高 中 数 学 讲 义

η from 本书编写组ETRO 主编

2023 年 4 月 27 日

目录

序：从数字到数学

数学对于任意的理科学习都是至关重要的，特别是在物理相关的内容中！就比如，在我所写的《物理教程：从数学到化学》中，很多的物理问题都要依靠数学技巧来求解．就比如说同学们熟知的三角比，对于它的应用在物理中可以说是要多广泛有多广泛了．再者，物理量之间的关系有的互成导数与积分的关系，有的又和数列有关……

数字也总是那样巧妙．往往看起来毫无关系的两个数，他们之间却有着那样奇异的联系．再说说计算机吧：从数据分析到数据科学，没有数学的基础一定是不可行的．素数矢量分布图如繁星般璀璨，哥德巴赫猜想那般引人入胜（什么奇奇怪怪的东西乱入）．

啊哈！我想你也明白了数学的重要性？那就下一章开始，去认真品读每一个数学公式，去仔细阅读每一条定义，去深度思考每一则证明！愿你的前方将是数学之光．

——ω from 本书编写组ETRO

注意

1. 在第一部分和第三部分中，除特殊说明外“数”均指实数；在第二部分中，除“复数”一章外，“数”亦一般指实数；在“复数”一章中，未加说明，“数”默认指复数.
2. 在本书中，斜体大写字母和小写字母（譬如说 a, A, α）表示普通变量（如集合、数、函数等），正体字母一般表示数学算子或常数（如 $\mathrm{d}x, \log, \mathrm{\pi}$ 等），无衬线字体表示单位（如 m 等），粗体无衬线字母或加横线的正体字母表示物理常数（如 $\mathsf{G}, \bar{\mathrm{\alpha}}$ 等），矢量则用粗体字母（如 $\boldsymbol{a}$ 等）或箭头的上标（如 $\overrightarrow{AB}$ 等）表示.

第一编　　代数学

第 I 章　三角比

第 II 章　集合与命题

II.1　集合及其表示法

在实际解决问题的过程中，我们时常要将一些具有共同特点的物体放在一起进行讨论。如根为 $0, 1$ 和 2 的三次多项式、正约数有 114 个的所有正整数、图象过点原点的所有函数等。这些物体不会有相同的，而且能确切地指明出来。这时我们就可以用集合来说明讨论。

定义 1 能够确切指定的不同对象所构成的整体叫做**集合**(set)，简称**集**.

集合中的元素(element)有三大特点：**确定性**(determinacy)：集合中的各元素是确定的，不可模棱两可、含糊不清．**无序性**(disorder)：集合中各元素地位相同，与顺序无关．**唯一性**(uniqueness)：集合中的元素各不相同.

定义 2 含有有限个元素的集合叫做**有限集**(finite set).

定义 3 含有无限个元素的集合叫做**无限集**(infinite set).

定义 4 不含任何元素的集合叫做**空集**(empty set)，记作 $\varnothing$.

定义 5 元素是数的集合叫做**数集**(manifold).

常用的数集有以下表示法：

定义 6 全体自然数组成的集合叫做**自然数**(natural number)**集**，记作 $\mathbb{N}$.

定义 7 全体整数组成的集合叫做**整数**(integer)**集**，记作 $\mathbb{Z}$(即德语 Zahlen).

定义 8 全体有理数组成的集合叫做**有理数**(rational number)**集**，记作 $\mathbb{Q}$(即德语 Quotient).

定义 9 全体实数组成的集合叫做**实数**(real number)**集**，记作 $\mathbb{R}$.

上述数集可通过上标来表示正负．如 $\mathbb{Q}^+$ 表示全体正有理数组成的集合．特别地，$\mathbb{N}^*$ 表示全体正整数组成的集合．

集合一般用大写字母表示，如 A；集合中的元素常用小写字母表示，如 a.

定义 10 如果 a 是集合 A 的元素，则称 a **属于**(belong to)A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则称 a **不属于** A，记作 $a \notin A$.

集合的表示方法有两种：

1. 列举法：将集合中的元素列举出来，写在大括号中．如 $\{11, 45, 14, 19, 198, 10\}$.

2. 描述法：写出集合中的元素的一般形式以及其虚拟变量所满足的条件．如 $\{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ 表示全体正奇数(positive odd number)组成的集合.

II.2 集合之间的关系

定义 11 任给两个集合 A 和 B，若 $\forall a \in A$ 都有 $a \in B$，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，B 是 A 的**超集**(superset)，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$[1]，读作 A **包含于** B，也读作 B **包含**(contain) A.

定义 12 任给两个集合 A 和 B，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A = B$，读作 A **等于**(equal to) B.

定义 13 任给两个集合 A 和 B，若 $A \subset B$ 且 $B \not\subset A$，则称 A 是 B 的**真子集**(proper subset)，记作 $A \subsetneq B$，读作 A **真包含于** B，也读作 B **真包含** A.

在集合中，我们可以用韦恩图(Venn diagram)来表示集合之间的关系。在韦恩图中，我们使用圆或椭圆来表示集合。如图2.1左一所示，这幅图表示 $A \in B$.

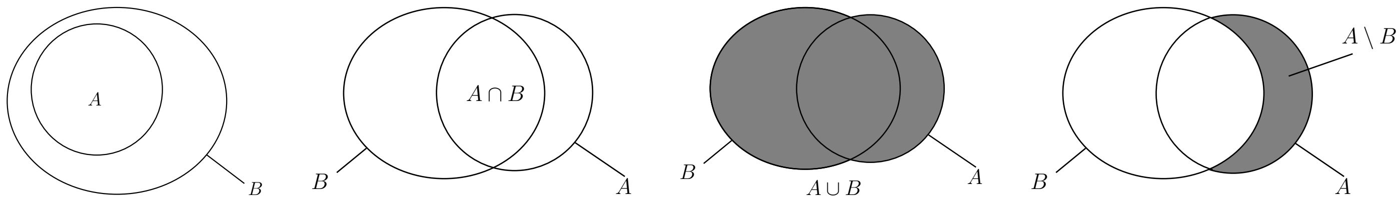

图 2.1. 一些韦恩图

II.3 集合的运算

定义 14 对于两个集合 A、B，它们的所有公共元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**(intersection)，记作 $A \cap B$，读作 A 交(intersect) B. 特殊地，对于集合族 A_i（其中 $i = 1, 2, 3, \ldots n$），它们的交集可记作

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

定义 15 对于两个集合 A、B，它们的所有元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**(union)，记作 $A \cup B$，读作 A 并 B. 特殊地，对于集合族 A_i（其中 $i = 1, 2, 3, \ldots n$），它们的并集可记作

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

定义 16 对于两个集合 A、B，由在 A 中且不在 B 中的所有元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**差集**(subtraction set)，记作 $A \setminus B$[2]，读作 A 减 B. 特殊地，若 $B \subset A$，由在 A 中且不在 B 中的所有元素所组成的集合，叫做 B 的**补集**(complementary set)，记作 $\complement_A B$，读作 B 补(B complement)或 B 对 A 补. 此时 A 称**全集**. 在明确全集的情况下，集合 A 的补集也记作 $\overline{A}$ 或 $A^{\complement}$.

交集、并集和差集，也可形象地使用韦恩图来表示，如图2.1中左二、左三、左四分别表示交集、并集和差集。

定义 17 对于一个集合 A，A 中的元素个数称为 A 的**基数**，记作 $|A|$.

由交集的定义，容易得出下列结论：

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$$

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$$

[1] 有些出版物上记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，更有些出版物上认为 $A \subset B$ 是 A 真包含于 B，但这并不是规范的记法. $A \subset B$ 与 $A \subseteq B$，是等价的记法.

[2] 也有写成 $A - B$ 的.

由并集的定义，容易得出下列结论：

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$$

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$$

由补集的定义，容易得出下列结论：

$$\complement_U A \cap \complement_U B = \complement_U (A \cup B)$$

$$\complement_U A \cup \complement_U B = \complement_U (A \cap B)$$

这结论又称为德·摩尔根定律(De Morgan's laws)。同学们可以自己试着证明它。

定义 18 对于集合 A_i , $i = 1,2,3,\dots,n$，由每个集合中的元素组成的有序数对组成的集合叫做 A_i 的**笛卡尔积**(Cartesian product)[3]，记作 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$. 事实上，$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$，读作 A **左乘** B，或 B **右乘** A.

注意此处的 $A \times B$ 不能写成 $A \cdot B$，也不能写成 AB.

对于笛卡尔积，有如下的运算律：

左乘分配律 $$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$$

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$$

右乘分配律 $$A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$$

$$A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$$

对偶律 $$(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$$

II.4 抽屉原理与容斥原理

定理 1 (抽屉原理(pigeonhole principle))

设以下 $m, n, r \in \mathbb{R}$，则有如下定理：

1. 将 $n + r$ 个物体任意放入 n 个抽屉中，则一定存在抽屉至少包含 2 个物体；
2. 将 $mn + r$ 个物体任意放入 n 个抽屉中，则一定存在抽屉至少包含 $m + 1$ 个物体；
3. 将 m 个物体任意放入 n 个抽屉中，则一定存在抽屉至少包含 $\left\lceil \dfrac{m}{n} \right\rceil$ 个物体
4. 将 $mn - r$ 个物体任意放入 n 个抽屉中，则一定存在抽屉至多包含 $m - 1$ 个物体；

其正确性是显然的.

定理 2 (容斥原理(principle of inclusion and exclusion))

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqslant n} \left| \bigcap_{p=1}^{j} S_{k_p} \right|$$

证明暂时不给.

[3] 也有叫做**直积**的。

II.5 几种特殊的集合

定义 19 对于集合 A，A 的所有子集构成的集合，叫做该集合的**幂集**(power set)．

定义 20 对于数集 I，$x,y\in I$，其中 $x<y$，若 $\forall z$ 使得 $x<z<y$，都有 $z\in I$，则称 I 为**区间**(interval)．

在数轴上，区间就可以表示为一段连续不断的包含或不包含端点的线段、射线或直线。

定义 21 对于区间 I，若实数 l 使得 $\forall k<l$ 都有 $k\notin I$，并且 $\exists c$ 使得 $l<\forall m<l+c$ 都有 $m\in I$，则称 l 为 I 的**左端点**(left terminal)．

定义 22 对于区间 I，若实数 r 使得 $\forall k>r$ 都有 $k\notin I$，并且 $\exists c$ 使得 $r-c<\forall m<r$ 都有 $m\in I$，则称 r 为 I 的**右端点**(right terminal)．

定义 23 区间 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 叫做 a 的 δ **邻域**(neighbourhood)，记作 $U(a,\delta)$．

定义 24 数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 叫做 a 的 δ **去心邻域**(deleted neighbourhood)，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$．

定义 25 对于 $S\subset\mathbb{R}$，若 $\forall s\in S$ 都有 $\exists\delta$ 使得 $U(s,\delta)\subset S$，则称 S 为**开集**(open set)[4]．特殊地，空集是开集．

定义 26 开集的补集叫做**闭集**(closed set)．特殊地，空集是闭集．

定理 3 开集的并集是开集．

定理 4 闭集的并集是闭集．

以上两个命题的证明从略．

定义 27 是开集的区间叫做**开区间**(open interval)．若其左右端点分别为 l 和 r，将其记作 (l,r)．

定义 28 是闭集的区间叫做**闭区间**(closed interval)．若其左右端点分别为 l 和 r，将其记作 $[l,r]$．

定理 5 有限开区间的两端点不属于该区间．

定理 6 闭区间的两端点属于该区间．

定义 29 左端点 l 属于自身，但右端点 r 不属于自身的区间叫做**右开区间**(ROLC interval, right-open-left-closed interval)，记作 $[l,r)$．

定义 30 左端点 l 不属于自身，但右端点 r 属于自身的区间叫做**左开区间**(LORC interval, left-open-right-closed interval)，记作 $(l,r]$．

定义 31 左开区间和右开区间合称**半开区间**(semiclosed interval)．

定义 32 区间 I 在数轴上所对应的长度，叫做区间的**长度**(measure)，记作 $\ell(I)$．它等于区间的两端点数值之差．

定义 33 有一侧或两侧的端点不存在的区间，叫做**无穷区间**(infinite interval)．

定义 34 区间 (a,∞)[5] 表示 $\{x\mid x>a\}$；区间 $[a,\infty)$ 表示 $\{x\mid x\geqslant a\}$；区间 $(-\infty,a)$ 表示 $\{x\mid x<a\}$；区间 $(-\infty,a]$ 表示 $\{x\mid x\leqslant a\}$；区间 $(-\infty,\infty)$ 就是 $\mathbb{R}$．

注意：由于无穷不是数，所以务必不能把无穷端点写成闭区间的形式！！

[4] 这里是 1 维欧式空间的特殊情形．

[5] 在中国教材中，包括中国的考试中，这里都写作 $+\infty$．为了与《普林斯顿微积分读本》相一致，本书中用 ∞ 表示正无穷，用 $\pm\infty$ 表示双侧无穷．敬请注意．

II.6 命题与条件

在生活中，我们常常会有一些断言和判断语句，如“η 是 ETRO 的领导人”“114 是 514 的约数”“素数都是实数”等语句。这些语句有的是真实的，有的是错误的，我们把这些语句称为**命题**(proposition)。由命题的真伪，可将命题分为**真命题**和**假命题**或称**伪命题**.

命题可以写成若 α，则 β 的形式，其中 α 叫做**题设**，β 叫做**结论**．α 和 β 都称为**条件**。条件 c 的否定可记作 $\overline{c}$ 或 $\neg c$.

定义 35 *对于命题 Π“若 α，则 β”，命题“若 β，则 α”称为 Π 的*逆命题；*命题“若 $\neg\alpha$，则 $\neg\beta$”称为 Π 的*否命题；*命题“若 $\neg\beta$，则 $\neg\alpha$”称为 Π 的*逆否命题.

易知，一个命题与其逆否命题真假性相同。

定义 36 *若命题“若 α，则 β”为真，那么称条件 α 能推出条件 β，记作 $\alpha\Longrightarrow\beta$ 或 $\beta\Longleftarrow\alpha$，称 α 是 β 的*充分条件*，称 β 是 α 的*必要条件*。若命题“若 α，则 β”为真，且其逆命题也为真，则称条件 α 等价于条件 β，记作 $\alpha\Longleftrightarrow\beta$，称 α 和 β 互为*充分必要条件*，简称*充要条件*。若条件 α 和 β 不能建立起真命题关系，则称 α 和 β 互为*既非充分又非必要条件.

注意大家在做题时，问 α 是 β 的哪种条件，要写出“充分非必要”“必要非充分”，要兼判断必要性和充分性。

如果有条件 p 和 q，集合 P 和 Q 分别表示满足 p 和 q 的事件全体，则有如下关系：

p 与 q 的推出关系	P 与 Q 的包含关系
p 是 q 的充分条件	$P \in Q$
p 是 q 的必要条件	PQ

1. 1

*2. 2

第 III 章　函数与数列

III.1　映射

定义 37 对于两个非空集合 A 和 B，定义规则 f 使得 $\forall x \in A$，都有 $f(x) \in B$，则 f 称为从 A 到 B 的一个**映射**(mapping)，记作 $f\colon A \to B$.

定义 38 对于映射 $f\colon A \to B$，对于 $x \in A$ 以及 $y = f(x) \in B$，y 称为 x 的**像**(image)，x 称为 y 的一个**原像**(preimage).

特别注意：对于一个像，可能会有数个原像与之对应，所以务必强调是"一个"原像！！

定义 39 对于映射 $f\colon A \to B$，A 叫做 f 的**定义域**(domain)，记作 D_f；B 叫做 f 的**上域**(codomain)；$\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做 f 的**值域**(Range)，记作 $f(A)$[1].

注意：在上述表述中，D_f 与 A 严格相等；但 R_f 却不一定等于 B. 可以确定 $R_f \subset B$.

定义 40 对于映射 $f\colon A \to B$，若 $R_f = B$，则称 f 为 A 到 B 上的**满射**(surjection).

定义 41 对于映射 $f\colon A \to B$，若 $\forall x_1, x_2 \in A$ 使得 $x_1 \neq x_2$，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 A 到 B 上的**单射**(injection).

定义 42 既是单射又是满射的映射叫做**双射**(bijection)[2].

定理 7 对于双射 $f\colon A \to B$，$|A| = |B|$.

证明从略.

定义 43 对于单射 $f\colon A \to B$，若有映射 $g\colon R_f \to A$ 使得 $\forall a \in A$，都有 $g(f(a)) = a$，则称 g 为 f 的**逆映射**(inverse mapping)，记作 f^{-1}.

只有单射才有逆映射. 否则会出现一个原像对应两个像的情况，不符合映射的定义.

由定义得，一个映射逆映射的值域等于该映射的定义域，一个映射逆映射的定义域等于该映射的值域. 值得注意的是，根据定义来看，一个映射的逆映射是双射.

定义 44 对于映射 $g\colon A \to B$ 和 $f\colon X \to Y$，若 $R_g \subset X$，定义 $h\colon A \to Y$ 使得 $\forall x \in A$ 都有 $h(x) = f(g(x))$，则称 h 为 g 和 f 构成的**复合映射**(composite mapping)，记作 $f \circ g$.

要构成复合映射，$R_g \subset X$ 是必需的. 否则不能保证复合映射有意义. 但在后面学习函数时，我们默认限制函数的定义域，使得函数的各项操作都有意义.

---

[1] 也有记作 R_f 的.

[2] 也有叫做**一一映射**的.

III.2 函数的基本意义

III.2.i 函数的定义

定义 45 设 $D\subset\mathbb{R}$，定义映射 $f: D\to R$，f 称为定义在 D 上的**函数**，记为

$$y=f(x)\ ,\ x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．y 在 x 取特定值 x_0 时的取值，称为 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y\big|_{x=x_0}$．

值得注意的是，记号 f 与 $f(x)$ 表示的意思是不同的．前者表示映射中的一个对应关系，是抽象的．人们为了方便指明 f 的具体内容，利用 x 作为虚拟变量来说明 f 是什么．

定义 46 对于定义域为 D 的函数 f，设数集 $S\subset D$，定义 $f(S)$ 为 $\{f(x)\mid x\in S\}$

定义 47 给定函数 f，使得 $f(x)$ 有意义的 x 的取值范围叫做 $f(x)$ 的**自然定义域**．

以后我们在表示函数时，如若未指明函数的定义域，默认取函数的自然定义域．

定义 48 如果两函数对应法则和定义域都相同，则称这两个函数相同．

如 $f(x)=\ln(x^2)$ 和 $g(x)=2\ln x$，虽然两个函数在对应法则上相同，但定义域是不同的．前者的定义域为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$，而后者的定义域为 $\mathbb{R}^+$．所以这两个函数不相同．

定义 49 对于函数 f，在直角坐标平面 $\alpha O\beta$ 上的点集 $\{(x,f(x))\mid x\in D_f\}$ 称为 $\beta=f(\alpha),\alpha\in D_f$ 的**图象**[3]．

定义 50 用几个定义域无交集的代数式表示的一个函数，叫做**分段函数**，记作

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)\ , & x\in D_1\\ f_2(x)\ , & x\in D_2\end{cases}$$

III.2.ii 函数的性质

III.2.i.a 函数的有界性

定义 51 设函数 $f(x),x\in D$，数集 $S\subset D$，若 $\exists s$ 使得 $\forall x\in S$ 都有 $f(x)\leqslant s$，则称 f 在 S 上有**上界**，s 称为 f 在 S 上的一个**上界**．

定义 52 设函数 $f(x),x\in D$，数集 $S\subset D$，若 s 为 f 在 S 上的一个上界，且 $\forall s^*<s$ 均不是 f 在 S 上的上界，则称 s 称为 f 在 S 上的**上确界**，记作 $\sup f(S)=s$[4]．

定义 53 设函数 $f(x),x\in D$，数集 $S\subset D$，若 $\exists i$ 使得 $\forall x\in S$ 都有 $f(x)\geqslant i$，则称 f 在 S 上有**下界**，i 称为 f 在 S 上的一个**下界**．

定义 54 设函数 $f(x),x\in D$，数集 $S\subset D$，若 i 为 f 在 S 上的一个下界，且 $\forall i^*<i$ 均不是 f 在 S 上的下界，则称 s 称为 f 在 S 上的**下确界**，记作 $\inf f(S)=i$[5]．

定理 8 (上确界定理) 若集合 S 中有最大值（记作 $\max S$），则 $\sup S=\max S$．

定理 9 (下确界定理) 若集合 S 中有最小值（记作 $\min S$），则 $\inf S=\min S$．

[3]也有叫做**图形**的

[4]实际上，上确界可以在任意集合上定义，与此定义相似．

[5]实际上，下确界可以在任意集合上定义，与此定义相似．

III.2.ii.b　函数的单调性

定义 55 设函数 $f(x), x\in D$，区间 $I\subset D$，若 $\forall x_1<x_2$ 满足 $x_1,x_2\in D$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 f 在 I 上**单调增**，f 在 I 上是**单调增函数**，简称**增函数**．I 称为 f 的**单调增区间**．若上式中不等号是严格的，则称 f 在 I 上**严格单调增**．

定义 56 设函数 $f(x), x\in D$，区间 $I\subset D$，若 $\forall x_1<x_2$ 满足 $x_1,x_2\in D$，都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 f 在 I 上**单调减**，f 在 I 上是**单调减函数**，简称**减函数**．I 称为 f 的**单调减区间**．若上式中不等号是严格的，则称 f 在 I 上**严格单调减**．

定义 57 增函数和减函数统称**单调函数**，单调增区间和单调减区间统称**单调区间**．

III.2.iii.c　函数的凹凸性

定义 58 设函数 $f(x), x\in D$，区间 $I\subset D$，若 $\forall x_1,x_2\in I$ 都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 f 在 I 上是**下凸函数**[6]，f 的图象在 I 上是**下凸弧**[7]．

定义 59 设函数 $f(x), x\in D$，区间 $I\subset D$，若 $\forall x_1,x_2\in I$ 都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 f 在 I 上是**上凸函数**[8]，f 的图象在 I 上是**上凸弧**[9]．

III.2.iv.d　函数的奇偶性

定义 60 设函数 $f(x), x\in D$，若 $\forall d\in D$ 都有 $f(-d)=-f(d)$，则称 f 为**奇函数**．

定义 61 设函数 $f(x), x\in D$，若 $\forall d\in D$ 都有 $f(-d)=f(d)$，则称 f 为**偶函数**．

根据定义，如果一个函数具有奇偶性，其定义域一定关于原点对称．

定理 10 奇函数在 $x=0$ 处若有定义，则函数值为 0．

定理 11 函数 $f(x), x\in D$ 是既奇又偶的函数的充要条件是 $f(x)=0$，且定义域关于原点对称．

证明从略．

定理 12 奇函数与奇函数的和是奇函数．

定理 13 偶函数与偶函数的和是偶函数．

定理 14 奇函数与奇函数的积是偶函数．

定理 15 奇函数与偶函数的积是奇函数．

定理 16 偶函数与偶函数的积是偶函数．

定理 17 奇函数的图象关于原点对称．

定理 18 奇函数的图象关于纵点对称．

以上的几个定理均可以通过定义证明，同学们可以自己试着证明一下．

定义 62 下凸的增函数或上凸的减函数被称为**顺式函数**．下凸的严格增函数或上凸的严格减函数被称为**严格顺式函数**．上凸的增函数或下凸的减函数被称为**反式函数**．上凸的严格增函数或下凸的严格减函数被称为**严格反式函数**．[10]

[6] 又称凹函数、上凹函数
[7] 又称凹弧、上凹弧
[8] 又称凸函数、下凹函数
[9] 又称凸弧、下凹弧
[10] 这个定义并不正式，也很少会用到．

III.2.v.e 函数的周期性

定义 63 设函数 $f(x), x\in D$，若 $\exists t\neq 0$，使得 $\forall d\in D$ 使得 $d+t\in D$，都有 $f(d)=f(d+t)$，则称 f 是**周期函数**，t 称为 f 的一个**周期**[11]，其中最小者[12]的绝对值称为 f 的**最小正周期**.

并不是每个周期函数都有最小正周期．如常值函数，又如狄利克雷函数：

例 1 狄利克雷函数：

$$D(x)=\begin{cases}1\,, & x\in\mathbb{Q}\\ 0\,, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

任意有理数都是该函数的周期，故该函数无最小正周期.

III.2.iii 反函数与复合函数

定义 64 对于函数 $f(x), x\in D$，若 $\forall y\in f(D)$，存在仅存在一个 x 使得 $f(x)=y$，那么该函数具有**反函数**．反函数与逆映射的定义相同，这里不再阐述．对于反函数 f^{-1} 来说，原来的函数 f 称为**直接函数**.

定理 19 只有严格单调函数才有原函数.

定理 20 反函数保持直接函数的奇偶性，保持直接函数的单调性，反转直接函数的凹凸性.

定义 65 对于函数 $y=f(u), u\in D_f$ 和 $u=g(x), x\in D_g$，若 $g(D_g)\subset D_f$，则函数 $y=f(g(x))$ 称为由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，也记作 $y=(f\circ g)(x)$．它的定义域为 D_g，u 叫做**中间变量**.

对于一些函数，譬如 $\sqrt{x+1}$，技术上来说它并不是 $u=x+1$ 和 $\sqrt{u}$ 构成的复合函数．但是为简便起见，仍称 $\sqrt{x+1}$ 是 $u=x+1$ 和 $\sqrt{u}$ 构成的复合函数，此时的定义域就是使得 $x+1$ 在平方根函数定义域中的所有 x 组成的集合．以后说到“复合函数”，默认就是这一类.

定理 21 对于单调性一致的函数 f 和 g，$f\circ g$ 与之单调性也一致.

定理 22 对于有奇偶性的函数 $f_1, f_2, \dots, f_n$，$f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_n$ 是奇函数的充要条件是 f_i 为奇函数 , $i=1,2,\dots,n$.

III.2.iv 初等函数

III.2.i.a 常值函数

常值函数，顾名思义，是指其函数值为常数的函数．常值函数 $f(x)=\xi$ 的自然定义域是 $\mathbb{R}$，值域为 $\{\xi\}$，无凹凸性、单调性，亦无反函数，是偶函数，且当 $\xi=0$ 是为既奇又偶函数，在 $\mathbb{R}$ 上有界，其上确界和下确界都是 ξ．值得注意的是，常值函数是周期函数，任意 $t\in\mathbb{R}$ 都是它的周期，而且无最小正周期.

III.2.ii.b 幂函数

幂函数，是指形如 $f(x)=x^{\mu}\ (\mu\neq 0)$[13]的函数．$\mu$ 称为**幂指数**．当 $\mu\in\mathbb{Q}\wedge\mu\neq 0$ 时，该函数称为**根式幂函数**．显然幂函数的图象恒过点 $(1,1)$．其图象见图3.1.

在根式幂函数 $f(x)=x^{\mu}$ 中，设 $\mu=p/q$，其中 $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*\wedge\gcd\{p,q\}=1$，则 p 称为**本原幂指数**，q 称为**根指数**.

下面分类讨论幂函数的性质：

[11] 有些教材认为只有正数才能作为一个周期，但这样定义域的问题不好解决.

[12] 在本书中，“最小”和“最大”均是指绝对值的大小.

[13] 也有认为 $\mu=0$ 包含在内的，包括中国的教材.

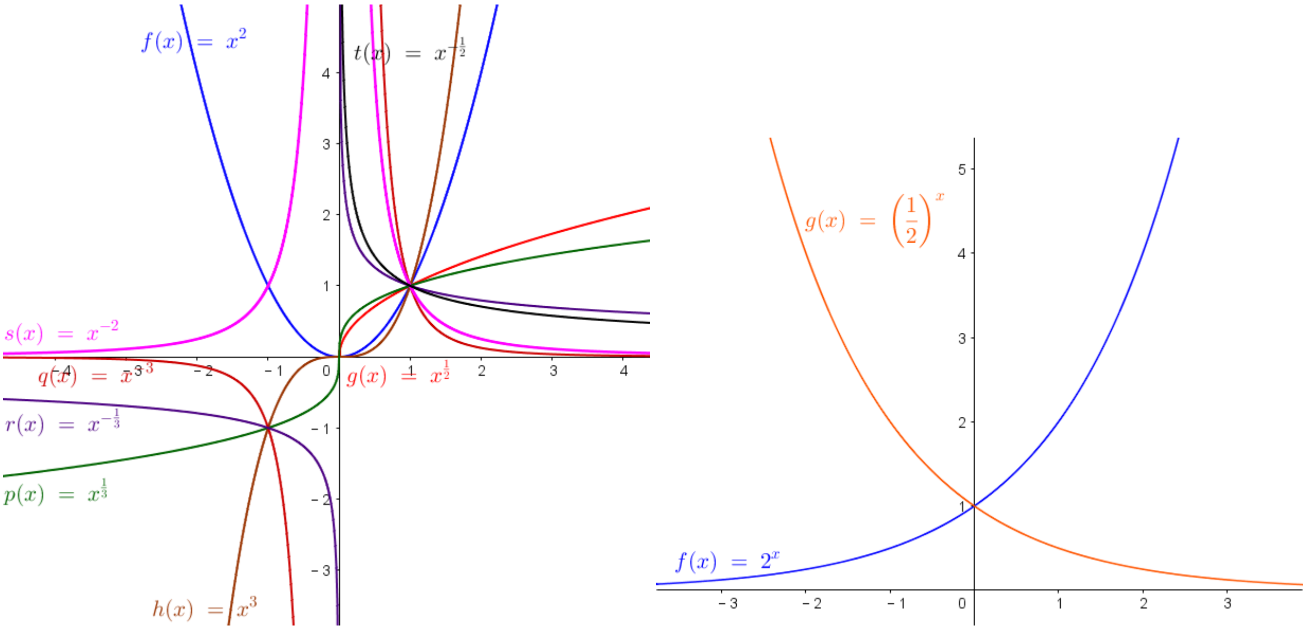

图 3.1. 几种基本初等函数的图象

1. 若根式幂函数的幂指数为正数：
   (a) 若本原幂指数为偶数且根指数为奇数，且幂指数小于 1，则它的定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $[0,\infty)$，图象在第 I、II 象限，为偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上单调减，在 $[0,\infty)$ 上单调增，为上凸函数，无上界，有下确界 0.
   (b) 若本原幂指数为奇数且根指数为奇数，且幂指数小于 1，则它的定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $\mathbb{R}$，图象在第 I、III 象限，为奇函数，单调增，在 $(-\infty,0]$ 上为下凸函数，在 $[0,\infty)$ 上为上凸函数，无界.
   (c) 若本原幂指数为奇数且根指数为偶数，且幂指数小于 1，则它的定义域为 $[0,\infty)$，值域为 $[0,\infty)$，图象在第 I 象限，单调增，为上凸函数，无上界，有下确界 0.
   (d) 若本原幂指数为偶数且根指数为奇数，且幂指数大于 1，则它的定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $[0,\infty)$，图象在第 I、II 象限，为偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上单调减，在 $[0,\infty)$ 上单调增，为下凸函数，无上界，有下确界 0.
   (e) 若本原幂指数为奇数且根指数为奇数，且幂指数大于 1，则它的定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $\mathbb{R}$，图象在第 I、III 象限，为奇函数，单调增，在 $(-\infty,0]$ 上为上凸函数，在 $[0,\infty)$ 上为下凸函数，无界.
   (f) 若本原幂指数为奇数且根指数为偶数，且幂指数大于 1，则它的定义域为 $[0,\infty)$，值域为 $[0,\infty)$，图象在第 I 象限，单调增，为下凸函数，无上界，有下确界 0.
2. 若根式幂函数的幂指数为负数：请同学们自主完成研究.

III.2.iii.c　指数函数

指数函数，是指形如 $f(x)=b^x\ (b>0\wedge b\neq 1)$ 的函数．b 称为**底数**．定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $(0,\infty)$．当 $b>1$ 时，函数为严格单调增；当 $b\in(0,1)$ 时，函数严格单调减．无上界，有下确界 0，但不是最小值．函数图象恒过点 $(0,1)$.

若指数函数 $f(x)=b^x$ 中 $b>1$，则自变量当取很大的负数时，函数图象接近 x 轴；若 $b\in(0,1)$，则当自变量取很大的正数时，函数图象接近 x 轴．以后提到指数函数时，默认指 $b>1$ 的．其图象见图3.1.

III.2.iv.d　对数函数

A. 对数的定义

定义 66 若 $b^p=N$，其中 $b\in(0,1)\cup(1,\infty)$，则记 $p=\log_b N$，p 读作以 b 为底关于 N 的**对数**．其中 b 叫做**对数的底**，N 叫做**真数**．底为 10 的数叫做**常用对数**，记作 $\log x$ 或 $\lg x$；底为 e 的对数叫做**自然对数**，记作 $\ln x$；底为 2 的对数叫做**二进对数**，记作 $\mathrm{lb}\, x$.

补充阅读：

对数的发展史

16–17 世纪的文艺复兴时代，恰逢天文学飞速发展的时代，很多科学家如第谷·布拉赫[14]、伽利略·伽利莱[15]、约翰尼斯·开普勒[16]

III.2.v.e 三角函数与反三角函数

III.2.vi.f 初等函数

如上这些简单的函数，以及任意函数式与这些函数本身一样、定义域是这些函数定义域的子集的函数，统称为**基本初等函数**.

定义 67 由有限个基本初等函数经有限次四则运算或复合之后构成的函数称为**初等函数**. [17]

III.2.vii.g 双曲函数与反双曲函数

定义 68 双曲函数有如下定义：

$$\textbf{双曲正弦函数} \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\textbf{双曲余弦函数} \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\textbf{双曲正切函数} \quad \tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

$$\textbf{双曲余切函数} \quad \coth x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$

$$\textbf{双曲正割函数} \quad \operatorname{sech} x = \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

$$\textbf{双曲余割函数} \quad \operatorname{csch} x = \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$

其图象见图3.2.

常用的三种双曲函数性质如下：

双曲正弦函数定义域和值域均为 $\mathbb{R}$，是严格增函数，也是奇函数，在 $(-\infty,0]$ 上是上凸函数，在 $[0,\infty)$ 上是下凸函数. 当 x 是很大的正数时，$\sinh x \doteq \frac{e^x}{2}$；当 x 是很大的负数时，$\sinh x \doteq -\frac{e^x}{2}$.

双曲余弦函数定义域和值域均为 $\mathbb{R}$，是偶函数，也是下凸函数，在 $(-\infty,0]$ 上是严格减函数，在 $[0,\infty)$ 上是严格增函数. 当 x 是很大的正数时，$\cosh x \doteq \frac{e^x}{2}$；当 x 是很大的负数时，$\cosh x \doteq \frac{e^{-x}}{2}$.

双曲正切函数定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $(-1,1)$，是严格增函数，也是奇函数，在 $(-\infty,0]$ 上是下凸函数，在 $[0,\infty)$ 上是上凸函数. 当 x 是很大的正数时，$\tanh x \approx 1$；当 x 是很大的负数时，$\tanh x \approx -1$.

由定义，易知下列恒等式：

$$\cosh\alpha - \sinh\alpha = 1$$

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

$$\sinh(\alpha-\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta - \cosh\alpha\sinh\beta$$

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$

$$\cosh(\alpha-\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta - \sinh\alpha\sinh\beta$$

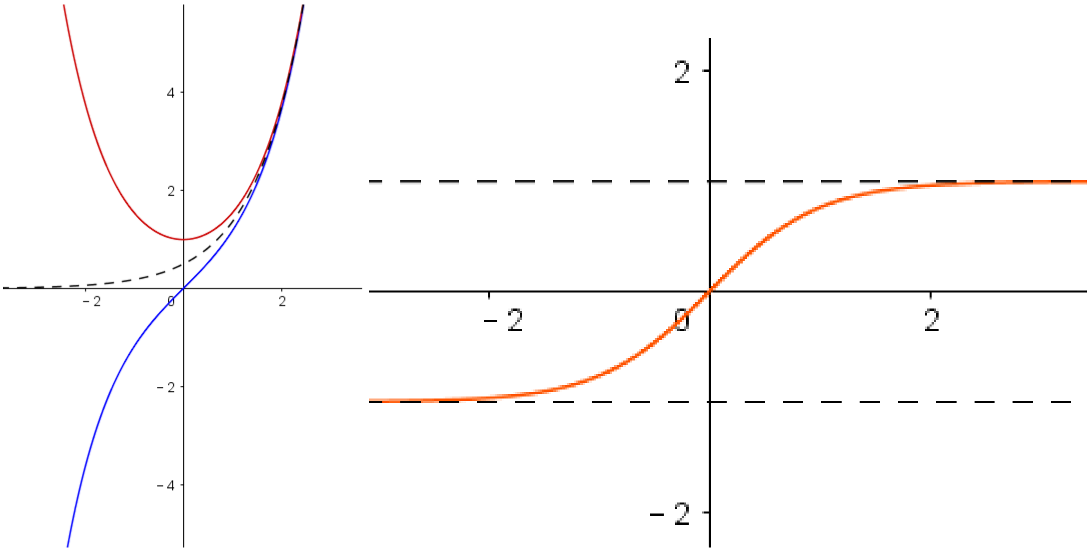

图 3.2. 三种双曲函数的图象

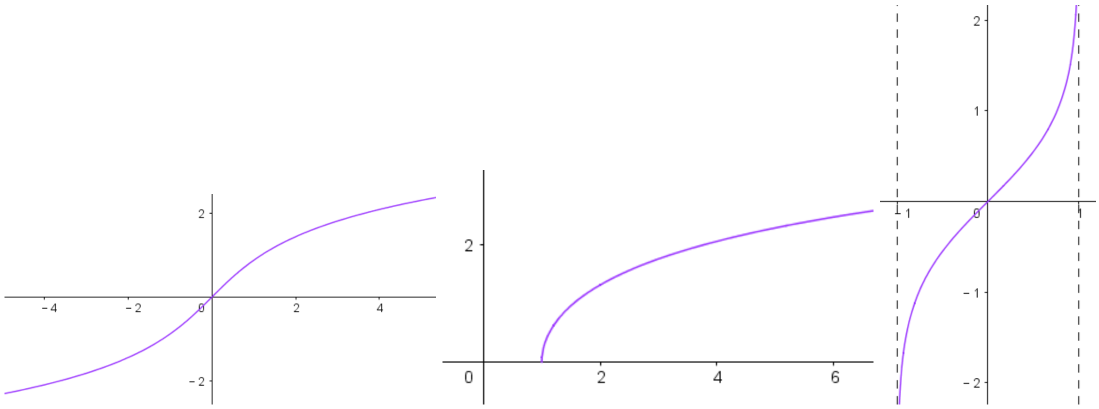

图 3.3. 三种反双曲函数的图象

上述公式可用三角函数公式帮助记忆，但略有不同.

定义 69 双曲正弦函数的反函数叫做**反双曲正弦函数**，记作 $\sinh^{-1}$. 双曲余弦函数在 $[0,+\infty)$ 上的反函数叫做**反双曲余弦函数的主值**，记作 $\cosh^{-1}$. 双曲正切函数的反函数叫做**反双曲正切函数**，记作 $\tanh^{-1}$.

以上三种函数的性质，请读者自行探究. 其图象见图3.3.

III.3　数列及其极限

III.3.i　数列极限的定义

定义 70 如果按照某一法则，$\forall n \in \mathbb{N}^*$ 都对应一个确定的实数 a_n，这些数的下标由小到大构成的序列

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

叫做**数列**，记作 $\{a_n\}$.

定义 71 数列中的数叫做数列的**项**. 用含下标或不含下标写出的代表数列的任意项的代数式叫做数列的**通项**.

[14]Tycho Brahe, 1546.12.14–1601.10.24, 丹麦天文学家、占星学家

[15]Galileo di Vincenzo Bonaulti de Galilei, 1564.2.15–1642.1.8, 意大利天文学家、物理学家、工程师

[16]Johannes Kepler, 1572.1.6–1630.11.15, 德国天文学家、数学家、占星学家

[17]注意分段函数不是初等函数.

现在我们探讨一个问题：当数列的下标无限增大时，数列的值是否趋近于某个数值？

为了探讨这一点，我们给出如下定义：

定义 72 对于数列 $\{a_n\}$，如果存在常数 α，使得 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall d>\delta\in\mathbb{N}^*$ 都有 $a_d\in U(\alpha,\varepsilon)$，则称 α 是数列 $\{a_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 α，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

在有些情况下也可简记为

$$\lim a=\alpha$$

数列 $\{a_n\}$ 收敛可简记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n\ \mathbf{E}$$

定义 73 如果一个数列不收敛，则称这个数列**发散**.

数列 $\{a_n\}$ 发散可简记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n\ \mathbf{DNE}$$

定义 74 对于数列 $\{a_n\}$，如果 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall d>\delta\in\mathbb{N}^*$ 都有 $a_d>\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ **发散**到正无穷，此时数列极限不存在，但为便于表示数列的这一性质，我们将之记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

在有些情况下也可简记为

$$\lim a=\infty$$

对于数列 $\{a_n\}$，如果 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall d>\delta\in\mathbb{N}^*$ 都有 $a_d<-\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ **发散**到负无穷，此时数列极限不存在，但为便于表示数列的这一性质，我们将之记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$$

在有些情况下也可简记为

$$\lim a=-\infty$$

如上两种情况称为数列**单调无穷发散**.

对于一些数列，虽然不是单调无穷发散，但有如下性质：

对于非单调无穷发散数列 $\{a_n\}$，如果 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta\in\mathbb{N}^*$，使得 $\forall d>\delta\in\mathbb{N}^*$ 都有 $|a_d|>\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ **发散**到双侧无穷，此时数列极限不存在，但为便于表示数列的这一性质，我们将之记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$$

在有些情况下也可简记为

$$\lim a=\pm\infty$$

此时说数列 $\{a_n\}$ **交错无穷发散**.

若数列发散而不无穷发散，则称这个数列**振荡发散**.

III.3.ii　数列极限的性质

定理 23 (收敛数列的有界性) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 有界[18].

定理 24 (收敛数列的保号性) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ 的充要条件是 $\exists N$ 使得 $\forall n > N$ 都有 $a_n > 0$.

定义 75 对于数列 $\{a_n\}$ 和无穷多个正整数 $n_1, n_2, n_3, \ldots \in \mathbb{N}^*$，由 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ 组成的数列，叫做 $\{a_n\}$ 的**子数列**.

定理 25 对于数列 $\{A_n\}$ 以及任一其子数列 $\{a_n\}$，若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

III.4　函数的极限

从此以后，对一些隐含的条件将不再叙述：如函数值默认函数在此处有定义、分母不为 0 等.

从数列的极限中，我们可以推广到如下定义：如果一个代数式在某一自变量变化过程中，无限趋近于某一个值，则称这个值为这个代数式在这个自变量变化过程中的极限．下面我们给出极限的严格定义．这些定义千篇一律，也不容易理解，不要紧，你可以直接跳到ii帮助你自己理解.

III.4.i　函数极限的定义

III.4.i.a　自变量趋于有限值的极限

定义 76 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 都有 $f(x) \in U(y_0, \varepsilon)$，则称 y_0 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**极限**，或 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时收敛于 y_0，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} y_0$$

定义 77 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 都有 $f(x) > \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 处发散到正无穷，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} \infty$$

定义 78 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 都有 $f(x) < -\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 处发散到负无穷，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$$

[18]数列的有界与函数的有界定义相同，因为数列可看做定义域限制在 $\mathbb{N}^*$ 上的函数 $a_n = f(n)$

定义 79 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0\in\mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq-\infty$，并且 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 都有 $|f(x)|>\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 处发散到双侧无穷，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to x_0}\pm\infty$$

III.4.ii.b 自变量趋于有限值的左右极限

定义 80 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0,y_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ 都有 $f(x)\in U(y_0,\varepsilon)$，则称 y_0 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，或 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时收敛于 y_0，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=y_0$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to x_0^-}y_0$$

定义 81 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0,y_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ 都有 $f(x)\in U(y_0,\varepsilon)$，则称 y_0 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**，或 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时收敛于 y_0，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=y_0$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to x_0^+}y_0$$

定义 82 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ 都有 $f(x)>\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 处发散到正无穷，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to x_0^-}\infty$$

定义 83 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ 都有 $f(x)>\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 处发散到正无穷，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to x_0^+}\infty$$

定义 84 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ 都有 $f(x)<-\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 处发散到负无穷，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0^-} -\infty$$

定义 85 对于函数 $f(x)$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in \mathring{U}((,x)_0, x_0+\delta)$ 都有 $f(x) < -\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0^+$ 处发散到负无穷，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+} -\infty$$

III.4.iii.c　自变量趋于无穷值的极限

定义 86 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x > \delta$ 都有 $f(x) \in U(y_0, \varepsilon)$，则称 y_0 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**，或 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时收敛于 y_0，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} y_0$$

定义 87 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x > \delta$ 都有 $f(x) > \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 处发散到正无穷，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$$

定义 88 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists \delta > 0$，使得 $\forall x > \delta$ 都有 $f(x) < -\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 处发散到负无穷，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$$

定义 89 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$ 且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq -\infty$，并且使得 $\forall x > \delta$ 都有 $|f(x)| > \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 处发散到双侧无穷，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

或

$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \pm\infty$$

定义 90 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x<-\delta$ 都有 $f(x)\in U(y_0,\varepsilon)$，则称 y_0 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**极限**，或 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时收敛于 y_0，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=y_0$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to-\infty}y_0$$

定义 91 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x<-\delta$ 都有 $f(x)>\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 处发散到正无穷，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to-\infty}\infty$$

定义 92 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0\in\mathbb{R}$，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x<-\delta$ 都有 $f(x)<-\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 处发散到负无穷，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to-\infty}-\infty$$

定义 93 对于函数 $f(x)$ 和 $y_0\in\mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq-\infty$，并且使得 $\forall x<-\delta$ 都有 $|f(x)|>\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 处发散到双侧无穷，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to-\infty}\pm\infty$$

定义 94 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lambda$（此处 $\lambda\in\mathbb{R}^{\mathscr{E}}$[19]），则称 λ 为 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lambda$$

或

$$f(x)\xrightarrow{x\to\pm\infty}\lambda$$

III.4.ii 极限的几何理解

上述定义，是极限的严格定义. 这种定义规定了“无限趋近于某一个值”的具体含义；这种定义被叫做***ε-δ* 语言**或***δ-ε* 语言**，得益于其定义中的字母 ε 和 δ. 这种定义是柯西[20]和魏尔斯特拉斯[21]等人，为之前牛顿[22]与莱布尼茨[23]在提出微积

[19] $\mathbb{R}^{\mathscr{E}}=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$

[20] Augustin Louis Cauchy, 1789.8.21–1857.5.23, 法国数学家、物理学家、天文学家

[21] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815.10.31–1897.2.19, 德国数学家

[22] Isaac Newton, 1642.12.25(1643.1.4 Greg.)–1727.3.31, 英国物理学家、数学家

[23] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646.7.1–1716.11.14, 德国哲学家、数学家

分概念时引入的“无穷小”与“无穷大”等涉及到“无限”的概念给出了严谨的定义，为实分析奠定基础．当然，这种定义不是很好懂，所幸我们可以通过几何意义给出可视化定义．

如图3.4，我们先讨论自变量 x 在有限值 x_0 取得有限极限值 y_0 的时候，证明图中的空心点是函数 $f(x)$ 在此时取得的极限在平面直角坐标系上对应的点 (x_0, y_0)．我们先作出两条水平直线，使得这两条直线到点 (x_0, y_0) 的距离 ε 相等，即直线 $y = y_0 + \varepsilon$ 与直线 $y = y_0 - \varepsilon$，如图3.4左上图．然后，我们固定水平直线不动，在点 (x_0, y_0) 两侧作两条等距铅直直线，使得它们到点 (x_0, y_0) 的距离都为 δ．

调整 δ 的大小，使得在四条直线围成长方形内部部分的函数图象从长方形的左右两侧穿出，如图3.4右上图．之后，不断重复交替将 ε（如图3.4左下图）和 δ 调整得更小，在每次调整 δ 后都要保证函数图象从四条直线所围成的长方形左右两侧穿出（如图3.4右下图）．反复操作，若每一步都可以移动，且最终长方形无限缩小到点 (x_0, y_0)，那么可以证明 y_0 为这个函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得的极限．如果有一步不能移动了，那么此处的极限可能是无穷，也可能是不满足定理26。

如图3.5，我们讨论自变量 x 在无限值取得有限极限值 y_0 的时候，证明图中的蓝色线是函数 $f(x)$ 在此时取得的极限在平面直角坐标系上对应的直线 $y = y_0$．我们先作出两条水平直线，使得这两条直线到直线 $y = y_0$ 的距离 ε 相等，即直线 $y = y_0 + \varepsilon$ 与直线 $y = y_0 - \varepsilon$，如图3.5左上图．然后，我们固定水平直线不动，作一条铅直直线 $x = \delta$．

调整 δ 的大小，使得在三条直线围成半开放长方形内部部分的函数图象只从左侧穿出，如图3.5右上图．之后，不断重复交替将 ε（如图3.5左下图）调整得更小，将 δ 调整得更大，在每次调整 δ 后都要保证函数图象只从三条直线围成半开放长方形左侧穿出（如图3.5右下图）．反复操作，若每一步都可以移动，且铅直线无限右移，那么可以证明 y_0 为这个函数 $f(x)$ 在 ∞ 处取得的极限．

对于函数取得无穷的极限的几何意义，同学们可以自行探究．

III.4.iii　极限的性质

定理 26 (极限存在定理) 一个函数在一个点（有限值或无穷值）处取得极限[24]的充要条件是此函数在这个点的左极限、右极限存在且相等．如果函数 u 在点 x_0 的左极限和右极限不相等（可以为无穷大），则称此函数在点 x_0 处极限不唯一，记作 $\lim u$ **INU**．

定理 27 (收敛函数的局部有界性) 对于函数 $f(x)$ 以及 $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$，则有 $\exists\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有界．

定理 28 (收敛函数的局部保号性) 对于函数 $f(x)$ 以及 $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$，则有 $\exists\delta > 0$，使得 $\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 都有 $\lambda \cdot f(x) > 0$．

定理 29 对于函数 $f(x)$、数列 $\{l_n\}$ 以及 $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} l_i = x_0$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(l_x) = \lambda$．

III.4.iv　极限的运算法

注意从今以后，在本书中但凡出现没有下标的 lim，若在一个式子内，则均指自变量的同一个变化过程．同时，出现在 lim 记号后的，不再声明其类型，默认为代数式．

定义 95 在自变量的一个变化过程中，如果一个代数式的极限为 0，则称此代数式是这个自变量变化过程中的**无穷小**；在自变量的一个变化过程中，如果一个代数式发散，则称此代数式是这个自变量变化过程中的**无穷大**．

例如，$1/x^2$ 和 $x^{1/3}$ 分别是 $x \to 0$ 时的无穷大和无穷小．

先给出几个比较基本的定理：

定理 30 (夹逼定理) 若三个函数 u, v, m 使得 $u \geq m \geq v$ 恒成立，那么若 $\lim u = \lim v$[25]，则有 $\lim m = \lim v$．

定理 31 有限个无穷小之和为无穷小．

[24] 因为极限存在一定是有限值，故之后默认极限都是有限值

[25] 这里的极限可以是实数、正无穷或负无穷．

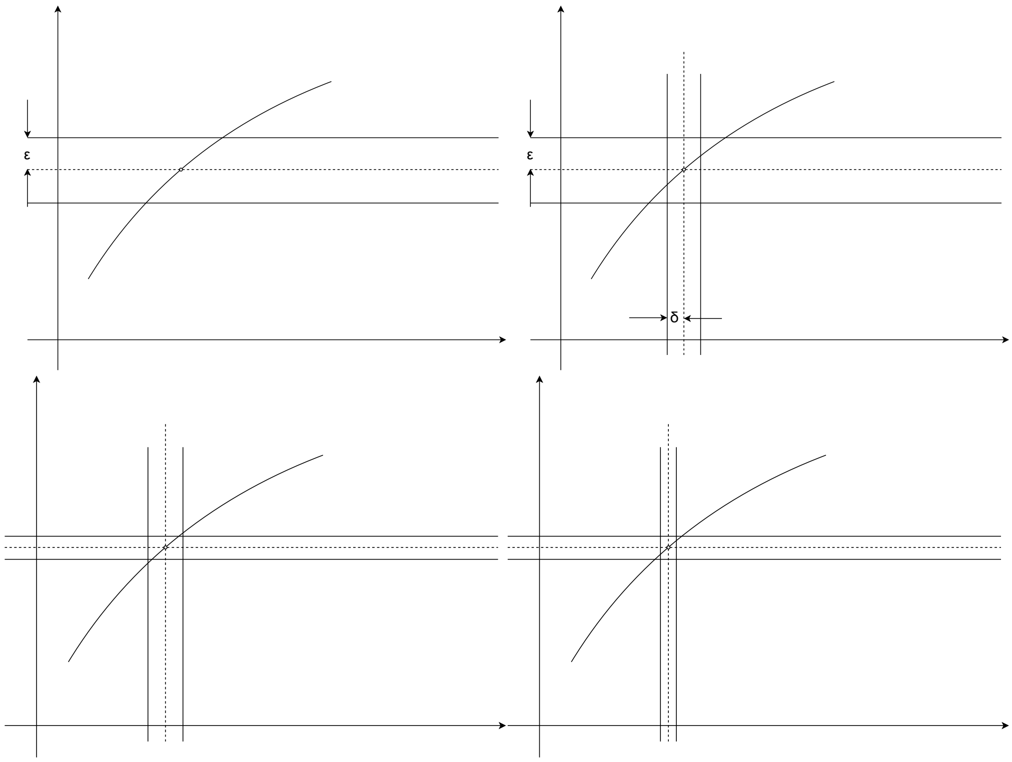

图 3.4. 自变量趋于有限值的有限极限图解

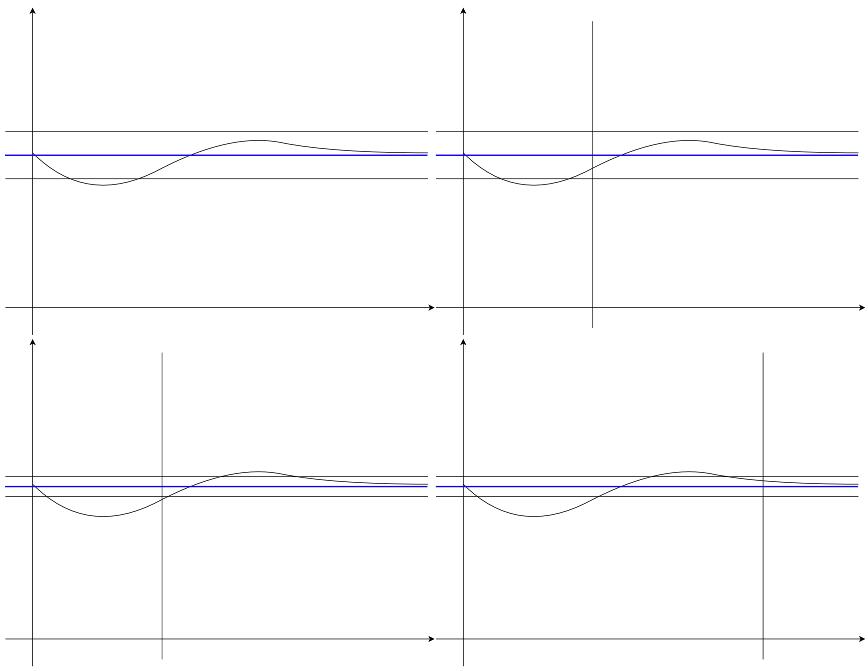

图 3.5. 自变量趋于无限值的有限极限图解

推论 1 一个实数与无穷小之积为无穷小.

推论 2 一个有界函数与无穷小之积为无穷小.

推论 3 多个（有限或无限）无穷小之积为无穷小.

定理 32 有限个无穷大之和为无穷大.

推论 4 一个实数与无穷大之积为无穷大.

推论 5 一个有界函数与无穷大之积为无穷大.

推论 6 多个（有限或无限）无穷大之积为无穷大.

定理 33 在一个自变量变化过程中，若一个函数为无穷小，则这函数的倒数在此变化过程中为无穷大；在一个自变量变化过程中，若一个函数为无穷大，则这函数的倒数在此变化过程中为无穷小.

定理 34 两个函数之和的极限等于其极限之和．两个函数之差的极限等于其极限之差.

定理 35 两个函数之积的极限等于其极限之积．两个函数之商的极限等于其极限之商.

推论 7 若函数 $f(x)$ 恒大于等于函数 $g(x)$，则 $\lim f(x) \geqslant \lim g(x)$.

推论 8 对于函数 $f(x)$ 与常数 c，有

$$\lim(c \cdot f(x)) = c\lim f(x)$$

推论 9 对于函数 $f(x)$ 与常数 c，有

$$\lim f(x)^c = (\lim f(x))^c$$

思考：幂指函数[26]的极限一定等于极限的幂吗？
再给出一些函数或数列极限存在的准则：

定理 36 单调有界数列收敛.

定理 37 在一实数单侧邻域中单调有界的函数在这个数上收敛.

定理 38 (柯西极限存在准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall m, n \in \mathbb{N}^* > N$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

III.4.v 无穷大与无穷小

在数学中，很多函数都是在一定情况下的无穷大和无穷小．但是它们变大变小的速率并不相同．如 x 和 x^3，都是 $x \to 0$ 时的无穷小．下表列出它们在 $x \to 0^+$ 时的函数值：

x 的值	1	0.2	0.04	0.008	0.0016	0.00032
x^3 的值	1	0.008	0.00064	0.000000512	0.000000004096	0.000000000032768

表 3.1. 比较结果

很显然，在 $x \to 0$ 时，x^3 的减小速率比 x 快很多．那么我们如何比较无穷小的大小呢？

[26] 即形如 $u(x)^{\pi(x)}$ 的函数

定义 96 对于无穷小 α, β，比较 α 和 β 的大小时，可能会有以下结果：

$$\text{若} \lim \frac{\alpha}{\beta} = 0\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{高阶无穷小}\text{，记作 } \alpha = \mathrm{o}(\beta).$$
$$\text{若} \lim \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \infty\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{低阶无穷小}.$$
$$\text{若} \lim \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \in (0,\infty)\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{同阶无穷小}\text{，记作 } \alpha \mathbin{/\!/\!/} \beta.$$
$$\text{若} \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{等价无穷小}\text{，记作 } \alpha \sim \beta.$$
$$\text{若} \lim \left|\frac{\alpha}{\beta^k}\right| \in (0,\infty)\text{，} k \in \mathbb{R}\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的 } k \text{ 阶无穷小}.$$

定义 97 对于无穷大 α, β，比较 α 和 β 的大小时，可能会有以下结果：

$$\text{若} \lim \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \infty\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{高阶无穷大}.$$
$$\text{若} \lim \frac{\alpha}{\beta} = 0\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{低阶无穷大}\text{，记作 } \alpha = \mathrm{o}(\beta).$$
$$\text{若} \lim \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \in (0,\infty)\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{同阶无穷大}\text{，记作 } \alpha \mathbin{/\!/\!/} \beta.$$
$$\text{若} \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的}\textbf{等价无穷大}\text{，记作 } \alpha \sim \beta.$$
$$\text{若} \lim \left|\frac{\alpha}{\beta^k}\right| \in (0,\infty)\text{，} k \in \mathbb{R}\text{，则称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的 } k \text{ 阶无穷大}.$$

注意：不是所有无穷大或无穷小都存在定量的关系．例如比较 $x \to \infty$ 时的 x 和 e^x，则会发现无论 k 有多大，都有 $x^k = \mathrm{o}(e^x)$．这也显示出指数函数的增长速度之快．

我们利用等价无穷大或等价无穷小的定义，可以得出如下两个定理：

定理 39 设有无穷大或无穷小 α 和 β，则 $\alpha \sim \beta$ 的充分必要条件是 $\alpha = \beta + \mathrm{o}(\beta)$.

定理 40 设有无穷大或无穷小 $\alpha \sim a$ 和 $\beta \sim b$，则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{a}{b}$.

III.4.vi 函数的连续性

III.4.i.a 函数的连续性的定义

在生活中，我们自然地感觉到有一些量是连续变化的：如温度的变化、速度的变化、物体的位移等．为了得出连续性的严格定义，我们可以发现一种性质：这些量在极小的时间段中，不能跳跃变化，只能变化极微小的一段量．由此我们可以提出如下定义：

定义 98 设函数 f 和实数 x_0，若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = 0$，则称 f 在 x_0 处**连续**.

从上面的定义可以看到，函数在一个点上的连续性，是基于函数在这个点的邻域内有定义才被定义的．易知，连续函数的图象是一条连续不断的曲线．同时，经过简单的变形，上述定义可以表述为如下的形式：

定理 41 函数 f 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

以上两种连续性的定义法实际上是完全等价的．正因如此，上面两条判定法都可作正式定义使用．

正如左极限和右极限，我们也定义了左连续和右连续的概念：

定义 99 设函数 f 和实数 x_0，若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处**左连续**；设函数 f 和实数 x_0，若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处**右连续**.

基于这三种定义，我们就可以定义区间上函数的连续性了：

定义 100 设函数 f 和区间 I，若 f 在 I 内[27]的每个点上都连续，而在区间的端点处，在有定义的一侧连续，则称 f 在 I 上连续.

III.4.ii.b 连续函数的性质

用定义直接来说函数明函数的连续性，自然是较为繁复的．事实上，我们可能通过已经证明了的某个函数的连续性，推导出其他一些函数的连续性，遵循的是如下法则：

定理 42 若函数 f, g 在点 x_0 连续，则函数 $f+g, f-g, f\cdot g$ 均在点 x_0 连续；在已有的条件下，若 $g(x_0)\neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 也在点 x_0 连续.

定理 43 若函数 f 在区间 I 上单调而连续，则函数 f^{-1} 在区间 $f(I)$ 上连续.

同学们可以想一想，在这个定理的条件下，$f(I)$ 是否一定是区间？反过来，一个函数的定义域和值域都是区间，这个函数必然连续吗？

定理 44 若函数 f 在点 c 连续，函数 g 在点 $f(c)$ 连续，则函数 $f\circ g$ 在点 c 连续.

易知，基本初等函数是连续的，故所有初等函数也是连续的．

在闭区间上连续的函数也有一些重要的性质，如下所述：

定理 45 (最值定理) 在闭区间上的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

定理 46 (介值定理) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则 $\forall\varphi$ 使得 $(f(a)-\varphi)(f(b)-\varphi)<0$，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\varphi$.

这两个性质都是非常好理解的．接下来，我将再介绍一个字面意义上不那么好懂的定理．要理解这个定理，先给出函数一致连续性的定义：

定义 101 设函数 f 和区间 I，若 $\forall\varepsilon>0$ 都有 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in I$，$\forall y\in \mathring{U}(x,\delta)$ 都有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$，则称 f 在 I 上**一致连续**.

接下来是这个定理：

定理 47 (一致连续性定理) 若一个函数在一个闭区间上连续，则它在该区间上一致连续.

[27]在区间内，指在由区间的两端点确定的开区间上.

III.4.iii.c 函数的间断点

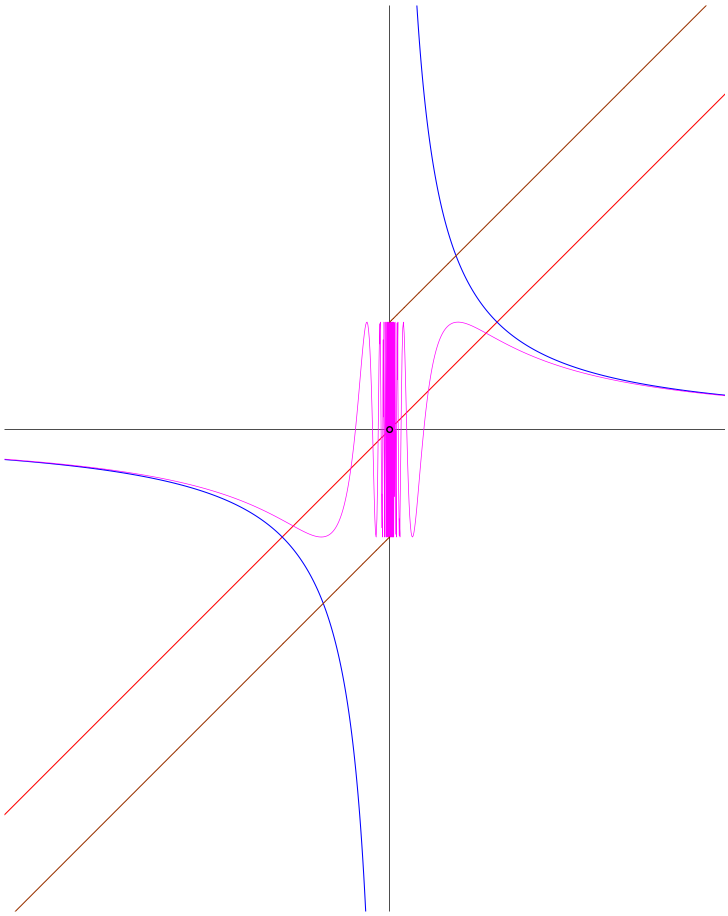

图 3.6. 几种函数的间断点，注意它们在点 $x=0$ 的情况

有很多原因可能让一个函数在某个点处变得不连续。我们可以将常见的间断点分成4类：

定义 102 因函数值的极限趋于无穷导致极限和函数值不存在而间断的函数间断点叫做**无穷间断点**，如上图中函数 $\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时。

定义 103 因函数值在一个点反复震荡无穷多次导致函数值和极限都不存在而间断的函数间断点叫做**振荡间断点**，如上图中函数 $\sin(1/x)$ 在 $x=0$ 时。

定义 104 因极限存在但函数值不存在或不等于极限值而间断的函数间断点叫做**可去间断点**，如上图中函数 $\dfrac{x^2}{x}$ 在 $x=0$ 时。

定义 105 因函数值跳跃变化导致不存在极限而间断的函数间断点叫做**跳跃间断点**，如上图中函数 $\begin{cases} x-1, & x\leqslant 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 时。

III.5 微分法

III.5.i 微分与导数的定义和计算

III.5.i.a 引入

A. 瞬时速度的计算

在物理学上，我们定义**速度**是物体在单位时间内的位移，即 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t}$。在直线运动中，我们可以规避掉向量计算（参见第VIII章），将其简化为 $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$。我们如果有物体运动位移 x 与时间 t 的函数关系式 $s = s(t)$，即可求得在任意一段时间间隔内物体运动的平均速度。那么我们如何在物体运动的一个瞬间 t_0 求得物体此时的运动快慢呢？

一个可行的想法是，先取一段较小的时间 Δt，先计算 t_0 至 $(t_0+\Delta t)$ 这段时间中物体的平均速度 $\overline{v} = \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$。接下来，令这段时间越来越短，在极短的时间内可以视为质点匀速运动。此时，$\Delta t \to 0$ 时上述表达式的极限可以衡量物体在此处的运动快慢情况。把这个值 $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ 叫做物体在 t_0 时刻的**瞬时速度**。

B. 切线问题

在初中时，我们有如下定义：

定义 106 若一条直线与一圆有且仅有一个公共点，则称该直线为该圆的**切线**。

对于任意的曲线，这定义便不再适用。如对于函数 $y = 1/x$ 的图象，在 $(1,1)$ 点处，直线 $y = 2-x$ 似乎是大家所认为的“切线”，但实际上，与它交于一点的直线不仅有 $y = 2-x$，更有 $x = 1, y = 1, y = x$ 等等无数条曲线。为了避免这样的问题，我们采用另外的方法来定义“切线”。

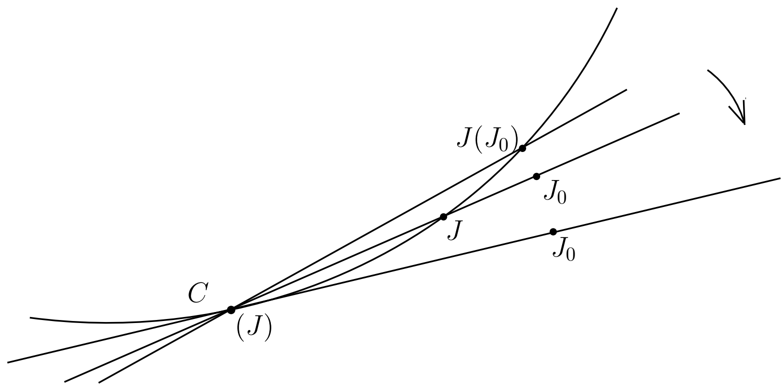

图 3.7. 切线的定义

定义 107 如图，过曲线 c 上一点 C 作一条割线 CJ_0 交 c 于点 J_0。旋转 CJ_0 使得 J_0 在 c 的凸侧。在整个旋转过程中，定义直线与 c 恒交于 J。持续缓慢旋转此直线，直到 C 与 J 重合的极限位置。此时这条直线就称为 c 的**切线**。

有了这样的定义，我们就很容易求出直线切线的斜率了。设曲线完全由 $y = y(x)$ 给出，切点的坐标为 $C(x_0, y(x_0))$，另一个交点 J 与 C 的横坐标差为 Δx。此时 J 的坐标为 $(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x))$，$CJ$ 斜率即为 $\dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$。在旋转中 J 不断逼近 C，即 Δx 逼近 0，此时切线的斜率就是上式的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$。

III.5.ii.b 导数的定义

经过上述研究，我们发现这些问题的结果都归结于一个重要的极限

第 IV 章　不等式

第 V 章　　复数

第 VI 章　线性代数初步

第二编　　几何学

第 VII 章　　立体几何

第 VIII 章　　向量

第 IX 章　　解析几何

第三编　　高等数学初步

第 X 章　　积分学

第 XI 章　　概率论初步

第 XII 章　实分析初步

参考文献

[1] 刘初喜, 施洪亮, and 蔡东山. 数学华东师范大学第二附属中学实验班用. 上海教育出版社, 2015.

[2] 同济大学数学系. 高等数学. 高等教育出版社, 1978.