一、单项选择题(每题 3 分，共 15 分)

1. 设 $I(x)=\int_x^{x^2}\sin t\mathrm{d}t,$ 则 $I'(x)=$（ C ）

（A）$\cos x^2-\cos x$；（B）$2x\cos x^2-\cos x$；

（C）$2x\sin x^2-\sin x$；（D）$2x\sin x^2+\sin x$。

2. 设 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则必有（ A ）

（A）$I>0$；(B) $I<0$ ；(C) $I=0$ ；（D）$I\ (\neq 0)$ 的符号不能确定.

3. 微分方程 $y''-2y'=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解形式可设为（ C ）

（A）$(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$ ；（B）$x(ax+b)$；（C）$x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$；（D）$ax\mathrm{e}^{2x}$.

4. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 都存在是函数 $f(x,y)$ 在该点可微的（ B ）

(A) 充分条件；(B) 必要条件；

(C) 充分必要条件；(D) 既非充分也非必要条件.

5．下列级数中不收敛的是（ A ）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$；（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$；（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$；（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$.

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

6．设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，且 $\int_0^T f(x)dx=1,$ 则 $\int_1^{1+2016T}f(x)dx=$ <u>2016</u>.

7．积分曲线 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$ 中满足 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的曲线是 <u>$y=xe^{2x}$</u>.

8．函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 的全微分 dz <u>$\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$</u>.

9. $\int_L(x+y)\mathrm{d}s=$ <u>$\sqrt{2}$</u>，其中 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段.

10．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$的收敛区间为$\underline{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

三、计算题（每题 7 分，共 42 分）

11．求$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令$\sqrt{2x+1}=t$，则$x=\frac{1}{2}(t^2-1),dx=tdt,x:0\to 4,t:1\to 3$， ……2 分

$$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot tdt=\int_1^3(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2})dt$$

$$=[\frac{t^3}{6}]_1^2+3=\frac{13}{3}+3=\frac{22}{3}。$$ ……7 分

12．求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

解：分离变量得 $\frac{dy}{y}=2xdx$， ……2 分

两边积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$，得$\ln|y|=x^2+\ln|C|=\ln e^{x^2}+\ln|C|$， ……5 分

故得通解为 $y=Ce^{x^2},C\in R$（$C=0$时$y=0$也是微分方程的解）。 ……7 分

13．设$w=f(x+y+z,xyz),f$具有二阶连续的偏导数，求$\frac{\partial w}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解：$\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$， ……2 分

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=(f_{11}''+xyf_{12}'')+yf_2'+yz(f_{21}''+xyf_{22}'')$$

$$=f_{11}''+(x+z)yf_{12}''+yf_2'+xy^2zf_{22}''$$ ……7 分

14．求函数$z=x\cdot\mathrm{e}^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向的方向导数.

解：$z_x=\mathrm{e}^{2y},z_y=2xe^{2y}$, 在点$P(1,0)$处，$z_x(1,0)=1,z_y(1,0)=2$。 ……3 分

方向l即向量$\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$，其单位向量$\vec{l}\ =\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$，所以方向导数为 ……6 分

$\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,0)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。 ……7 分

15．判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

解法一：$0<\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}$ ……3 分

因等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$收敛，由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛。 ……7 分

解法二：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2^{n-1}}+(-\frac{1}{2})^n]$ ……3 分

因等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$和$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$ 均收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛。 ……7 分

解法三：根值审敛法$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\frac{1}{2}<1$， ……4 分

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛。 ……7 分

16 求曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$在点$(1,1,1)$处的切线方程.

解：点$(1,1,1)\leftrightarrow t=1$，切向量$\vec{T}=(1,2t,3t^2)$，即$\vec{T}|_{t=1}=(1,2,3)$，故 ……4 分

切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$. ……7 分.

四、解答题（每题 8 分，共 16 分）

17. 计算三重积分$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的闭区域.

解法一：先二后一，平行于 z 轴平面截 Ω，得平面域$D_z=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le z,0\le z\le 4\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^4 zdz\iint\limits_{D_z}1dxdy$$ ……4 分

$$=\int_0^4 \pi z^2 dz=\frac{\pi}{3}z^3\Big|_0^4=\frac{64}{3}\pi \text{。}$$ ……8 分

解法一：柱面坐标 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{x^2+y^2}^4 zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz$$ ……4 分

$$=2\pi\int_0^2\frac{1}{2}\rho(16-\rho^4)d\rho=\pi[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6]_0^2=\frac{64}{3}\pi$$ ….8 分

18. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

解：$P=z^2+x, Q=0, R=-z$，补上曲面 $\Sigma_1: z=2\ (x^2+y^2\le 4)$，取上侧，利用高数公式，有 ……2 分

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ……6 分

$$=\iiint\limits_{\Omega}0dv-\iint\limits_{\Sigma_1}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi 2^2=8\pi \text{。}$$ ……8 分

五、应用题（本题满分 8 分）

19. 设曲线 $y=\mathrm{e}^x$，

①在此曲线上求一点 A，使曲线在该点的切线通过坐标原点 O；②求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$，切线 OA 及 y 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

解：① 设切点(x_0, y_0)，则$k = y'(x_0, y_0) = e^{x_0}$，

切线方程为$y - y_0 = e^{x_0}(x - x_0)$，切线过原点，故得$x_0 = 1, y_0 = e$，

所求切线方程为 $y = ex$。 ……4 分

$$②V_x = \pi\int_0^1 (e^x)^2 dx - \frac{1}{3}\pi e^2 \cdot 1$$

$$= \frac{\pi}{2}[e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{3}\pi e^2 = \frac{\pi}{6}e^2 - \frac{\pi}{2}。$$ ……8 分

六、证明题（本题满分 5 分）

注：以下两题任选一题，多做无效。

20（1）．证明：$\int_0^a dy\int_y^a f(x)g'(y)dx = \int_0^a f(x)[g(x) - g(0)]dx$.

20（2）．设函数 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$，证明 $f(x+\pi) = f(x)$.

证明:（1）交换积分次序

$$\int_0^a dy\int_y^a f(x)g'(y)dx = \int_0^a dx\int_0^x f(x)g'(y)dy$$ ……2 分

$$= \int_0^a f(x)[g(y)]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^a f(x)[g(x) - g(0)]dx。$$ ……5 分

（2） $f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$，

令$t = u + \pi$，则$t = du, t: x+\pi \to x+\pi+\frac{\pi}{2}, u = x \to x+\frac{\pi}{2}$， ……2 分

$$f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(u+\pi)| du$$

$$= \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = f(x)。$$ ……5 分