

一、单项选择题(6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知 $y_1 = \cos wx$ 及 $y_2 = \sin wx$ 都是微分方程 $y'' + w^2 y = 0$ 的解, 则该方程的通解为----

----- (B)

(A) $y = Cx \tan wx$;

(B) $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$;

(C) $y = C_1 \cot wx + C_2 \tan wx$;

(D) $y = C_1(\cos wx + \sin wx) + C_2$.

2. 改换二次积分的积分次序: $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy =$ ----- (C)

(A) $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$;

(B) $\int_0^a dx \int_0^a f(x, y) dy$;

(C) $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$;

(D) $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$.

3. 函数 $z = xy + \frac{x}{y}$, 则 $dz =$ ----- (A)

(A) $(y + \frac{1}{y})dx + x(1 - \frac{1}{y^2})dy$;

(B) $(y + \frac{1}{y})dx + x(1 + \frac{1}{y^2})dy$;

(C) $(y^2 + \frac{1}{y})dx + x(1 - \frac{1}{y^2})dy$;

(D) $(y - \frac{1}{y})dx + x(1 + \frac{1}{y^2})dy$.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ (a 为常数) 收敛, 则 q 应满足----- (D)

(A) $|q| > 1$;

(B) $q = 1$;

(C) $q = -1$;

(D) $|q| < 1$.

5. 设 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧, 则 $\int_L \sqrt{y} ds =$ ----- (C)

(A) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$;

(B) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+y} dy$;

(C) $\int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx$;

(D) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{y}} dy$.

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数, 正确的是----- (A)

(A) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$;

(B) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1)$;

$$(C) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1); \quad (D) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1).$$

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 微分方程 $y'' = x$ 的通解 $y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$.

8. 设函数 $z = x^2 \sin 2y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x \cos 2y$.

9. 设闭区域 Ω 为 $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c$, 则 $\iiint_{\Omega} 1 dv = 8abc$.

10. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s_1 与 s_2 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s_1 + s_2$.

11. 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则系数 b_n 的表达式为 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$.

12. 设 f 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的连续函数, 将二重积分 $I = \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ 化为极坐标系下的二次积分的结果是 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho) \rho d\rho$.

三、解答题（7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

13. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$ 通解.

解: 齐次微分方程的特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = -1, r_2 = -2$, 故

齐次通解为 $Y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$; ----- 3 分

右端项 $f(x) = 6e^x = P_0(x)e^{\lambda x}$, $\lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故设特解 $y^* = ae^x$, 则

$y^{*'} = ae^x, y^{*''} = ae^x$, 代入微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$, 得

$6ae^x = 6e^x$, 故 $a = 1$, 得特解 $y^* = e^x$

综上, 所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^x. \quad \text{----- 6 分}$$

14. 求曲线 $x = 2 \sin t$, $y = 4 \cos t$, $z = t$ 在点 $(2, 0, \frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程.

$$\text{解: } x' = 2 \cos t, y' = -4 \sin t, z' = 1, \quad \text{----- 3 分}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 时切向量 $\vec{T} = (0, -4, 1)$, 故法平面方程为

$$4y - z = -\frac{\pi}{2} \quad \text{----- 6 分}$$

15. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一: 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$, 则

$$F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z - 4, \text{ 则} \quad \text{----- 4 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2x}{4-2z} = \frac{x}{2-z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{4-2z} = \frac{y}{2-z}. \quad \text{----- 6 分}$$

解法二: 方程两边对 x 求导, $z = z(x, y)$, 得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 4 \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ 整理得 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z} \quad \text{----- 3 分}$$

方程两边对 y 求导, $z = z(x, y)$, 得

$$2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 4 \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 整理得 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2-z} \quad \text{----- 6 分}$$

16. 计算 $\iint_D xy \, d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1$ 、 $x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

$$\text{解: } \iint_D xy \, d\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xy \, dy \quad \text{----- 2 分}$$

$$= \int_1^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} - \frac{3}{2} \right) = \frac{9}{8} \quad \text{----- 6 分}$$

17. 求函数 $z = xy$ 在点 $(1, 2)$ 处沿方向 $\vec{l} = (1, 1)$ 的方向导数.

$$\text{解: } z_x = y, z_y = x, \text{ 故 } z_x(1, 2) = 2, z_y(1, 2) = 1 \quad \text{----- 3 分}$$

方向 \vec{l} 的单位向量为 $\vec{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, 故方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{----- 6 分}$$

18. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛域.

解: $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$, 收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n \cdot n} = 2. \quad \text{----- 4 分}$$

当 $x = 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散;

当 $x = -2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 故收敛域为 $[-2, 2)$

----- 6 分

19. 利用高斯公式, 求 $I = \iiint_{\Sigma} (y^2 + z) \, dy \, dz + z^3 \, dx \, dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面

$z = 2$ 所围成的整个立体表面的外侧.

解: $P = y^2 + z, Q = 0, R = z^3$, 则 $\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$ 连续, 由高斯公式得

$$I = \iint_{\Sigma} (y^2 + z) \, dy \, dz + z^3 \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dv = \iiint_{\Omega} 3z^2 \, dv \quad \text{----- 3 分}$$

法一: $\Omega: (x, y) \in D_z, 0 \leq z \leq 2$, 其中 $D_z: x^2 + y^2 \leq z$, 利用先二后一的方法, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dz \iint_{D_z} 3z^2 \, dx \, dy = \int_0^2 3z^2 \, dz \iint_{D_z} dx \, dy = \int_0^2 \pi z \cdot 3z^2 \, dz \\ &= \pi \int_0^2 3z^3 \, dz = \pi \left[\frac{3z^4}{4} \right]_0^2 = 12\pi. \end{aligned} \quad \text{----- 6 分}$$

法二: $\Omega: x^2 + y^2 \leq z \leq 2, (x, y) \in D_{xy}$, 其中 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2$, 利用柱面坐标

$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z$, 得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^2 3z^2 \, dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho [z^3]_{\rho^2}^2 \, d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (8\rho - \rho^7) \, d\rho$$

$$= 2\pi[4\rho^2 - \frac{\rho^8}{8}]_0^{\sqrt{2}} = 12\pi \quad \text{----- 6 分}$$

四、分析题（本题 7 分）

20. 根据 a 的不同取值, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

解: 令 $u_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$, 利用比值审敛法 (或根值审敛法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}} = \frac{1}{a} \quad (\text{或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{a}) \quad \text{----- 3 分}$$

当 $a > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot a^n}$ 绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$ 收敛;

当 $0 < a < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot a^n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$ 发散;

当 $a = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛。

综上, 当 $a \geq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$ 收敛; $0 < a < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$ 发散。----- 7 分

五、应用题（本题 7 分）

21. 利用拉格朗日乘数法, 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \quad (x > 0, y > 0, z > 0) \text{ 下的极大值.}$$

解: 构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5) \quad (x > 0, y > 0, z > 0), \quad \text{----- 2 分}$$

求导得

$$\begin{cases} L_x = \frac{1}{x} + 2x\lambda = 0 & (1) \\ L_y = \frac{1}{y} + 2y\lambda = 0 & (2) \\ L_z = \frac{3}{z} + 2z\lambda = 0 & (3) \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0 & (4) \end{cases}, \quad \text{----- 5 分}$$

(1), (2), (3) 联立解得 $x^2 = y^2 = \frac{z^2}{3}$, 代入 (4) 得 $x = 1, y = 1, z = \sqrt{3}$ 。因驻点只有一

个, 根据实际问题驻点唯一性知, 该驻点处取得极大值, 且极大值为

$$f(1, 1, \sqrt{3}) = \frac{3}{2} \ln 3 \quad \text{-----7 分}$$

六、证明题 (本题 8 分)

22. 证明曲线积分 $\int_L (1 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ 与积分路径 L 无关, 并求

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (1 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy \text{ 的值.}$$

解: $P = 1 + 4xy^3$, $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以该曲线积分与路径无关。

----- 4 分

沿折线路径 $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1)$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 P(x, 0) dx + \int_0^1 Q(1, y) dy = \int_0^1 1 dx + \int_0^1 (6y^2 - 5y^4) dy \\ &= \int_0^1 1 dx + \int_0^1 (6y^2 - 5y^4) dy = 1 + [2y^3 - y^5]_0^1 = 2 \end{aligned} \quad \text{-----8 分}$$