

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

《高等数学 A2》试卷 A 卷标准答案及评分标准

(电气、计算机、软件、建环各专业 18 年级适用)

注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效

一、选择题 (6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$ 的 2 阶常系数齐次方程为----- (B)

(A) $y'' - 2y' + y = 0$; (B) $y'' + 2y' + y = 0$;

(C) $y'' - y' - 2y = 0$; (D) $2y'' - y' - y = 0$.

2. 函数 $f(x, y) = x^2 + (y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f'_x(1,1) =$ ----- (D)

(A) -2; (B) -1; (C) 1; (D) 2.

3. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续是函数 $f(x, y)$ 在该点可微的----- (C)

(A) 充分必要条件; (B) 必要条件非充分条件;
(C) 充分条件非必要条件; (D) 既非充分条件又非必要条件.

4. 下列方程中可利用 $p = y'$, $p' = y''$ 降为 p 的一阶微分方程的是---- (A)

(A) $(y'')^2 + xy' - x = 0$; (B) $y'' + yy' + y^2 = 0$;

(C) $y'' + y^2 y' - y^2 x = 0$; (D) $y'' + yy' + x = 0$.

5. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx =$ ----- (D)

(A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; (B) $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^1 f(x, y) dy$;

(C) $\int_0^1 dy \int_{-1}^1 f(x, y) dx$; (D) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数为----- (C)

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$; (B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$;

(C) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$; (D) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$.

二、填空题 (6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

7. 微分方程 $y' - y \cdot \cot x = 0$ 的通解是 $y = c \sin x$ (c 为任意常数_____).

8. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{\sin(xy)}{xe^{xy}} =$ $\frac{\pi}{e}$.

9. 已知函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $dz =$ $\frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}$.

10. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的闭区域, 利用柱面坐标表示三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho dz$ _____ (用三次积分表示)。

11. $\int_L (x+y) ds =$ $\sqrt{2}$, 其中 L 为连接 (1,0) 和 (0,1) 两点的直线段。

12. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且 $f(x) = -x, -\pi < x \leq \pi$. 设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $S(\pi) =$ 0 .

三、解答题 (7 小题, 每题 7 分, 共 49 分)

13. 求解微分方程 $y'' = x + e^x$.

解: 方程两边积分得

$$y' = \frac{x^2}{2} + e^x + C_1. \quad \text{-----3 分}$$

方程两边再次积分可得 $y = \frac{x^3}{6} + e^x + C_1x + C_2$ (C_1, C_2 为任意常数) 即为方程通解。

-----7 分

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n \cdot 3^n}$ 的敛散性; 如果收敛, 是否绝对收敛.

解: 令 $u_n = \frac{(-1)^n e^n}{n \cdot 3^n}$, -----1 分

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}}{\frac{e^n}{n \cdot 3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e \cdot n}{3 \cdot (1+n)} = \frac{e}{3} < 1 \quad \text{-----4 分}$$

由正项级数比值判别法可得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 从而原级数绝对收敛。

-----7 分

15. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 (1, 2, 2) 处的切平面方程和法线方程。

解: 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, -----1 分

则曲面在点 (1, 2, 2) 处的法向量

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) \Big|_{(1,2,2)} = (2x, 4y, 6z) \Big|_{(1,2,2)} = 2(1, 4, 6) \quad \text{-----3 分}$$

则曲面在点 (1, 2, 2) 处的切平面方程 $(x-1) + 4(y-2) + 6(z-2) = 0$, 即

$$x + 4y + 6z = 21 \quad \text{-----5 分}$$

法线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{6}$ -----7 分

16. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解: 在极坐标中, 闭区域 D 可以表示为

$$1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{-----2 分}$$

又有 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 则, 原积分

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta \quad \text{-----4 分} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{14\pi}{3} \quad \text{-----7 分} \end{aligned}$$

17. 计算 $\oint_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (x - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$, 其中 L 为三顶点分别为 (0, 0), (0, 3) 和 (4, 3) 的三角形正向边界。

解: 令 $P = 2xy^3 - y^2 \cos x, Q = x - 2y \sin x + 3x^2 y^2$, -----1 分

且封闭曲线 L 所围区域记为 D,

$$\text{其中 } \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y \cos x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 2y \sin x + 6xy^2 \quad \text{-----3 分}$$

由格林公式

$$\begin{aligned} \oint_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (x - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{---5 分} \\ &= \iint_D 1 dx dy = S_D = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6. \quad \text{-----7 分} \end{aligned}$$

18. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 和锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 所围空间立体的整个边界曲面的外侧。

解法一：令 $P=x, Q=y, R=z$ ，设曲面所围立体为 Ω ，-----2 分

则由 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} 3dxdydz = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz \text{-----4 分}$$

由球面坐标且其中 $\Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \text{-----6 分}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = \pi.$$

$$\text{则原积分} \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 3\pi. \text{-----7 分}$$

解法二解法一：令 $P=x, Q=y, R=z$ ，设曲面所围立体为 Ω ，-----2 分

则由 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} 3dxdydz = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 3V_{\Omega} \text{-----4 分}$$

$$\text{联立方程} \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \text{可得 } z=1,$$

可知空间立体 Ω 是由半径为 1 的半球体和底面半径是 1 高是 1 的圆锥体所

组成，其体积 $V_{\Omega} = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi.$

$$\text{故} \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 3\pi. \text{-----7 分}$$

19. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域。

$$\text{解：令 } a_n = (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}, \text{-----1 分}$$

$$\text{收敛半径 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}, \text{-----4 分}$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛；-----5 分

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散；-----6 分

故幂级数的收敛域 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. -----7 分

四、证明题（本题 7 分）

20. 设 $z = x^n f(\frac{y}{x^2})$ ，其中 $f(u)$ 为可微函数，证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

解：令 $\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} f(\frac{y}{x^2}) + x^n f'(\frac{y}{x^2})(-\frac{2y}{x^3}) = nx^{n-1} f + 2x^{n-3} y f'$, -----3 分

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n f'(\frac{y}{x^2})(\frac{1}{x^2}) = x^{n-2} f', \text{-----6 分}$$

$$\text{则 } x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x(nx^{n-1} f + 2x^{n-3} y f') + 2yx^{n-2} f' = nx^n f = nz. \text{-----7 分}$$

五、应用题（本题 8 分）

21. 设某企业的 Cobb-Douglas 生产函数为 $f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ ，其中 x, y 分别表示企业投入的劳动力数量和资本数量，若每个劳动力和每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元，该企业的总预算是 50000 元，试问如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本投入，才能使生产量最高。

解：这是条件极值的问题，欲在约束条件 $150x + 250y = 50000$ 下求函数

$f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 的最大值。-----1 分

令 $L(x, y, \lambda) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + (150x + 250y - 50000)$, -----3 分

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = 75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 150\lambda = 0 \\ L_y = 75x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} + 150\lambda = 0 \\ L_\lambda = 150x + 250y - 50000 = 0 \end{cases} \text{-----5 分}$$

联立解得 $x = 250, y = 50$.-----7 分

由于点 $(x, y) = (250, 50)$ 是该问题的唯一驻点，又问题本身显然存在最大值，
故 $x = 250, y = 50$ 就是所求，即当雇佣 250 个劳动力，其他的作为资本投入
式可获得最大产量 $f(250, 50) = 16719$. -----8 分