

文章编号:

多块多重网格法及其跨音速转子内流并行模拟

刘安, 琚亚平, 张楚华

(西安交通大学 能源与动力工程学院, 西安 710049)

摘 要: 为提高压气机内部复杂流动计算的收敛速度, 发展了一种多块多重网格上的可压缩流动并行计算方法, 数值模拟了跨音速转子 NASA Rotor35 内部流动及气动性能, 重点分析了对接分区方式和内界面通信模式对并行性能的影响。结果表明: 对接分区方法和多块多重网格内界面数据处理方法能够保证串、并行计算结果基本一致, 且与实验数据吻合良好; 并行精度基本不受分区数目和通信模式的影响, 并行效率随着相对通信负载的增大而降低。所发展的并行计算方法对跨音速转子气动分析和设计具有一定的可靠性, 为开发大型流体机械复杂流动的基础并行算法及软件提供了参考价值。

关 键 词: 多块结构化网格; 多重网格; 对接分区; 内界面处理方法; 并行计算流体力学; 跨音速转子

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A

Multi-block multi-level grid method and parallel simulation of internal flows of transonic axial rotor

LIU An, JU Ya-ping, ZHANG Chu-hua

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to improve the convergence rate of numerical simulation of complex flow in compressor, a parallel CFD method with multi-block multi-level grid is developed in this work. This method is applied to numerically simulate the internal flow fields and aerodynamic performance of the transonic axial compressor NASA Rotor35, and to analyze the influences of patch partitions and interface communication on the parallel performance. The results show that the developed patch partition method and multi-block multi-level grid interface treatment method ensure that the serial and parallel results are same and both consistent with the experimental data. The numerical accuracy is not affected by the number of partitions and communication mode, while the parallel efficiency decreases as the relative communication load increases. The developed parallel CFD method is of certain reliability to carry out the aerodynamic analysis and design for transonic axial rotor, and is of reference value to develop the fundamental parallel algorithm and software for the complex flow in large-scale fluid machinery.

Key words: multi-block structured grid; multi-level grid; patched partition; interface treatment method; parallel CFD; transonic rotor

多核处理器是现代计算机的常规配置, 但现有大多数计算流体力学方法和程序并不能充分发挥多核加速优势, 因此, 面向微型计算机、工作站和集群等市场普及程度高且价格适中的并行平台, 研发并行计算流体力学基础算法及软件, 将

在流体机械流动性能快速精确预测等方面具有重要应用推广前景, 同时对在超级计算机上研发大型流体机械大规模并行计算方法和软件^[1-2]也有参考价值, 其关键共性问题区域分解方法及其内界面处理方法。

收稿日期: 2017-04-27 修订日期: 2017-05-13

基金项目: 国家重点研发计划课题 (2016YFB0200901); 国家自然科学基金项目 (51406148); 教育部重大科技基础设施培育计划课题。

作者简介: 刘安 (1992—), 女, 河南邓州人, 博士研究生, 主要从事并行计算流体力学。E-mail: chzhang@xjtu.edu.cn

区域分解方法是整个计算区域分解为多个子区域,然后同时对多个子区域进行计算的一种并行方法,按照相邻子区域的网格是否有重叠,可分为两类:重叠分区方法^[3]和对接分区方法^[4],前者相邻子区域网格有重叠,对区域间信息耦合有利,但额外开销增加且实施复杂;后者相邻子区域无重叠,只在相邻子区域内界面上耦合,能将现有串行程序较为方便地拓展为并行程序,是更有应用前景的方法^[5-8]。

多重网格方法作为最有效的加速收敛技术之一,可将收敛速度提高 1-2 个数量级^[9],该方法应用到并行计算能进一步加快流场计算。目前国内外已发展了许多相关的并行算法^[10-11]和商业软件^[12-13],其内界面处理多采用完整通信模式,在每层网格的每一迭代步前都进行信息交换能保证计算精度高、收敛速度快,但会增大通信成本,降低并行效率。文献[14]提出了最细网格层通信策略(部分通信模式^[15]),并结合二维算例比较了不同通信策略对收敛速度和并行效率的影响。部分通信模式只在部分网格层或部分迭代步上通信,其在具体实施过程有多种处理方式,对并行性能的影响也相应不同。为了获得满意的并行计算精度和效率,需要对多重网格内界面上的变量处理方式及数据通信模式进行深入分析,设计最优的通信和计算占比。

本文面向轴流压气机内部流场的并行计算需求,重点分析对接分区方法和多块多重网格内界面处理方法,发展了一种三维可压缩粘性流动的并行计算方法,并对跨音速转子 NASA Rotor35 气动性能和内部流场进行了串、并行数值模拟,深入研究分区数目和内界面通信模式对轴流压缩机内部流动并行计算精度和效率的影响规律,研究工作为开发大型流体机械复杂流动的大规模并行计算技术提供了算法支持。

1 控制方程组和离散方法

在相对笛卡尔坐标系 (x, y, z) 下,三维可压缩雷诺平均 Navier-Stokes 方程组的守恒形式为:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z} \quad (1)$$

其中 \mathbf{Q} 为守恒型求解向量, \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 、 \mathbf{H} 为三个坐

标方向的对流/粘性向量(下标 c 、 v 分别表示对流项、粘性项), \mathbf{I} 为源项,湍流模型采用 Spalart-Allmaras 一方程模型。各项表达式分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \\ \rho \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \omega v_y \\ -\rho \omega v_x \\ 0 \\ 0 \\ I_{\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \rho w_x \\ \rho w_x v_x + p \\ \rho w_x v_y \\ \rho w_x v_z \\ \rho w_x h - p \omega y \\ \rho w_x \theta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_c &= \begin{bmatrix} \rho w_y \\ \rho w_y v_x \\ \rho w_y v_y + p \\ \rho w_y v_z \\ \rho w_y h + p \omega x \\ \rho w_y \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \rho w_z \\ \rho w_z v_x \\ \rho w_z v_y \\ \rho w_z v_z + p \\ \rho w_z h \\ \rho w_z \theta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \beta_x \\ \alpha_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \beta_y \\ \alpha_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

其中 ρ 为密度, v_x 、 v_y 、 v_z 为三个坐标方向上的绝对速度分量, w_x 、 w_y 、 w_z 为相应的相对速度分量, e 为比总能, θ 为涡流粘性变量,其它各项的物理意义及表达式可见参考文献[16]。

流动控制方程组中的空间导数项采用有限体积法离散,所有待求变量均存储于网格单元中心,对流项采取二阶中心格式结合人工粘性格式离散,扩散项采取二阶中心格式离散,时间导数项采用四步四阶 Runge-Kutta 格式进行显式时间推进,并结合当地时间步长、隐式残差光顺、多重网格算法等加速收敛技巧来提高计算效率^[16]。

2 多块多重网格内界面处理方法

2.1 区域分解方法

为实现区域分解,从而为每个处理器核分配等量的并行计算任务,本文首先将单叶道流动区域离散为整体网格,然后再将整体网格均匀分解为多个对接分区网格,该方法同时保证了内界面上网格点的匹配性,以及各区网格数目的均衡

性, 可将现有串行计算程序较为方便地拓展为并行程序。图1为跨音速转子NASA Rotor35流动区域沿流向和周向均匀分解为三区 and 两区所得的六块子区网格, 采用了椭圆型微分方程法生成H型结构化网格, 并在叶片表面、前缘、尾缘和环端面附近适当加密网格。

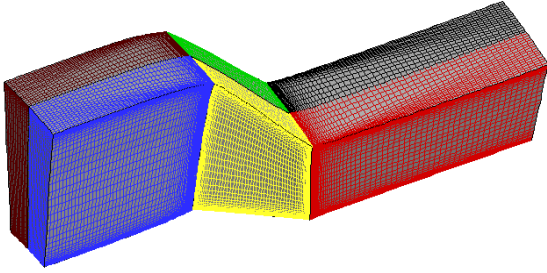


图1 NASA Rotor35多块网格

Fig. 1 Multi-block grids of NASA Rotor35

2.2 内界面处理方法

相邻子区域通过内界面搭接, 为保证串并行计算结果一致, 要求内界面上网格处理方法与普通网格尽量一致。本文采用虚拟网格法和消息传递接口 (Message Passing Interface, MPI) 实现相邻子区域的变量耦合和数据传递, 图 2 展现了虚拟网格法基本思想, 其中 L 代表内界面左侧网格, R 代表右侧网格, 粗线代表相邻子区域分界线; 实线及实心圆 (L 、 R) 代表真实网格, 点划线及空心圆 (L' 、 R') 代表虚拟网格。在对左侧网格 L 进行方程离散时, 需要利用虚拟网格 L' 上的变量值, 其值等于真实网格 R 上的变量值, 反之亦然。

在实际并行编程中, 采用 MPI 方法将真实网格 R 上的变量值传递给虚拟网格 L' 。待内界面两侧子区均获得虚拟网格上的流场信息后, 采用通量守恒原则对内界面进行处理:

$$E_L \cdot S_L = -E_R \cdot S_R \quad (3)$$

其中 S_L 、 S_R 为内界面在左右两侧网格面积向量, E_L 、 E_R 为对流/粘性向量。

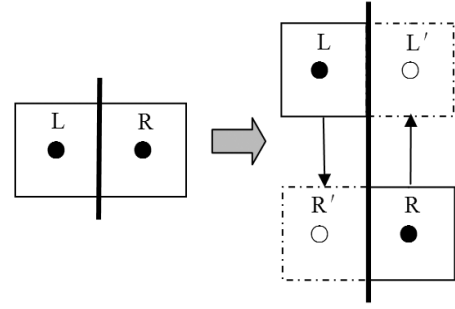


图2 虚拟网格及数据传递示意图

Fig. 2 Sketch of ghost grids and message passing

2.3 多重网格的内界面处理方法

多重网格法通过构建疏密层次不同的网格快速消除误差, 若每层网格均按照 2.2 节方法完成内界面信息传递, 即完整通信模式, 该方法数据通信量较大, 不利于并行效率的提高; 而部分通信模式只在指定网格层通信, 数据通信量相对较小。图 3 以二重网格为例介绍上述两种典型的通信模式, 其中虚线代表加密的网格线, C 、 F 分别代表粗、细网格, 实线箭头、虚线箭头分别代表粗、细网格层的信息传递方向。完整通信模式在每层网格每迭代步前均采用 MPI 方法更新虚拟网格数据, 即图中所有箭头方向; 部分通信模式只在部分网格层或部分迭代步前更新虚拟网格数据, 其它均沿用上一迭代步旧值, 即只执行部分箭头方向上的数据通信。

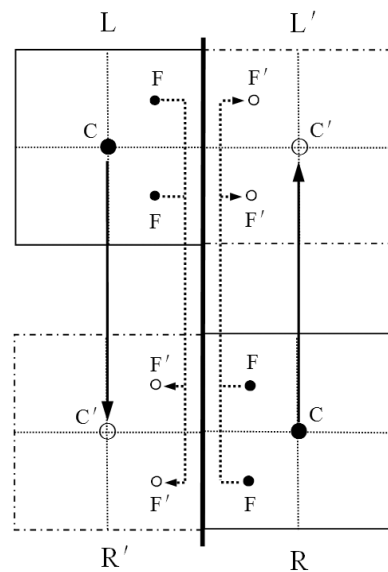


图3 二重网格通信示意图

Fig. 3 Sketch of two-level grid communication method

本文采用 Full Multi-Grid (FMG) 型三重网

格循环,如图4所示,其中三个阶段依次代表所需的网格层数目, h , $2h$, $4h$ 分别代表细网格、中网格和粗网格层的网格间距, P 代表提供虚拟网格数据的内界面处理方法和迭代计算过程;各网格层间的限制和插值过程与串行方法一致,具体见参考文献[17]。可以看出,多重网格的并行流程图与串行方法基本一致,说明本文采用的多块网格内界面处理方法不需要打破串行方法多重网格的框架,只须在迭代计算前添加内界面处理过程,就能实现多重网格的并行化,简单易行且兼容性强。

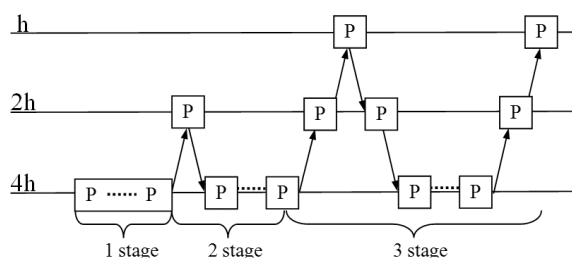


图4 各子区三重网格FMG循环并行流程图

Fig. 4 Sketch of three-level grid FMG parallel method in each sub-domain

3 NASA Rotor35 内流模拟

对NASA Rotor35单叶道流动进行串并数值模拟,经过网格无关性验证,最终沿流向、展向和周向布置的网格数分别为192、64和32,其中在叶顶间隙展向上布置8层网格,网格总数为393216。边界条件设置为:进口给定总温、总压、湍流参数及轴向进气条件;出口给定轮毂侧静压;壁面采用无滑移绝热条件;周向边界采用旋转周期性边界条件;分区内界面采用虚拟网格法处理,相邻分区之间按完整通信模式或部分通信模式实现数据交换,详见上节。NASA Rotor35详细的几何、运行和测量数据见文献[18],本节重点分析分区数目和内界面通信模式对并行精度与效率的影响,所有计算均在PC机上完成,主要配置为:单路6核Intel Core i7-4770系列处理器(主频3.40GHz),16GB内存,1T硬盘。

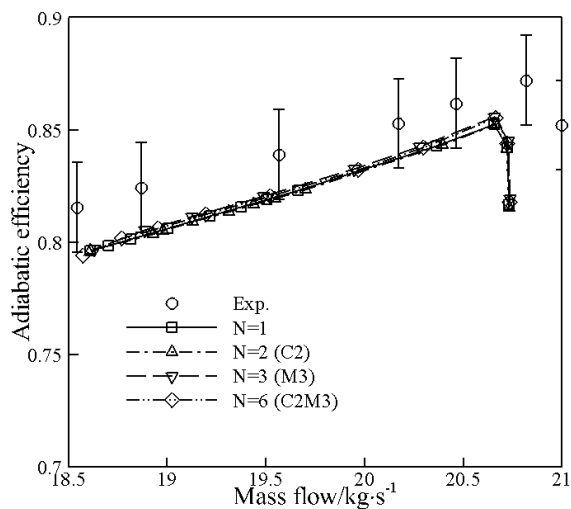
3.1 分区数目的影响

根据各子区网格数相同的负载平衡原则,将计算域分别划分为2、3、6个子区:沿周向(Circumference)分2块,记为 $N=2$ (C2);沿流向

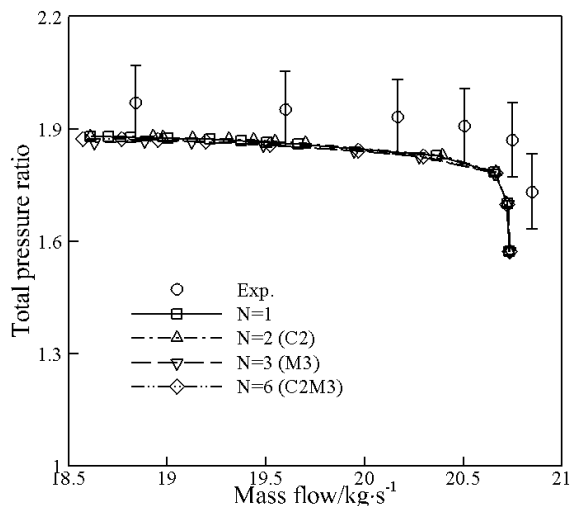
(Meridian)分3块,记为 $N=3$ (M3);沿周向分2区、沿流向分3区共6块,记为 $N=6$ (C2M3);不分块即串行计算情况,记为 $N=1$ 。本小节在完整通信模式情况下,通过对比上述三种并行结果和串行结果,分析分区数 N 对并行精度和效率的影响。

3.1.1 并行精度

通过不断调节出口静压,获得设计转速下的气动性能曲线,如图5所示,可以得出不同分区下的绝热效率和总压比曲线一致,与实验曲线吻合较好,数值结果基本落在实验误差范围内。



(a)绝热效率-质量流量



(b)总压比-质量流量

图5 气动性能曲线

Fig. 5 Aerodynamic performance curve

图6为设计工况下叶片下游绝热效率与总压比沿叶展方向的分布情况,各分区计算的效率和

总压比曲线吻合一致, 其中效率分布与实验结果吻合良好, 总压比分布与实验最大相对误差在 5% 之内。

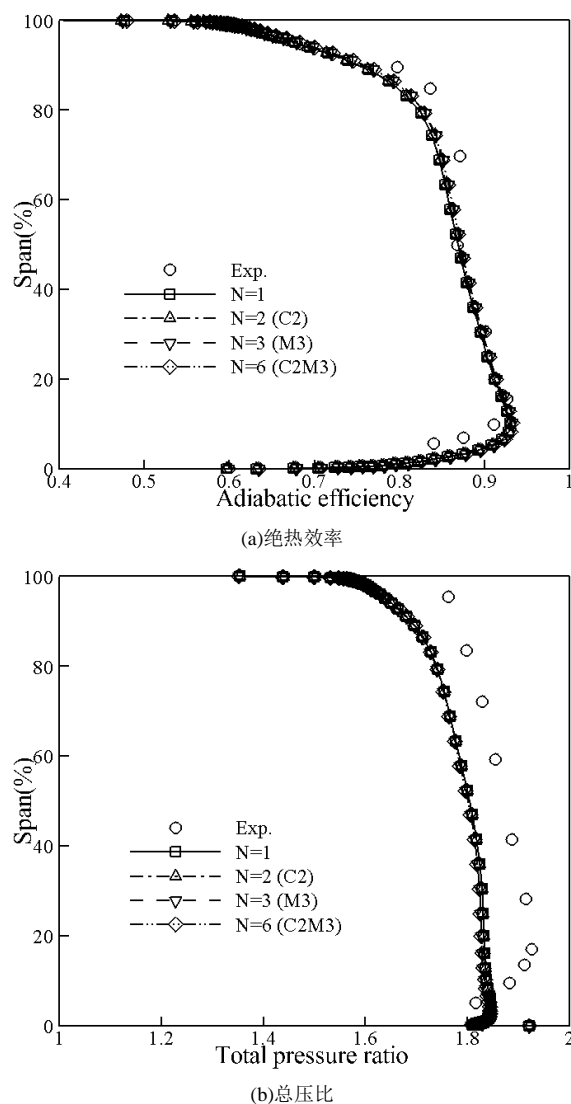


图6 气动性能参数沿叶高分布

Fig. 6 Performance variation with span at peak efficiency

图 7-8 分别为设计工况和近失速工况下不同叶高处相对马赫数的分布云图, 可以看出各分区情况的计算结果基本一致。30%叶高处激波产生于叶片前缘, 向下游相邻叶片的吸力面倾斜发展, 撞击在 50%弦长位置并与边界层相互作用; 95%叶高处激波产生位置与 30%叶高相近, 但激波强度与影响区域明显增大; 近失速工况下叶顶附近区域明显出现低速区, 反映了进口冲角、边界层、叶顶间隙流和激波等复杂流动现象及其相互作用。

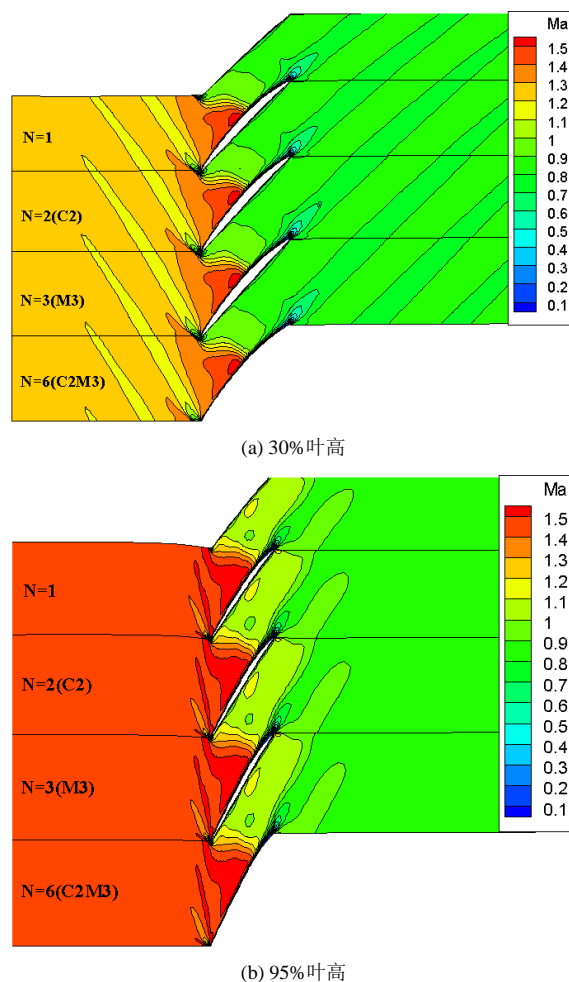
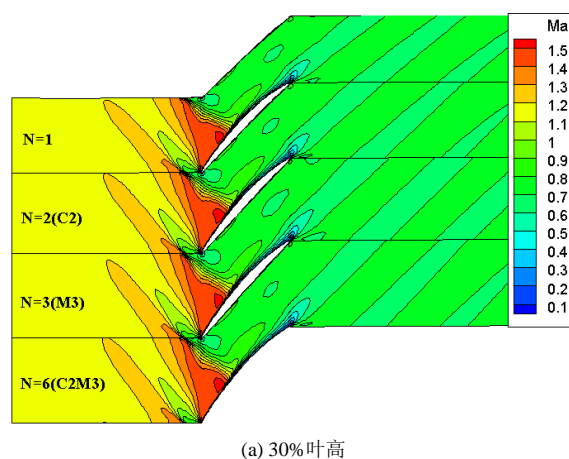


图7 设计工况下相对马赫数

Fig. 7 Relative Mach number contours at peak efficiency



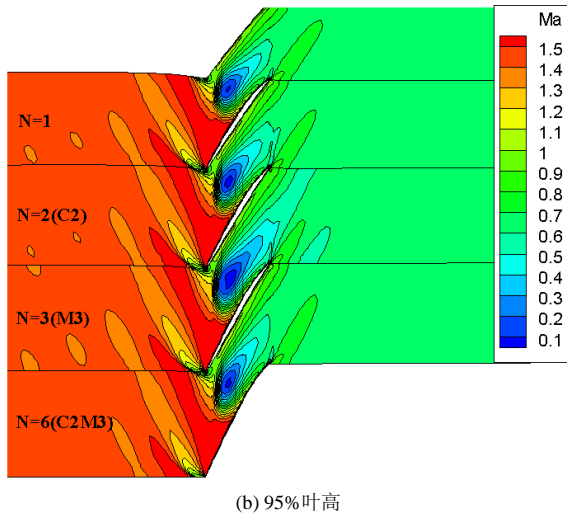


图8 近失速工况下相对马赫数

Fig. 8 Relative Mach number contours at near stall point

综上,三种分区情况的并行结果与串行结果吻合一致,说明分区数目对并行精度几乎没有影响;数值结果与实验数据吻合良好,说明所发展的并行计算流体力学方法和程序能较为准确地预测跨音速轴流转子气动性能和内部流场,对气动分析和设计具有一定的可靠性。

3.1.2 并行效率

图 9 给出了单块区域采用单重网格 Single-Grid (SG)、不同分区情况分别采用多重网格 FMG 的残差 (Residual) [16] 收敛曲线。由图可得,与单重网格相比,多重网格具有良好的加速收敛特性;在多重网格情况下,各类分区的残差曲线最终均能收敛于同一水平,进一步验证了上小节不同分区情况基本不影响并行精度的结论;四条残差曲线的收敛速度,即收敛于同一残差水平所需的迭代次数有所不同,其中串行情况最少,且随着分区数目增加而增加。这是由于并行分区内界面上的流场变量是由引入的虚拟网格结合通量守恒原则加权得到的,这种处理方法对保持并行精度有利,但会影响收敛速度及并行效率。

图 10 给出并行加速比 (Speedup ratio) [19] 随处理器数目的变化情况,发现实际并行加速比低于理想值,且分区数目越多其偏离程度越明显。这是由于分区内界面和通信任务随分区数目的增大而增多,但分配到每个子区的计算量却减小,相对通信负载剧增,使得实际加速比低于理想

值。因此在设计分区方案时,需要根据具体的计算任务和可用的并行平台确定最佳分区方案从而优化并行效率。

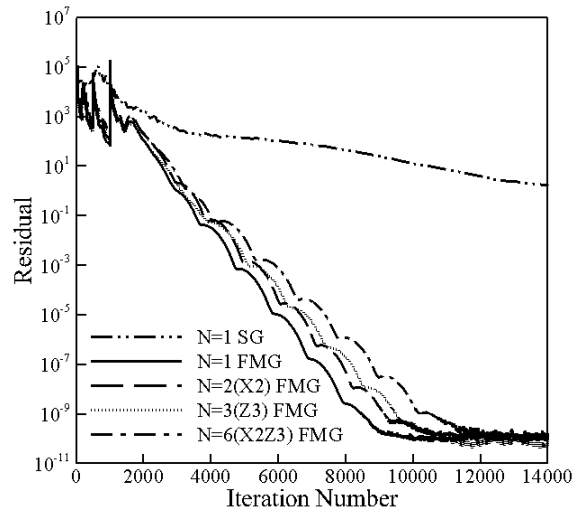


图9 不同分区数目的残差收敛曲线

Fig. 9 Residuals convergence curves using different number of partitions

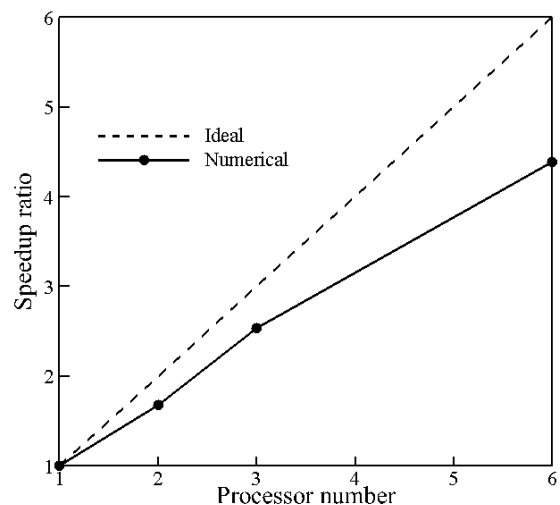


图10 并行加速比随处理器数目的变化

Fig. 10 Parallel speedup ratio with number of processors

3.2 内界面通信模式的影响

为了定量评价多块多重网格内界面通信模式对并行性能的影响,约定粗网格的一次通信量为基准 1,由于相邻疏密网格的间距倍数为 2,且三维网格以面进行通信,故中、细网格一次通信量分别为粗网格的 4、16 倍,依此类推。

本文采用三重网格 FMG 循环,第三阶段 V 循环内的三层网格均迭代一次,并按照 4 阶 4 步 Runge-Kutta 格式推进。图 11 给出了典型通信模

式示意图, 其中实心圆表示该步在计算前进行通信, 空心圆表示该步沿用上一步旧值。图 11-(a) 为完整通信模式, 在该循环内的通信量 Interface Data Communication (IDC) 计算公式为 $16 \times 4 + 4 \times 4 + 1 \times 4 = 84$, 记为 IDC 84; 图 (b) - (d) 为有代表性的部分通信模式, 鉴于中、粗网格在插值过程中只用误差值修正细网格, 对数值解的影响较小, 故图 (b) 表示只在中、粗网格第一步迭代前通信, 细网格的所有四步前均通信, 其通信量为 $1 \times 6 + 4 \times 4 + 1 \times 1$, 记为 IDC 69; 图 (c) 表示三层网格均只在第一步通信, 通信量为 $16 \times 1 + 4 \times 1 + 1 \times 1 = 21$, 记为 IDC 21, 这种模式虽然简单、通信量少, 但迭代过程发散; 图 (d) 以图 (c) 为基础, 在细网格的第三步前进行内界面处理, 其通信量为 $16 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 1 = 37$, 记为 IDC 37。以上述四类通信模式为代表, 在六块子区 $N=6$ (C2M3) 上测试计算, 并对结果进行分析。

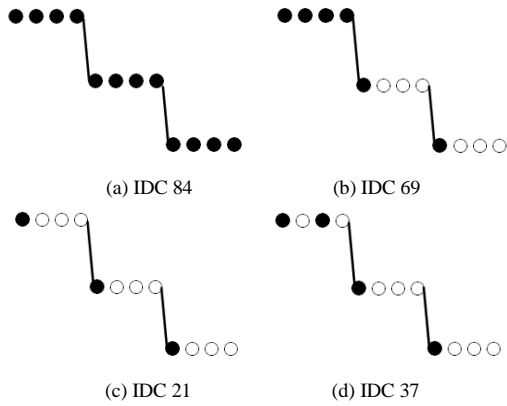


图11 四类通信模式示意图

Fig. 11 Four types of communication modes

图 12 给出了不同通信模式的残差收敛曲线, 发现除了 IDC 21 模式由于通信次数过少而计算发散外, 其它三种通信模式的收敛曲线基本完全重合。这是由于每层网格在每一次迭代 (四步 Runge-Kutta 格式推进) 前都有进行内界面上的信息传递, 区别只在于通信次数的多少, 故边界条件的更新情况类似, 对整场计算的收敛影响也类似; 上述结果说明了计算精度和残差收敛速度基本不受通信模式的影响。

图 13 为各通信模式的计算时间随迭代步数的增长曲线, 发现通信次数越多其耗时越长, 并

行加速比相应越小。结合图 12 可以得出, 在四类通信模式中, IDC 37 通信模式在保证计算精度和收敛速率的情况下, 通信时间最少从而并行效率最高。

对于多块多重网格的并行计算, 在实施过程中有多种通信方式, 因此需要针对具体的算法格式、并行平台测试出最佳的通信模式, 平衡通信和计算占比, 从而获得最优并行效率。

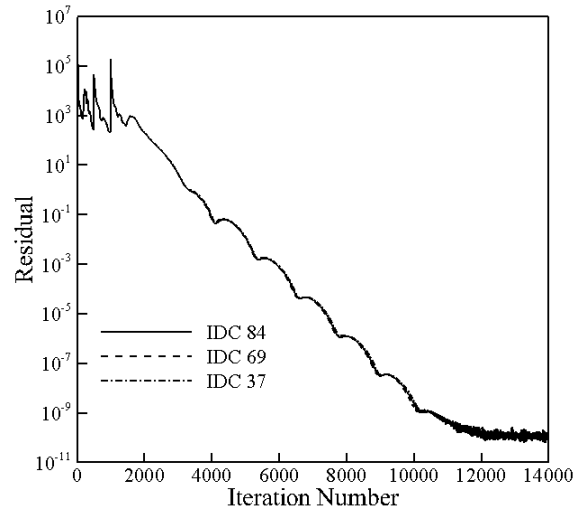


图12 不同通信模式的残差收敛曲线

Fig. 12 Residuals convergence curves using different communication modes

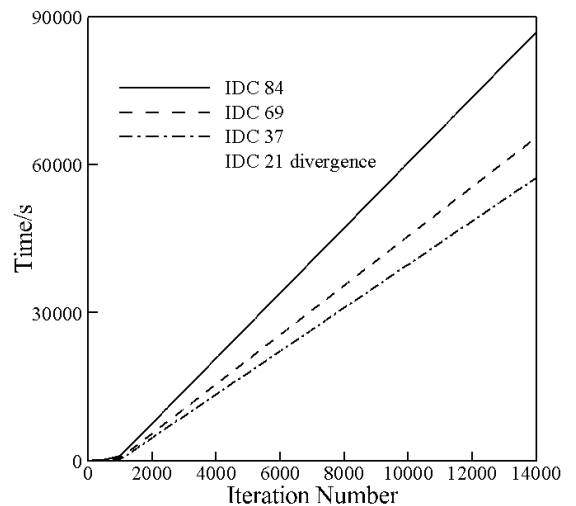


图13 不同通信模式的计算时长

Fig. 13 Computation time using different communication modes

4 结论

本文结合区域分解负载平衡技术、多重网格加速收敛技术和基于多块多重网格的内界面处理

方法, 发展了适于求解可压缩流动的并行计算方法及程序。通过对跨音速转子 NASA Rotor35 的串、并行数值模拟, 得出如下结论:

1) 沿流向和展向的对接分区方法和内界面的虚拟网格方法能够保证串、并行计算结果一致, 体现了该并行方法的有效性;

2) 跨音速转子气动性能曲线和内部流场的串并行结果吻合一致且与实验数据吻合良好, 表明所发展的并行 CFD 方法和程序对跨音速转子气动性能分析和设计具有一定的可靠性;

3) 并行精度基本不受分区数目和通信模式因素的影响, 并行效率主要受相对通信负载的影响, 应根据具体的算法格式和并行平台合理设计分区方案和通信模式。

参考文献:

- [1] GICQUEL L Y M, GOURDAIN N, BOUSSUGE J F, et al. High performance parallel computing of flows in complex geometries[J]. *Comptes Rendus Mecanique*, 2011, 339(2): 104-124.
- [2] GILES M B, REGULY I. Trends in high-performance computing for engineering calculations[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2014, 372(2022): 319-332.
- [3] 姬昌睿, 杨小权, 杨爱明, 等. 用强耦合RANS方法模拟旋翼悬停流场[J]. *航空动力学报*, 2014, 29(8): 1894-1903.
JI Changrui, YANG Xiaoquan, YANG Aiming, et al. Strongly coupled RANS algorithm for simulating hovering rotor flow[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2014, 29(8): 1894-1903. (in Chinese)
- [4] 王宝潼, 张楚华, 席光. 三维分块非结构化网格上的可压缩流计算方法[J]. *航空动力学报*, 2009, 24(10): 2319-2325.
WANG Baotong, ZHANG Chuhua, XI Guang. Numerical method of compressible flow on three-dimensional sub-block unstructured grid[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2009, 24(10): 2319-2325. (in Chinese)
- [5] GOURDAIN N, MONTAGNAC M, WLASSOW F, et al. High-performance computing to simulate large-scale industrial flows in multistage compressors[J]. *International Journal of High Performance Computing Applications*, 2010, 24(4): 429-433.
- [6] 司海青, 王同光. 多块并行计算中负载平衡策略及时间成本估算方法[J]. *航空学报*, 2007, 28(增刊): 57-61.
SI Haiqing, WANG Tongguang. Load balancing strategy for parallel calculation and time cost estimation[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, 28(Suppl.): 57-61. (in Chinese)
- [7] 唐波, 王勇献. 大规模CFD多区结构网格任务负载平衡算法[J]. *计算机工程与科学*, 2014, 36(7): 1213-1220.
TANG Bo, WANG Yongxian. A novel task load balancing algorithm in the large-scale CFD with multi-zone structured grids [J]. *Computer Engineering and Science*, 2014, 36(7): 1213-1220. (in Chinese)
- [8] 王永红. 叶轮机械三维非定常流场数值方法研究及其并行策略[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
WANG Yonghong. Research on numerical methods of the three dimensional unsteady flow in turbomachinery and parallel computational algorithms[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007. (in Chinese)
- [9] 刘超群. 多重网格法及其在计算流体力学中的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [10] TAI C H, ZHAO Y, LIEW K M. Parallel-multigrid computation of unsteady incompressible viscous flows using a matrix-free implicit method and high-resolution characteristics-based scheme[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(36): 3949-3983.
- [11] 王运涛, 王光学, 徐庆新, 等. 基于结构网格的大规模并行计算研究[J]. *计算机工程与科学*, 2012, 34(8): 63-68.
WANG Yuntao, WANG Guangxue, XU Qingxin, et al. A study of the massively parallel computation based on structured grids[J]. *Computer Engineering and Science*, 2012, 34(8): 63-68. (in Chinese)
- [12] YAO J, JAMESON A, ALONSO J J, et al. Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2001, 17(3): 659-668.
- [13] WEIDE E D, KALITZIN G, SCHLUTER J, et al. Unsteady turbomachinery computations using massively parallel platforms[R]. Reno, Nevada, America: The 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2006.
- [14] ALONSO J J, MITTY T J, MARTINELLI L, et al. A

- two-dimensional multigrid-driven Navier-Stokes solver for multiprocessor architectures[R]. Kyoto, Japan: The Parallel CFD Conference, 1994.
- [15] 李宗哲, 王正华, 姚路, 等. 非结构网格的并行多重网格解算器[J]. 软件学报, 2013, 24(2): 391-404.
- LI Zongzhe, WANG Zhenghua, YAO Lu, et al. Parallel multigrid solver for unstructured grid[J]. Journal of Software, 2013, 24(2): 391-404. (in Chinese)
- [16] 李园园. 面向透平压缩机气动设计的可压缩流动数值计算方法[D]. 西安: 西安交通大学, 2012.
- LI Yuanyuan. Numerical simulation of the aerodynamic performance in turbocompressor[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2012. (in Chinese)
- [17] 张楚华, 琚亚平. 流体机械内流理论与计算[M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [18] REID L, MOORE R D. Design and overall performance of four highly loaded, high speed inlet stages for an advanced high-pressure-ratio core compressor[R]. NASA TP-1337, 1978.
- [19] ZHAO Lei, ZHANG Chuhua. A parallel unstructured finite-volume method for all-speed flows[J]. Numerical Heat Transfer: Part B Fundamentals, 2014, 65(4): 336-358.