analysis induction

Gleb Anohin

[2024-09-09 Mon 10:52]

Contents

1 Ханойская башня (пример)

1. Проверили, что можно переместить башню из одного блина (база)

2. Предположим, что мы умеем перемещать башню из n - 1 блина (предположение)

3. Переместим по правилам n - 1 верхних блинов на второй кол (умеем);
   Перместим n-й блин с первого кола на третий;
   Переместим по правилам n - 1 блинов со второго на третий кол (умеем).

По итогу мы переместили все n блинов на третий кол.

2 Аксиома математической индукции

Пусть P(n) - предикат, $n \in N$.

Пусть $P(1) - T$.

Пусть $\forall n \geq 2 P(n-1) \rightarrow P(n)$.

Тогда $\forall n : P(n) - T$

3 Аксиома

Для любого $M \subset N \exists m \in M : \forall a \in M : m \leq a$

Иначе говоря: в любом подмножестве натуральных чисел найдется минимум

4 Применение мат. индукции

Требуется доказать P(1), P(2), ...

1. Доказательство справедливости P(1) - база индукции

2. Доказательство $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ - шаг индукции

Бывает когда во втором шаге доказывается $P(1), P(2), \ldots, P(n-1) \Rightarrow P(n)$

4.1 Пример

Доказать $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

1. $1 \cdot 1! = 2! - 1$ - T

2. Пусть исходное утверждение верно, тогда докажем $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$

   $(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$

   $(n+1+1)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$

   $\blacksquare$

5 Неравенство Бернулли

$\forall x > -1 \forall n \in N : (1+x)^n \geq 1 + nx$

База: $1 + x = 1 + x$

Переход:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq 1 + x \cdot (n+1) \\ (1+x)^n \cdot (1+x) &\geq 1 + x \cdot n + x \\ (1+x)^n \cdot 1 &\geq 1 + x \cdot n = T \\ (1+x)^n \cdot x &\geq x \end{aligned} \tag{1}$$

При $-1 < x \leq 0 : 0 \leq (1+x)^n \leq 1$ следовательно при отрицательном x будет выполняться.

При $x > 0 : (1+x)^n > 1$ следовательно при положительном x будет выполняться.

6 Лемма 1

Пусть данны две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ чисел.
Пусть $\exists m : a_m \geq b_m$ и $\forall k \geq m : a_{k+1} - a_k \geq b_{k+1} - b_k$
Тогда $\forall n \geq m : a_n \geq b_n$

Иначе говоря если линия a выше b и a растет быстрее b, то любое соотвественное a больше b

База:

$$a_m \geq b_m \wedge a_{m+1} - a_m \geq b_{m+1} - b_m \Rightarrow a_{m+1} \geq b_{m=1} \tag{2}$$

Переход: $P(n) = a_n \geq b_n; P(n-1) \to P(n)$

$$\begin{aligned} a_{n-1} \geq b_{n-1} \wedge (n-1 \geq m) \Rightarrow a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1} \\ (a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1}) + (a_{n-1} \geq b_{n-1}) \Rightarrow a_n \geq b_n \\ a_{n-1} \geq b_{n-1} \to a_n \geq b_n \end{aligned} \tag{3}$$

■

7 Лемма 2

Пусть данны две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ чисел.
Пусть $\exists m : a_m \geq b_m$ и $\forall k \geq m : a_{k+1}/a_k \geq b_{k+1}/b_k$
Тогда $\forall n \geq m : a_n \geq b_n$

Иначе говоря если линия a выше b и a растет быстрее b, то любое соотвественное a больше b

База:

$$n = m - T \tag{4}$$

Переход: $P(n) = a_n \geq b_n; P(n-1) \to P(n)$

$$\begin{cases} \forall n - 1 \geq m (k = n-1) : a_{n-1} \geq b_{n-1} \\ a_n / a_{n-1} \geq b_n / b_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

Доказать: $a_n \geq b_n$

$$\begin{aligned} (a_n/a_{n-1} \geq b_n/b_{n-1}) \cdot (a_{n-1} \geq b_{n-1}) \Rightarrow a_n \geq b_n \\ a_{n-1} \geq b_{n-1} \to a_n \geq b_n \end{aligned} \tag{6}$$

■

8 Задача 1

Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

Пользуем лемму 1.

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ b_n = \sqrt{n} \end{aligned} \tag{7}$$

Условие 1:

$$m = 1 \Rightarrow a_m \geq b_m - T \tag{8}$$

Условие 2:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$b_{k+1} - b_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \Rightarrow a_{k+1} - a_k \geq b_{k+1} - b_k \tag{9}$$

Значит мы можем использовать лемму, а следствие леммы и является по сути решением задачи.

9 Задача 2

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \tag{10}$$

Пользуем лемму 2.

Условие 1:

$$m = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} - T(2 > \sqrt{3}) \tag{11}$$

Условие 2:

$$\begin{gathered}
\frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot (k+1) - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (k+1)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k}} < \frac{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot (k+1) + 1}}}{\frac{1}{\sqrt{2k+1}}} \iff \frac{2k+1}{2k+2} < \sqrt{\frac{2k+1}{2k+3}} \\
\boxed{k > 0} \\
\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} < \frac{2k+1}{2k+3} \\
(2k+1)^2 \cdot (2k+3) < (2k+1) \cdot (2k+2)^2 \\
(2k+1) \cdot (2k+3) < (2k+2)^2 \\
4k^2 + 4 \cdot 2k + 3 < 4k^2 + 4 \cdot 2k + 4 \\
\blacksquare
\end{gathered} \tag{12}$$

10 Теорема Корши

$\sqrt[n]{x}$ при $x \geq 0$ это такое значение y, что $y^n = x$

$(\sqrt[n]{x})^n = x$ - основное свойство.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательные числа.

$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ - среднее арфмитическое

$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ - среднее геометрическое

При любых x среднее арфмитическое не меньше среднего геометрического

10.1 Лемма

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ - положительные числа, такие, что $y_1 \cdot ... \cdot y_n = 1$.

Тогда $y_1 + \ldots + y_n \geq n$ и равенство достигаются только при $y_1 = \ldots = y_n$

База:
$n = 1$ - очевидно

$n = 2$ - если не все y_1, y_2 равны 1, то без ограничения общности
считаем $y_1 > 1 \Rightarrow y_2 < 1$

Тогда $(y_1 - 1)(1 - y_2) > 0 \iff y_1 + y_2 - 1 > y_1 \cdot y_2$
т.е. $y_1 + y_2 > 2$

Шаг индукции:
Если не все из $y_1, \ldots, y_n$, то без ограничения общности считаем: $y_1 > 1, y_2 < 1$

(т.к. если все больше/меньше единицы, то произведение не получится равное 1)

$(y_1 \cdot y_2) \cdot y_3 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, тогда по предположению индукции:

$(y_1 \cdot y_2) + y_3 + \ldots + y_n \geq n - 1$
используя неравенство $y_1 + y_2 - 1 > y_1 \cdot y_2$
получаем $y_1 + y_2 - 1 + y_3 + \ldots y_n > y_1 \cdot y_2 + y_3 + \ldots + y_n \geq n - 1$
откуда следует утверждение леммы. $\blacksquare$

10.2 Доказательство

Если среди $x_1, \dots, x_n$ есть 0, то теорема выполняется.

Если все $x_1, \dots, x_n$ положительные, то $s = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ и применим лемму для $y_1 = \frac{x_1}{s}, \dots, y_n = \frac{x_n}{s} : y_1 + \ldots + y_n \geq n$.

Значит, $\frac{x_1}{s} + \ldots \frac{x_n}{s} \geq n \iff \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq s = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$

11 Формула стирлинга

$n! \approx \frac{n^n}{2^n}\sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n})$