**2017-2018-2**

# 《线性代数与空间解析几何》期末试卷 A 标准答案

## 一、单项选择题

1. **B** **2.** A 3. **D** 4. **C** 5. **C**

## 二、 判断题

6. 交换行列式的两列，行列式的值不变 ………………（ B （×)）.

7. 两非零向量正交的充要条件是它们的内积等于零………（ **A** （√) ）.

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}(2(5))$ 是第二种初等矩阵, 则

$$\boldsymbol{AE}(2(5))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$ ……………………………………（B（×)).

9. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组线性无关的解就是一个基础解系（B (×）).

10. 相似矩阵有相同的特征值………………………………(A (√)).

## 三 、填空题(5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|-\boldsymbol{A}^{-1}|=$ <u>$-1/2$</u>.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=$ <u>1</u>.

13. 点 $P(1,2,-1,)$ 到平面 $2x-2y+z-1=0$ 的距离等于 <u>$\frac{4}{3}$</u>.

14. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0, |\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0, |\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=0,$，则行列 $|2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=$ <u>$-45$</u>.

15. 空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ 在 yoz 面上的投影曲线方程为：<u>$\begin{cases} \dfrac{(z-3)^2}{4}+y^2=1, \\ x=0. \end{cases}$</u>

## 四、解答题（4 小题, 16-19，每小题 8 分，共 32 分）

16. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 4 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ………………… 3 分

$=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ ……………… 6 分

$=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$ ………………………… 8 分

17. 求过点 $M_0(-1,2,3)$ 且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,-1), \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-1)$ 平行的平面方程.

解 因 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 不平行，所以所求平面平行于两向量所在平面，取平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(3,-1,5)$$ ………………………… 4 分

由点法式得平面方程：$3(x+1)-(y-2)+5(z-3)=0$，即 $3x-y+5z-10=0$ ……… 8 分

18. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，用初等变换法解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

解 $(\boldsymbol{A},B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ……… 2 分

$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ……… 6 分

$X=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. ………………………… 8 分

19. 求下列非齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=6, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=-2. \end{cases}$$

解 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -3 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……… 3 分

最简形对应的方程组 $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{7}{4}, \\ x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{3}{4}. \end{cases}$ $x_3$，$x_4$ 为自由未知量. .. 4 分

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得一个特解 $\eta_0=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，………………………… 5 分

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，得导出组的基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_{,2}=\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. ……… 7 分

通解为 $x=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$k_1,k_2\in R$. ………………………… 8 分

## 五、综合题（2 小题，20-21，每小题 9 分，共 18 分）

20. 判断向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 线性表示？若能，求出表示系数.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}$，$x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)$, 对 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换.

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\-2&5&0&1\\-1&2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\0&-1&2&5\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\0&-1&0&1\\0&0&2&4\end{pmatrix}$$ ................ 3分

因 $R(A)=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解.

$\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$ 线性表示，且表示式唯一, 表示系数就是方程组的解.

............................................................................................................ 5分

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\0&-1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$ ........................................................ 8 分

所以表示系数 $\boldsymbol{x}_1=-3$, $\boldsymbol{x}_2=-1$, $\boldsymbol{x}_3=2$ ................................................ 9 分

21. 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y}$，把二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2++2x_3^2+8x_1x_3$ 化为标准形.

解 二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&1&2\end{pmatrix}$,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&4\\0&6-\lambda&0\\4&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$. ................................................ 3分

当 $\lambda_1=\lambda_2=6$时，方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})x=0$ 的基础解系为

$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_{,2}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. ................................................ 5分

当 $\lambda_3=-2$时，方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E})x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. ...... 6分

令 $P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P_{,2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，得正交矩阵

$P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$. 即得所求的正交变换为$\boldsymbol{x=py}$，...... 8分

二次型的标准形为 $f=6y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$. ................................................ 9分

## 六、应用题(共 5 分)

22. 解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&9&6\\5&8&6.5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.4&0.06\\0.3&0.04\\0.5&0.07\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}7&9&6\\5&8&6.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.4&0.06\\0.3&0.04\\0.5&0.07\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8.5&0.9\\7.65&1.785\end{pmatrix}$ 的第一行为甲的总销售额和总利润；第二行为乙的.