

# Latex 数学公式参考

## 数理逻辑

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n1.1	$p \wedge q$	$p$ 和 $q$ 的合取	$p$ 与 $q$ .
n1.2	$p \vee q$	$p$ 和 $q$ 的析取	$p$ 或 $q$ ; 此处的 "或" 是包含的, 即若 $p, q$ 中有一个为真陈述, 则 $p \vee q$ 为真。
n1.3	$\neg p$	$p$ 的否定	非 $p$ .
n1.4	$p \implies q$	$p$ 蕴含 $q$ ; 若 $p$ 为真, 则 $q$ 为真	$q \impliedby p$ 和 $p \implies q$ 同义。
n1.5	$p \iff q$	$p$ 等价于 $q$	$(p \implies q) \wedge (q \implies p)$ 和 $p \iff q$ 同义。
n1.6	$(\forall x \in A) p(x)$	对 $A$ 中所有的 $x$ , 命题 $p(x)$ 均为真	如果从上下文中可以得知考虑的是哪个集合 $A$ , 可以使用记号 $(\forall x) p(x)$ . $\forall$ 称为全称量词。 $x \in A$ 的含义见 n2.1.
n1.7	$(\exists x \in A) p(x)$	存在一个属于 $A$ 的 $x$ 使得 $p(x)$ 为真	如果从上下文中可以得知考虑的是哪个集合 $A$ , 可以使用记号 $(\exists x) p(x)$ . $\exists$ 称为存在量词。 $x \in A$ 的含义见 n2.1. $(\exists! x) p(x)$ (唯一量词) 用来表示恰有一个 $x$ 使得 $p(x)$ 为真。 $\exists!$ 也可以写作 $\exists^1$ .

## 集合论

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n2.1	$x \in A$	$x$ 属于 $A$ , $x$ 是集合 $A$ 中的元素	$A \ni x$ 和 $x \in A$ 同义。
n2.2	$y \notin A$	$y$ 不属于 $A$ , $y$ 不是集合 $A$ 中的元素	
n2.3	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	含元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的集合	也可写作 $\{x_i \mid i \in I\}$ , 其中 $I$ 表示指标集。
n2.4	$\{x \in A \mid p(x)\}$	$A$ 中使命题 $p(x)$ 为真的所有元素组成的集合	例如 $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 5\}$ ; 如果从上下文中可以得知考虑的是哪个集合 $A$ , 可以使用符号 $\{x \mid p(x)\}$ (如在只考虑实数集时可使用 $\{x \mid x \geq 5\}$ )   也可以使用冒号替代, 如 $\{x \in A : p(x)\}$ .
n2.5	$\text{card } A$ ; $ A $	$A$ 中的元素个数, $A$ 的基数	
n2.6	$\emptyset$	空集	不应使用 $\empty$ .
n2.7	$B \subseteq A$	$B$ 包含于 $A$ 中, $B$ 是 $A$ 的子集	$B$ 的每个元素都属于 $A$ . $\subset$ 也可用于该含义, 但请参阅 n2.8 的说明。 $A \supseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 同义。
n2.8	$B \subset A$	$B$ 真包含于 $A$ 中, $B$ 是 $A$ 的真子集	$B$ 的每个元素都属于 $A$ , 且 $A$ 中至少有一个元素不属于 $B$ . 若 $\subset$ 的含义取 n2.7, 则 n2.8 对应的符号应使用 $\subsetneq$ . $A \supset B$ 与 $B \subset A$ 同义。
n2.9	$A \cup B$	$A$ 和 $B$ 的并集	$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ ; := 的定义参见 n4.3
n2.10	$A \cap B$	$A$ 和 $B$ 的交集	$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ ; := 的定义参见 n4.3

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n2.11	$\bigcup_{i=1}^n A_i$	集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并集	$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ; 也可使用 $\bigcup_{i=1}^n, \bigcup_{i \in I}$ , 其中 $I$ 表示指标集
n2.12	$\bigcap_{i=1}^n A_i$	集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交集	$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ; 也可使用 $\bigcap_{i=1}^n, \bigcap_{i \in I}$ , 其中 $I$ 表示指标集
n2.13	$A \setminus B$	$A$ 和 $B$ 的差集	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ ; 不应使用 $A - B$ ; 当 $B$ 是 $A$ 的子集时也可使用 $\complement_A B$ , 如果从上下文中可以得知考虑的是哪个集合 $A$ , 则 $A$ 可以省略。 不引起歧义的情况下也可使用 $\overline{B}$ 表示集合 $B$ 的补集。
n2.14	$(a, b)$	有序数对 $a, b$ ; 有序偶 $a, b$	$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$ .
n2.15	$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	有序 $n$ 元组	参见 n2.14.
n2.16	$A \times B$	集合 $A$ 和 $B$ 的笛卡尔积	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ .
n2.17	$\prod_{i=1}^n A_i$	集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡尔积	$\prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$ ; $A \times A \times \dots \times A$ 记为 $A^n$ , 其中 $n$ 是乘积中的因子数。
n2.18	$\text{id}_A$	$A \times A$ 的对角集	$\text{id}_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ ; 如果从上下文中可以得知考虑的是哪个集合 $A$ , 则 $A$ 可以省略。

## 标准数集和区间

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n3.1	$\mathbf{N}$	自然数集	$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ; $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ ; 可用如下方式添加其他限制: $\mathbf{N}_{>5} = \{n \in \mathbf{N} \mid n > 5\}$ ; 也可使用 $\mathbb{N}$ .
n3.2	$\mathbf{Z}$	整数集	$\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \neq 0\}$ ; 可用如下方式添加其他限制: $\mathbf{Z}_{>-3} = \{n \in \mathbf{Z} \mid n > -3\}$ ; 也可使用 $\mathbb{Z}$ .
n3.3	$\mathbf{Q}$	有理数集	$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_+ = \{r \in \mathbf{Q} \mid r \neq 0\}$ ; 可用如下方式添加其他限制: $\mathbf{Q}_{<0} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r < 0\}$ ; 也可使用 $\mathbb{Q}$ .
n3.4	$\mathbf{R}$	实数集	$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$ ; 可用如下方式添加其他限制: $\mathbf{R}_{>0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ ; 也可使用 $\mathbb{R}$ .
n3.5	$\mathbf{C}$	复数集	$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 0\}$ ; 也可使用 $\mathbb{C}$ .
n3.6	$\mathbf{P}$	(正) 素数集	$\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ ; 也可使用 $\mathbb{P}$ .
n3.7	$[a, b]$	$a$ 到 $b$ 的闭区间	$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .
n3.8	$(a, b]$	$a$ 到 $b$ 的左开右闭区间	$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ ; $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ .
n3.9	$[a, b)$	$a$ 到 $b$ 的左闭右开区间	$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ ; $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}$ .

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n3.10	$(a, b)$	$a$ 到 $b$ 的开区间	$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ ; $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ ; $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$ .

## 关系

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n4.1	$a = b$	$a$ 等于 $b$	<div><math>\equiv</math> 用于强调某等式是恒等式</div> <div>该符号的另一个含义参见 n4.18.</div>
n4.2	$a \neq b$	$a$ 不等于 $b$	
n4.3	$a := b$	$a$ 定义为 $b$	参见 n2.9, n2.10
n4.4	$a \approx b$	$a$ 约等于 $b$	不排除相等。
n4.5	$a \simeq b$	$a$ 渐进等于 $b$	<div>例如：</div> <div>当 <math>x \rightarrow a</math> 时, <math>\frac{1}{\sin(x-a)} \simeq \frac{1}{x-a}</math>;</div> <div><math>x \rightarrow a</math> 的含义参见 n4.15.</div>
n4.6	$a \propto b$	$a$ 与 $b$ 成正比	<div>也可使用 <math>a \sim b</math>.</div> <div><math>\sim</math> 也用于表示等价关系。</div>
n4.7	$M \cong N$	$M$ 与 $N$ 全等	<div>当 <math>M</math> 和 <math>N</math> 是点集（几何图形）时。</div> <div>该符号也用于表示代数结构的同构。</div>
n4.8	$a < b$	$a$ 小于 $b$	
n4.9	$b > a$	$b$ 大于 $a$	
n4.10	$a \leq b$	$a$ 小于等于 $b$	
n4.11	$b \geq a$	$b$ 大于等于 $a$	
n4.12	$a \ll b$	$a$ 远小于 $b$	
n4.13	$b \gg a$	$b$ 远大于 $a$	
n4.14	$\infty$	无穷大	<div>该符号 <b>不</b> 是数字。</div> <div>也可以使用 <math>+\infty</math>, <math>-\infty</math>.</div>
n4.15	$x \rightarrow a$	$x$ 趋近于 $a$	<div>一般出现在极限表达式中。</div> <div><math>a</math> 也可以为 <math>\infty</math>, <math>+\infty</math>, <math>-\infty</math>.</div>
n4.16	$m \mid n$	$m$ 整除 $n$	<div>对整数 <math>m</math>, <math>n</math>:</div> <div><math>(\exists k \in \mathbf{Z}) \ m \cdot k = n</math>.</div>
n4.17	$m \perp n$	$m$ 与 $n$ 互质	<div>对整数 <math>m</math>, <math>n</math>:</div> <div><math>(\nexists k \in \mathbf{Z}_{&gt;1}) \ (k \mid m) \wedge (k \mid n)</math>;</div> <div>该符号的另一种用法参见 n5.2</div>
n4.18	$n \equiv k \pmod m$	$n$ 模 $m$ 与 $k$ 同余	<div>对整数 <math>n</math>, <math>k</math>, <math>m</math>:</div> <div><math>m \mid (n - k)</math>;</div> <div>不要与 n4.1 中提到的相混淆。</div>

## 初等几何学

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n5.1	$\parallel$	平行	
n5.2	$\perp$	垂直	该符号的另一种用法参见 n4.17
n5.3	$\sphericalangle$	（平面）角	
n5.4	$\overline{AB}$	线段 AB	

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n5.5	$\overrightarrow{AB}$	有向线段 AB	
n5.6	$d(A, B)$	点 A 和 B 之间的距离	即 $\overline{AB}$ 的长度。

## 运算符

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n6.1	$a + b$	$a$ 加 $b$	
n6.2	$a - b$	$a$ 减 $b$	
n6.3	$a \pm b$	$a$ 加或减 $b$	
n6.4	$a \mp b$	$a$ 减或加 $b$	$-(a \pm b) = -a \mp b$ .
n6.5	$a \cdot b$ ; $a \times b$ ; $ab$	$a$ 乘 $b$	若出现小数点，则应只使用 $\times$ ； 部分用例参见 n2.16, n2.17, n14.11, n14.12
n6.6	$\frac{a}{b}$ ; $a/b$ ; $a : b$	$a$ 除以 $b$	$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ ; 可用：表示同一量纲的数值的比率。 不应使用 $\div$ .
n6.7	$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	也可使用 $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_i a_i, \sum_i a_i, \sum a_i$ .
n6.8	$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$	也可使用 $\prod_{i=1}^n a_i, \prod_i a_i, \prod_i a_i, \prod a_i$ .
n6.9	$a^p$	$a$ 的 $p$ 次幂	
n6.10	$a^{1/2}$ ; $\sqrt{a}$	$a$ 的 1/2 次方, $a$ 的平方根	应避免使用 $\sqrt{a}$ .
n6.11	$a^{1/n}$ ; $\sqrt[n]{a}$	$a$ 的 1/ $n$ 次幂, $a$ 的 $n$ 次根	应避免使用 $\sqrt[n]{a}$ .
n6.12	$\bar{x}$ ; $\bar{x}_a$	$x$ 的算数均值	其他均值有： 调和均值 $\bar{x}_h$ ; 几何均值 $\bar{x}_g$ ; 二次均值/均方根 $\bar{x}_q$ 或 $\bar{x}_{rms}$ . $\bar{x}$ 也用于表示复数 $x$ 的共轭, 参见 n11.6.
n6.13	$\operatorname{sgn} a$	$a$ 的符号函数	对实数 $a$ : $\operatorname{sgn} a = 1 \quad (a > 0)$ ; $\operatorname{sgn} a = -1 \quad (a < 0)$ ; $\operatorname{sgn} 0 = 0$ ; 参见 n11.7.
n6.14	$\inf M$	$M$ 的下确界	小于等于非空集合 $M$ 中元素的最大上界。
n6.15	$\sup M$	$M$ 的上确界	大于等于非空集合 $M$ 中元素的最小下界。
n6.16	$ a $	$a$ 的绝对值	也可使用 $\operatorname{abs} a$ .
n6.17	$\lfloor a \rfloor$	向下取整 小于等于实数 $a$ 的最大整数	例如： $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ ; $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$ .
n6.18	$\lceil a \rceil$	向上取整 大于等于实数 $a$ 的最小整数	例如： $\lceil 2.4 \rceil = 3$ ; $\lceil -2.4 \rceil = -2$ .
n6.19	$\min(a, b)$ ; $\min\{a, b\}$	$a$ 和 $b$ 的最小值	可推广到有限集中。 要表示无限集中的最小值建议使用 $\inf$ , 参见 n6.14

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n6.20	$\max(a,b);$ $\max\{a,b\}$	$a$ 和 $b$ 的最大值	可推广到有限集中。 要表示无限集中的最大值建议使用 $\sup$ , 参见 n6.15
n6.21	$n \bmod m$	$n$ 模 $m$ 的余数	对正整数 $n, m$ : ( $\exists q \in \mathbf{N}, r \in [0, m)$ ) $n = qm + r$ ; 其中 $r = n \bmod m$ .
n6.22	$\gcd(a,b);$ $\gcd\{a,b\}$	整数 $a$ 和 $b$ 的最大公因数	可推广到有限集中。不引起歧义的情况下可写为 $(a,b)$ .
n6.23	$\operatorname{lcm}(a,b);$ $\operatorname{lcm}\{a,b\}$	整数 $a$ 和 $b$ 的最小公倍数	可推广到有限集中。不引起歧义的情况下可写为 $[a,b]$ ; $(a,b)[a,b] =  ab $ .

## 组合数学

本节中的  $n$  和  $k$  是自然数,  $a$  是复数, 且  $k \leq n$ .

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n7.1	$n!$	阶乘	$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \quad (n > 0);$ $0! = 1$ .
n7.2	$a^{\underline{k}}$	下降阶乘幂	$a^{\underline{k}} = a \cdot (a-1) \cdot \cdots \cdot (a-k+1) \quad (k > 0);$ $a^{\underline{0}} = 1;$ $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$
n7.3	$a^{\overline{k}}$	上升阶乘幂	$a^{\overline{k}} = a \cdot (a+1) \cdot \cdots \cdot (a+k-1) \quad (k > 0);$ $a^{\overline{0}} = 1;$ $n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}.$
n7.4	$\binom{n}{k}$	组合数	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$
n7.5	$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$	第一类 Stirling 数	$\left[ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right];$ $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k.$
n7.6	$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	第二类 Stirling 数	$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n;$ $\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}} = x^n.$

## 函数

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n8.1	$f$	函数	
n8.2	$f(x),$ $f(x_1, \ldots, x_n)$	函数 $f$ 在 $x$ 处的值 函数 $f$ 在 $(x_1, \ldots, x_n)$ 处的值	
n8.3	$\operatorname{dom} f$	$f$ 的定义域	也可使用 $\operatorname{D}(f)$ .
n8.4	$\operatorname{ran} f$	$f$ 的值域	也可使用 $\operatorname{R}(f)$ .
n8.5	$f : A \rightarrow B$	$f$ 是 $A$ 到 $B$ 的映射	$\operatorname{dom} f = A$ 且 $(\forall x \in \operatorname{dom} f) \ f(x) \in B$ .
n8.6	$x \mapsto T(x), x \in A$	将所有 $x \in A$ 映射到 $T(x)$ 的函数	$T(x)$ 仅用于定义，用来表示某个参数为 $x \in A$ 的某个函数值。 若这个函数为 $f$ , 则对所有 $x \in A$ 均有 $f(x) = T(x)$ . 因此 $T(x)$ 通常用来定义函数 $f$ . 例如: $x \mapsto 3x^2y, x \in [0, 2];$

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
			这是由 $3x^2y$ 定义的一个关于 $x$ 的二次函数。若未引入函数符号，则用 $3x^2y$ 表示该函数
n8.7	$f^{-1}$	$f$ 的反函数	函数 $f$ 的反函数 $f^{-1}$ 有定义当且仅当 $f$ 是单射。 若 $f$ 是单射，则 $\text{dom}(f^{-1}) = \text{ran } f$ , $\text{ran}(f^{-1}) = \text{dom } f$ , 且 $(\forall x \in \text{dom } f) \ f^{-1}(f(x)) = x$ . 不要与函数的倒数 $f(x)^{-1}$ 混淆。
n8.8	$g \circ f$	$f$ 和 $g$ 的复合函数	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .
n8.9	$f : x \mapsto y$	$f(x) = y$ , $f$ 将 $x$ 映射到 $y$	
n8.10	$f _a^b$ ; $f(\dots, u, \dots) _{u=a}^{u=b}$	$f(b) - f(a)$ ; $f(\dots, b, \dots) - f(\dots, a, \dots)$	主要用于定积分的计算中。
n8.11	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ; $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	当 $x$ 趋近于 $a$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 可以写成 $f(x) \rightarrow b \ (x \rightarrow a)$ . 右极限和左极限的符号分别为 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ .
n8.12	$f(x) = O(g(x))$	$ f(x)/g(x) $ 在上下文隐含的限制中有上界, $f(x)$ 的阶不高于 $g(x)$	当 $f/g$ 与 $g/f$ 均有界时称 $f$ 与 $g$ 是同阶的。 使用符号 "=" 是出于历史原因, 其在此处不表示等价, 因为不满足传递性。 例如: $\sin x = O(x) \ (x \rightarrow 0)$ .
n8.13	$f(x) = o(g(x))$	在上下文隐含的限制中有 $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ , $f(x)$ 的阶高于 $g(x)$	使用符号 "=" 是出于历史原因, 其在此处不表示等价, 因为不满足传递性。 例如: $\cos x = 1 + o(x) \ (x \rightarrow 0)$ .
n8.14	$\Delta f$	$f$ 的有限增量	上下文隐含的两函数值的差分。例如: $\Delta x = x_2 - x_1$ ; $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ .
n8.15	$\frac{df}{dx}$ ; $f'$	$f$ 对 $x$ 的导 (函) 数	仅用于一元函数。 可以显式指明自变量, 如 $\frac{df(x)}{dx}$ , $f'(x)$ .
n8.16	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ ; $f'(a)$	$f$ 在 $a$ 处的导 (函) 数值	参见 n8.15
n8.17	$\frac{d^n f}{dx^n}$ ; $f^{(n)}$	$f$ 对 $x$ 的 $n$ 阶导 (函) 数	仅用于一元函数。 可以显式指明自变量, 如 $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ , $f^{(n)}(x)$ . 可用 $f''$ 和 $f'''$ 分别表示 $f^{(2)}$ 和 $f^{(3)}$ .
n8.18	$\frac{\partial f}{\partial x}$ ; $f_x$	$f$ 对 $x$ 的偏导数	仅用于多元函数。 可以显式指明自变量, 如 $\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}$ , $f_x(x, y, \dots)$ . 可以扩展到高阶, 如 $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ ; $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ .
n8.19	$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$	Jacobi 矩阵	<a href="#">参见<sup>[1]</sup></a>
n8.20	$df$	$f$ 的全微分	$df(x, y, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots$
n8.21	$\delta f$	$f$ 的 (无穷小) 变分	
n8.22	$\int f(x) dx$	$f$ 的不定积分	
n8.23	$\int_a^b f(x) dx$	$f$ 从 $a$ 到 $b$ 的定积分	也可使用 $\int_a^b f(x) dx$ ; 定积分还可以定义在更一般的域上。如 $\int_C, \int_S, \int_V, \oint$ ,

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
			分别表示在曲线 $C$ , 曲面 $S$ , 三维区域 $V$ , 和闭曲线或曲面上的定积分。 多重积分可写成 $\iint, \iiint$ 等。
n8.24	$f * g$	函数 $f$ 和 $g$ 的卷积	$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y.$

## 指数和对数函数

$x$  可以是复数。

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n9.1	e	自然对数的底	$\mathrm{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718\,281\,8\dots;$ 不要写成 $e$ .
n9.2	$a^x$	$x$ 的指数函数（以 $a$ 为底）	参见 n6.9.
n9.3	$\mathrm{e}^x$ ; $\exp x$	$x$ 的指数函数（以 e 为底）	
n9.4	$\log_a x$	$x$ 的以 $a$ 为底的对数	当底数不需要指定的时候可以使用 $\log x$ . 不应用 $\log x$ 替换 $\ln x$ , $\lg x$ , $\mathrm{lb} x$ 中的任意一个。
n9.5	$\ln x$	$x$ 的自然对数	$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ ; 参见 n9.4.
n9.6	$\lg x$	$x$ 的常用对数	$\lg x = \log_{10} x$ ; 参见 n9.4.
n9.7	$\mathrm{lb} x$	$x$ 的以 2 为底的对数	$\mathrm{lb} x = \log_2 x$ ; 参见 n9.4.

## 三角函数和双曲函数

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n10.1	$\pi$	圆周率	$\pi = 3.141\,592\,6\dots$
n10.2	$\sin x$	$x$ 的正弦	$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}};$ $(\sin x)^n, (\cos x)^n (n \geq 2)$ 等通常写为 $\sin^n x, \cos^n x$ 等。
n10.3	$\cos x$	$x$ 的余弦	$\cos x = \sin(x + \pi/2)$ .
n10.4	$\tan x$	$x$ 的正切	$\tan x = \sin x / \cos x$ ; 不可使用 $\mathrm{tg} x$ .
n10.5	$\cot x$	$x$ 的余切	$\cot x = 1 / \tan x$ ; 不可使用 $\mathrm{ctg} x$ .
n10.6	$\sec x$	$x$ 的正割	$\sec x = 1 / \cos x$ .
n10.7	$\csc x$	$x$ 的余割	$\csc x = 1 / \sin x$ ; 不可使用 $\mathrm{cosec} x$ .
n10.8	$\arcsin x$	$x$ 的反正弦	$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ .
n10.9	$\arccos x$	$x$ 的反余弦	$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi)$ .
n10.10	$\arctan x$	$x$ 反正切	$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ ; 不可使用 $\mathrm{arctg} x$ .
n10.11	$\mathrm{arccot} x$	$x$ 反余切	$y = \mathrm{arccot} x \iff x = \cot y \quad (0 \leq y \leq \pi)$ ; 不可使用 $\mathrm{arcctg} x$ .

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n10.12	$\operatorname{arcsec} x$	$x$ 反正割	$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y \quad (0 \leq y \leq \pi, y \neq \pi/2).$
n10.13	$\operatorname{arccsc} x$	$x$ 的反余割	$y = \operatorname{arccsc} x \iff x = \csc y \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2, y \neq 0);$ 不可使用 $\operatorname{arccosec} x$ .
n10.14	$\sinh x$	$x$ 的双曲正弦	$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2};$ 不可使用 $\operatorname{sh} x$ .
n10.15	$\cosh x$	$x$ 的双曲余弦	$\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1;$ 不可使用 $\operatorname{ch} x$ .
n10.16	$\tanh x$	$x$ 的双曲正切	$\tanh x = \sinh x / \cosh x;$ 不可使用 $\operatorname{th} x$ .
n10.17	$\coth x$	$x$ 的双曲余切	$\coth x = 1 / \tanh x.$
n10.18	$\operatorname{sech} x$	$x$ 的双曲正割	$\operatorname{sech} x = 1 / \cosh x.$
n10.19	$\operatorname{csch} x$	$x$ 的双曲余割	$\operatorname{csch} x = 1 / \sinh x;$ 不可使用 $\operatorname{cosech} x$ .
n10.20	$\operatorname{arsinh} x$	$x$ 的反双曲正弦	$y = \operatorname{arsinh} x \iff x = \sinh y;$ 不可使用 $\operatorname{arsh} x$ .
n10.21	$\operatorname{arcosh} x$	$x$ 的反双曲余弦	$y = \operatorname{arcosh} x \iff x = \cosh y \quad (y \geq 0);$ 不可使用 $\operatorname{arch} x$ .
n10.22	$\operatorname{artanh} x$	$x$ 的反双曲正切	$y = \operatorname{artanh} x \iff x = \tanh y;$ 不可使用 $\operatorname{arth} x$ .
n10.23	$\operatorname{arcoth} x$	$x$ 的反双曲余切	$y = \operatorname{arcoth} x \iff x = \coth y \quad (y \neq 0).$
n10.24	$\operatorname{arsech} x$	$x$ 的反双曲正割	$y = \operatorname{arsech} x \iff x = \operatorname{sech} y \quad (y \geq 0).$
n10.25	$\operatorname{arcsch} x$	$x$ 的反双曲余割	$y = \operatorname{arcsch} x \iff x = \operatorname{csch} y \quad (y \geq 0);$ 不可使用 $\operatorname{arcosech} x$ .

## 复数

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n11.1	$\mathrm{i}$	虚数单位	$\mathrm{i}^2 = -1;$ 不可使用 $i$ 或 $\mathrm{i}$
n11.2	$\operatorname{Re} z$	$z$ 的实部	参见 n11.3.
n11.3	$\operatorname{Im} z$	$z$ 的虚部	若 $z = x + \mathrm{i}y \quad (x, y \in \mathbf{R})$ , 则 $x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z$ .
n11.4	$ z $	$z$ 的模	$ z  = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$
n11.5	$\arg z$	$z$ 的辐角	若 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ , 其中 $r =  z $ 且 $-\pi < \varphi \leq \pi$ , 则 $\varphi = \arg z$ . $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi, \ \operatorname{Im} z = r \sin \varphi$ .
n11.6	$\bar{z};$ $z^*$	$z$ 的复共轭	$\bar{z} = \operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z.$
n11.7	$\operatorname{sgn} z$	$z$ 的单位模函数	$\operatorname{sgn} z = z/ z  = \exp(\mathrm{i} \arg z) \quad (z \neq 0);$ $\operatorname{sgn} 0 = 0;$ 参见 n6.13.

## 矩阵

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n12.1	$A;$ 参见 <sup>[2]</sup>	$m \times n$ 型矩阵 $A$	$a_{ij} = (A)_{ij};$ 也可使用 $A = (a_{ij})$ . 其中 $m$ 为行数, $n$ 为列数



编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
			$m = n$ 时称为方阵 可用方括号替代圆括号。
n12.2	$A + B$	矩阵 $A$ 和 $B$ 的和	$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$ ; 矩阵 $A$ 和 $B$ 的行数和列数必须分别相同。
n12.3	$x A$	标量 $x$ 和矩阵 $A$ 的乘积	$(x A)_{ij} = x (A)_{ij}$ .
n12.4	$AB$	矩阵 $A$ 和 $B$ 的乘积	$(AB)_{ik} = \sum_j (A)_{ij} (B)_{jk}$ ; 矩阵 $A$ 的列数必须等于矩阵 $B$ 的行数。
n12.5	$I$ ; $E$	单位矩阵	$(I)_{ik} = \delta_{ik}$ ; $\delta_{ik}$ 的定义参见 n14.9.
n12.6	$A^{-1}$	方阵 $A$ 的逆	$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (\det A \neq 0)$ . $\det A$ 的定义参见 n12.10.
n12.7	$A^{\text{T}}$ ; $A'$	$A$ 的转置矩阵	$(A^{\text{T}})_{ik} = (A)_{ki}$ .
n12.8	$\overline{A}$ ; $A^*$	$A$ 的复共轭矩阵	$(\overline{A})_{ik} = \overline{(A)_{ik}}$ .
n12.9	$A^{\text{H}}$ ; $A^\dagger$	$A$ 的 Hermite 共轭矩阵	$A^{\text{H}} = (\overline{A})^{\text{T}}$ .
n12.10	$\det A$ ; 参见 <sup>[3]</sup>	方阵 $A$ 的行列式	也可使用 $ A $ .
n12.11	$\text{rank } A$	矩阵 $A$ 的秩	
n12.12	$\text{tr } A$	方阵 $A$ 的迹	$\text{tr } A = \sum_i (A)_{ii}$ .
n12.13	$\ A\ $	矩阵 $A$ 的范数	满足三角不等式：若 $A + B = C$ , 则 $\ A\  + \ B\  \geq \ C\ $ .

## 坐标系

本节考虑三维空间中的一些坐标系。点 O 为坐标系的 **原点**。任意点 P 均由从原点 O 到点 P 的 **位置向量** 确定。

编号	坐标	位置向量和微分	坐标名	备注
n13.1	$x, y, z$	$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ ; $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z$	笛卡尔坐标	基向量 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 构成右手正交系，见图 1 和图 4。 基向量也可用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 或 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示，坐标也可用 $x_1, x_2, x_3$ 或 $i, j, k$ 表示。
n13.2	$\rho, \varphi, z$	$\boldsymbol{r} = \rho\,\boldsymbol{e}_\rho + z\,\boldsymbol{e}_z$ ; $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z$	柱坐标	$\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi), \boldsymbol{e}_z$ 组成右手正交系，见图 2。 若 $z = 0$ , 则 $\rho$ 和 $\varphi$ 是平面上的极坐标。
n13.3	$r, \vartheta, \varphi$	$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ ; $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta + r\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$	球坐标	$\boldsymbol{e}_r(\vartheta, \varphi), \boldsymbol{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ 组成右手正交系，见图 3。

如果不使用右手坐标系（见图 4），而使用左手坐标系（见图 5），则应在之前明确强调，以免符号误用。

**图 1** 右手笛卡尔坐标系

**图 2** 右手柱坐标系

**图 3** 右手球坐标系

**图 4** 右手坐标系

**图 5** 左手坐标系

# 标量和向量

本节中，基向量用  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  表示。本节中的许多概念都可以推广到  $n$  维空间。

标量和向量本身与坐标系的选择无关，而向量的每个标量分量与坐标系的选择有关。

对于基向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , 每个向量  $\mathbf{a}$  都可以表示为  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ , 其中  $a_1, a_2$  和  $a_3$  是唯一确定的标量值，将其称为向量相对于该组基向量的 "坐标",  $a_1\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2$  和  $a_3\mathbf{e}_3$  称为向量相对于该组基向量的分向量。

在本节中，只考虑普通空间的笛卡尔（正交）坐标。笛卡尔坐标用  $x, y, z$  或  $a_1, a_2, a_3$  或  $x_1, x_2, x_3$  表示。

本节所有下标  $i, j, k$  的范围均为 1 到 3.

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n14.1	$\mathbf{a};$ $\vec{a}$	向量 $\mathbf{a}$	
n14.2	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的和	$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_i = a_i + b_i.$
n14.3	$x\mathbf{a}$	标量 $x$ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积	$(x\mathbf{a})_i = xa_i.$
n14.4	$ \mathbf{a} $	向量 $\mathbf{a}$ 的大小，向量 $\mathbf{a}$ 的范数	$ \mathbf{a}  = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$ 也可使用 $\ \mathbf{a}\ .$
n14.5	$\mathbf{0};$ $\vec{0}$	零向量	零向量的大小为 0.
n14.6	$\mathbf{e}_a$	$\mathbf{a}$ 方向的单位向量	$\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/ \mathbf{a}  \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}).$
n14.7	$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z;$ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	笛卡尔坐标轴方向的单位向量	也可使用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$
n14.8	$a_x, a_y, a_z;$ $a_i$	向量 $\mathbf{a}$ 的笛卡尔分量	$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z;$ 如果上下文确定了基向量，则向量可以写为 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z).$ $a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x, a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y, a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z;$ $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ 是坐标为 $x, y, z$ 的位置向量。
n14.9	$\delta_{ik}$	Kronecker delta 符号	$\delta_{ik} = 1 \quad (i = k);$ $\delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k).$
n14.10	$\varepsilon_{ijk}$	Levi-Civita 符号	$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1;$ $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1;$ 其余的 $\varepsilon_{ijk}$ 均为 0.
n14.11	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标量积/内积	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i.$
n14.12	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的向量积/外积	右手笛卡尔坐标系中, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} a_j b_k;$ $\varepsilon_{ijk}$ 的定义参见 n14.10.
n14.13	$\nabla$	nabla 算子	$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$
n14.14	$\nabla \varphi;$ $\mathbf{grad} \varphi$	$\varphi$ 的梯度	$\nabla \varphi = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i};$ <code><b>grad</b></code> 应使用 <code>\operatorname{\mathbf{grad}}</code> .
n14.15	$\nabla \cdot \mathbf{a};$ $\mathbf{div} \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$ 的散度	$\nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i};$ <code><b>div</b></code> 应使用 <code>\operatorname{\mathbf{div}}</code> .
n14.16	$\nabla \times \mathbf{a};$ $\mathbf{rot} \mathbf{a}$	$\mathbf{a}$ 的旋度	$(\nabla \times \mathbf{a})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j};$ <code><b>rot</b></code> 应使用 <code>\operatorname{\mathbf{rot}}</code> . 不应使用 <code><b>curl</b></code> . $\varepsilon_{ijk}$ 的定义参见 n14.10.

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n14.17	$\nabla^2$ ; $\Delta$	Laplace 算子	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

## 特殊函数

本节中的  $z$ ,  $w$  是复数,  $k$ ,  $n$  是自然数, 且  $k \leq n$ .

编号	符号，表达式	意义，等同表述	备注与示例
n15.1	$\gamma$	Euler–Mascheroni 常数	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.577\,215\,6\dots$
n15.2	$\Gamma(z)$	gamma 函数	$\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} z > 0);$ $\Gamma(n+1) = n!.$
n15.3	$\zeta(z)$	Riemann zeta 函数	$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1).$
n15.4	$\mathrm{B}(z, w)$	beta 函数	$\mathrm{B}(z, w) = \int\limits_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} \mathrm{d}t \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0);$ $\mathrm{B}(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)};$ $\frac{1}{(n+1)\mathrm{B}(k+1, n-k+1)} = \binom{n}{k}.$

1.  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ ; 矩阵的定义参见 n12.1 [↩](#)
2.  $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  [↩](#)
3.  $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  [↩](#)