Advanced Robot Perception

Fortgeschrittene Konzepte der Wahrnehmung für Robotersysteme

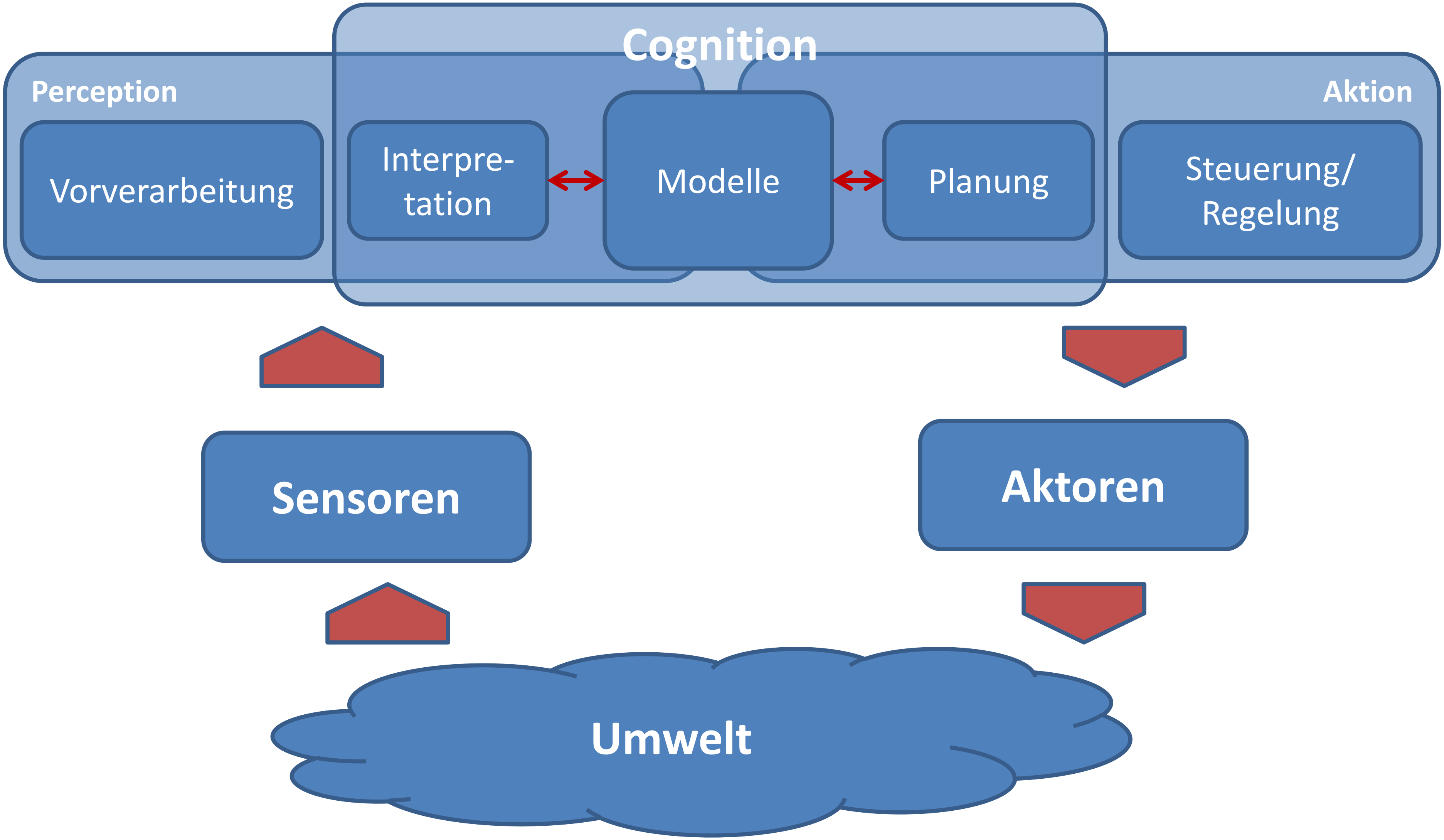
Georg von Wichert, Siemens Corporate Technology

Wo stehen wir jetzt?

- Bisher: Voraussetzungen und Tools
  - Sensortypen
  - Bildverarbeitung
  - Mustererkennung
  - Algorithmenklassiker
    - 3D-Daten: ICP, kd-Trees, Clustering, …
    - Bild-Daten: Local features mit SIFT

- Ab jetzt: Wahrnehmung

The Perception-Cognition-Action-Loop



Cognition

Perception

Aktion

Vorverarbeitung

Interpre-
tation

Modelle

Planung

Steuerung/
Regelung

Sensoren

Aktoren

Umwelt

Wahrnehmung für Roboter

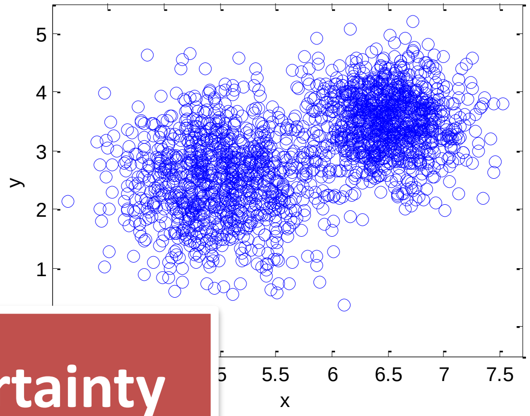
Bereitstellung eines konsistenten „Bildes“ der Umwelt als Basis für die Steuerung

- für zielgerichtete Handlungen
  - Bewegungen
  - Manipulation
  - Ggf. Interaktion mit Menschen und anderen Maschinen
- für zielgerichtete (aktive) Wahrnehmung
  - Einsatz mehrerer Sensoren

Schwierigkeiten und Probleme

- Komplexität
  - Nahezu undendlich-dimensionaler Zustandsraum

- Mehrdeutigkeiten



- Messfehler

Unsicherheit / Uncertainty

Unsicherheit in realen Umgebungen

- Unsicherheit ist das dominante Problem für intelligente Systeme in realen Umgebungen
- Unsicherheit hat viele Ursachen
  - Ungenauigkeiten und Beschränkungen der Sensoren
  - Unbeobachtete Umgebungsdynamik
  - Modellierungsfehler, teilweise als Folge vereinfachender Annahmen und Approximationen
  - teilweise tatsächlich zufällige Effekte

- Unsicherheit ist nicht vermeidbar

Unsicherheit in realen Umgebungen

- Unsicherheit muss explizit repräsentiert und vom System berücksichtigt werden
- Kenntnis der Unsicherheit ist erforderlich, um
  - Information zu bewerten und zu gewichten, z.B. für die Fusion mehrerer verschiedener Sensoren

Explizite Repräsentation der Unsicherheit

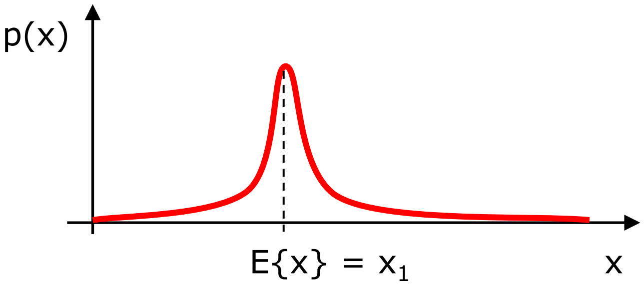
Das System muss wissen, **was es weiß und wie genau** diesen Wissen ist

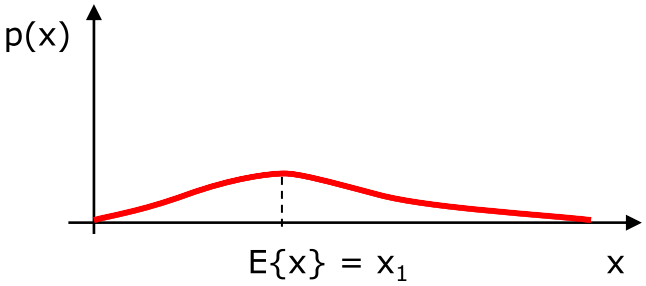
- **Probabilistische** Ansätze
  - sind seit Jahrzehnten erfolgreich, u.a. bei der Mustererkennung
  - repräsentieren das **Wissen in der Form von Wahrscheinlichkeitsdichten**

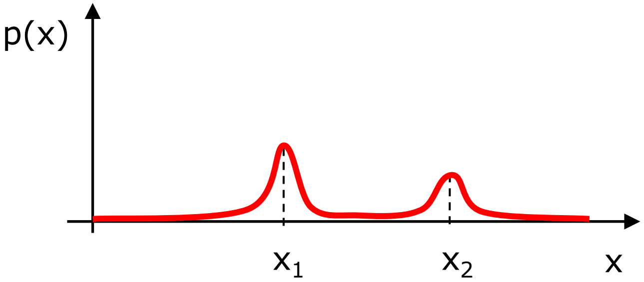
Explizite Repräsentation der Unsicherheit

- Beispiel: Welchen Wert hat die Variable x ?
  - repräsentiert als Dichtefunktion p(x)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

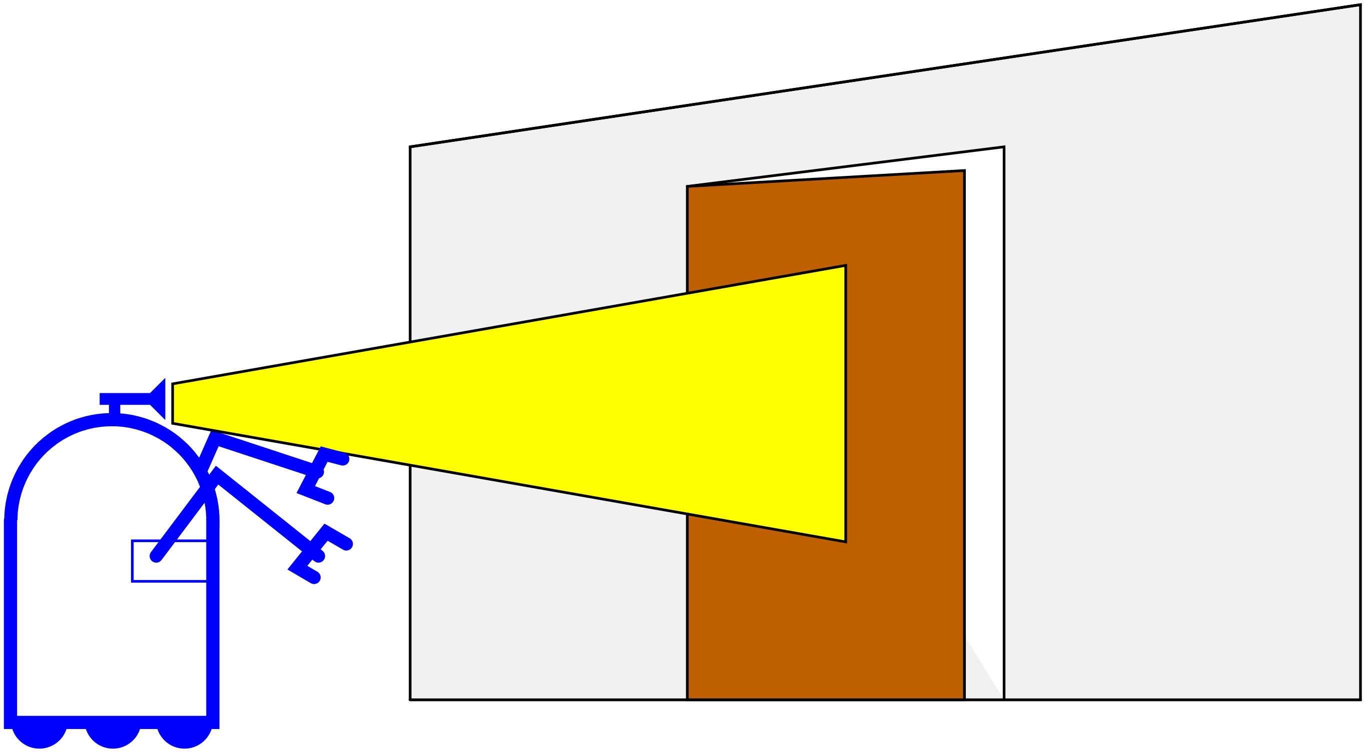






Einfaches Beispiel zur Zustandschätzung

- Angenommen, ein Roboter macht eine Messung *z*
- Was ist *P(offen|z)*?



Kausale und diagnostische Modelle

- *P(offen|z)* ist diagnostisch.
- *P(z|offen)* ist kausal.
- Meist ist kausales Wissen einfacher zugänglich.
- Der Satz von Bayes erlaubt kausales Wissen zu nutzen:

Auswertung (Zählen) von Versuchsmessungen

$$P(offen \mid z) = \frac{P(z \mid offen)P(offen)}{P(z)}$$

Beispiel

Kausales Wissen: Wenn die Tür offen ist, machen wir in 60% der Fälle die Messung *z*

- $P(z|offen) = 0.6$ $P(z|\neg offen) = 0.3$
- $P(offen) = P(\neg offen) = 0.5$

$$P(offen \mid z) = \frac{P(z \mid offen)P(offen)}{P(z \mid offen)\,p(offen) + P(z \mid \neg offen)\,p(\neg offen)}$$

$$P(offen \mid z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{2}{3} = 0.67$$

- *z* vergrößert die Wahrscheinlichkeit, dass die Tür offen ist.

Fusion zuätzlicher Messungen

- Angenommen, der Roboter macht eine Messung z_2.
- Wie können wir diese neue Information integrieren?
- d.h. wie können wir $P(x | z_1, \ldots, z_n)$ schätzen?

Rekursives Bayes’sches Update

$$P(x \mid z_1,\ldots,z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1,\ldots,z_{n-1})\, P(x \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}$$

Markov-Annahme:

z_n ist unabhängig von $z_1,\ldots,z_{n-1}$ wenn wir *x kennen.*

$$P(x \mid z_1,\ldots,z_n) = \frac{P(z_n \mid x)\, P(x \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}$$

$$= \eta\, P(z_n \mid x)\, P(x \mid z_1,\ldots,z_{n-1})$$

$$= \eta_{1\ldots n} \prod_{i=1\ldots n} P(z_i \mid x)\, P(x)$$

Beispiel: Zweite Messung

- $P(z_2|offen) = 0.5$ $P(z_2|\neg offen) = 0.6$
- $P(offen|z_1)=2/3$

$$P(offen \mid z_2, z_1) = \frac{P(z_2 \mid offen)\, P(offen \mid z_1)}{P(z_2 \mid offen)\, P(offen \mid z_1) + P(z_2 \mid \neg offen)\, P(\neg offen \mid z_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

- Messung z_2 senkt die Wahrscheinlichkeit, dass die Tür offen ist.
- Das Wissen über den Türzustand wird „verbessert“!

Dynamische Umgebungen

- In der Regel ist die Umgebung **dynamisch**, d.h. sie ändert sich mit der Zeit

- Gründe sind
  - Handlungen/Aktionen des Roboters selbst,
  - Handlungen/Aktionen anderer in derselben Umgebung,
  - Dynamische Prozesse und der Lauf der Zeit

- Wie können wir solche Veränderungen berücksichtigen?

- Problem:
  - Handlungen/Aktionen werden niemals exakt ausgeführt
  - Dynamische Modelle sind meistens nicht exakt
  - Im Gegensatz zu Messungen, vergrößert Dynamik die Unsicherheit.

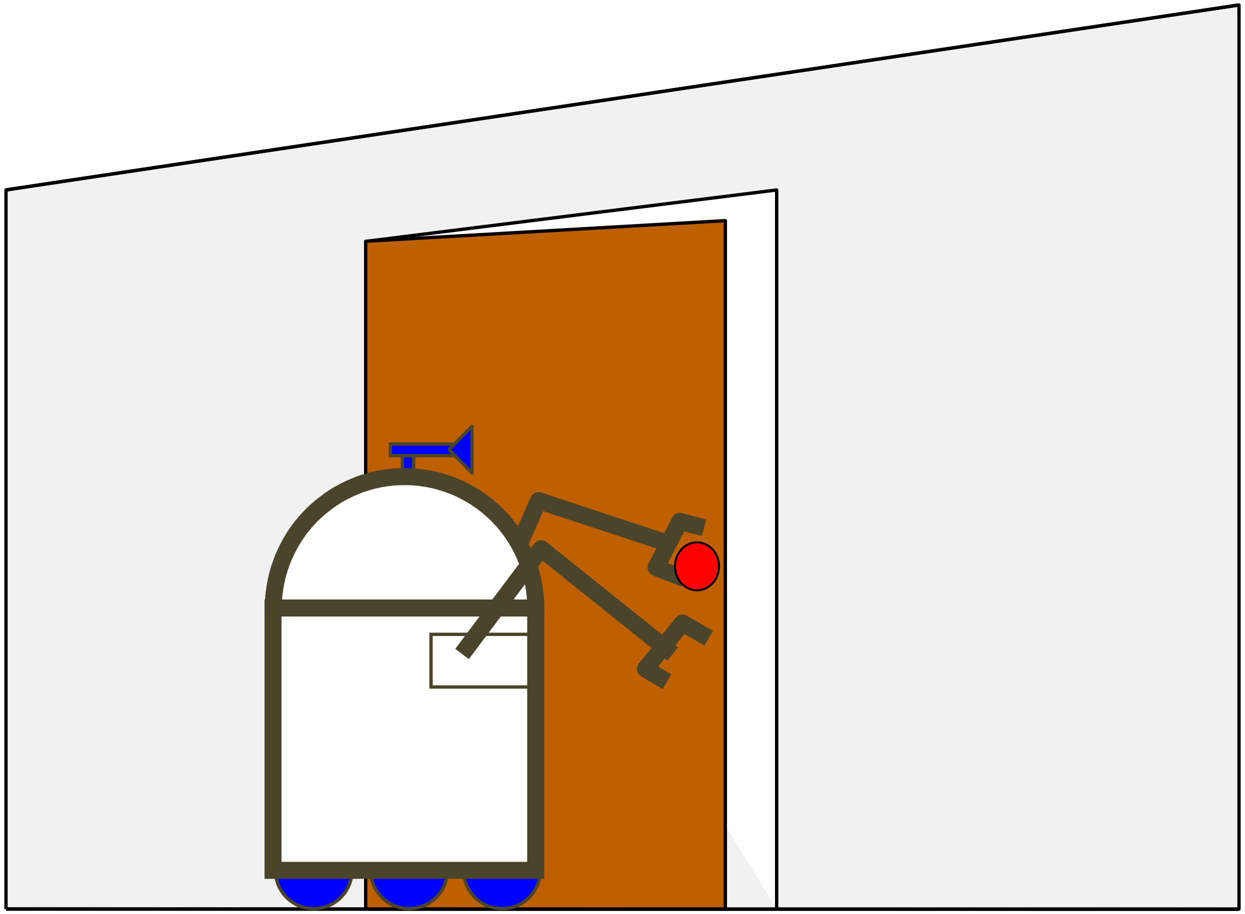
Modellierung der Dynamik

- Um die Auswirkungen eine Handlung *u* auf den aktuellen “belief” zu repräsentieren, nutzen wir die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(x|u,x')$$

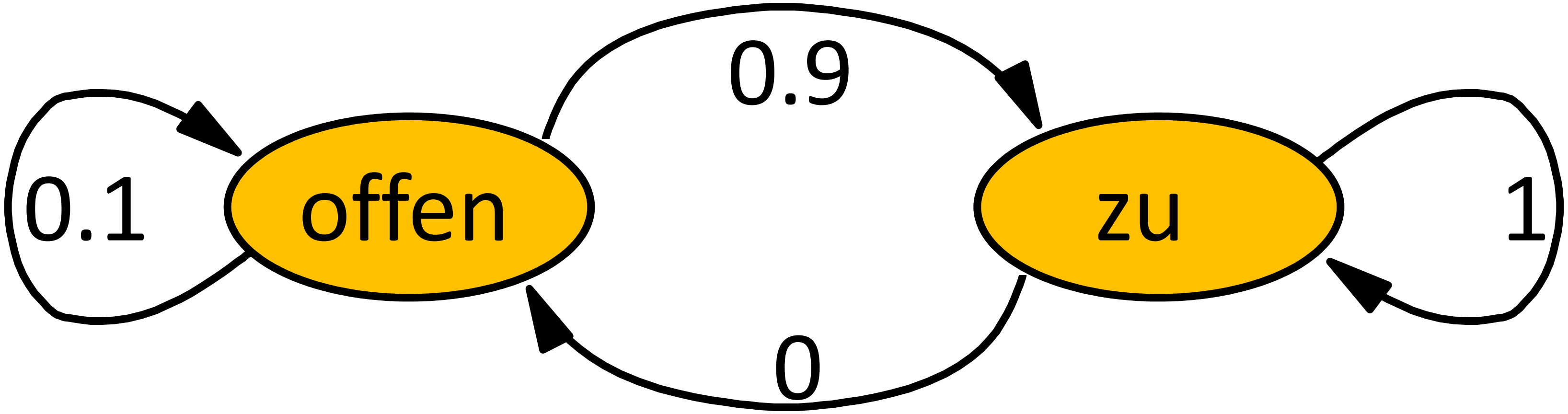
- Dieser Ausdruck spezifiziert die Wahrscheinlichkeit , dass die Aktion *u* den Umweltzustand von *x’* zu *x* verändert
- Dies beinhaltet auch die spontane (d.h. ohne Aktion) Veränderungen des Zustands, also die Dynamik des zugrunde liegenden Prozesses

Beispiel: Schließen der Tür



Zustandsübergangsmodell

$P(x|u,x')$ für u = "schließe Tür":



Wenn die Tür offen ist, ist die Aktion "schließe Tür" in 90% aller Fälle erfolgreich.

“Integrieren” ;-) der Dynamik in den Belief

Kontinuierlicher Fall:

$$P(x|u) = \int P(x|u,x')P(x')dx'$$

Diskreter Fall:

$$P(x|u) = \sum P(x|u,x')P(x')$$

Beispiel: Wir führen “schließe Tür” aus

$$
\begin{aligned}
P(closed \mid u) &= \sum P(closed \mid u, x')P(x') \\
&= P(closed \mid u, open)P(open) \\
&\quad + P(closed \mid u, closed)P(closed) \\
&= \frac{9}{10} * \frac{5}{8} + \frac{1}{1} * \frac{3}{8} = \frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

Was wissen wir hinterher über den Zustand der Tür?

$$
\begin{aligned}
P(open \mid u) &= \sum P(open \mid u, x')P(x') \\
&= P(open \mid u, open)P(open) \\
&\quad + P(open \mid u, closed)P(closed) \\
&= \frac{1}{10} * \frac{5}{8} + \frac{0}{1} * \frac{3}{8} = \frac{1}{16} \\
&= 1 - P(closed \mid u)
\end{aligned}
$$

Bayes Filter: *Das* Framework

- **Gegeben:**
  - Datenstrom mit Beobachtungen *z* und Aktionen *u:*

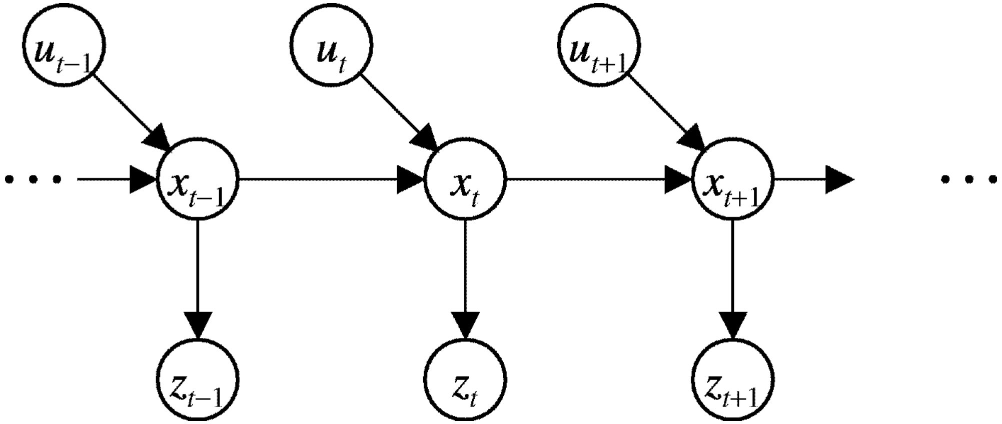
$$d_t = \{u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t\}$$

  - Sensormodell *P(z|x).*
  - Dynamikmodell *P(x|u,x').*
  - Vorwissen bezgl. des Zustands *x* als Apriori-Wahrscheinlichkeit (engl. prior) *P(x).*

- **Gesucht:**
  - Schätzung des Zustands *x* eines dynamischen Systems.
  - Die Aposteriori-Wahrscheinlichkeit (engl. posterior) nennt man den "belief":

$$Bel(x_t) = P(x_t \mid u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

Markov Annahme



$$p(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(z_t \mid x_t)$$
$$p(x_t \mid x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$

Zugrunde liegende Anahmen

- Statistisch unabhängige Störungen / Fehler / Rauschen
- Keine systematischen Modellfehler: z.B. nur mittelwertfreies Rauschen

Bayes Filter: Die Herleitung

z = Beobachtung
u = Handlung / Aktion
x = Zustand

$$\boxed{Bel(x_t)} = P(x_t \mid u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

Bayes

$$= \eta \; P(z_t \mid x_t, u_1, z_1, \ldots, u_t) \; P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)$$

Markov

$$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \; P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)$$

Total prob.

$$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1}) \; P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, u_t) \; dx_{t-1}$$

Markov

$$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \; P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, u_t) \; dx_{t-1}$$

Markov

$$= \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \, P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, z_{t-1}) \; dx_{t-1}$$

$$\boxed{= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \; Bel(x_{t-1}) \; dx_{t-1}}$$

$$Bel(x_t) = \underbrace{\eta\ P(z_t \mid x_t)}_{\text{Korrektur/ Mess-Update}} \underbrace{\int P(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ Bel(x_{t-1})\ dx_{t-1}}_{\text{Prädiktion / Zeit-Update}}$$

```
Algorithmus Bayes_filter( Bel(x),d ):
$\eta$=0
Falls d eine Beobachtung z ist then
    Für alle x berechne   $Bel'(x) = P(z \mid x) Bel(x)$
                          $\eta = \eta + Bel'(x)$

    Für alle x berechne   $Bel'(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$

Sonst, falls d eine action u ist (oder falls einfach nur Zeit vergangen ist) dann
    Für alle x berechne   $Bel'(x) = \int P(x \mid u, x')\ Bel(x')\ dx'$

Return Bel'(x)
```

Bayesfilterung ist die Basis!

$$Bel(x_t) = \underbrace{\eta\ P(z_t \mid x_t)}_{\text{Korrektur/ Mess-Update}} \underbrace{\int P(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ Bel(x_{t-1})\ dx_{t-1}}_{\text{Prädiktion / Zeit-Update}}$$

- Kalman-Filter
- Partikelfilter
- Hidden Markov Modelle
- Dynamische Bayes’sche Netze
- Partially Observable Markov Decision Processes (POMDPs)

Zwischen-Fazit

- Der Bayes’sche Satz erlaubt es uns, Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. Dichtefunktionen zu berechnen, die anderweitig nur schwer zu beschreiben sind.
- Mit der Markov-Annahme, kann **rekursives Bayes’sches Schließen** dazu dienen effizent Informationen zu akkumulieren.
- Bayes’sche Filter sind ein probabilistischer Ansatz zur Schätzung des Zustands dynamischer Systeme.
- …und zur **systematischen Datenfusion!**

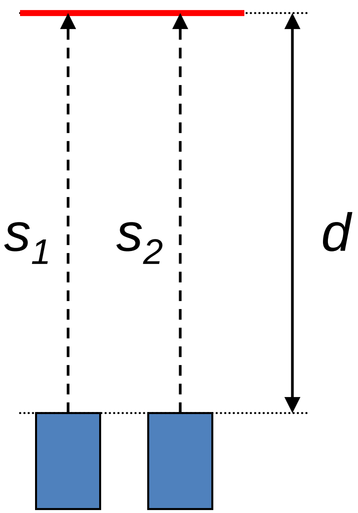
Datenfusion, was ist das?

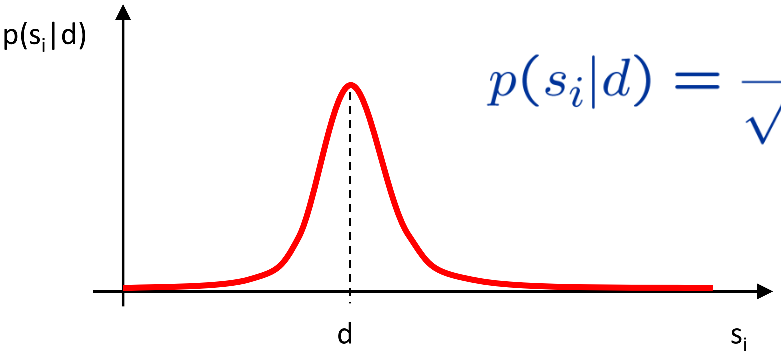
- Bisher:
  - Zeitliche Folgen von Messungen desselben Sensors (sowie Dynamik und zeitliche Folgen von Aktionen)
  - Schrittweise Integration in unser Wissen, den „belief“ P(x)
- Genauso gut möglich:
  - Messungen verschiedener Sensoren zum selben Zeitpunkt
  - Unterschiedliche Sensoren können sich ergänzen, Messungen werden aber nur bedingt zueinander passen und können sich sogar widersprechen

Grundzüge der probabilistischen Datenfusion

Beispiel Datenfusion (einfach)

- Zwei Sensoren messen den Abstand d zu einer Wand
- Unterschiedliche Genauigkeit





- Annahme: Gauß´sche Störung der Messung

$$s_i = d + \nu_i$$

ν_i : normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert = 0 und Varianz σ_i^2

- **Sensormodell**:

$$p(s_i|d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(s_i-d)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Kausale und diagnostische Modelle

- $p(d|s)$ ist diagnostisch.
- $p(s|d)$ ist kausal.

Auswertung (Zählen)
von Versuchsmessungen

- Meist sind kausale Modelle einfacher zu bekommen.
- Satz von Bayes erlaubt Nutzung kausaler Modelle:

$$p(d|s) = \frac{p(s|d)\ p(d)}{p(s)}$$

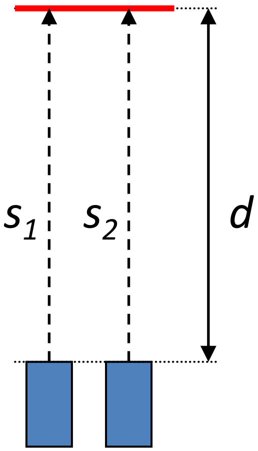
Grundzüge der probabilistischen Datenfusion

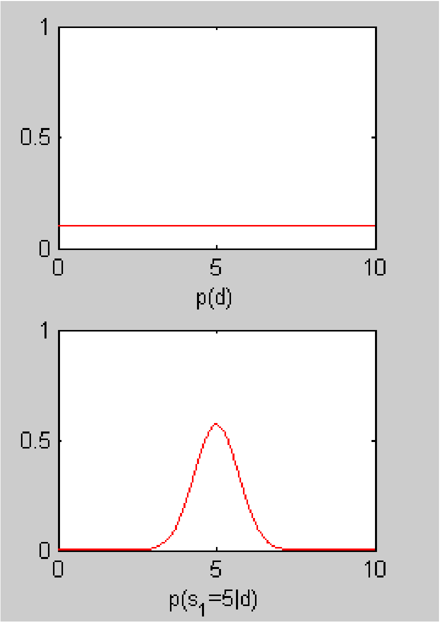
- Gesucht: p(d|s_i)

- Satz von Bayes

$$p(d|s) = \frac{p(s|d)\,p(d)}{p(s)} = \frac{p(s|d)\,p(d)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(s|d)\,p(d)\,dd}$$

$$= \alpha\,p(s|d)\,p(d)$$





$$p(s_i|d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}}\,e^{-\frac{(s_i-d)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Grundzüge der probabilistischen Datenfusion

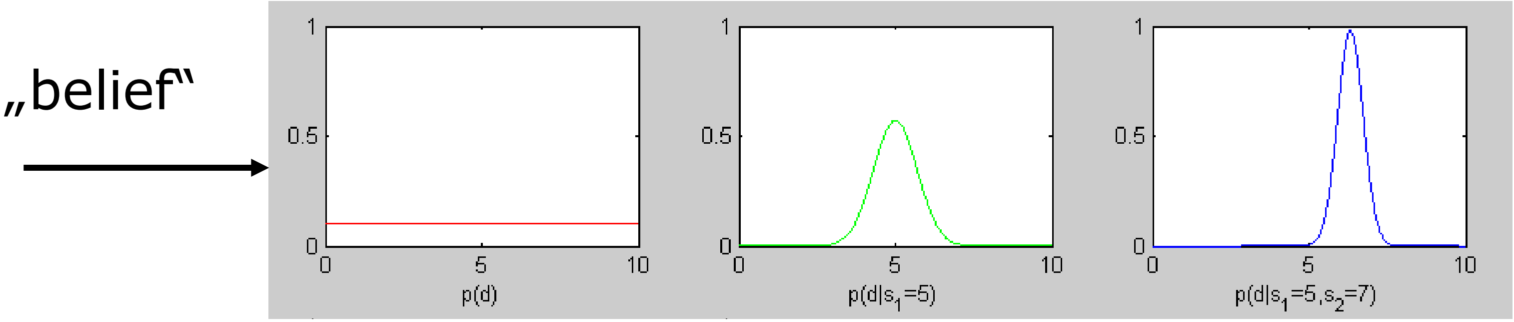
- Gesucht: $p(d|s_i)$

$$p(d|s) = \frac{p(s|d)\,p(d)}{p(s)}$$

- Satz von Bayes

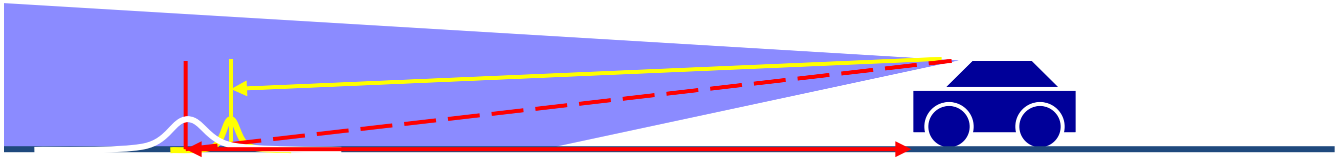
$$= \alpha\, p(s|d)\, p(d)$$

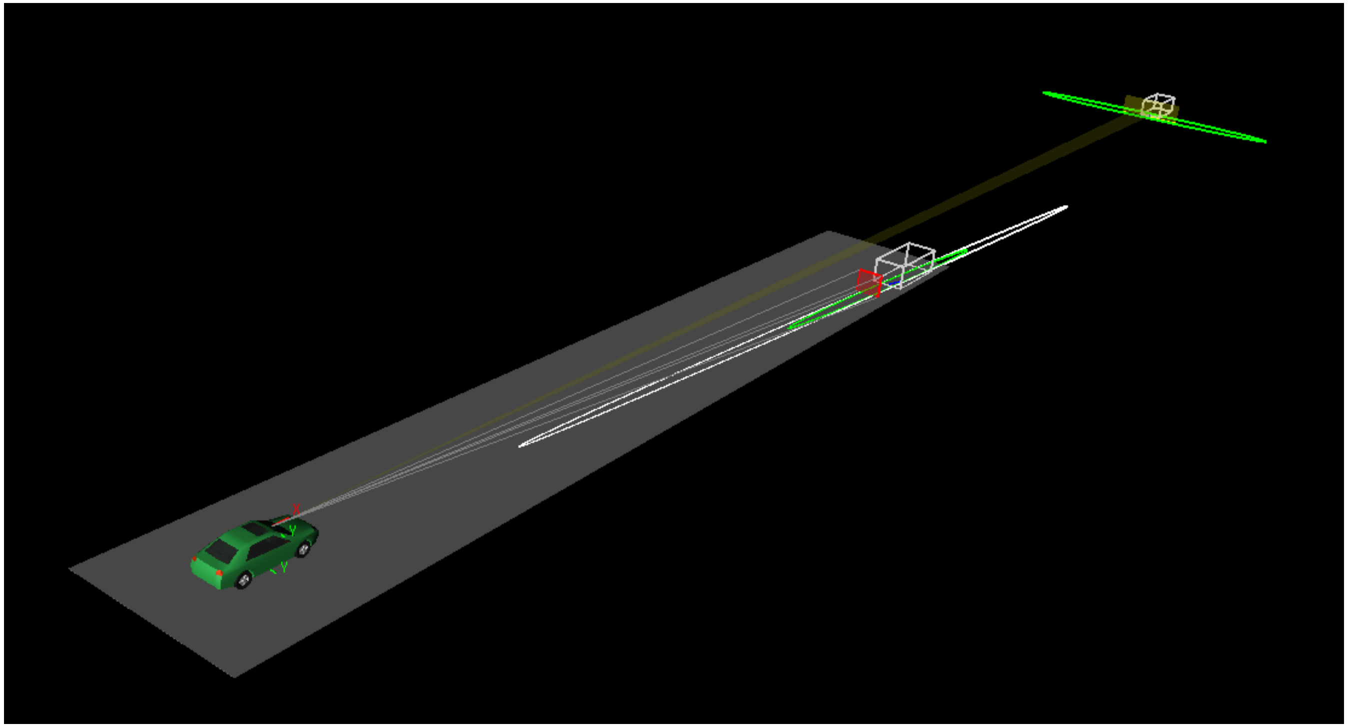
„belief"



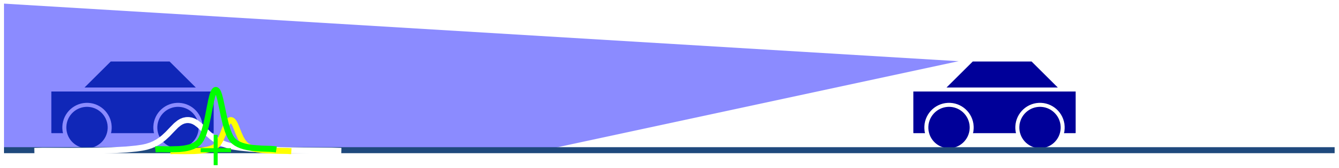
- Fortschreibung des aktuellen Wissens („belief") über die Zeit ohne, dass eine Entscheidung getroffen wird!
  - Unimodale Verteilungen: Schätzung durch Bildung des Erwartungswertes

Anwendung: Fahrumgebungserfassung





Anwendung: Fahrumgebungserfassung



- Sensormodell: $p(s_i|d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(s_i-d)^2}{2\sigma_i^2}}$

- Gesucht: $p(d|s_1, s_2)$

- Satz von Bayes: $p(d|s_1, s_2) = \frac{p(s_1, s_2|d)\; p(d)}{p(s_1, s_2)} = \frac{p(s_1|d)\; p(s_2|d)\; p(d)}{p(s_1)\; p(s_1)}$

- Starke Vereinfachung!
  - Umwelt ist dynamisch

Zur Erinnerung: Bayes Filter

- Prädiktion / Zeit-Update

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

- Korrektur / Mess-Update

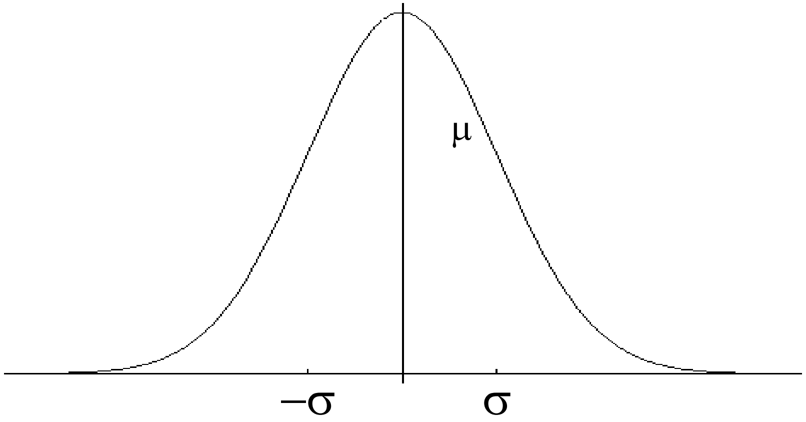
$$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$$

Gauß’sche Normalverteilung (engl.: Gaussian)

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2):$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

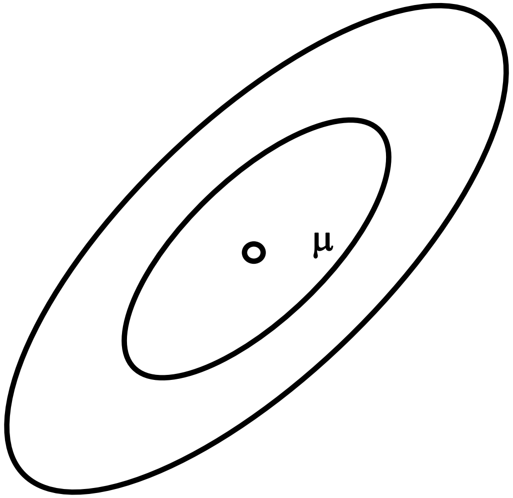
1D (engl. univariate): *x* ist ein Skalar



$$p(\mathbf{x}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}):$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

nD (engl. multivariate): *x* ist ein Vektor



Eigenschaften der Normalverteilung

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu,\sigma^2) \\ Y = aX + b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}) \\ X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2}) \end{array}\right\} \Rightarrow p(X_1)\cdot p(X_2) \sim N\left(\frac{\sigma_2^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}\mu_1 + \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}\mu_2, \quad \frac{1}{\sigma_1^{\ -2}+\sigma_2^{\ -2}} \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu,\Sigma) \\ Y = AX + B \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1,\Sigma_1) \\ X_2 \sim N(\mu_2,\Sigma_2) \end{array}\right\} \Rightarrow p(X_1)\cdot p(X_2) \sim N\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1+\Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1+\Sigma_2}\mu_2, \quad \frac{1}{\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}} \right)$$

Wir bleiben in der Gauß’schen Welt, solange wir nur linerare Transformationen durchführen!

Diskreter Kalman-Filter

- Schätzt den Zustand x eines zeitdiskreten gesteuerten Prozesses, der durch die folgende lineare stochastische Differenzengleichung beschrieben wird

  $$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

  wobei

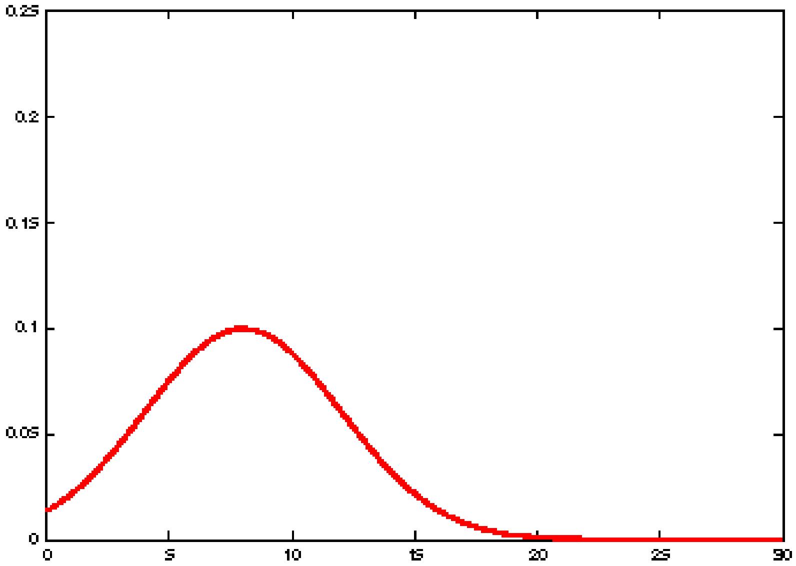
  $$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

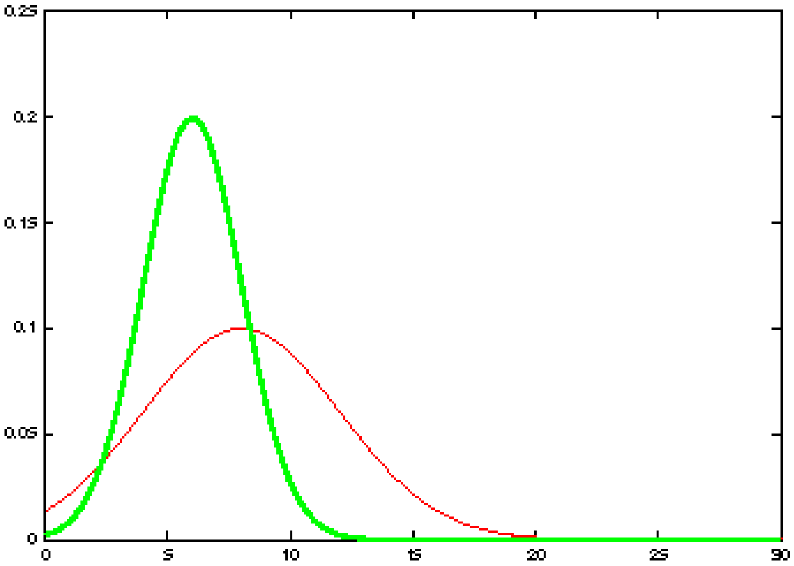
  eine indirekte Messung des Zustands ist

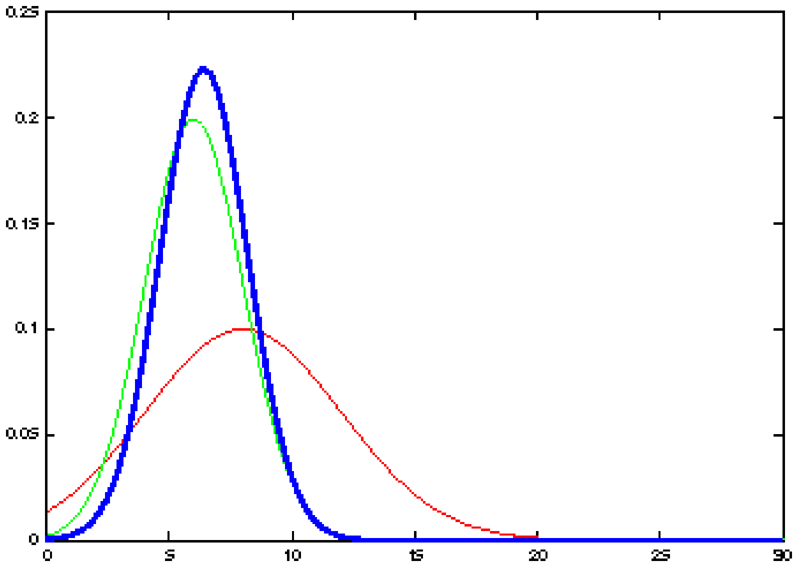
$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t \qquad z_t = C_t x_t + \delta_t$$

A_t	Systemmatrix (nxn), die den Zustandsübergang vom Zeitpunkt t-1 bis t beschreibt.
B_t	Steuermatrix (nxl), die die Auswirkungen des Stelleingriffs u_t von t-1 bis t beschreibt.
C_t	Meßmatrix (kxn), die den Zusammenhang zwischen dem Zustand x_t und der Beobachtung z_t beschreibt.
ε_t δ_t	Zufallsvariablen, die das Prozessrauschen und das Meßrauschen repräsentieren. Sie werden als statistisch unabhängig und normalverteilt angenommen mit Kovarianzmatrix R_t bzw. Q_t.

Kalman Filter Updates in 1D



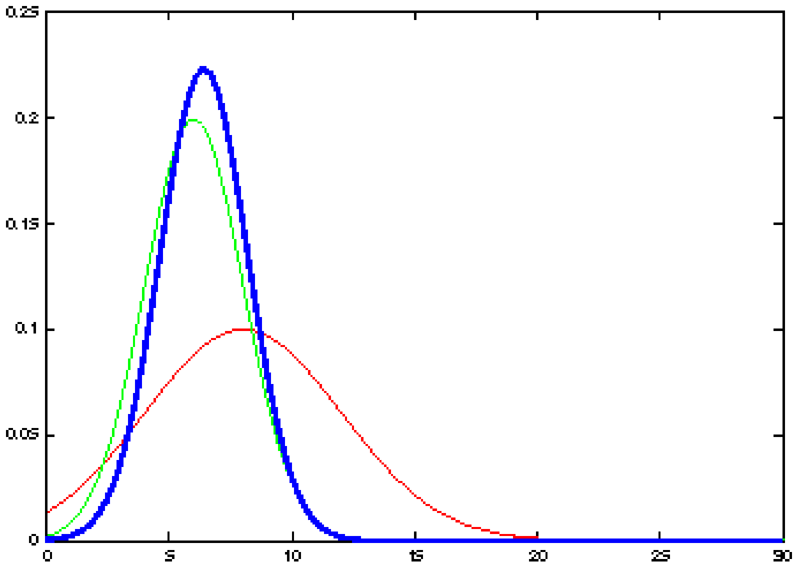




Kalman Filter Updates in 1D

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_{obs,t}^2}$$

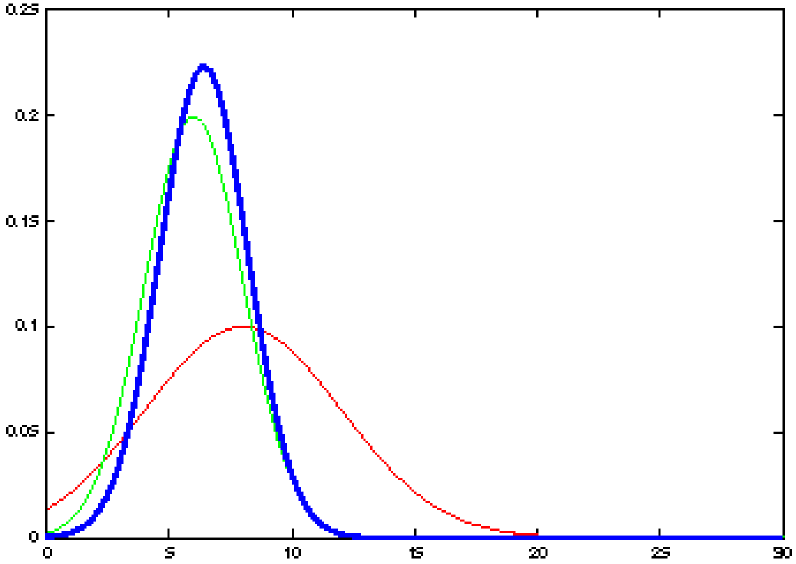
$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases} \qquad \text{mit} \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

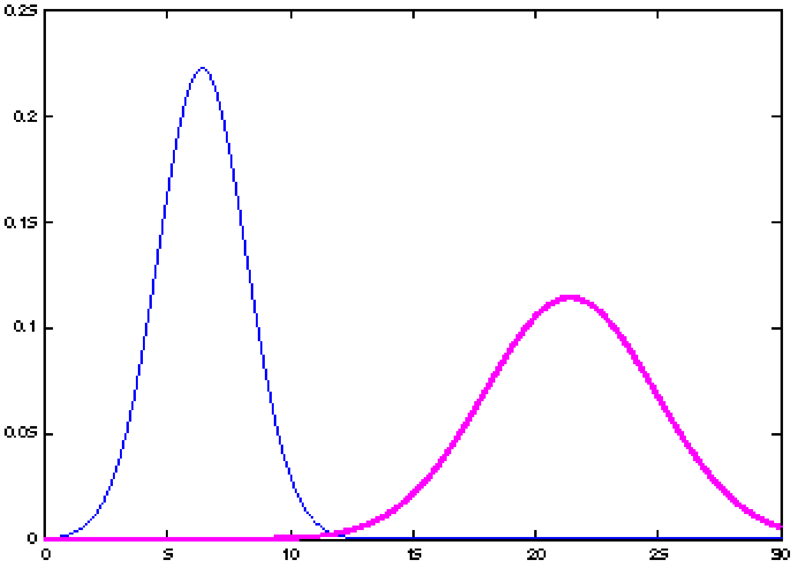


Kalman Filter Updates in 1D

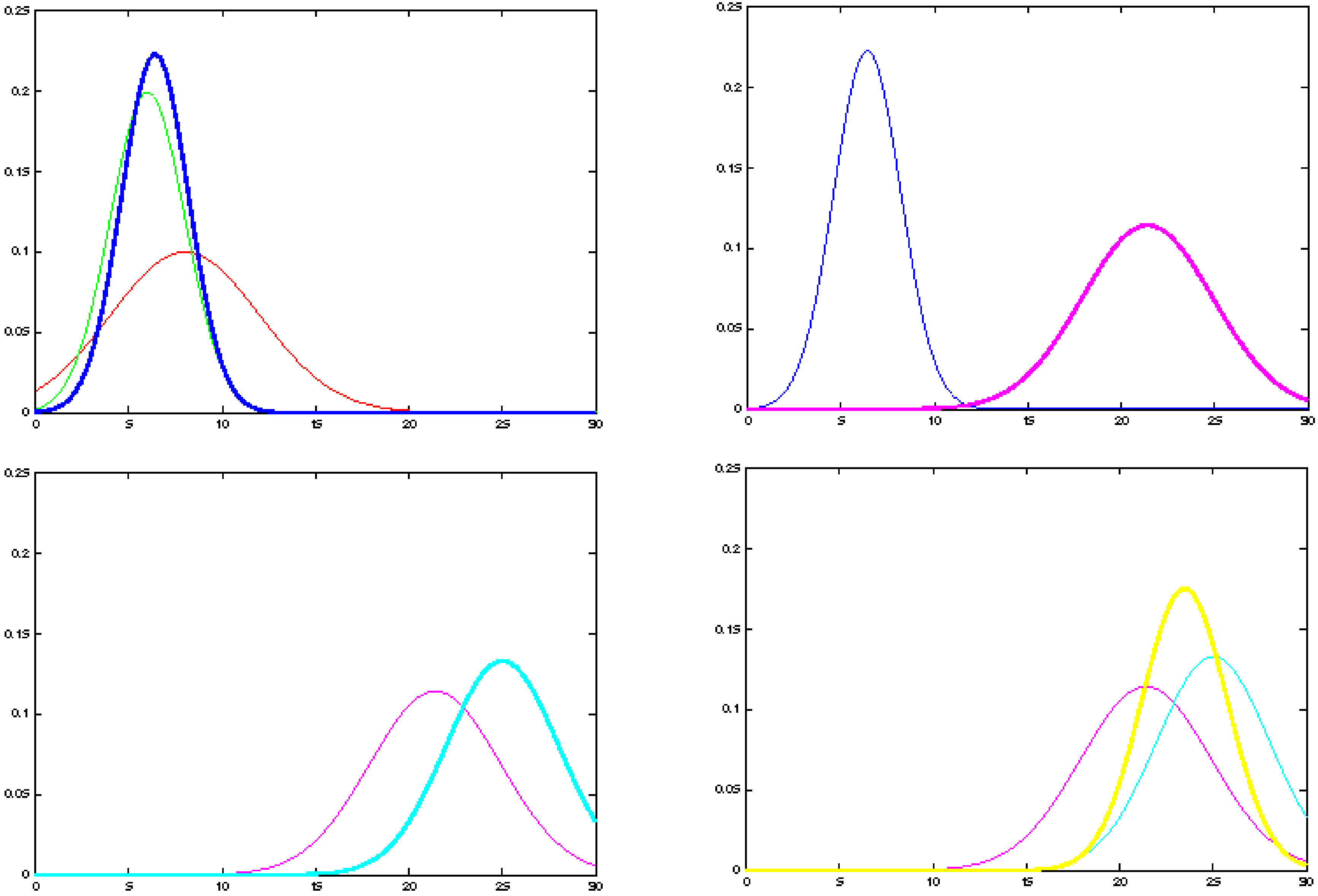
$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \bar{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$





Kalman Filter Updates



Bayes’sche Sicht: Initialisierung

- Linieares dynamisches System
- Initialer “belief” *bel*(x_0) ist normalverteilt:

$$bel(x_0) = N\left(x_0; \mu_0, \Sigma_0\right)$$

Lineare System Dynamik

- Dynamik ist eine lineare Funktion von Zustand und Stelleingriff / Aktion plus Rauschen

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right)$$

$$\overline{bel}(x_t) = \int \underset{\sim N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right)}{\underset{\Downarrow}{p(x_t \mid u_t, x_{t-1})}} \qquad \underset{\sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}\right)}{\underset{\Downarrow}{bel(x_{t-1})}} \, dx_{t-1}$$

Lineare System Dynamik

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \qquad bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right) \quad \sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1} (x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1})\right\} dx_{t-1}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

Lineare Meßgleichung

- Messungen/Beobachtungen sind eine lineare Funktion des Zustands plus Rauschen:

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

$$p(z_t \mid x_t) = N\left(z_t; C_t x_t, Q_t\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} bel(x_t) = & \eta & p(z_t \mid x_t) & & \overline{bel}(x_t) \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & \sim N\left(z_t; C_t x_t, Q_t\right) & & \sim N\left(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t\right) \end{array}$$

Lineare Meßgleichung

$$
\begin{array}{lccc}
bel(x_t) = & \eta & p(z_t \mid x_t) & \overline{bel}(x_t) \\
 & & \Downarrow & \Downarrow \\
 & & \sim N\left(z_t ; C_t x_t , Q_t\right) & \sim N\left(x_t ; \bar{\mu}_t , \bar{\Sigma}_t\right) \\
 & & \Downarrow &
\end{array}
$$

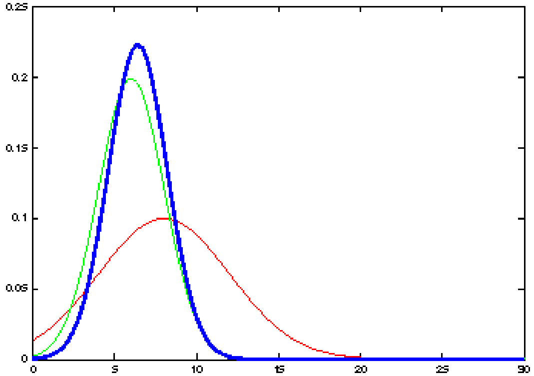
$$bel(x_t) = \eta \exp\left\{ -\frac{1}{2} (z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1} (z_t - C_t x_t) \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x_t - \bar{\mu}_t)^T \bar{\Sigma}_t^{-1} (x_t - \bar{\mu}_t) \right\}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t \end{cases} \qquad \text{with} \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

Kalman-Filter Algorithmus

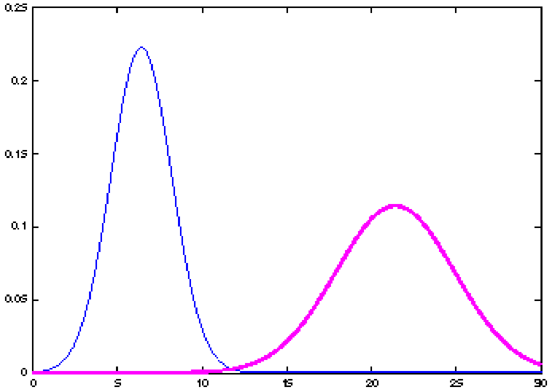
```
Algorithmus **Kalman_filter**( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ ):

Prädiktion / Zeit-Update:
    $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
    $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$

Korrektur / Meß-Update:
    $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
    $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
    $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$

Return $\mu_t, \Sigma_t$
```

Zyklus: Prädiktion-Korrektur-…

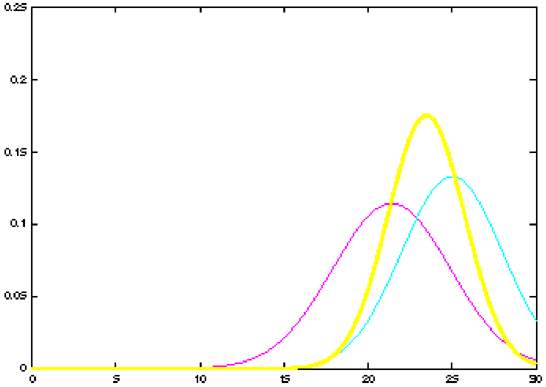


$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \bar{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

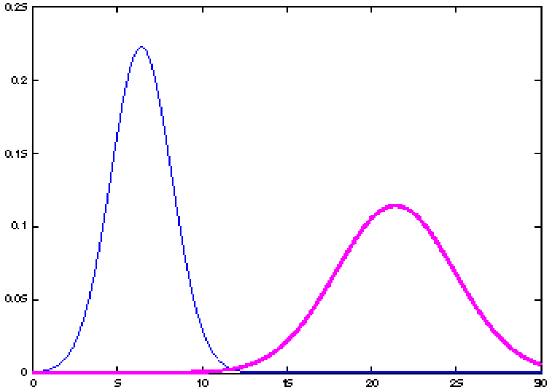


Zyklus: Prädiktion-Korrektur-…



$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{cases}, K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_{obs,t}^2}$$

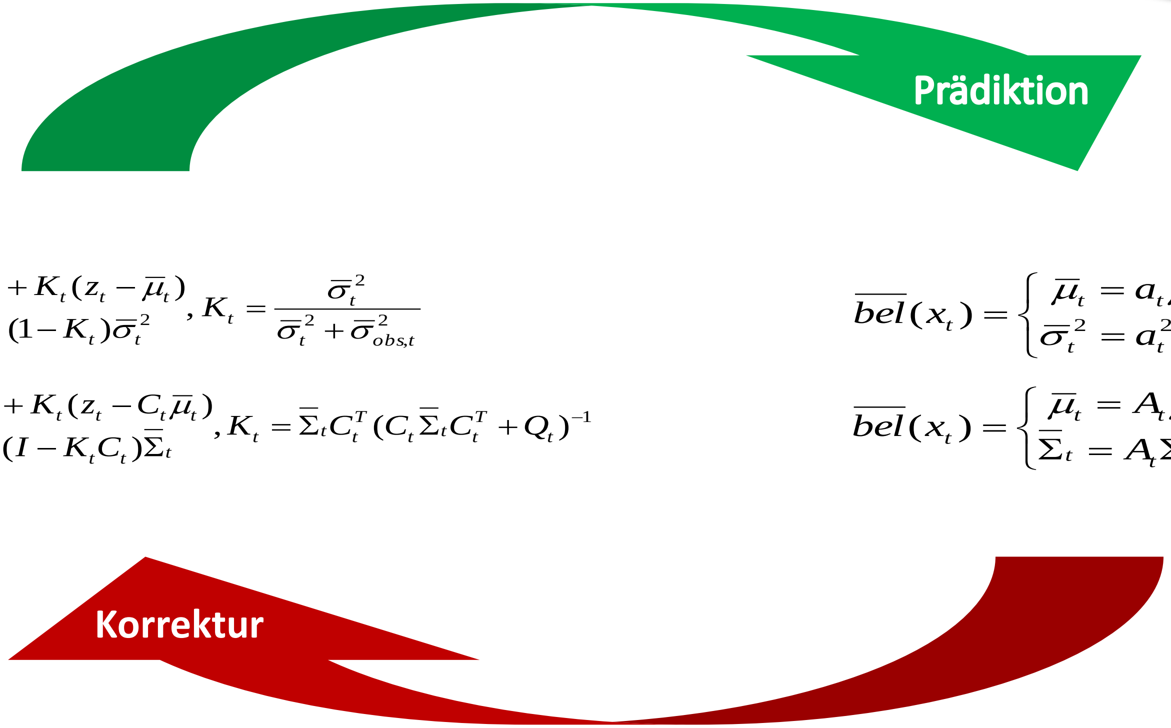
$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases}, K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$



Korrektur

Zyklus: Prädiktion-Korrektur-…

Gilt für alle Bayes-Filter



$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - \overline{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\overline{\sigma}_t^2 \end{cases}, K_t = \frac{\overline{\sigma}_t^2}{\overline{\sigma}_t^2 + \overline{\sigma}_{obs,t}^2}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\overline{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\overline{\Sigma}_t \end{cases}, K_t = \overline{\Sigma}_t C_t^T (C_t \overline{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

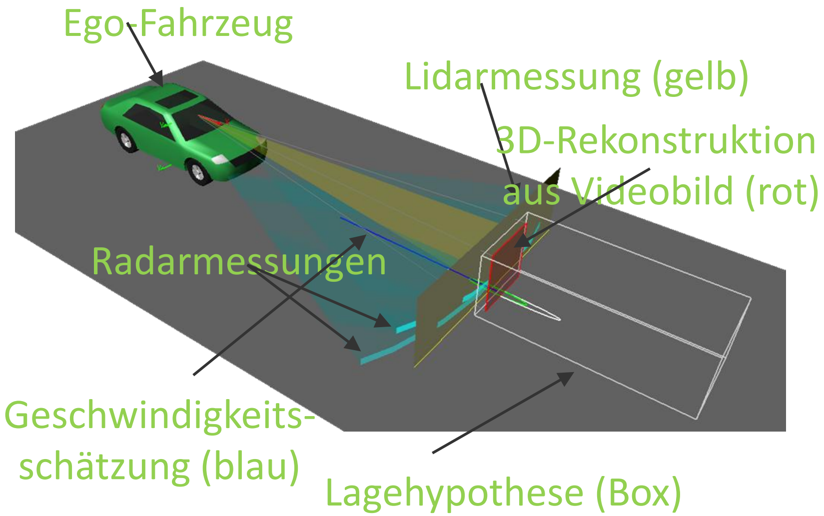
$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \overline{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \overline{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$

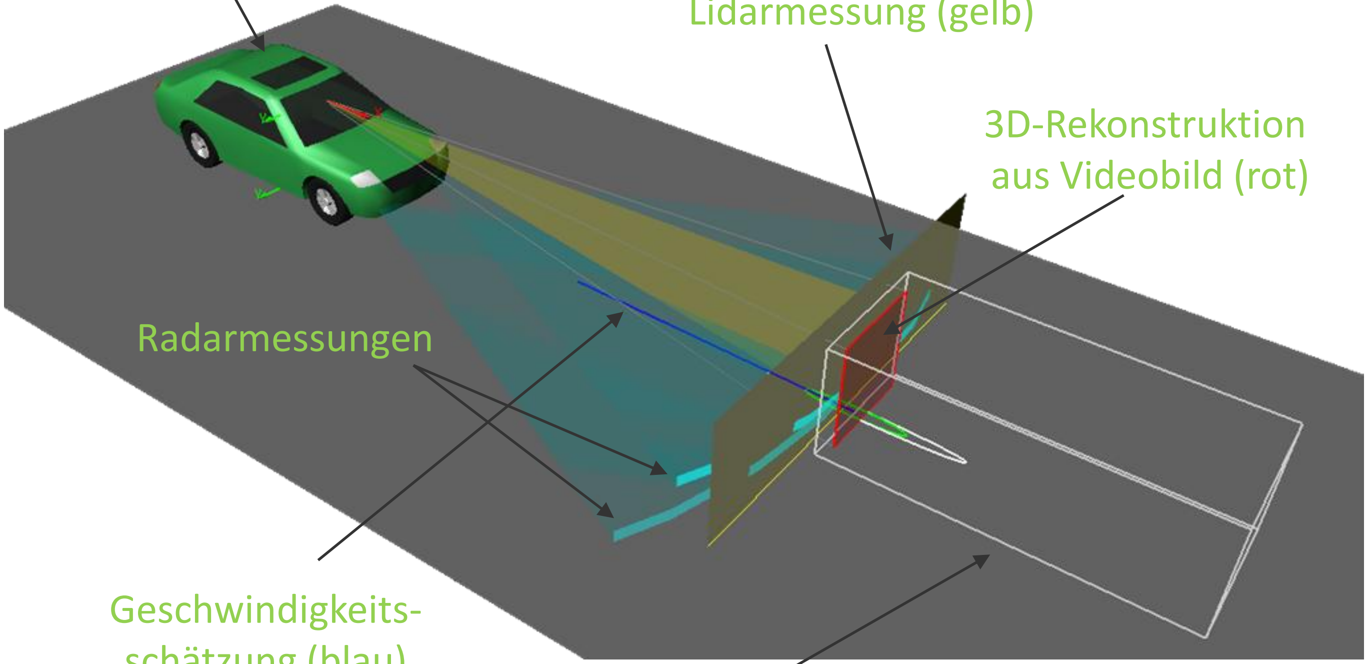
$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \overline{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

Maschinelle Wahrnehmung

- Zentrales Problem:
  Unvermeidliche Unsicherheiten
  - „Signal-Rausch-Verhältnis <= 1“

- In realen Situationen ist fast immer eine Fusion von mehren Messungen erforderlich
  - Fusion von Messungen „über die Zeit“
  - Fusion sich ergänzender Sensoren





Ego-Fahrzeug

Lidarmessung (gelb)

3D-Rekonstruktion
aus Videobild (rot)

Radarmessungen

Geschwindigkeits-
schätzung (blau)

Lagehypothese (Box)

Fusion sich ergänzender Sensoren

```
active
Mid:    21.60    -2.92         -0.46 31
MidR:    21.10    -3.06         -2.28 31
Width[m]= 3.17 Offset[m]=-0.04 Yaw[°]=-0.04 Pitch[°]=-0.35 v[m/s]=18.48 w[rad/s]=-0.00
```

Maschinelle Wahrnehmung

- Eine „echte“ Fusion erfordert immer Modelle
  - Dynamik
  - Beobachtungsvorgang

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t$$

$$z_t = C_t x_t$$

- Wahrnehmung = Zustandsschätzung
  - Die interessierenden Variablen sind fast nie direkt beobachtbar (vgl. Konzept der Beobachtbarkeit in der Regelungstechnik)
  - Alle Messungen sind fehlerbehaftet

- Bayes-Filter, wie das Kalman Filter bilden den Wahrnehmungsprozeß unter Unsicherheit ab

Zwei Sichten auf das Kalman-Filter

Optimaler Zustandsschätzer

- Beobachter für dynamische Systeme mit normalverteiltem Rauschen auf Zustand und Messungen

- Ergebnis ist der geschätzte Zustandsvektor
  - Kovarianzmatrix eher ein Nebenprodukt

Bayes‘scher Belief-Tracker

- Bayes‘sche Interpretation des „belief“ als das gegenwärtig verfügbare Wissen

- Ergebnis ist die Dichtefunktion des Zustands:
  - Mittelwert und Kovarianzmatrix