一、单项选择题(6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1．微分方程 $y''=e^x+\sin x$ 的通解是------------------------------------（　　）

（A）$y=e^x-\cos x+C_1x+C_2$；　　（B）$y=e^x+\sin x+C_1x+C_2$；

（C）$y=e^x-\sin x+C_1x+C_2$；　　（D）$y=e^x+\cos x+C_1x+C_2$．

2. 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数均存在是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的（　）

（A）充分条件；　　（B）必要条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既不充分也不必要条件.

3. 曲线 $x=t, y=2t^2, z=3t^3$ 在 t=1 对应点处的一个切向量为------------（　　）

（A）（1，2，3）；　　（B）（1，4，6）；

（C）（1，4，9）；　　（D）（1，4，8）.

4. 设积分区域 D 是圆环:$1\le x^2+y^2\le 4$,则二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=$--（　　）

（A）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2d\rho$；　　（B）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_\rho^4\rho^2d\rho$；

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^2d\rho$；　　（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho d\rho$．

5. 设曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L(x^2+y^2)ds=$ ---------------------（　　）

（A）-2π；　（B）2π；　（C）π；　（D）$-\pi$．

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 的敛散性，下列说法正确的是--（　　）

(A) 收敛；　　(B) 发散；

(C) 不能确定；　　(D) 以上均不对.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7．微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解是 $y=$____________________.

8. 设 $f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$，则 $\overrightarrow{grad}f(1,1,2)=$__________________.

9. Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_\Omega zdxdydz=$____________.

10. 设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是平面 $z=1$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=$__________.

11. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 的和 $s=$___________.

12. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期且 $f(x)=\begin{cases} x, -\pi\le x<0 \\ 1, 0\le x<\pi \end{cases}$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则 $S(0)=$___________.

三、解答题（7 小题，共 50 分）

13. （本题 7 分） 求微分方程 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解.

14.（本题 7 分）求球面 $x^2+y^2+z^2-14=0$ 在点（$1,2,3$）处的切平面及法线方程.

15.（本题 7 分）改变积分次序并计算: $\int_0^1 dx\int_1^{2-x}\frac{e^y}{2-y}dy$.

16. （本题 7 分）利用格林公式计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y)\mathrm{d}x+(2x+ye^y)\mathrm{d}y$,其中 L 是由直线 $x+2y=2$ 上从 $A(2,0)$ 到点 $B(0,1)$ 的一段及圆弧上 $x=-\sqrt{1-y^2}$ 上从 $B(0,1)$ 到 $\mathrm{C}(-1,0)$ 的一段连接而成的有向曲线.

17. （本题 7 分） 利用高斯公式计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} xdydz-ydzdx+zdxdy$,其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围立体的整个表面的外侧.

18. （本题 7 分）判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$ 是否收敛，如收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

19.（本题 8 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的收敛域及和函数.

四、证明题（本题 6 分）

20. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\sin x+2y-z=e^{z}$ 所确定，试证明：

$2\frac{\partial z}{\partial x}-\cos x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

五、应用题（本题 8 分）

21. 高原地区由于气候原因经常缺水，经当地气象部分和民政部分考察在夏季雨水比较充沛，且多数雨水没有汇入河流中，为了不影响居民的正常生活生产用水及充分利用降水，相关部门建议居民家中建造一个蓄水池. 为了经济实惠的目的，他们要求设计院设计的蓄水池为一个容量 8 立方米的有盖长方体水箱，试问水箱长、宽、高各等于多少米时所用材料最省？