

一、选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 曲线 $y = \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积为----- ()

(A) 2 (B) 4

(C) 6 (D) 0

2. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛需要 p 满足----- ()

(A) $p > 1$ (B) $p \leq 1$

(C) $p > 0$ (D) $p \geq 0$

3. 微分方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 的特解形式可设为----- ()

(A) $a \cos 2x$ (B) $ax \cos 2x$

(C) $x(a \cos 2x + b \sin 2x)$ (D) $a \cos 2x + b \sin 2x$

4. 下列级数中收敛的是----- ()

(A) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n \sqrt{n}}$

5. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为----- ()

(A) $x + 2y - z - 4 = 0$ (B) $x + 2y - 4 = 0$

(C) $2x + y - z - 4 = 0$ (D) $2x + y - z - 5 = 0$

二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 二阶常微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解为_____.

7. 设函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 则全微分 $du|_{(1,1,1)} =$ _____.

8. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} \int_{x^2}^{x+2} \sin t^2 dt =$ _____.

9. 改换积分次序 $\int_0^1 \mathbf{d}x \int_0^{1-x} f(x, y) \mathbf{d}y =$ _____.

10. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $s(\frac{\pi}{4})=\underline{\hspace{2cm}}, s(3\pi)=\underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题 (6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

11. 计算定积分: $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

12. 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

13. 设函数 $z=f(xy, y)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

14. 求函数 $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值.

15. 计算 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 D 是由圆心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

16. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^{n-1}}$ 的敛散性. 如果收敛, 指出是条件收敛还是绝对收敛.

四、分析题 (本题 8 分)

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛半径和收敛域.

五、解答题 (2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18. 利用高斯公式计算 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的

圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$ 整个表面的外侧.

19. 计算曲线积分 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧.

六、证明题 (本题 5 分)

20. 设 $z=z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^3 - xyz^2 = 0$ 确定, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2 - 3y^3}{2xyz}.$$

七、应用题 (本题 7 分)

21. 过曲线 $y = x^2$ 上点 $(1,1)$ 作曲线的切线, 该切线与曲线 $y = x^2$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D , 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.