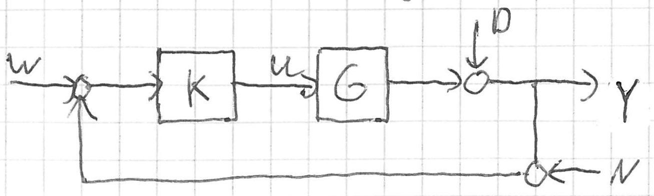
Übung 6

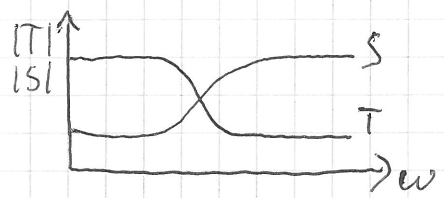


$$Y = \underbrace{(I+GK)^{-1}GK}_{:=T}\,W(s) + \underbrace{(I+GK)^{-1}}_{:=S}\,D(s) - (I+GK)GK\,N(s)$$

$T \hat{=}$ kompl. Sensitivitätsfkt. $\quad S \hat{=}$ Sensitivitätsfkt.

$$S+T = (I+GK)^{-1} + (I+GK)^{-1}GK = I$$

Typische Verläufe:

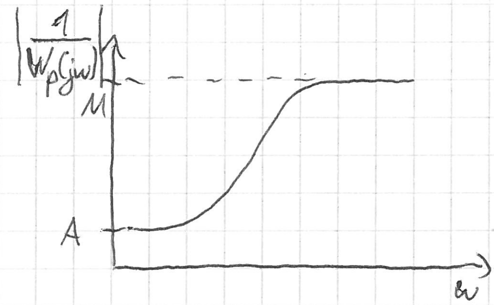


Sensitivitätsbandbreite ω_B bei $|S(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Zum ersten Mal von unten schneidet)

MiMo: $\bar{\sigma}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (max. Singulärwer)

Frequenzperformanz durch Gewichtungen definieren:

z.B. $W_p(s) = \dfrac{\frac{s}{M} + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A}$



Wenn
- $|S|$ beschränkt werden soll $\Rightarrow |S| < \frac{1}{|W_p|}$
- $|T|$ beschränkt werden soll $\Rightarrow |T| < |W_p|$

SISO: $|S(j\omega)| < \frac{1}{|W_p|}$ oder $|W_p(j\omega)\cdot S(j\omega)| < 1 \quad \forall\omega$

$$\Updownarrow$$

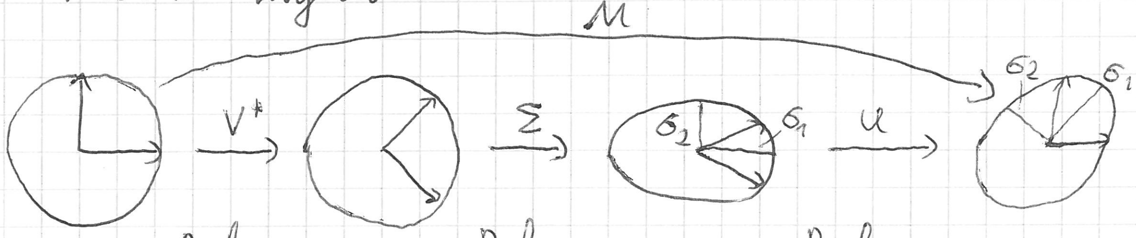
$$\|W_p(j\omega)\cdot S(j\omega)\|_\infty < 1$$

H_∞-Norm $\hat{=}$ größter betragsmäßiger Wert über alle Frequenzen $(\max_\omega |W_p(j\omega)S(j\omega)|)$

MIMO:

$\bar{\sigma}$: größter Singulärwert

$\underline{\sigma}$: kleinster Singulärwert



Drehung Dehnung Drehung

$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$

$\uparrow$ enthält die Singulärwerte σ_i

$\bar{\sigma}(S(j\omega)) < \frac{1}{|W_p(j\omega)|}$ oder $\bar{\sigma}(W_p(j\omega) S(j\omega)) < 1$

$\Leftrightarrow \| W_p(j\omega) S(j\omega) \|_\infty < 1$

$(\max_\omega \bar{\sigma}(W_p(j\omega) S(j\omega)) < 1)$

$\boxed{1.1}$ $G \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 23 \\ 36 \end{bmatrix}$ $\| G \cdot u_1 \|_2 \approx 42{,}72$

$G \cdot u_2 = \begin{bmatrix} -36 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\| G \cdot u_2 \|_2 \approx 36{,}06$

$\boxed{1.2}$ $B = G^T G = \begin{bmatrix} 1825 & -900 \\ -900 & 1300 \end{bmatrix}$ s. Skript 6.2

$EW(B): \det \begin{bmatrix} \lambda - 1825 & -900 \\ -900 & \lambda - 1300 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2500 > \lambda_2 = 625$

$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 50$ max. Verst.

$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 25$ min. Verst.

$EV(B): (\lambda_1 I - B) \begin{bmatrix} \tilde{v}_{1,x} \\ \tilde{v}_{1,y} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} \tilde{v}_{1,x} = \tilde{v}_{1,y} \Rightarrow$ z.B. $\tilde{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\|\tilde{v}_1\|_2} = \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$ Richtung max. Verst.

$(\lambda_2 I - B)\tilde{v}_2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ z.B. $\tilde{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$ Richtung min. Verst.

$\boxed{2.1}$

$$S = (I + G_{ol})^{-1} = (1 + GK)^{-1} = \left(1 + \frac{K_d s + K_p}{s^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{s^2}{s^2 + K_d s + K_p}$$

$$T = 1 - S = \frac{K_d s + K_p}{s^2 + K_d s + K_p}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{|-\omega^2|}{|(K_p - \omega^2) + j K_d \omega|} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(K_p - \omega^2)^2 + K_d^2 \omega^2}}$$

$\boxed{2.2}$

$$Y = TW + SD - TN \qquad D = Z_1, \; N = Z_2$$

$$U = KS(W - D - N)$$

- T klein $\rightarrow$ Rauschunterdrückung
- S klein $\rightarrow$ Störunterdrückung am Ausgang
- T groß $\rightarrow$ gutes Folgeverhalten
- KS klein $\rightarrow$ niedrige Stellgröße

Trade-off wird durch die Frequenzabhängigkeit von T und S erreicht.

$\boxed{2.3}$

$$\frac{\omega_B^2}{\sqrt{(K_p - \omega_B^2)^2 + \omega_B^2 K_d^2}} \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\omega_B^4 = K_p^2 - 2K_p\omega_B^2 + \omega_B^4 + \omega_B^2 K_d^2$$

$$\omega_B^4 + \omega_B^2(2K_p - K_d^2) - K_p^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\omega_B = \underset{\text{keine neg. Frequenz}}{\overset{+}{(-)}} \sqrt{K_d^2 - 2K_p \overset{+}{(-)} \sqrt{(2K_p - K_d^2)^2 + 4K_p^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

keine neg. Frequenz

$$K_d^2 - 2K_p = \sqrt{(K_d^2 - 2K_p)^2} \leq \sqrt{(2K_p - K_d^2)^2 + 4K_p^2}$$

$\boxed{2.4}$

$$|S(j\omega)| = |s| \cdot |s| \cdot \underbrace{\left|\frac{1}{s^2+\frac{\sqrt{2}}{2}s+2}\right|}$$

D-Glieder

PT²-Glied : $\omega_0 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

Diagramms siehe letzte Seite

$2D\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow D = 0{,}25$

$K\omega_0^2 = 1 \Rightarrow K = 0{,}5$

$\boxed{3.1}$

$$S = (1+G_{0e})^{-1} = \left(\frac{s^2+4s+3s^2+4s+4}{s^2+4s}\right)^{-1}$$

$$= \frac{s^2+4s}{4s^2+8s+4} = \frac{s}{4}\,\frac{s+4}{s^2+2s+1} = \frac{s}{4}\,\frac{s+4}{(s+1)^2}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{\omega}{4} \cdot \frac{\sqrt{16+\omega^2}}{1+\omega^2}$$

$\boxed{3.2}$

$$|S| = |s| \cdot \left|\frac{1}{4}s+1\right| \cdot \left|\frac{1}{(s+1)^2}\right|$$

$|s|$: D-Glied, schneidet bei 1

$\left|\frac{1}{4}s+1\right|$: PD-Glied $\rightarrow \omega_D = 4$, $K=1$

siehe letzte Seite

$\left|\frac{1}{(s+1)^2}\right|$: PT²-Glieder $\rightarrow \omega_E = 1$

$K = 1$

$\boxed{3.3}$

$$W_y = \frac{s+\omega_B A}{\frac{s}{M}+\omega_B} = \frac{s+\omega_B\, 0{,}01}{\frac{s}{0{,}4}+\omega_B}$$

$$|W_y(j\,0{,}05)| = \sqrt{\frac{\omega_B^2\, 0{,}01^2+0{,}05^2}{\frac{0{,}05^2}{0{,}4^2}+\omega_B^2}} \overset{!}{=} 0{,}0975$$

$$\Rightarrow \omega_B = \sqrt{\frac{0{,}05^2\left(\frac{0{,}0975^2}{0{,}4^2}-1\right)}{0{,}01^2-0{,}0975^2}} = 0{,}5$$

$$\Rightarrow W_y = \frac{0{,}4s+0{,}002}{s+0{,}2}$$

$\boxed{3.4}$ $\omega \to \infty \Rightarrow |W_y| = 0,4$

$\omega \to 0 \Rightarrow |W_y| = \frac{0,002}{0,2} = 0,01$

W_y ist ein PDT_1 Glied

$\Rightarrow W_s = \frac{0,002}{0,2} \frac{\frac{0,4}{0,002} s + 1}{\frac{1}{0,2} s + 1} \Rightarrow \omega_0 = \frac{0,002}{0,4} = 0,005$

$\omega_E = 0,2$

$\boxed{3.5}$ Nein, da $|S(j\omega)|$ teilweise über $|W_y(j\omega)|$ verläuft

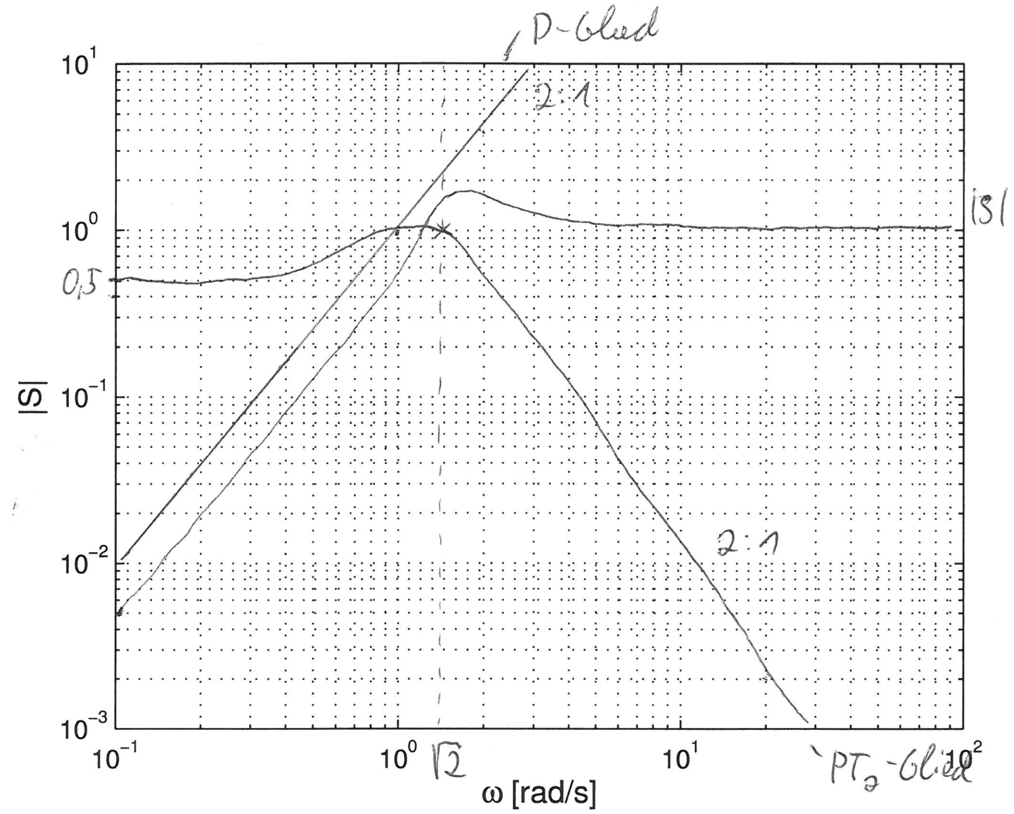


Abbildung 1: zu Aufgabe 2.4

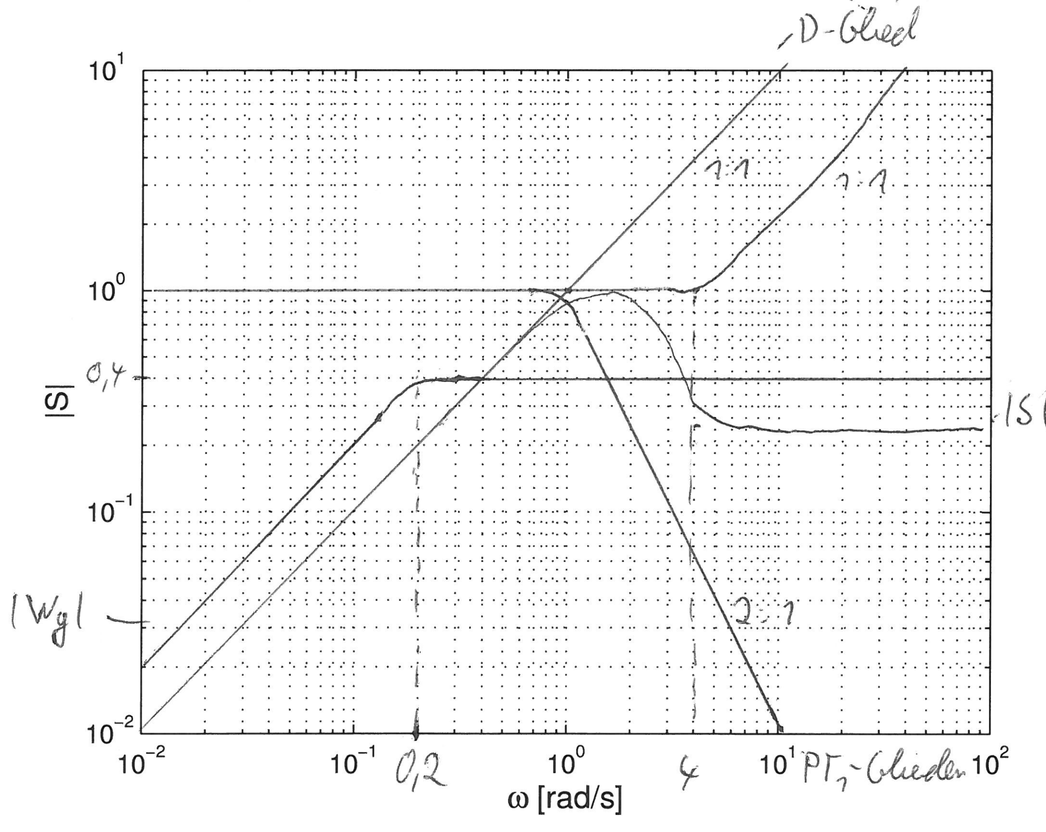


Abbildung 2: zu Aufgabe 3.2