Technik Autonomer Systeme: Nichtkooperative Spieltheorie

Dirk Wollherr

Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik
Technische Universität München

Erklärung: Spieltheorie

- Was ist Spieltheorie **nicht**?

Computerspiele

reine Kombinatorik

2

Erklärung: Spieltheorie

- Was ist Spieltheorie dann?

„Die Spieltheorie ist eine mathematische Theorie von Konflikt und Kooperation.“ (Reinhard Selten)

- Analyse strategischer **Interaktion** zwischen mehreren (rationellen) Akteuren
- Modellierung des **Entscheidungsverhaltens** in sozialen Konfliktsituationen

3

Erklärung: Spieltheorie

- **Soziale Konfliktsituationen:**
  Entscheidungssituation mit mehreren Akteuren, die sich mit ihren Entscheidungen **gegenseitig** beeinflussen

  → Abgrenzung zur klassischen Entscheidungstheorie

- **Begriff „Spiel“:**
  - Interaktion zwischen mindestens zwei Personen
  - Ausgang ist davon abhängig, was die anderen tun
  - Jeder hat einen anderen Grad an Zufriedenheit, abhängig vom Ausgang

4

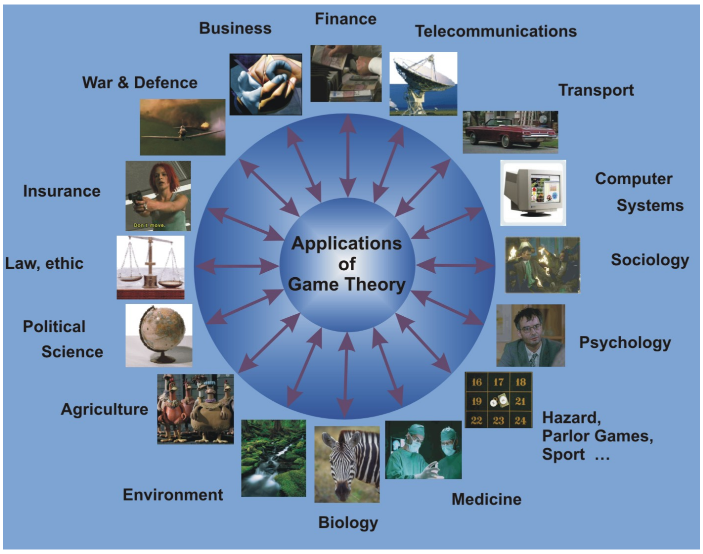
Beispiele [M. Pasche]

- An einer auf ”grün“ springenden Ampel bewegen sich zwei Fußgängergruppen aufeinander zu.
  Wer weicht aus? Und wohin?

- Der BWL-Absolvent wird in seinem ersten Vorstellungsgespräch über seine Gehaltsvorstellung befragt. Nennt er einen zu hohen Betrag, wird er den Job nicht bekommen, nennt er einen zu niedrigen Betrag, wird dies als Signal für die geringe Selbsteinschätzung seiner Leistungsfähigkeit betrachtet. Der Absolvent muss versuchen, die Zahlungsbereitschaft des Arbeitgebers für leistungsfähige Kandidaten korrekt einzuschätzen.

5

Anwendungsgebiete



6

Nobelpreise für spieltheoretische Arbeiten

1978: Simon 1994: Nash, Harsanyi, Selten

1996: Vickrey 2002: Kahneman 2005: Aumann, Schelling

2007: Hurwicz, Maskin Myerson 2012: Roth, Shapleyd

7

8

Gefangenendilemma

- Zwei Täter, eine Straftat, aber keine Zeugen…

- Mögliche Ergebnisse des „Spiels“ (ohne Absprache!):
  - **Beide gestehen:** 8 Jahre Gefängnis für beide
  - **Beide schweigen:** 1 Jahr Gefängnis für beide
  - **Einer schweigt, einer gesteht:** 10 Jahr für schweigen, 0 Jahre für gestehen

9

Gefangenendilemma – Fragen

- Für welche Option sollte ein Spieler sich entscheiden?
- Würde jeder Spieler sich gleich verhalten?
- Welchen Effekt hätte es, die Anzahl an Gefängnisjahren zu ändern?
- Welchen Effekt hätte Kommunikation?
- Welchen Effekt hätte ein Wiederholen des Spiels?

→ Fragen, mit denen sich Spieltheorie beschäftigt

10

Spieltheorie - Hauptkomponenten

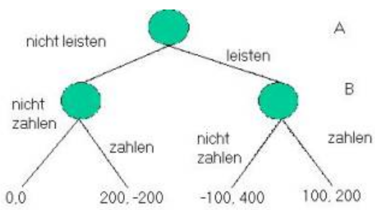
- **Spieler:**
  Entscheidungsträger – Personen, Firmen, Regierungen, Roboter, usw.
- **Strategien:**
  Optionen/Aktionen – schweigen oder aussagen, links oder rechts gehen, Aktien verkaufen oder nicht, usw.
- **Auszahlungsfunktion:**
  Präferenzen der Spieler, Kostenfunktion, Nutzen

Standard Repräsentationsformen

- **Normalform** (Matrixform):
  – Statisches Spiel
  – Spieler entscheiden gleichzeitig

	e	h
E	1, 1	1, 1
H	0, 2	2, 0

- **Extensivform**
  – Dynamisches Spiel (Zeit wird berücksichtig)
  – Spieler entscheiden sequenziell
  – Repräsentation durch Spielbaum
  – Beispiel: Schach, Schafkopf, etc.



Normalform - Komponenten

- Endliches, N-Spieler, Normalform Spiel
  1. Eine endliche Menge von N **Spielern**
     $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_N\}$
  2. Menge von **Strategie-Mengen:** $\mathcal{S} : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_N$, wobei $\mathcal{S}_i$ eine endlich Menge an Strategien für Spieler $P_i \in \mathcal{P}$ ist.
     Strategie Kombination: $s = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathcal{S}$
  3. Für jeden Spieler $P_i \in \mathcal{P}$ eine **Auszahlungsfunktion**
     $J_i : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}$
     → Interaktion, Auszahlung ist abhängig von Strategien von allen Spielern

Normalform - Bimatrix

- **Gefangenendilemma:**
  2-Spieler, Normalform Spiel als Matrix

Verdächtiger B (Spalte)

Verdächtiger A (Zeile)

	S	G
S	-1 | -1	-10 | 0
G	0 | -10	-8 | -8

Strategien:
S = Schweigen
G = Gestehen

→ Kein Nullsummenspiel

Nullsummenspiel

- 2 Spieler
- Summe der Auszahlungen aller Spieler gleich null
- Rein kompetitiv
- Äquivalent: Spiele mit konstanter Summe
- Beispiel: Kopf oder Zahl

		Spieler 2: K	Spieler 2: Z
Spieler 1	K	1 | -1	-1 | 1
Spieler 1	Z	-1 | 1	1 | -1

Strategien:
K = Kopf
Z = Zahl

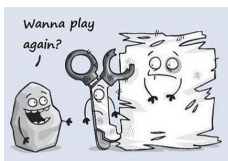
15

Nullsummenspiel - Beispiel

- **Schere – Stein – Papier**

		Spieler 2: Sch	Spieler 2: St	Spieler 2: Pa
Spieler 1	Sch	0 | 0	-1 | 1	1 | -1
Spieler 1	St	1 | -1	0 | 0	-1 | 1
Spieler 1	Pa	-1 | 1	1 | -1	0 | 0

Strategien:
Sch = Schere
St = Stein
Pa = Papier



16

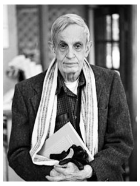
Lösungskonzepte

- Lösung eines Spiels: Kombination von Strategien
  $s^* = (s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_N^*) = (s_i^*, s_{-i}^*)$
  mit Kombination $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N)$
- Lösungskonzepte:
  - Nash Gleichgewicht
  - Pareto Optimalität
  - Minmax bzw. Maxmin Strategie
  - …

17

Nash Gleichgewicht

- Intuitiv:
  Ein Nash Gleichgewicht ist ein Strategie Kombination, bei der jeder Spieler genau eine Strategie wählt, von der aus es für keinen Spieler sinnvoll ist, von seiner gewählten Strategie abzuweichen.



- Definition:
  Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategie Kombination $s^* \in \mathcal{S}$ mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $P_i \in \mathcal{P}$ gilt:

$$J_i(s^*) = J_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq J_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in \mathcal{S}_i$$

- Theorem (Nash):
  Jedes endliche Spiel hat mindestens ein Nash Gleichgewicht

18

Nash Gleichgewicht in Bimatrix Spielen

- Definition:
  Die Strategie Kombination $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ ist ein Nash Gleichgewicht eines Bimatrix Spiels wenn gilt:

$$J_1(s_1^*, s_2^*) = \max\{L(s_1, s_2^*)\} \quad \forall s_1 \in \mathcal{S}_1$$
$$J_2(s_1^*, s_2^*) = \max\{L(s_1^*, s_2)\} \quad \forall s_2 \in \mathcal{S}_2$$

Spieler 1

$$\begin{array}{c|c|c} & \leq & \\ \hline & J_1^* & \\ \hline & \leq & \end{array}$$

und

Spieler 2

$$\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \leq & J_2^* & \leq \\ \hline & & \end{array}$$

höchster Wert in der Spalte

höchster Wert in der Zeile

19

Nash Gleichgewicht im Gefangenendilemma

Verdächtiger B

Verdächtiger A		S	G
	S	-1 | -1	-10 | 0
	G	0 | -10	-8 | -8

Strategien:
S = Schweigen
G = Gestehen

Spieler 1

$$\begin{array}{c|c|c} & \leq & \\ \hline & J_1^* & \\ \hline & \leq & \end{array}$$

und

Spieler 2

$$\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \leq & J_2^* & \leq \\ \hline & & \end{array}$$

20

A Beautiful Mind

- Stimmt Nash's Theorie aus dem Film?
- Vereinfachtes Beispiel:
  2 Männer, 1 Traumfrau (TF), 2 Freundinnen (F1, F2)

- Auszahlung:
  - Alle sprechen die selbe Frau an: 0 Punkte
  - Date mit der Traumfrau: 10 Punkte
  - Date mit einer der Freundinnen: 5 Punkte

A Beautiful Mind

Kommilitone

		TF	F1	F2
	TF	0 | 0	10 | 5	10 | 5
Nash	F1	5 | 10	0 | 0	5 | 5
	F2	5| 10	5| 5	0 | 0

Strategien:
TF = Traumfrau
F1 = Freundin 1
F2 = Freundin 2

→ In jedem der Nash Gleichgewichte ist die TF enthalten

Kampf der Geschlechter

Mann

Frau	F	K
F	2 | 1	0 | 0
K	0 | 0	1 | 2

Strategien:
F = Fußball
K = Konzert

→ Zwei (reine) Nash Gleichgewichte

23

Kopf oder Zahl

Spieler 2

Spieler 1	K	Z
K	1 | -1	-1 | 1
Z	-1 | 1	1 | -1

Strategien:
K = Kopf
Z = Zahl

→ Kein Nash Gleichgewicht?
Was ist mit dem Theorem von Nash?

→ Es existiert kein **reines** Nash Gleichgewicht, aber ein **gemischtes** Gleichgewicht.

24

Reine Strategien

- Rückblick:
  - $S : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_N$: Menge an Strategien im Spiel
  - $\mathcal{S}_i$: eine endlich Menge an Strategien für Spieler $P_i \in \mathcal{P}$
  - $s = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathcal{S}$: Strategie Kombination

- Bisheriges Verständnis:
  Strategie s_i für Spieler P_i entspricht einer bestimmten Aktion
  → **reine** Strategie

Gemischt Strategien

- **Gemischte** Strategie:
  Strategie s_i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle Aktionen $s_i(a^j)$ von Spieler P_i ,
  mit Menge der Aktionen $\mathcal{A}_i = \{a^1, \ldots, a^j, \ldots, a^M\}_i$

- $s_i(a^j)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Aktion a^j gespielt wird unter der Strategie s_i

- Reine Strategie ist ein Spezialfall der gemischten Strategie,
  es gilt: $s_i(a^j) = 1, \quad s_i(a^{-j}) = 0$

26

Beispiel: Gemischt Strategien

- Kopf oder Zahl → mögliche Strategie 50:50

Spieler 2

Spieler 1		K	Z
	K	1 | -1	-1 | 1
	Z	-1 | 1	1 | -1

Strategien:
K = Kopf
Z = Zahl

Strategie Spieler 1:
$s_1(\mathrm{K}, \mathrm{Z}) = (0.5, 0.5)$

Strategie Spieler 2:
$s_2(\mathrm{K}, \mathrm{Z}) = (0.5, 0.5)$

27

Auszahlung bei gemischt Strategien

- Rückblick:
  Für jeden Spieler $P_i \in \mathcal{P}$ eine **Auszahlungsfunktion**
  $J_i : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \cdots \times \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}$
- Reine Strategien: $J_i : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_N \to \mathbb{R}$
- Gemischte Strategien → **erwartete Auszahlung** für Spieler P_i

$$J_i(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} J_i(a) Pr(a|s), \quad s \in \mathcal{S} : \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_N$$
$$a \in \mathcal{A} : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_N$$
$$P(a|s) = \prod_{i=1}^{N} s_i(a_i)$$

28

Berechnung des Nash Gleichgewichts

Spieler 2

Spieler 1		K	Z	
	K	1 | -1	-1 | 1	q
	Z	-1 | 1	1 | -1	1-q
		p	1-p	

$$s_1(K,Z) = (q, 1-q)$$
$$s_2(K,Z) = (p, 1-p)$$

→ Identifiziere die Strategie, die den Gegner **indifferent** zwischen seinen Handlungen macht

$$\left.\begin{aligned} J_1(\mathrm{K}) &= J_1(\mathrm{Z}) \\ 1p + (-1)(1-p) &= (-1)p + 1(1-p) \\ p &= 0.5 \end{aligned}\right\}$$

Strategie Spieler 2
(Spieler 1 äquivalent)

→ Gemischtes Nash Gleichgewicht tatsächlich bei:
$s_1^*(\mathrm{K},\mathrm{Z}) = (0.5, 0.5)$, $s_2^*(\mathrm{K},\mathrm{Z}) = (0.5, 0.5)$

Berechnung des Nash Gleichgewichts

Mann

Frau		F	K	
	F	2 | 1	0 | 0	q
	K	0 | 0	1 | 2	1-q
		p	1-p	

$$\begin{aligned} J_{\text{Frau}}(\mathrm{F}) &= J_{\text{Frau}}(\mathrm{K}) \\ 2p + 0(1-p) &= 0p + 1(1-p) \\ p &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\text{Mann}}(\mathrm{F}) &= J_{\text{Mann}}(\mathrm{K}) \\ 1q + 0(1-q) &= 0q + 2(1-q) \\ q &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

→ Gemischtes Nash Gleichgewicht bei:

$$s^*_{\text{Frau}}(\mathrm{F},\mathrm{K}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad s^*_{\text{Mann}}(\mathrm{F},\mathrm{K}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Beispiel: Elfmeterschießen

- Modellierung als **Bimatrix Spiel**
  - Spieler (Schütze, Torwart)
  - Entscheidung ungefähr gleichzeitig (rechts oder links)
- **Gemischtes Nash Gleichgewicht** sinnvoll
  → Das Verhalten von Schütze/Torwart sollte nicht vorhersehbar sein
- Fragen:
  - Wie gleichen sich Gleichgewichte an die Fähigkeiten der Spieler an?
  - Verhalten sich Spieler in der Praxis so wie in der Theorie?

Beispiel: Elfmeterschießen - Theorie

		Torwart L	Torwart R
Schütze	L	0 | 1	1 | 0
	R	1| 0	0 | 1

L = Links
R = Rechts

- Vereinfachtes Beispiel mit perfektem Schützen und Torwart
- Gemischtes Nash Gleichgewicht bei (vgl. Kopf oder Zahl):
  $s^*_{\mathrm{S}}(\mathrm{L},\mathrm{R}) = (0.5, 0.5),\ \ s^*_{\mathrm{T}}(\mathrm{L},\mathrm{R}) = (0.5, 0.5)$

Beispiel: Elfmeterschießen - Theorie

Torwart

Schütze		L	R	
	L	0 | 1	1 | 0	q
	R	0.75 | 0.25	0 | 1	1-q
		p	1-p	

- Schütze kann Tor verfehlen, wenn er nach rechts schießt

$$J_{\mathrm{S}}(\mathrm{Links}) = J_{\mathrm{S}}(\mathrm{Rechts})$$
$$0p + 1(1-p) = 0.75p + 0(1-p)$$
$$p = \frac{4}{7}$$

$$J_{\mathrm{T}}(\mathrm{Links}) = J_{\mathrm{T}}(\mathrm{Rechts})$$
$$1q + 0.25(1-q) = 0q + 1(1-q)$$
$$q = \frac{3}{7}$$

33

Beispiel: Elfmeterschießen - Theorie

Torwart

Schütze		L	R	
	L	0 | 1	1 | 0	q
	R	0.75 | 0.25	0 | 1	1-q
		p	1-p	

- Gemischtes Nash Gleichgewicht bei:

$$s^*_{\mathrm{S}}(\mathrm{L},\mathrm{R}) = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right),\ s^*_{\mathrm{T}}(\mathrm{L},\mathrm{R}) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

- Erwartete Auszahlung:

$$J_{\mathrm{S}}(s^*) = \frac{3}{7}\ ,\ \ J_{\mathrm{T}}(s^*) = \frac{4}{7}$$

34

Beispiel: Elfmeterschießen - Praxis

- Ignacio Palacios-Heurta, „Professionals Play Minimax“, *Review of Economic Studies*, Vol. 70, pp. 395-415, 2003.
- 1475 Elfmeter-Schüsse aus FIFA Spielen
- Palacios-Heurtas Optionen:
  - Rechts, Links, Mitte
  - Rechter oder Linker Fuß des Schützens
  - → Vereinfachung: nur Links/Rechts, Fuß ignorieren

35

Beispiel: Elfmeterschießen - Praxis

		Torwart L	Torwart R	
Schütze	L	0.58 | 0.42	0.95 | 0.05	q
	R	0.93 | 0.07	0.70 | 0.30	1-q
		p	1-p	

- Gemischtes Nash Gleichgewicht bei:
  $p = 0.42\,,\;\; q = 0.38$
  $s^*_{\mathrm{S}}(\mathrm{L},\mathrm{R}) = (0.38, 0.62),\;\; s^*_{\mathrm{T}}(\mathrm{L},\mathrm{R}) = (0.42, 0.58)$
- Erwartete Auszahlung:
  $J_{\mathrm{S}}(s^*) = 0.80,\;\; J_{\mathrm{T}}(s^*) = 0.20$

36

Beispiel: Elfmeterschießen - Praxis

		Torwart L	Torwart R	
Schütze	L	0.58 | 0.42	0.95 | 0.05	q
	R	0.93 | 0.07	0.70 | 0.30	1-q
		p	1-p	

Spieler	%	Links	Rechts
Schütze	Nash	0,38	0,62
	Praxis	0,40	0,60
Torwart	Nash	0,42	0,58
	Praxis	0,42	0,58

37