Lehrstuhl für INFORMATIONSTECHNISCHE REGELUNG Prof. Dr.-Ing. Sandra Hirche **Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK** Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss Technische Universität München	**DYNAMISCHE SYSTEME** Kurzlösung zur 6. Übung

1. Aufgabe:

1.1 Ruhelage: $\underline{\dot{x}} = 0$
ungeregelt: $u = 0$

$$x_{1,RL} = c$$
$$x_{2,RL} = 0$$

1.2 $z_1 = x_1 - c$
$z_2 = x_2$ Koordinatentransformation

$$\Longrightarrow \dot{z}_1 = -x_1 + c - ux_2 = -z_1 - uz_2$$
$$\dot{z}_2 = -z_2 + u(z_1 + c)$$
$$y = z_2$$

1.3 $\dot{y} = \dot{z}_2 = -z_2 + u(z_1 + c)$

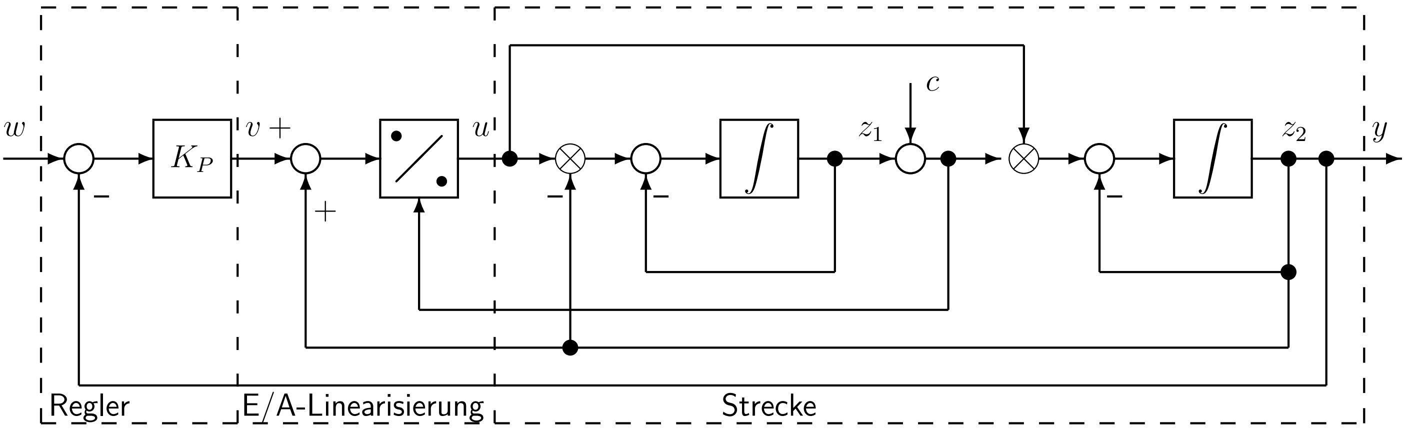
$v := \dot{y}$ Pseudostellgröße

$u = \dfrac{v + z_2}{z_1 + c}$ gültig für alle $z_1 + c \neq 0$

1.4 Relativer Grad $r = 1$

Die erste Ableitung des Ausgangs kann direkt beeinflusst werden.
Ausgangstrajektorien sind mindestens stetig.

1.5



1.6 $\dot{z}_1 = -z_1 - \dfrac{v + z_2}{z_1 + c} z_2$ interne Dynamik

$\dot{z}_2 = v$ lineares Teilsystem

$y = z_2$

1.7 $v = K_P(w - y)$

2.Aufgabe:

$$[\underline{f},\underline{g}] = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{g}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\sin(2x_1) & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{f} - \begin{bmatrix} -2+\cos x_1 & a \\ x_2 \sin x_1 & -\cos x_1 \end{bmatrix} \cdot \underline{g}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sin(2x_1)(-2x_1 + ax_2 + \sin x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a\cos(2x_1) \\ -\cos x_1 \cos(2x_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a\cos(2x_1) \\ (-2\sin(2x_1))\,(-2x_1 + ax_2 + \sin x_1) + \cos x_1 \cos(2x_1) \end{bmatrix}$$

3.Aufgabe:

3.1 $\underline{x} = [q_1 \quad \dot q_1 \quad q_2 \quad \dot q_2]^T$

$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x})u$

$$\underline{f}(\underline{x}) = [x_2 \qquad -\tfrac{MgL}{I}\sin x_1 - \tfrac{k}{I}(x_1 - x_3) \qquad x_4 \qquad \tfrac{k}{J}(x_1 - x_3)]^T$$

$$\underline{g}(\underline{x}) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{J}]^T$$

3.2 $\underline{S} = [\underline{g} \quad \mathrm{ad}_{\underline{f}}\underline{g} \quad \mathrm{ad}^2_{\underline{f}}\underline{g} \quad \mathrm{ad}^3_{\underline{f}}\underline{g}]$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{Mgl}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{ad}_{\underline{f}}\underline{g} = [\underline{f},\underline{g}] = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\underline{g} = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{ad}^2_{\underline{f}}\underline{g} = [\underline{f},[\underline{f},\underline{g}]] = \frac{\partial[\underline{f},\underline{g}]}{\partial \underline{x}}\underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}[\underline{f},\underline{g}] = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{JI} \\ 0 \\ -\frac{k}{J^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{ad}^3_{\underline{f}}\underline{g} = [\underline{f},\mathrm{ad}^2_{\underline{f}}\underline{g}] = \frac{\partial \mathrm{ad}^2_{\underline{f}}\underline{g}}{\partial \underline{x}}\underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\mathrm{ad}^3_{\underline{f}}\underline{g} = 0 + \begin{bmatrix} -\frac{k}{JI} \\ 0 \\ \frac{k}{J^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $S(\underline{x})$ hat für $k > 0$ und $|J|,\ |I| < \infty$ vollen Rang.

$\Longrightarrow$ Das nichtlineare System ist für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ lokal steuerbar (erreichbar).

3.3 $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{x}}\,\underline{g}(\underline{x}) = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \end{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} = 0$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{x}}\,\mathrm{ad}_{\underline{f}}\underline{g}(\underline{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{x}}\,\mathrm{ad}^2_{\underline{f}}\underline{g}(\underline{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\,\frac{k}{JI} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4}\,\frac{k}{J^2} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \underline{x}}\,\mathrm{ad}^3_{\underline{f}}\underline{g}(\underline{x}) \neq 0 \quad \Longrightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0$$

Ansatz:

$\varphi_1 = x_1$

$$\underline{\varphi} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ -\frac{MgL}{I}\cos(x_1)x_2 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ -\frac{MgL}{I}\cos(x_1)x_2 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \\ a(\underline{x}) + b(\underline{x})u \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow a(\underline{x}) = \tfrac{MgL}{I}\sin x_1 \left(x_2^2 + \tfrac{MgL}{I}\cos x_1 + \tfrac{k}{I}\right) + \tfrac{k}{I}(x_1 - x_3)\left(\tfrac{MgL}{I}\cos x_1 + \tfrac{k}{I} + \tfrac{k}{J}\right)$$

$$b(\underline{x}) = \frac{k}{IJ}$$

$$u = \frac{v - a(\underline{x})}{b(\underline{x})}$$