

逻辑函数化简



- 化简的目的：使逻辑函数表达式简单（逻辑图简单）以达到所用元件也少，提高可靠性的目的。
 - 逻辑函数表达式不是唯一的。



逻辑函数化简

$$F = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$= \overline{\overline{A} \cdot B} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

$$= \overline{(A + \overline{B})} \cdot \overline{(A + B)}$$

$$= \overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}}$$

$$= \overline{(A + \overline{B})} + \overline{(A + B)}$$

$$= \overline{\overline{A} \cdot B} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

$$= (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

$$= \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B}$$

与或表达式

与非-与非表达式

或-与非表达式

与-或-非表达式

或非-或表达式

与非-与表达式

或-与表达式

或非-或非表达式



➤(1)逻辑函数的代数（公式）化简法

➤公式化简法：使用基本公式和常用公式，以求得函数的最简式。

010100

01010101

10010101

00101010

01010010

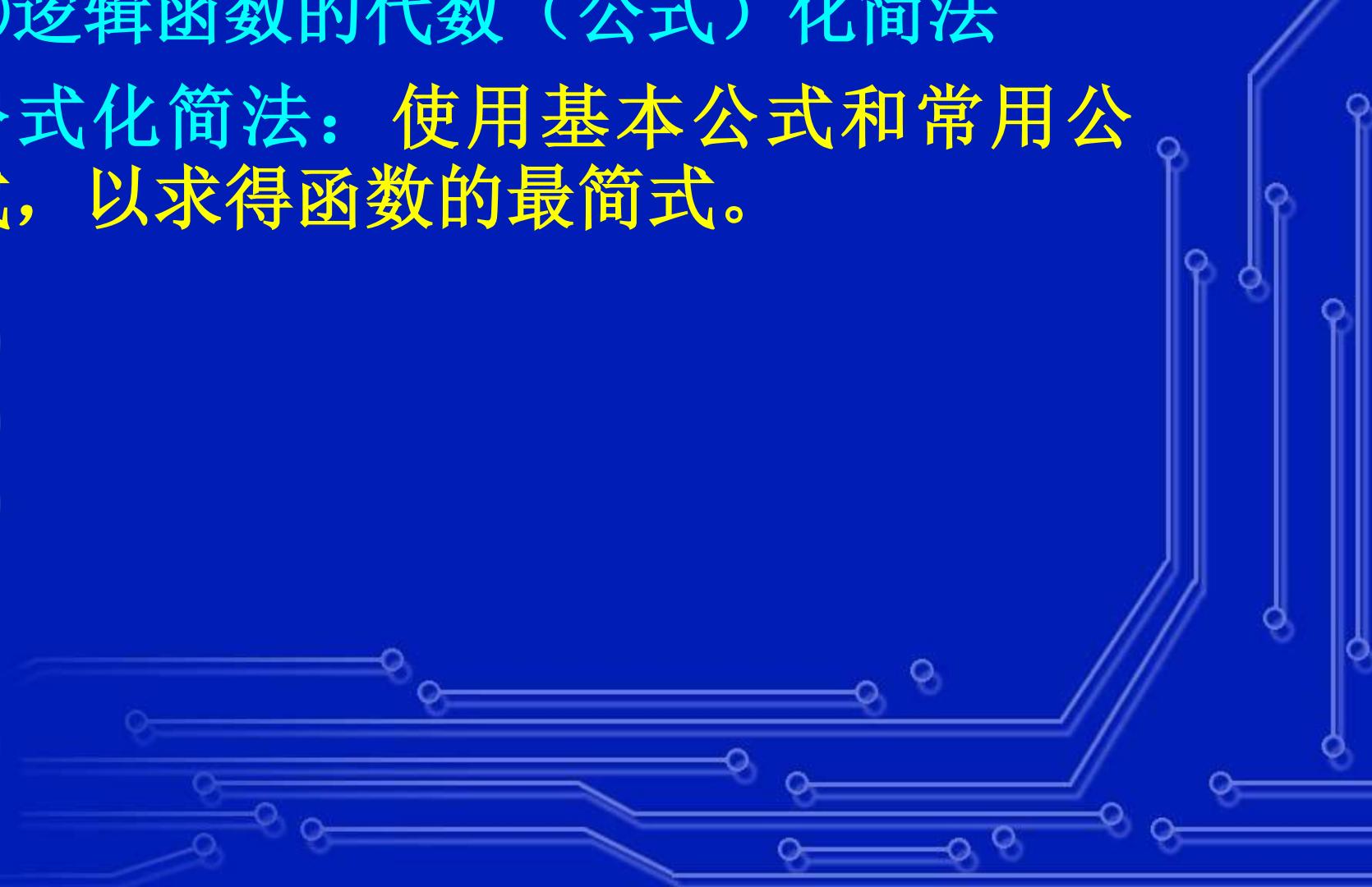
10010010

10010101

00101001

01010010

01010010





➤①吸收法：根据公式 $A+AB=A$ 可将 AB 项消去。

➤例：化简 $F = A + \overline{\overline{A} \cdot BC} \cdot (\overline{A} + \overline{\overline{BC}} + D) + BC$

➤解：将 $A+BC$ 看成一项

$$\begin{aligned} F &= A + \overline{\overline{A} \cdot BC} \cdot (\overline{A} + \overline{\overline{BC}} + D) + BC \\ &= A + (A + BC)(\overline{A} + \overline{\overline{BC}} + D) + BC \\ &= (A + BC) + (A + BC)(\overline{A} + \overline{\overline{BC}} + D) \\ &= A + BC \end{aligned}$$



➤②消去法:

➤利用公式 $A + \overline{A}B = A + B$ 。

➤例:

$$\begin{aligned}F_1 &= \overline{A} + AB + \overline{B}E \\&= \overline{A} + \underline{B + \overline{B}E} = \overline{A} + B + E\end{aligned}$$

$$F_2 = A\overline{B} + \overline{A}B + ABCD + \overline{A}\overline{B}CD$$

$$\begin{aligned}&= A\overline{B} + \overline{A}B + (\underline{AB + \overline{A}\overline{B}})CD \\&= A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{AB} + \overline{ABC}D\end{aligned}$$

$$= A\overline{B} + \overline{A}B + CD$$



➤ ③合并项法

➤ 利用公式 $A + \bar{A} = 1$ 消去一个变量。

➤ 例：

$$\begin{aligned}F_1 &= A B C + \bar{A} B C + \bar{B} C \\&= (A + \bar{A}) B C + \bar{B} C \\&= B C + \bar{B} C = 1\end{aligned}$$



➤ ③合并项法

➤例：

$$\begin{aligned} F_2 &= A(BC + \overline{B}\overline{C}) + A(\overline{B}\overline{C} + \overline{B}C) \\ &= AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C \\ &= AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}(\overline{C} + C) \\ &= AB + A\overline{B} = A \end{aligned}$$



逻辑函数化简

➤ (2) 逻辑函数的卡诺图化简法

➤ 用卡诺图化简逻辑函数是一种简便的方法。

➤ 逻辑函数的卡诺图：将函数最小项表达式的

各个最小项相应填入一个特定的方格图内，

此方格图称为卡诺图。



5.逻辑函数化简

①最小项及最小项表达式

➤ **最小项**：在有 n 个逻辑变量的逻辑函数中，含有 n 个变量的乘积项称为最小项。

特点：

n 个变量对应 2^n 个最小项；

在最小项中，每个变量只出现一次，不是以原变量形式出现，就是以反变量的形式出现。



5.逻辑函数化简

➤ 最小项编号

最小项中原变量用1表示，反变量用0表示，变量取值组合就是二进制数，而其对应的十进制数的值，就是该最小项的编号。

➤ 下表为三变量的最小项及其编号。



5.逻辑函数化简

三个变量的最小项及其编号

序号	A	B	C	最小项	最小项 编号
0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0
1	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	ABC	m_7



➤ 最小项表达式

➤ 任何逻辑函数都可以表示成为最小项之和的形式—标准与或式。

➤ 一个逻辑函数只有一个最小项之和的表达式。



➤例：写出 $F=AB+BC+AC$ 的最小项表达式

➤解：

$$F = AB + BC + AC$$

$$= AB(C + \bar{C}) + BC(A + \bar{A}) + AC(B + \bar{B})$$

$$= ABC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$$

$$= ABC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$$

$$= m_7 + m_6 + m_5 + m_3$$

$$= \sum_m (7,6,5,3)$$



➤② 卡诺图的画法

画正方形或矩形，图形中分割出 2^n 个小方格， n 为变量的个数，每个最小项对应一个小方格。

➤变量取值按循环码排列，其特点是相邻两个编码只有一位状态不同。

➤卡诺图形象地表达了各个最小项之间在逻辑上的相邻性。



三变量卡诺图

	BC				
A	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$	
\bar{A}	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$	
A	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$	
	00	01	11	10	

每格标最小项

	BC				
A	00	01	11	10	
0	000	001	011	010	
1	100	101	111	110	
	00	01	11	10	

每格标变量取值

	BC				
A	00	01	11	10	
0	m_0	m_1	m_3	m_2	
1	m_4	m_5	m_7	m_6	
	00	01	11	10	

每格标最小项编号

	BC				
A	00	01	11	10	
0	0	1	3	2	
1	4	5	7	6	
	00	01	11	10	

每格标最小项编号的简写



➤四变量卡诺图

		CD	AB	00	01	11	10
		00	m_0	m_1	m_3	m_2	
		01	m_4	m_5	m_7	m_6	
		11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	
		10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	

每格标最小项编号



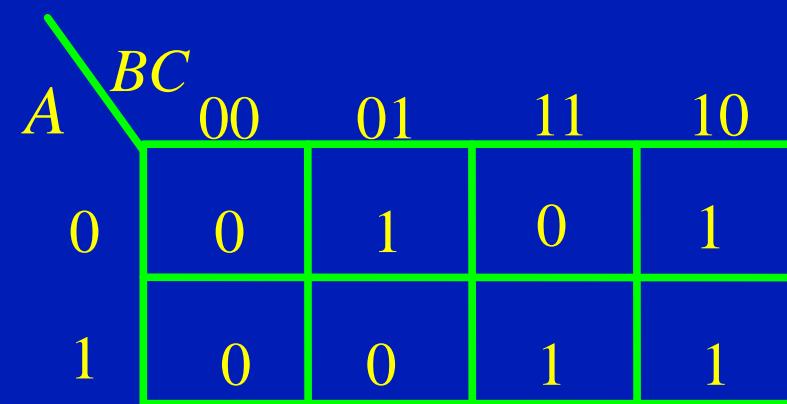
➤ ③用卡诺图来表示逻辑函数

- 如果逻辑函数是最小项表达式，则在相同变量的卡诺图中，与每个最小项相对应的小方格内填1，其余填0。
- 若逻辑函数是一般式，则先把一般式变为最小项表达式，再填卡诺图，熟练后可以直接按逻辑函数一般式填卡诺图。
- 如果已知逻辑函数真值表，则在相同变量卡诺图的对应小方格内填1或填0，就得到逻辑函数的卡诺图。



➤ 例：

$$\begin{aligned}F &= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} \\&= m_7 + m_6 + m_1 + m_2 = \sum (1,2,6,7)\end{aligned}$$



		BC	00	01	11	10
		0	0	1	0	1
		1	0	0	1	1



➤ 例: $F = \overline{(\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{CA}}$

$$F = \overline{(\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{CA}}$$

$$= \overline{\overline{A} + \overline{B}} + \overline{\overline{B} + \overline{C}} + \overline{\overline{CA}}$$

$$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

$$= AB + BC + CA$$

		BC	00	01	11	10
		A	0	0	1	0
			0	0	1	1

AC AB

BC



④用卡诺图化简逻辑函数

➤利用卡诺图进行化简，直观方便，且容易确定是否已得到最简结果。

➤化简步骤：

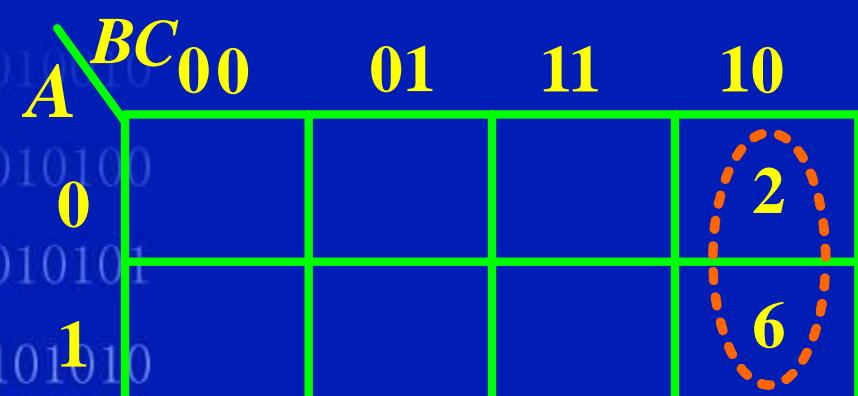
➤(a)画出函数的卡诺图

➤(b)画包围圈，合并最小项

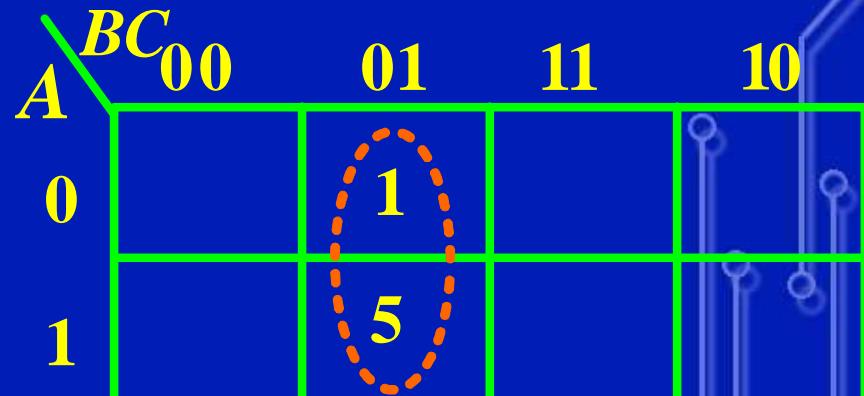
➤在卡诺图中，凡是相邻的最小项均可合并，合并时，可消去有关变量。



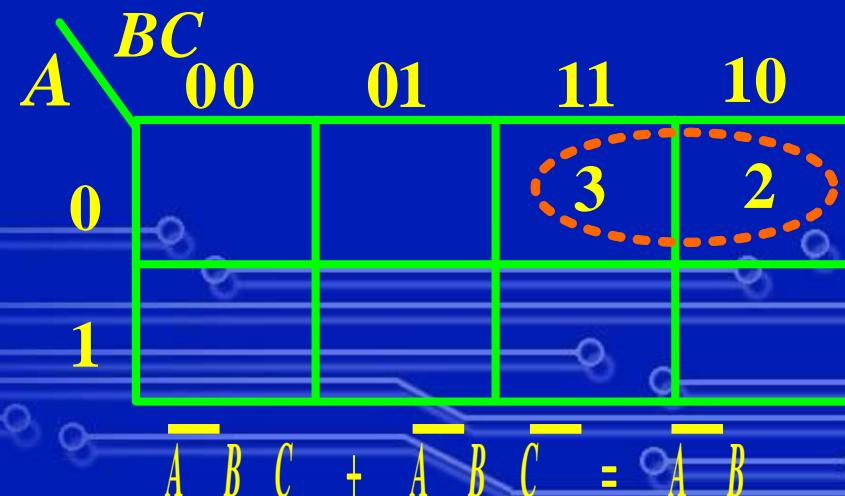
► 两个相邻最小项的合并



$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} = \overline{B} \overline{C}$$



$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} = \overline{B} \overline{C}$$



$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} = A \overline{B}$$



➤ 两个相邻最小项的合并

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00	00	0	1	3	2	
		4	5	7	6	
01	01	12	13	15	14	
		8	9	11	10	

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} C D = A \overline{B} D$$

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00	00	0	1	3	2	
		4	5	7	6	
01	01	12	13	15	14	
		8	9	11	10	

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} C D = A \overline{C} D$$



$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} = \overline{B} \overline{C} \overline{D}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} = \overline{A} \overline{B} \overline{D}$$



➤ 四相邻最小项的合并

C	0	0	1	11	10
A	0	0	1	3	2
B	0	1	1	7	6
01010010	4	5			
10010010					

$$1001 \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + A B \overline{C} + A B C = L$$

A	B	C	00	01	11	10
0	0	0	0	1	3	2
1	1	1	4	5	7	6

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + A \overline{B} \overline{C} + A \overline{B} C = \overline{B} \overline{C}$$

A	B	$C = 00$	$C = 01$	$C = 11$	$C = 10$
0	0	1	3	2	
1	4	5	7	6	

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} =$$



► 四相邻最小项的合并

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00	00	0	1	3	2	
		4	5	7	6	
01	01	12	13	15	14	
		8	9	11	10	

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00	00	0	1	3	2	
		4	5	7	6	
01	01	12	13	15	14	
		8	9	11	10	

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} C \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B C D = \overline{A} \overline{B} + \overline{A} B \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B C \overline{D} + A B \overline{C} \overline{D} + A B C \overline{D} = B \overline{D}$$



► 四相邻最小项的合并

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
00	00	4	5	7	6
01	01	12	13	15	14
11	11	8	9	11	10

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
01	01	4	5	7	6
11	11	12	13	15	14
10	10	8	9	11	10

$$A \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} C \overline{D} + A B \overline{C} \overline{D} + A B C \overline{D} = A D$$

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} C \overline{D} + A \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} C \overline{D} = \overline{B} D$$



► 八相邻最小项的合并

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

B

	CD	00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

\bar{B}



► 八相邻最小项的合并

		CD		00	01	11	10
		AB		0	1	3	2
00		00					
01	00	01		4	5	7	6
	01	11		12	13	15	14
11	00	10		8	9	11	10
	01	11					

\bar{C}

		CD		00	01	11	10
		AB		0	1	3	2
00		00					
01	00	01		4	5	7	6
	01	11		12	13	15	14
11	00	10		8	9	11	10
	01	11					

D



逻辑函数化简

➤ 化简时应注意：

➤ (1) 圈中1的个数必须是 2^n 个相邻的1。

(2) 圈越大越好(消去的变量多)。

010,010
01010100
10010101
00101010
01010010
10010010
10010101
00101001
01010010



➤例：化简函数 $F = \overline{B} \overline{C} D + B \overline{C} + \overline{A} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} \overline{C}$

➤解：①画出函数的卡诺图

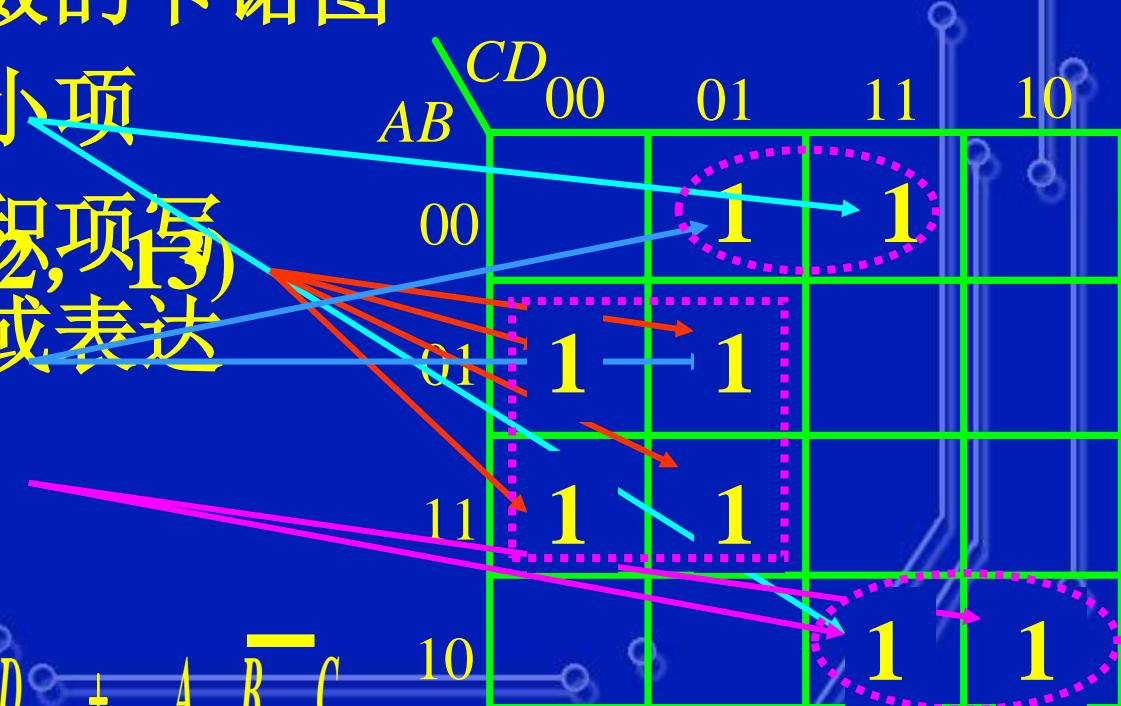
$\overline{B}CD$ ② 合并最小项

$B\bar{C} = \sum(4, 5)$ ③ 选择乘积项

$\overline{A}\overline{C}D = \sum(1, 5)$ 得出最简与或表达式

$A\overline{B}C = \sum(3, 11)$

$$F = B \overline{C} + \overline{A} \overline{B} D + A \overline{B} \overline{C}$$





►例：化简函数

$$F = \sum(1, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15)$$

►解：

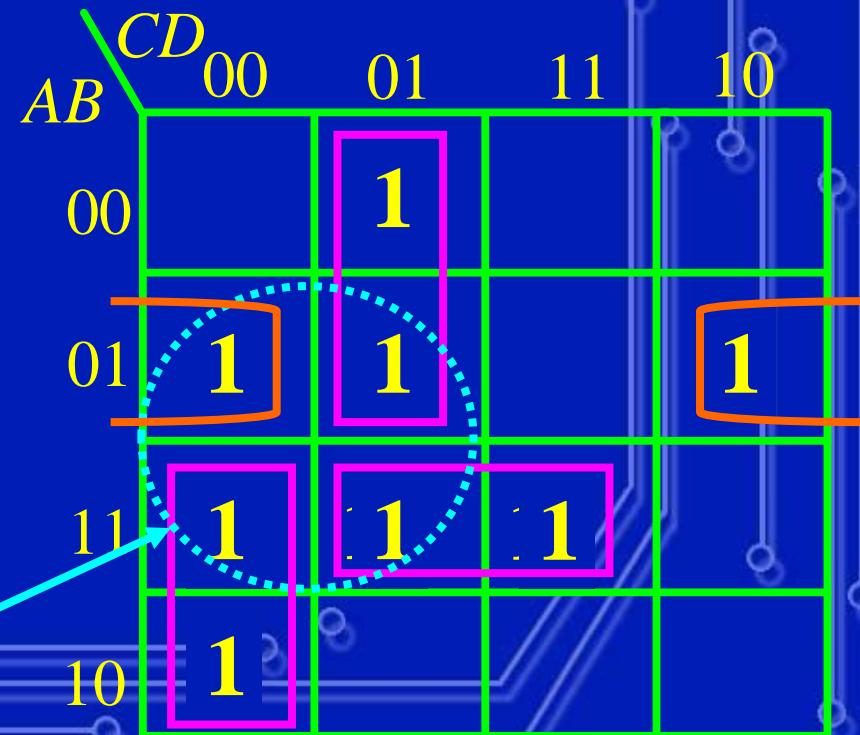
①画出 F 的卡诺图

②合并最小项

③写出最简与或表达式

冗余
舍去

$$F = \overline{A} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{D} + A \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} D$$





(3)具有无关项的逻辑函数化简

➤ 约束项、任意项和无关项

➤ 在分析某些具体的逻辑函数时，常遇到输入变量的取值不可能出现，这些受约束的变量取值组合所对应的最小项叫约束项。



➤例如用三个逻辑变量 A 、 B 、 C 分别表示一台电动机的正转、反转和停止命令。

$A=1$ 表示正转， $B=1$ 表示反转， $C=1$ 表示停止。

➤电动机执行一个命令时， ABC 的取值只能是001，010，100中的一种，不能是000，011，110，101，111中的任一种。因此 A 、 B 、 C 是一组具有约束的变量。



- 还有一些输入变量取值不影响输出函数。这些与输出逻辑函数无关的最小项称作任意项。
- 在不严格区分时，约束项和任意项统称为无关项。
- 无关项在卡诺图中填入“×”表示。



➤例：化简逻辑函数

➤ $F(A,B,C,D) = \sum_m(0,1,2,3,6,8) + \sum_d(10,11,12,13,14,15)$ 。

$$F = \overline{A} \overline{B} + C \overline{D} + A \overline{D}$$

	CD	00	01	11	10
AB	1	1	1	1	
00	1	0	0	0	1
01		X	X	X	X
11		X	X	X	X
10	1	0	X	X	X

约束项化简例题



➤例：化简逻辑函数

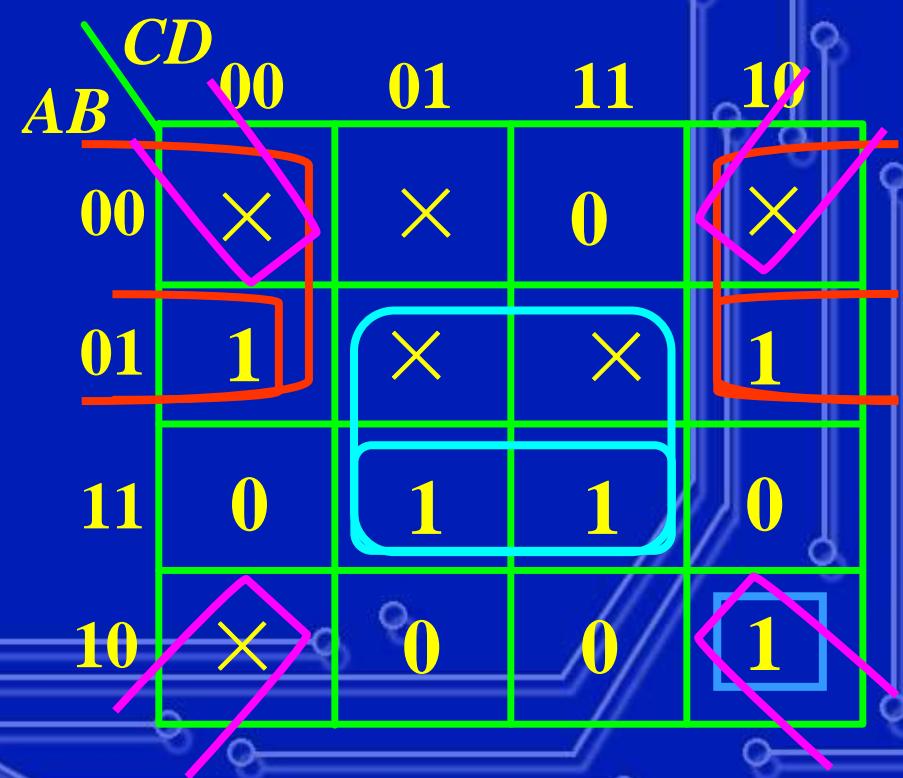
$$F(A,B,C,D) = \sum_m(15,13,10,6,4) + \sum_d(8,7,5,2,1,0)$$

➤不考虑无关项

$$F = \overline{A} \overline{B} \overline{D} + A \overline{B} D + A \overline{B} \overline{C} \overline{D}$$

➤考虑无关项

$$F = \overline{A} \overline{B} + B \overline{D} + \overline{B} \overline{D}$$





►例2：化简函数

$$F = \sum(1, 3, 5, 9) + \sum_d(7, 11, 13)$$

►解：①画出 F 的卡诺图

②合并最小项

③写出最简与或表达式

$$F = \overline{AD} + \overline{CD}$$

$$= \overline{\overline{AD} + \overline{CD}}$$

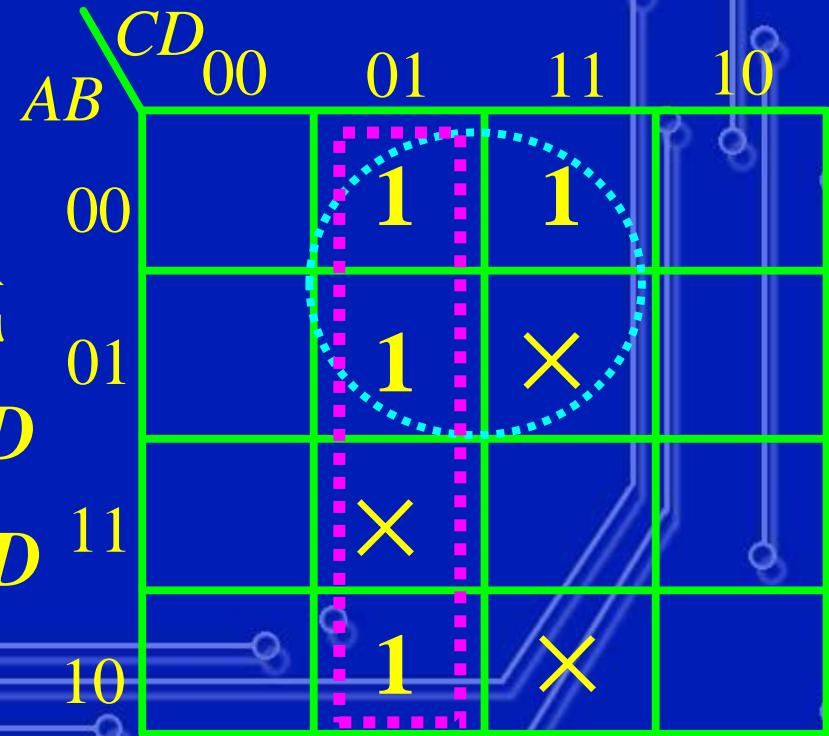
$$= \overline{\overline{AD}} \cdot \overline{\overline{CD}}$$

$$F = \overline{AD} + \overline{CD}$$

$$= (\overline{A} + \overline{C})D$$

$$= \overline{\overline{A} + \overline{C}}D$$

$$= AC \cdot D$$





►例2：化简函数

$$F = \sum_m(1, 3, 5, 9) + \sum_d(7, 11, 13).$$

►解：①画出 F 的卡诺图

②合并最小项

③写出最简与或表达式

$$\begin{aligned} F &= \overline{AD} + \overline{BD} \\ &= \overline{\overline{\overline{AD}} + \overline{BD}} \\ &= \overline{\overline{AD} \cdot \overline{BD}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \overline{AD} + \overline{BD} \\ &= (\overline{A} + \overline{B})D \\ &= \overline{AB} \cdot D \end{aligned}$$

