analysis quantifier

Gleb Anohin

September 25, 2024

Contents

1 Кванторы и струтктура теорем

$\forall$ – кватор всеобщности – для любого
$\exists$ – квантор существования – существует
$\exists!$ – квантор единственности – существует лишь один
$\forall x : A(x) \to B(x)$ пишут $A(x) \to B(x)$
Говорят: достаточно для; достаточный признак; необходимое условие для; только тогда, когда; B следует из A; B вытекает из A.
Если $A(x) \to B(x)$ и $B(x) \to A(x)$, то пишут $A(x) \iff B(X)$
Говорят: равносильно, тогда и только тогда

1.1 Примеры

1.1.1 1

$A = \{x : P(x)\}, B = \{x : Q(x)\}$
Доказать: $P(x) => Q(x) \iff A \subset B$
$P(x) \to Q(x) \iff \forall x : P(x) \to Q(x)$
Необходимость: $x \in A \to P(x) = T \to Q(x) = T \to x \in B$ Достаточность:

$$\begin{cases} x \in A \Rightarrow P(x) = T \\ x \in B \Rightarrow Q(x) = T \end{cases} \Rightarrow P(x) \to Q(x) \tag{1}$$

$$\begin{cases} x \in A \Rightarrow P(x) = F \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin B \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} Q(x) = T \\ Q(x) = F \end{array} \right. \end{cases} \tag{2}$$

что и является определением импликации.

1.1.2 2

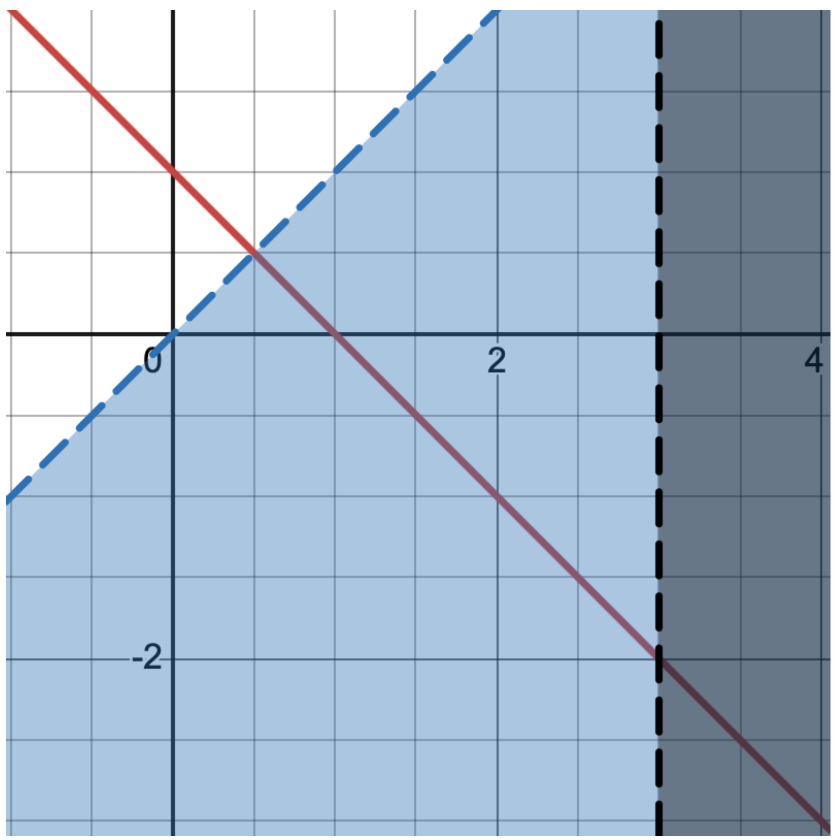
Установить устинностное значение

$$\begin{aligned} \forall c \exists b \forall x : x^2 + bx + c > 0 \\ \forall c \exists b : D < 0 \\ \forall c \exists b : b^2 - 4c < 0 \\ \forall c \exists b : b^2 < 4c \\ b^2 > 0 \Rightarrow 4c > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Но это неправда (например при c = -1), следовательно изначальное утверждение ложное

1.1.3 3

$(x + y = 1) \wedge ((x <= 3) \to (x > y))$ $(x + y = 1) \wedge ((x > 3) \vee (x > y))$



Если построить это таким график, то ответом будет та часть прямой, которая находится хотя бы в одном из регионов.
Эту прямую можно упроситить до вида $x = 1 - yx >= 0.5$

1.1.4 4

Построить отрицание к $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1 \in [0;1] \forall x_2 \in [0;1] : |x_1 - x_2| < \delta \to |x_1^2 - x_2^2| < \epsilon$
$A = \neg(|x_1 - x_2| < \delta) \vee |x_1^2 - x_2^2| < \epsilon$