DOI:10.13546/j.cnki.tjyjc.2006.08.005

增长型曲线模型参数估计的新思路

毛艺萍,王斌会

(暨南大学 统计系,广州 510632)

摘　要:本文利用时间序列相邻两项之差建立回归方程,用最小二乘法对修正指数曲线、龚珀兹曲线和罗吉斯蒂增长曲线三种模型中的参数进行估计,并与三和法所得结果进行比较,通过实例分析了它们在预测中的应用。

关键词:最小二乘法;修正指数曲线;龚珀兹曲线;罗吉斯蒂曲线;增长曲线

中图分类号:O212　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1002-6487(2006)04-0012-02

增长曲线模型描述经济变量随时间变化的规律性,从已经发生的经济活动中寻找这种规律性,并用于未来的经济预测。常用的增长曲线模型主要包括以下一些形式:多项式曲线、简单指数曲线、双指数曲线、修正指数曲线、龚珀兹曲线和罗吉斯蒂增长曲线。一般来说对于多项式曲线、简单指数曲线和双指数曲线,只要将曲线适当变形,就可以使用线性回归分析方法求得待定参数。而后三种曲线被认为不易采用最小二乘法,且被认为遇到非线性问题,计算程序就十分复杂[1],所以对于它们的参数估计一般都采用应用方便,计算程序简单的逻辑分析法、三和法和三点法。本文对修正指数曲线、龚珀兹曲线和罗吉斯蒂增长曲线经过一定的线性化,使用最小二乘法估计参数。这种方法的计算程序并不太复杂,尤其是计算机的应用,使得该方法的实现变得简单了。

1　解题思路

我们知道龚珀兹曲线的对数形式和逻辑增长曲线的倒数形式就是修正指数曲线形式,所以我们将这三种曲线变形后的形式归结为:

$$Y_T=K+AB^T \tag{1}$$

其中 K、A、B 为参数,T 是时间变量。在此形式下,利用时间序列相邻两项之差建立方程,应用最小二乘法估计参数。计算推导步骤如下:

①$Y_{T+1}-Y_{T-1}=AB^T(B-1)=(AB^T+K)(B-1)-K(B-1)=Y_T(B-1)-K(B-1)$,所以,$Y_{T+1}=K(1-B)+BY_T$　(2)

②用最小二乘法求得系数 B、K(1-B),推得 $K=K_0$。

③将求得的 B 值代入(1)式,令 $B^T=X$,得:

$$Y=K+AX \tag{3}$$

对于此回归方程求得系数 A 和 K,令 $K=K_1$。

④在 K_0、K_1 中选最佳的一个,并将所有参数代入(1)式中,得预测方程,进行预测。

2　模型参数估计的计算推导及实例分析

2.1　修正指数曲线(Modified exponential curve)

修正指数曲线用于描述的现象为初期增长迅速,随后增长率逐渐降低,最终则以 K 为增长极限。它是在一般指数曲线的基础上增加一个常数 K,其形式为:

$$y_t=k+ab^t\ (k>0,a\neq 0,a<b\neq 1) \tag{4}$$

2.1.1.参数估计的推导

①用时间序列相邻两项之差建立方程式:

$$y_{t+1}=k(1-b)+by_t \tag{5}$$

用最小二乘法求系数 b、k(1-b):

$$b=\frac{(n-1)\sum y_t y_{t+1}-\sum y_t\sum y_{t+1}}{(n-1)\sum y_t^2-(\sum y_t)^2} \tag{6}$$

$$k(1-b)=\frac{\sum y_{t+1}}{n-1}-\frac{b\sum y_t}{n-1}- \tag{7}$$

根据(7)式,可推导得 k 值,令 $k=k_0$。

②b 值代入到(4)式,令 $x=b^t$,可得回归方程:

$$y_t=k+ax \tag{8}$$

用最小二乘法求系数 a、k

$$a=\frac{n\sum x_t y_t-\sum x_t\sum y_t}{n\sum x_t^2-(\sum x_t)^2} \tag{9}$$

$$k=k_1=\frac{\sum y_t}{n}-\frac{a\sum x_t}{n} \tag{10}$$

③对于 k_0 和 k_1,能使残差平方和 Q 最小者,就为最佳 k 值。最后利用所求参数 a、b 和最佳 k 值求得预测值。

2.1.2 应用实例

本例数据选自文献[2]之例(见表 1)。

三和法的预测方程:$y_t=73.174-22.272*0.5556^t$,$t=0,1,2,\cdots$

最小二乘法的预测方程:①当 $k=k_0$ 时,$y_t=73.1369-43.5302*0.5322^t$,$t=1,2,\cdots$

②当 $k=k_1$ 时,$y_t=73.1173-43.5302*0.5322^t$,$t=1,2,\cdots$

残差平方和分别是:$Q_{三和法}=3.0622$,$Q_0=3.0622$ $(k=k_0)$,$Q_1=3.0588$ $(k=k_1)$。

因为最小二乘法中的残差平方和 $Q_1=3.0588$ 最小,所以取 $k=k_1$ 时的预测方程。

基金项目:广东省自然基金资助项目(04010490)

表 1 修正指数

年份	销售量	三和法		最小二乘法			
				k=k_0		k=k_1	
	y（万吨）	趋势值	残差	趋势值	残差	趋势值	残差
1989	50.0	50.902	0.902	49.9695	−0.0305	49.9499	−0.0501
1990	60.0	60.7997	0.7997	60.8069	0.8069	60.7873	0.7873
1991	68.0	66.2988	−1.7012	66.5747	−1.4253	66.5551	−1.4449
1992	69.6	69.3542	−0.2458	69.6444	0.0444	69.6248	0.0248
1993	71.1	71.0517	−0.0483	71.2782	0.1782	71.2586	0.1586
1994	71.7	71.9948	0.2948	72.1477	0.4477	72.1281	0.4281
1995	72.3	72.5189	0.2189	72.6104	0.3104	72.5908	0.2908
1996	72.8	72.81	0.01	72.8567	0.0567	72.8371	0.0371
1997	73.2	72.9718	−0.2282	72.9878	−0.2122	72.9682	−0.2318

1998 年该商品销售量的预测值：$\hat{y}_{1998}=73.1173-43.5302*0.5322^{10}=73.038$

2.2 龚珀兹曲线(Gompertz curve)

龚珀兹增长曲线由 B. Gompertz 于 1825 年提出。所描述的现象是初期增长缓慢，以后逐渐加快，当达到一定程度后，增长率又逐渐下降，最后接近一条水平线。其数学形式为：

$$y_t=ka^{b^t}\quad (k>0,0<a\neq1,0<b\neq1) \tag{11}$$

2.2.1.参数估计的推导

①对函数模型对数化，得：

$$lgy_t=lgk+b^t lga \tag{12}$$

②对上式用时间序列相邻两项之差建立方程式：

$$lgy_{t+1}=(1-b)lgk+blgy_t \tag{13}$$

用最小二乘法求得系数 b、(1−b)lgk：

$$b=\frac{(n-1)\sum lgy_t lgy_{t+1}-\sum lgy_t\sum lgy_{t+1}}{(n-1)\sum(lgy_t)^2-(\sum lgy_t)^2} \tag{14}$$

$$(1-b)lgk=\frac{\sum lgy_{t+1}}{n-1}-\frac{b\sum lgy_t}{n-1} \tag{15}$$

可推导出 k 值，令 $k=k_0$。

③b 值代入到(12)式，令 $x=b^t$,可得回归方程

$$lgy_t=lgk+xlga \tag{16}$$

用最小二乘法求系数 lga、lgk：

$$lga=\frac{n\sum x_t y_k-\sum x_t\sum y_t}{n\sum x_t^2-(\sum x_t)^2} \tag{17}$$

$$lgk=\frac{\sum y_t}{n}-\frac{lga*\sum x_t}{n} \tag{18}$$

推得 a、k 值，并令此处 $k=k_1$。

④对于 k_0 和 k_1，能使残差平方和 Q 最小者，就为最佳 k 值。最后利用所求参数 a、b 和最佳 k 值求得预测值。

2.2.2 应用实例

本例数据选自文献[3]之例（见表 2）。

表 2 龚珀兹曲线

年份	销售量	三和法		最小二乘法			
				k=k_0		k=k_1	
	y（万吨）	趋势值	残差	趋势值	残差	趋势值	残差
1989	4.94	5.2062	0.2662	5.1503	0.2103	5.0119	0.0719
1990	6.21	6.112	−0.098	6.2622	0.0522	6.094	−0.116
1991	7.18	6.9246	−0.2554	7.2108	0.0308	7.0171	−0.1629
1992	7.74	7.631	−0.109	7.9834	0.2434	7.7689	0.0289
1993	8.38	8.2302	−0.1498	8.5917	0.2117	8.3609	−0.0191
1994	8.45	8.7289	0.2789	9.0592	0.6092	8.8158	0.3658
1995	8.73	9.1378	0.4078	9.4122	0.6822	9.1594	0.4294
1996	9.42	9.4692	0.0492	9.6755	0.2555	9.4156	−0.0044
1997	10.24	9.7354	−0.5046	9.87	−0.37	9.6049	−0.6351

三和法预测方程：$\hat{y}_t=1073*0.4852^{0.7782^t}$，t=0,1,2,…

最小二乘法预测方程：①当 $k=k_0$ 时，$\hat{y}_t=10.3924*0.3780^{0.7215^t}$，t=1,2,…

②当 $k=k_1$ 时，$\hat{y}_t=10.1132*0.3780^{0.7782^t}$，t=1,2,…

残差平方和分别是：$Q_{三和法}=0.6811,Q_0=1.1906$（$k=k_0$），$Q_1=0.7680$（$k=k_1$）。

三和法的残差平方和 $Q_{三和法}=0.6811$ 最小，所以取三和法的预测方程。

1998 年该商品的预测值为：$\hat{y}_{1998}=1073*0.4852^{0.7782^9}=9.948$

2.3 罗吉斯蒂曲线(Logistic Curve)

罗吉斯蒂曲线模型由 Verhulst 于 1845 年提出，当时的主要目的是模拟人口的增长。其一般形式为：

$$y_t=\frac{L}{1+ae^{-bt}}\quad (k>0,a>0,0<b\neq1) \tag{19}$$

2.3.1 参数估计的推导

①对函数模型倒数化，得：

$$\frac{1}{y_t}=\frac{1}{L}+\frac{a}{L}e^{-bt} \tag{20}$$

②用时间序列相邻两项之差建立方程式：

$$\frac{1}{y_{t+1}}=\frac{1-e^{-b}}{L}+\frac{1}{y_t}e^{-b} \tag{21}$$

用最小二乘法求得系数：

$$e^{-b}=\frac{(n-1)\sum(\frac{1}{y_{t+1}}*\frac{1}{y_t})-\sum\frac{1}{y_{t+1}}*\frac{1}{y_t}}{n-1)\sum(\frac{1}{y_t})^2-(\sum\frac{1}{y_t})^2} \tag{22}$$

$$\frac{1-e^{-b}}{L}=\frac{\sum\frac{1}{y_{t+1}}}{n-1}-e^{-b}\frac{\sum\frac{1}{y_t}}{n-1} \tag{23}$$

可推得 b、L，令 $L=L_0$。

③将 b 值代入(20)式，建立回归方程，用最小二乘法估计系数 $\frac{a}{L}$ 和 $\frac{1}{L}$：

$$\frac{a}{L}=\frac{n\sum(\frac{1}{y_t}*e^{-bt})-\sum\frac{1}{y_t}*e^{-bt}}{n\sum(e^{-bt})^2-(\sum e^{-bt})^2} \tag{24}$$

$$\frac{1}{L}=\frac{\sum y_t}{n}+\frac{a}{L}*\frac{e^{-bt}}{n} \tag{25}$$

推得 L 值，并令 $L=L_1$。当 $L=L_0$ 时，$a=a_0$；当 $L=L_1$ 时，$a=a_1$。

④分别对 a_0、b、L_0 和 a_1、b、L_1 两组数据求残差平方和 Q，取使得 Q 值最小者为参数估计值，建立预测方程。

2.3.2 应用实例

本例数据选自文献[2]之例（见表 3）。

三和法预测方程：$\hat{y}_t=\frac{68.1125}{1+0.4087*0.1241^t}$ t=1,2,…

最小二乘法预测方程：①当 $k=k_0$ 时，$y_t=\frac{71.9193}{1+0.4498*0.0865^t}$ t=1,2,…

②当 $k=k_1$ 时，$y_t=\frac{71.7827}{1+0.44990*0.0865^t}$，t=1,2,…

残差平方和分别是：$Q_{三和法}=9.0665,Q_0=0.82250$（$k=k_0$），$Q_1==8.0069$（$k=k_1$）。

最小二乘法的残差平方和 $Q_1=8.0069$ 最小，所以取最小二乘法中 $k=k_1$ 时的预测方程。

基于神经网络的股票分类指数预测模型

郝　勇[1]，刘继洲[2]

（1.上海工程技术大学，上海 200336；2.河南经贸职业学院，郑州 450053）

摘　要：本文运用BP人工神经网络，在MATLAB平台上，进行公用事业指数波动规律的预测和分析，能利用公用事业指数前三天的收盘价，预测第四天的收盘价，并且预测值达到一定精度。

关键词：分类指数；神经网络；MATLAB；预测

中图分类号：F830.91；TP183　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1002-6487（2006）04-0014-03

证券市场中的主流预测方法有技术分析、基础分析、人工智能等。近年来，人工智能方法进展很快，尤其是神经网络技术具有快速简便、学习能力强的特点，受到不少预测专家的追捧。经典技术分析以均线系统为依托，主要以统计学等为基础。技术分析主要是通过图表或技术指标的记录，研究市场过去及现在的行为反应，以推测未来价格的变动趋势。它包括指标技术分析和形态技术分析，研究手段本身也是互相交叉的，其目的均是预测市场发展的趋势，同时表明这种趋势是处于哪一个阶段。技术分析具有理性和客观性的特点，但这种方法较复杂，且有信号滞后、高位钝化等缺陷，因此该预测方法有一定的落后性。基本分析主要是根据供应量和需求量及影响供求关系的各种因素的变化，预测价格变动趋势。基本分析所遵循的一个经济学基本原理就是供应增加或需求减少将导致价格下跌；反之，供应减少或需求增加将导致价格上涨。基本分析具有直观、容易掌握的优点，但普遍存在一项消息两种看法的情形，主观性色彩较浓。所以，基本分析得出的结论与实际资料常常有一定的差距。

神经网络模型有良好的非线性品质，灵活而有效的学习

基金项目：上海市教委社会科学基金项目（04NE28）

表3　　罗吉斯蒂曲线

时序(t)	销售量	三和法		最小二乘法 k=k$_0$		最小二乘法 k=k$_1$	
	y(万件)	趋势值	残差	趋势值	残差	趋势值	残差
1	50.87	50.0459	-0.8241	50.9139	0.0439	50.8454	-0.0246
2	52.03	51.6446	-0.3854	52.1767	0.1467	52.1048	0.0748
3	53.33	53.1442	-0.1858	53.3911	0.0611	53.3158	-0.0142
4	53.35	54.5431	1.1931	54.5558	1.2058	54.4772	1.1272
5	55.09	55.8415	0.7515	55.6695	0.5795	55.5876	0.4976
6	56.76	57.0408	0.2808	56.7316	-0.0284	56.6466	-0.1134
7	58.42	58.1438	-0.2762	57.742	-0.678	57.654	-0.766
8	59.61	59.1543	-0.4557	58.7009	-0.9091	58.6099	-1.0001
9	60.58	60.0764	-0.5036	59.6087	-0.9713	59.5149	-1.0651
10	61.15	60.9152	-0.2348	60.4663	-0.6837	60.3698	-0.7802
11	61.57	61.6758	0.1058	61.2749	-0.2951	61.1758	-0.3942
12	62.17	62.3636	0.1936	62.0357	-0.1343	61.9341	-0.2359
13	62.55	62.984	0.434	62.7503	0.2003	62.6463	0.0963
14	62.85	63.5424	0.6924	63.4203	0.5703	63.3141	0.4641
15	63.1	64.0439	0.9439	64.0474	0.9474	63.9391	0.8391
16	63.52	64.4935	0.9735	64.6336	1.1136	64.5234	1.0034
17	64.25	64.8959	0.6459	65.1808	0.9308	65.0686	0.8186
18	65.32	65.2556	-0.0644	65.6908	0.3708	65.5769	0.2569
19	66.26	65.5766	-0.6834	66.1656	-0.0944	66.05	-0.21
20	66.87	65.8628	-1.0072	66.6072	-0.2628	66.49	-0.38
21	67.16	66.1177	-1.0423	67.0173	-0.1427	66.8988	-0.2612

第22期销售量的预测值为：$\hat{y}_{22}=\frac{71.7827}{1+0.44990*0.0865^{22}}=67.2781$

3　小结

从上述各模型参数估计的计算推导中可以看到，它的计算思路及过程并不繁杂，而且本文的所有应用实例都采用MATLAB软件来实现，这也减少了计算的工作量。从实例的分析中可以看到，修正指数曲线和罗吉斯蒂增长曲线模型采用这种方法，它们的计算精度都有所提高，要优于三和法的计算结果，所以对于这两种模型，我们可以采用最小二乘法来估计参数。但是龚珀兹曲线模型似乎并不适合于这种方法，它的精度不及三和法的计算结果，所以对于龚珀兹曲线模型要慎用该方法。

参考文献：

[1]冯文权.经济预测与决策技术[M].武汉：武汉大学出版社，2004.

[2]徐国祥.统计预测和决策[M].上海：上海财经大学出版社，1998.

[3]弗朗西斯.X.迪博尔德[M].北京：中信出版社，2003.

（责任编辑/亦　民）