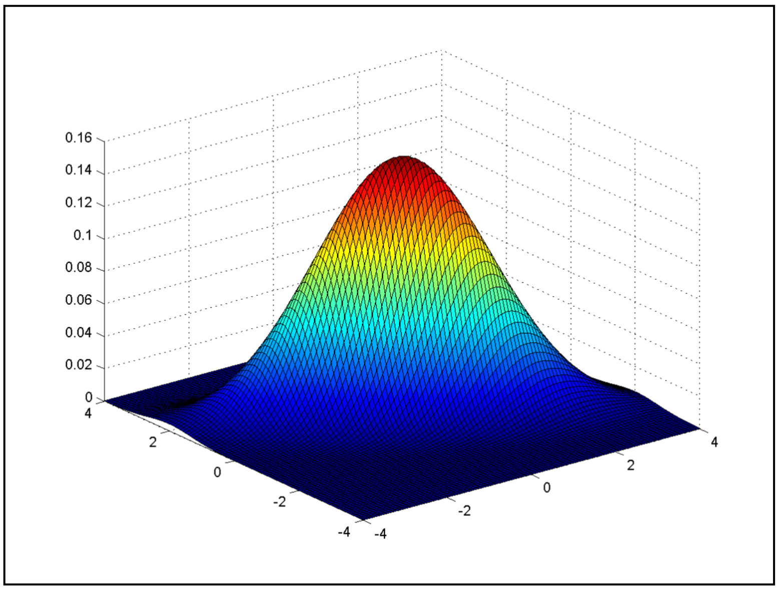
Mathematischer Einschub: Zufallsvariablen



TAS - SLAM

Folie 11

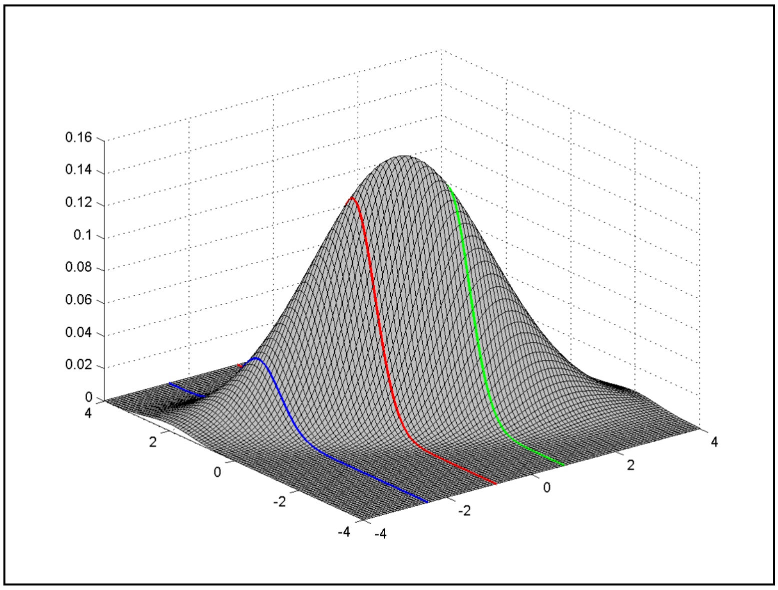
Mathematischer Einschub: Zufallsvariablen



TAS - SLAM

Folie 12

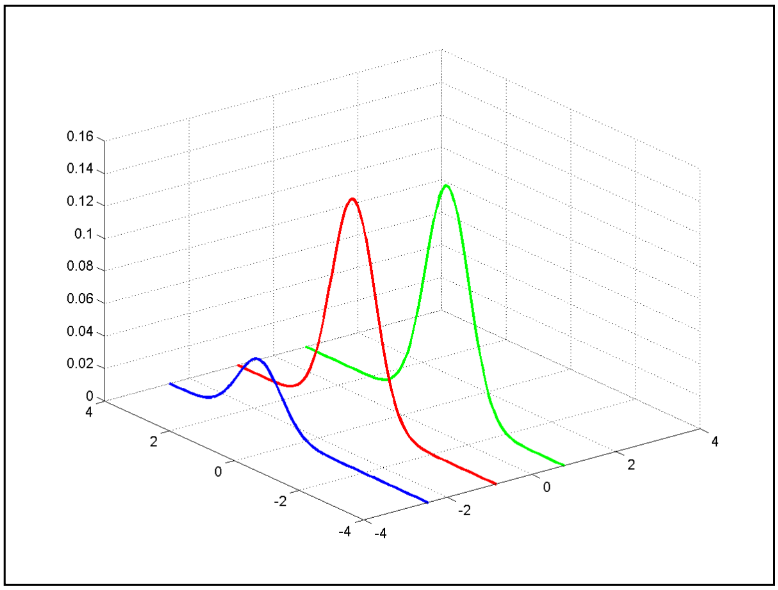
Mathematischer Einschub: Zufallsvariablen



TAS - SLAM

Folie 13

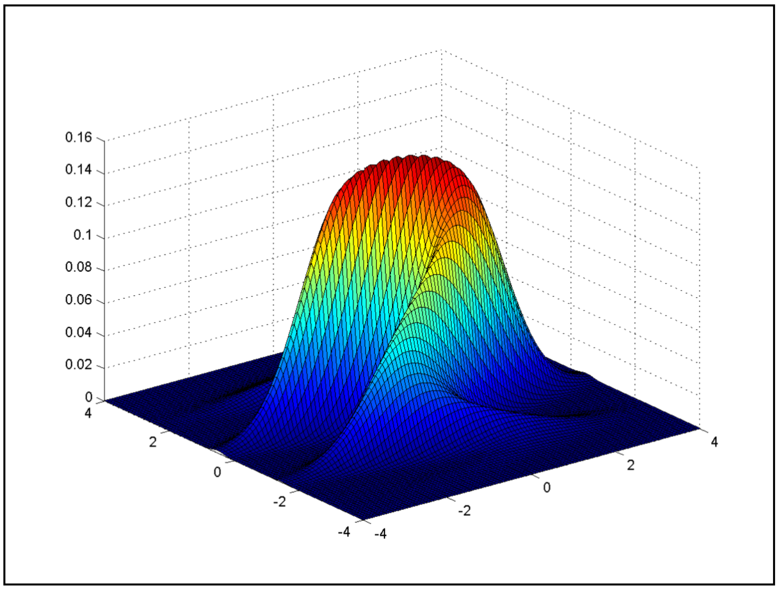
Mathematischer Einschub: Zufallsvariablen



TAS - SLAM

Folie 14

Mathematischer Einschub: Zufallsvariablen



Satz von Bayes (Bayes ' Rule)

Allgemein:

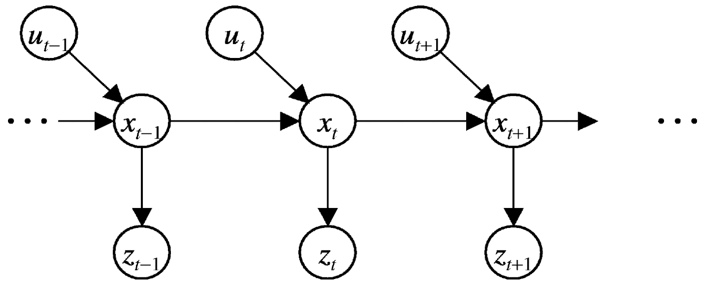
- Umkehren von Schlussfolgerungen (Ereignis – Ursache)
- *Thomas Bayes, englischer Mathematiker (1702 – 1761)*

Theorem:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)} = \frac{\text{likelihood}\cdot\text{prior}}{\text{evidence}}$$

- $P(x|y)$: Wahrscheinlichkeit für das Ereignis x unter der Vorbedingung y
- $P(y|x)$: Wahrscheinlichkeit für das Ereignis y unter der Vorbedingung x
- $P(x)$: A priori Wahrscheinlichkeit für das Ereignis x

Markov Annahme



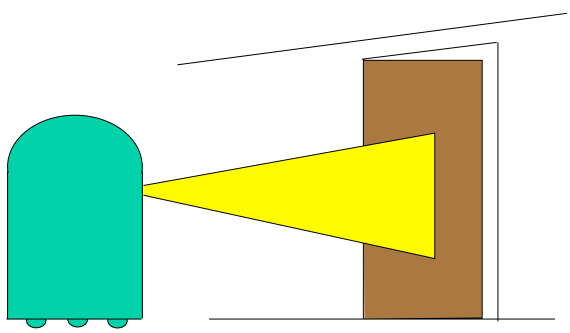
$$p(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t \mid x_t)$$
$$p(x_t \mid x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$

Zugrundeliegende Annahmen

- Statische Welt
- Unabhängiges Rauschen
- Perfektes Modell, keine Annäherungsfehler

Einfaches Beispiel

- Roboter erhält Messung z
- Wie ist $P(open|z)$



Beispiel

$$P(z|open) = 0.6 \qquad P(z|\neg open) = 0.3$$
$$P(open) = P(\neg open) = 0.5$$

$$P(open|z) = \frac{P(z|open)P(open)}{P(z|open)P(open) + P(z|\neg open)P(\neg open)}$$

$$P(open|z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{2}{3} = 0.67$$

Beobachtung z erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass die Tür offen ist.

Hintergrundwissen

- Bayes rule und Hintergrundwissen

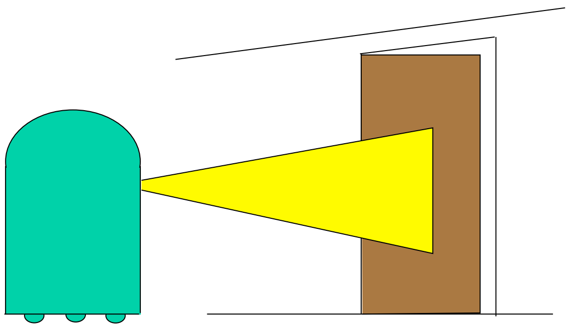
$$P(x|y,z) = \frac{P(y|x,z)P(x|z)}{P(y|z)}$$

- Unabhängigkeit

$$P(x,y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

Beispiel Zustandsschätzung

- Der Roboter erhällt eine zweite Messung z_2
- Wie ist $P(open|z_1, z_2)$



TAS - SLAM

Folie 21

Recursives Bayes'sches Updaten

$$P(x|z_1, ..., z_n) = \frac{P(z_n|x, z_1, ..., z_{n-1})P(x|z_1, ..., z_{n-1})}{P(z_n|z_1, ..., z_{n-1})}$$

Markov Annahme: z_n ist unabhängig von $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ bei gegenbenem x .

$$\begin{aligned} P(x|y_1, ..., z_n) &= \frac{P(z_n|x)P(x|z_1, ..., z_{n-1})}{P(z_n|z_1, ..., z_{n-1})} \\ &= \eta P(z_n|x)P(x|z_1, ..., z_{n-1}) \\ &= \eta_{1...n} \prod_{i=1...n} P(z_i|x)P(x) \end{aligned}$$

TAS - SLAM

Folie 22

Beispiel: Zweite Messung

$$P(z_2|open = 0.5) \qquad P(z_2|\neg open) = 0.6$$
$$P(open|z_1) = 2/3 \qquad P(\neg open|z_1) = 1/3$$

$$\begin{aligned} P(open|z_1, z_2) &= \frac{P(z_2|open)P(open|z_1)}{P(z_2|open)P(open|z_1) + P(z_2|\neg open)P(\neg open|z_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot 13} = \frac{5}{8} = 0.625 \end{aligned}$$

Beobachtung z_2 verringert die Wahrscheinlichkeit, dass die Tür offen ist.

Bayes Filters: Framework

- **Gegeben:**
  - Folge von Beobachtungen *z* und Handlungen *u:*

    $$d_t = \{u_1, z_2 \ldots, u_{t-1}, z_t\}$$
  - Sensor Modell *P(z|x).*
  - Handlungs Modell *P(x|u,x')*.
  - Prior Wahrscheinlichkeit des Systemzustandes *P(x).*
- **Gesucht:**
  - Schätzung des Zustandes *X* eines dynamischen Systems.
  - Der posterior des Zustandes wird **Belief** genannt:

    $$Bel(x_t) = P(x_t \mid u_1, z_2 \ldots, u_{t-1}, z_t)$$

Bayes Filters

z = observation
u = action
x = state

$$\boxed{Bel(x_t)} = P(x_t \mid u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

Bayes $$= \eta\ P(z_t \mid x_t, u_1, z_1, \ldots, u_t)\ P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)$$

Markov $$= \eta\ P(z_t \mid x_t)\ P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)$$

Total prob. $$= \eta\ P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)\ dx_{t-1}$$

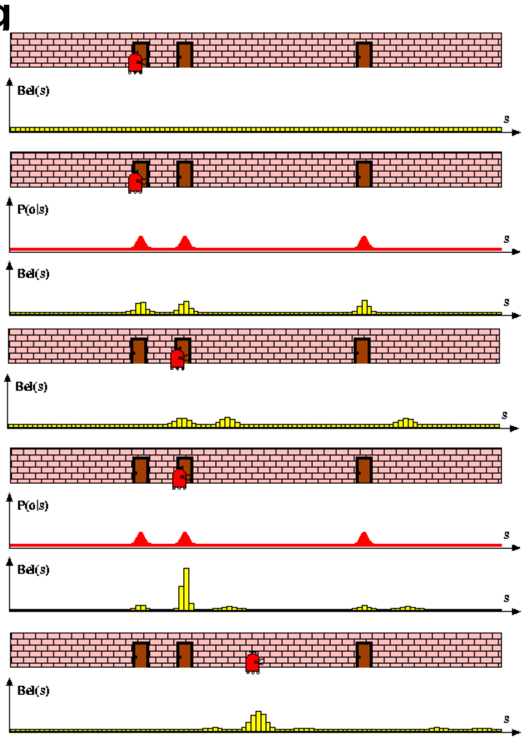
Markov $$= \eta\ P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)\ dx_{t-1}$$

$$= \boxed{\eta\ P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ Bel(x_{t-1})\ dx_{t-1}}$$

$$\boxed{Bel(x_t) = \eta\ P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ Bel(x_{t-1})\ dx_{t-1}}$$

Algorithm **Bayes_filter**(*Bel(x),d*):
n=0
If *d* is a perceptual data item *z* then
For all *x* do
$Bel'(x) = P(z \mid x) Bel(x)$
$\eta = \eta + Bel'(x)$
For all *x* do
$Bel'(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$
Else if *d* is an action data item *u* then
For all *x* do
$Bel'(x) = \int P(x \mid u, x')\ Bel(x')\ dx'$
Return *Bel'(x)*

Beispiel Lokalisierung



Abbildungen von Kurt Konolige, Stanford

TAS - SLAM