analysis set

Gleb Anohin

September 25, 2024

Contents

1 Множество

1.1 Определение

Совокупность объектов (элементов) любой природы $\emptyset$ – пустое множество, т.е. множество без элементов

Каждый элемент множества входит в множество однократно, т.е. уникален

1.2 Обозначения

A, B, ..., M - множества a, b, ..., m - обозначения элементов множества

1.2.1 Задание множества

1. Перечисление элементов $M = \{1, 2, 3\}$
2. С помощью характеристического свойства: $A = \{x \in M : B(x)\}$ B(x) - предикат, M - универсум (Универсум – базовое множество для рассматриваемой задачи)
   (a) $M = N$
   (b) $A = \{x \in M : x \equiv 0(mod2)\}$
   (c) $A = \{x \in M : x \in A\}$ - тождественная запись
3. $M = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}$

Множество A является подмножеством B если $\forall b \in B \to b \in A$ $A \subset B$ или $A \subseteq B$ Собственное подмножество – $A \subsetneq B$

1.3 Мощность

Мощностью конечного множества A называется количество его элементов. $\#A = |A|$

Множество A имеет счетную мощность, если существует биекция $F : A \to N$

1.3.1 Эквивалентность

$A\tilde{}B$ (равномощны), если биекция (взаимно-однозначное) существует $F : A \to B$

1.3.2 Теорема Кантора

Обозначим 2^A - множество всех подмножеств множества A.

Множество всех пожмножеств множества A не эквивалентно A.

Доказательство от противного:

Представим, что существует биекция $F : 2^A \to A$. Назовем элемент $a \in A$ дефектным, если $a \notin M_a$, где $(M_a, a) \in F, M_a \subset A$ т.е. $M_a \in 2^A$

Назовем множество $D = \{a \in A, a - \text{defect}\}$ дефектом. Т.е. $D \in 2^A, D \subset A$
Рассмотрим $d \in A : (D, d) \in F$.
Предположим, что d - дефектный, тогда $d \in D$, но $d \notin D$, т.к. это заложено в определении F.
В противном случае d - недефектный, но тогда он является дефектным, поскольку удовлетворяет $d \notin D$.
Следовательно $(D, d) \notin F$ ■

1.4 Парадокс Рассела

M - все A - бреется сам B - бреет бродобрей
$A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = M$
Но бродобрей попадает в оба множества.

1.5 Операции

1.5.1 Объединение

$A \cup B = \{x \in M : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

1.5.2 Пересечение

$A \cap B = \{x \in M : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

1.5.3 Разность

$A\ B = \{x \in M : (x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$

1.5.4 Дополнение (типо до универсума)

$\neg A = \{x \in M : \neg(x \in A)\}$

1.5.5 Симметрическая разность

$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

1.6 Законы

Коммутативность (перестановочность)

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$

Ассоциативность (сочетательность)

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (b \cup C)$

Дистрибутивность (распределенность)

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
4. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
5. $\neg A \cup B = \neg A \cap \neg B$
6. $\neg A \cap B = \neg A \cup \neg B$
7. $A \cup \emptyset = A$
8. $A \cap \emptyset = \emptyset$
9. $A \cup U = U$
10. $A \cap U = A$

Идемпотентность

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

Отрицание

1. $\neg \emptyset = U$
2. $\neg U = \emptyset$

2 Отображение

Пусть A, B - множества. Декартовым произведением называется $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Отображением множества A на множество B - $F \subset A \times B$.
Обозначение: $F : A \to B$.

2.1 Примеры

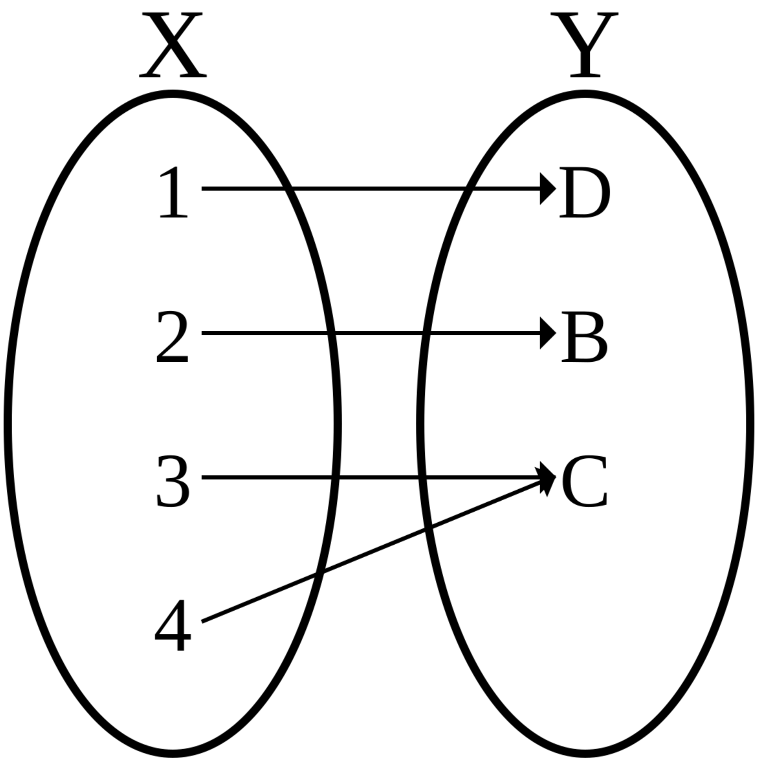
1. $A = N, B = N, F = \{(n, 1) : n \in N\}$
2. $A = Z, B = N, F = \{(-1, m) : m \in N\}$
3. $A = Z, B = N, F = \{(m, n) : m \in Z, n \in N\}$
4. H - множество треугольников на плоскости.
   $R^2 = R \times R$ - плоскость (все координаты)
   "треугольник" - $< (x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3) >$
   $F \subset H \times R^2; F = \{(\triangle, M) \triangle \in H, M - \text{mass center}\}$

5. $F \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

   Это отображение не инъективное и не функция, так как там круг и будут повторяться значения.

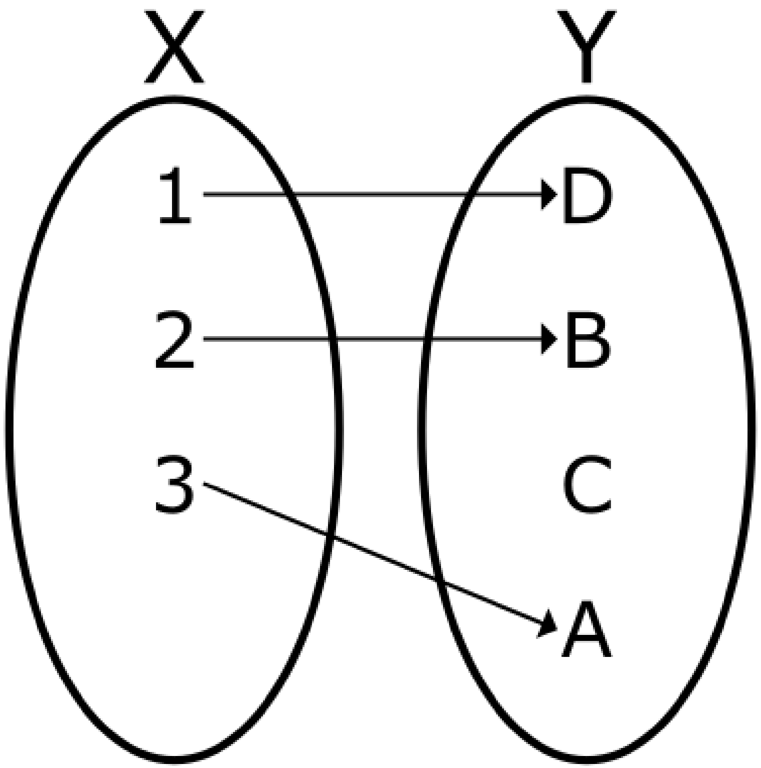
2.2 Свойства и определения

2.2.1 Покрытие (сюрьекция)



Отображение $F \subset A \times B$ или $F : A \to B$ называется сюръективным. если $\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in F$.
Т.е. полностью покрывается все B
Например: Для каждой точки на плоскости есть треугольник с центром массы в ней.

2.2.2 Вложение (инъекция)



Отображение $F \subset A \times B$ называется инъективным. если $(a_1, b), (a_2, b) \in F \Rightarrow a_1 = a_2$.
Т.е. к каждому b соответсвует не больше 1 a.
$\forall b \in B : (\exists! a \in A : (a, b) \in F) \vee (\forall a \in A : (a, b) \notin F)$

2.2.3 Функция (обратная инъекция)

Отображени $F \subset A \times B$ называется функцией, если $(a_1, b_1), (a_1, b_2) \in F \Rightarrow b_1 = b_2$
Т.е. к каждому a соответсвует не больше 1 a

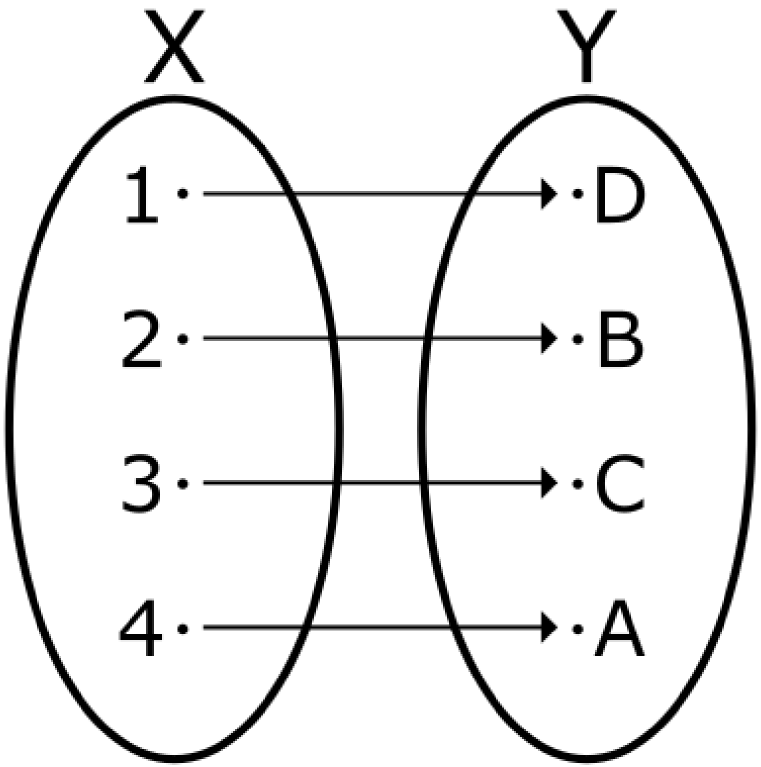
2.2.4 Область определения

Областью определения $F : A \to B$ называется множество $\mathrm{dom} F = \{a \in A | \exists b \in B : (a, b) \in F\}$
т.е. $\exists b \in B : (a, b) \in F$ - предикат

2.2.5 Область значений

Областью значений $F : A \to B$ называется множество $\text{rng}F = \{b \in B | \exists a \in A : (a, b) \in F\}$

2.2.6 Однозначность (биекция)



Отображени $F \subset A \times B$ называется биективным (1 к 1), если F - сюръективно, инъективно, функция и $\text{dom}F = A$

2.2.7 Вложение

$R \subset A \times B$ - вложене если R - функция, инъекция и $\text{dom}R = A$
Биекция - частный случай вложения.

2.3 Обратное отображение

Для отображения $F : A \to B$ обратное отображение определяется как $F^{-1} : B \to A, F^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in F\}$ при F, F^{-1} сюръективных.

2.3.1 Доказательство биекции

F - биекция $\iff$ F и F^{-1} сюръективные и функции
F^{-1} - функция $\iff$ F - инъекция.
В сочетании с фактом того, что F$ - сюръективная функция получается что F - биекция.

3 Теорема Кантора - Бернштейна

Пусть A и B - множества.
$\exists B_1 \subseteq B | F : A \to B_1$ - биекция
$\exists A_1 \subseteq A | F : B \to A_1$ - биекция
Тогда $A\tilde{}B$
Пока что без доказательства.