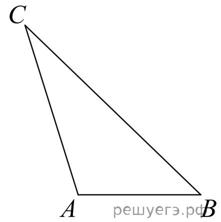
1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 50 и 20, а угол между ними равен 30°

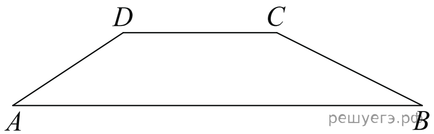


Решение. Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 20\cdot \sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 20\cdot \frac{1}{2}=250.$$

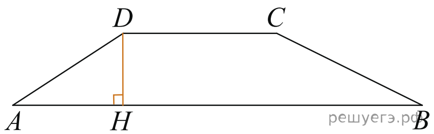
Ответ: 250.

2. Основания трапеции равны 10 и 20, боковая сторона, равная 8, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.



Решение. Введём обозначения, как показано на рисунке.

Заметим, что острый угол трапеции равен 30° и найдем высоту DH из прямоугольного треугольника AHD:



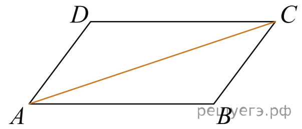
$$DH=AD\cdot \sin\widehat{DAH}=8\cdot\frac{1}{2}=4$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot DH=\frac{10+20}{2}\cdot 4=60.$$

Ответ: 60.

3. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 26° и 34°. Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

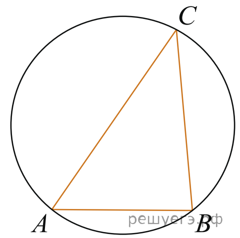


Решение. сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма равна 180°.

$$\angle D=180^\circ-\angle A=180^\circ-(\angle DAC+\angle CAB)=$$
$$=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$$

Ответ: 120.

4. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 36, равен 30°. Найдите сторону AB этого треугольника.

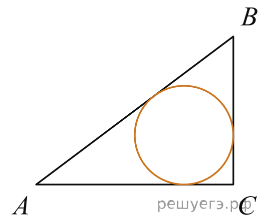


Решение. По теореме синусов:

$$AB=2R\sin C=2\cdot 36\cdot\frac{1}{2}=36.$$

Ответ: 36.

5. В треугольнике ABC известно, что $AC=24$, $BC=10$, угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.

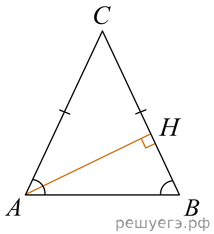


Решение. Имеем:

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{AC+BC-\sqrt{AC^2+BC^2}}{2}=$$
$$=\frac{24+10-\sqrt{676}}{2}=4.$$

Ответ: 4.

6. В треугольнике ABC $AC=BC$, AH − высота, $AB=7$, $\operatorname{tg}BAC=\frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите BH.

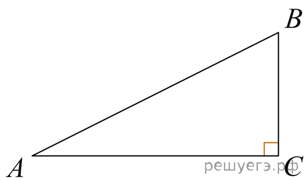


Решение. Найдем BH:

$$BH=AB\cos\angle ABH=AB\cos\angle BAC=$$
$$=AB\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\angle BAC}}=7\sqrt{\frac{1}{1+\frac{33}{16}}}=4.$$

Ответ: 4.

7. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.



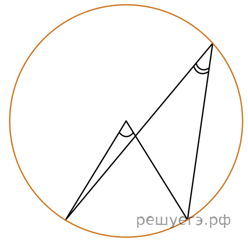
Вариант № 77455283

Решение. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. По теореме Пифагора $a^2=100-36=64$, $a=8$, где a — второй катет. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24.$$

Ответ: 24.

8. Центральный угол на $36°$ больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

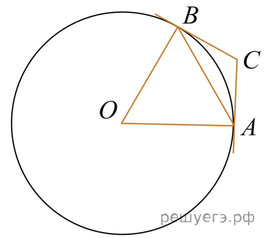


Решение. Пусть вписанный угол равен x, тогда центральный угол равен $2x$. Получаем уравнение:

$$2x-x=36\Leftrightarrow x=36.$$

Ответ: 36.

9. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен $32°$. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Решение. Угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами. Поэтому величина меньшей дуги AB окружности равна 64°. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается, поэтому угол AOB равен 64°.

Ответ: 64.

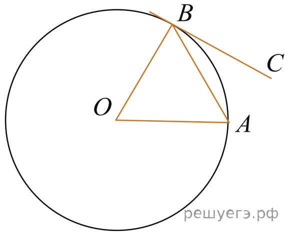
Примечание об изменении задания.

Ранее это задание и аналогичные к нему в Открытом банке были формулированы иначе.

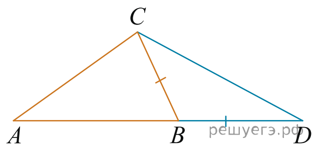
Задание. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами. Значит, искомая величина дуги равна 64°.

Ответ: 64.



10. В треугольнике ABC угол A равен 44°, угол C равен 62°. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.



Решение. Треугольник CBD равнобедренный, углы C и D при его основании равны, а их сумма равна внешнему углу при вершине B, то есть углу B треугольника ABC. Сумма углов треугольника ABC равна 180°, поэтому $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 74°$. Следовательно, $\angle C = \angle D = 37°$.

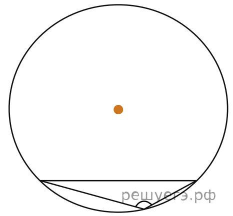
Ответ: 37.

Приведем решение Расиля Садыкова.

Угол CBD — внешний угол треугольника ABC, равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, следовательно, $\angle CBD = 44° + 62° = 106°$. Треугольник CBD равнобедренный, углы C и D в нем равны, следовательно,

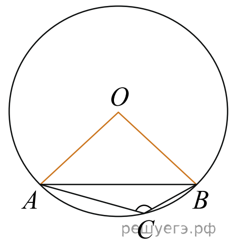
$$\angle D = \frac{180° - \angle B}{2} = \frac{180° - 106°}{2} = 37°.$$

11. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.



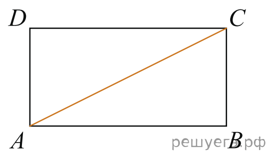
Решение. Вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду, до 180°. Треугольник AOB является равносторонним, т. к. $AO = OB = AB = R$, поэтому угол $AOB = 60°$. Тогда

$$\angle ACB = 180° - \frac{\angle AOB}{2} = 150°.$$



Ответ: 150.

12. Периметр прямоугольника равен 8, а площадь равна 3,5. Найдите диагональ этого прямоугольника.



Решение. Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна их произведению. Обозначим длины сторон a и b. Тогда периметр и площадь прямоугольника соответственно равны $P=2(a+b)=8$ и $S=ab=3,5$. Решим систему:

$$\begin{cases} a+b=4, \\ ab=3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b, \\ 4b-b^2=3,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b, \\ \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}, \\ b=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \\ b=\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \\ b=\frac{4-\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тем самым, стороны прямоугольника треугольника равны $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$.

Диагональ разбивает прямоугольник на два прямоугольных треугольника, в которых она является гипотенузой. Пусть длина диагонали равна c, тогда по теореме Пифагора

$$c=\sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{9}=3.$$

Ответ: 3.

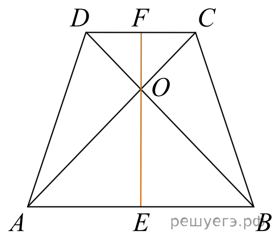
Примечание 1.

Можно было и вовсе не решать систему уравнений: действительно,

$$\begin{aligned} c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab= \\ =4^2-2\cdot 3,5=16-7=9, \end{aligned}$$

откуда $c = 3$.

13. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 18. Найдите ее среднюю линию.

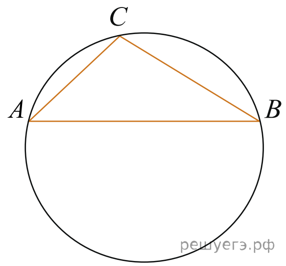


Решение. Треугольники CFO и BEO — равнобедренные, так как $\angle OCF=\angle COF=45^\circ$ и $\angle OBE=\angle BOE=45^\circ$, следовательно, средняя линия равна

$$KM=\frac{DC+AB}{2}=FC+EB=FO+OE=FE=18.$$

Ответ: 18.

14. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $3:5$. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



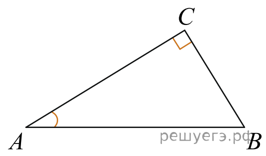
Решение. Из точки C хорда AB видна под углом ACB. Пусть большая часть окружности равна $5x$, тогда меньшая равна $3x$.

$$5x+3x=360^\circ \Leftrightarrow 8x=360^\circ \Leftrightarrow x=45^\circ.$$

Значит, меньшая дуга окружности равна 135°, а большая — 225°. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит, опирающийся на большую дугу угол ACB равен 112,5°.

Ответ: 112,5.

15. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $BC = 5$. Найдите AC.

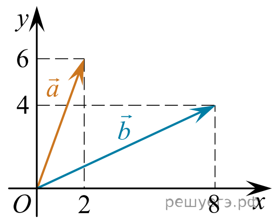


Решение. Имеем:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{BC\cos A}{\sin A} = \frac{BC\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} =$$
$$= \frac{5\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{1-\frac{5}{25}}} = 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{5}} = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Решение. Выпишем координаты векторов: $\vec{a} = (2;6)$, $\vec{b} = (8;4)$. Скалярное произведение векторов равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b = 2\cdot 8 + 6\cdot 4 = 40.$$

Ответ: 40.

17. Даны векторы $\vec{a}(3;\ -2)$ и $\vec{b}(0;\ 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Решение. Скалярное произведение равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = -2.$$

Ответ: −2.

18. Найдите длину вектора $\vec{a} = (24;\ 10)$.

Решение. Длина вектора определяется следующим выражением:

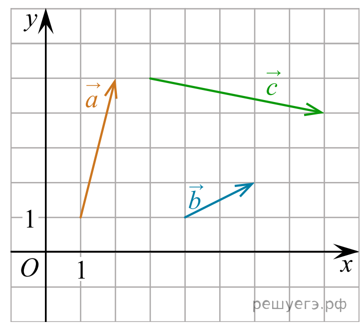
$$\sqrt{24^2+10^2} = 26.$$

Ответ: 26.

19. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ разложен по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b},$$

где k и l — коэффициенты разложения. Найдите k.



Решение. По рисунку определим координаты векторов:

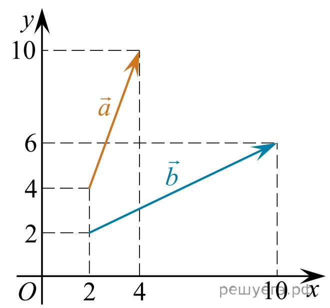
$$\vec{a} = (1;\ 4),\qquad \vec{b} = (2;\ 1),\qquad \vec{c} = (5;\ -1).$$

Из равенства $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ получаем систему линейных уравнений для их координат:

$$\begin{cases} 5 = k\cdot 1 + l\cdot 2, \\ -1 = k\cdot 4 + l\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = k + 2l, \\ -2 = 8k + 2l \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = k + 2l, \\ -7 = 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1, \\ l = 3. \end{cases}$$

Ответ: −1.

20. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



Решение. Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Поэтому вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(2;\ 6)$, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(8;\ 4)$. Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат. Поэтому вектор $\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты $(10;\ 10)$. Сумма его координат равна 20.

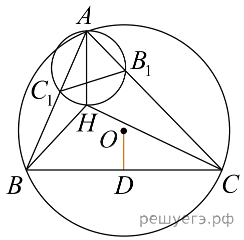
Ответ: 20.

21. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BAH = \angle BB_1C_1$.

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до стороны BC, если $B_1C_1 = 12$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

Вариант № 77455283



Решение. а) Точки A, C_1, H, B_1 лежат на окружности с диаметром AH. Углы C_1AH и C_1B_1H равны как вписанные, значит, углы тоже BAH и BB_1C_1 тоже равны. Что и требовалось доказать.

б) Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, D — середина стороны BC. Требуется вычислить длину отрезка OD. Заметим, что $AB_1 = AB\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{AB}{2}$, $AC_1 = AC\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{AC}{2}$. Поэтому треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, коэффициент подобия равен $\dfrac{1}{2}$. Значит, $BC = 2B_1C_1 = 24$, $BD = 12$.

Угол BOC равен удвоенному углу BAC, то есть 120°. Следовательно, угол OBD равен 30°. Найдем искомое расстояние:

$$OD = BD\cdot\operatorname{tg}30^\circ = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{3}$.

Примечание Дмитрия Гущина.

Учащийся, изучающий геометрию углублённо, решит пункт б) в одну строчку:

$$OD = \frac{1}{2}AH,\qquad AH = BC\operatorname{ctg}A,\qquad BC = \frac{B_1C_1}{\cos A},\qquad OD = \frac{1}{2}\cdot\frac{B_1C_1}{\cos A}\operatorname{ctg}A = \frac{B_1C_1}{2\sin A} = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: 18.

Приведем полезные теоремы, на применение которых составлена эта задача.

1. Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны (опытный читатель предложит не менее шести доказательств этого факта).

2. Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра равно противолежащей стороне, умноженной на котангенс угла при этой вершине.

3. Если из двух вершин непрямоугольного треугольника проведены высоты к его сторонам или их продолжениям, то основания этих высот и третья вершина треугольника образуют треугольник, подобный данному, а коэффициент подобия равен модулю косинуса их общего угла.

Доказательства этих и других свойств приведены, например, здесь: Ортоцентр и ортотреугольник.

Полезно будет сравнить эту задачу с заданиями 505425 и 519473 из экзаменационного варианта ЕГЭ 2014 года, заданием 519475 из ЕГЭ−2018, заданием 526342 из ЕГЭ−2019.

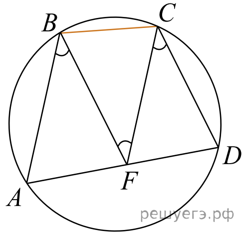
22. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка F лежит на его стороне AD, причём прямые BF и CD параллельны, и прямые CF и AB параллельны.

а) Докажите, что отрезки BF и CF разбивают четырёхугольник $ABCD$ на три подобных треугольника.

б) Известно, что $AF = 1$, $DF = 4$. Найдите BC.

Решение. а) Пусть

$$\angle ABF = \angle BFC = \angle FCD = \alpha.$$



Значит,

$$\angle BCD + \angle BAF = \angle BCF + \alpha + \angle BAF = 180^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \angle BCF = 180^\circ - \angle BAF - \alpha = \angle BFA.$$

Следовательно, треугольники BAF и FCB подобны по двум углам. Аналогично, треугольники FCB и CDF подобны по двум углам.

б) Из п. а) имеем:

$$\frac{AF}{BC} = \frac{BF}{CF} = \frac{BC}{FD} \Leftrightarrow BC^2 = AF \cdot FD \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = 4 \Leftrightarrow BC = 2.$$

Ответ: б) 2.

23. В параллелограмме $ABCD$ расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон AD, AB и BC, вторая — сторон AD, CD и BC.

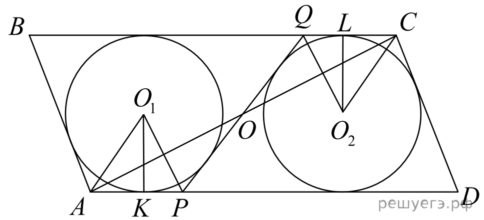
а) Докажите, что общая внутренняя касательная l окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

б) Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а прямая l касается окружностей в точках M и N. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках M, N и в центрах окружностей, если $AD = 36$, а расстояние между центрами окружностей равно 20.

Вариант № 77455283

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагонали AC параллелограмма с общей внутренней касательной l к данным окружностям, P и Q — точки пересечения прямой l со сторонами AD и BC соответственно. Достаточно доказать, что O — середина диагонали AC.

Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй окружностей соответственно. Первая окружность касается стороны AD в точке K, вторая окружность касается стороны BC в точке L.



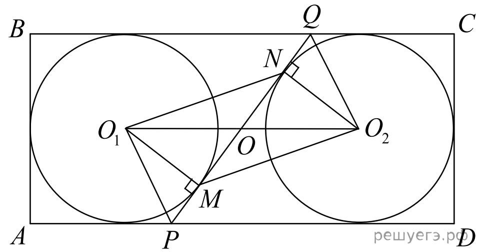
Лучи AO_1 и CO_2 — биссектрисы равных углов BAD и BCD, значит, прямоугольные треугольники AKO_1 и CLO_2 равны по катету (радиусы равных окружностей) и противолежащему острому углу. Тогда $AK = CL$. Аналогично $KP = LQ$. Следовательно,

$$AP = AK + KP = CL + LQ = CQ.$$

Значит, треугольники AOP и COQ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $AO = OC$, а точка O — середина диагонали AC, то есть центр параллелограмма $ABCD$.

б) Поскольку $ABCD$ — прямоугольник, его сторона AD равна сумме диаметра окружности и отрезка O_1O_2, то есть $2r + O_1O_2 = AD$, $2r + 20 = 36$, следовательно, $r = 8$.

Четырёхугольник O_1MO_2N — параллелограмм, так как его противоположные стороны O_1M и O_2N равны и параллельны. Диагонали O_1O_2 и MN параллелограмма O_1MO_2N пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.



Площадь параллелограмма O_1MO_2N в четыре раза больше площади треугольника OO_1M, в котором $OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 10$, $O_1M = r = 8$. По теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{OO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Следовательно,

$$S_{O_1MO_2N} = 4S_{OO_1M} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot O_1M = 2 \cdot 6 \cdot 8 = 96.$$

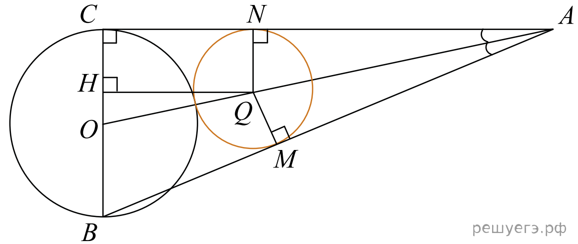
Ответ: б) 96.

24. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение. а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$, следовательно, $\cos\angle A = \frac{12}{13}$, $\sin\angle A = \frac{5}{13}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ = \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A} = \frac{1}{5}$. Поэтому $AC > AN = 5NQ$, что и требовалось доказать.



б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ:

$$QH = CN = 12 - 5x > 0, \quad OQ = \\ = x + 2,5, \quad OH = |OC - CH| = |2,5 - x|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда:

$$(12-5x)^2 + (2,5-x)^2 = (2,5+x)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 130x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,6, \\ x = 3,6. \end{array}\right.$$

Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 1,6$.

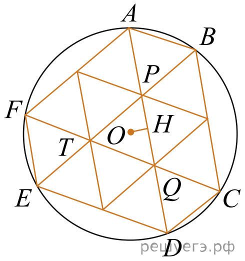
Ответ: 1,6.

25. Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E, F последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

Решение. а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x\cdot x = 2y\cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.



б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T, а H — проекция центра O на хорду AD. Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ.

Через точку T проведём прямую, параллельную AD, через точку P — прямую, параллельную CF, а через точку Q — прямую, параллельную BE. Эти прямые и хорды AD, BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ 2\sqrt{21} = OA = \\ = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 3$, значит, $PQ = 2a = 6$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13\cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

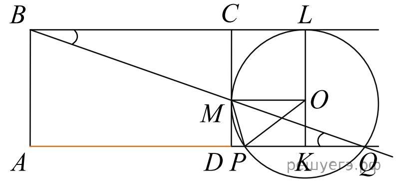
Ответ: $117\sqrt{3}$.

26. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.

Решение. а) Заметим, что $\angle CBM = \angle MQD$, поскольку прямые BC и AQ параллельны. Углы $\angle DMP$ и $\angle MQD$ равны, поскольку оба равны половине дуги MP (первый — угол между касательной и хордой, второй — вписанный угол), откуда следует утверждение задачи.



б) Обозначим центр окружности за O, а основание перпендикуляра из точки O на прямую AD за K, на прямую BC — за L. Тогда $CMOL$ — квадрат и, значит, радиус окружности равен 17. Тогда в треугольнике OPK имеем

$$PK = \sqrt{OP^2 - OK^2} = \sqrt{OP^2 - MD^2} = \\ = \sqrt{17^2 - (25-17)^2} = 15.$$

Значит, $PQ = 2PK = 30$. Тогда $DK = 17$, $PD = DK - PK = 2$.

Тогда $DQ = 32$ и $\operatorname{tg}\angle DQM = \frac{MD}{DQ} = \frac{1}{4}$, откуда

$$AD = BC = CM\cdot\operatorname{ctg}\angle CBM = \\ = 17\cdot\operatorname{ctg}\angle MQD = 17\cdot 4 = 68.$$

Ответ: 68.

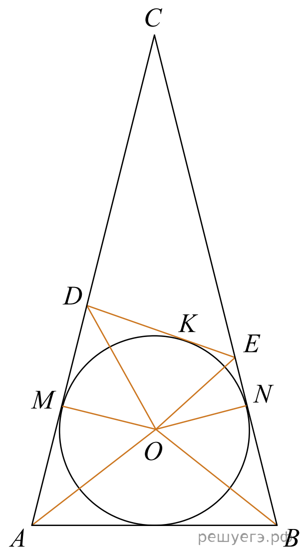
27. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Касательная к окружности пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что сумма углов AOD и BOE равна 180°.

б) Найдите DE, если $AC = BC$, радиус окружности равен 1, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, а разность углов AOD и BOE равна 60°.

Решение. а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому AO и BO — биссектрисы углов A и B треугольника ABC, а DO и EO — биссектрисы внешних углов при вершинах D и E треугольника DEC. Тогда $\angle AOD = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ADE - \frac{1}{2}\angle BAD$ и $\angle BOE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BED - \frac{1}{2}\angle ABE$, следовательно,

$$\angle AOD + \angle BOE = 360^\circ - \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ.$$



б) Пусть вписанная окружность радиусом 1 касается боковых сторон AC и BC в точках M и N соответственно, а отрезка DE — в точке K. По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки, $DK = DM$ и $KE = EN$, откуда следует, что $DE = DK + KE = DM + EN$. Из условия $\angle AOD - \angle BOE = 60^\circ$ и доказанного равенства в пункте а) $\angle AOD + \angle BOE = 180^\circ$ получаем: $\angle AOD = 120^\circ$ и $\angle BOE = 60^\circ$. Поскольку $AC = BC$, углы OAD и OBE равны как половины углов при основании равнобедренного треугольника ABC. Обозначим $\angle OAD = \angle OBE = \alpha$, тогда $\angle DOM = 120^\circ - (90^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$ и $\angle EON = 60^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 30^\circ$. В прямоугольном треугольнике DOM известно, что $OM = 3$, следовательно,

$$DM = \operatorname{tg}(30^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}30^\circ\operatorname{tg}\alpha} =$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{7\sqrt{3}}{5}.$$

Аналогично в прямоугольном треугольнике EON

$$EN = \operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}30^\circ} =$$
$$= \frac{\frac{4\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{13}.$$

Получаем

$$DE = DM + EN = \frac{7\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{13} = \frac{96\sqrt{3}}{65}.$$

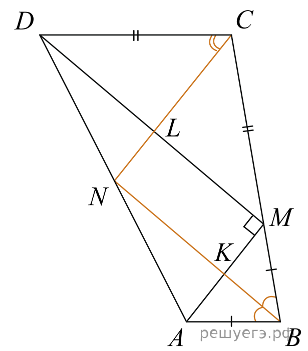
Ответ: б) $\dfrac{96\sqrt{3}}{65}$.

28. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$, пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 24.

Решение. а) Пусть K — середина отрезка AM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому отрезок BK является в нём медианой, биссектрисой и высотой. Поскольку прямые DM и AM перпендикулярны, прямая $KB||\ MD$ и содержит среднюю линию треугольника AMD, то есть проходит через середину стороны AD. Аналогично, биссектриса угла MCD тоже проходит через середину стороны AD. Следовательно, биссектрисы углов B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.



б) Пусть прямые AM и BN пересекаются в точке K, а прямые DM и CN — в точке L. Тогда четырёхугольник $KMLN$ — прямоугольник. Прямые KM и CN параллельны, поэтому, по теореме Фалеса, $BM : MC = BK : KN$, откуда находим:

$$S_{ABM} = BK\cdot KM = \frac{BM\cdot NK}{MC}\cdot KM = \frac{3}{4}S_{KMLN} = 18.$$

Аналогично,

$$S_{DCM} = CL\cdot LM = \frac{MC\cdot KM}{BM}\cdot LM = \frac{4}{3}S_{KMLN} = 32.$$

Далее,

$$S_{DMA} = \frac{1}{2}AM\cdot DM = 2KM\cdot LM = 2S_{KMLN} = 48.$$

Тогда:

$$S_{ABCD} = S_{DMA} + S_{AMB} + S_{DMC} = 48 + 18 + 32 = 98.$$

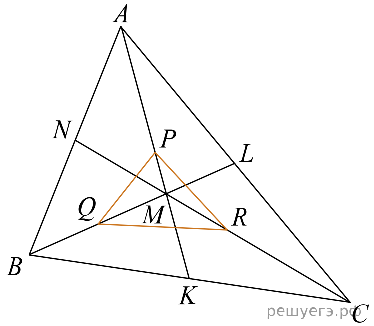
Ответ: б) 98.

29. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q и R так, что $AP = PK$, $BQ : QL = 1 : 2$, а $CR : RN = 4 : 5$, M — точка пересечения медиан.

а) Докажите, что $MR : CN = 2 : 9$.

б) Найдите площадь треугольника PQR.

Решение. а) Согласно теореме о точке пересечении медиан треугольника $CM : MN = 2 : 1$. Пусть $CM = 6x$, $MN = 3x$. Тогда из условия следует, что $CR = 4x$, $RN = 5x$. Отсюда $MR : CN = 2x : 9x = 2 : 9$. Что и следовало доказать.



б) Применяя еще несколько раз свойство точки пересечения медиан треугольника, получим, что $MP : MA = 1 : 4$, $MQ : MB = 1 : 2$, $MR : MC = 1 : 3$. Медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников, поэтому площади треугольников ABM, ACM, BCM равны 2 каждая. Тогда

$$S_{MPQ} : S_{ABM} = MP \cdot MQ : MA \cdot MB = 1 : 8,$$
$$S_{MPR} : S_{MAC} = MP \cdot MR : MA \cdot MC = 1 : 12,$$
$$S_{MQR} : S_{MBC} = MQ \cdot MR : MB \cdot MC = 1 : 6.$$

Таким образом, площадь треугольника PQR равна $2 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Ответ: б) $\frac{3}{4}$.

30. Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O.

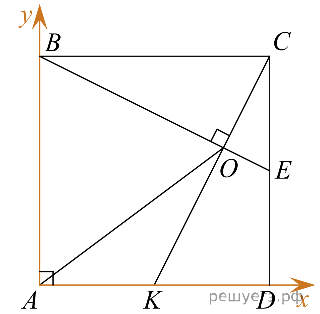
а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO, если сторона квадрата равна 1.

Решение. а) Треугольники BCE и CDK равны по двум катетам, следовательно,

$$\angle CBE = \angle DCK = 90^\circ - \angle BCK,$$

то есть прямая BE перпендикулярна прямой CK. Тогда в четырёхугольнике $ABOK$: $\angle BAK = \angle BOK = 90^\circ$. Поэтому вокруг него можно описать окружность.



б) Введём систему координат, как показано на рисунке. В этой системе $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $D(1;\ 0)$, $E\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$.

Уравнение прямой KC: $y = 2x - 1$, уравнение прямой BE: $y = 1 - \frac{x}{2}$. Координаты точки O найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = 1 - \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 2x - 1 = 1 - \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}, \\ x = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Тогда расстояние между $A(0;\ 0)$ и $O\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$ равно

$$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1.$$

Ответ: б) 1.

Приведём другое решение п. а).

Повернём треугольник BCE на 90° по часовой стрелке и параллельным переносом совместим точку B с точкой C. Тогда треугольник BCE наложится на CKD, прямая BE совпадет с прямой CK. Поскольку после поворота прямые совпали, до поворота угол между ними был 90°.

Приведём другое решение п. б).

Прямоугольные треугольники BCE и BAK равны по двум катетам, значит, $\angle BKA = \angle BEC = \angle ABE = \angle ABO$, то есть на хорды AO и AB описанной около четырёхугольника $ABOK$ окружности опираются равные углы. Таким образом, $AO = AB = 1$.

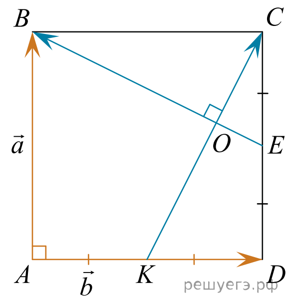
Приведём решение п. б) Андрея Плюхина.

Продолжим отрезок CK до точки F пересечения с прямой AB. Прямоугольные треугольники KDC и KAF равны по катету и острому углу, поэтому $AF = BC = 1$, а точка A — середина BF.

Точка O принадлежит окружности с центром в точке A и диаметром BF, так как эта точка — вершина прямого угла, стягивающего диаметр BF. Следовательно, $AO = AB = AF = 1$ — радиус этой окружности.

Второй абзац этого решения можно заменить таким рассуждением: из суммы углов получаем, что угол FOB прямой, следовательно, AO является медианой прямоугольного треугольника и равна половине гипотенузы.

Приведём решение Дениса Чернышева (Тюмень).



а) Вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противолежащих углов равны gj 180°. По условию $ABCD$ — квадрат, в нем угол A прямой. Докажем, что угол KOB прямой. Имеем:

$$\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \vec{a}, \qquad \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\cdot\vec{a} - \vec{b}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\cdot\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\cdot\vec{b}^2.$$

Стороны квадрата равны, поэтому $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$. Значит, скалярное произведение равно нулю, а тогда $\angle KOB = \widehat{\overrightarrow{KC},\ \overrightarrow{EB}} = 90^\circ$.

б) Необходимо найти модуль вектора $\overrightarrow{OA}$. Запишем его в виде

$$\overrightarrow{OA} = x\cdot\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = x\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}\right) - \vec{b} - \vec{a},$$

где $x = \dfrac{OC}{KC}$. По теореме Пифагора из треугольника DCK находим:

$$KC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Прямоугольные треугольники DCK и OCE подобны, поскольку имеют общий острый угол. Значит, $\dfrac{KC}{CE} = \dfrac{CD}{OC}$, откуда

$$OC = \frac{CE\cdot CD}{KC} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{OC}{KC} = \frac{\sqrt{5}\cdot 2}{5\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

Подставим найденный коэффициент x в выражение для вектора $\overrightarrow{OA}$, получим:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b \vec{+} \vec{a}\right) - \vec{b} - \vec{a} = -\frac{3}{5}\cdot\vec{a} - \frac{4}{5}\cdot\vec{b}.$$

Тогда:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\cdot 1\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\cdot 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1.$$