1.Aufgabe: Sliding-Mode-Regler

1.1 Strom

$$\underline{\dot{x}} = 0$$
$$0 = \frac{x_1^*}{C} - \frac{V_d}{RC}$$
$$x_1^* = \frac{V_d}{R}$$

1.2 Sliding Mode nach Filippov:

$$\underline{\dot{x}}_{av} = \alpha \underline{f}^+ + (1-\alpha)\underline{f}^-$$
$$\alpha = \frac{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \underline{f}^-}{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}(\underline{f}^- - \underline{f}^+)}$$
$$\underline{\dot{x}}_{av} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{bmatrix}$$

1.3 Skizze auf $s = 0$ gilt $x_1 = x_1^* = \frac{V_d}{R}$, damit

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{RC}(V_d - x_2)$$

Exponentieller Abfall auf V_d, Startzeit t_0 und Startsteigung aus Differentialgleichung

1.4 Existenz

$$s = x_1 - x_1^*$$
$$u = \begin{cases} 0 & s > 0 \\ 1 & s < 0 \end{cases}$$
$$\dot{s} = \dot{x}_1 = -\tfrac{1}{L}x_2 + \tfrac{V_0}{L}u$$

- Erreichen von $s = 0$: Testen der Annäherungsbedingungen führt auf $0 < x_2 < V_0$. (Grenzwerte liefern keine anderen Bedingungen, da x_2 nicht in s vorkommt)
- Lediglich stabiles Verhalten auf $s = 0$: Kann aus vorheriger Teilaufgabe hergeleitet werden.

2. Aufgabe:

2.1 $s = y = x_1 + x_2$
$u = -u_0 \operatorname{sign} s$
$\dot{s} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -(4x_1 + 2x_2) - u_0 \operatorname{sign} s$

Annäherung:

$s > 0\colon\ -4x_1 - 2x_2 - u_0 < 0 \iff u_0 > -4x_1 - 2x_2 \iff u_0 > -(4x_1 + 2x_2)$

$s < 0\colon\ -4x_1 - 2x_2 + u_0 > 0 \iff u_0 > 4x_1 + 2x_2$

$\lim\limits_{s\to 0^+} \dot{s} < 0 \iff \lim\limits_{s\to 0^+} -4x_1 - 2(s - x_1) - u_0 \iff u_0 > -2x_1$

$\lim\limits_{s\to 0^-} \dot{s} > 0 \iff \lim\limits_{s\to 0^+} -4x_1 - 2(s - x_1) + u_0 \iff u_0 > 2x_1$

dadurch keine weitere Einschränkung (Untersuchung Annäherungsbedingung auf $s = 0$ liefert selbe Bedingungen)

2.2 Verhalten auf $s = 0$ mittels Equivalent Control

$\dot{s} = -4x_1 - 2x_2 + u$

$\dot{s} \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow u_{eq} = 4x_1 + 2x_2 = 2x_1$

$\Longrightarrow$ Einsetzen von u_{eq} in $\dot{x}_1$

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + \sin^2(y)u_{eq} = -3x_1$

$\Longrightarrow x_1(t)$ asymptotisch stabil

$\Longrightarrow x_2(t)$ asymptotisch stabil

$\Longrightarrow$ Sliding Mode Existenzbedingungen erfüllt

3.Aufgabe: Simple Inverted Pendulum

3.1 Stabilität der Dynamik auf $s_1 = 0$

Annäherung:

$s_1 > 0\colon \dot{s}_1 < 0 \quad \iff \quad \dot{s}_1 = c_1(\alpha \sin\theta - \tau_0') + c_2\dot{\theta} < 0 \quad \iff \quad \tau_0' > \alpha \sin\theta + \frac{c_2}{c_1}\dot{\theta}$

$s_1 < 0\colon \dot{s}_1 > 0 \quad \iff \quad \tau_0' > -\alpha \sin\theta - \frac{c_2}{c_1}\dot{\theta}$

Erreichen von $s_1 = 0$ in endlicher Zeit:

$\dot{s}_1 = -c_1\tau_0' \operatorname{sign}(s_1) + c_1\alpha \sin\theta + c_2\dot{\theta}$

mit $\tau_0' = \frac{\tau_0}{J} > 0$ und $\alpha = \frac{mgl}{J} > 0$

$\lim\limits_{s_1\to 0^+} \dot{s}_1 < 0 \quad \iff \quad \lim\limits_{s_1\to 0^+} \alpha \sin\theta - \tau_0' + \frac{c_2}{c_1}(\frac{s_1}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}\theta) < 0 \quad \iff \quad \tau_0' > \alpha \sin\theta - \frac{c_2^2}{c_1^2}\theta$

$\lim\limits_{s_1\to 0^-} \dot{s}_1 > 0 \quad \iff \quad \tau_0' > -\alpha \sin\theta + \frac{c_2^2}{c_1^2}\theta$

dadurch keine weitere Einschränkung

3.2 $\ddot{\theta}^* = -\alpha_1\theta - \alpha_2\dot{\theta}$

$\ddot{\theta} \stackrel{!}{=} \ddot{\theta}^* \quad \iff \quad i^* = \frac{J}{K_m}\left(-\alpha \sin\theta - \alpha_1\theta - \alpha_2\dot{\theta}\right)$

3.3 $\dot{s}_2 = \frac{di}{dt} - \frac{di^*}{dt}$

$\lim\limits_{s_2\to 0^+} \dot{s}_2 < 0 \quad \iff \quad \frac{u_0}{L} > i\left(\alpha_2 - \frac{R}{L}\right) + \dot{\theta}\left(\frac{\alpha_1 J}{K_m} - \frac{K_n}{L} + \frac{J\alpha}{K_m}\cos\theta\right) + \frac{J\alpha_2\alpha}{K_m}\sin\theta$

$\lim\limits_{s_2\to 0^-} \dot{s}_2 > 0 \quad \iff \quad \frac{u_0}{L} > -i\left(\alpha_2 - \frac{R}{L}\right) - \dot{\theta}\left(\frac{\alpha_1 J}{K_m} - \frac{K_n}{L} + \frac{J\alpha}{K_m}\cos\theta\right) - \frac{J\alpha_2\alpha}{K_m}\sin\theta$

Wahl von α_1, α_2 derart, dass obige Bedingungen erfüllt und $\ddot{\theta} = -\alpha_1\theta - \alpha_2\dot{\theta}$ stabil