2022 年 2 月 计 算 数 学 第 44 卷第 1 期
Feb., 2022 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.44, No.1

doi: 10.12286/jssx.j2021-0855

青年评述

相位恢复: 理论、模型与算法*1)

许志强 2)

(中国科学院数学与系统科学研究院, 计算数学研究所, 科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100190)

摘 要

相位恢复在多个不同领域均被提出, 如量子力学、光学成像等. 相位恢复即具有多种应用背景, 亦具有丰富的数学内涵, 因而近期该问题吸引了多个不同领域专家的关注, 如计算数学、数据科学、最优化、代数几何等. 本文将主要介绍相位恢复中的理论基础问题, 特别是最少观测次数问题, 并介绍求解相位恢复的模型性能, 以及求解算法等. 本文也介绍了一些当前相位恢复中研究的热点方向.

关键词: 相位恢复; 非线性最小二乘; 矩阵恢复; 交替投影.

MR (2010) 主题分类: 42C15, 46C05.

1. 引 言

相位恢复是计算数学、数据科学等领域中的热点研究问题. 该问题在多个不同领域均被提出, 如量子信息、X 光成像等. 在量子信息中, 相位恢复问题也被称为 Pauli 问题. 在相位恢复中, 不同领域的人们所关注的问题也不同, 如物理学家关心相位恢复的理论基础问题, 而在光学成像等领域, 人们更关心如何设计有效的算法求解相位恢复问题. 对相位恢复的研究则涉及到多个不同数学领域, 如最优化、函数逼近、代数几何以及拓扑等. 一般的相位恢复问题可描述如下: 假设 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}^d$ 以及 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{F}^d, j=1,\cdots,m$, 这里, $\mathbf{x}_0$ 为未知向量或信号, 而 $\mathbf{a}_j$ 是已知向量, $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$. 假设我们得到的是无相位观测, 也就是 $b_j = |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle|^2, j=1,\cdots,m$. 本文中, 对复情形, $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle := \mathbf{x}_0^*\mathbf{a}_j$, 而对实情形, $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle := \mathbf{x}_0^T\mathbf{a}_j$. 相位恢复的目的是通过 $\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_m)\in\mathbb{R}^m$ 恢复 $\mathbf{x}_0$. 注意到对任意常数 $c\in\mathbb{F}$ 且 $|c|=1$, 我们都有 $|\langle \mathbf{a}_j, c\mathbf{x}_0\rangle| = |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle|$. 因而, 人们只能通过 $\mathbf{b}$ 恢复集合 $\{c\mathbf{x}_0 : c\in\mathbb{F}, |c|=1\}$. 为描述方便, 我们说 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{F}^d$ 与 $\mathbf{y}_0\in\mathbb{F}^d$ 等价当且仅当存在单位常数 $c\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{x}_0 = c\mathbf{y}_0$. 我们用 $\underline{\mathbf{x}_0}$ 表示 $\mathbf{x}_0$ 的等价类. 因而, 相位恢复的目的也就是通过无相位观测向量 $\mathbf{b}$ 恢复 $\underline{\mathbf{x}_0}$.

对于给定的矩阵 $A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)^T\in\mathbb{F}^{m\times d}$, 我们定义映射 $\mathcal{M}_A:\mathbb{F}^d\to\mathbb{R}^m$ 作为

$$\mathcal{M}_A(\mathbf{x}) = (|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}\rangle|^2,\cdots,|\langle \mathbf{a}_m, \mathbf{x}\rangle|^2).$$

* 2021 年 8 月 28 日收到.

1) 基金项目: 国家杰出青年基金 (12025108) 和国家自然科学基金 (12021001, 11688101) 资助.

2) 作者简介: 许志强，中国科学院数学与系统科学研究院研究员，冯康首席研究员。研究领域包括逼近论、计算调和分析、数值分析，尤其对采样理论，压缩感知，框架理论以及相位恢复等领域感兴趣。一方面，他将纯粹数学中的研究方法引入到计算调和分析，系统发展了相位恢复的代数簇方法，从而在信号量化、压缩感知和相位复原等一些困难问题得到实质性进展；另一方面，将逼近论中样条函数和代数多面体理论相结合，从而解决了多个猜想和公开问题。2020 年获得国家杰出青年基金资助。曾经担任中国数学会计算数学分会秘书长。现担任《IEEE Trans. Information Theory》，《J. Comp Math.》，《Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications》等三个国际期刊编委。

我们称 $\mathcal{M}_A$ 在 $\mathbb{F}^d$ 上可逆倘若: $\mathcal{M}_A(\mathbf{x})=\mathcal{M}_A(\mathbf{y})$ 当且仅当 $\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{y}}$. 相位恢复中的主要研究问题包括:

问题 1. 观测次数 m 至少为多少, 以保证存在矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times d}$ 使得 $\mathcal{M}_A$ 在 $\mathbb{F}^d$ 上可逆?

问题 2. 矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times d}$ 需要满足什么条件, 才能保证 $\mathcal{M}_A$ 在 $\mathbb{F}^d$ 上可逆?

问题 3. 如何通过 $\mathcal{M}_A(\mathbf{x})$ 重建 $\underline{\mathbf{x}}$?

本文中, 我们主要针对上述三个问题介绍与之相关的结果, 并提出一些尚未解决的公开问题, 以供有兴趣的读者进一步思考. 本文的组织和结构如下：第 2 节中, 我们主要介绍矩阵恢复和非奇异双线性形式. 第 3 节中, 我们首先介绍了矩阵恢复、非奇异双线性形式及其与相位恢复之间的关联, 并进一步介绍如何利用第 2 节中的结果回答问题 1 及问题 2. 第 4 节中, 将主要介绍量子力学中的 Pauli 问题及结果, 这也显示了相位恢复与量子力学的密切关联. 后面的 3 节将主要针对问题 3 的结果开展介绍. 特别是, 第 5 节将主要介绍在 Fourier 观测下相位恢复的主要结果. 在第 6 节介绍求解相位恢复的两个模型之后, 我们将在第 7 节介绍相位恢复的求解算法及性能.

2. 矩阵恢复与非奇异双线性形式

在本节中, 我们主要介绍矩阵恢复的最少观测次数问题以及非奇异双线性形式. 矩阵恢复亦是当前计算数学、数据科学中研究热点问题, 而非奇异双线性形式则是一个有着悠久历史的研究问题,

2.1. 矩阵恢复

假设矩阵 $Q\in\mathbb{F}^{d\times d}$ 以及 $A_j\in\mathbb{F}^{d\times d}, j=1,\cdots,m$. 这里, Q 是目标矩阵而 $A_j, j=1,\cdots,m$ 是已知矩阵. 人们感兴趣的目标矩阵 Q 通常具有低秩的性质, 也就是通常假设

$$Q\in\mathcal{L}_{d,r}:=\{X\in\mathbb{F}^{d\times d}:\operatorname{rank}(X)\le r\}.$$

矩阵恢复的目的是通过 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_m)^T$ 重建矩阵 $Q\in\mathcal{L}_{d,r}$, 这里

$$y_j:=\langle A_j,Q\rangle:=\operatorname{tr}(A_j^*Q),\quad j=1,\cdots,m.$$

注意到 $|\langle\mathbf{a}_j,\mathbf{x}_0\rangle|^2=\langle\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*,\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^*\rangle$. 相位恢复问题等价于恢复秩 1 的 Hermitian 矩阵. 因而, 矩阵恢复的研究对相位恢复具有促进作用. 矩阵恢复中一个基本的问题是：

问题 4. 观测次数 m 最少是多少, 以保证可存在 m 个观测矩阵 $A_1,\cdots,A_m$, 使得对任意 $Q\in\mathcal{L}_{d,r}$ 人们可从 $\langle A_j,Q\rangle, j=1,\cdots,m$, 重建 Q?

假设 $Q_1,Q_2\in\mathcal{L}_{d,r}$ 且 $r\le d/2$. 那么, 如果 $\langle A_j,Q_1\rangle=\langle A_j,Q_2\rangle$, 则 $\langle A_j,Q_1-Q_2\rangle=0$. 注意到 $\operatorname{rank}(Q_1-Q_2)\le 2r$, 我们可有如下引理.

引理 2.1. [1] 假设 $r\le d/2$ 且 $A_j\in\mathbb{F}^{d\times d}, j=1,\cdots,m$. 下面两个描述等价：

1. 对任意的 $Q_1,Q_2\in\mathcal{L}_{d,r}$, 如果 $\langle A_j,Q_1\rangle=\langle A_j,Q_2\rangle, j=1,\cdots,m$ 则 $Q_1=Q_2$.

2. 如果 $Q\in\mathcal{L}_{d,2r}$ 且 $\langle A_j,Q\rangle=0, j=1,\cdots,m$, 则 $Q=0$.

注意到 $\langle A_j, Q\rangle = 0, j = 1, \cdots, m$ 是关于 Q 中元素的线性方程组. 依据上述引理, 为回答问题 4, 我们只需考虑

$$\langle A_j, Q\rangle \ = \ 0, \quad j = 1, \cdots, m$$

的解空间中是否包含一个非 0 且秩不超过 $2r$ 的矩阵. 也就是说, 我们只需考虑集合

$$\mathcal{L}_{d,2r} \cap \{Q \in \mathbb{F}^{d\times d} : \langle A_j, Q\rangle \ = \ 0, j = 1, \cdots, m\}$$

中是否只有零矩阵. 2012 年, Eldar, Needell 及 Plan 构造了 $m = 4dr - 4r^2$ 个观测矩阵, 并证明了任意矩阵 $Q \in \mathcal{L}_{d,r}$ 均可通过 $\langle A_j, Q\rangle, j = 1, \cdots, m$ 对其进行重建 [1]. 他们进一步猜想最少观测次数为 $4dr - 4r^2$. 该猜想描述如下:

猜想 1. [1] 假设 r, d 为正整数, 且 $r \le d/2$. 假设 m 为一个正整数且 $m < 4dr - 4r^2$. 那么, 对任意的 $A_j \in \mathbb{F}^{d\times d}, j = 1, \ldots, m$ 存在非 0 的 $Q \in \mathcal{L}_{d,2r}$ 使得

$$\langle A_j, Q\rangle = 0, \quad j = 1, \cdots, m.$$

为解决该问题, 如何理解或对待秩不超过 r 的矩阵的集合很重要. 假设矩阵 $Q \in \mathbb{F}^{d\times d}$. 那么, $\mathrm{rank}(Q) \le r$ 当且仅当 Q 中任意的 $(r+1)\times(r+1)$ 的子矩阵行列式等于 0. 而行列式是关于矩阵中元素的多项式, 因而, $\mathrm{rank}(Q) \le r$ 可描述为 Q 中元素是一个多项式系统的零点. 因为复空间中的代数簇有更为丰富的结果, 我们下面针对复情形介绍一个例子. 假设

$$Q' = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

那么, $\mathrm{rank}(Q') \le 1$ 当且仅当

$$\begin{aligned} &q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12} = 0,\ q_{11}q_{23} - q_{21}q_{13} = 0,\ q_{12}q_{23} - q_{22}q_{13} = 0, \\ &q_{31}q_{22} - q_{21}q_{32} = 0,\ q_{31}q_{23} - q_{21}q_{33} = 0,\ q_{32}q_{23} - q_{22}q_{33} = 0, \\ &q_{31}q_{12} - q_{11}q_{32} = 0,\ q_{31}q_{13} - q_{11}q_{33} = 0,\ q_{32}q_{13} - q_{12}q_{33} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

也就是说, 如果我们有一个矩阵 $Q' \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ 且 $\mathrm{rank}(Q') \le 1$ 那么我们就能得到 (2.1) 的一个解, 反之亦然. 因而, $\mathcal{L}_{3,1}$ 是 $\mathbb{C}^9$ 中的一个代数簇. 类似地, $\mathcal{L}_{d,r} \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ 亦可看作一代数簇. 注意到有些文献从流形角度看待 $\mathcal{L}_{d,r}$. 作为一个流形, $\mathcal{L}_{d,r}$ 依然有维数的概念, 却缺少次数的概念. 而作为代数簇, 既有维数概念也有次数概念, 这可以帮助我们得到更为丰富的结果. 对于复情形, $\mathcal{L}_{d,r} \in \mathbb{C}^{d\times d} \cong \mathbb{C}^{d^2}$ 是一个维数为 $2dr - r^2$, 次数为 $\Pi_{i=0}^{d-r-1} \frac{(d+i)!i!}{(r+i)!\cdot(d-r+i)!}$ 的代数簇 [2, Prop. 12.2]. 基于代数簇的维数理论, 作者解决了猜想 1 [4]. 特别是, 对复情形, 证明了猜想 1 成立, 而对实情形, 则给出一反例 [4] , 表明该猜想在有些情形下不成立. 具体结果如下:

定理 2.1. [4] 假设 r, d 均为正整数, 且 $r \le d/2$. 那么, 下面结论成立:

1. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $m < 4dr - 4r^2$. 那么, 对任意的 $A_j \in \mathbb{C}^{d\times d}, j = 1, \cdots, m$ 存在非 0 的复矩阵 $Q_0 \in \mathcal{L}_{d,2r}$ 使得 $\langle A_j, Q_0\rangle = 0, j = 1, \cdots, m$.

2. 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, m < 4dr - 4r^2$. 假设 $d \in \{2^k + r : k \in \mathbb{Z}_+\}$. 那么, 对任意的 $A_j \in \mathbb{R}^{d\times d}, j = 1, \cdots, m$ 存在非 0 的实矩阵 $Q_0 \in \mathcal{L}_{d,2r}$ 使得 $\langle A_j, Q_0\rangle = 0, j = 1, \cdots, m$.

3. 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}, d=4, r=1$. 那么, 存在 11 个矩阵 $A_j\in\mathbb{R}^{4\times 4}, j=1,\cdots,11$, 使得

$$\{Q\in\mathbb{R}^{4\times 4}:\operatorname{rank}(Q)\le 2, \langle A_j, Q\rangle=0, j=1,\cdots,11\}$$

仅包含 0 矩阵.

上面定理表明, 对复情形, 恢复秩不超过 r 的 d 阶矩阵, 最少观测次数是 $4dr-4r^2$. 对实情形, 当 $d=4, r=1$ 时, $4dr-4r^2=12$, 然而上面的定理表明存在 11 个观测矩阵 $A_j\in\mathbb{R}^{4\times 4}, j=1,\cdots,11$ 使得人们可通过 $\langle A_j, Q\rangle$ 恢复任意的 $Q\in\mathcal{L}_{4,1}$. 事实上, 可通过计算代数几何的方法构造这 11 个具体的观测矩阵 [4]. 这表明猜想 1 对实情形并不总是成立. 此外, 根据上述定理, 对实情形, 当 $d=2^k+r$ 时, 也就是 $d-r$ 为 2 的幂时, $4dr-4r^2$ 为最少观测次数. 对其它情形, 确定最少观测次数仍是一个公开问题.

注 2.1. 在定理 2.1 中, 我们考虑了恢复秩不超过 r 的矩阵所需最少观测次数. 正如我们上文提到的, 相位恢复等价于恢复秩 1 的 Hermitian 矩阵. 而定理 2.1 中, 并没有要求矩阵是 Hermitian. 因而, 定理 2.1 并不能直接用于复信号相位恢复最少观测次数的研究. 但定理 2.1 的证明中所发展的代数簇方法, 却对相位恢复最少观测次数的研究起到了重要作用.

2.2. 非奇异双线性形式

非奇异双线性形式是一个具有悠久研究历史的数学问题, 最早的结果可追溯到欧拉. 非奇异双线性形式的主要研究问题是: 假设存在 m 个矩阵 $A_j\in\mathbb{R}^{p\times q}, j=1,\cdots,m$, 使得对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^q\setminus\{0\}$ 都有

$$\operatorname{span}\{A_1\mathbf{x},\cdots,A_m\mathbf{x}\} \;=\; \mathbb{R}^p. \tag{2.2}$$

那么, m 至少应为多少? 我们称满足性质 (2.2) 的矩阵集合 $\{A_j\}_{j=1}^m$ 具有非奇异双线性性质.

为描述方便, 人们通常用 $p\#q$ 表示这种最小的 m. 本文中, 我们主要关心 $p=q=d$ 的情形. 根据定义, 容易看出 $d\#d\ge d$. 关于非奇异双线性形式较为系统的介绍可参考 [5]. 人们容易证明 $2\#2=2$. 而关于非奇异双线性形式的第一个非平凡结果是由欧拉所得到. 1748 年, 欧拉在试图解决费尔马猜想时候, 证明了 $4\#4=4$. 事实上, 欧拉构造了 4 个矩阵 $A_1, A_2, A_3, A_4\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ 并证明了其具有非奇异双线性形式的性质. 欧拉构造的 4 个矩阵如下:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$
$$A_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1818 年, Degen 证明了 $8\#8=8$. 对于 $d\le 32$ 的时候, 人们已经对部分 $d\#d$ 给出了准确值 [5]. 但对一般的 d, 给出准确的 $d\#d$ 依然是一个困难的问题.

对于非奇异双线性形式的存在性, 一个常用的必要条件是 Stiefel-Hopf 条件, 它是由 Stiefel 和 Hopf 独立发现 [20, 21]. 汪扬和本文作者也从相位恢复角度提供了一个独立证明 [6].

定理 2.2. (Stiefel-Hopf) 如果存在 m 个矩阵 $A_j \in \mathbb{R}^{d\times d}, j=1,\cdots,m$ 具有非奇异双线性形式性质. 那么, 对任意整数 $k\in[m-d+1,d-1]$, 二项式系数 $\binom{m}{k}$ 均为偶数.

3. 最少观测次数

对于相位恢复最少观测次数问题, 我们针对更为一般的情形进行介绍. 假设 $A_j\in\mathbb{F}^{d\times d}$ 且 $A_j^*=A_j$. 也就是说, 对实情形, A_j 是对称矩阵; 而对复情形, A_j 是 Hermitian 矩阵. 假设 $b_j=\mathbf{x}^*A_j\mathbf{x}, j=1,\cdots,m$. 所谓广义相位恢复就是从 $(b_1,\cdots,b_m)$ 重建 $\underline{\mathbf{x}}$. 如果我们要求 A_j 是秩 1 矩阵, 也就是 $A_j=\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*$, 那么 $\mathbf{x}^*A_j\mathbf{x}=|\langle\mathbf{x},\mathbf{a}_j\rangle|^2$. 因而, 在这种情况下, 广义相位恢复可退化为一般的相位恢复. 如果要求 $A_j^2=A_j$, 广义相位恢复则退化为投影相位恢复 [7]. 因而, 广义相位恢复包含了文献中常见的各种相位恢复形式.

令 $\mathcal{A}=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset\mathbb{F}^{d\times d}$. 我们定义映射 $\mathcal{M}_A:\mathbb{F}^d\to\mathbb{R}^m$ 作为

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})=(\mathbf{x}^*A_1\mathbf{x},\cdots,\mathbf{x}^*A_m\mathbf{x}).$$

我们称 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 可逆倘若满足如下性质：$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})=\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{y})$ 当且仅当 $\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{y}}$. 如果 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 可逆, 则称 $\mathcal{A}$ 具有广义相位恢复性质. 广义相位恢复的最少观测次数问题描述如下：

问题 5. 观测次数 m 最少为多少, 以保证存在 $\mathcal{A}=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset\mathbb{F}^{d\times d}$ 且 $A_j^*=A_j, j=1,\cdots,m$, 使得 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 可逆?

下面定理表明了广义相位恢复、矩阵恢复以及非奇异双线性形式之间的关联:

定理 3.1. [6] 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. 假设 $\mathcal{A}=(A_j)_{j=1}^m\subset\mathbb{R}^{d\times d}$ 且 $A_j=A_j^T$. 那么, 如下描述彼此等价:

- $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可逆.
- 如果 $Q\in\mathcal{L}_{d,1}(\mathbb{R})$ 且 $\langle A_j,Q\rangle=0$, $1\le j\le m$, 则 $Q=0$.
- $\mathcal{A}$ 具有非奇异双线性形式性质.

而对复情形, 我们则有如下结果：

定理 3.2. [6] 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. 假设 $\mathcal{A}=(A_j)_{j=1}^m\subset\mathbb{C}^{d\times d}$ 且 $A_j^*=A_j$. 那么, 如下描述彼此等价:

- $\mathcal{A}$ 具有广义相位恢复性质.
- 假设 $Q\in\mathbb{C}^{d\times d}\setminus\{0\}$ 为秩不超过 2 的 Hermitian 矩阵, 而且满足 $\mathrm{tr}(A_jQ)=0, j=1,\cdots,m$. 那么, Q 有两个非 0 的特征值, 而且这两个特征值的符号相同.

上述定理表明了相位恢复与低秩矩阵恢复之间的关联. 基于上述定理, 可采用第 2 节中介绍的代数簇方法研究相位恢复的观测次数问题. 特别是, 基于定理 3.1 和定理 3.2, 我们可证明如下结果:

定理 3.3. [6] 假设 $m \geq 4d-4$ (或 $m \geq 2d-1$) 且 $r_1, \ldots, r_N \in [1,d] \cap \mathbb{Z}$. 假设 $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_m\} \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ (或 $\mathbb{R}^{d\times d}$) $\operatorname{rank}(A_j) = r_j$, 且 $A_j, j=1,\cdots,m$ 处于一般位置. 那么, $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}^d$ (或 $\mathbb{R}^d$) 中具有广义相位恢复性质.

上述定理给出了 $\mathcal{A}$ 具有广义相位恢复的充分条件, 也就是说, 对复 (或实) 情形, 存在 $4d-4$ (或 $2d-1$) 个观测矩阵具有广义相位恢复性质. 上述定理中, 我们要求 $A_j, j=1,\cdots,m$ 处于一般位置, 即指 $A_j, j=\cdots,m$ 中的元素不同时落在 $\mathbb{C}^{m\cdot d^2}$ 中一个代数簇上. 那么, $4d-4$ (或 $2d-1$) 是否是最少的观测次数? 我们下面将对该问题进行介绍. 为描述结果方便, 我们引入如下符号:

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{F}}(d) := \min\{m : \text{存在 } m \text{ 个矩阵 } (A_j)_{j=1}^m \subset \mathbf{H}_d^m(\mathbb{F}), \text{它们在 } \mathbb{F}^d \text{ 中具有广义相位恢复性质}\}.$$

这里,

$$\mathbf{H}_d(\mathbb{F}) \ := \ \{Q \in \mathbb{F}^{d\times d} : Q = Q^*\}.$$

我们首先介绍如下结果 [6]: $\mathcal{A} = (A_j)_{j=1}^m \subset \mathbf{H}_d^m(\mathbb{R})$ 具有广义相位恢复性质, 那么, 存在从射影空间 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{P}^{d-1}$ 到欧式空间 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中的一个嵌入. 射影空间和欧式空间是两个常用的空间. 而将射影空间嵌入到欧式空间则是一个重要的研究课题 [8, 9]. 如果能将射影空间 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{P}^{d-1}$ 嵌入到欧式空间 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中, 需要对欧式空间的维数有一定要求. 对于该问题, 拓扑中人们早已发展了各种相关结果 [8, 9]. 利用这些结果, 我们可得到如下定理:

定理 3.4. [6]

1. 如果 d 为奇数, 则 $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}(d) \leq 2d-1$; 如果 d 为偶数, 则 $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}(d) \leq 2d-2$.

2. 对任意的整数 $k \geq 1$, 我们有

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}(d) = \begin{cases} 2d-1 & d = 2^k+1 \\ 2d-2 & d = 2^k+2. \end{cases}$$

3. 对任意的整数 $d \geq 5$, 我们有

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}(d) \geq \begin{cases} 2d - 6\lfloor \log_2(d-1) \rfloor + 6, & d \text{ 为奇数} \\ 2d - 6\lfloor \log_2(d-2) \rfloor + 4, & d \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

注 3.1. 上述定理中, 我们只要求观测矩阵 A_j 为对称矩阵. 而对于 A_j 为秩 1 的特殊情形, 也就是 $A_j = \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^T, \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^d$, 可用初等方法证明, 最少观测次数即为 $2d-1$ [10]. 上述定理也表明, 增加矩阵 A_j 的秩并不能显著降低最少观测次数. 对于投影相位恢复, 也就是矩阵 A_j 为投影矩阵, 一个公开问题是 [11]: 对于投影相位恢复, 最少观测次数能否小于 $2d-1$? 针对 $d=4$ 情形, 作者构造了 $6 < 2\times 4 - 1$ 个投影矩阵 [4], 而且验证了这 6 个矩阵具有投影相位恢复性质, 从而对这一公开问题给出了否定回答.

注 3.2. 基于定理 3.1, 特别是非奇异双线性形式与相位恢复的关联, Papri Dey 和 Dan Edidin 更深入研究了广义相位恢复与代数几何之间的关联 [3].

对于复情形的最少观测次数问题, 下面引理扮演重要角色:

引理 3.1. [10] 如果存在 m 个矩阵 $\mathcal{A} = \{A_j : A_j^* = A_j, j=1,\cdots,m\} \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ 具有广义相位恢复性质, 那么存在从 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^d)$ 到 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中的嵌入.

依据上述引理, 以及复射影空间在欧式空间中嵌入的结果 [8,9], 我们可得到如下结果:

定理 3.5. [6] 假设 $d>4$. 那么, $4d-2-2\alpha+\epsilon_\alpha \le \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(d) \le 4d-3-\alpha-\delta$, 此处 $\alpha=\alpha(d-1)$ 表示 $d-1$ 的 2 进制展开中数字 1 的数目,

$$\epsilon_\alpha = \begin{cases} 2 & d \text{ 奇}, \alpha \equiv 3 \ (\mathrm{mod} 4) \\ 1 & d \text{ 奇}, \alpha \equiv 2 \ (\mathrm{mod} 4) \\ 0 & \text{其它}, \end{cases} \quad \text{和} \quad \delta = \begin{cases} 0 & d \text{ 奇}, \\ 1 & d \text{ 偶}. \end{cases}$$

注 3.3. 当 d 可以写做 2^k+1 时, 通过简单的计算可以得到 $\alpha=1$ 且 $\epsilon_\alpha=0$. 根据定理 3.5, 我们可得到 $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(d)=4d-4$, $d\in\{2^k+1: k\in\mathbb{Z}_{\ge 2}\}$. 对于矩阵 A_j 为秩 1 情形, 也就是 $A_j=\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*$ 此处 $\mathbf{a}_j\in\mathbb{C}^d$, 可用初等方法证明 $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(d)\ge 3d-2$ [12]. Bandeira 等人猜想秩 1 情形时, 最少观测次数是 $4d-4$ [22]. 针对 $d=4$ 构造了 11 个观测向量, 并验证了具有相位可恢复性质 [23], 从而否定了该猜想. 然而, 一般情形下, 给出最少观测次数 $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(d)$ 依然是一个公开问题.

注 3.4. 在上述结果中, 人们要求恢复所有信号 $\mathbf{x}\in\mathbb{F}^d$. 而另外一个令人感兴趣的问题就是如果恢复几乎所有信号 $\mathbf{x}\in\mathbb{F}^d$, 最少观测次数应为多少? 也就是说, 如果允许一个测度为 0 的集合上的信号不能恢复, 而其余信号均能恢复, 最少观测次数应为多少? 对于线性观测, 恢复几乎所有信号和恢复所有信号是等同的, 因而线性代数中并不存在这一问题. 而对于本文所关心的非线性观测, 二者之间是有区别的. 文 [24,25] 中, 分别针对几乎所有矩阵恢复, 以及几乎所有相位恢复开展了研究.

4. Pauli 问题

1933 年, Pauli 在研究量子力学时提出如下问题 [30]:

问题 6. 对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 是否可通过 $|f|$ 以及 $|\mathcal{F}f|$ 将其唯一确定?

这里, 我们用 $\mathcal{F}f$ 表示 f 的 Fourier 变换. 该问题在量子力学中扮演重要角色, 其离散形式也可看作一种特定观测向量下相位恢复的最少观测次数问题. 因而, 我们单独采用一节对该问题进行详细介绍. 1944 年, Reichenbach 构造反例表明存在函数 $f_1,f_2\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $|f_1|=|f_2|$, $|\mathcal{F}f_1|=|\mathcal{F}f_2|$ 但是 $f_1\notin\{cf_2:|c|=1\}$. 随后, 人们从函数论的角度研究了 Pauli 问题的各种的变形. 关于 Pauli 问题的详细介绍可参考 [18,32,33].

我们下面介绍 Pauli 问题的离散形式. 在问题 6 中, 人们知道函数 f 在恒等算子及 Fourier 算子作用后的绝对值. 这两个算子对应的离散形式为单位矩阵及离散 Fourier 矩阵. 这两个矩阵均为标准正交矩阵. 因而, Pauli 问题的离散形式就是考虑通过标准正交矩阵变换后的绝对值恢复原信号. 假设 $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_m\in\mathbb{F}^{d\times d}$ 为标准正交矩阵, 也就是 $\mathcal{B}_j\mathcal{B}_j^*=I, j=1,\cdots,m$. 那么, 如果能从 $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|, j=1,\cdots,m$ 恢复所有 $\underline{\mathbf{x}}\subset\mathbb{F}^d$, m 最少为多少? 这里, 我们用 $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|\in\mathbb{R}^d$ 表示 $\mathcal{B}_j\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d$ 每个元素的绝对值形成的向量. 因而, $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|$ 事实上提供了 d 个无相位观测. 更具体地说, 假设 $\mathcal{B}_j$ 的行向量为 $\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_d$, 那么, 我们通过 $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|$ 得到的无相位观测为 $|\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{x}\rangle|,\cdots,|\langle\mathbf{b}_d,\mathbf{x}\rangle|$. 对于实情形, 也就是 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 我们有:

定理 4.1. 假设 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 是处于一般位置的两个标准正交矩阵. 对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d$, 如果 $|\mathcal{B}_1\mathbf{x}|=|\mathcal{B}_1\mathbf{y}|, |\mathcal{B}_2\mathbf{x}|=|\mathcal{B}_2\mathbf{y}|$ 则 $\mathbf{x}=\pm\mathbf{y}$.

证明. 我们将 $\mathcal{B}_1$ 的行向量标记为 $\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_d\in\mathbb{R}^d$. 类似的, $\mathcal{B}_2$ 的行向量标记为 $\mathbf{b}_1',\cdots,\mathbf{b}_d'\in\mathbb{R}^d$. 令 $B:=\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_d,\mathbf{b}_1',\cdots,\mathbf{b}_d'\}\subset\mathbb{R}^d$. 我们只需证明集合 B 具有补足性质 [10, Theorem 2.8]:

对任意的 $I \subset B$ 我们有 $\operatorname{span}(I)=\mathbb{R}^d$ 或者 $\operatorname{span}(B \setminus I)=\mathbb{R}^d$. 为证明该性质, 任取 $I \subset B$, 则有 $|I| \ge d$ 或者 $|B \setminus I| \ge d$. 不失一般性, 我们假设 $|I| \ge d$. 如果 I 中包含 $\mathcal{B}_1$ 或者 $\mathcal{B}_2$ 中所有行向量, 则 $\operatorname{span}(I)=\mathbb{R}^d$. 我们完成证明. 否则, 我们假设 I 中包含 $k \ge 1$ 个 $\mathcal{B}_1$ 中的行向量, 设为 $\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_k\}$. 那么 I 中至少包含 $d-k$ 个 $\mathcal{B}_2$ 中的行向量, 设为 $\{\mathbf{b}_1',\cdots,\mathbf{b}_{d-k}'\}$. 因为, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ 处于一般位置, 那么, $\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_k,\mathbf{b}_1',\cdots,\mathbf{b}_{d-k}'\}$ 线性独立, 由此可得到 $\operatorname{span}(I)=\mathbb{R}^d$. 证毕.

因为 $\mathcal{B}_j, j=1,\cdots,m$ 是标准正交矩阵, 我们有 $\|\mathcal{B}_j\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}\|_2$ 对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d$ 成立. 因而, $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|, j=1,\cdots,m$ 本质上提供了 $md-m+1$ 个无相位观测. 根据定理 3.5 我们有 $md-m+1 \ge 4d-2-2\alpha+\epsilon_\alpha$. 由此可以得到, 当 $d\ge 5$ 时, 至少需要 4 个正交基 [34]. 当 $d=3$ 时, 最小观测次数是 $4\times 3-4=8$ [22]. 由此可得到 $3m-m+1\ge 8$, 因而 $d=3$ 的时候, 需要的最少正交矩阵的个数至少为 4.

Jaming 基于正交多项式的方法, 构造了 4 个正交矩阵 [32], 且具有相位恢复性质:

定理 4.2. [32] 存在 4 个标准正交矩阵 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4 \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 满足如下性质：对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^d$, $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|=|\mathcal{B}_j\mathbf{y}|, j=1,2,3,4$ 当且仅当 $\mathbf{x}=c\cdot\mathbf{y}$, 此处 $|c|=1$.

表 1 相位恢复所需最少观测正交矩阵个数

维数 d	2	3	4	$d\ge 5$
最少观测正交矩阵个数 m	3	4	3 或 4	4

注 4.1. 根据表 1 所列结果, 人们仅对 $d=4$ 时所需的最少观测正交矩阵个数没有确定. 因而, 一个公开问题是: 是否存在 3 个标准正交矩阵 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3\in\mathbb{C}^{4\times 4}$, 使得: 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^4$, 如果 $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|=|\mathcal{B}_j\mathbf{y}|, j=1,2,3$ 则 $\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{y}}$?

注 4.2. 在上述结果中, 我们要求通过观测 $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|, j=1,\cdots,m$ 恢复所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d$. 而恢复几乎所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d$ 也是一个令人感兴趣的问题. 我们猜想存在 3 个标准正交矩阵 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3\in\mathbb{C}^{d\times d}$ 使得可通过 $|\mathcal{B}_j\mathbf{x}|, j=1,2,3$ 恢复几乎所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d$.

5. Fourier 观测

上文中我们介绍了观测向量为一般形式的相位恢复问题, 这在量子信息等领域具有较为重要的应用. 在光学成像等领域, 人们经常采用 Fourier 观测. 针对此种类型的观测, 人们已经发展了大量丰富的结果. 本节中我们将简要介绍可恢复性方面的结果.

假设 $\mathbf{x}=(x[1],\cdots,x[d])\in\mathbb{C}^d$. 在本节中, 为描述方便, 我们通过加 0 元素的方法, 将一个有限维向量视为无限维. 也就是, 我们可令 $x[k]=0$ 如果整数 $k\in(-\infty,0]\cup[d+1,\infty)$. 令

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\omega) \;:=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]e^{-ik\omega}.$$

通过简单的计算, 我们可得到

$$|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\omega)|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x[n]\overline{x[k]}e^{-i\omega(n-k)}=\sum_{n=-(d-1)}^{d-1} a[n]e^{-i\omega n},$$

此处

$$a[n] := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{x[k]}x[k+n].$$

注意到 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}|^2$ 是次数不超过 $d-1$ 的三角多项式. 因而, 可通过 $2d-1$ 个采样值 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(2k\pi/(2d-1))|^2, k=-(d-1),\cdots,d-1$ 唯一确定 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}|^2$. 那么, Fourier 相位恢复中的一个主要问题是:

问题 7. 给定 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\omega)|^2, \omega\in\mathbb{R}$ 或者给定 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(2k\pi/(2d-1))|^2, k=-(d-1),\cdots,d-1$, 重建 d- 维复向量 $\mathbf{x}=(x[1],\cdots,x[d])\in\mathbb{C}^d$.

根据简单的计算可知, 对 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_d)$ 做如下变换后, 所得到的信号 $\mathbf{x}'$ 满足 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(\omega)|^2 = |\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\omega)|^2$:

1. 旋转：对 $\alpha\in\mathbb{R}$, 令 $\mathbf{x}' := e^{i\alpha}\mathbf{x} := (e^{i\alpha}x[k])_{k\in\mathbb{Z}}$;
2. 平移：对 $n_0\in\mathbb{Z}$, 令 $\mathbf{x}' := (x[k-n_0])_{k\in\mathbb{Z}}$;
3. 反转共轭：$\mathbf{x}' := (\overline{x[-k]})_{k\in\mathbb{Z}}$.

因而, 如果信号 $\mathbf{x}$ 通过上述变换之后为 $\mathbf{x}'$, 本节中我们将视为同一信号. 我们说可通过 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}|^2$ 唯一确定 $\mathbf{x}$ 即指: $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}|^2 = |\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}|^2$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ 或 $\mathbf{x}$ 可通过上述三种变换变为 $\mathbf{x}'$. 通常而言, 通过 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}|^2$ 不能唯一确定 $\mathbf{x}$. 也就是如下问题的解通常是不唯一的：

$$\text{给定 } |\mathcal{F}_{\mathbf{x}_0}(\omega)|^2, \quad \text{此处}\mathbf{x}_0\in\mathbb{C}^d. \quad \text{寻找 } \mathbf{x}\in\mathbb{C}^d, \text{ 使得 } |\sum_{k=1}^{d} x[k]e^{-ik\omega}|^2 = |\mathcal{F}_{\mathbf{x}_0}(\omega)|^2. \tag{5.1}$$

我们用如下例子说明上述问题的解不唯一:

例 5.1. 假设 $\mathbf{x}_0 := (-2,0,1)$, $\mathbf{y}_0 := (-\sqrt{2},1,\sqrt{2})$. 那么

$$|\mathcal{F}_{\mathbf{x}_0}(\omega)|^2 = |\mathcal{F}_{\mathbf{y}_0}(\omega)|^2 = -2e^{2i\omega}+5-2e^{-2i\omega}.$$

虽然 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}_0}(\omega)|^2 = |\mathcal{F}_{\mathbf{y}_0}(\omega)|^2$, 但 $\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0$ 并不能通过旋转、平移以及反转共轭而彼此变换. 这个例子说明 (5.1) 的解并不具有唯一性.

事实上, 依赖于给定的 $|\mathcal{F}_{\mathbf{x}_0}(\omega)|^2$, 问题 (5.1) 解的个数可能是从 1 到 2^{d-1} 的任何整数 [35,36]. 为解决 Fourier 相位恢复不唯一的问题, 人们从两个方面进行了研究：一是选择更为广泛的观测方式, 如窗口 Fourier 变换等 [36]; 二是对信号 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d$ 附加一些先验信息的约束 [35].

我们在此简单介绍结晶相位恢复 [37]. 在结晶相位恢复中, 将信号 $\mathbf{x}$ 限定为实信号, 且非 0 元素数目不超过 s, 也就是假设 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ 且 $\|\mathbf{x}\|_0\le s$. 我们称满足条件 $\|\mathbf{x}\|_0\le s$ 的信号为 s-稀疏信号. 假设所得到的观测为

$$\mathbf{y} \ = \ |F\mathbf{x}| \in \mathbb{R}_+^d$$

这里 $F\in\mathbb{C}^{d\times d}$ 为离散 Fourier 矩阵. 因为此处要求 $\mathbf{x}$ 为实信号, 因而 $\mathbf{x}$ 的等价类为由下述三种变换生成; 乘单位常数 ±1; 平移; 反转. 因而, 若 $\mathbf{x}'\in\mathbb{R}^d$ 可由 $\mathbf{x}$ 经上述三种变换的复合产生, 则将 $\mathbf{x},\mathbf{x}'$ 视为同一向量. Bendory 及 Edidin 针对解的唯一性提出如下猜想:

猜想 2. 假设 $d\ge 2s$. 可由 $|F\mathbf{x}|$ 唯一确定几乎所有 s- 稀疏信号 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ [37].

6. 重建模型的性能

对于相位恢复, 常用的重建模型有两种, 我们分别称为二次模型与四次模型. 在本节中, 我们将主要介绍这两个模型的性能.

6.1. 二次模型

假设 $\mathbf{y} = |A\mathbf{x}_0| + \mathbf{w}$, 此处 $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$ 为观测矩阵, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ 为噪声向量. 那么, 一个自然的问题是如何通过 $\mathbf{y}$ 重建或近似重建 $\mathbf{x}_0$? 针对该问题, 一个流行的重建模型是

$$\hat{\mathbf{x}} \in \operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathbb{F}^d} \||A\mathbf{x}| - \mathbf{y}\|^2. \tag{6.1}$$

针对该模型, 人们主要关心如下问题:

1. 对什么样的矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$, 模型 (6.1) 对任意的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 的解均唯一?

2. 假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 是模型 (6.1) 的一个解, 那么 $\hat{\mathbf{x}}$ 与 $\mathbf{x}_0$ 的距离为多少?

3. 设计有效算法求解模型 (6.1).

对于无噪声情形, 也就是 $\mathbf{w} = 0$ 的情形, 根据最少观测次数的结果, 当 $m \geq 2d-1$ (复情形: $m \geq 4d-4$) 且 A 中的行向量处于一般位置, 那么, (6.1) 的解唯一. 然而, 对有噪声情形, 却有完全不同的结果. 文 [13] 中, 证明了如下结果:

定理 6.1. [13] 假设 m, d 均为正整数. 那么, 对任意的 $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$, 均存在一个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 使得 (6.1) 的解不唯一.

定理 6.1 的证明思路是: 首先证明 $\{|A\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{F}^d\} \subset \mathbb{R}^m$ 是一个非凸集合. 根据有限维空间中的最佳逼近定理 [15] 可知: 存在一个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 使得在非凸集合中的最佳逼近不是唯一的. 从而可得到上述定理. 文 [13] 中, 进一步证明了对实情形, 使得 (6.1) 的解不唯一的向量 $\mathbf{y}$ 组成的集合测度为 0, 并猜想类似的结论对复情形也成立.

下面我们转向第二个问题, 假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 是模型 (6.1) 的一个解, 那么, 如何估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 与 $\mathbf{x}_0$ 之间的距离? 下面定理对实情形给出了相关结果:

定理 6.2. [16] 假设 $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ 为一高斯随机矩阵. 假设 $m \gtrsim d$. 下面结果以不小于 $1 - 3\exp(-cm)$ 的概率成立: 对任意固定的 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, 假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 是模型 (6.1) 的一个解, 那么

$$\min\{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0\|, \|\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0\|\} \lesssim \frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{m}},$$

这里 $c > 0$ 为一常数.

在本文中, 我们用 $m \gtrsim d$ 表示存在一个绝对常数 $C > 0$ 使得 $m \geq Cd$. 定理 6.2 给出了模型 (6.1) 的非渐近估计.

注 6.1. 定理 6.2 仅仅考虑了对实信号二次模型的恢复性能. 我们猜测定理 6.2 中的结果也可扩展到复信号. 注意到定理 6.2 的证明需要用到强 RIP 性质 [17], 而该性质仅对实情形成立. 因而, 对复情形, 可能需要采用完全不同的方法进行研究.

6.2. 四次模型

假设 $\mathbf{b}=|A\mathbf{x}_0|^2+\mathbf{w}$, 此处 $A\in\mathbb{F}^{m\times d}$ 为观测矩阵, $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^m$ 为噪声向量. 那么, 重建 $\mathbf{x}_0$ 的四次模型是:

$$\hat{\mathbf{x}}\in\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathbb{F}^d}\||A\mathbf{x}|^2-\mathbf{b}\|^2. \tag{6.2}$$

注意到 $|\langle\mathbf{a}_j,\mathbf{x}\rangle|^2=\mathbf{a}_j^*\mathbf{x}\mathbf{x}^*\mathbf{a}_j$, 此处 $\mathbf{x}\mathbf{x}^*\in\mathbb{C}^{d\times d}$ 为秩 1 矩阵. 因而, 对于四次模型的研究, 主要是从恢复矩阵 $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^*$ 的角度出发. 令 $\mathcal{A}:\mathcal{H}^{d\times d}(\mathbb{C})\to\mathbb{R}^m$ 是如下定义的线性映射:

$$\mathcal{A}(X):=(\mathbf{a}_1^*X\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2^*X\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m^*X\mathbf{a}_m)^\top, \tag{6.3}$$

此处, $\mathcal{H}^{d\times d}(\mathbb{C}):=\{X\in\mathbb{C}^{d\times d}:X^*=X\}$. 人们首先考虑了如下矩阵恢复模型的性能 [14]:

$$\min_{X\in\mathcal{H}^{d\times d}(\mathbb{C})}\|\mathcal{A}(X)-\mathbf{b}\|_2^2\quad\text{s.t.}\quad\operatorname{rank}(X)\le r. \tag{6.4}$$

该模型在秩不超过 r 的矩阵集合里, 寻找一矩阵使得 $\mathcal{A}(X)$ 与 $\mathbf{b}$ 尽量接近.

定理 6.3. [14] 假设 $\mathbf{a}_j\in\mathbb{C}^d,j=1,\cdots,m$, 是独立的高斯随机向量. 假设 $m\gtrsim dr$. 那么, 下面结论以概率至少为 $1-\exp(-cm)$ 成立: 对任意 $X_0\in\mathbb{C}^{d\times d}$ 且 $\operatorname{rank}(X_0)\le r$, 令 $b_j=\mathbf{a}_j^*X_0\mathbf{a}_j+w_j,j=1,\cdots,m$ 为对 X_0 的有噪声观测. 假设 $\widehat{X}$ 是模型 (6.4) 的解. 那么,

$$\|\widehat{X}-X_0\|_F\ \lesssim\ \frac{\|\mathbf{w}\|_2}{\sqrt{m}},$$

此处 $\mathbf{w}:=(w_1,\cdots,w_m)^\top\in\mathbb{R}^m$ 为噪声向量, c 为一正常数.

在上述定理中取 $r=1$, 可得到四次模型的性能:

定理 6.4. [14] 假设观测向量 $\mathbf{a}_j\sim 1/\sqrt{2}\cdot\mathcal{N}(0,I_d)+i/\sqrt{2}\cdot\mathcal{N}(0,I_d)$ 是独立同分布的高斯随机向量且观测次数 $m\gtrsim d$. 那么, 下面结论以概率至少 $1-\exp(-cm)$ 成立: 对任意 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{C}^d$, 假设 $\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{C}^d$ 是 (6.2) 的一个解, 且 $b_j=|\langle\mathbf{a}_j,\mathbf{x}_0\rangle|^2+\eta_j$, $j=1,\cdots,m$, 那么

$$\min_{\theta\in[0,2\pi)}\|\tilde{\mathbf{x}}-e^{i\theta}\mathbf{x}_0\|\ \le\ C\min\left\{\frac{\sqrt{\|\eta\|_2}}{m^{1/4}},\frac{\|\eta\|_2}{\|\mathbf{x}_0\|_2\cdot\sqrt{m}}\right\},$$

这里, C 及 c 均为正常数.

7. 求解算法

相位恢复的算法可分为两类：一种是针对上面所介绍的非凸模型设计优化算法；另一种则是针对相位恢复设计凸模型, 然后采用凸模型的求解算法进行求解. 在本节中, 我们首先介绍求解相位恢复的一些非凸算法. 这其中, 为保证算法可收敛到全局最优解, 初始值的选择至关重要. 因而, 我们从初始值的选择开始介绍. 为描述方便, 对 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^d$, 我们采用 $\operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\min_{\theta\in\mathbb{R}}\|\mathbf{x}-e^{i\theta}\mathbf{y}\|$ 表示 $\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}$ 之间的距离.

7.1. 初始值的选择

相位恢复中, 一种常用的初始值选择方法是谱方法. 假设观测值

$$y_j=|\langle\mathbf{a}_j,\mathbf{x}_0\rangle|,\quad j=1,\cdots,m.$$

在谱方法中, 通常选择矩阵 $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m y_j^2\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*$ 最大特征值对应的特征向量作为初始值, 这里该特征向量的范数取为 $\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m y_j^2}{m}}$. 在文 [19] 中, 提出一种改进的谱方法, 其基本思想是选择一个合适的函数 f, 构造矩阵

$$Y_f := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m f(y_j)\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*$$

并选择与该矩阵最大特征值对应的特征向量作为初始值. 文 [19] 中, 作者建议选择 $f(y_j) = \frac{1}{2} - \exp\big(-\frac{y_j^2}{\lambda^2}\big)$, 此处 $\lambda := \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m y_j^2}$. 下面定理给出了此种初始化方法的性能:

定理 7.1. [19] 假设 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^d, j = 1, \cdots, m$ 为高斯随机向量. 假设 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^d$, 以及 $y_j = |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle|$. 假设 $\mathbf{z}_0$ 是矩阵

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{2} - \exp\big(-\frac{y_j^2}{\lambda^2}\big)\right)\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*$$

最大特征值对应的特征向量, 此处 $\lambda := \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m y_j^2}$. 那么, 对任意的 $\theta > 0$, 存在一个正常数 C_θ 使得当 $m \geq C_\theta d$ 时,

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \ \le\ \sqrt{3\theta}\|\mathbf{x}_0\|$$

以概率至少 $1 - 4\exp(-c_\theta d)$ 成立, 此处 $c_\theta > 0$.

7.2. 交替投影算法

交替投影算法是相位恢复中应用最为广泛的一种算法 [27, 28], 也可以看作是对模型 (6.1) 的求解算法. 我们对无噪声情形, 也就是 $\mathbf{y} = |A\mathbf{x}_0|$ 的情形, 介绍算法的思想.

令

$$S_1 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : |\mathbf{z}| = \mathbf{y}\}, \quad S_2 := \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^d\}.$$

相位恢复也就是寻找一元素 $\mathbf{z}_0 \in S_1 \cap S_2$, 然后求解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{z}_0$ 从而可恢复 $\mathbf{x}_0$. 交替投影算法是寻找两个集合交集元素的一个经典算法. 我们简要介绍该算法思想. 对于紧集 $S \subset \mathbb{R}^m$, 称 $P_S : \mathbb{C}^m \to S$ 为在 S 上的投影, 如果 P_S 满足:

$$\|\mathbf{y} - P_S(\mathbf{y})\| = \inf_{\mathbf{e}\in S}\|\mathbf{y} - \mathbf{e}\|.$$

通过简单的计算, 我们可得到

$$P_{S_1}(\mathbf{z}) = \mathrm{phase}(\mathbf{z}) \odot \mathbf{y}, \quad P_{S_2}(\mathbf{z}) = A^\dagger\mathbf{z},$$

这里 $\mathrm{phase}(\mathbf{z})$ 是将 $\mathbf{z}$ 中每个元素的相位取出, 形成一新的向量, $\odot$ 是两个向量对应元素之间做乘积, $A^\dagger$ 则表示 A 的广义逆. 交替投影算法的基本思想是: 选择一初始值 $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^m$, 然后计算其在 S_1 上的投影, 得到一新元素 $\mathbf{z}_1 \in P_{S_1}(\mathbf{z}_0)$. 之后将 $\mathbf{z}_1$ 在 S_2 上投影, 得到一新元素 $\mathbf{z}_2 \in P_{S_2}(\mathbf{z}_1)$. 将该过程持续下去, 即得到一序列 $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \cdots$. 在合适的条件下, 该序列将收敛到 $S_1 \cap S_2$ 中的一个元素. 在相位恢复问题中, 虽然 $S_2 \subset \mathbb{R}^m$ 为凸集, 但 $S_1 \subset \mathbb{R}^m$ 通常并非凸集. 这使得针对相位恢复的交替投影算法的分析并不能直接套用文献中的结果. 针对高斯随机观测情形, Waldspurger 证明了如下结果:

定理 7.2. [26] 假设 $\mathbf{a}_j, j=1,\cdots,m$ 是独立的高斯随机向量, 假设 $m \gtrsim d$. 那么, 存在 $\delta \in (0,1)$ 使得如下结果以概率至少为 $1-C_1\exp(-C_2 m)$ 成立: 由交替投影算法产生的序列 $\mathbf{z}_t, t=1,2,\cdots$ 满足

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|\mathbf{z}_t - e^{i\theta}\mathbf{x}_0\| \ \le\ \delta^t\|\mathbf{x}_0\|,$$

这里, C_1, C_2 为正常数, 我们假设初始值 $\mathbf{z}_0$ 与 $\mathbf{x}_0$ 距离小于一固定常数.

7.3. 基于振幅扰动模型的梯度下降法

模型 (6.1) 即为求解

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathbb{F}^d} f(\mathbf{x}) := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m (|\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}\rangle| - y_j)^2. \tag{7.1}$$

注意到 (7.1) 中的目标函数 $f(\mathbf{x})$ 不可导. 但是, 如果用一个光滑的函数近似代替 $f(\mathbf{x})$, 就可用梯度下降方法进行求解. 本节中主要介绍用如下光滑函数近似代替 $f(\mathbf{x})$ [29]:

$$f_\epsilon(\mathbf{z}) := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(\sqrt{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{z}|^2+\epsilon_j^2} - \sqrt{y_j^2+\epsilon_j^2}\right)^2.$$

针对模型

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathbb{F}^d} f_\epsilon(\mathbf{x})$$

我们可设计梯度下降方法进行求解, 其迭代格式如下:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \mu\nabla f_\epsilon(\mathbf{z}_k), \tag{7.2}$$

这里 μ 是迭代步长, $\nabla f_\epsilon(\mathbf{z})$ 是 $f_\epsilon(\mathbf{z})$ 的 Wirtinger 导数, 其定义如下:

$$\nabla f_\epsilon(\mathbf{z}) := \left(\frac{\partial f_\epsilon(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}}\Big|_{\bar{\mathbf{z}}=\text{constant}}\right)^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{\sqrt{y_j^2+\epsilon_j^2}}{\sqrt{|\mathbf{a}_j^*\mathbf{z}|^2+\epsilon_j^2}}\right)\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*\mathbf{z}.$$

定理 7.3. [29] 假设 $\mathbf{x}_0$ 为目标信号, 且 $\epsilon = \sqrt{\alpha}\mathbf{b}$ 此处 $0.37 \le \alpha \le 29$. 令 $\mathbf{z}_k, k\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 为通过 (7.2) 产生的序列, 此处 $\mu = \beta_\alpha/1.001^2$, β_α 是一个只依赖于 α 的正常数. 假定 $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{S}_{\mathbf{x}}(1/10)$. 那么, 存在正常数 C, c 使得对 $m \ge Cd$, 下面结果以概率至少 $1-\exp(-cd)$ 成立：对所有 $k\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$

$$\operatorname{dist}^2(\mathbf{z}_{k+1},\mathbf{x}_0) \le (1-\beta_\alpha^2/1.001^2)\cdot \operatorname{dist}^2(\mathbf{z}_k,\mathbf{x}_0).$$

特别是, 若取 $\alpha = 0.826$, 则下面结果成立的概率至少为 $1-\exp(-cn)$, 对所有 $k\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{z}_k,\mathbf{x}_0) \le \frac{1}{10}\left(1-\frac{0.0107^2}{1.001^2}\right)^{k/2}\cdot\|\mathbf{x}_0\|.$$

7.4. WF 方法

WF (Wirtinger Flow) 方法是基于 Wirtinger 导数设计求解相位恢复的梯度下降方法 [40]. 本节中, 我们简要介绍该方法. 考虑

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^d} f(\mathbf{x}),$$

此处

$$f(\mathbf{x}) := \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}(|\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}\rangle|^2 - y_j^2)^2.$$

其迭代格式如下：

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \frac{\mu_{t+1}}{\|\mathbf{z}_0\|^2}\nabla f(\mathbf{z}_t),$$

这里的梯度是由 Wirtinger 导数得到, $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^d$ 为初始值. 假设目标信号 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^d$ 且 $y_j = |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle|, j = 1, \cdots, m$. 假设初始值满足 $\mathrm{dist}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \le \frac{1}{8}\|\mathbf{x}_0\|$. 取 $\mu_t = \mu \lesssim \frac{1}{d}$. 针对高斯随机观测, 则有 [40]:

$$\mathrm{dist}(\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_0) \le \frac{1}{8}(1 - \frac{\mu}{4})^{t/2}\|\mathbf{x}_0\|$$

7.5. 高斯 - 牛顿算法

高斯 - 牛顿算法是针对 4 次模型的算法. 为描述方便我们仅针对实信号情形介绍高斯 - 牛顿算法. 对于观测向量 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^d$, 我们设 $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{j,R} + \mathbf{a}_{j,I}i$, 这里 $\mathbf{a}_{j,R}, \mathbf{a}_{j,I} \in \mathbb{R}^d$. 那么, 4 次模型可描述为

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m} F_j(\mathbf{x})^2, \tag{7.3}$$

此处,

$$F_j(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}_{j,R}, \mathbf{x}\rangle^2 + \langle \mathbf{a}_{j,I}, \mathbf{x}\rangle^2 - y_j^2.$$

高斯 - 牛顿法的主要思想是在当前迭代点 $\mathbf{x}_k$ 处对 F_j 做泰勒展开, 然后用线性项 $F_j(\mathbf{x}_k) + \nabla F_j(\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ 近似代替 $F_j(\mathbf{x})$, 从而可通过求解线性最小二乘更新 $\mathbf{x}_k$:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}(F_j(\mathbf{x}_k) + \nabla F_j(\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k))^2. \tag{7.4}$$

下面定理表明高斯 - 牛顿算法具有 2 阶收敛性质：

定理 7.4. [19] 假设 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ 且 $\|\mathbf{x}_0\| = 1$ 为任意目标信号. 假设 $0 < \delta \le 1/93$ 为一常数. 假设 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\mathrm{dist}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \le \sqrt{\delta}$. 假设 $y_j = |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}_0\rangle|, j = 1, \cdots, m$, 此处 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^d$ 为高斯随机向量且 $m \gtrsim d\log d$. 假设 $\mathbf{x}_{k+1}$ 通过求解 (7.4) 得到. 那么, 以概率至少为 $1 - c/d^2$, 我们有

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_0) \le \beta \cdot \mathrm{dist}^2(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0),$$

此处

$$\beta = \frac{8(7 + \frac{3}{4}\delta)(1 + \sqrt{\delta})}{(8 - \delta)(1 - \sqrt{\delta})^2} \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

7.6. 求解相位恢复的凸模型

上述算法主要针对非凸模型而设计. 在求解相位恢复中, 另外一类流行的方法是构造凸模型, 通过求解凸模型从而恢复信号. 本节将简要介绍 PhaseLift 模型. 对于 $\mathbf{a}_j, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$, 注意到

$$|\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}\rangle|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^*\mathbf{x}\mathbf{x}^*).$$

令 $X_0 := \mathbf{x}\mathbf{x}^*$. 那么, 相位恢复的目的就是通过

$$y_j^2 \ := \ \mathrm{tr}(\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^* X_0), \quad j = 1, \cdots, m$$

重建秩不超过 1 的 Hermitian 矩阵 $X_0 \in \mathbb{C}^{d\times d}$. 也就是求解如下的规划问题:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^{d\times d}} \mathrm{rank}(X) \\ &\text{s.t.} \quad \mathrm{tr}(\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^* X) = y_j^2, j = 1, \cdots, m, X \succeq 0. \end{aligned}$$

注意到上述模型是非凸的, 人们通常将其松弛为如下凸模型:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^{d\times d}} \mathrm{tr}(X) \\ &\text{s.t.} \quad \mathrm{tr}(\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^* X) = y_j^2, j = 1, \cdots, m, X \succeq 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

根据 [38,39] 中的结果, 如果 $\mathbf{a}_j$ 是高斯随机向量, 且观测个数 $m \gtrsim d$, 则模型 (7.5) 的解高概率为 $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^*$.

8. 总结与展望

本文主要介绍相位恢复的基础理论、模型性能以及算法. 基础理论方面主要介绍了相位恢复中的最少观测次数问题, 以及与矩阵恢复、非奇异双线性形式之间的关联. 模型方面主要介绍了求解相位恢复两个模型的性能. 算法方面我们主要针对求解相位恢复的非凸算法以及凸模型开展了介绍. 相位恢复中仍有很多吸引人的研究课题, 值得进一步探索. 我们在此列举几个当前活跃的研究方向:

1. 在一些应用领域, 人们会事先知道信号的一些结构性信息, 如稀疏性等. 因而, 人们自然关心如何借助信号的稀疏性有效求解相位恢复. 稀疏信号相位恢复中的主要研究问题是: 在尽量少的无相位观测下, 设计有效的模型和算法恢复信号. 而主要研究思路是将压缩感知 [47] 中的结果扩展到无相位观测情形 [41–43]. 特别是, 借助 S-PhaseLiftOff 模型, 人们设计了通过无相位观测恢复稀疏信号 DCA 算法 [44]. 数值实验表明, 该算法对于通过无相位观测恢复稀疏信号的有效性.

2. 相位恢复中, 另外一种模型就是仿射相位恢复, 也就是通过 $b_j = |\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}\rangle + \alpha_j|, j = 1, \cdots, m$ 重建 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$. 这里 $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^d$ 为观测向量, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ 为平移量. 不同于传统相位恢复, 在仿射相位恢复中, 人们可以准确恢复 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d$, 而不是 $\mathbf{x}$ 的某个等价类. 正因如此, 与传统相位恢复相比, 仿射相位恢复在多个方面, 如理论、模型性能及求解算法等, 都与传统相位恢复有很多不同. 因而, 需要单独发展相应的理论及算法. 例如, 针对最少观测次数问题, 容易确定仿射相位恢复最少观测次数是 $3d$ [45], 如同本文所介绍, 在经典相位恢复中这个数字是很难准确给出的. 目前, 关于仿射相位恢复的研究尚处于起步阶段, 有大量的问题可供深入探索 [45,46].

3. 相位恢复的连续形式是通过 $|\mathcal{F}(f)|$ 重建 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 为保证重建的唯一性, 人们通常会对 f 加一些约束, 也就是要求 f 落在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中一个特定的集合中. 一种常用约束条件是要求 f 是一个区域 $D \subset \mathbb{R}^d$ 的特征函数, 也就是

$$f(x) = 1_D(x) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

该问题也在离散几何等领域也备受关注. 可以证明: 如果 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸体, 则可通过 $|\mathcal{F}(1_D)|$ 唯一重建 D [49]. 然而, 尚有大量的问题需要进一步探索, 如: 对什么类型的 $D \subset \mathbb{R}^d$ 人们可通过 $|\mathcal{F}(1_D)|$ 对 D 进行重建; 如何设计有效的算法对 D 进行重建等 [48].

致谢. 中国科学院数学与系统科学研究院骆顺龙研究员向作者介绍了相位恢复与量子信息的关联, 并提供了相应文献 [33], 在此表示感谢. 中国海洋大学许艳教授、杭州师范大学夏羽老师、香港科技大学黄猛博士、徐孜立博士, 中国科学院数学与系统科学研究院研究生朱子恒、林仲烁等认真阅读了初稿, 并提出修改意见, 亦表示感谢. 特别感谢匿名审稿人仔细阅读全文, 并提出了宝贵的修改意见.

参 考 文 献

[1] Eldar Y C, Needell D and Plan Y. Uniqueness conditions for low-rank matrix recovery[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2012, 33: 309–314.

[2] Harris J. Algebraic geometry Vol. 133 of GTM, Springer-Verlag, New York, 1992. A first course, corrected reprint of the 1992 original.

[3] Dey P, Edidin D. Real degeneracy loci of matrices and phase retrieval, arXiv:2105.14970, 2021.

[4] Xu Zhiqiang. The minimal measurement number for low-rank matrix recovery[J] Appl. Comp. Harm. Anal., 2018, 44: 497–508.

[5] Shapiro D B. Compositions of quadratic forms, volume 33. Walter de Gruyter, 2000.

[6] Wang Yang and Xu Zhiqiang. Generalized phase retrieval: measurement number, matrix recovery and beyond[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2019, 27: 423–446.

[7] Edidin D. Projections and phase retrieval[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2015, 42: 350–359.

[8] James I M. Euclidean models of projective spaces[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1971, 3: 257–276.

[9] Mahowald M. On the embeddability of the real projective spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1962, 13: 763–764.

[10] Radu Balan, Pete Casazza and Dan Edidin. On signal reconstruction without phase[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2006, 20: 345–356.

[11] Bahmanpour S, Cahill J, Casazza P G, Jasper J and Woodland L M. Phase retrieval and norm retrieval, arXiv:1409.8266.

[12] Finkelstein J. Pure-state informationally complete and ' really' complete measurements[J]. Physical Review A, 2004: 70.5.

[13] Huang Meng, Xu Zhiqiang. Uniqueness and stability for the solution of a nonlinear least squares problem. arXiv: 2104.10841.

[14] Huang Meng, Xu Zhiqiang. Performance bound of the intensity-based model for noisy phase retrieval. arXiv: 2004.08764.

[15] Deutsch F R. Best approximation in inner product spaces. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] Huang M, Xu Zhiqiang. The estimation performance of nonlinear least squares for phase retrieval[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2020, 66: 7967–7977.

[17] Voroninski V, Xu Zhiqiang. A strong restricted isometry property, with an application to phaseless compressed sensing[J]. Applied Computational Harmonic Analysis, 2016, 40: 386–395.

[18] Grohs P, Koppensteiner S and Rathmair M. Phase Retrieval: Uniqueness and Stability[J]. SIAM Rev., 2020, 62: 301–350.

[19] Gao Bing, Xu Zhiqiang. Phaseless recovery using the Gauss-Newton method[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2017, 65: 5885–5896.

[20] Dugger D, Isaksen D C. The hopf condition for bilinear forms over arbitrary fields[J]. Annals of mathematics, 2007, 165: 943–964.

[21] Kee Yuen Lam. Some new results on composition of quadratic forms[J]. Inventiones mathematicae, 1985, 79: 467–474.

[22] Bandeira A S, Cahill J, Mixon D G and Nelson A A. Saving phase: injectivity and stability for phase retrieval[J]. Appl. Comput. Harmon. Anal., 2014, 37: 106–125.

[23] Vinzant C. A small frame and a certificate of its injectivity. arXiv preprint arXiv:1502.04656, 2015.

[24] Huang Meng, Rong Yi and Wang Yang and Xu Zhiqiang. Almost Everywhere Generalized Phase Retrieval[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2021, 50: 16–33.

[25] Rong Yi, Wang Yang and Xu Zhiqiang. Almost everywhere injectivity conditions for the matrix recovery problem[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2021, 50: 386–400.

[26] Waldspurger I. Phase retrieval with random gaussian sensing vectors by alternating projections[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64: 3301–3312.

[27] Gerchberg R, Saxton W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. Optik, 1972, 35: 237–246.

[28] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758–2769.

[29] Gao B, Sun, Wang Y and Xu Z Q. Perturbed Amplitude Flow for Phase Retrieval[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 5427–5440.

[30] Pauli W. Die allgemeinen prinzipien der wellenmechanik, J. W. Edwards, 1946.

Reichenbach H. Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Birkhäuser, 1949.

[31] Vogt A. Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state, in: A.R. Marlow (Ed.), Mathematical Foundations of Quantum Theory, Academic Press, NewYork, 1978.

[32] Jaming P. Uniqueness results in an extension of Pauli's phase retrieval problem, Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014, 37: 413–441.

[33] Carmeli C, Heinosaari T, Schultz J. et al. How many orthonormal bases are needed to distinguish all pure quantum states?. Eur. Phys. J. D 69, 179 (2015).

[34] Moroz B Z, Perelomov A M. On a problem posed by Pauli. Theoretical and Mathematical Physics, 1994, 101(1): 1200–1204.

[35] Beinert R, Plonka G. Ambiguities in One-Dimensional Discrete Phase Retrieval from Fourier Magnitudes. J Fourier Anal Appl , 2015, 21: 1169–1198.

[36] Bendory T, Beinert R and Eldar Y C, Fourier Phase Retrieval: Uniqueness and Algorithms, arXiv:1705.09590

[37] Bendory T, Edidin D. Toward a mathematical theory of the crystallographic phase retrieval problem[J]. SIAM Journal on Mathematics of Data Science, 2020, 2(3): 809–839.

[38] Candès E J, Strohmer T and Voroninski V. Phaselift: Exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming[J]. Commun. Pure Appl. Math., 2013, 66: 1241–1274.

[39] Candès E J, Li X. Solving quadratic equations via PhaseLift when there are about as many equations as unknowns[J]. Found. Comut. Math., 2014, 14 : 1017–1026.

[40] Candès E J, Li X and Soltanolkotabi M. Phase retrieval via Wirtinger flow: Theory and algorithms[J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2015, 61 : 1985–2007.

[41] Wang Yang, Xu Zhiqiang. Phase retrieval for sparse signals[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014, 37: 531–544.

[42] Xia Yu, Xu Zhiqiang. The recovery of complex sparse signals from few phaseless measurements[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2021, 50: 1–15.

[43] Voroninski Vladislav, Xu Zhiqiang. A strong restricted isometry property, with an application to phaseless compressed sensing[J]. Applied Computational Harmonic Analysis, 2016, 40(2): 386–395.

[44] Xia Yu, Xu Zhiqiang. Sparse phase retrieval via Phaseliftoff[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2021, 69: 2129–2143.

[45] Gao Bing, Sun Qiyu, Wang Yang and Xu Zhiqiang. Phase Retrieval From the Magnitudes of Affine Linear Measurements[J]. Advance in Applied Mathematics, 2018, 93: 121–141.

[46] Huang Meng, Xu Zhiqiang. Phase retrieval from the norms of affine transformations[J]. Advance in Applied Mathematics, 2021, 130: 102243.

[47] 许志强. 压缩感知 [J]. 中国科学, 2012, 42(9): 865–877.

[48] Bianchi G, Garder R J and Kiderlen M. Phase retrieval for characteristic functions of convex bodies and reconstruction from covariograms[J]. Journal of the America Mathematical Society, 2011, 24: 293–343.

[49] Averkov G, Bianchi G. Confirmation of Matheron's conjecture on the covariogram of a planar convex body[J]. J. Europ. Math. Soc., 2009, 11: 1187–1202.

PHASE RETRIEVAL: THEORY, MODEL AND ALGORITHMS

Xu Zhiqiang

(*LSEC, Institute of Computational Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract

Phase retrieval is raised in many areas, such as imaging, optics and quantum tomography etc, which attracts many attentions of experts from different areas, such as computational mathematics and data sciences etc. The aim of this paper is to introduce the basic theoretical problems in phase retrieval and also introduce many algorithms for solving phase retrieval.

Keywords: phase retrieval; nonlinear least square; matrix recovery; alternating projection method.

2010 Mathematics Subject Classification: 42C15, 46C05.