一、选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}$ 的 2 阶常系数齐次方程为----------（ B ）

(A) $y''-2y'+y=0$； (B) $y''+2y'+y=0$；

(C) $y''-y'-2y=0$； (D) $2y''-y'-y=0$.

2. 函数 $f(x,y)=x^2+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f_x'(1,1)=$ -------------（ D ）

(A) -2； (B) -1； (C) 1； (D) 2.

3. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续是函数 $f(x,y)$ 在该点可微的--（ C ）

(A) 充分必要条件； (B) 必要条件非充分条件；

(C) 充分条件非必要条件； (D) 既非充分条件又非必要条件.

4. 下列方程中可利用 $p=y', p'=y''$ 降为 p 的一阶微分方程的是----（ A ）

(A) $(y'')^2+xy'-x=0$； (B) $y''+yy'+y^2=0$；

(C) $y''+y^2y'-y^2x=0$； (D) $y''+yy'+x=0$.

5. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=$ --------------（ D ）

(A) $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$； (B) $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^1 f(x,y)dy$；

(C) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{1} f(x,y)dx$； (D) $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数为-----------------（ C ）

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$； (B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$；

(C) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$； (D) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 微分方程 $y' - y \cdot \cot x = 0$ 的通解是__ $y = c\sin x$(c 为任意常数________.

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{\sin(xy)}{xe^{xy}} =$ ____$\underline{\pi}$_______.

9. 已知函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $dz =$_____ $\dfrac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}$ _________.

10. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的闭区域，利用柱面坐标表示三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$___ $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho dz$ _____（用三次积分表示）。

11. $\int_L (x+y)\mathrm{d}s =$___$\underline{\sqrt{2}}$______, 其中 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段。

12. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x) = -x, -\pi < x \le \pi$.设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则 $S(\pi) =$ _____0________.

三、解答题（7 小题，每题 7 分，共 49 分）

13. 求解微分方程 $y'' = x + e^x$.

解：方程两边积分得

$$y' = \frac{x^2}{2} + e^x + C_1.$$ ----------3 分

方程两边再次积分可得 $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为任意常数）即为方程通解。

------------------------7 分

14. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n\cdot 3^n}$的敛散性；如果收敛，是否绝对收敛.

解：令$u_n=\frac{(-1)^n e^n}{n\cdot 3^n}$，　　---------------1 分

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\Big/\frac{e^n}{n\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n}{3\cdot(1+n)}=\frac{e}{3}<1$$ -----------4 分

由正项级数比值判别法可得，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，从而原级数绝对收敛。

--------------------7 分

15. 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$在点$(1,2,2)$处的切平面方程和法线方程。

解：令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，　　-------------1 分

则曲面在点$(1,2,2)$处的法向量

$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,2,2)}=(2x,4y,6z)\big|_{(1,2,2)}=2(1,4,6)$　　----------3 分

则曲面在点$(1,2,2)$处的切平面方程$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$，即

$x+4y+6z=21$　　--------------------5 分

法线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{6}$ --------------------------7 分

16. 计算二重积分$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$.

解：在极坐标中，闭区域 D 可以表示为

$1\le\rho\le 2,0\le\theta\le 2\pi$　　-----------------------2 分

又有$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$则，原积分

$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\rho\cdot\rho d\rho d\theta$ ------------------------------4 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^2 d\rho=\frac{14\pi}{3}$　　----------------------------7 分

17. 计算$\oint_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (x - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$，其中 L 为三顶点分别为（0,0），（0,3）和（4,3）的三角形正向边界。

解：令 $P = 2xy^3 - y^2\cos x, Q = x - 2y\sin x + 3x^2y^2$，　---------------1 分

且封闭曲线 L 所围区域记为 D，

其中 $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y\cos x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 2y\cos x + 6xy^2$　-----------------3 分

由格林公式

$\oint_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (x - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ---5 分

$= \iint\limits_D 1dxdy = S_D = \frac{1}{2}\times 3\times 4 = 6.$　---------------7 分

18. 利用高斯公式计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中曲面$\Sigma$是球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 和锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 所围空间立体的整个边界曲面的外侧。

解法一：令 $P = x, Q = y, R = z$，设曲面所围立体为Ω，-------------2 分

则由 Gauss 公式可得

$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{\Omega} 3dxdydz = 3\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$ -------------------4 分

由球面坐标且其中 $\Omega: 0 \le r \le 2\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \theta \le 2\pi$

$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$

------------6 分

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \pi.$

则原积分$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = 3\pi.$　------------7 分

解法二解法一：令 $P=x,Q=y,R=z$，设曲面所围立体为Ω，-------2 分

则由 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega} 3dxdydz=3\iiint_{\Omega} dxdydz=3V_{\Omega}$$ -----------4 分

联立方程$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$可得 $z=1$，

可知空间立体Ω是由半径为 1 的半球体和底面半径是 1 高是 1 的圆锥体所组成，其体积$V_{\Omega}=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1=\pi.$

故$\oiint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint_{\Omega} dxdydz=3\pi.$ --------------------7 分

19. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}x^n$ 的收敛域。

解：令 $a_n=(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}$， ----------------1 分

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\Big/\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$,---------4 分

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛； -----------------5 分

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，P 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散；-------------------------6 分

故幂级数的收敛域$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. ---------------------------------------7 分

四、证明题（本题 7 分）

20．设 $z=x^n f(\frac{y}{x^2})$, 其中 $f(u)$ 为可微函数，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$.

解：令 $\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}f(\frac{y}{x^2})+x^n f'(\frac{y}{x^2})(-\frac{2y}{x^3})=nx^{n-1}f+2x^{n-3}yf'$, --------3 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^n f'(\frac{y}{x^2})(\frac{1}{x^2})=x^{n-2}f'$, --------------------------6 分

则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x(nx^{n-1}f+2x^{n-3}yf')+2yx^{n-2}f'=nx^n f=nz$.-----------7 分

五、应用题（本题 8 分）

21. 设某企业的 Cobb-Douglus 生产函数为 $f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 其中 x,y 分别表示企业投入的劳动力数量和资本数量，若每个劳动力和每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元，该企业的总预算是 50000 元，试问如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本投入，才能使生产量最高。

解：这是条件极值的问题，欲在约束条件 $150x+250y=50000$ 下求函数

$f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 的最大值。 ---------------------------------------1 分

令 $L(x,y,\lambda)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+(150x+250y-50000)$, ------------------3 分

解方程组 $\begin{cases} L_x=75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+150\lambda=0 \\ L_y=75x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+150\lambda=0 \\ L_\lambda=150x+250y-50000=0 \end{cases}$ ---------------------------5 分

联立解得 $x=250, y=50$.--------------------------------7 分

由于点 $(x,y)=(250,50)$ 是该问题的唯一驻点，又问题本身显然存在最大值，

故 $x=250, y=50$ 就是所求，即当雇佣 250 个劳动力，其他的作为资本投入

式可获得最大产量 $f(250,50)=16719$. ------------------------8 分