

郑州轻工业学院

2011-2012 学年线性代数与空间解析几何试卷参

考答案及评分标准

试卷号: A20120104

本题得分

一、单项选择题(在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案,填在题中括号内)

(每小题 4 分, 共 20 分)

1、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*| =$ (D)

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) 4

2、设 A 、 B 均为 n 阶矩阵, 则下列结论中正确的是 (D)

(A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ (B) $(AB)^k = A^k B^k$

(C) $|kAB| = k|A||B|$ (D) $|(AB)^k| = |A|^k |B|^k$

3、设 A 为三阶矩阵, A 的特征值为 $-2, -\frac{1}{2}, 2$, 则下列矩阵中可逆的是 (B)

(A) $E + 2A$ (B) $3E + 2A$ (C) $2E + A$ (D) $A - 2E$

4、设 $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2txy + 2xz$ 为正定二次型, 则 t 的取值范围是 (C)

(A) $-2 < t < 2$ (B) $t < 2$ (C) $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ (D) $t > \sqrt{2}$

5、设直线 $l: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 与平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$ 的关系是 (C)

(A) $l \parallel \pi$ (B) l 在 π 内 (C) $l \perp \pi$ (D) 不是前面三种关系

原创力文档

max.book118.com

不是前面三种关系一致, 下载高清无水印

本题得分

二、填空题(将正确答案填在题中横线上)
(每小题 4 分, 共 20 分)

1、设向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$, 则向量

$\alpha = (-1, -1, 0)^T$ 可表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合: $-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

2、若方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3、设 4 元线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 $R(A) = 3$,

η_1, η_2, η_3 均为此方程组的解, 且 $\eta_1 + \eta_2 = (2, 0, 4, 6)^T$,

$\eta_1 + \eta_3 = (1, -2, 1, 2)^T$, 则方程组 $Ax = b$ 的通解为

$x = (1, 0, 2, 3)^T + k(1, 2, 3, 4)^T$

4、向量 $\alpha = (1, 2, 2, 3)^T$ 与 $\beta = (3, 1, 5, 1)^T$ 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

5、空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 在 xoy 面上投影曲线的方程为:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

三、解答下列各题(每小题 8 分, 共 32 分)

本题得分

1、计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 3 分

$$\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \underline{\underline{r_4 + r_1}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad 6 \text{ 分}$$

$$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ \underline{\underline{r_3 - 2r_1}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -25 \quad 8 \text{ 分}$$

本题得分

2、求矩阵 X , 使得 $A^{-1}XA = B$, 其中:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解 A 为正交矩阵, $A^{-1} = A^T$ 3 分

$$X = ABA^{-1} = ABA^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 8 \text{ 分}$$

本题得分

3、若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，而

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3. \text{ 试}$$

证： $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

证明： 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 2分

$$\text{得 } (k_1 + k_2 + k_3)\alpha_1 + (k_1 - k_2 - 2k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

$$\text{由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关得 } \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 - 2k_3 = 0, \text{ 它只有零解} \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。 \dots\dots\dots 8 分

本题得分

4、解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{解: } (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad 3$$

分

对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 6 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$, 其一个特解为 $\eta = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4

分

对应的齐次方程组为: $\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

对应的齐次方程组基础解系为: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 6 分

原方程组的通解为: $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$ 8 分

本题得分

四、(本 题 12 分)

已知三点坐标: $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$, 求:

- (1) 过 A, B, C 三点的平面方程;
- (2) 三角形 ABC 的面积;
- (3) 直线 BC 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程。

$$n = AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 2)$$

解: (1) 所求平面的法向量:

平面的点法式方程为: $(x-2) + 2y + 2z = 0$

即: $x + 2y + 2z - 2 = 0$

4 分

(2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB \times AC| = \frac{1}{2} \sqrt{(1)^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{3}{2}$ 8 分

(3) 直线 BC 方程为 $\begin{cases} y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, BC 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的

方程为 $\pm \sqrt{x^2 + y^2} + z = 1$ 即 $(1 - z)^2 = (x^2 + y^2)$ 12 分

本题得分

五、(本 题 12 分)

求一个正交变换将二次型:

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 13x_2^2 + 12x_1x_2$ 化为标准形。

解: 二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$, 2 分

解特征方程 $|A - \lambda E| = (1 - \lambda)(16 - \lambda) = 0$,

得特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 16$ 4 分

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(A - E)x = 0$, 得基础解系 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位

化, 得 $p_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ 7 分

当 $\lambda_2 = 16$ 时, 解方程组 $(A - 16E)x = 0$, 得基础解系 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

将其单位化得 $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, 10 分

取 $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ 则 P 为正交矩阵

于是正交变换 $X = PY$ 将二次型化为标准型: $f = y_1^2 + 16y_2^2$ 12 分

本题得分

六、(本 题 4 分)

如果多项式 $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ 对于

$n+1$ 个不同的 x 值都是零, 证明这个多项式 $f(x)$ 恒为零。

证明: 设对 $n+1$ 个不同的 x 值为 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$, 有 $f(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n+1$)

即:
$$\begin{cases} c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \cdots + c_nx_1^n = 0 \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_2^n = 0 \\ \cdots \\ c_0 + c_1x_{n+1} + c_2x_{n+1}^2 + \cdots + c_nx_{n+1}^n = 0 \end{cases}$$
 2 分

这是以 c_0, c_1, \cdots, c_n 为未知数的线性方程组, 其系数行列式为

$$n+1$$

阶范德蒙行列式 $D \neq 0$, 由克莱姆法则知 $c_i = 0$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

从而多项式 $f(x)$ 恒为零。

4 分