logic formulas

Gleb Anohin

[2024-09-18 Wed 16:58]

Contents

1 TODO from galery

2 что-то

$F \equiv H \iff \phi(F(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \phi(H(x_1, x_2, \dots, x_n))$

Две формулы F и H тогда и только тогда, когда формула $F \iff H$ есть тавтология.

Следовательно
отношение равносильности между формулами есть отношение эквивалентности.

2.1 Основные равносильности

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
$A \to B \equiv \overline{A} \vee B \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$
$A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$
$A \wedge B \equiv \overline{A \to \overline{B}} \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$

2.2 Равносильные

let $A \equiv B$

$\overline{A} \equiv \overline{B}$
$A \wedge B \equiv B \wedge C$
$A \vee B \equiv B \vee C$

$A \to C \equiv B \to C$
$C \to A = C \to B$
$A \leftrightarrow C = B \leftrightarrow C$

2.3 Теорема о подстановках

C_A - формула, содержащая в качестве своей подформулы формулу A.
Пусть C_B получается из C_A заменой формулы A
в этом вхождении на B. Тогда, если $A \equiv B$, то $C_A \equiv C_B$

C - формула, содержащая в которой выделено
одно вхождение переменной V.
Пусть C_X, C_Y получается из C заменой переменной V на X, Y
соответственно. Тогда, если $X \equiv Y$, то $C_X \equiv C_Y$

Всякую формулу алгебры можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только логический операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

2.4 Штрих Шеффера

$x \uparrow y = \overline{x \wedge y}$

2.5 Стрелка Пирса

$x \downarrow y \equiv \overline{x \vee b}$

3 Двойственность

Символы $\wedge, \vee$ называются двойственными друг другу.

Формула называется двойственной другой, если все операции заменили на двойственные.

Двойственный список - инвертированный по значениям список.

4 фф

Пусть $A(x_i)$ - формула, $< s_i >$ - список истинности её переменных.
Тогда $A(s_i) \equiv T \iff A^* \equiv F$ на списке $< t_i >$ двойственном к $< s_i >$

Приницп двойственности: $A \equiv B \Rightarrow A^* \equiv B^*$.

Можно использовать для нахождения новых равносильностей.

$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (Z \wedge Z) \Rightarrow X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (Z \vee Z)$

5 Пусть

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - элементарные высказывания

Формула алгебры логики - функция входящих в нее элементарных высcказываний

$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - формула составленная из $x_1, \ldots, x_n$

$x_1, \dots x_n$ будем называть логическими переменными этой формулы

Конъюктивным одночленом называется конъюкция переменных или их отрицаний. Дизъюктивный - аналогично.

ДНФ (дизъюктивная нормальная форма) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюкций.

КНФ (конъюктивная нормальная форма) - наоборот.

Всякая формула обладает обеими ДНФ и КНФ.

5.1 Пример

$(A \uparrow B) \to \overline{(\overline{C} \to (B \vee C))}$

6 Совершенность

ДНФ/КНФ называется совершенной, если

1. в каждую из элементарных дизъюнкций/конъюкций логическая переменная входит только один раз.

2. если логическая переменная входит в одну из элементарных дизъюнкций/конъюкций, то она входит и во все остальные.

3. Все элементарные дизъюнкции/конъюкции различны.

$(x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$ - СДНФ

Каждая не являющаяся тождественно ложной или истинной формула от n аргументов имеет единственную СДНФ/СКНФ.

6.1 IDEA доказать

7 Приведение к СНФ:

7.1 Тождественные преобразования

7.1.1 Алгоритм

1. СКНФ
   (a) Найти КНФ

   (b) Путем добавления единичных противоречий ($a \wedge \neg a$) для недостающих переменных в отдельные слагаемые привести к СКНФ

2. СДНФ
   (a) Найти ДНФ

   (b) Путем добавления единичных тавтологий ($a \vee \neg a$) для недостающих переменных в отдельные множежители привести к СДНФ

7.2 Таблица истинности

7.2.1 Алгоритм

1. СКНФ
   (a) Нужно выбрать все те значения переменных, когда формула ложна.

   (b) Для каждого набора выписываем элементарную дизъюнкцию. Переменная входит в нее сама если в этом наборе F иначе ее отрицание.

   (c) Образуем конъюнкцию всех дизъюнкций

2. СДНФ
   (a) Нужно выбрать все те значения переменных, когда формула истинна.

   (b) Для каждого набора выписываем элементарную конъюнкцию. Переменная входит в нее сама если в этом наборе T иначе ее отрицание.

   (c) Образуем дизъюнкцию всех конъюнкций

7.2.2 Пример

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

СДНФ – $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee \dots$

СКНФ – $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$

8 Проблема разрешимости

8.1 Критерий тождественной

8.2 ...

Элементарная дизъюнкция тождественно истин

9 Логическое следование

$A \to B \wedge B \to C \Rightarrow A \to C$

$H(x_1, \dots, x_n)$ называется логическим следствие формул. $F_1(x_1, \dots, x_n); \dots; F_m(x_1, \dots, x_n)$ если H превращается в истинное высссказывания при всякой такой подстановке вместо ее переменных конкретных высссказываний, при которых формулы $F_1, \dots, F_n$ превращаются в истинные высссказывания.

Короче (математически не правильно) $H \Rightarrow F_1, \dots F_m$ обозначается $F_1, \dots, F_n \models H$

Из истинности посылок следует истинность вывода.

$F \models H \iff \models F \to H$ ($F \to H$ – тавтология)

$\forall F_1, \dots, F_m, H : (F_1, \dots F_m \models H) \wedge (F_1 \wedge \dots \wedge F_m \models H) \wedge (\models (F_1 \wedge \dots \wedge \dots F_m) \to H)$

9.1 Свойства

1. $F_1, \ldots, F_m \models F_i \Rightarrow$ для любого i

2. $F_1, \ldots, f_m \models G_i | j \in 1, \ldots, p; G_1, \ldots, G_p \models H$, то $F_1, \ldots F_m, \models H$

$F \equiv H \iff F \models H \wedge H \models F$

Если формула тавтология, то и ее любое следствие является тавтологией.
$\models F, F \models H \Rightarrow \models H$

9.2 Правила логических умозаключений

(modus ponens) : $\frac{F, F \to G}{G}$
$\models F, F \to G \Rightarrow \models G$

(modus ponens) : $\frac{F \to G, \neg G}{\neg F}$
$\models \neg G, F \to G \Rightarrow \models \neg F$