Lehrstuhl für INFORMATIONSTECHNISCHE REGELUNG Prof. Dr.-Ing. Sandra Hirche **Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK** Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss Technische Universität München	**DYNAMISCHE SYSTEME** 3. Übung

1. Aufgabe:

Die pneumatische Federung eines Fahrzeuges stellt ein schwingungsfähiges System mit der Masse m dar (Abb. 1). Der Bewegung des Systems wirkt eine der Geschwindigkeit $\dot{y}$ proportionale Dämpfung $F_d = -D\dot{y}$ entgegen ($D > 0$). Außerdem tritt die Federkraft $F_c = f_{Feder}(y)$ auf, die der Auslenkung entgegenwirkt. Die Federrückstellkraft hat einen nichtlinearen Verlauf (Abb. 2).

Mit dem Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ lässt sich die Dynamik des Systems mit den Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ m\dot{x}_2 &= -Dx_2 - f_{Feder}(x_1) \end{aligned} \tag{1}$$

beschreiben.

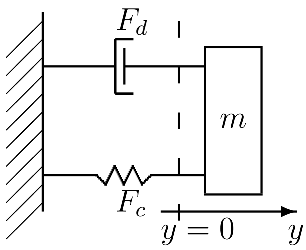

Abbildung 1: Schematische Darstellung der pneumatischen Federung eines Fahrzeuges

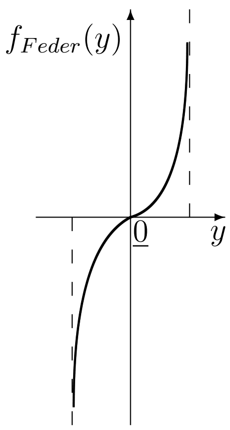

Abbildung 2: Kennlinie der Federrückstellkraft $f_{Feder}(y)$

1.1 Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems (1).

Verwenden Sie für die folgenden Untersuchungen die Lyapunov-Funktion

$$V(\underline{x}) = F(x_1) + \frac{mx_2^2}{2}$$

in der

$$F(x_1) = \int_0^{x_1} f_{Feder}(\xi)d\xi$$

die in der Feder gespeicherte Energie darstellt.

1.2 Untersuchen Sie das System (1) mit Hilfe der direkten Methode nach Lyapunov. Welche Stabilitätsaussage können Sie treffen?

1.3 Untersuchen Sie das System (1) mittels des LaSalle'schen Invarianzprinzips. Welche Stabilitätsaussage ist nun möglich?

2. Aufgabe:

Die Dynamik eines Roboters mit n Gelenken kann durch n Differentialgleichungen

$$M(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = \underline{\tau} \tag{2}$$

beschrieben werden, wobei $\underline{q}$ ein n-dimensionaler Vektor der Gelenkpositionen, $\underline{\tau}$ der Vektor der Eingangsmomente, $\underline{g}$ der Vektor der Gravitationsmomente ist und C die Coriolis- und Zentripetalkräfte wiedergibt; M ist die $n \times n$ Trägheitsmatrix des Roboters, M ist positiv definit.
Für den PD-Regler

$$\underline{\tau} = -K_D\dot{\underline{q}} - K_P\underline{q} + \underline{g}(\underline{q})$$

soll das System mit Hilfe der Lyapunov-Funktion

$$V(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\left(\dot{\underline{q}}^T M\dot{\underline{q}} + \underline{q}^T K_P\underline{q}\right)$$

auf Stabilität untersucht werden.
K_P und K_D sind Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen.

2.1 Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems.

2.2 Welche Bedeutung haben die Terme $\dot{\underline{q}}^T M\dot{\underline{q}}$ und $\underline{q}^T K_P\underline{q}$ in der Lyapunov-Funktion?

2.3 Untersuchen Sie das System mit Hilfe der direkten Methode von Lyapunov auf Stabiltät.

Hinweis: Die zeitliche Änderung der Energie kann mit Hilfe des auf das System wirkenden Moments $\underline{\tau}_{ext}$ beschrieben werden:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\underline{q}}^T\underline{\tau}_{ext}$$

2.4 Untersuchen Sie das System (2) mittels des LaSalle'schen Invarianzprinzips. Welche Stabilitätsaussage ist nun möglich?