2018-2019 第二学期《线性代数与空间解析几何》试卷 A 答案

一、选择题

1. 用 A_j 表示 3 阶行列式 $|A|$ 的第 j 列（j=1, 2, 3），已知 $|A|=-2$，则

$|A_3-2A_1 \quad 3A_2 \quad A_1|$ =（　　）.　　B

(A) -6　　(B) 6　　(C) -27　　(D) 27

2. $\beta=(1,k,5)$ 能由向量组 $\alpha_1=(1,-3,2),\alpha_2=(2,-1,1)$ 线性表示，则 k 为（　）.A

(A) $k=-8$　　(B) $k\neq-8$　　(C) $k\neq-2$　　(D) $k=-2$

3. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(\lambda-1)x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2$，当满足（　）时，是正定二次型.　C

(A) $\lambda>-1$　　(B) $\lambda\geq-1$　　(C) $\lambda>1$　　(D) $\lambda\geq1$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&0\\1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&3\\-3&0&-1\end{pmatrix}$，则 $|BA|=$（　）. C

(A) 0　　(B) 26　　(C) -26　　(D) 1

5. 要断言矩阵 A 的秩为 r，只需条件（　　）满足即可. D

(A) A 中有 r 阶子式不为 0

(B) A 中任何 r+1 阶子式为 0

(C) A 中不为 0 的子式的阶数小于等于 r

(D) A 中不为 0 的子式的最高阶数等于 r

6. 若 A 为 n 阶方阵，且齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则它的系数行列式 $|A|$（　　）.　A

(A) 必为 0　　(B) 必不为 0

(C) 必为 1　　(D) 可取任何值

7. 对二次曲面，下列说法不正确的是（　　）.　B

(A) 方程 $2x^2-3y^2-z^2=0$ 表示锥面

(B) 方程 $z=2x^2-3y^2$ 表示椭圆抛物面

(C) 方程 $y^2=x$ 表示抛物柱面

(D) 方程 $\frac{1}{4}x^2+y^2-\frac{1}{9}z^2=1$ 表示单叶双曲面

二、填空题

8. 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 B=____________. $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$

9. 设 $f(x)=x^2-5x+4$，且$A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\end{pmatrix}$，则 $f(A)=$____________. (-5)$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

10. 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为 3 阶矩阵$\begin{pmatrix}5&1&2\\1&4&3\\2&3&6\end{pmatrix}$的特征值，则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$=__________. 15

11. 若齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ \quad\ \ 2x_2+5x_3=0\\ -3x_1-2x_2+kx_3=0\end{cases}$有非零解，则$k$=7.

12. 设$V=\left\{x=\left(x_1,x_2,x_3\right)\middle|x_1+x_2+x_3=0,x_1,x_2,x_3\in R\right\}$，则 V 是_____维向量空间. 2

13. 已知向量$|\alpha|=3$，$|\beta|=2$，$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$，则$|\alpha+\beta|=$__________. $\sqrt{21}$

二、计算题

14. **（本题 7 分）**设$A=\begin{pmatrix}4&2&1\\5&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$，求$\left(A^*\right)^{-1}$.

解$\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$， ....（2 分）

又$|A|=-1$ ....（4 分）

$\left(A^*\right)^{-1}=-A=\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\-5&-3&-2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$ ....（7 分）

15. **（本题 8 分）**向量组 A：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，试求出 A 的秩及一个极大线性无关组.

解 因

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$ ....（4 分）

故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，向量组本身是极大线性无关组，(6 分) 其秩为 4。（8 分）

16. **（本题 9 分）**用克莱姆法则求解线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

解　方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$ ....（3 分）

由克莱姆法则可知方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$ ....（6 分）

所以方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -1 \quad, x_2 = \frac{D_2}{D} = 1 \quad, x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$ ....（9 分）

17. **（本题 8 分）**设三阶方阵 A 的三个特征值分别为 1，$-\frac{1}{3}$, 0. $B = 3A^2 - 2A + 4E$，求行列式$|B|$的值.

解 B 的特征值与 A 的特征值的关系式为$\varphi(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 4$ ....（2 分）

因此，B 的三个特征值为 5, 5, 4 ....（5 分）

所以，$|B| = 5 \times 5 \times 4 = 100$ ....（8 分）

18. **（本题 10 分）** 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$，用正交变换 $x = py$ 把 f 化成标准形.

解：（1）二次型对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ....（1 分）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$$

解得 A 的特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ ....（4 分）

将 $\lambda_1=-2$ 代入特征方程得 $(-2-A)X=0$

$$2E+A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得方程组 $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$ 基础解系 $\xi_1=[1,2,2]^T$

单位化得 $\eta_1=\frac{1}{3}[1,2,2]^T$ ....（5 分）

将 $\lambda_2=1$ 代入特征方程得 $(E-A)X=0$

$$E-A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得方程组 $\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=-\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$

基础解系为 $\xi_2=[2,1,-2]^T$, 单位化 $\eta_2=\frac{1}{3}[2,1,-2]^T$ ....（6 分）

将 $\lambda_3=4$ 代入特征方程得 $(4E-A)X=0$

$$4E-A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 得方程组 $\begin{cases} x_1=2x_3 \\ x_2=-2x_3 \end{cases}$

基础解系 $\xi_3=[2,-2,1]^T$，单位化 $\eta_3=\frac{1}{3}[2,-2,1]^T$ ....（7 分）

令 $p=[\eta_1\ \eta_2\ \eta_3]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，得正交变换 $x=py$ ……………（9 分）

f 的标准型

$f=X^TAX=Y^TU^TAUY=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$ ……………（10 分）

19. **（本题 8 分）**已知平面过 $(1,0,-1)$，与平面 $x-z=0$ 垂直且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 平行。求该平面的方程。

解：方法一：先求法式方程

设该平面的法线的方向数为 $\{A,B,C\}$，则由题意得，

$\begin{cases}A-C=0\\ A-2B-C=0\end{cases}$，解得 $A:B:C=1:0:1$。 ……………（4 分）

所以所求平面的点法式方程为 $1(x-1)+0(y-0)+1(z+1)=0$，

化为一般式为：$x+z=0.$ ……………（8 分）

方法二：待定系数法

设平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0(A,B,C$ 不全为 0）。

由平面过点 $(1,0,-1)$ 得：$A-C+D=0$ （1）

由另两条件得：$A-C=0$ （2）

$A-2B-C=0$ （3）

联立（1），（2），（3）并解得 $A:B:C:D=1:0:1:0$。 ……………（4 分）

故所求平面的方程为：$x+z=0.$ ……………（8 分）

四、证明题（1 小题，本题 5 分）

20. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $|A|=-1$，又 $A^T=A^{-1}$，试证 $A+E$ 不可逆.

证 因 $A+E=A+A^TA=A(E+A^T)=A(A^T+E)$

$$=A(A^T+E^T)=A(A+E)^T$$ ....（3 分）

上式两端去行列式得 $\left|A+E\right|=\left|A\right|\left|(A+E)^T\right|=-\left|A+E\right|,$ ....（4 分）

从而 $\left|A+E\right|=0,$ 即 $A+E$ 不可逆。 ....（5 分）