

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

《线性代数与空间解析几何》期末考试试卷 A

适用专业：2017 级理工科本科专业

本试卷共 3 页，四大题 19 小题，总计 100 分

(注意：请将所有题的答案写在答题卡上，写在试卷上无效)

一、单项选择题 (6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 A 、 B 均为 n 阶矩阵，则下列结论中正确的是 ()
- (A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$; (B) $(AB)^k = A^k B^k$;
- (C) $|kAB| = k|A||B|$; (D) $|(AB)^k| = |A|^k |B|^k$.

2. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$ ，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{13} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{23} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{33} & 2a_{32} \end{vmatrix} =$ ()

- (A) 4; (B) -4; (C) 16; (D) -16

3. 下列矩阵中秩为 2 的是 ()

- (A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

- (C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. 关于线性方程组的解，下述说法正确的是 ()

- (A) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解;
- (B) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解;
- (C) 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解;

- (D) 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解.

5. 在空间直角坐标系下，下列说法错误的是 ()

- (A) 方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 表示椭球面;
- (B) 方程 $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$ 表示双叶双曲面;
- (C) 方程 $z = x^2 + 2y^2$ 表示椭圆抛物面;
- (D) 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱面.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ ，其中 $P = (P_1, P_2, P_3)$ ，若 $Q = (P_3, P_1, P_2)$ ，则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在变换 $x = Qy$ 下的标准形为 ()

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
- (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; (D) $-y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$.

二、填空题(6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

7. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $(AB)^T =$ _____.

8. 设向量 $\alpha = (1, 2, 1, -1)^T$ 与向量 $\beta = (1, 0, 1, x)^T$ 正交，则 $x =$ _____.

9. 点 $P(1, 1, 1)$ 到平面 $x + 2y - 2z - 2 = 0$ 的距离等于 _____.

10. 设 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 1, 2, -1，则行列式 $|2A + 3E| =$ _____.

11. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2tx_2x_3 + 3x_3^2$ 为正定二次型，则 t 的取值范围是 _____.

12. 空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 在 xOy 面上投影曲线的方程为: _____.

三、解答题 (6 小题，每小题 9 分，共 54 分)

13. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

14. 已知 3 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 判断矩阵 A^* 是否可逆, 若可逆求出其逆矩阵.

15. 求过点 $P(1,1,1)$ 且垂直于直线 $L: \begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x-5y+3z+2=0 \end{cases}$

的平面方程.

16. 判断向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

的线性相关性.

17. 求下列非齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

18. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

四、证明题(共 4 分)

19. 设 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记

(I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$, (II) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$,

证明: α_m 能由 (II) 线性表示, 但不能由 (I) 线性表示.