郑州轻工业学院 2016/2017 学年 第 1 学期 线性代数与空间解析几何

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装　　订　　线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

题号	一	二	三					四	五		六	总分
	1−6	7−11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
得分												

《线性代数与空间解析几何》期末考试试卷 A

适用专业：2016 级全校理、工科本科各专业

本试卷共 3 页，七大题 24 小题，总计 100 分

得　分	
评卷人	

一、填空题（共 9 小题，第 1 小题每空 1 分，其余每空 2 分，共 21 分）

1. 矩阵的初等行变换包括：① <u>互换两行</u>，② <u>某行乘以非零数</u>，③ <u>某行乘以非零数加到另一行对应元素上</u>.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&5\end{pmatrix}$, $E(1,3)$表示第一种 3 阶初等矩阵，则

$AE(1,3)=$ $\underline{\begin{pmatrix}2&-1&1\\5&0&3\end{pmatrix}}$.

3. 设向量（1，-3，5）与向量（−2，6，a）线性相关，则 $a=$<u>−10</u>.

4. 方程 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}-z^2=1$ 表示的图形为<u>单叶双曲面</u>，

方程 $2x^2+3y^2-z^2=0$ 表示的图形为<u>锥面</u>.

5. 过点 M(4,-1,3) 且平行于直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$ 的直线方程为

$\underline{\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-}{5}}$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3)$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,2,1)$, 则 $Prj_{\beta}\boldsymbol{\alpha}=\underline{\sqrt{6}/2}$.

7. 设三阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，3，若 $B=A^2-2A+4E$，求 B 的特征值为<u>3，7，7</u>.

8. 已知二次型 $f(x,y,z)=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$，则二次型对应的矩阵 $A=\underline{\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}}$.

9. 向量空间 V=$\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)^T\mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in R\}$ 的维数为<u>n−1</u>.

得　分	
评卷人	

二、单项选择题（6 小题，每小题 2 分，共 12 分）

10. 下列矩阵是行阶梯形矩阵的是（ B ）

（A）$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&-3&-1\\0&0&6&4\end{pmatrix}$，　（B）$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

（C）$\begin{pmatrix}-1&3&0&2\\0&2&-3&-1\\0&3&2&0\end{pmatrix}$，　（D）$\begin{pmatrix}0&3&-2&5\\0&0&-3&0\\0&6&0&0\end{pmatrix}$，

11. 矩阵转置也是一种运算，下列不是转置运算律的为（ D ）

(A) $(A^T)^T=A$；　(B) $(A+B)^T=A^T+B^T$；

(C) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$；　(D) $(AB)^T=A^TB^T$.

12. 已知 A、B 是同阶方阵，下列运算正确的是（ C ）

(A) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$；　**(B)** $|A+B|=|A|+|B|$；

(C) $|AB|=|B||A|$；　(D) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

13. 设矩阵 A 的秩为 r，则下列结论正确的是（ C ）

(A) 所有 $r-1$ 阶子式都不为 0 ； (B) 所有 $r-1$ 阶子式全为 0 ；

(C) 至少有一个 r 阶子式不等于 0 ； (D) 所有 r 阶子式都不为 0 .

14. 设矩阵 A 与 B 相似且可逆，则下列结论不正确的是（ C ）

(A) A^{-1} 与 B^{-1} 相似 ； (B) $|A| = |B|$ ；

(C) $A-\lambda E = B-\lambda E$ ； (D) $A^T = B^T$.

15. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的，

则 t 的取值范围为 -------------（ B ）

(A) $-2<t<2$； (B) $-2<t<1$；

(C) $-2<t<0$； (D) t 为任意实数.

三、解答题（5 小题，共 34 分）

得 分	
评卷人	

16.（**本题 6 分**）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}$，求 AB^T.

解 $AB^T=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\3&4\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\18&10\\3&10\end{pmatrix}$. ………..............(6 分)

得 分	
评卷人	

17.（**本题 6 分**）计算行列式 $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{i_3-2i_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\-3&0&-5&0\\5&0&6&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&6&2\\-3&-5&0\\5&6&2\end{vmatrix}=0$ ………………(6 分)

得 分	
评卷人	

18.（**本题 8 分**）求过三点 $P_1(1, 0, -1)$，$P_2(2, -1, 1)$, $P_3(0, 1, -2)$ 的平面方程.

解 $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{P_1P_3}=(-1,1,-1)$ ………..............(2 分)

两向量对应坐标不成比例，所以不平行。所求平面的法向量垂直于这两个向量，于是取两向量的向量积作为平面的法向量：

$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{vmatrix}=(-1,-1,0)$，………..............(5 分)

P_1, P_2, P_3 中任一点可为已知点，若取 P_1，由点法式得

$-1(x-1)-(y+1)+0(z-2)=0$，

即 $x+y=0$ 为所求平面方程。 ………..............(8 分)

得 分	
评卷人	

19.（**本题 6 分**）设 R^3 中两个基向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$，和 $\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,-1)^T$，$\beta_3=(2,-1,1)^T$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

解 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 且 C 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，即 $B=CA$. ……………………………………………………(2 分)

由

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&-1&1&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&2&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$

从而得过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$. …………………………(6 分)

得　分	
评卷人	

20.（**本题 8 分**）

求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0,\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0,\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0.\end{cases}$的通解.

解 对系数矩阵A作初等行变换，变为行最简型矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2/7&-3/7\\0&1&-5/7&-4/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$**……………………(3 分)**

便得
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{3}{7}x_4,\\x_2=\dfrac{5}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4.\end{cases}$$

R（A）=2，基础解系含有 2 个线性无关的解向量.

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/7\\5/7\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}3/7\\4/7\end{pmatrix}$.

即得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}2/7\\5/7\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}3/7\\4/7\\0\\1\end{pmatrix}$………………………………………………..(7 分)

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2/7\\5/7\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3/7\\4/7\\0\\1\end{pmatrix},(c_1,c_2\in R)$$…………………………………….(8 分)

四、讨论题 （本题 8 分）

得　分	
评卷人	

21．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$，讨论$A$是否可逆．若可逆，求出$A$逆矩阵.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-2&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=12\neq0$$则A可逆。…………………………………………………(2 分)

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&0&0\\3&-2&1&0&1&0\\1&-1&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&-8&4&-3&1&0\\0&-3&0&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&1&4&0&1&-3\\0&-3&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_3+3r_3}\begin{pmatrix}1&0&-9&1&-2&6\\0&1&4&0&1&-3\\0&0&12&-1&3&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{12}}\begin{pmatrix}1&0&-9&1&-2&6\\0&1&4&0&1&-3\\0&0&1&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-4r_2]{r_q+9r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ ……………………………(6 分)

$$\therefore \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ ……………………………(8 分)

五、综合题（2 小题，共 20 分）

得　分	
评卷人	

22. （本题 10 分）

给定向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$.

试判断 α_4 是否为 α_1，α_2，α_3 的线性组合；若是，则求出组合系数.

解　令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\tilde{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\alpha_4)$ ，对 $\tilde{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形，若 $R(\tilde{A})=R(A)$，则 α_4 是 α_1，α_2，α_3 的线性组合；若 $R(\tilde{A})\neq R(A)$，则 α_4 不是 α_1，α_2，α_3 的线性组合。　……………………………（3 分）

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&-5&3&-2\\1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$ ……………………………………………………..(8 分)

因 $R(\tilde{A})=R(A)=3$，所以 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

组合系数为 2，1，1 。　………………………………..（10 分）

得　分	
评卷人	

23. **（本题 10 分）**求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\-2&0&-1\\-6&-3&-2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\-2&-\lambda&-1\\-6&-3&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$。…………………………………………………..(3 分)

当 $\lambda_1=-1$ 时，方程组 $\begin{pmatrix}4&1&1\\-2&1&-1\\-6&-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的基础解系为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$. (6 分)

A的属于特征值 $\lambda=-1$ 的所有特征向量为 $\mathrm{k}p_1$ ($\mathrm{k}\neq0$为任意常数). ……………..(7分)

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，方程组$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的基础解系为

$p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ……………………………………..(9 分)

则 A 的属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的所有特征向量为$k_1p_2+k_2p_3$(k_1,k_2不同时为零)。

……………………………………..(10 分)

得　分	
评卷人	

六、 证明题（本题 5 分）

24. 设A, B都是n阶方阵，且$AB=0$，证明 $R(A)+R(B)\le n$.

证明 设$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, $\beta_i\,(i=1,2,\cdots,n)$为 B 的第 i 个列向量，则

$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=0$。………………………………………(2 分)

于是有 $A\beta_i=0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$, β_i为方程$Ax=0$的解 。

由于 B 的列向量组的秩 $R(B)\le n-R(A)$（ Ax=0 解空间的维数），

即 $R(A)+R(B)\le n$。（5 分）