Тема 2. Следствия из аксиом стереометрии

Теория

Теорема 2.1
Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит плоскость и притом только одна.

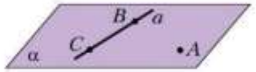

Рис. 2.1

Теорема 2.2
Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

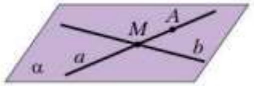

Рис. 2.2

Из аксиомы А3 и теорем 2.1 и 2.2 следует, что *плоскость однозначно определяется*:

1) *тремя точками, не лежащими на одной прямой*;
2) *прямой и не лежащей на ней точкой*;
3) *двумя пересекающимися прямыми*.

Таким образом, мы указали три способа задания плоскости.

Ключевая задача

Так же, как и в планиметрии, две прямые в пространстве называют **пересекающимися**, если они имеют общую точку.

Задача. Докажите, что пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Решение. Пусть пересекающиеся прямые a и b имеют две общие точки A и B. Рассмотрим произвольную плоскость α, проходящую через точки A и B. Тогда по аксиоме А4 плоскости α принадлежат прямые a и b. Получили, что в плоскости α две прямые имеют две общие точки, что противоречит соответствующей аксиоме планиметрии. ■

Упражнения

2.1. Сколько плоскостей можно провести через данные прямую и точку?

2.2. Докажите, что через три точки, лежащие на одной прямой, можно провести плоскость. Сколько можно провести таких плоскостей?

2.3. Прямые AB и CD пересекаются. Докажите, что прямые AC и BD лежат в одной плоскости.

2.4. Центр O и хорда AB окружности лежат в некоторой плоскости. Лежит ли в этой плоскости любая точка данной окружности?

2.5. Сторона AC и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат в плоскости α. Лежит ли в этой плоскости вершина B?

2.6. Прямые a и b пересекаются. Все ли прямые, пересекающие прямые a и b, лежат в одной плоскости?

2.7. Даны прямая a и точка A вне её. Докажите, что все прямые, которые проходят через точку A и пересекают прямую a, лежат в одной плоскости.

2.8. Прямые m и n пересекаются в точке A. Точка B принадлежит прямой m, точка C — прямой n, точка D — прямой BC. Докажите, что прямые m и n и точка D лежат в одной плоскости.

2.9. Прямые AB и AC пересекают плоскость α в точках B и C, точки D и E принадлежат этой плоскости (рис. 2.3). Постройте точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC.

2.10. Прямая BA пересекает плоскость α в точке A, прямая BC — в точке C (рис. 2.4). На отрезке AB отметили точку D, на отрезке BC — точку E. Постройте точку пересечения прямой DE с плоскостью α.

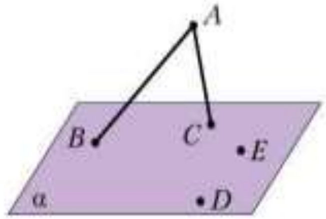

Рис. 2.3

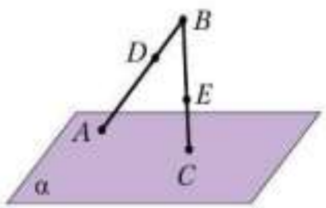

Рис. 2.4

2.11. Даны пять точек, не лежащих в одной плоскости. Какое наибольшее количество из них может лежать на одной прямой?

2.12. Три прямые пересекаются в одной точке. Через каждые две из этих прямых проведена плоскость. Сколько всего плоскостей проведено?

2.13. Как при помощи двух нитей столяр может проверить, лежат ли концы четырёх ножек стула в одной плоскости?

2.14. Найдите ошибку на рисунке 2.5, если известно, что вершина D четырёхугольника $ABCD$ лежит в плоскости α, вершины A, B и C не лежат в этой плоскости, прямая AB пересекает плоскость α в точке E, прямая BC — в точке F. Выполните правильный рисунок.

2.15. Найдите ошибку на рисунке 2.6, если известно, что прямые BP и CK пересекаются в точке E, прямая BP пересекает прямую AC в точке B, прямую FM — в точке P, прямая CK пересекает прямую FM в точке K, прямые AC, FE и FM пересекают плоскость α в точках A, D и M соответственно. Выполните правильный рисунок.

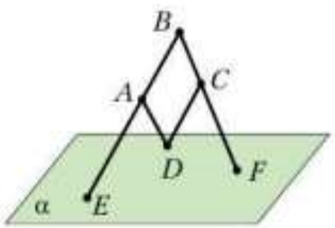

Рис. 2.5

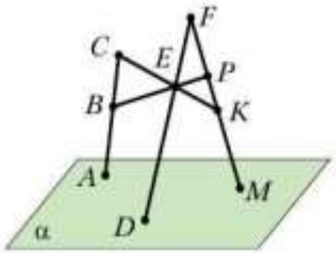

Рис. 2.6

2.16. Точка C лежит на прямой AB, а точка D не лежит на этой прямой. Точка E лежит на прямой AD. Докажите, что плоскости ABD и CDE совпадают.

2.17. Докажите, что если три прямые не принадлежат одной плоскости и каждые две из этих прямых пересекаются, то все данные прямые пересекаются в одной точке.

2.18. Прямые a, b и c попарно пересекаются, причём точки их пересечения не совпадают. Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости?

2.19. Точка K принадлежит плоскости α, а точки M и N — плоскости β (рис. 2.7). Постройте прямую пересечения плоскостей β и MNK.

2.20. Прямая a принадлежит плоскости α, а точка F — плоскости β (рис. 2.8). Постройте прямую, по которой плоскость, проходящая через прямую a и точку F, пересекает плоскость β.

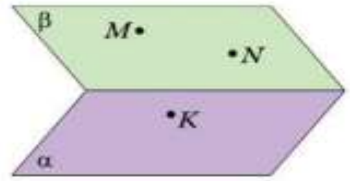

Рис. 2.7

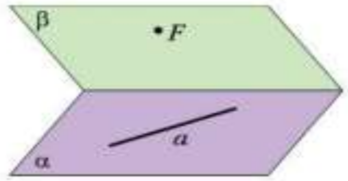

Рис. 2.8

2.21. Треугольники ABC и ABC_1 лежат в разных плоскостях. На сторонах AC, CB, BC_1 и C_1A отметили точки M, N, P и K соответственно так, как показано на рисунке 2.9. Могут ли эти точки принадлежать одной плоскости?

2.22. Даны три попарно пересекающиеся плоскости. Две из трёх прямых пересечения этих плоскостей пересекаются в точке A. Докажите, что третья прямая проходит через точку A.

2.23. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD непараллельны, X — произвольная точка, не принадлежащая плоскости четырёхугольника. Докажите, что при любом выборе точки X прямая пересечения плоскостей XAB и XCD проходит через некоторую фиксированную точку.

2.24. На рисунке 2.10 буквами P, E и Q обозначены точки пересечения прямых MK и BC, MN и CA, KN и AB соответственно. Верно ли, что плоскости ABC и MNK совпадают?

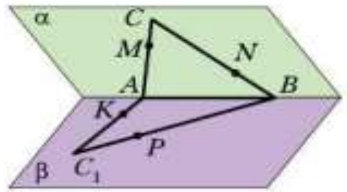

Рис. 2.9

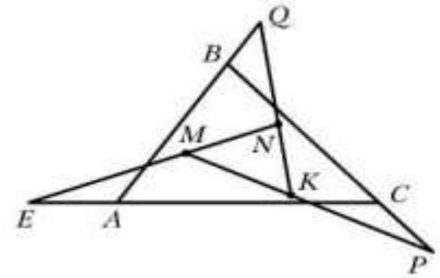

Рис. 2.10

Упражнения для повторения

2.25. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отметили точку M. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника AMD равна 16 см^2.

2.26. Отрезки AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC параллельны. Найдите отрезок BE, если $AE = 10$ см, $CE = 3$ см, $DE = 6$ см.