Übung 3

Nyquist-Stabilitätsanalyse MIMO/SISO

- angewandt auf:
  - E/A-Stabilität, da ÜF analysiert wird
  - offener Regelkreis

$F(s) = I + GK$

Wenn $\Delta \arg\det(F(s)) = (n^+ + \frac{n^0}{2})\pi \Leftrightarrow$ geschl. RK stabil

n^+: Pole mit $Re\{\} > 0$

n^0: Pole auf Imaginärachse

Formel gilt für:
- $\omega \in [0, \infty[$
- Gegen den Uhrzeigersinn ist positiv
- 0 ist Bezugspunkt (Nicht -1)

Definition im Skript:
- $\omega \in]-\infty; \infty[$
- Im Uhrzeigersinn ist positiv

$\boxed{1}$ $F = 1 + kG(s) = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2s-2} = \frac{2s-1}{2s-2}$ $\quad | \; s = j\omega, \; \sigma = 0$

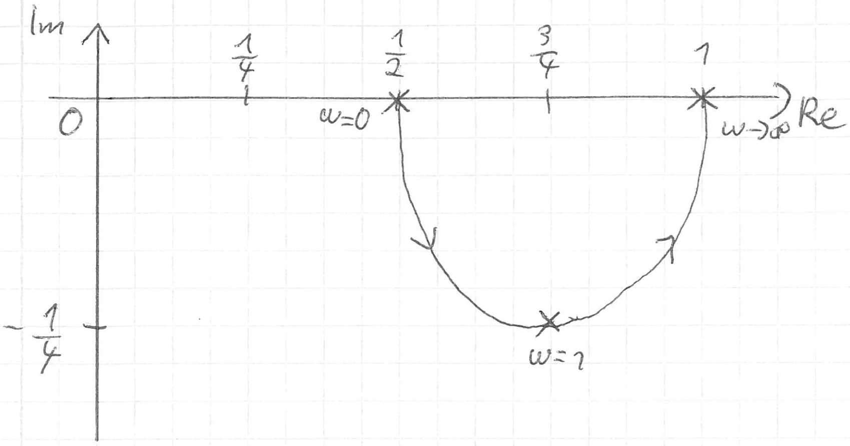
$$= \frac{2j\omega - 1}{2j\omega - 2} = \frac{(2j\omega-1)(-j\omega-1)}{2(j\omega-1)(-j\omega-1)} = \frac{2\omega^2 - j\omega + 1}{2\omega^2+2}$$

$$\Rightarrow Re\{F\} = \frac{2\omega^2+1}{2\omega^2+2}, \quad Im\{F\} = \frac{-\omega}{2\omega^2+2}$$

$\lim_{\omega \to 0} F(j\omega) \Rightarrow \quad Re\{F\} = \frac{1}{2} \quad Im\{F\} = 0$

$\lim_{\omega \to \infty} F(j\omega) \Rightarrow \quad Re\{F\} = 1 \quad Im\{F\} = 0$

$\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad Re\{F\} = \frac{3}{4} \quad Im\{F\} = -\frac{1}{4}$



Pole offener Kreis: $kG(s)=\frac{1}{2s-2}$, $2s-2=0 \Rightarrow s=1 \Rightarrow n^+=1$

Nyquist fordert für Stabilität:

$$(n^+ + \frac{n^0}{2})\pi = \pi \overset{!}{=} \Delta \arg \det F(s)$$

Der Vektor zur Ortskurve umkreist den Nullpunkt um 0 rad $\Rightarrow \Delta\arg\det F(s) = 0 \neq \pi \Rightarrow$ <u>geschl. Kreis instabil</u>

<u>2.1</u>

$$F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{s+10} & 1\\ 0 & \frac{3}{5s-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+10+2k}{s+10} & k\\ 0 & 5s-1+3k\end{bmatrix}$$

$$\det F(s)=\frac{(s+10+2k)(5s-1+3k)}{(s+10)(5s-1)}$$

$a\cdot b=c$, $a,b\in\mathbb{C}$ $\qquad$ $\arg(a)=\operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}\{a\}}{\operatorname{Re}\{a\}}\right)$, $\operatorname{Re}\{a\}>0$

$\arg c = \arg a + \arg b$

$$\Delta\arg\det F(j\omega)=\lim_{\omega\to\infty}[\arg(j\omega+10+2k)+\arg(5j\omega-1+3k) - \arg(j\omega+10)-\arg(5j\omega-1)]$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}\left[\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{10+2k}\right)+\operatorname{atan}\left(\frac{5\omega}{3k-1}\right)-\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{10}\right)-\operatorname{atan}\left(\frac{5\omega}{-1}\right)\right]$$

für $k=0{,}5$:

$$\Delta\arg\det(F(k=0{,}5))=\lim_{\omega\to\infty}\left[\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{11}\right)+\operatorname{atan}\left(\frac{5\omega}{0{,}5}\right)-\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{10}\right)+\operatorname{atan}(5\omega)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Pole: $s_1 = -10 \quad s_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow n^+ = 1 \quad n^0 = 0$

Nyquist:

$$(n^+ + \frac{n^0}{2})\pi = \pi \overset{!}{=} \Delta\arg\det F = \pi \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ geschl. RK stabil

2.2 Aus 2.1: $(n^+ + \frac{n^0}{2})\pi = \pi$, da Pole nicht von k abhängen

Aus Ortskurve: $\Delta\arg\det F = 0 \neq \pi \Rightarrow$ geschl. RK instabil

2.3 Aus 2.1:

$$\arg\det(F) = \lim_{\omega\to\infty} [\underbrace{\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{10+2k}\right)}_{\text{da } k>0 \text{ kein Einfluss}} + \underbrace{\arctan\left(\frac{5\omega}{3k-1}\right)}_{\text{von } k \text{ abhängig}} \underbrace{- \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) + \arctan(5\omega)}_{\text{unabhängig von } k}]$$

Falls $3k-1<0$: $\lim_{\omega\to\infty} \operatorname{atan}\left(\frac{5\omega}{3k-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \Delta\arg\det F = 0 \Rightarrow$ geschl. RK instabil

$3k-1>0$: $\lim_{\omega\to\infty} \operatorname{atan}\left(\frac{5\omega}{3k-1}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \Delta\arg\det F = \pi \Rightarrow$ geschl. RK stabil

$\Rightarrow 3k_{krit} - 1 = 0 \Leftrightarrow k_{krit} = \frac{1}{3}$

stabile Regelung für $k > k_{krit}$

$\boxed{3}$ Gershgorin - Theorem

$$|\lambda_i(j\omega) - F_{ii}(j\omega)| \leq \sum_{\substack{j\\ i\neq j}} |F_{ij}(j\omega)| = D_i$$

Alle EW von $F(j\omega_0)$ liegen im Kreis um $F_{ii}(j\omega_0)$ mit dem Radius $D_i(j\omega_0)$. Da $\omega \in [0;\infty[$ ergeben sich aus den Kreisen Bänder.

$\Rightarrow$ ① Wenn F diagonaldominant ist, dann liegt der Nullpunkt nicht im Band

② Nyquist-SISO kann für jedes $F_{ii}(j\omega)$ angewendet werden

3.1 $\quad F = I + GK = \begin{bmatrix} \frac{s^2+6s+9}{(s-1)^2} & \frac{0{,}8}{(s-1)^2} \\ \frac{2{,}4}{s-2} & \frac{s+6}{s-2} \end{bmatrix}$

(1) Diagonaldominanz:

Zeilendominanz: $|F_{ii}(s)| > \sum_{j=1, i \neq j} |F_{ij}(s)|$

1. Zeile: $\left|\frac{s^2+6s+9}{(s-1)^2}\right| \overset{?}{>} \left|\frac{0{,}8}{(s-1)^2}\right|$

$\Rightarrow |s^2+6s+9| \overset{?}{>} 0{,}8$

$|-\omega^2+6j\omega+9| = \sqrt{(6\omega)^2+(9-\omega^2)^2} = \sqrt{36\omega^2+81-18\omega^2+\omega^4}$

$= \sqrt{\omega^4+18\omega^2+81}$

min. bei $\omega=0$: $\lim_{\omega\to 0} \sqrt{\omega^4+18\omega^2+81} = 9 > 0{,}8$ ✓

2. Zeile $\left|\frac{2{,}4}{s-2}\right| \overset{?}{<} \left|\frac{s+6}{s-2}\right| \Rightarrow 2{,}4 \overset{?}{<} |j\omega+6| = \sqrt{\omega^2+36}$

$\Rightarrow$ min bei $\omega=0$: $\lim_{\omega\to 0} \sqrt{\omega^2+36} = 6 > 2{,}4$ ✓

$\Rightarrow$ F ist diagonaldominant $\forall \omega$

Nyquist-SISO für $F_{ii}(s)$ da diag. dom. gegeben

$F_{11}(s) = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)^2} = \frac{(s+3)^2}{(s-1)^2}$ $\quad$ Pole: $s_{1,2} = 1$

$\Delta \arg \det F_{11,soll} = 2\pi \qquad \omega \in [0; \infty[$

$\Delta \arg \det F_{11} = \lim_{\omega\to\infty} [2\arg(j\omega+3) - 2\arg(j\omega-1)]$

$= \lim_{\omega\to\infty} \left[2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{3}\right) - 2\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{-1}\right)\right] = 2\pi = \Delta \arg \det F_{11,soll}$ ✓

$F_{22}(s) = \frac{s+6}{s-2}$ $\quad$ Pol: $s_1 = 2 \Rightarrow \Delta \arg \det F_{22,soll} = \pi \qquad \omega \in [0; \infty[$

$\Delta \arg \det F_{22} = \lim_{\omega\to\infty} [\arg(j\omega+6) - \arg(j\omega-2)]$

$= \lim_{\omega\to\infty} \left[\operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{6}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{-2}\right)\right] = \pi = \Delta \arg \det F_{22,soll}$ ✓

$\Rightarrow$ geschl. RK stabil

$\boxed{4.}$ Direkte Methode von Lyapunov für MIMO-Systeme (L21):

$V(x) = \underline{x}^T P \underline{x}$, $\dot{V}(x) = \underline{x}^T (A^T P + PA) \underline{x}$

- $P \succ 0$ und $A^T P + PA \prec 0$ $\Leftrightarrow$ asy. stabil
- $P \succ 0$ und $A^T P + PA \prec 0$ $\Leftrightarrow$ stabil

überprüfbar mit $A^T P + PA = -Q$ mit $Q \succ 0$

4. $A^T P + PA = -Q$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{11} & 0 \\ 0 & -q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2p_{11} & 4p_{11} - p_{22} \\ 4p_{11} - p_{22} & -4p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{11} & 0 \\ 0 & -q_{22} \end{bmatrix}$$

Vergleiche alle 4 Elemente

$-2p_{11} = -q_{11} \Rightarrow p_{11} = \frac{q_{11}}{2}$

$4p_{11} - p_{22} = 0 \Rightarrow p_{22} = 2q_{11}$

$-4p_{22} = -4 \cdot 2q_{11} = -8q_{11} = -q_{22} \Rightarrow q_{22} = 8q_{11}$

Setze z.B. $q_{11} = 1 \Rightarrow p_{11} = 0{,}5$, $p_{22} = 2$, $q_{22} = 8$

$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, EW: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 8$ $\Rightarrow$ pos. def. $Q \succ 0$

$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, EW: $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 2$ $\Rightarrow$ pos. def $P \succ 0$

$\Rightarrow A^T P + PA = -Q \prec 0$

$\Leftrightarrow$ System ist asymp. stabil