郑州轻工业大学 2021—2022 学年 第 二 学期 高等数学 A2 试卷（A）

专业年级及班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《高等数学 A2》试卷（A 卷）评分标准

（机电、电气、计算机、软件、建环等学院各专业 21 年级适用）

一、单项选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列微分方程的阶数是二阶的是------------------------------（ D ）

(A) $xy'''+2y''+x^2y=0$; (B) $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$;

(C) $\dfrac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$; (D) $t^3\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{dt}{du}=0$.

2. 微分方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式可设为-------------------------（ A ）

(A) $x(ax+b)e^{2x}$; (B) $(ax+b)e^{2x}$;

(C) xe^{2x}; (D) $(ax^2+bx+c)e^{2x}$.

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则下列说法**不正确**的是--------（ D ）

(A) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

(B) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处极限存在;

(C) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数;

(D) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在连续的偏导数.

4. 交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=$----------------------------（ B ）

(A) $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$; (B) $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

(C) $\int_0^2 dx\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dy$; (D) $\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$.

5. L 为连接 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 两点的直线段，曲线积分 $\int_L (x+y)ds=$（ B ）

(A) $\sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{2}$; (C) 2; (D) 0.

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性为---------------------------------（ B ）

(A) 不确定; (B) 条件收敛;

(C) 绝对收敛; (D) 发散.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

答案：$\ln 2$

8. 已知 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，则 $d\,f(1,2,0)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

答案：$dx+\dfrac{1}{2}dy+\dfrac{1}{2}dz$.

9. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\sin x+2y-z=e^z$ 所确定， 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$＿＿＿＿＿.

答案：$\dfrac{\cos z}{1+e^z}$

10. 设区域 $\Omega: 0\le x\le2, 0\le y\le1, 0\le z\le1$， 则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv=$＿＿＿＿＿.

答案：3

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2+x^2}$ 的关于 x 的幂级数展开式为＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

答案：$\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}}$, $(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$ （注：不加展开的范围扣 1 分）

12. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi，\pi)$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ 则其傅里叶级数在点 $x=0$ 处收敛于____________.

答案： 0.

三、解答题（8 小题，共 49 分）

13.（本题 6 分） 已知一条曲线通过点 $(1,1)$, 并且它在点 (x,y) 处的切线斜率为 $-(1+\frac{y}{x})$，求此曲线方程.

解：

$$y'=-(1+\frac{y}{x})\Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=-1\Rightarrow y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int-\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}+C\right)\Rightarrow$$

$$y=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int-\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x+C\right)\Rightarrow y=\frac{1}{x}\left(\int-x\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2+C\right).\text{------4 分}$$

曲线过点 $(1,1)$，得 $C=\frac{3}{2}$，曲线方程为 $y=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}x$.----6 分

14. （本题 6 分） 求球面 $x^2+y^2+z^2-6x+2y+7=0$ 在点 $P(4,0,1)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6x+2y+7$，

法向量 $\vec{n}=(2x-6,2y+2,2z)|_{(4,0,1)}$=(2,2,2).------------------------------------2 分

切平面方程为 $2(x-4)+2(y-0)+2(z-1)=0$，即 $x+y+z=5$.

法线方程为 $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$，即 $x-4=y=z-1$.------------------------------6 分

15. （本题 6 分） 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

解：由 $u_x=y^2-yz, u_y=2xy-xz, u_z=3z^2-xy$，可求得

$$\mathrm{grad}\,u(1,1,1)=(0,1,2)\text{ .---------------------------------2 分}$$

沿梯度方向函数增加最快，沿梯度方向的方向导数取最大值，最大值为梯度的模，即为 $\sqrt{5}$.

沿梯度反方向函数减少最快，沿梯度反方向的方向导数取最小值，最小值为负的梯度的模，即为-$\sqrt{5}$.--6 分

16. （本题 5 分）设 D 为圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域，求二重积分 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$ 的值。

解：在极坐标中，闭区域 D 可以表示为

$$0\le\rho\le2, 0\le\theta\le2\pi\text{ ---1 分}$$

又有 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 则，原积分

$$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D e^{\rho}\cdot\rho d\rho d\theta\text{---3 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho e^{\rho}d\rho=2\pi\cdot(e^2+1)\text{ --5 分}$$

17. （本题 6 分） 计算曲面 $z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截出的面积.

解：所截曲面在 xOy 面上投影区域为 D: $x^2+y^2\le1$. ------------------------1 分

则曲面的面积

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy\text{-------------------------------------3 分}$$

$$=\iint\limits_D\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)\text{------------------6 分}$$

17. （本题 6 分） 利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，

其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域的正向边界曲线.

解：令 $P=2xy-x^2, Q=x+y^2$，---1 分

且封闭曲线 L 所围区域记为 D，

其中 $\frac{\partial P}{\partial y}=2x, \frac{\partial Q}{\partial x}=1$ ---2 分

由格林公式

$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ----------------------------------3 分

$=\iint_D (1-2x)dxdy=\int_0^1 (1-2x)dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$

$=\int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{30}$.---6 分

18. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^2-4x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=2$ 所围成的立体 Ω 的整个表面的外侧.

解法一: 令 $P=y^2, Q=z^2, R=3z^2-4x^2y^2$，设曲面所围立体为 Ω，-------1 分

则由 Gauss 公式可得（用柱坐标计算三重积分）

$\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^2-4x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iiint_\Omega zdv=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \mathrm{d}\rho\int_\rho^2 z\mathrm{d}z$ -------3 分

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 (4-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=24\pi$ --------6 分

解法二: 令 $P=y^2, Q=z^2, R=3z^2-4x^2y^2$，设曲面所围立体为 Ω，-------1 分

则由 Gauss 公式可得（先二后一法计算三重积分）

$\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^2-4x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iiint_\Omega zdv=6\int_0^2 \mathrm{d}z\iint_{D_Z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ -------3 分

$=6\int_0^2 \pi z^3\mathrm{d}z=24\pi$ -----------6 分

19. （本题 8 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域及其和函数.

解法一：令 $t=x-1$，则原幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$. ----------------------------1

先求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n+1}=1$,------------------------------------2 分

所以收敛区间为(-1, 1)

当 $t=-1$ 时，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛；-------------------------------------3 分

当 $t=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ 的收敛域 $[-1,1)$. ---------4 分

不妨设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ 在收敛域内的和函数为 $F(t)$，则

$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t t^{n-1}dt=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt$ ---------------------------------7 分

$=\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}t^n dx=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$.

由此得原幂级数的收敛域为[0, 2),和函数 $S(x)=-\ln(2-x)$.------------8 分

解法二：收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n+1}=1$,------------------------------------2 分

所以收敛区间为(0, 2)

当 $x=0$ 时，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛；---------------------------------------3 分

当 $x=2$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；---4 分

故幂级数的收敛域 $[0,2)$. ---------------5 分

不妨设幂级数在收敛域内的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^x(x-1)^{n-1}dx=\int_1^x\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1}dx$$ -------------------------8 分

$$=\int_1^x\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n dx=\int_1^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x).$$

四、证明题（本题 7 分）

20．证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内与路径无关，并计算积分值.

证明 1:令 $P=x^2-y$, $Q=-(x+\sin^2 y)$, --1 分

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 平面内处处成立，所以积分在整个 xOy 平面内与路径无关. ---3 分

由于积分与路径无关，所以积分路径可以选择先从(0,0)到(1,0),再从(1,0)到(1,1)的折线

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y=-\frac{7}{6}+\frac{\sin 2}{4}$$ -------7 分

证明 2：令 $P=x^2-y$, $Q=-(x+\sin^2 y)$, --------------------------------1 分

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 平面内处处成立，所以积分在整个 xOy 平面内与路径无关. -------------------------3 分

由于积分与路径无关，所以存在函数 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$ ---------------------4 分

根据微分法可求得 $u(x,y)=\frac{x^2}{3}-xy-\frac{y}{2}+\frac{\sin 2y}{4}$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}u=u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=-\frac{7}{6}+\frac{\sin 2}{4}.$$ -----------7 分

五、应用题（本题 8 分）

21. 某单位靠厂房的后墙修建一座容积为 256 m^3 形状为长方体的仓库，已知仓库地面每单位面积造价为 1 万元. 仓库的屋顶和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 2 倍和 1.5 倍，厂房后墙的长和高足够，因而这一面墙壁的造价不计. 问长、宽、高各为多少米能使仓库的造价最低?

解：这是条件极值的问题，欲在约束条件 $xyz=256$ 下求函数 $f(x,y)=3xy+3xz+1.5yz$ 的最小值. ---------------------------------------1 分

令 $L(x,y,z,\lambda)=3xy+3xz+1.5yz+\lambda(xyz-256)$, --------------------------------3 分

解方程组 $\begin{cases}L_x=3y+3z+\lambda yz=0\\ L_y=3x+1.5z+\lambda xz=0\\ L_z=3x+1.5y+\lambda xy=0\\ L_\lambda=xyz-256=0\end{cases}$ ---5 分

联立解得 $x=4,y=8,z=8$ ---7 分

由于点 $(x,y,z)=(4,8,8)$ 是该问题的唯一驻点，又问题本身显然存在最小值，故 $x=4,y=8,z=8$ 就是所求，即当仓库的长宽高分别为 4,8,8 时，仓库的造价最低，最低造价为 288 万元.--8 分.