2015-2016《线性代数与空间解析几何》

期末试卷 A 标准答案

一、填空题（1-7 题，9 空 18 分 ）

1. x=1，z=1 ； 2. -2 ； 3. -3 ； 4. $-\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6. (1) 单叶旋转双曲面，（2）圆锥面；7. 6 .

二、选择题（8-12 题）

8. C； 9. B ； 10. D； 11. B； 12. D.

三、解答题（13-17 题 共 36 分）

13.（本题 6 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 求 $B^T A$.

解 $B^T A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ………………………… 2 分

$=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 24 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ ………………………………… 6 分

14.（本题 8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

解法一

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

……………………………………………… 4 分

$$\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=-9\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&1&5\\0&0&17&85\end{vmatrix}=-9\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0 \quad \text{..........} \ 8\text{分}$$

解法二

$$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\overset{c_3-c_2}{\underset{c_4-7c_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}4&1&1&-3\\1&2&-2&-12\\10&5&-3&-35\\0&1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&1&-3\\1&-2&-12\\0&-3&-35\end{vmatrix}\overset{c_3+3c_2}{\underset{c_1-4c_2}{=\!=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix}0&1&0\\9&-2&-18\\22&-3&-44\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}9&-18\\22&-44\end{vmatrix}=-9\times 22\begin{vmatrix}1&-2\\1&-2\end{vmatrix}=0;$$

15.（**本题 8 分**） 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ ，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 作矩阵 $(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&2&5&1&9\\0&0&1&1&3\end{array}\right) \quad \text{..........} \ 4\text{分}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&-1&-4\\0&2&0&-4&-6\\0&0&1&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&-1&-4\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right) \quad \text{..........} \ 7\text{分}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right)\qquad X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}. \quad \text{..........} \ 8\text{分}$$

16.（**本题 6 分**） 求过点 $A(1,-1,2)$ 且与直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-2y+z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

解 直线的方向向量为

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-2,-3)$$ ……………………… 3 分

因直线与平面垂直，所以直线的方向向量就是平面的一个法向量，于是由点法式可得平面方程为：$-1(x-1)-2(y+1)-3(z-2)=0$ 即 $x+2y+3z-5=0$ ………6 分

17. （**本题 8 分**） 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4+x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$ 的通解.

解 方程组的增广矩阵为

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ ……… 3 分

由最简形矩阵得方程组 $\begin{cases} x_1=-3x_3+2x_4+x_5-1 \\ x_2=2x_3-3x_4-x_5+2 \end{cases}$ 其中 x_3，x_4，x_5 为自由未知量. 取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得其导出组的基础解系为：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ……………………………6 分

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得非齐次方程组的一个特解 $\eta_0=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，于是，所求方程组的通解为 $x=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$ ，（k_1, k_2, k_3 为任意实数）.

……………………………………8 分

四、讨论题 （本题 6 分）

18. 已知 $\alpha_1=(1,-2,3)^T,\alpha_2=(2,1,0)^T,\alpha_3=(1,-7,9)^T$，

试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

解法一 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&1&-7\\3&0&9\end{vmatrix}=0$ ....4 分

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. ....6 分

解法二

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&-7\\3&0&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\gamma_3-3\gamma_1]{\gamma_2+2\gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&5&-5\\0&-6&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\gamma_3+\frac{6}{5}\gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&5&-5\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

五、综合题（2 小题，共 20 分）

19. **（本题 10 分）**求向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}5\\5\\2\\0\end{pmatrix}$$ 的秩及一个极大

线性无关组.

解 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&3&2&2&5\\2&2&3&2&5\\3&1&1&2&2\\-1&-1&1&-1&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\2&2&3&2&5\\3&1&1&2&2\\1&3&2&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&0&5&0&5\\0&-2&4&-1&2\\0&2&3&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&7&0&7\\0&2&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&2&3&1&5\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ .... 5 分

从行阶梯形矩阵可看出，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，且阶梯形矩阵非零首元所在的列为 1，2，3 列，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2，3 列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，故所求向量组的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为它的一个极大无关组.

....10 分

20.（**本题 10 分**）设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=(2-\lambda)(4-\lambda)^2=0$，

得特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$. .... 3 分

对于 $\lambda_1=2$，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得基础解系为

$(0,1,-1)^T$，单位化得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. .... 6 分

对于 $\lambda_2=\lambda_3=4$，由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得基础解系为

$(1,0,0)^T,(0,1,1)^T$，因为该基础解系中的两个向量恰好正交，只要单位化即得两个正交的单位特征向量：$\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^T,\boldsymbol{p}_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. .... 9 分

于是可得正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}.$$ ....10 分

六、 证明题（本题 5 分）

21．设η^*是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的一个解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax = 0}$ 的一个基础解系，证明$\eta^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关.

证明： 设存在数 k， k_1， k_2，…， k_{n-r} 使得

$$k\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$ ……………………2 分

上式两端左乘 A 得

$$kA\eta^* + k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 + \cdots + k_{n-r}A\xi_{n-r} = 0$$ ……………3 分

由于 $A\eta^* = b$, $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0, \cdots, A\xi_{n-r} = 0,$ 所以有

$k\boldsymbol{b} = 0$ 而 $b \neq 0$ ，则 $k = 0$ ，于是得

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ ，

又因$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系线性无关，

所以 k_1， k_2，…， k_{n-r} 全为 0，综上，$\eta^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

……………………5 分 .