一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $I(x)=\int_x^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t$, 则 $I'(x)=$--------------------------------------（　　）

(A) $\cos x^2-\cos x$　　(B) $2x\cos x^2-\cos x$

(C) $2x\sin x^2-\sin x$　　(D) $2x\sin x^2+\sin x$

2. 设 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则必有-------------------------------（　　）

(A) $I>0$　　(B) $I<0$

(C) $I=0$　　(D) $I\ (\neq 0)$ 的符号不能确定

3. 微分方程 $y''-2y'=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解形式可设为--------------------------（　　）

(A) $(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$　(B) $x(ax+b)$　(C) $x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$　(D) $ax\mathrm{e}^{2x}$

4. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 都存在是函数 $f(x,y)$ 在该点可微的--（　　）

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

5. 下列级数中不收敛的是--（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=1$，则 $\int_1^{1+2016T}f(x)\mathrm{d}x$

$=$________.

7. 积分曲线 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$ 中满足 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的曲线是________.

8. 函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=$____________.

9. $\int_L (x+y)\mathrm{d}s=$__________，其中 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段.

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n$ 的收敛区间为____________.

三、解答题（6 小题，每小题 7 分，共 42 分）

11. 计算定积分：$\int_0^4 \dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

12. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

13. 设 $w=f(x+y+z,xyz)$, f 具有二阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

14. 求函数 $z=x\cdot\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

15. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

16. 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程.

四、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.

18. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

五、应用题（本题满分 7 分）

19. 设曲线 $y=\mathrm{e}^x$，

① 在此曲线上求一点A，使曲线在该点的切线通过坐标原点O；

② 求由曲线$y = \mathrm{e}^{x}$，切线OA及y轴所围的平面图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积.

六、证明题（本题满分 5 分）

注：以下两题任选一题，多做无效.

20（1）. 证明：$\int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(x) g'(y) \mathrm{d}x = \int_0^a f(x)[g(x) - g(0)] \mathrm{d}x$.

20（2）. 设函数$f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| \mathrm{d}t$，证明$f(x+\pi) = f(x)$.