郑州轻工业大学 2018 — 2019 学年 第二学期 高等数学A1、B1试卷（A）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（☐正考 ☐补考 ☐重修 ☐补修 ☐缓考 ☐其它）

《高等数学 A1、B1》试卷（A 卷答案）

(电气、机电、食工、物理、能源、计算机、软件、建环各专业 18 级适用)

注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效

一、单项选择题(5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．当 $x\to\infty$ 时，若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\sim\dfrac{1}{x}$，则 a,b,c 的值必满足-----------（ D ）

(A) $a\neq 0,b,c$ 为任意常数；　(B) a,b,c 为任意常数；

(C) $a=0,b,c$ 为任意常数；　(D) $a=0,b=1,c$ 为任意常数.

2．函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的---------------（ C ）

(A) 充要条件；　(B) 必要非充分条件；

(C) 充分非必要条件；　(D) 既非充分也非必要条件.

3．若 $\ln\cos 2x$ 是 $f(x)=k\tan 2x$ 的一个原函数，则 $k=$----------------（ B ）

(A) 2；　(B) -2；　(C) 1；　(D) -1.

4．$\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=$ ---（ C ）

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

5．下列反常积分中发散的是---（ A ）

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(B) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$；　(C) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；　(D) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$.

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．函数 $y=\arcsin(2x-1)$ 的定义域用区间表示为 $\underline{[0,1]}$.

7．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\underline{0}$.

8．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\underline{e^{-1}}$.

9．设 $y=x^x$ $(x>0)$，则 $\mathrm{d}y=\underline{x^x(\ln x+1)\mathrm{d}x}$.

10．$\int_{-1}^{1}\dfrac{\sin x+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

三、解答题（9 小题，每小题 6 分，共 54 分）

11．求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解：（法一）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$ ------3 分

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x}=0\ .$$ ------6 分

（法二 ）

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$ ------3 分

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\ .$$ ------6 分

12．求不定积分：$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$ ------1 分

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int te^t\mathrm{d}t=2\int t\mathrm{d}e^t$$

$$=2\int t\mathrm{d}e^t=2\left(te^t-\int e^t\mathrm{d}t\right)$$ ------4 分

$$=2e^t(t-1)+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$ ------6 分

13．求定积分：$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ ．

解：（法一）令 $x=\sin t, \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ ，$x:0\to 1\Rightarrow t:0\to \frac{\pi}{2}$ ------2 分

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}\cos t$$ ------5 分

$$=-\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.$$ ------6 分

（法二 ）

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)$$ ------4 分

$$=-\frac{1}{3}\left.(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$ ------6 分

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 3\\ ax+b, & x<3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处可导，求 a,b 的值.

解： 由 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导，从而连续．因此，$f(3^-)=f(3^+)=f(3)$

即 $3a+b=9\Rightarrow b=9-3a$ ------2 分

$$f_+'(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

$$f_-'(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax+9-3a-9}{x-3}=a$$

故 $a=6, b=-9.$ ------6 分

15．设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定的函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：两边对 x 求导，$y+xy'=e^{x+y}(1+y')$ ------5 分

解得：$\frac{dy}{dx}=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$. ------6 分

16．求函数 $y=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$ 的间断点，并指出间断点的类型.

解：$y=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}$，故间断点为 $x=-1, x=1$ ------1 分

因为 $\lim\limits_{x\to -1}y=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-1}=\infty$，故 $x=-1$ 为函数的第二类无穷间断点； ------4 分

因为 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$，故 $x=1$ 为函数的第一类可去间断点 ------6 分

17. 设一曲线由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 确定，求该曲线在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法线方程.

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$ ------2 分

切线斜率=$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$，法线斜率 $=-1$ ------4 分

$t=\frac{\pi}{2}$ 对应的点为 $(\frac{\pi}{2}-1,1)$

切线方程为 $y-1=x-(\frac{\pi}{2}-1)$，即 $y=x-\frac{\pi}{2}+2$

法线方程为 $y-1=-\left(x-(\frac{\pi}{2}-1)\right)$，即 $y=-x+\frac{\pi}{2}$ ------6 分

18．试确定 a,b,c 的值，使曲线 $y=x^3-ax^2+bx+c$ 在 $(1,-1)$ 为一拐点，在 $x=0$ 处有极值，并求曲线的凹凸区间.

解：$y'=3x^2-2ax+b$ $\quad y''=6x-2a$

$(1,-1)$ 为拐点，则 $0=6-2a\Rightarrow a=3$ ------1 分

由 $y'=0$，则 $3x^2-6x+b=0$，代入 $x=0$，则 $b=0$.

又由曲线 $y=x^3-ax^2+bx+c$ 过点 $(1,-1)$，得 $-1=1-a+b+c$，

从而 $c=1$ ------3 分

曲线为 $y=x^3-3x^2+1$， $y''=6x-6$.

凸区间为 $(-\infty,1]$， 凹区间为 $[1,+\infty)$. -------6 分

19．求曲线 $y=\sin x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 处的曲率.

解：$y=\sin x$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0,\ y''\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-\sin x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1$ -------3 分

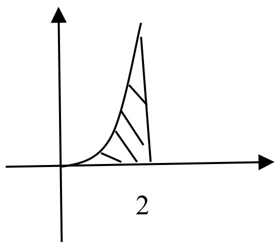
故曲率为 $k\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$. -------6 分

四、应用题（本题 9 分）

20． 设曲线 $y=x^2$ 与 $x=2$，$y=0$ 所围平面图形为 D，求

(1) D 的面积；(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积；(3) D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解： 右图 ------1 分



(1) $S=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$ ------3 分

(2) $V_x=\pi\int_0^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{32}{5}\pi$ ------7 分

(3) 法一：$V_y=16\pi-\pi\int_0^4\left(\sqrt{y}\right)^2\mathrm{d}y=8\pi$ ------9 分

法二： $V_y=2\pi\int_0^2 x^3dx=8\pi$ ------9 分

五、证明题（本题 7 分）

注：以下两个证明题任选一题，多做无效.

21(1).设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

证明：(i) $F'(x)\ge 2$；

(ii) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证明：(i) $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，所以 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$，

又因为 $f(x)>0$，所以，有 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge 2$ -----3 分

(ii) $F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t+\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，

$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^b\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t>0$

$\because F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由闭区间连续函数的性质，得至少 $\exists\xi\in(a,\mathrm{b})$，

使得 $F(\xi)=0$

又 $\because F'(x)\ge 2$，所以 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根 ------7 分

21(2).设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内可导 $f(0)=3,\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

证明：在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：$\because$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[\dfrac{2}{3},1]$ 上连续

由积分中值定理，至少 $\exists\eta\in(\dfrac{2}{3},1)$，

使 $f(\eta)(1-\dfrac{2}{3})=\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$， $\therefore f(\eta)=3$ ------3 分

$\therefore f(0)=f(\eta)=3$

又 $\because$ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，

所以，由 Rolle 定理，至少 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$ ------7 分

线