郑州轻工业大学

2014-2015 学年第一学期 高等数学 A1　试卷 A

一、单项选择题(每题 3 分，共 15 分)

1．$x=1$为函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的（　　　）

(A)　可去间断点；(B)无穷间断点；(C)跳跃间断点；(D)震荡间断点．

2．设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f'(x)=0$的实根的个数为（　　　）

(A) 2；　　　　(B) 3；　　　　(C) 4；　　　　(D) 5．

3．极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 的值是（　　　）

(A) e；　　　(B) $\dfrac{1}{e}$；　　　(C) e^{-2}；　　　(D) e^2．

4．若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内满足 $f'(x)>0, f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内（　　）．

(A) 单调减、凹曲线；　　　　(B)单调减、凸曲线；

(C) 单调增、凹曲线；　　　　(D) 单调增、凸曲线．

5．设$\int f(x)dx=x^2e^{2x}+C$，则 $f(x)$ =（　　　）

(A) $2xe^{2x}$；　(B) $2xe^{2x}(1+x)$；　(C) $xe^{2x}(2+x)$　；　(D) $2x^2e^{2x}$．

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1．设 $y=\ln\sin x$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

2．若点$(1,3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$________, $b=$_________ .

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 水平渐近线为__________，铅直渐近线为__________.

4．设 $y=x^5+e^{2x}$，则 $y^{(2015)}(0)=$________________.

5．$\int\cos^3 x\,dx=$__________________.

三、计算题（每题 6 分，共 36 分）

1．求极限：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$.

2．求函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ 的单调区间及极值.

3．若函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy + \sin x = e$ 所确定，求 $dy|_{x=0}$.

4．求曲线$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

5．求不定积分：$\int x \cdot e^x \, dx$.

6．求不定积分：$\int \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

四、解答题（本题 7 分）

设 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, x < 0 \\ \sin x, x \geq 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

五、证明题（每题 7 分，共 14 分）

1．证明：当 $x > 1$ 时，$e^x > e \cdot x$.

2．证明方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内仅有一个实根.

六、应用题（本题 8 分）

将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转一周构成一个圆柱体，当矩形的边长各为多少时，圆柱体的体积最大？

七、综合分析题（本题满分 **5** 分）

设函数 $f(x) = x - b\sin x$，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = a$ ，求常数 a 、b 的值.

2014-2015 学年第一学期 高等数学 A1　试卷 A　参考答案

试卷号：A20150114-2

一、单项选择题(每题 3 分，共 15 分)

1．$x=1$为函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的（　A　　）

（A）　可去间断点；　（B）无穷间断点；　（C）跳跃间断点；　（D）震荡间断点.

2．设$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则$f'(x)=0$的实根的个数为（ C　　）

（A）2；　　（B）3；　　（C）4；　　（D）5.

3．极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$的值是（　D　　）

（A）e；　　（B）$\dfrac{1}{e}$；　（C）e^{-2}；　　（D）e^2.

4．若函数$f(x)$在区间(a,b)内满足$f'(x)>0, f''(x)<0$，则$f(x)$在(a,b)内（ **D**　）.

(A) 单调减、凹曲线；　　(B)单调减、凸曲线；

(C) 单调增、凹曲线；　　(D) 单调增、凸曲线.

5．设$\int f(x)dx=x^2e^{2x}+C$，则$f(x)$=（　B　　）

(A)　$2xe^{2x}$；　(B)　$2xe^{2x}(1+x)$；　(C)　$2x^2e^{2x}$　；　(D)　$xe^{2x}(2+x)$.

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1．设$y=\ln\sin x$，则$\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\cot x}$.

2．若点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，则$a=\underline{-\dfrac{3}{2}}$，$b=\underline{\dfrac{9}{2}}$.

3. 曲线$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$水平渐近线为$\underline{y=1}$，铅直渐近线为$\underline{x=2}$.

4．设 $y=x^5+e^{2x}$，则 $y^{(2015)}(0)=$ $\underline{2^{2015}}$.

5．$\int \cos^3 x\,dx=$ $\underline{\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C}$.

三、计算题（每题 6 分，共 36 分）

1．求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}$ ……3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$ …..6 分

2．求函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$ 的单调区间及极值.

解：函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$ ……2 分

令 $f'(x)=0$，的驻点 $x=-1,x=3$. ……3 分

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单增	17（极大）	单减	-47（极小）	单增

单增区间为 $(-\infty,-1],[3,+\infty)$，单减区间为 $[-1,3]$，极大值 $f(-1)=17$，极小值 $f(3)=-47$.

3．若函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy+\sin x=e$ 所确定，求 $dy|_{x=0}$.

解：方程两边关于自变量 x 求导，$y=y(x)$，则有

$e^y y'+y+xy'+\cos x=0$，所以 $y'=-\frac{y+\cos x}{e^y+x}$. …….3 分

当 $x=0$ 时，代入方程得 $y=1$，所以 $y'(0)=-\frac{2}{e}$， ……..5 分

故 $dy|_{x=0}=-\frac{2}{e}dx$． ……6 分

4．求曲线$\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$在$t=\frac{\pi}{4}$处的切线方程.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t$， ……3 分

在$t=\frac{\pi}{4}$处， $x=\frac{\sqrt{2}}{2},y=0,\frac{dy}{dx}=-2\sqrt{2}$， …….5 分

所以切线方程为 $y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$． ……6 分

5．求不定积分：$\int x\cdot e^{x}\,dx$．

解：$\int xe^{x}\,dx=\int x\,d\,e^{x}=xe^{x}-\int e^{x}\,dx$ ……4 分

$=xe^{x}-e^{x}+C$ ……6 分

6．求不定积分：$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$．

解法 1：$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx^{2}=-\int\frac{1}{2\sqrt{1-x^{2}}}d(1-x^{2})$ …..4 分

$=-\sqrt{1-x^{2}}+C$ ……6 分

解法 2：令 $x=\sin t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$， 则 $dx=\cos tdt$ ， ……3 分

原式$=\int\frac{\sin t}{\cos t}\cos tdt=-\cos t+C=-\sqrt{1-x^{2}}+C$ ……6 分

四、解答题（本题 **7** 分）

设 $f(x)=\begin{cases}e^{x}-1,x<0\\ \sin x,x\geq 0\end{cases}$， 求 $f'(x)$．

解：$x>0$时，$f(x)=e^{x}-1$，所以 $f'(x)=e^{x}$； ……2 分

$x<0$时，$f(x)=\sin x$，所以 $f'(x)=\cos x$． ……4 分

$x=0$时，$f(0)=0$，且

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$ 故 $f'(0)=1$． ……6 分

故 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<0\\ \cos x, x\geq 0\end{cases}$.

五、证明题（每题 **7** 分，共 **14** 分）

1．证明：当 $x>1$ 时，$e^x>e\cdot x$.

证明：令 $f(x)=e^x-ex, x\geq 1$，则 $f(1)=0$． ……3 分

$f'(x)=e^x-e>0, x>1$ ……6 分

所以 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$， 即 $e^x>e\cdot x$． ……7 分

2．证明方程 $x^3-3x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个实根．

证明：(1) 存在性

令 $f(x)=x^3-3x+1$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$f(0)=1>0, f(1)=-1<0$，即 $f(0)f(1)<0$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足零点定理，

所以至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-3x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根． ……5 分

(2) 唯一性

因为 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)<0$， $x\in(0,1)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单减，故方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个根．

综上所述，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点，即方程 $x^3-3x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个实根 ……7 分

六、应用题（本题 **8** 分）

将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转一周构成一个圆柱体，当矩形的边长各为多少时，圆柱体的体积最大？

解：设矩形一边长 x，则另一边长 $p-x$，将其绕 $p-x$ 边旋转，则旋转体的体积为

$V=\pi x^2(p-x)=\pi(px^2-x^3), 0<x<p$， ……3 分

$V' = \pi(2px - 3x^2)$，令 $V' = 0$，得驻点 $x = \frac{2}{3}p$．

$V'' = \pi(2p - 6x), V''(\frac{2p}{3}) = -2p\pi < 0$．　　　　……7 分

所以，当 $x = \frac{2}{3}p$ 时，V 取极大值．

$x = \frac{2}{3}p \Rightarrow p - x = \frac{1}{3}p$．

由问题的实际意义知，当长和宽分别取 $\frac{2}{3}p, \frac{p}{3}$ 时，体积最大．　　……8 分

七、综合分析题（本题满分 **5** 分）

设函数 $f(x) = x - b\sin x$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = a$，求常数 a、b 的值．

解法 1：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - b\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - b\cos x}{3x^2}$　（1）　　……2 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{b\sin x}{6x} = \frac{b}{6}$　（2）

因为（1）中分母 $\lim\limits_{x\to 0}3x^2 = 0$，所以分子 $\lim\limits_{x\to 0}(1 - b\cos x) = 0 \Rightarrow b = 1$；

所以 $a = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$．　　　　……5 分

解法 2：利用麦克劳林公式，

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), x - b\sin x = (1-b)x + \frac{b}{3!}x^3 + o(x^3)$，……2 分

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - b\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-b)x + \frac{b}{3!}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{b}{6}$．

所以 $b = 1, a = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \frac{b}{6} = \frac{1}{6}$．　　　　……5 分