本题得分

一、单项选择题(每题 3 分，共 15 分)

1. $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt=$（ B ）.

(A) $\sqrt{1+x^4}$ (B) $2x\sqrt{1+x^4}$ (C) $2x\sqrt{1+x^2}$ (D) $\sqrt{1+x^2}$

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 存在, $f(x,y)$ 在该点连续的（D）.

(A) 充分条件非必要条件 (B) 必要条件非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

3. 设简单闭曲线 L 所围区域的面积为 S，其中 L 的方向取正向，则 $S=$（ D ）.

(A) $\dfrac{1}{2}\oint_L xdx-ydy$ (B) $\dfrac{1}{2}\oint_L ydy-xdx$ (C) $\dfrac{1}{2}\oint_L ydx-xdy$ (D) $\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

4. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（C ）.

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性与 k 的取值有关

5 . 曲线 $y=e^x$ 与该曲线过原点的切线和 y 轴所围成的图形的面积为（A）. .

(A) $\int_0^1(e^x-ex)dx$ (B) $\int_0^e(\ln y-\dfrac{y}{e})dy$ (C) $\int_1^e(e^x-ex)dx$ (D) $\int_0^1(\ln y-\dfrac{y}{e})dy$

本题得分

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{\sqrt{xy}-1}{xy-1}=\underline{-\dfrac{1}{2}}$.

2. 设函数 $f(x,y)=y\arctan(xy)+(1-y)e^x+\sin(2y)$，则 $f_x(1,0)=\underline{e}$.

3. 设 D 是由 $x^2+y^2=1$ 所围的闭区域， $f(x,y)$ 连续，则 $\iint_D[1+xf(x^2+y^2)]dxdy=\underline{\pi}$.

4. 微分方程微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $\underline{y=(C_1+C_2x)e^{2x}}$.

5. 由 $y=x^2,x=1,y=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为 $\underline{\dfrac{4}{5}\pi}$.

三、计算题（每题 6 分，共 42 分）

本题得分

1． $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $dz\big|_{(1,0)}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$； --------------------------------------2 分

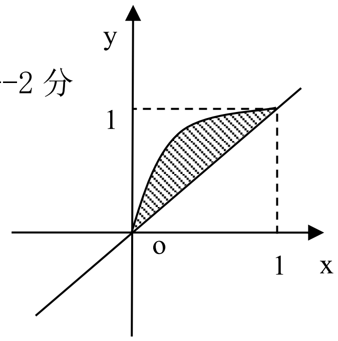
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{x}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$ ---4 分

故 $dz\big|_{(1,0)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=0dx+1dy=dy$. ----------------------------6 分

本题得分

2．改变积分次序计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy$.

解：如图所示：



原式=$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\dfrac{\sin y}{y}dx$ --------------------2 分

$=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy$ ---------- 4 分

$=-\cos y\big|_0^1+\int_0^1 y d\cos y$

$=\cos 1-\sin 1$ --------------------6 分

本题得分

3．解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$. 则

解：设 $u=x+y$，则 $y=u-x$， -------------- 2 分

于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$

代入原方程得 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+u}{u}$ ---------------------4 分

分离变量得到 $u-\ln(1+u)=x+c$

即 $y-\ln(1+x+y)=C$ 为方程的通解. ----------6 分

本题得分

4. 利用高斯公式计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + xdxdy$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围立体的整个边界曲面的外侧.

解：$P(x,y,z)=x, Q(x,y,z)=y, R(x,y,z)=x$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$————————————2 分

由高斯公式得到：原式=$\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$————————4 分

$=\iiint\limits_{\Omega}3dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv=9\pi$————————————6 分

本题得分

5．判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$ 的敛散性.

解：由比值审敛法得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}<1$

故原级数收敛.———————————— 6 分

本题得分

6．求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点（2, 1, 4）处的切平面与法线方程.

解：旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点（2, 1, 4）处的法向量为 $n=(2x,2y,-1)=(4,2,-1)$————————————2 分

故在点（2, 1, 4）处的切平面方程为 $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$————————4 分

法线方程为：$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$————————————6 分

本题得分

7．设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2$，求 $f(x)$.

解：两边积分得 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2dx-\int_0^2 f(x)dx\int_0^2 xdx+4$————————3 分

$$=\frac{8}{3}-2\int_0^2 f(x)dx+4$$

移项得到 $\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{20}{9}$————————5 分

于是 $f(x)=x^2-\frac{20}{9}x+2$ -------------6 分

本题得分

四、解答题（本题 7 分）

计算 $\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, 其中 L 为顺时针方向的上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0)$.

解：$P(x,y)=e^x \sin y - my, Q(x,y)=e^x \cos y - m,$

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x \cos y - m, \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x \cos y$ -----2 分

如图所示：添加辅助线 AO,利用格林公式，

原式=

$$\oint_{L+AO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy - \oint_{AO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$$

--4 分

$=-\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma-\int_{2a}^{0}0dx$ ------------------7 分

$=-\iint\limits_D m d\sigma - 0 = -\frac{\pi}{2}ma^2$ ---------------------------8 分

本题得分

五、解答题（本题 7 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

解：收敛半径为 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ ----------------2 分

易知 $x=1$ 幂级数发散， $x=-1$ 时幂级数收敛，

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$ ------------------------4 分

当 $x\in[-1,1)$ 时，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 两边对 x 求导得到：

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$ --------------------6 分

对上式两边积分得到$\int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx$

故有$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ x \in [-1,1)$ ----------------------8 分

本题得分

六、应用题（本题满分 8 分）

计算由曲面$x^2 + y^2 = z$与$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$所围成立体的体积.

解：所围成立体的体积 V=$\iiint\limits_{\Omega} dv$，-------------------------------------2 分

曲面$x^2 + y^2 = z$与$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$所围立体在xoy面的投影为$D: x^2 + y^2 \le 1$，---4 分

设$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$

则 V=$\iint\limits_{D} d\sigma \int_{\rho^2}^{2-\rho} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho} dz$ -------------------------6 分

$= \frac{5\pi}{6}$ --------------------8 分.

本题得分

七、证明题（本题满分 6 分）

设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续、可导，且$F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$，证明：

（1） 若$f'(x) < 0$，则$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$内单调增加.

（2）若$f(x)$是偶函数，则$F(x)$也是偶函数；

证明：（1）$F'(x) = (\int_0^x (x-2t)f(t)dt)' = \int_0^x f(t)dt - xf(x)$（不妨设$x > 0$），

再次求导得到：$F''(x) = f(x) - f(x) - xf'(x) = -xf'(x)$,--------------------------2 分

若$f'(x) < 0$，则$F''(x) > 0$，$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$内单调增加. ----- -------------3 分

（2）又$F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$，

$F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t)f(t)dt$，---4 分

因为$f(x)$是偶函数，即$f(-x) = f(x)$,令$u = -t$得到:

$F(-x) = \int_0^x (x-2u)f(u)du$,即$F(x) = F(-x)$，所以$F(x)$也是偶函数.-------------------6 分