郑州轻工业大学 2022/2023 学年 第 2 学期 线性代数与空间解析几何 试卷（A 卷）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《线性代数与空间解析几何》试卷（A 卷答案、评分标准 ）

（适用专业：全校 2022 级各专业 ）

（本试卷共 2 页，5 道大题，20 个小题，满分 100 分）

一、选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 排列 635412 的反序数为--------------------------------------（ A）

(A)12；　(B)13；　(C) 11；　(D) 10.

2. 直线 $l:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ 与平面 $\pi:x-2y+z-4=0$ 的位置关系为(B)

(A) $l//\pi$；　(B) l 在 π 内；　(C) $l\perp\pi$；　(D)不是前面三种关系.

3. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，则-------(C)

(A) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解；　(B) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可能有无穷多解；

(C) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=0$ 只有零解　(D) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=0$ 有非零解.

4. 已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；(II) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；(III) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$.如果各向量组的秩分别为 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})=3, R(\mathrm{III})=4$.则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为---(B)

(A)3；　(B)4 ；　(C) 5；　(D) 无法确定

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&y&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 x,y 分别为----(B)

(A) 0,0；　(B) 0,1；　(C) 1,0；　(D) 1,1.

6. 设二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围为---（ A）

(A) $0<t<3$；　(B) $-3<t<0$；　(C) $t<-3$ 或 $t>3$；　(D) $-3<t<3$.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知 4 阶行列式 D 的第 2 行元素分别为 $1,3,-2,2$，对应的余子式分别为 $3,-2,1,1$，则 $D=$ ___-5___ .

8. 空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+3z^2=4\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$.

9. 设 A，B 均是 3 阶可逆矩阵，且 $|A|=2,|B|=3$，则 $|2A^{-1}B|=$ ___12___ .

10. 已知矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&3&5&-1\\3&4&x&1\end{pmatrix}$ 的秩 $R(A)=2$，则 $x=$ ___4___ .

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $R(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,0,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2+\alpha_3=(4,2,6,0)^{\mathrm{T}}$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为 $x=(1,2,0,3)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,3,-3)^{\mathrm{T}},(k\in R)$.

12. 已知三元二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 经正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $f=y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$，若 E 为三阶单位矩阵，则 $|A+E|=$ ___-8___ .

三、解答题（6 小题，共 54 分）

13.（**本题 8 分**）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\1&2&3&2\\2&3&3&1\\-3&-5&-4&1\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\1&2&3&2\\2&3&3&1\\-3&-5&-4&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+3r_1]{r_2-r_1,\ r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&4&0\\0&1&5&-3\\0&-2&-7&7\end{vmatrix}$ ------------2 分

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&4&0\\0&0&1&-3\\0&0&1&7\end{vmatrix}$$ ------------------6 分

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&4&0\\0&0&1&3\\0&0&0&10\end{vmatrix}=10$$ -------------------8 分

14.（**本题 8 分**）求过点 $M_0(1,-4,7)$ 且过直线 $l:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$ 的平面方程.

解 由直线 l 的方程可得直线上一点 $M\ (2,-1,4)$ 及直线的方向向量 $s=(1,-2,3)$， 1 分

因所求平面过点 $M_0(1,-4,7)$ 和直线 l，所以平面的法向量为 n 既垂直于向量 $\boldsymbol{s}$ 又垂直于向量 $\overrightarrow{M_0M}=(1,3,-3)$，于是可以取

$$n=s\times\overrightarrow{M_0M}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-2&3\\1&3&-3\end{vmatrix}=(-3,6,5)$$ **6 分**

所以平面方程为 $-3(x-1)+6(y+4)+5(z-7)=0$ 即 $-3x+6y+5z-8=0$ **8 分**

15.（**本题 8 分**）设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&2\\2&3&2\end{pmatrix}$，判断 A 是否可逆，若可逆求其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解法一（伴随矩阵法） 因 $|\boldsymbol{A}|=-1\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. **2 分**

又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-8&-5&1\\6&4&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$，所以 **6 分**

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=-\begin{pmatrix}-8&-5&1\\6&4&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&-1\\-6&-4&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$ **8 分**

解法二（初等变换法）

$$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\-1&-1&2&0&1&0\\2&3&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&1&4&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&1&4&-2&0&1\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&2&1&0\\0&1&0&-6&-4&1\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&8&5&-1\\0&1&0&-6&-4&1\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

6 分

所以，$\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}8&5&-1\\-6&-4&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. **8 分**

16.（**本题 10 分**）已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-7\\0\\k\end{pmatrix}$$

线性相关. (1) 求 k 的值；(2) 求上述向量组的秩和一个极大线性无关组，并把不属于极大线性无关组的向量用极大线性无关组线性表示.

解 作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&2&-5&-7\\-1&-1&1&0\\2&0&3&k\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&2&-5&-7\\0&0&3&3\\0&-2&-1&k-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-2&5&7\\0&0&1&1\\0&0&-6&k-13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+6r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-2&5&7\\0&0&1&1\\0&0&0&k-7\end{pmatrix}=B$$

3 分

（1）因向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以 $k-7=0$，即 $k=7$. **5 分**

（2）$k=7$ 时，由行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组. **7 分**

继续将行阶梯形矩阵 B 化为行最简形矩阵：

$$B\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{\substack{r_1-2r_3\\ r_2-5r_3}}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ **9 分**

由上述行最简形矩阵可得 $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$. **10 分**

17.（**本题 10 分**）求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4=4\\2x_1+3x_2-x_4=3\\-x_1-x_2+x_3+2x_4=1\end{cases}$ 的通解.

解 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1&4\\2&3&0&-1&3\\-1&-1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1&4\\0&-1&-2&-3&-5\\0&1&2&3&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&1&4\\0&1&2&3&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&-5&-6\\0&1&2&3&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

4 分

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=3x_3+5x_4-6\\x_2=-2x_3-3x_4+5\end{cases}$ $(x_3,x_4$为自由未知量$)$.

5 分

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$, 于是得原方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}_0=(-6,5,0,0)^T$.

6 分

原方程组的导出组为 $\begin{cases}x_1=3x_3+5x_4\\x_2=-2x_3-3x_4\end{cases}$ $(x_3,x_4$为自由未知量$)$.

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$， 于 是 导 出 组 的 基 础 解 系 为

$\boldsymbol{\xi}_1=(3,-2,1,0)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(5,-3,0,1)^T$, **8 分**

故原方程组的通解为 $x=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$, 其中 k_1,k_2 为任意常数. **10 分**

18.（**本题 10 分**）已知三阶实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解　　A 的特征多项式 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&3-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-3)^2$

所以，矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=3.$ **3 分**

当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $(A+E)x=0$ 即 $\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得基础解系为

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$， **5 分**

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时，由 $(A\text{-}3E)x=0$ 即 $\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&0&0\\2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得基础解系

$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，标准正交化得 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$， **7 分**

取正交矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，则有

$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$. **10 分**

四、证明题（本题 5 分）

19. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

证明：因 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵，所以 $\forall x\neq 0$，有 $x^TAx>0, x^TBx>0$， **2 分**

所以 $x^T(A+B)x=x^TAx+x^TBx>0$，由定义可得二次型 $f=x^T(A+B)x$ 为正定二次型，从而矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. **5 分**

五、应用题（本题 5 分）

20. 某中药厂用四种中草药 A~D，根据不同的比例配制成了 I~IV 四种特效药，各成分用量见下表（单位：克）. 某医院要购买这四种特效药，但药厂的 IV 号药已经卖完，请问能否用其它三种特效药配制出这种脱销的药品？如果能，按什么比例配制？

特效药 / 中草药	I	II	III	IV
A	1	1	1	4
B	1	2	2	6
C	1	2	3	7
D	1	1	2	5

解　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\6\\7\\5\end{pmatrix}$，则问题转化为向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由向量

组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.　　　　　　　　　　　　　　　　**1 分**

作矩阵

$$\widetilde{A}=\left(A\vdots\boldsymbol{\alpha}_4\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&2&2&6\\1&2&3&7\\1&1&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&2\\0&1&2&3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

4 分

因 $R(\widetilde{A})=R(A)=3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即第四种脱销的特效药可以由前三种特效药配制出来，且按 2:1:1 的比例配制即可.　　　　　　　　　　　　**5 分**