Пространственные фигуры. Сечения многогранников.

В стереометрии, кроме точек, прямых и плоскостей, рассматривают пространственные фигуры, т. е. фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Некоторые из пространственных фигур вам уже знакомы. Так, на рисунке 3.1 изображены цилиндр, конус и шар. Эти фигуры вы будете подробно изучать в 11 классе.

На рисунке 3.2 изображена ещё одна знакомая вам пространственная фигура — **пирамида**. Эта фигура является частным видом **многогранника**.

Рис. 3.1

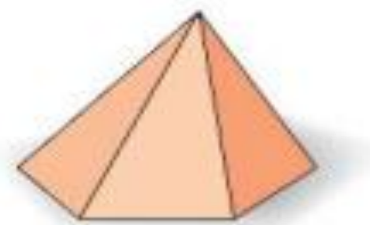

Рис. 3.2

Примеры многогранников показаны на рисунке 3.3.

Рис. 3.3

Поверхность многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника**. Стороны многоугольников называют **рёбрами многогранника**, а вершины — **вершинами многогранника** (рис. 3.4).

На рисунке 3.5 изображена пятиугольная пирамида $FABCDE$. Поверхность этого многогранника состоит из пяти треугольников, которые

Поверхность многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника**. Стороны многоугольников называют **рёбрами многогранника**, а вершины — **вершинами многогранника** (рис. 3.4).

На рисунке 3.5 изображена пятиугольная пирамида $FABCDE$. Поверхность этого многогранника состоит из пяти треугольников, которые

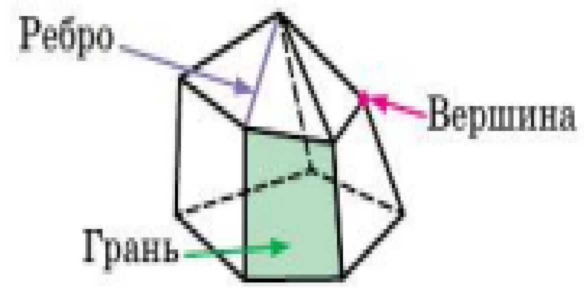

Рис. 3.4

называют **боковыми гранями пирамиды**, и одного пятиугольника, который называют **основанием пирамиды**. Вершину F, которая является общей для всех боковых граней, называют **вершиной пирамиды**. Рёбра FA, FB, FC, FD и FE называют **боковыми рёбрами пирамиды**, а рёбра AB, BC, CD, DE и EA — **рёбрами основания пирамиды**.

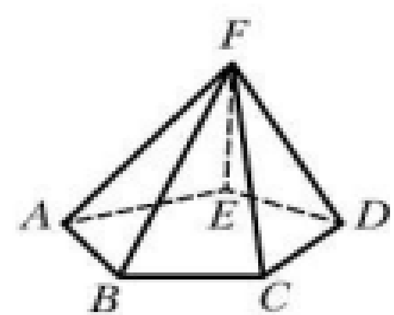

Рис. 3.5

На рисунке 3.6 изображена треугольная пирамида $DABC$. Треугольную пирамиду также называют **тетраэдром.**

Ещё одним частным видом многогранника является **призма.** На рисунке 3.7 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Этот многогранник имеет пять граней, две из которых — равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Их называют **основаниями призмы**. Остальные грани призмы — параллелограммы. Их называют **боковыми гранями призмы**. Рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 называют **боковыми рёбрами призмы.**

На рисунке 3.8 изображена четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её поверхность состоит из двух равных четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (основания призмы) и четырёх параллелограммов (боковые грани призмы).

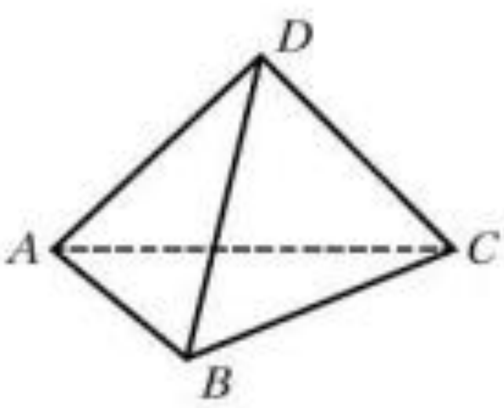

Рис. 3.6

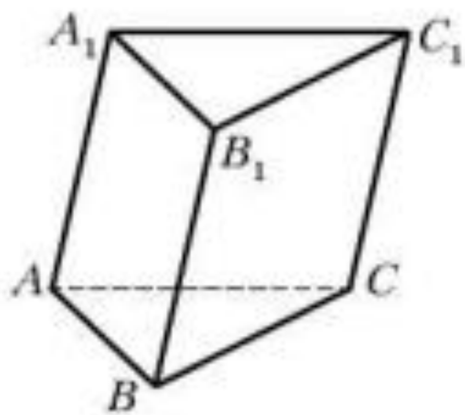

Рис. 3.7

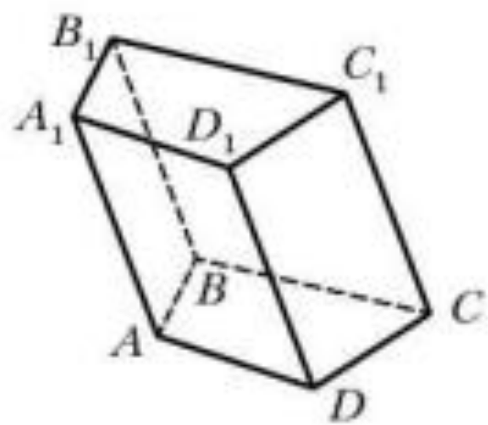

Рис. 3.8

Вы также знакомы с частным видом четырёхугольной призмы — прямоугольным параллелепипедом. На рисунке 3.9 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

В свою очередь, частным видом прямоугольного параллелепипеда является куб. Все грани куба — равные квадраты (рис. 3.10).

Задача 1. На рёбрах AA_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M и N так, что $AM \neq DN$ (рис. 3.11). Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

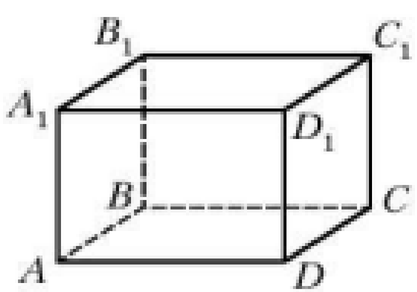

Рис. 3.9

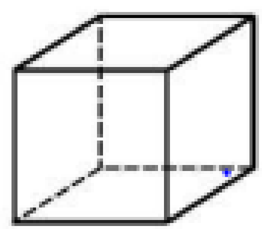
Рис. 3.10

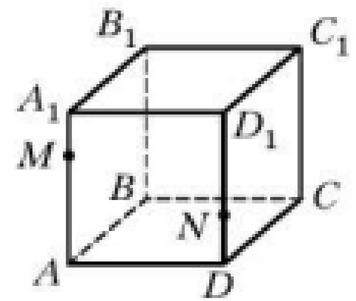

Рис. 3.11

Решение. Точки M и N принадлежат плоскости AA_1D_1. Тогда по аксиоме А4 прямая MN принадлежит этой плоскости. Аналогично прямая AD также принадлежит плоскости AA_1D_1. Из планиметрии известно, что прямые, лежащие в одной плоскости, или параллельны, или пересекаются. Поскольку $AM \neq DN$, то прямые AD и MN пересекаются. Пусть X — точка их пересечения (рис. 3.12).

Точки A и D принадлежат плоскости ABC. Тогда по аксиоме А4 прямая AD принадлежит этой же плоскости. Точка X принадлежит прямой AD. Следовательно, точка X принадлежит плоскости ABC. Поскольку точка X также принадлежит прямой MN, то прямая MN пересекает плоскость ABC в точке X. ■

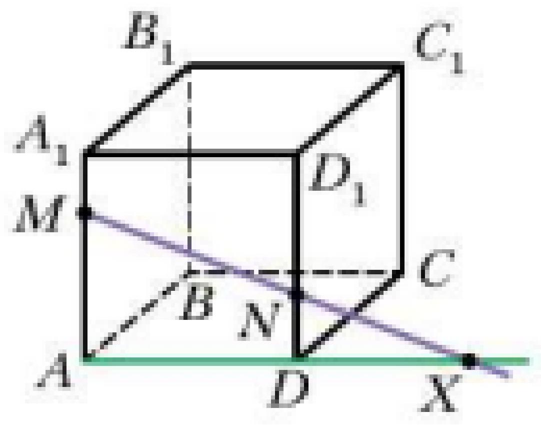

Рис. 3.12

Пусть в пространстве заданы многогранник и плоскость.

Если все общие точки многогранника и плоскости образуют многоугольник, то этот многоугольник называют **сечением многогранника плоскостью**, а саму плоскость — **секущей плоскостью**.

На рисунке 3.13 секущую плоскость задают точки A, A_1 и C_1. Сечением призмы этой плоскостью является боковая грань AA_1C_1C.

На рисунке 3.14 секущую плоскость задают прямая AC и точка B_1. Сечением призмы этой плоскостью является треугольник AB_1C.

На рисунке 3.15 секущую плоскость задают две пересекающиеся прямые AE и CE. Сечением пирамиды этой плоскостью является треугольник AEC.

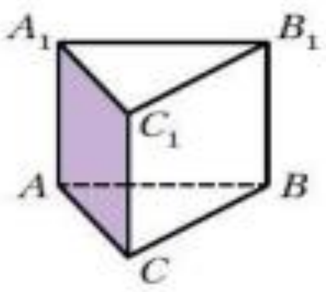

Рис. 3.13

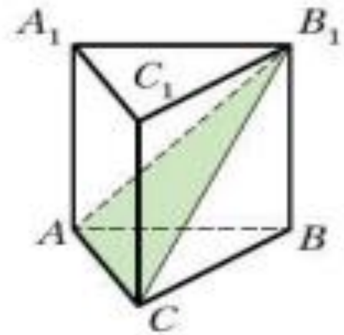

Рис. 3.14

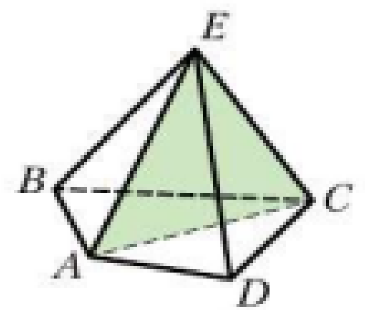

Рис. 3.15

Задача 2. На рёбрах AD, DB и AC тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.16). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN, если отрезок MN не параллелен ребру AB.

Решение. Точки M и N являются общими для плоскости KMN и плоскости ADB. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MN. Тогда секущая плоскость пересекает грань ADB по отрезку MN (рис. 3.17). Аналогично делаем вывод, что плоскость KMN пересекает грань ADC по отрезку KM.

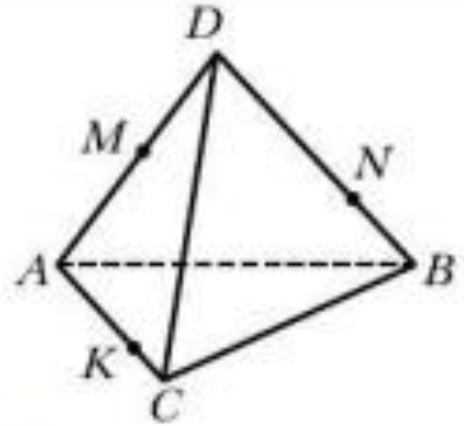

Рис. 3.16

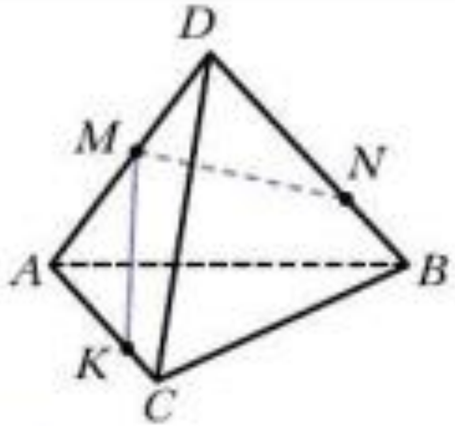

Рис. 3.17

Секущая плоскость KMN и плоскость ABC имеют общую точку K. Следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через точку K. Чтобы эту прямую построить, надо найти ещё одну общую точку плоскостей ABC и KMN. Для этого найдём точку пересечения прямой MN и плоскости ABC.

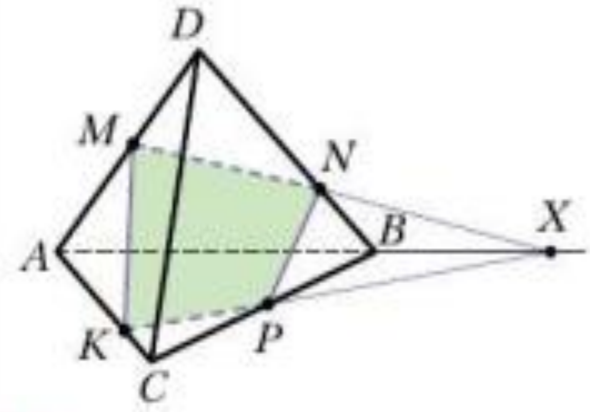

Рис. **3.18**

Пусть прямая MN пересекает прямую AB в точке X (рис. 3.18). Поскольку $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Поскольку $MN \subset KMN$, то $X \in KMN$. Итак, точки K и X являются общими для плоскостей ABC и KMN. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой KX.

Пусть прямая KX пересекает отрезок CB в точке P. Тогда секущая плоскость пересекает грани ABC и CDB соответственно по отрезкам KP и PN. Итак, четырёхугольник $KMNP$ — искомое сечение. ■

Задача 3. Точка M принадлежит боковому ребру BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Прямая a принадлежит плоскости ABC и расположена так, как показано на рисунке 3.19. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую a и точку M.

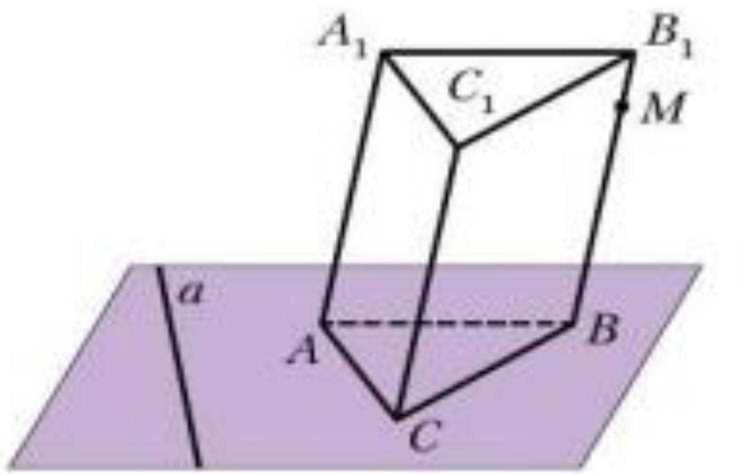

Рис. 3.19

Решение. Пусть прямая AB пересекает прямую a в точке X (рис. 3.20). Точки M и X являются общими для секущей плоскости и плоскости AA_1B_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MX. Пусть прямая MX пересекает ребро AA_1 в точке K. Тогда секущая плоскость пересекает боковую грань AA_1B_1B по отрезку KM.

Аналогично строим отрезок MN, по которому секущая плоскость пересекает грань CC_1B_1B.

Для завершения решения осталось соединить точки N и K. Треугольник KMN — искомое сечение. ■

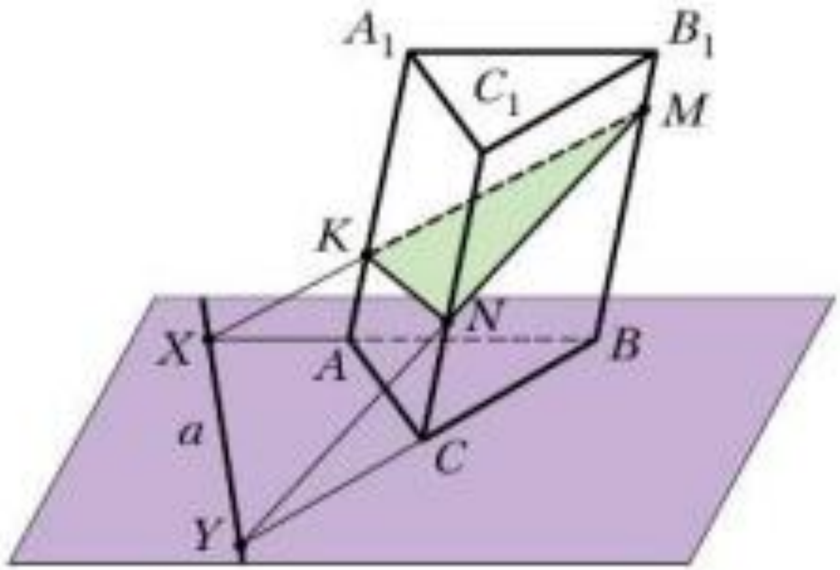

Рис. 3.20

Задача 4. На рёбрах AD, DD_1 и B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.21). Постройте сечение куба плоскостью MNK.

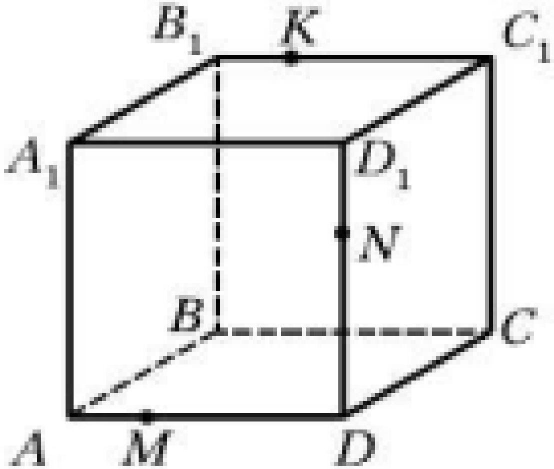

Рис. 3.21

Решение. Очевидно, что секущая плоскость пересекает грань AA_1D_1D куба по отрезку MN (рис. 3.22).

Пусть $MN \cap A_1D_1 = X$. Точки X и K являются общими для плоскостей MNK и $A_1D_1C_1$. Следовательно, $MNK \cap A_1D_1C_1 = XK$. Пусть прямая XK пересекает ребро D_1C_1 в точке E. Тогда плоскость MNK пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$ по отрезку EK.

Пусть $MN \cap AA_1 = Z$ и $EK \cap A_1B_1 = Y$. Тогда $MNK \cap AA_1B_1 = YZ$. Пусть прямая YZ пересекает рёбра AB и BB_1 куба соответственно в точках G и F. Осталось соединить точки M и G, G и F, F и K. Шестиугольник $MNEKFG$ — искомое сечение. ■

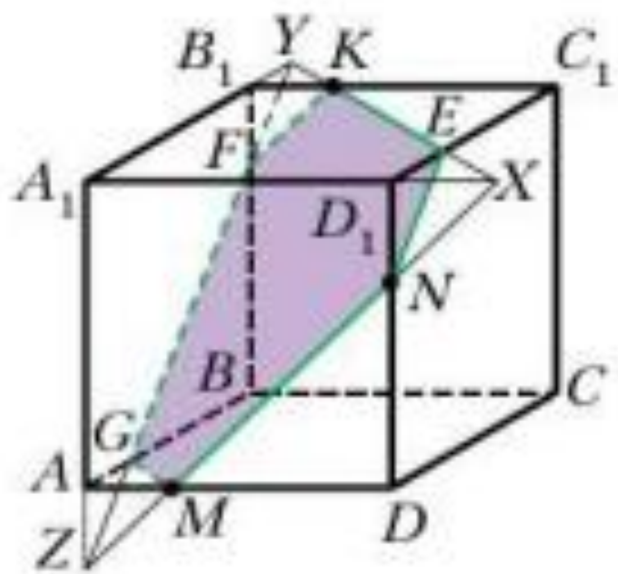

Рис. 3.22

Задача 5. Точка X является серединой ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В каком отношении плоскость XCD_1 делит ребро AB?

Решение. Найдём точку пересечения плоскости XCD_1 и прямой AB (рис. 3.23). Пусть прямая D_1X пересекает прямую DA в точке Y. Треугольник YAX подобен треугольнику YDD_1 (рис. 3.24). Поэтому $\frac{YA}{YD} = \frac{AX}{DD_1} = \frac{1}{2}$. Поскольку точки Y и C принадлежат плоскости сечения, то и прямая YC также лежит в плоскости сечения. Пусть прямая YC пересекает прямую AB в точке Z. Точка Z принадлежит плоскости сечения и прямой AB, поэтому точка Z является точкой пересечения плоскости XCD_1 и прямой AB. Поскольку треугольник YAZ подобен треугольнику YDC (рис. 3.25), то $\frac{YA}{YD} = \frac{AZ}{DC} = \frac{1}{2}$. Поэтому точка Z является серединой стороны AB, т. е. плоскость XCD_1 делит ребро AB пополам. ■

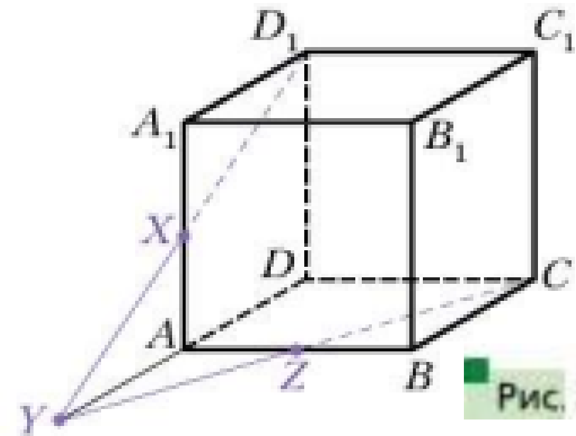

Рис. 3.23

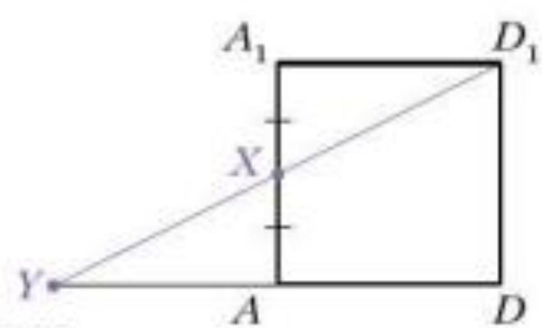

Рис. 3.24

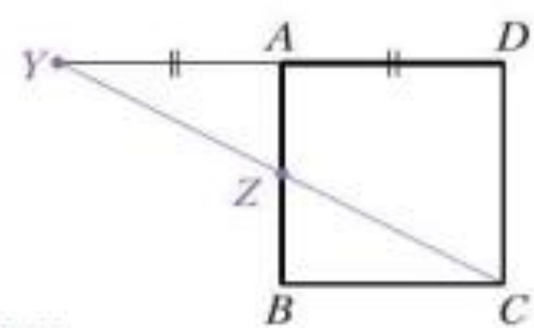

Рис. 3.25

Спасибо за работу!