一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 曲线 $y=\sin x$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积为---------（ B ）

(A) 2 　　(B) 4

(C) 6 　　(D) 0

2. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathbf{d}x$ 收敛需要 p 满足----------------------------------（ A ）

(A) $p>1$ 　　(B) $p\le 1$

(C) $p>0$ 　　(D) $p\ge 0$

3. 微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解形式可设为-------------------------（ C ）

(A) $a\cos 2x$ 　　(B) $ax\cos 2x$

(C) $x(a\cos 2x+b\sin 2x)$ 　　(D) $a\cos 2x+b\sin 2x$

4. 下列级数中收敛的是--（ A ）

(A) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-1)(n+3)}$ 　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

5. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为-------------------（ B ）

(A) $x+2y-z-4=0$ 　　(B) $x+2y-4=0$

(C) $2x+y-z-4=0$ 　　(D) $2x+y-z-5=0$

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 二阶常微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1\mathbf{e}^{3x}+C_2\mathbf{e}^{-x}}$.

7. 设函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则全微分 $\mathrm{d}u\,|_{(1,1,1)}=\underline{\frac{2}{3}(dx+dy+dz)}$.

8. $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}\int_{x^2}^{x+2}\sin t^2\mathbf{d}t=\underline{\sin(x+2)^2-2x\sin x^4}$.

9. 改换积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)\mathbf{d}y=\underline{\int_0^1\mathbf{d}y\int_0^{1-y}f(x,y)\mathbf{d}x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x<0, \\ 1, & 0 \le x<\pi.\end{cases}$，设 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则 $s(\frac{\pi}{4})=$ __1__，$s(3\pi)=$ __0__.

三、计算题（6 小题，每小题 6 分，共 36 分）

11. 计算定积分：$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解：$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_1^4 \ln x \mathrm{d}\sqrt{x}$ …….2 分

$=2([\sqrt{x}\ln x]_1^4 - \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x)$ …….4 分

$=2(2\ln 4 - \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x) = 2(2\ln 4 - 2\sqrt{x}\,|_1^4) = 4(2\ln 2 - 1)$ …….6 分

12. 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解法一：通解 $y = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C) = \mathrm{e}^{-\ln x}(\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x + C)$ …….4 分

$= \frac{1}{x}(\int \sin x\mathrm{d}x + C) = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$ …….6 分

解法二：齐次通解

$y' + \frac{1}{x}y = 0$，则 $y' = -\frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$，通解

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$ 齐次方程的通解为 $y = \frac{C}{x}$。 …….3 分

常数变易法，令 $y = \frac{u(x)}{x}$，则 $y' = \frac{x\cdot u'(x) - u(x)}{x^2}$，代入微分方程得

$\frac{x\cdot u'(x) - u(x)}{x^2} + \frac{u(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x + C$，

故原微分方程的通解为

$$y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$$ …….6 分

解法三：原方程化为

$xy' + y = \sin x$，即 $(xy)' = \sin x$ ……3 分

积分得 $xy=-\cos x+C$，即 $y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$ …….6 分

13. 设函数 $z=f(xy,y)$, f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'$ …….3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(f_{11}''x+f_{12})=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}$ …….6 分

14. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解：$f_x(x,y)=4-2x=0,\ f_y(x,y)=-4-2y=0,$ 得驻点 $(2,-2)$； …….2 分

$A=f_{xx}(x,y)=-2, B=f_{xy}(x,y)=0, C=f_{yy}(x,y)=-2,$ …….4 分

$AC-B^2>0, A<0$，故 $(2,-2)$ 是极大值点，极大值 $f(2,-2)=8$。 …….6 分

15. 计算 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

解：极坐标 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho \qquad \text{…….3 分}$$

$$=\pi\int_0^a e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho^2=-\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^a=\pi(1-e^{-a^2}) \qquad \text{…….6 分}$$

16. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 的敛散性. 如果收敛，指出是条件收敛还是绝对收敛.

解：$\left|(-1)^n\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|=\dfrac{n}{3^{n-1}}=v_n$，

利用比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3^n}\cdot\dfrac{3^{n-1}}{n}=\dfrac{1}{3}<1$。 …….4 分

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛 …….6 分

四、分析题（本题 8 分）

17. .求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛半径和收敛域.

解：缺少奇次幂项，利用比值判别法

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}=\frac{x^2}{2}<1$，即有$|x|<\sqrt{2}$级数收敛，$|x|>\sqrt{2}$级数发散，

故收敛半径$R=\sqrt{2}$。 …….4 分

当$x=-\sqrt{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$发散；当$x=\sqrt{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$发散。

故收敛域$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。 …….7 分

五、解答题（每小题 7 分，共 14 分）

18．利用高斯公式计算$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是介于$z=0$和$z=3$之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 9$整个表面的外侧.

解：$P=x,Q=y,R=z$，则$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3$， …….3 分

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{d}v$$

$$=3\pi\cdot 9\cdot 3=81\pi$$ …….7 分

19．计算曲线积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中$L$为抛物线$y=x^2$上从$(0,0)$到$(1,1)$的一段弧.

解：$y=x^2,x:0\to 1$，则 …….2 分

$$\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)\mathrm{d}x$$

$$=x^3|_0^1=1$$ …….7 分

六、证明题（本题满分 5 分）

20．设$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^3-xyz^2=0$确定，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2-3y^3}{2xyz}.$$

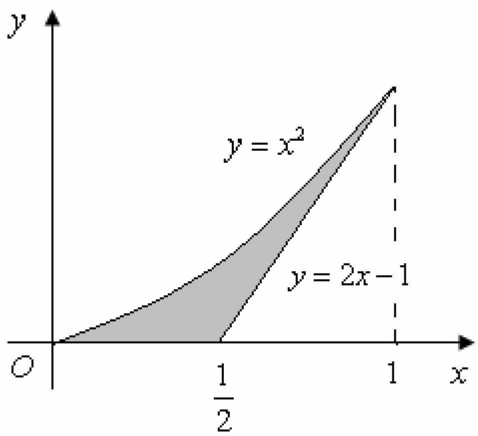
证明：令$F(x,y,z)=x^2+y^3-xyz^2$，则$F_x=2x-yz^2,F_y=3y^2-xz^2,F_z=-2xyz$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2x-yz^2}{2xyz},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3y^2-xz^2}{2xyz},$$ ……3 分

故 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\dfrac{2x-yz^2}{2xyz}-y\cdot\dfrac{3y^2-xz^2}{2xyz}=\dfrac{2x^2-3y^2}{2xyz}$.　　…….5 分

七、应用题（本题满分 7 分）

21. 过曲线 $y=x^2$ 上点 $(1,1)$ 作曲线的切线，该切线与曲线 $y=x^2$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



解： $y'=2x$，所以切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$。　　…….3 分

旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{30}$$　　…….7 分