

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

# 《线性代数与空间解析几何》试卷 (A 卷)

(适用专业: 全校 2022 级理工科各专业)

(本试卷共 2 页, 5 道大题, 20 个小题, 满分 100 分)

注意: 所有答案必须写在答题卡上, 在试卷上作答无效

## 一、选择题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知  $6i541j$  为奇排列, 则  $i, j$  的值分别为 ( )

(A)  $i=3, j=2$ ; (B)  $i=2, j=3$ ; (C)  $i=3, j=7$ ; (D)  $i=2, j=7$ .

2. 直线  $l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$  与平面  $\pi: x+2y+3z=4$  的位置关系为 ( )

(A)  $l // \pi$ ; (B)  $l$  在  $\pi$  内; (C)  $l \perp \pi$ ; (D) 不是前面三种关系.

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则必有 } ( )$$

(A)  $AP_1P_2 = B$ ; (B)  $AP_2P_1 = B$ ; (C)  $P_1P_2A = B$ ; (D)  $P_2P_1A = B$ .

4. 已知向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$ , 则下列说法错误的是 ( )

(A) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关; (B)  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示;  
(C)  $\alpha_2, \alpha_3$  线性无关; (D) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

5. 设  $A, B$  是可逆矩阵, 且  $A$  与  $B$  相似, 则下列结论错误的是 ( )

(A)  $A^T$  与  $B^T$  相似; (B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似;  
(C)  $A+A^T$  与  $B+B^T$  相似; (D)  $A+A^{-1}$  与  $B+B^{-1}$  相似.

6. 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  为正定二次型,

则  $\lambda$  的取值范围为 ( )

(A)  $-2 < \lambda < 1$ ; (B)  $1 < \lambda < 2$ ;  
(C)  $-3 < \lambda < -2$ ; (D)  $\lambda > 2$ .

## 二、填空题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

7. 已知 4 阶行列式  $D$  第 3 行的元素分别为 1, 3, -2, 2, 对应的余子式分别等于 3, -2, 1, 1, 则  $D =$  .

8. 空间曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$  在  $xOy$  面上的投影曲线的方程为 .

9. 设  $A, B$  均是  $n$  阶可逆矩阵, 且  $|A|=2, |B|=3$ , 则  $|AB^{-1}| =$  .

10. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是四元非齐次线性方程组  $Ax=b$  的 3 个解向量, 且  $R(A)=3$ ,  $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$ , 则方程组  $Ax=b$  的通解为 .

11. 已知矩阵  $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$  相似, 则  $x =$  ,  $y =$  .

12. 设三元实二次型  $f$  的矩阵  $A$  满足  $|A+E|=0, |A-2E|=0, |2A+E|=0$ , 其中  $E$  为三阶单位矩阵, 则  $f$  的规范形为 .

三、解答题（6 小题，共 54 分）

13.（本题 7 分）计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

14.（本题 8 分）求过点(1, 1, -1)且平行于向量  $\boldsymbol{a}=(2, 1, 1)$ 和  $\boldsymbol{b}=(1, -1, 0)$ 的平面方程.

15.（本题 9 分）设 3 阶方阵  $A$  和  $B$  满足  $A+B=AB$ , 且  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $A$ .

16.（本题 10 分）已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ k+2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \\ k \end{pmatrix},$$

求: (1)  $k$  为何值时, 上述向量组线性相关? (2)当上述向量组线性相关时求其一个极大无关组, 并把不属于极大无关组的向量用极大无关组线性表示.

17.（本题 10 分）求非齐次线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 7 \end{cases}$  的通解.

18.（本题 10 分）用正交变换法把二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

化为标准形, 写出所用的正交变换  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ , 并指出方程  $f=1$  表示何种二次曲面.

四、证明题（本题 5 分）

19. 若  $n$  阶矩阵  $A$  与  $B$  相似, 证明: 矩阵  $A$  与  $B$  有相同的特征多项式.

五、应用题（本题 5 分）

20. 设脱脂牛奶、大豆面粉和乳清三种食物每 100g 中蛋白质、碳水化合物与脂肪的含量如下表, 表中还给出了当下比较流行的简捷营养处方. 如果用这三种食物作为每天的主要食物, 那么我们需要确定每种食物的用量来全面准确地实现这个营养需求. 试建立相应的线性方程组（无需求解）.

营养	每 100g 食物所含营养(g)			每日所需的 营养量
	脱脂牛奶	大豆面粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3