郑州轻工业大学 2020/2021 学年 第 1 学期 线性代数与空间解析几何 试卷（A 卷答案）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

题号	一	二	三						四	总分
	1-6	7-12	13	14	15	16	17	18	19	
得分										

《线性代数与空间解析几何》试卷（A 卷标准答案）

适用专业：电气、食工、化工 2020 级、国教 19 级各专业

本试卷共 4 页，四大题 19 小题，总计 100 分

得 分	
评卷人	

一、选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，且行列式 $|\boldsymbol{A}|=8$，矩阵 $\boldsymbol{B}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$（ C ）

(A) -4； (B) 4； (C) -1； (D) 1.

2. 下列矩阵中不是正交矩阵的是（ B ）

(A) $\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

3. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=m$，则 （ A ）

(A) $A_{m\times n}x=b$ 一定有解； (B) $A_{m\times n}x=b$ 可能无解；

(C) $A_{m\times n}x=0$ 一定只有零解； (D) $A_{m\times n}x=0$ 一定有非零解.

4. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $-2,-\frac{1}{2},2$，则下列矩阵中可逆的是（ D ）

(A) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$； (B) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$； (C) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$； (D) $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$.

5. 方程 $x^2+4y^2-z^2=-9$ 表示的曲面为（ B ）

(A) 单叶双曲面； (B) 双叶双曲面； (C) 椭圆抛物面；(D) 双曲抛物面.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_1-x_3)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为(B)

(A) 2, 0 ； (B) 1, 1 ； (C) 2, 1 ； (D) 1, 2.

得 分	
评卷人	

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$，$A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 为 D 中第 4 行元素的代数余子式，

则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ ____0____ .

8. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=$ ____$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$____ .

9. 直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-5}{1}$ 与平面 $\pi: x+y-2z=3$ 的夹角为____$\frac{\pi}{6}$____.

10. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & x\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$ 可相似对角化，则 $x=$ ____3____.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,6,6)^T$，则由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间 $\boldsymbol{V}=\{x=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \mid k_1,k_2,k_3\in R\}$ 的维数 $\dim\boldsymbol{V}=$ ____2____.

12. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$、$\boldsymbol{\eta}_3$ 为它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(6,3,0,3)^T$，$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3=(1,0,2,1)^T$，则其通解为 $x=(2,1,0,1)^T+k(1,0,2,1)^T$，$k$ 为任意常数.

三、解答题（6 小题，共 58 分）

得　分	
评卷人	

13（本题 9 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\-1&-1&2&1\\2&5&2&4\\1&2&3&2\end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&0&1&4\\0&3&4&-2\\0&1&4&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&3&4&-2\\0&0&1&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&-8&1\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&1&4\\0&0&-8&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&1&4\\0&0&0&33\end{vmatrix}=33.$$

得　分	
评卷人	

14（本题 10 分）已知三点 $P_1(1,2,3), P_2(2,1,4), P_3(-1,0,2)$，

（1）求由 P_1, P_2 两点所确定的直线的方程；

（2）求由 P_1, P_2, P_3 三点所确定的平面方程.

解　由题可得 $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,1)$,　$\overrightarrow{P_1P_3}=(-2,-2,-1)$, 所以

（1）由 P_1, P_2 两点所确定的直线的方向向量可取为 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,1)$, 从而

由 P_1, P_2 两点所确定的直线的点向式方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

（2）由 P_1, P_2, P_3 三点所确定的平面的法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\-2&-2&-1\end{vmatrix}=(3,-1,-4),$$

从而由 P_1, P_2, P_3 三点确定的平面的程为 $3(x-1)-(y-2)-4(z-3)=0.$

得　分	
评卷人	

15（本题 9 分）　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解　作矩阵

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&2&3&1&0&0\\3&1&2&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\3&1&2&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&-2&-1&-3&4&0\\0&-1&-1&-2&2&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-1&0\\0&-1&0&-1&2&-1\\0&-1&-1&-2&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&-1\\0&-1&0&-1&2&-1\\0&0&-1&-1&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&1\\0&-1&0&-1&2&-1\\0&0&-1&-1&0&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&1\\0&1&0&1&-2&1\\0&0&1&1&0&-2\end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$.

得　分	
评卷人	

16（本题 10 分）求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

的秩和一个极大无关组，并把不属于极大无关组的向量用极大无关组线性表示出来.

解　作矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-1&2&2\\2&1&2&-3\\2&2&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&1&1\\0&1&0&-5\\0&2&-1&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&-4\\0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&-1&0&5\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-5\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，向量组的秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为其一个极大线性无关组，

且有 $\boldsymbol{\alpha}_4=5\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$.

得　分	
评卷人	

17（本题 10 分）求齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-4x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0\\5x_1-2x_2-x_4=0\end{cases}$$的基础解系与通解.

解　对方程组的系数矩阵作初等行变换，化为行最简形：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-4&2&1\\2&-5&3&2\\5&-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\5&-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&-7&5&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{3}{7}x_4\\x_2=\dfrac{5}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4\end{cases}$（$x_3,x_4$为自由未知量）.

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,代入可得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}$

于是可得导出组的基础解系为 $\xi_1=(\frac{2}{7},\frac{5}{7},1,0)^T$，$\xi_2=(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0,1)^T$，

从而可得原方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\,\xi_2$（其中 k_1,k_2 为任意常数）.

得　分	
评卷人	

18（**本题 10 分**）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_3$ 为标准形.

解　二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&3-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(3-\lambda)^2(1+\lambda)$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=-1.$

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，即 $\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&0&0\\2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，

解得基础解系为 $(0,1,0)^T,(1,0,1)^T$，标准正交化得 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,0)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

当 $\lambda_3=-1$ 时，方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，即 $\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，

解得基础解系为 $(1,0,-1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

取正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将原二次型化为标准形 $f=3y_1^2+3y_2^2-y_3^2$.

四、应用题（本题 6 分）

得　分	
评卷人	

19（本题 6 分）　一种佐料由三种原料 A、B、C 混合而成，这种佐料现有三种规格，这三种规格的佐料中，三种原料的比例分别为 1:2:2，1:2:1 和 2:1:1. 现在需要三种原料的比例为 6:9:8 的第四种规格的佐料. 问：第四种规格的佐料能否由前三种规格的佐料按一定比例配制而成？如果能，怎么配制？

解　记向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}6\\9\\8\end{pmatrix}$，则问题转化为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的问题. 为此作矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&2&6\\2&2&1&9\\2&1&1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&6\\0&0&-3&-3\\0&-1&-3&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&6\\0&1&3&4\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

因 $R(\tilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=3$，所以向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且

$\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，从而可得第四种规格的佐料能由前三种规格的佐料按 3:1:1 的比例配制而成.