郑州轻工业学院 2017 — 2018 学年 第二学期 高等数学 A2 试卷（A）

专业年级及班级______ 姓名______ 学号______

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《高等数学 A2》(A 卷）参考答案

电气、计算机、软件、建环各专业 17 级适用

一、单项选择题(6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 已知 $y_1=\cos wx$ 及 $y_2=\sin wx$ 都是微分方程 $y''+w^2y=0$ 的解，则该方程的通解为--（B）

(A) $y=Cx\tan wx$； (B) $y=C_1\cos wx+C_2\sin wx$；

(C) $y=C_1\cot wx+C_2\tan wx$； (D) $y=C_1(\cos wx+\sin wx)+C_2$.

2. 改换二次积分的积分次序：$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=$ -------------------------（ C ）

(A) $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$； (B) $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x$； (D) $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}x$.

3. 函数 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $\mathrm{d}z=$ ---（ A ）

(A) $(y+\dfrac{1}{y})\mathrm{d}x+x(1-\dfrac{1}{y^2})\mathrm{d}y$； (B) $(y+\dfrac{1}{y})\mathrm{d}x+x(1+\dfrac{1}{y^2})\mathrm{d}y$；

(C) $(y^2+\dfrac{1}{y})\mathrm{d}x+x(1-\dfrac{1}{y^2})\mathrm{d}y$； (D) $(y-\dfrac{1}{y})\mathrm{d}x+x(1+\dfrac{1}{y^2})\mathrm{d}y$.

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$（$a$ 为常数）收敛，则 q 应满足-----------------------------------（ D ）

(A) $|q|>1$； (B) $q=1$； (C) $q=-1$； (D) $|q|<1$.

5. 设 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧，则 $\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$ -------（ C ）

(A) $\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$； (B) $\int_0^1\sqrt{y}\sqrt{1+y}\,\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$； (D) $\int_0^1\sqrt{y}\sqrt{1+\dfrac{1}{y}}\,\mathrm{d}y$.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数，正确的是-------------------------------（ A ）

(A) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$； (B) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,x\in(-1,1)$；

(C) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$； (D) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n,x\in(-1,1)$.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 微分方程 $y''=x$ 的通解 $y=\underline{\dfrac{1}{6}x^3+C_1x+C_2}$.

8. 设函数 $z=x^2\sin 2y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{4x\cos 2y}$.

9. 设闭区域 Ω 为 $-a\le x\le a,-b\le y\le b,-c\le z\le c$，则 $\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{d}v=\underline{8abc}$.

10. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于和 s_1 与 s_2，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\underline{s_1+s_2}$.

11. 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，

则系数 b_n 的表达式为 $\underline{b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x}$.

12. 设 f 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上的连续函数，将二重积分 $I=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标系下的二次积分的结果是 $\underline{I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho}$.

三、解答题（7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

13．求微分方程 $y''+3y'+2y=6\mathrm{e}^x$ 通解.

解：齐次微分方程的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，特征根为 $r_1=-1, r_2=-2$，故

齐次通解为 $Y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$；　　------- 3 分

右端项 $f(x)=6\mathrm{e}^x=P_0(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故设特解 $y^*=a\mathrm{e}^x$，则

$y^{*\prime}=a\mathrm{e}^x, y^{*\prime\prime}=a\mathrm{e}^x$，代入微分方程 $y''+3y'+2y=6\mathrm{e}^x$，得

$6a\mathrm{e}^x=6\mathrm{e}^x$，故 $a=1$，得特解 $y^*=\mathrm{e}^x$

综上，所求 通解为

$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^x$。　　------ 6 分

14．求曲线 $x=2\sin t,\ y=4\cos t,\ z=t$ 在点 $(2,0,\frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程.

解：$x'=2\cos t,\ y'=-4\sin t,\ z'=1,$　　------ 3 分

$t=\frac{\pi}{2}$ 时切向量　$\vec{T}=(0,-4,1)$，故法平面方程为

$4y-z=-\frac{\pi}{2}$　　------ 6 分

15．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则

$F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z-4$，则　　------ 4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2x}{4-2z}=\frac{x}{2-z}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y}{4-2z}=\frac{y}{2-z}$。　　------ 6 分

解法二：方程两边对 x 求导，$z=z(x,y)$，得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x}$，整理得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$　　------ 3 分

方程两边对 y 求导，$z=z(x,y)$，得

$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial z}{\partial y}$，整理得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}$　　------ 6 分

16．计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解：$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y$　　------ 2 分

$=\int_1^2 x[\frac{y^2}{2}]_1^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\frac{15}{4}-\frac{3}{2})=\frac{9}{8}$　　-------- 6 分

17．求函数 $z=xy$ 在点 $(1,2)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,1)$ 的方向导数.

解：$z_x=y, z_y=x$，故 $z_x(1,2)=2, z_y(1,2)=1$　　----- 3 分

方向 $\vec{l}$ 的单位向量为 $\vec{e_l}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，故方向导数

$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\cdot1+1\cdot1)=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　------ 6 分

18．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域.

解：$a_n=\frac{1}{2^n\cdot n}$，收敛半径

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n\cdot n}=2$。　　------ 4 分

当 $x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

当 $x=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，故收敛域为 $[-2,2)$

------ 6 分

19．利用高斯公式，求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(y^2+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=2$ 所围成的整个立体表面的外侧.

解：$P=y^2+z,Q=0,R=z^3$，则 $\frac{\partial P}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial y}=0,\frac{\partial R}{\partial z}=3z^2$ 连续，由高斯公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}3z^2\,\mathrm{d}v \quad \text{------ 3 分}$$

法一：$\Omega:(x,y)\in D_z,0\le z\le 2,$ 其中 $D_z:x^2+y^2\le z$，利用先二后一的方法，得

$$I=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}3z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 3z^2\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\pi z\cdot 3z^2\,\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^2 3z^3\,\mathrm{d}z=\pi[\frac{3z^4}{4}]_0^2=12\pi. \quad \text{------ 6 分}$$

法二：$\Omega:x^2+y^2\le z\le 2,(x,y)\in D_{xy}$，其中 $D_{xy}:x^2+y^2\le 2$，利用柱面坐标 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z$，得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{2}3z^2\,\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho[z^3]_{\rho^2}^{2}\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(8\rho-\rho^7)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi[4\rho^2-\frac{\rho^8}{8}]_0^{\sqrt{2}}=12\pi \quad \text{------ 6 分}$$

四、分析题（本题 7 分）

20．根据 a 的不同取值，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}$（$a>0$）的敛散性.

解：令 $u_n=|\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}|=\frac{1}{n\cdot a^n}$，利用比值审敛法（或根值审敛法）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}}=\frac{1}{a}\ （或 \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{a}） \quad \text{------ 3 分}$$

当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot a^n}$ 绝对收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}$ 收敛；

当 $0<a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot a^n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}$ 发散；

当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛。

综上，当 $a\ge 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}$ 收敛；$0<a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot a^n}$ 发散。------ 7 分

五、应用题（本题 7 分）

21．利用拉格朗日乘数法，求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=5\,(x>0,y>0,z>0)$ 下的极大值.

解：构造拉格朗日函数

$L(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5)\,(x>0,y>0,z>0)$，------ 2 分

求导得

$$\begin{cases} L_x=\frac{1}{x}+2x\lambda=0 & (1)\\ L_x=\frac{1}{y}+2y\lambda=0 & (2)\\ L_z=\frac{3}{z}+2z\lambda=0 & (3)\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5=0 & (4)\end{cases}, \quad \text{------ 5 分}$$

（1），（2），（3）联立解得 $x^2=y^2=\frac{z^2}{3}$，代入（4）得 $x=1,y=1,z=\sqrt{3}$。因驻点只

有一个，根据实际问题驻点唯一性知，该驻点处取得极大值，且极大值为

$$f(1,1/\sqrt{3})=\frac{3}{2}$$ ------7 分

六、证明题（本题 8 分）

22． 证明曲线积分 $\int_L (1+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$ 与积分路径 L 无关，并求

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(1+4xy^3)\,\mathrm{d}\,x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}\,y$$ 的值.

解：$P=1+4xy^3$， $Q=6x^2y^2-5y^4$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以该曲线积分与路径无关。 ------ 4 分

沿折线路径 $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$，则

$$I=\int_0^1 P(x,0)\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1 Q(1,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 1\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1(6y^2-5y^4)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^1 1\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1(6y^2-5y^4)\,\mathrm{d}\,y=1+[2y^3-y^5]_0^1=2$$ ------8 分