郑州轻工业大学 2022/2023 学年 第 2 学期 线性代数与空间解析几何 试卷（A 卷）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《线性代数与空间解析几何》试卷（A 卷答案、评分标准）

（本试卷共 5 道大题，20 个小题，满分 100 分）

一、选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知 $6i541j$ 为奇排列，则 i, j 的值分别为------------------------------(B)

(A) i=3, j=2； (B) i=2, j=3； (C) i=3, j=7； (D) i=2, j=7.

2. 直线 $l:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与平面 $\pi: x+2y+3z=4$ 的位置关系为--(A)

(A) $l//\pi$； (B) l在π内； (C) $l\perp\pi$； (D)不是前面三种关系.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则必有--(C)

(A) $AP_1P_2=B$； (B) $AP_2P_1=B$； (C) $P_1P_2A=B$； (D) $P_2P_1A=B$.

4. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$, 则下列说法**错误**的是-(D)

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关； (B) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关； (D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

5. 设 A, B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论**错误**的是------(C)

(A) A^{T} 与 B^{T} 相似； (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似；

(C) $A+A^{\mathrm{T}}$ 与 $B+B^{\mathrm{T}}$ 相似； (D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 λ 的取值范围为 --(A)

(A) $-2<\lambda<1$； (B) $1<\lambda<2$；

(C) $-3<\lambda<-2$ ； (D) $\lambda>2$.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知 4 阶行列式 D 第 3 行的元素分别为1, 3, -2, 2，对应的余子式分别等于3, -2, 1, 1，则 $D=$ __________ . 5

8. 空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为_ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$.

9. 设 A, B 均是 n 阶可逆矩阵，且 $|A|=2, |B|=3$，则 $|AB^{-1}|=$____ $\dfrac{2}{3}$ __.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $R(A)$ =3，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^T$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为_________.

$(1,2,3,4)^T+k(2,3,4,5)^T$，其中k为任意实数.

11. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$___3___, $y=$__-2___.

12. 设三元实二次型f的矩阵 A 满足 $|A+E|=0, |A-2E|=0, |2A+E|=0$，$E$ 为三阶单位矩阵，则 f 的规范形为___ $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$ ___.

三、解答题（6 小题，共 54 分）

13.（**本题 7 分**）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}\overset{r_2+2r_1}{\underset{r_3-3r_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&3&4\end{vmatrix}$ **5 分**

法一 $\overset{r_4-3r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-4.$ **7 分**

法二 $=\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}=-1\times4=-4.$ **7 分**

14.（**本题 8 分**）求过点(1, 1, −1)且平行于向量 ***a***=(2, 1, 1)和 ***b***=(1, −1, 0)的平面方程.

解 设平面的法向量为向量 n，由于平面与向量 a 和 b 都平行，所以可以取 $n=a\times b$. 即

$$n=a\times b=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=(1,1,-3).$$ **4 分**

所以平面的点法式方程为 $x-1+(y-1)-3(z+1)=0$, 即 **8 分**

$$x+y-3z-5=0.$$ **8 分**

15.（**本题 9 分**）设 3 阶方阵 A 和 B 满足 $A+B=AB$，且 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解 由 $A+B=AB$ 可以得到 $A(B-E)=B$，所以 $A=B(B-E)^{-1}$. **2 分**

由题意可知，

$$B-E=\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$ **3 分**

下面求 $(B-E)^{-1}$.

方法一 将 $B-E$ 进行分块，得到 $B-E=\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$，其中

$A_1=\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}, A_2=(1)$， **4 分**

由伴随矩阵法可以得到，$A_1^{-1}=\dfrac{A_1^*}{|A_1|}=\begin{pmatrix}0&1\\-\dfrac{1}{2}&0\end{pmatrix}$,

$A_2^{-1}=(1)$, **6 分**

由分块矩阵的逆矩阵可知 $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\dfrac{1}{2}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$ **7 分**

方法二 利用初等变换法求逆矩阵.

$$(B-E\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&-2&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&0\\0&-2&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-\dfrac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right).$$ **6 分**

所以 $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **7 分**

因此，$A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **9 分**

16.（**本题 10 分**）已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ k+2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \\ k \end{pmatrix},$$

求: (1) k 为何值时，向量组线性相关? (2) 线性相关时求一个极大无关组，并把不属于极大无关组的向量用极大无关组线性表示.

解 作矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & k+2 & k \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & k-7 & k+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & k-9 & k-2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-(k-9)r_3]{r_3\times\left(-\frac{1}{7}\right)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$

4 分

(1) 由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以 $R(A)$<4, 由矩阵 A 的行阶梯形矩阵可知 $R(A)$=3, 所以 k=2. **6 分**

(2) 由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，可以取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的一个极大线性无关组. 继续对行阶梯形矩阵进行初等行变换，得到

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

9 分

由最简形矩阵可以得到 $\alpha_4=2\alpha_2$. **10 分**

17.（**本题 10 分**）求非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6x_3-5x_4=3 \\ \qquad\quad x_2-4x_3+x_4=1 \\ 4x_1-5x_2+8x_3-9x_4=7 \end{cases}$ 的通解.

解 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 6 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 8 & -9 & 7 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 6 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 6 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+3r_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

4 分

最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases} x_1=3x_3+x_4+3, \\ x_2=4x_3-x_4+1, \end{cases}$ 其中 x_3, x_4 为自由未知量.

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 于是得原方程组的一个特解为 $\eta_0=(3,1,0,0)^T$.

6 分

其导出组为$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + x_4, \\ x_2 = 4x_3 - x_4, \end{cases}$ 其中 x_3, x_4 为自由未知量. 令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 于是导出组的基础解系为 $\xi_1 = (3,4,1,0)^T, \xi_2 = (1,-1,0,1)^T$.

9 分

故原方程组的通解为 $x = \eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数. 10 分

18.（**本题 10 分**）用正交变换法把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

化为标准形, 写出所用的正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，并指出 f=1 所对应的图形.

解 该二次型对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 1 分

由特征多项式 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\cdot(\lambda+3)(\lambda-3)$ 得，矩阵

A 的所有特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$. 3 分

当 $\lambda_1 = 0$ 时，由 Ax=0 即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得 $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. 5 分

当 $\lambda_2 = -3$ 时，由(A+3E)x=0 即 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得基础解系为

$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. 6 分

当 $\lambda_3 = 3$ 时，由(A-3E)x=0 即 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得基础解系为

$\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $p_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. 7 分

令 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 为正交变换，使得

二次型的标准形为 $f = -3y_2^2 + 3y_3^2$. 9 分

f=1 对应的方程为 $-3y_2^2 + 3y_3^2 = 1$，表示双曲柱面. 10 分

四、证明题（本题 5 分）

19. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，证明：矩阵 A 与 B 有相同的特征多项式.

证明：由矩阵 A 与 B 相似可得，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，**1 分**

则有

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda E|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|$$ **3 分**

$$=|P^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|P|=|A-\lambda E|,$$

即矩阵 A 与 B 有相同的特征多项式. **5 分**

五、应用题（本题 5 分）

20. 设脱脂牛奶、大豆面粉和乳清三种食物每 100g 中蛋白质、碳水化合物与脂肪的含量如下表，表中还给出了当下比较流行的简捷营养处方. 如果用这三种食物作为每天的主要食物，那么我们需要确定每种食物的用量来全面准确地实现这个营养需求. 试建立相应的线性方程组（**无需求解**）.

营养	每 100g 食物所含营养(g)			每日所需的营养量
	脱脂牛奶	大豆面粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

解 设脱脂牛奶、大豆面粉和乳清的用量分别为 x_1,x_2,x_3 个单位(每单位 100g).

那么由题意可知，所求的方程组为

$$\begin{cases}36x_1+51x_2+13x_3=33,\\52x_1+34x_2+74x_3=45,\\7x_2+1.1x_3=3.\end{cases}$$ **5 分**