装 订 线

	一	二	三					四		五
	1—6	7—12	13	14	15	16	17	18	19	20

得 分	

一、单项选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}-3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=$----------（ A ）

(A) 2； (B) -2； (C) 6； (D) -6.

2. 对二次曲面，下列说法不正确的是--------------------------（ A ）

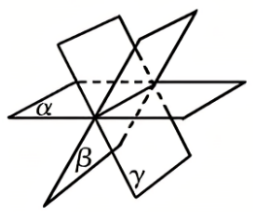
(A) 方程 $x^2+3y^2-2z^2=1$ 表示椭球面;

(B) 方程 $x^2+y^2-z^2=0$ 表示锥面;

(C) 方程 $y^2=x$ 表示抛物柱面;

(D) 方程 $\frac{1}{4}x^2-y^2+\frac{1}{9}z^2=1$ 表示单叶双曲面.

3. 三个平面 α,β,γ 在空间的位置关系如右图所示，三个平面的方程 $A_ix+B_iy+C_iz=D_i\ \ (i=1,2,3)$ 组成一个线性方程组，系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\ \widetilde{A}$，则-------（ B ）



(A) $R(A)=2,\ R(\widetilde{A})=3$； (B) $R(A)=2,\ R(\widetilde{A})=2$；

(C) $R(A)=1,\ R(\widetilde{A})=2$； (D) $R(A)=1,\ R(\widetilde{A})=1$.

4. 设 A,B 为3阶矩阵, $|A|=6,|B|=2$，则 $|AB^{-1}|=$-------------------（ A ）

(A) 3； (B) 6； (C) 12； (D) 24.

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & y \\ 1 & y & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $y=$---------（ C ）

(A) 1； (B) 2； (C) 0； (D) 3.

6. 已知3阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2,-3$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的一个标准形为---（ B ）

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$； (B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$；

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$； (D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

得 分	

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$， A_{11},A_{12} 是行列式中元素 a_{11},a_{12} 的代数余子式，则 $A_{11}+A_{12}=$____________. 1

8. 点 $(1,2,-3)$ 到平面 $2x+y-2z-19=0$ 的距离为____________. 3

9. 若非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3=1 \\ \quad kx_2+3x_3=2 \\ x_1+5x_2+kx_3=3 \end{cases}$ 有无穷多解，则 $k=$__________. 4

10. 已知 3 阶矩阵 A 满足 $|A-E|=|A+2E|=|A+E|=0$, 则 $|A^2+E|=$____. 20

11. 若 A 为 3 阶方阵，将 A 的第二行加到第三行得到 B ,再将 B 的第一行与

第二行交换得到C,使得$QA=C$,则$Q=$__________. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

12. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2$ 是正定二次型，则t的取值范围是_______________. $(-1,1)$

三、解答题（5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

得　分	

13. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\2&1&-1&1\\2&3&4&0\\1&2&3&4\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\0&-1&3&-1\\0&1&8&-2\\0&1&5&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\0&-1&3&-1\\0&0&11&-3\\0&0&8&2\end{vmatrix}$ 　5 分

$=\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\0&-1&3&-1\\0&0&11&-3\\0&0&0&\frac{46}{11}\end{vmatrix}$ 　7 分

$=-46$ 　8 分

得　分	

14. 解方程$AX=B$，其中$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\1&0\end{pmatrix}$.

解： $(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2\\2&2&1&0&3\\3&4&3&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&2\\0&-2&-5&-2&-1\\0&-2&-6&-2&-6\end{pmatrix}$, 　5 分

$\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&-13\\0&-2&0&-2&24\\0&0&1&0&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&11\\0&1&0&1&-12\\0&0&1&0&5\end{pmatrix}$ 　6 分

故$X=\begin{pmatrix}-1&11\\1&-12\\0&5\end{pmatrix}$ 　8 分

得　分	

15. 求过点$(1,0,-1)$且与直线$\begin{cases}x+2y-z+1=0\\2x-y-3z-3=0\end{cases}$垂直的平面方程.

解：平面的法向量就是直线的方向向量$\vec{n}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2&-1\\2&-1&-3\end{vmatrix}=(-7,1,-5)$ 　5 分

平面的点法式方程为：$7(x-1)-y+5(z+1)=0$ 　8 分

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装……订……线

得 分	

16. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\5\end{pmatrix}$ 的秩及一个极大无关组，并把不属于极大无关组的向量用极大无关组表示出来.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&1&1&4\\1&1&0&-1\\-3&-2&0&0\\1&0&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&6\\0&1&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 3 分

$\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-1&1&6\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 5 分

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3， 6 分

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， 7 分

$\alpha_4=2\alpha_1-3\alpha_2+3\alpha_3$. 8 分

得 分	

17. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+x_4-x_5=2\\2x_1-3x_2+5x_3+2x_4-x_5=5\end{cases}$ 的通解.

解：$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&1&-1&2\\2&-3&5&2&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&1&-1&2\\0&-1&-1&0&1&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&4&1&-2&1\\0&1&1&0&-1&-1\end{pmatrix}$ 4 分

对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=-4x_3-x_4+2x_5+1\\x_2=-x_3\qquad\qquad+x_5-1\end{cases}$，令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，得原方程组的一个特解为 $\eta_0=(1,-1,0,0,0)^T$ 5 分

导出组为 $\begin{cases}x_1=-4x_3-x_4+2x_5\\x_2=-x_3\qquad\qquad+x_5\end{cases}$，令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得导出组的基础解系为

$\xi_1=\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 7 分

原方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+\eta_0$，（其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数） 8 分

四、综合题（2 小题，共 19 分）

得 分	

18.（本题 9 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量空间 R^3 的一组基，向量 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$.

(1) 证明：向量组 β_1,β_2,β_3 也是 3 维向量空间 R^3 的一组基；

(2) 若向量 $\gamma=\beta_1+2\beta_2+\beta_3$,求向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

（1）证明：（1）证明方法不唯一

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3)=0,$ 1 分

则 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0,$， 2 分

因向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量空间 R^3 的一组基，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，3 分

则 $\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\end{cases}$ 系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{vmatrix}=2\neq0$，则方程组有唯一解，且

$k_1=k_2=k_3=0,$ 4 分

故向量组β_1,β_2,β_3线性无关，也是3维向量空间R^3的一组基　　　5分

（2）因$\gamma=\beta_1+2\beta_2+\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，　　　6分

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$　　　8分

故向量γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(2,3,3)^T$.　　　9分

得　分	

19.（本题10分）求一个正交变换$x=Py$，将二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_3$化为标准形.

解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，　　　1分

解特征方程$\left|A-\lambda E\right|=(1+\lambda)^2(3-\lambda)=0$，

得特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=3$　　　4分

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，解方程$(A+E)x=0$，得基础解系$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，已正交

，单位化得$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$　　　7分

当$\lambda_3=3$时，解方程$(A-3E)x=0$，得基础解系$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得$p_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

8分

取$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，则$P$为正交矩阵　　　9分

于是经正交变换$x=Py$将二次型化为标准型：$f=3y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　　10分

得　分	

五、应用题（本题5分）

20. 一家服装厂共有3个加工车间，每个车间用一匹布能加工的产品数量如下表所示，现该厂接到一个订单，要求供应2000件衬衫、3500条长裤和2400件外衣，请问该厂应如何向3个车间分配原材料（布匹），以恰好完成该订单。

3个车间用一匹布能加工的产品及数量

车间 产品	第一车间	第二车间	第三车间
衬衫	4	4	8
长裤	15	5	10
外衣	3	9	3

解：设该厂向3个车间分配原材料为x_1,x_2,x_3匹布，则　　　1分

$$\begin{cases}4x_1+4x_2+8x_3=2000\\15x_1+5x_2+10x_3=3500\\3x_1+9x_2+3x_3=2400\end{cases}$$　　　3分

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 2000 \\ 15 & 5 & 10 & 3500 \\ 3 & 9 & 3 & 2400 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix}.$$ 4 分

所以该厂向 3 个车间分配原材料为$100, 200, 100$匹布，可恰好完成该订单. 5 分