学号：________ 姓名：________ 专业班级：________ 院系：________

装 订 线

2020-2021《高等数学（下）》期末课程考试试卷 A

适用专业：工科专业　　　　考试日期：

试卷所需时间 120 分钟　　　　闭卷　　试卷总分 100 分

一、填空题：（每小题 2 分，共 16 分）

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{4+xy}-2}=$________；$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos xy}{(xy)^2e^{xy}}=$________.

2、若 $z=y^x,(y>0)$，则偏导数 $z_x=$________；$z_y=$________.

3、曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(0,1,-1)$ 的切线方程为________.

4、改变积分次序：$\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^3dx\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)dy=$________.

5、L 为平面上任一不包含原点闭区域的边界，则曲线积分 $\oint\limits_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$________.

6、设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的连续函数，且 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l})$，

则 $a_n=$________，$b_n=$________.

7、$\dfrac{1}{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 内展开成 x 的幂级数为________.

8、微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为________.

二、选择题：（共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分）

1、函数 $z=f(x,xy)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 等于（　　）

(A) $xf_{12}+f_2+xyf_{22}$；　(B) $f_{11}+f_{22}+(y+1)f_{12}$；

(C) $f_{11}+2yf_{12}+y^2f_{22}$；　(D) $f_{11}+yf_{12}+y^2f_{22}$.

2、积分 $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关的充要条件是（　　）

(A) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；　(B) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；　(C) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$；　(D) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

3、二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点是（　　）

(A)（1，0）；　(B)（1，2）；　(C)（-3，0）；　(D)（-3，2）.

4、S 为 $x^2+y^2=R^2$ 　$(R>0)$ 上 $0\le z\le 1$ 部分，则 $\iint\limits_S e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(x^2+y^2)dS$ 为（
）

(A) $2\pi Re^R\sin R^2$；　(B) $\pi Re^R\sin R^2$；　(C) $\pi R^2e^R\sin R^2$；　(D) 0.

5、设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，那么下列命题正确的是：（　　）

(A) 若 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

6、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处说法正确的是（　　）

(A) 偏导数存在且可微；　(B) 偏导数存在但不可微；

(C) 偏导数不存在且不可微；　(D) 以上都不对.

三、计算题：（共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分）

1、求函数 $z=x^3y-xy^2$ 的所有二阶偏导数.

2、已知 $z=u^2v$，其中 $u=xy$，$v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3、计算：$\int\limits_L(x^2-y)dx-(2x+\sin^2y)dy$，其中曲线 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点

$(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

4、计算：$\iint\limits_D \sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy$，其中区域 D 为：$0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

5、求：$\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中曲面 S 为 $z = x^2 + y^2$ 被 $z = 1$ 所割下的有限部分的下侧.

四、（8 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及其和函数.

五、（8 分） 设一平面平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$，且与三坐标面围成的四面体体积为 1，求此平面方程.

六、（6 分） 设 $f(x),(x>0)$ 可导，且 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^{x^2} f(\sqrt{t})dt$，求 $f(x)$.

学号：__________ 线

姓名：__________ 订

专业班级：__________ 装

院系：__________

2020-2021《高等数学（下)》期末课程考试试卷 A 答案

适用专业：工科专业　　　　考试日期：

试卷所需时间 120 分钟　　　闭卷　　　试卷总分 100 分

一、填空题：（每小题 2 分，共 16 分）

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{4+xy}-2}=\underline{\quad 4\quad}$；$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos xy}{(xy)^2e^{xy}}=\underline{\quad 1/2\quad}$.

2、若 $z=y^x$，$(y>0)$ 则偏导数 $z_x=\underline{xy^{x-1}}$；$z_y=\underline{y^x\ln y}$.

3、曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(0,1,-1)$ 的切线方程为 $\underline{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}}$.

4、改变积分次序：$\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^3dx\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)dy=\underline{\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)dx}$.

5、L 为平面上任一不包含原点闭区域的边界，则曲线积分 $\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\underline{\quad 0\quad}$.

6、设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的连续函数，且 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l})$，

则 $a_n=\underline{\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx,(n=0,1,\cdots)}$，$b_n=\underline{\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx,(n=1,2,\cdots)}$.

7、$\dfrac{1}{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 内展开成 x 的幂级数为 $\underline{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots}$.

8、微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $\underline{y=(C_1+C_2x)e^{-x}}$.

二、选择题：（共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分）

1、函数 $z=f(x,xy)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 等于（ C ）

(A) $xf_{12}+f_2+xyf_{22}$；　(B) $f_{11}+f_{22}+(y+1)f_{12}$；

(C) $f_{11}+2yf_{12}+y^2f_{22}$；　(D) $f_{11}+yf_{12}+y^2f_{22}$.

2、积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关的充要条件是（ A ）

(A) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；　(B) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$；　(C) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$；　(D) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

3、二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点是（ D ）

(A)（1，0）；　(B)（1，2）；　(C)（-3，0）；　(D)（-3，2）.

4、S 为 $x^2+y^2=R^2$　$(R>0)$ 上 $0\le z\le 1$ 部分，则 $\iint_S e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(x^2+y^2)dS$ 为（ A ）

(A) $2\pi Re^R\sin R^2$；　(B) $\pi Re^R\sin R^2$；　(C) $\pi R^2e^R\sin R^2$；　(D) 0.

5、设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，那么下列命题正确的是：（ D ）

(A) 若 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

6、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处说法正确的是（ B ）

(A) 偏导数存在且可微；　(B) 偏导数存在但不可微；

(C) 偏导数不存在且不可微；　(D) 以上都不对.

三、计算题：（共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分）

1、求函数 $z=x^3y-xy^2$ 的所有二阶偏导数.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-2xy$，…………4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3x^2-2y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$…………10 分

2、已知 $z=u^2v$，其中 $u=xy$，$v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=3x^2y^2+2xy^3$…………5 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2y^2+2x^3y$…………10 分

3、计算：$\int\limits_L (x^2-y)dx-(2x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解：$\int\limits_{L+L_1+L_2}(x^2-y)dx-(2x+\sin^2 y)dy=-\iint\limits_D(-2+1)dxdy=\frac{\pi}{4}$…………4 分

$\int\limits_{L_1}(x^2-y)dx-(2x+\sin^2 y)dy=-\int_1^0(2+\sin^2 y)dy=\frac{5}{2}-\frac{\sin 2}{4}$…………6 分

$\int\limits_{L_2}(x^2-y)dx-(2x+\sin^2 y)dy=\int_1^0 x^2dx=-\frac{1}{3}$…………8 分

$\int\limits_L(x^2-y)dx-(2x+\sin^2 y)dy=\frac{\pi}{4}-\frac{13}{6}+\frac{\sin 2}{4}$…………10 分

4、计算：$\iint\limits_D\sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy$，其中区域 D 为：$0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

解：原式=$\iint\limits_D|\cos(x+y)|dxdy$…………4 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy$…………8 分

$=\pi-2$…………10 分

5、求：$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中曲面 S 为 $z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 所割下的有限部分的下侧.

解：原式=$\iiint\limits_\Omega 2(x+y+z)dv-\iint\limits_D dxdy$…………6 分

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)dz-\pi$…………8 分

$=-\frac{\pi}{3}$…………10 分

四、（8 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域及其和函数，并求 $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$ 的和。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right|=|x|<1$，当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$。…………4 分

设在 $(-1,1)$ 内 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=S(x)$，则当 $x\ne 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{S(x)}{x}$，逐项积分得

$\frac{x}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\int_0^x\frac{S(x)}{x}dx$，两边求导得 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$，当 $x=0$ 时，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=0$，所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 在收敛域 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$。

…………6 分

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=S(\frac{1}{2})=2$，所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=3$。

…………8 分

五、（8 分） 设一平面平行于平面 $6x+y+6z+5=0$，且与三坐标面围成的四面体体积为 1，求此平面方程.

解：依题意设该平面方程为 $6x+y+6z=D$，则其截距式方程为 $\frac{x}{\frac{D}{6}}+\frac{y}{D}+\frac{z}{\frac{D}{6}}=1$，

…………6 分

又由该平面与三坐标面围成的四面体体积为 1，得 $\frac{1}{6}\left|\frac{D}{6}\times D\times\frac{D}{6}\right|=1$，$D=\pm 6$，所以该平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6$。…………8 分

六、（6 分） 设 $f(x),(x>0)$ 可导，且 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^{x^2}f(\sqrt{t})dt$，求 $f(x)$.

解：由 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^{x^2}f(\sqrt{t})dt$ 得 $xf(x)=x+\int_1^{x^2}f(\sqrt{t})dt$，…………2 分

两边求导整理得 $f'(x)+\frac{1-2x}{x}f(x)=\frac{1}{x}$，…………4 分

解该一阶线性微分方程得 $f(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{Ce^{2x}}{x}$。…………6 分