

一、单项选择题(6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知 $y_1 = \cos wx$ 及 $y_2 = \sin wx$ 都是微分方程 $y'' + w^2 y = 0$ 的解, 则该方程的通解为----

----- ()

(A) $y = Cx \tan wx$; (B) $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$;

(C) $y = C_1 \cot wx + C_2 \tan wx$; (D) $y = C_1(\cos wx + \sin wx) + C_2$.

2. 改换二次积分的积分次序: $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy =$ ----- ()

(A) $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$; (B) $\int_0^a dx \int_0^a f(x, y) dy$;

(C) $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$; (D) $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$.

3. 函数 $z = xy + \frac{x}{y}$, 则 $dz =$ ----- ()

(A) $(y + \frac{1}{y}) dx + x(1 - \frac{1}{y^2}) dy$; (B) $(y + \frac{1}{y}) dx + x(1 + \frac{1}{y^2}) dy$;

(C) $(y^2 + \frac{1}{y}) dx + x(1 - \frac{1}{y^2}) dy$; (D) $(y - \frac{1}{y}) dx + x(1 + \frac{1}{y^2}) dy$.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ (a 为常数) 收敛, 则 q 应满足----- ()

(A) $|q| > 1$; (B) $q = 1$; (C) $q = -1$; (D) $|q| < 1$.

5. 设 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧, 则 $\int_L \sqrt{y} ds =$ ----- ()

(A) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$; (B) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+y} dy$;

(C) $\int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx$; (D) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{y}} dy$.

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数, 正确的是----- ()

(A) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$; (B) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1)$;

$$(C) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1); \quad (D) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1).$$

二、填空题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

7. 微分方程 $y'' = x$ 的通解 $y = \underline{\hspace{10em}}$.

8. 设函数 $z = x^2 \sin 2y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{10em}}.$

9. 设闭区域 Ω 为 $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c$, 则 $\iiint_{\Omega} 1 \, d\sigma = \underline{\hspace{10em}}.$

10. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s_1 与 s_2 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \underline{\hspace{10em}}.$

11. 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则系数 b_n 的表达式为 $\underline{\hspace{10em}}.$

12. 设 f 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的连续函数, 将二重积分

$I = \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$ 化为极坐标系下的二次积分的结果是 $I = \underline{\hspace{10em}}.$

三、解答题 (7 小题, 每小题 6 分, 共 42 分)

13. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$ 通解.

14. 求曲线 $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t, z = t$ 在点 $(2, 0, \frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程.

15. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

16. 计算 $\iint_D xy \, d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = 1$ 、 $x = 2$ 及 $y = x$ 所围成的闭区域.

17. 求函数 $z = xy$ 在点 $(1, 2)$ 处沿方向 $\vec{l} = (1, 1)$ 的方向导数.

18. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛域.

19. 求 $\iint_{\Sigma} (y^2 + z) d y d z + z^3 d x d y$, 其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 2$ 所围成的整个立体表面的外侧.

四、分析题（本题 7 分）

20. 根据 a 的不同取值, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot a^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

五、应用题（本题 7 分）

21. 利用拉格朗日乘数法, 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 下的极大值.

六、证明题（本题 8 分）

22. 证明曲线积分 $\int_L (1+4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ 与积分路径 L 无关, 并求 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (1+4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ 的值.