第一章　随机事件及其概率

1.事件的关系与运算

设 A，B，C 分别表示三个任意事件，则下列选项中正确的是（　　）.

A. 若 $A+C=B+C$，则 $A=B$

B. 若 $A-C=B-C$，则 $A=B$

C. 若 $AC=BC$，则 $A=B$

D. 若 $AB=\Phi$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}=\Phi$，则 $\overline{A}=B$

1. 【答案】D.

2. 加法公式，对立事件概率和为 1

设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求：(1) A，B，C 至少有一个发生的概率；(2) A，B，C 都不发生的概率 .

2.【答案】 (1) $\dfrac{5}{8}$；　(2) $\dfrac{3}{8}$.

3. 加法公式,减法公式

已知 $P(A\cup B)=0.6$，$P(B)=0.3$，则 $P(A\overline{B})=$________ .

3. 【答案】 0.3.

4. 古典概率.

10 张奖券中含有 3 张中奖的，每人购买一张，则前 3 个购买者中恰有一人中奖的概率是（　　）.

A. $C_{10}^{3}\cdot 0.7^{2}\cdot 0.3$　　　　B. $C_{3}^{1}\cdot 0.3\cdot 0.7^{2}$

C. $\dfrac{7}{40}$　　　　D. $\dfrac{21}{40}$

4. 【答案】 D.

5. 古典概率

盒子中有 12 只球，其中红球 5 只，白球 4 只，黑球 3 只．现从中任取 9 只，则其中恰好有 4 只红球，3 只白球，2 只黑球的概率为________．

5.【答案】 $\frac{3}{11}$.

6. 几何概率

在（0，1）区间中随机地取两个数，求这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率．

6.【答案】 0.75 .

7.乘法公式，条件概率，加法公式

已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

7.【答案】 $\frac{1}{3}$.

8.全概率公式与贝叶斯公式

设有三只外形完全相同的盒子，Ⅰ号盒中装有 14 个黑球，6 个白球；Ⅱ号盒中装有 5 个黑球，25 个白球；Ⅲ号盒中装有 8 个黑球，42 个白球．现在从三个盒子中任取一盒，再从中任取一球，求：

（1）取到黑球的概率；

（2）如果取到的是黑球，它是取自Ⅰ号盒中的概率．

8.【答案】 (1)0.342； (2)0.682 .

9.独立事件

设两个相互独立的事件 A 与事件 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，B 发生 A 不发生的概率与 A 发生 B 不发生的概率相等，求 $P(A)$.

9.【答案】 $\frac{2}{3}$.

10.伯努利定理

某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中的概率为（　　）.

A. $3p(1-p)^2$　　　　B. $6p(1-p)^2$

C. $3p^2(1-p)^2$　　　　D. $6p^2(1-p)^2$

10. 【答案】 C.

第二章　随机变量及其分布

11.分布函数

设 X 的分布函数为 $F(x)$，实数 $a<b$，则（　　）正确.

A. $P\{X<a\}=F(a)$　　　　B. $P\{a\leqslant X<b\}=F(b)-F(a)$

C. $P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$　　　　D. $P\{X=a\}=0$

11. 【答案】 C.

12.离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k$，$k=1,2,\cdots$，且 $b>0$，则（　　）成立.

A. $\lambda=b+1$　　　　B. $\lambda>0$ 的实数

C. $\lambda=\dfrac{1}{1+b}$　　　　D. $\lambda=\dfrac{1}{1-b}$

12. 【答案】C.

13.求分布律、分布函数及 $P\{X\in I\}$.

袋中有 2 个白球 3 个红球，现从袋中随机地抽取 2 个球，X 表示取到的红球的个数，求：(1) X 的分布律；(2) X 的分布函数；(3) $P\left\{0\leqslant X\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$及 $P\{X\leqslant 1\}$.

13. 【答案】(1) 分布律为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

；

(2) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.1, & 0\le x<1\\ 0.7, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$；　(3) 0.7,　0.7 .

14.连续型随机变量的密度函数与分布函数

设连续型随机变量 X 的密度函数与分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，则下列选项中正确的是(　　).

A. $0\le f(x)\le 1$　　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

C. $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)=1$　　　D. $f(x)$与$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内都连续

14.【答案】B .

15.密度函数的性质、常见分布

已知 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$，(其中 $a>0$，$b>0$) 为概率密度，则 a，b 满足________ .

15.【答案】$2a+3b=4$.

16.由密度函数求分布函数及 $P\{X\in I\}$

设 $X\sim f(x)=Ae^{-|x|}$，$(-\infty<x<+\infty)$，求：(1) 常数 A；(2) $P\{-1<X<1\}$；(3) X 的分布函数 $F(x)$.

16.【答案】(1) $A=\frac{1}{2}$；(2) $1-e^{-1}$；(3) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, x\ge 0\end{cases}$.

17.常见分布(指数分布、二项分布)

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（分钟）服从 $\lambda=\frac{1}{5}$ 的指数分布．一名顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开．他一个月要到银行 5 次，Y 表示他未等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布律及 $P\{Y\geqslant 1\}$.

17.【答案】$P\{Y=k\}=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}$， $k=0,1,2,\ldots,5.$

$$P\{Y\ge 1\}=1-(1-e^{-2})^5\approx 0.5167.$$

18.正态分布、全概率公式与贝叶斯公式

在电源电压不超过 200V，200～240V，超过 240V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001，0.2. 假设电源电压服从正态分布 $N(220,625)$，试求：

（1）该电子元件损坏的概率；

（2）该电子元件损坏时，电源电压在 200～240V 的概率．

18.【答案】(1) 0.0641； (2) 0.009.

19.离散型随机变量函数的分布

设 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

则随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布律为__________.

19.【答案】

Y	1	3	9
P	0.3	0.4	0.3

20.连续型随机变量函数的分布

设 $X\sim f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，令 $Y_1=3-2X$，$Y_2=X^2$，求 Y_1 与 Y_2 的概率密度．

20.【答案】$f_{Y_1}(y)=\begin{cases}\frac{3(3-y)^2}{16}, & 1<y<5\\ 0, & 其他\end{cases}$. $f_{Y_2}(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

第三章 多维随机变量及其分布

21.联合分布求待定常数

已知二维随机变量（X，Y）的概率分布为：

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y\}=1$ 相互独立，则 a，b 分别为________．

21.【答案】$a=0.4,\ b=0.1$．

22.联合分布函数的性质

设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为 $F(x,y)$，则下列选项不成立的是（　　）．

A. $P\{x_1<X\leqslant x_2,\ y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)$

B. $P\{X\leqslant x\}=F(x,+\infty)$

C. $F(-\infty,y)=0$

D. $F(+\infty,+\infty)=1$

22.【答案】A．

23. 二维离散型随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布

口袋内装有 5 个球，其中 3 个白球 2 个黑球，从袋中任取一只球，取后不放回，连续取两次，X，Y 分别表示第一次、第二次取到白球的个数．求：（1）X 与 Y 的联合分布；（2）X 与 Y 的边缘分布；（3）在第一次没有取到白球的条件下，第二次取白球数的概率分布．

23.【答案】(1) 联合概率分布：

X \ Y	0	1
0	0.1	0.3
1	0.3	0.3

(2) 边缘分布为

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	0	1
P	0.4	0.6

(3) 在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布为

Y	0	1
$P\{Y\|X=0\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

24. 二维连续型随机变量的联合密度、边缘密度、条件密度、独立性

设（X，Y）在平面区域 G 上服从均匀分布，G 是由直线 $x-y=0$，$x+y=2$，$y=0$ 围成的，(1) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$；(2) X 与 Y 是否相互独立？(3) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

24.【答案】(1) $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$；

(2) 不独立；

(3) 当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y\\ 0, & 其他\end{cases}$.

25.联合密度、分布函数、区域的概率

设（X，Y）$\sim f(x,y)=\begin{cases}ce^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$. (1) 确定常数 c；(2) 求 X，Y 的边缘概率密度；(3) 求联合分布函数；(4) 求 $P\{Y\leqslant X\}$；

(5)

求 $P\{X<2|Y<1\}$.

25.【答案】(1) $c=2$；(2) $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$；

(3) $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$；

(4) $\frac{1}{3}$；(5) $1-e^{-4}$.

26.离散型随机变量函数的分布

设 X 与 Y 相互独立且同分布，概率分布为：

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

则 $Z=\max\{X，Y\}$ 的概率分布为（　　）.

A.

Z	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

B.

Z	0	1
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$

C.

Z	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

D.

Z	1
P	1

26.【答案】B .

27.随机变量和的分布（泊松分布的可加性）

$X\sim P(2)$，$Y\sim P(4)$（泊松分布），且 X 与 Y 相互独立，令 $Z=X+Y$，则 Z 的分布律为________.

27.【答案】$P\{Z=k\}=\frac{6^k}{k!}e^{-6}$，　$k=0,1,2,\ldots,$.

28.二维正态分布

设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$，则 X 的边缘密度为____________；

$2X-Y\sim$__________（填分布的记号）；$P\{XY-Y<0\}=$__________ .

28.【答案】$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}},x\in(-\infty,+\infty)$；　$N(2,5)$；　$\frac{1}{2}$.

29.连续型随机变量函数的概率密度

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

求：(1)（X，Y）的概率密度；(2) $Z=X+Y$ 的概率密度．

29.【答案】(1) $f(x,y)=\begin{cases}2y, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0,\quad 其他\end{cases}$；(2) $f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0\le z<1\\ 2z-z^2, & 1\le z\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$.

第四章　随机变量的数字特征

30.离散型随机变量的方差

已知离散型随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\leqslant x<0\\ 0.4, & 0\leqslant x<3\\ 1, & 3\leqslant x\end{cases}，则方差\ D(X)=（\quad）.$$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 3.45

30.【答案】D.

X	-1	0	3
P	0.3	0.1	0.6

31.指数分布的期望与方差 及期望与方差的性质

设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，则（　）正确．

A. $E(2X+1)=4$　　B. $D(2X+1)=16$

C. $E(2X+1)=2$　　D. $D(2X+1)=9$

31.【答案】B.

32. 二维正态分布的数字特征、期望的性质

设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$ ，则 $E(X^2Y)=$__________.

32. 【答案】$\mu(\sigma^2+\mu^2)$.

33.连续型随机变量函数的期望与方差

$X\sim f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2 \\ cx+b, & 2\leqslant x\leqslant 4 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，已知 $E(X)=2$，$P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$. 求：(1) a，b，c；(2) $Y=e^X$ 的期望与方差.

33. 【答案】 (1) $a=\dfrac{1}{4},b=1,c=-\dfrac{1}{4}$；　　(2) $E(Y)=\dfrac{1}{4}(e^2-1)^2$，

$D(Y)=\dfrac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$.

34.常见分布的期望与方差、相关系数的计算

已知 $X\sim B\left(10,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$Y\sim N(2,\ 10)$，又 $E(XY)=14$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=$（　　）.

A. -0.8　　B. -0.16　　C. 0.16　　D. 0.8

34. 【答案】D.

35.方差 $D(aX+bY)$ 的重要计算公式

已知 $D(X)=16$，$D(Y)=9$，$\rho_{X,Y}=0.2$. 则 $D(X-Y)=$________.

35. 【答案】20.2.

36.随机变量相互独立与不相关

设随机变量 X 和 Y 服从正态分布，且它们不相关，则（　　）.

A. X 与 Y 一定独立

B. （X，Y）服从二维正态分布

C. X 与 Y 未必独立

D. $X+Y$ 服从一维正态分布

36.【答案】C .

37.离散型随机变量的协方差与相关系数的计算

箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个，现从箱中随机地取出 2 个球，记 X 为取出红球的个数，Y 为取出的白球个数.（1）求 (X,Y) 的联合概率分布；（2）求协方差 $Cov(X,Y)$ 与相关系数 ρ .

37.【答案】(1)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

；

(2) $Cov(X,Y)=-\dfrac{4}{45}$；$\rho=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

38.连续型随机变量的协方差与相关系数的计算

设二维随机变量（X，Y）的概率密度为：

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求 $\mathrm{Cov}(X,\ Y)$ 及相关系数 ρ.

38.【答案】$Cov(X,Y)=-\dfrac{1}{36}$，$\rho=-\dfrac{1}{11}$.

第五章　大数定律及中心极限定理

39.切比雪夫不等式

设随机变量 X 与 Y 的期望 $E(X)=-2$，$E(Y)=2$，方差 $D(X)=1$，$D(Y)=4$，

而相关系数 $\rho_{XY}=-0.5$，利用切比雪夫不等式估计 $P\{|X+Y|\geq 6\}$.

39.【答案】$\dfrac{1}{12}$.

40. 辛钦大数定律

设 X_1，X_2，…，X_n，…为独立同分布的随机变量序列，$X_n(n=1，2，\cdots)$ 服从参数为 2 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于

________.

40.【答案】$\dfrac{1}{2}$.

41. 独立同分布的中心极限定理

设随机变量 X_1，X_2，…，X_n 相互独立，且都服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，则下列结论正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right\}=\Phi(x)$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{n\lambda}\leq x\right\}=\Phi(x)$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leq x\right\}=\Phi(x)$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right\}=\Phi(x)$

41.【答案】A.

42. 独立同分布的中心极限定理

一袋盐的重量（千克）是一个随机变量，期望为 1，方差为 0.01，一箱装有 100 袋．求一箱重量在 98 至 102 千克之间的概率．

（其中，$\Phi(2)=0.97725$）

42.【答案】0.9545.

43. 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

食堂为 1000 名学生服务，每个学生去食堂吃早餐的概率为 0.6，去与不去食堂用餐互不影响．问食堂想以 99.7%的把握保障供应，每天应准备多少份早餐？

（其中 $\Phi(2.75)=0.997$ ）

43. 【答案】643.

第六章 样本及抽样分布

44.统计量的数字特征

设（X_1，X_2，…，X_n）为来自总体 X 的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，分别求出总体分布为以下指定分布的 $E(\overline{X})$，$D(\overline{X})$，$E(S^2)$.

（1） X 服从二项分布 $X\sim B(m,p)$.

（2） X 服从指数分布 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

（3） X 服从均匀分布 $X\sim U[a,b]$.

44. 【答案】(1) $E(\overline{X})=mp$，$D(\overline{X})=\frac{mp(1-p)}{n}$，$E(S^2)=mp(1-p)$.

(2) $E(\overline{X})=\frac{1}{\lambda}$，$D(\overline{X})=\frac{1}{n\lambda^2}$，$E(S^2)=\frac{1}{\lambda^2}$.

(3) $E(\overline{X})=\frac{a+b}{2}$，$D(\overline{X})=\frac{(b-a)^2}{12n}$，$E(S^2)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

45. χ^2 分布

设 X_1，X_2，X_3，X_4 是来自正态总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本，若统计量 $T=\frac{(X_1-2X_2)^2}{a}+\frac{(3X_3+4X_4)^2}{b}\sim\chi^2(n)$，求常数 a，b，n 的值.

45. 【答案】$a=20,b=100,n=2$.

46. t 分布

设总体 X 与 Y 独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且（X_1，…，X_m）与（Y_1，…，Y_n）是分别来自总体 X 与 Y 的样本，统计量 $T=\frac{2(X_1+\cdots+X_m)}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_n^2}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，则 $\frac{m}{n}=$ ________.

46. 【答案】$\frac{1}{4}$.

47. F 分布

设（X_1，X_2，…，X_6）是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本，则以下服从 $F(2,4)$ 的是（　　）.

A. $\dfrac{2(X_1^2+X_2^2)}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}$　　B. $\dfrac{X_1^2-X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}$

C. $\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}{X_1^2+X_2^2}$　　D. $\dfrac{2(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2)}{X_1^2+X_2^2}$

47.【答案】A .

48.统计量的分布

设样本（X_1，X_2，…，X_n）取自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}$ 与 S^2 分别是该样本的样本均值与样本方差，则（　　）.

A. $2X_2-X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$　　B. $\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$

C. $\dfrac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　　D. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\sim t(n-1)$

48.【答案】B .

49.统计量的数字特征

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自总体 X 与 Y 的样本，且总体 X 与 Y 独立，则

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right)=\underline{\qquad\qquad}.$$

49.【答案】σ^2.

第七章　参数估计

50.离散型总体，求参数的矩估计与最大似然估计

设总体的概率分布为

X	1	2	3
P	$\theta(1-\theta)$	$1-\theta$	θ^2

其中 θ（$0<\theta<1$）是未知参数，若样本值为：3，1，1，2，3，1，2，3.
求 θ 的矩估计及最大似然估计.

50.【答案】矩估计 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}$，最大似然估计 $\hat{\theta}=\frac{9}{14}$.

51.均匀分布区间端点的最大似然估计

设（X_1，X_2，…，X_n）是来自总体 $X\sim U[0,\theta]$ 的样本，其中 $\theta>0$ 未知，求参数 θ 的最大似然估计量．

51.【答案】$\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}$.

52. 连续型总体，求参数的矩估计与最大似然估计

设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中，$\theta>-1$ 是未知参数. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的样本，求参数 θ 的矩估计及最大似然估计.

52.【答案】矩估计 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$；最大似然估计 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$.

53. 估计量的无偏性与有效性

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，（X_1，X_2，…，X_n）为来自总体 X 的样本，则下面参数 μ 的 4 个估计量中，最有效的是（　　）.

A. $2\overline{X}-X_1$　　B. $\overline{X}$

C. $2\overline{X}$　　D. $\frac{1}{2}X_1+\frac{2}{3}X_2-\frac{1}{6}X_3$

53.【答案】B.

54. 一个正态总体，参数 μ 的区间估计

已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现随机地抽取 10 个零件进行抗压试验，测得数据：

482　493　457　471　510　446　435　418　394　469

（1）若已知 $\sigma=30$，求 μ 的置信水平为 95%的置信区间．

（2）若 σ^2 未知，求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%的置信区间．

54.【答案】(1) (438.91, 476.09)；　(2) (432.30, 482.70)．

55. 一个正态总体，参数 σ^2 的区间估计

已知每个滚珠直径 X（毫米）服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，从一批滚珠中随机抽取 5 个，测量其直径分别为

14.6　15.1　14.9　15.2　15.1

求每个滚珠直径方差 σ^2 的置信区间（$\alpha=0.05$）．

55.【答案】(0.021, 0.471)．

56. 两个正态总体，均值差与方差比的区间估计

甲、乙两厂生产同种类型的仪器，为比较其无故障运行时间（单位：小时）的长短，抽检部门抽取了甲厂仪器 25 只，测得其平均无故障运行时间为 $\bar{x}=2000$，样本方差 $s_1^2=6400$；抽取了乙厂仪器 20 只，测得其平均无故障运行时间为 $\bar{y}=1900$，样本方差 $s_2^2=10000$．假设两厂仪器的无故障运行时间均服从正态分布且相互独立，试求：

（1）两总体均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.99 的置信区间，假设已知两厂仪器的无故障运行时间的方差分别为 3844 和 5625；

（2）两总体方差之比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间．

56.【答案】(1) (46.19,153.81)；　(2) (0.3033,　1.2992)．

第八章　假设检验

57. 一个正态总体，均值 μ 的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 未知．X_1，X_2，…，X_n 是来自 X 的样本，$\overline{X}$ 和

S^2 分别是样本均值和样本方差，则检验 H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$，用统计量（　　）.

A. $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　　　B. $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

C. $\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}$　　　　D. $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

57.【答案】B.

【解析】这是一个正态总体，方差未知的均值的检验问题，故用 T 检验法，其中 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，　故选 B.

58. 一个正态总体，方差 σ^2 的假设检验

设某厂生产的铜线的折断力 $X\sim N(\mu,8^2)$，现从一批产品中抽查 10 根测其折断力后，经计算得样本均值 $\bar{x}=575.2$，样本方差 $s^2=68.16$. 试问能否认为这批铜线折断力的方差仍为 8^2？（$\alpha=0.05$）.

58.【答案】接受 H_0，可以认为该批铜线折断力的方差仍为 8^2.

【解析】这是一个正态总体均值未知的方差的双边检验问题，采用 χ^2 检验法.

第一步　提出假设 $H_0:\sigma^2=8^2$，　$H_1:\sigma^2\neq 8^2$.

第二步　假定 H_0 成立，选取检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\text{，即 }\chi^2=\frac{9S^2}{8^2}\sim\chi^2(9).$$

第三步　对于检验水平 $\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_{0.025}(9)=19$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，则 H_0 的拒绝域为:

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{10})\,|\,\chi^2>19\text{或}\chi^2<2.7\}.$$

第四步　经计算 $\chi^2=\dfrac{9s^2}{8^2}=\dfrac{9\times 68.16}{64}=9.59$，因 2.7<9.59<19，所以接受 H_0，

可以认为该批铜线折断力的方差仍为 8^2.

59. 两个正态总体，均值 μ 的假设检验

在漂白工艺中考察温度对针织品断裂强度的影响，现在 70℃与 80℃下分别作 8

次和 6 次试验，测得各自的断裂强度 X 和 Y 的观测值，经计算得：$\overline{x}=20.4$，$\overline{y}=19.317$，$7S_1^2=6.2$，$5S_2^2=5.028$. 假设 X 和 Y 均服从正态分布，在 $\alpha=0.1$ 时，针对下列两种情况，检验 70℃与 80℃对针织品断裂强度有无显著性差异？

（1）$\sigma_1^2=8$，$\sigma_2^2=6$；

（2）$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 但未知.

59.【答案】(1) 接受 H_0，认为温度对针织品的断裂强度无显著性差异；

(2) 拒绝H_0，认为 70^0C 与 80^0C 对针织品的断裂强度有明显差异.

【解析】提出原假设与备择假设：$H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$.

(1) 方差 $\sigma_1^2=8,\sigma_2^2=6$ 已知，故用 U 检验法.

假定 H_0 成立，检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

对于检验水平 $\alpha=0.1$，查表得 $u_{0.05}=1.645$，则 H_0 的拒绝域为

$$W:|u|>u_{0.05}=1.645.$$

经计算 $|u|=\frac{|20.4-19.137|}{\sqrt{\frac{8}{8}+\frac{6}{6}}}=0.76<1.645$，所以接受 H_0，认为温度对针织品的断裂强度无显著性差异.

(2) 方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知，故用 T 检验法，其中

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)，即$$

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{7S_1^2+5S_2^2}{12}}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}}\sim t(12).$$

对于检验水平 $\alpha=0.1$，查表得 $t_{\frac{0.1}{2}}(12)=t_{0.05}(12)=1.782$，则 H_0 的拒绝域为

$$W:|t|>t_{0.05}(12)=1.782.$$

经计算 $|t|=\dfrac{|20.4-19.137|}{\sqrt{\dfrac{6.2+5.028}{12}}\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{6}}}=2.074>t_{0.05}(12)=1.782$，所以拒绝 H_0，认为 70^0C 与 80^0C 对针织品的断裂强度有明显差异.

60. 假设检验的两类错误

在假设检验问题中，显著性水平 α 的意义是（　　）.

A. 在 H_0 成立的条件下，经检验 H_0 被接受的概率

B. 在 H_0 成立的条件下，经检验 H_0 被拒绝的概率

C. 在 H_0 不成立的条件下，经检验 H_0 被接受的概率

D. 在 H_0 不成立的条件下，经检验 H_0 被拒绝的概率

60. **【答案】** B .

【解析】 显著性水平 α 表示犯第一类错误的概率，即在 H_0 成立的条件下拒绝 H_0 的概率，故选 B .