时间序列分析实验报告书

班级：统计 2001 姓名：张逸敏　　实验日期：2023.4.25

实验三　ARIMA 模型的建模与预测

1 实验目的

R 语言的基本操作，针对非平稳序列建立 ARIMA 模型并做预测。

2 实验条件

PC 机，R 语言

3 实验原理

具有如下结构的模型称为求和自回归移动平均模型，简记为 ARIMA(p,d,q)模型：

$$\begin{cases} \Phi(B)\nabla^d x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\ \mathrm{E}(\varepsilon_t)=0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2,\ \mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0,\ s\neq t \\ \mathrm{E}(x_s\varepsilon_t)=0,\ \forall s<t \end{cases}$$

式中，$\nabla^d=(1-B)^d$；$\Phi(B)=1-\phi_1 B-\ldots-\phi_p B^p$，为平稳可逆 ARMA(p,q)模型的自回归系数多项式；$\Theta(B)=1-\theta_1 B-\ldots-\theta_q B^q$，为平稳可逆 ARMA(p,q)模型的移动平滑系数多项式。

求和自回归移动平均模型这个名字的由来是 d 阶差分后序列可以表示为：

$$\nabla^d x_t=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i C_d^i x_{t-i}$$

式中，$C_d^i=\frac{d!}{i!\,(d-i)!}$，即差分后序列等于原序列的若干序列值的加权和，而对它又可以拟合自回归移动平均(ARMA)模型，所以称它为求和自回归移动平均模型。

ARIMA 模型可以简记为：

$$\nabla^d x_t=\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$$

式中，$\{\varepsilon_t\}$为零均值白噪声序列。

由上式可以看出，ARIMA 模型的实质就是差分运算与 ARMA 模型的组合。这一关系意义重大。这说明任何非平稳序列如果能通过适当阶数的差分实现差分后平稳，就可以对差分后序列进行 ARMA 模型拟合。而 ARMA 模型的分析方法非常成熟，这意味着对差分平稳序列的分析也将是非常简单、非常可靠的。

特别地，当$d=0$时，ARIMA(p,d,q)模型实际上就是 ARMA(p,q)模型。

当 $p=0$ 时，ARIMA(0,d,q)模型可以简记为 IMA(d,q)模型。

当 $q=0$ 时，ARIMA(p,d,0)模型可以简记为 ARI(p,d)模型。

当 $d=1, p=q=0$ 时，ARIMA(0,1,0)模型为：

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\mathrm{E}(\varepsilon_t)=0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2,\ \mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0,\ s\neq t$$
$$\mathrm{E}(x_s\varepsilon_t)=0, \forall s<t$$

该模型又称为随机游走模型。

作为一个最简单地 ARIMA 模型，随机游走模型目前广泛应用于计量经济学领域。传统地经济学家普遍认为投机价格地走势类似于随机游走模型，随机游走模型也是有效市场理论的核心。

4 实验过程与结果

4.1 实验案例表述

2. 我国 1949—2008 年每年铁路货运量（单位：万吨）数据如表 4—15 所示。

第 4 章 非平稳序列的随机分析 155

表 4—15

年份	铁路货运量	年份	铁路货运量	年份	铁路货运量
1949	5 589	1969	53 120	1989	151 489
1950	9 983	1970	68 132	1990	150 681
1951	11 083	1971	76 471	1991	152 893
1952	13 217	1972	80 873	1992	157 627
1953	16 131	1973	83 111	1993	162 794
1954	19 288	1974	78 772	1994	163 216
1955	19 376	1975	88 955	1995	165 982
1956	24 605	1976	84 066	1996	171 024
1957	27 421	1977	95 309	1997	172 149
1958	38 109	1978	110 119	1998	164 309
1959	54 410	1979	111 893	1999	167 554
1960	67 219	1980	111 279	2000	178 581
1961	44 988	1981	107 673	2001	193 189
1962	35 261	1982	113 495	2002	204 956
1963	36 418	1983	118 784	2003	224 248
1964	41 786	1984	124 074	2004	249 017
1965	49 100	1985	130 709	2005	269 296
1966	54 951	1986	135 635	2006	288 224
1967	43 089	1987	140 653	2007	314 237
1968	42 095	1988	144 948	2008	330 354

请选择适当的模型拟合该序列，并预测 2009—2013 年我国铁路货运量。

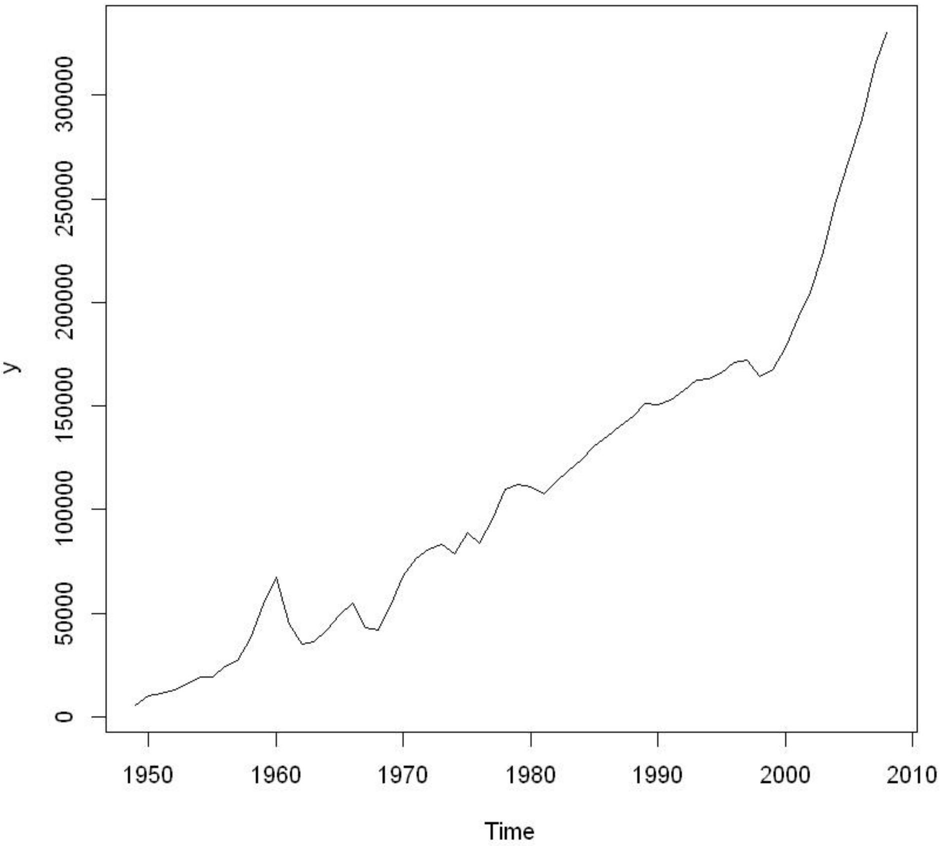
4.2 实验过程与代码

4.2.1 判断 $\{x_t\}$ 的平稳性

首先读入数据，创建时间序列对象。

```
y = ts(c(5589, 9983, 11083, 13217, 16131, 19288, 19376, 24605, 27421, 38109, 54410, 67219, 44988, 35261, 36418, 41786, 49100, 54951, 430
plot(y)
```

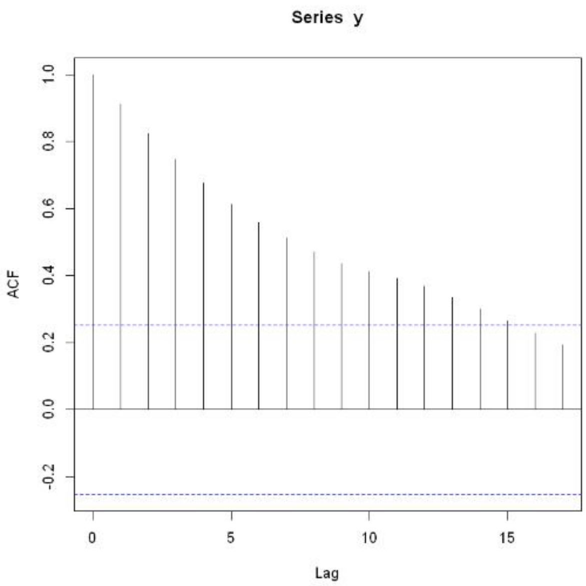
接下来绘制时序图。



观察时序图，发现有明显的递增趋势，序列非平稳。

为了稳妥起见，还需要进行自相关图检验。

```
acf(y)
```



自相关图显示序列的自相关系数递减到零的速度非常缓慢,大多数自相关系数在2倍标准差以外，说明序列不是平稳序列。

4.2.2 对原序列进行1阶差分

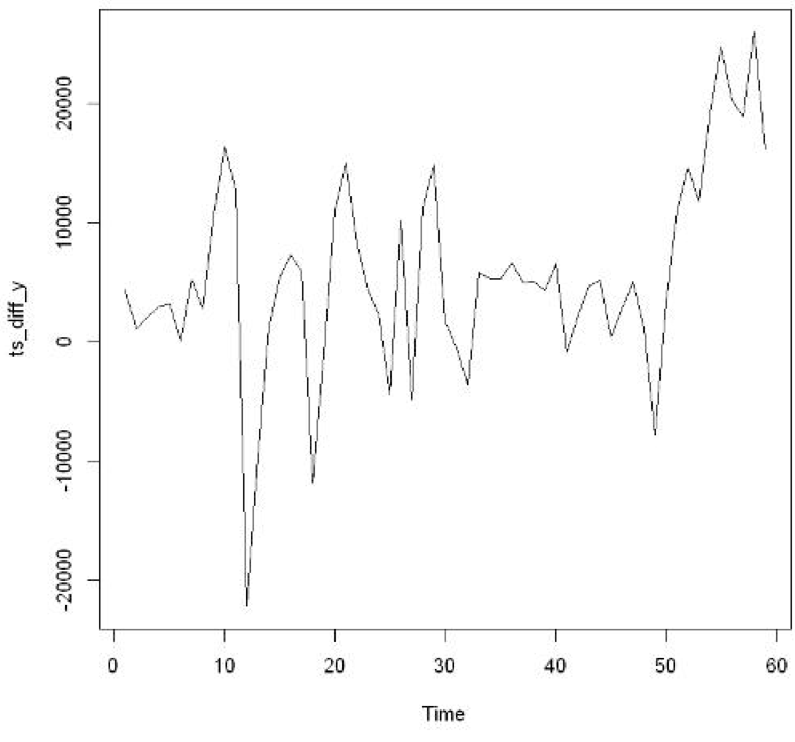
由于原序列呈现出近似线性趋势，所以选择1阶差分。

```
n = length(y)
diff_y = y[2:n] - y[1:n-1]
diff_y
```

4394 · 1100 · 2134 · 2914 · 3157 · 88 · 5229 · 2816 · 10688 · 16301 · 12809 · -22231 · -9727 · 1157 · 5368 · 7314 · 5851 · -11862 · -994 · 11025 · 15012 · 8339 · 4402 · 2238 · -4339 · 10183 · -4889 · 11243 · 14810 · 1774 · -614 · -3606 · 5822 · 5289 · 5290 · 6635 · 4926 · 5018 · 4295 · 6541 · -808 · 2212 · 4734 · 5167 · 422 · 2766 · 5042 · 1125 · -7840 · 3245 · 11027 · 14608 · 11767 · 19292 · 24769 · 20279 · 18928 · 26013 · 16117

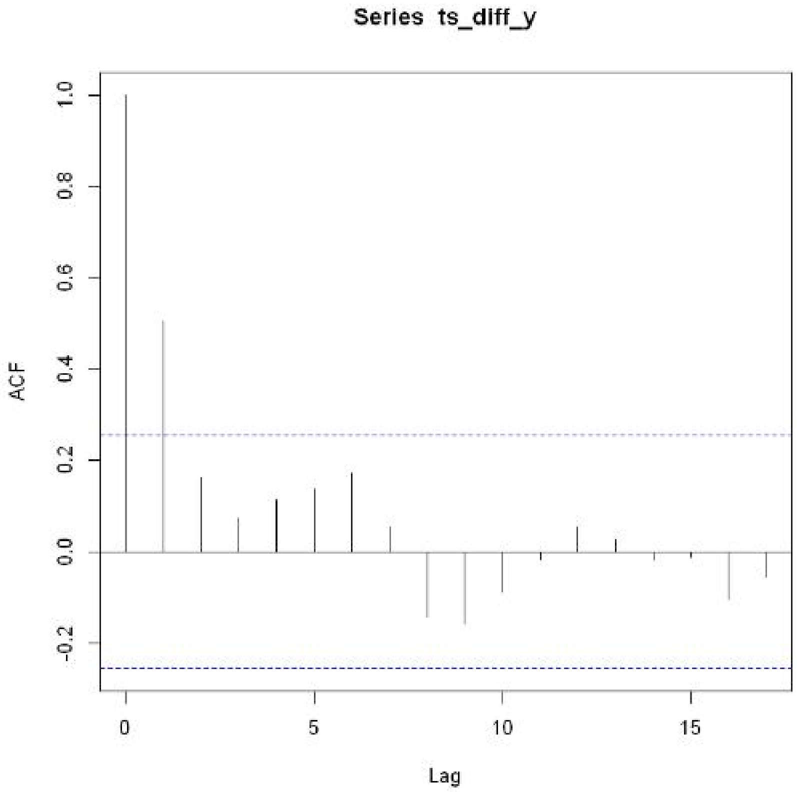
一阶差分后时序图如下。

```
ts_diff_y = ts(diff_y,frequency = 1)
plot(ts_diff_y)
```



时序图显示，差分后序列在均值附近比较稳定地波动。为了进一步确定稳定性，考察差分后序列地自相关图，如下所示。

```
acf(ts_diff_y)
```



自相关图显示序列有很强的短期相关性,所以可以初步认为 1 阶差分后序列平稳。

4.2.3 对平稳的 1 阶差分序列进行白噪声检验

白噪声检验结果如下所示。

```
Box.test(ts_diff_y, type = "Ljung-Box", lag=6)
Box.test(ts_diff_y, type = "Ljung-Box", lag=12)
```

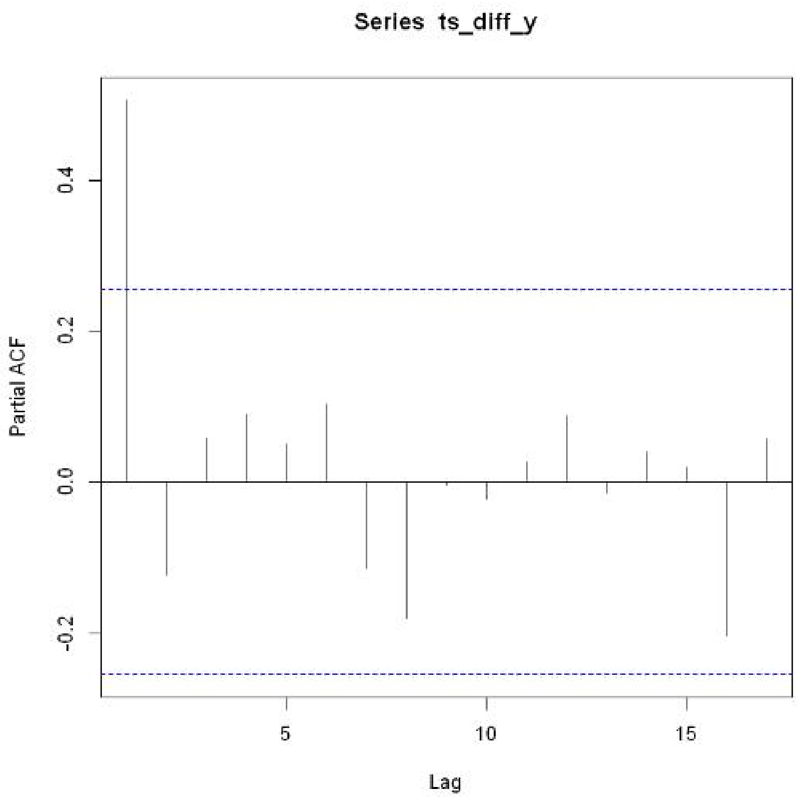
```
        Box-Ljung test

data:  ts_diff_y
X-squared = 22.04, df = 6, p-value = 0.001191


        Box-Ljung test

data:  ts_diff_y
X-squared = 26.28, df = 12, p-value = 0.009797
```

延迟 6 阶和 12 阶的 P 值均小于 0.05，说明在显著性水平 0.05 下，差分后序列不能视为白噪声序列,即差分后序列还蕴含着不容忽视的相关信息可供提取。

4.2.4 对平稳非白噪声差分序列拟合 ARMA 模型

1 阶差分后序列的偏自相关图如下。

```
pacf(ts_diff_y)
```



偏自相关图显示出 1 阶截尾，自相关图拖尾，所以使用 AR(1)模型拟合 1 阶差分后序列。考虑到前面已经进行的 1 阶差分运算，实际上是用 ARIMA(1,1,0)模型拟合原序列。

```
# 对原序列拟合ARIMA(1,1,0)
library(forecast)
fit = arima(y, order=c(1,1,0), include.mean = T)
fit
```

```
Call:
arima(x = y, order = c(1, 1, 0), include.mean = T)

Coefficients:
         ar1
      0.6589
s.e.  0.0985

sigma^2 estimated as 58008959:  log likelihood = -611.35,  aic = 1226.69
```

拟合结果为

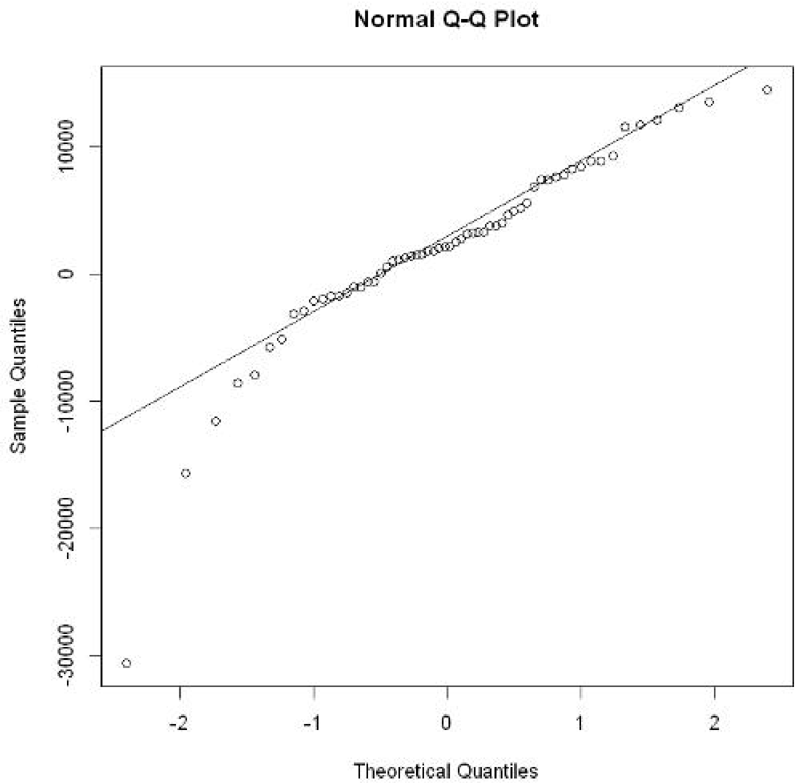
$$(1-0.6589B)(1-B)x_t=\varepsilon_t$$

4.2.5 对残差序列进行检验

一般来说，一个模型如果合适，那模型的残差应该满足均值为 0 的正态分布，并且对于任意的滞后阶数，残差自相关系数都应该为零。换句话说，模型的残差应该满足独立正态分布（即残差间没有关联）。

```
qqnorm(fit$residuals)
qqline(fit$residuals)
Box.test(fit$residuals, type="Ljung-Box")
```

```
        Box-Ljung test

data:  fit$residuals
X-squared = 0.27376, df = 1, p-value = 0.6008
```



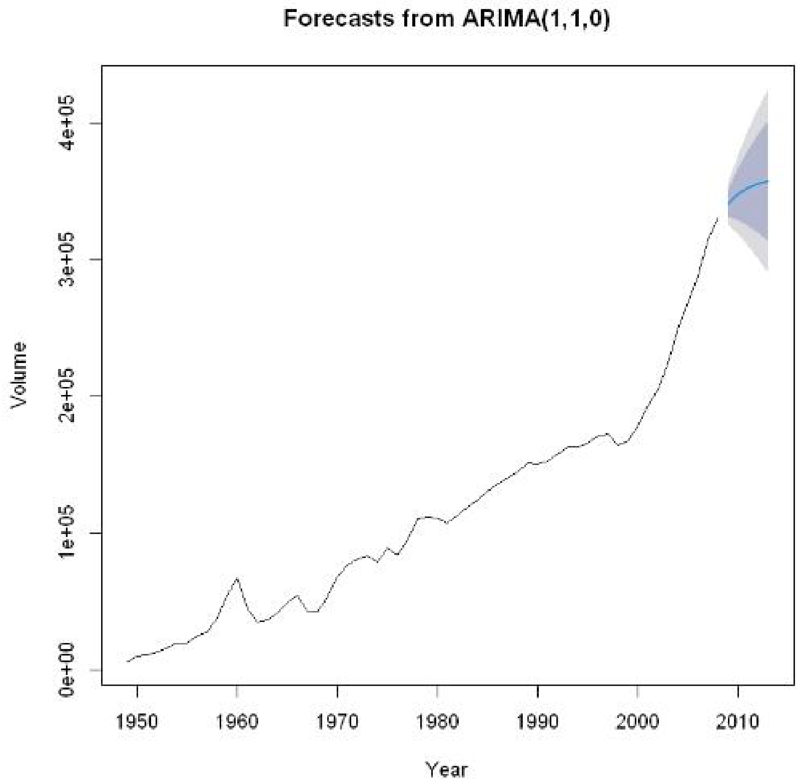
如果数据呈现正态分布，那么数据点会落在图中直线上。显然，本模型的残差大致符合正态分布，模型效果不错。

对残差的自相关检验，$p=0.6>0.05$，接受原假设，即认为残差之间的自相关系数为 0，符合残差独立的假设。

4.2.6 预测未来 5 年的铁路货运量

```
forecast(fit, 5)
plot(forecast(fit, 5), xlab="Year", ylab="Volume")
```

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
2009	340973.4	331212.7	350734.2	326045.6	355901.2
2010	347970.5	329064.0	366877.0	319055.5	376885.5
2011	352580.9	324745.2	380416.6	310009.8	395151.9
2012	355618.6	319368.4	391868.8	300178.7	411058.5
2013	357620.2	313550.3	401690.1	290221.1	425019.3



5 实验分析与总结

5.1 实验分析

（1）时序图显示我国 1949 年至 2008 年的铁路货运量的波动是非平稳的。
（2）自相关图检验，考察该样本序列的自相关图，可以大部分自相关系数都在两倍标准差范围之外。可以看出，这是一个典型的非平稳序列的样本自相关图。
（3）1 阶差分。观察原序列时序图，呈现明显递增趋势，考虑使用一阶差分。差分过后的序列自相关图检验为平稳，白噪声检验为非白噪声序列，值得继续建模。
（4）根据差分后序列的自相关图和偏自相关图，考虑使用 AR(1)模型拟合差分后序列，即使用 ARIMA(1,1,0)模型拟合原序列。
（5）对 ARIMA(1,1,0)模型的计算结果进行残差检验，符合残差序列是白噪声序列的假设，建模是成功的。

5.2 实验总结

（1）建立 ARIMA 模型的步骤

1.1 确保时序是平稳的

1.2 找到一个（或几个）合理的模型（即选定可能的 p 值和 q 值）

1.3 拟合模型

1.4 从统计假设和预测准确性等角度评估模型

1.5 预测

（2）模型定阶的原则

$\hat{\rho}_k$	$\hat{\phi}_{kk}$	模型定阶
拖尾	p 阶截尾	AR(p) 模型
q 阶截尾	拖尾	MA(q) 模型
拖尾	拖尾	ARMA(p,q) 模型

在实践中，上述的定阶原则在操作上有一定的困难。由于样本的随机性，样本的相关系数不会呈现出理论截尾的完美情况，本应截尾的样本自相关系数或偏自相关系数仍会呈现出小值振荡。

在实践中，通常采用 2 倍标准差来进行判断。如果样本的自相关系数或偏自相关系数在最初的 d 阶明显超过 2 倍标准差范围，而后几乎 95%的自相关系数都落在 2 倍标准差范围内，而且由非零自相关系数衰减为小值波动的过程非常突然，这时，通常视为自相关系数截尾。截尾阶数为 d。

如果有超过 5%的样本自相关系数落入 2 倍标准差范围之外，或者由显著非零衰减为小值波动的过程非常缓慢或者连续，这时，通常视为自相关系数不截尾。