郑州轻工业大学 2022 — 2023 学年 第二学期 高等数学A2试卷（A）

专业年级及班级______ 姓名______ 学号______

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《高等数学 A2》期末试卷（A 卷）

电气、机电、计算机、软件、建环、国教各专业 22 级适用

（注：请将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效）

一、单项选择题(6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

1. 已知微分方程 $y''-5y'+ay=0$ 的一个解为 $y=\mathrm{e}^{2x}$，则常数 $a=$-------（ D ）

（A）3；（B）4；（C）5；（D）6.

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有 $f_x(x_0,y_0)=0$,

$f_y(x_0,y_0)=0, f_{xx}(x_0,y_0)=0, f_{xy}(x_0,y_0)=2, f_{yy}(x_0,y_0)=0$，则----------（ B ）

（A）点 P_0 为函数 z 的极大值点；（B）点 P_0 不是函数 z 的极值点；

（C）点 P_0 为函数 z 的极小值点；（D）条件不够，无法判断.

3. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+z-xy=1$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$-------------------（ A ）

（A）$\dfrac{y}{1+\mathrm{e}^z}$；（B）$\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^z}$；（C）$\dfrac{y}{1-\mathrm{e}^z}$；（D）$\dfrac{xy}{1+\mathrm{e}^z}$.

4. 二重积分 $I=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4$，则下列说法**正确**的是--（ A ）

（A）$I>0$；（B）$I<0$；（C）$I=0$；（D）I 的符号无法确定.

5. 设曲线积分 $\int_L (x^4+4xy^p)\mathrm{d}x+(6x^{p-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径 L 无关，则 $p=$---（ C ）

（A）1；（B）2；（C）3；（D）4.

6. 设 $0\le a_n<\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则下列级数中一定收敛的是---------（ D ）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$；（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$；（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$；（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}$.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 微分方程 $y''-6y'+10y=0$ 的通解为 $\underline{y=\mathrm{e}^{3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)}$.

8. 设函数 $u=x^2-xy+y^2$，则 u 在点 $(1,-1)$ 处的梯度 $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u(1,-1)=\underline{(3,-3)}$.

或者 $\underline{3\vec{i}-3\vec{j}}$.

9. 交换二次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序，则 $\underline{I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x}$.

10. 设 Ω 由上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及平面 $z=0$ 所围成，$f(z)$ 在 Ω 上连续，将 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(z)\mathrm{d}v$ 化为球面坐标系下的三次积分，则

$\underline{I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r}$.

11. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为 $\underline{\dfrac{2}{2-\ln 3}}$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}-x-\pi, & -\pi<x<0,\\ x+\dfrac{\pi}{2}, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{3\pi}{4}}$.

三、解答题（7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

13. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+1$ 的通解.

解法一：看做一阶线性非齐次微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=1$，

通解：$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$ ……3 分

$=e^{\ln x}\left(\int e^{-\ln x}dx+C\right)=x\left(\int\dfrac{1}{x}dx+C\right)$

$=x\left(\ln|x|+C\right)$； ……6 分

解法二：看做齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$， ……2 分

代入微分方程得 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+1$，整理得 $x\dfrac{du}{dx}=1$，

分离变量并积分得 $\int du=\int\dfrac{1}{x}dx\Rightarrow u=\ln|x|+C$，

即 $y=x\left(\ln|x|+C\right)$. ……6 分

14. 求曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)-z$，则 ……2 分

$F_x=1+\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},F_y=2+\dfrac{2y}{1+x^2+y^2},F_z=-1,$

在点 $(0,0,0)$ 处法向量 $\vec{n}=(1,2,-1)$, ……4 分

切平面方程为 $x+2y-z=0;$

法线方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$. ……6 分

15. 设 $z=f(x,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$，……3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+f_2'+y\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$. ……6 分

16. 计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^2}{x^2}dxdy$，其中 D 是由曲线 $x^2+y^2=2x$ 所围成的区域.

解：利用极坐标 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则 ……2 分

$\iint\limits_D\dfrac{y^2}{x^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\tan^2\theta\rho d\rho$ ……4 分

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^2\theta\cdot\dfrac{4}{2}\cos^2\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$ ……6 分

17. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma(xz+y)dydz+z^2dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围立体表面的外侧.

解：$P=xz+y,Q=0,R=z^2,D_z:x^2+y^2\le z$. 利用高斯公式

$\oiint\limits_\Sigma(xz+y)dydz+z^2dxdy=\iiint\limits_\Omega\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dv=3\iiint\limits_\Omega zdv$ ……3 分

$=3\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=3\pi\int_0^1 z^2dz=\pi.$ ……6 分

18. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，求 $\oint_L\left(x^2+2y\right)ds$.

解法一：L 的参数方程 $x=\cos t,y=\sin t,0\le t\le 2\pi$, 则 ……2 分

$\oint_L\left(x^2+2y\right)ds=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+2\sin t\right)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt$

$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+2\sin t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}+2\sin t\right)\mathrm{d}t$

$=\pi+\frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{2\pi}-2\left[\cos t\right]_0^{2\pi}=\pi.$ ……6 分

解法二： L 关于 x 轴对称，所以 $\oint_L 2y\mathrm{d}s=0$，L 关于 x,y 轮换对称，所以

$\oint_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s$，故 ……3 分

$\oint_L\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s$

$=\frac{1}{2}\oint_L 1\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi.$ ……6 分

19. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}(a>0,k>1)$ 的敛散性.

解法一： $u_n=\frac{a^n}{n^k}$，利用比值审敛法

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}}{\frac{a^n}{n^k}}=a$， ……3 分

由比值审敛法知，当 $0<a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 收敛，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 发散，当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\left(k>1\right)$ 收敛。

综上，当 $0<a\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 收敛，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 发散. ……6 分

解法二： $u_n=\frac{a^n}{n^k}$，利用根植审敛法

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^{\frac{k}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\mathrm{e}^{k\cdot\frac{\ln n}{n}}}=\frac{a}{\mathrm{e}^0}=a$， ……3 分

由根植审敛法知，当 $0<a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 收敛，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 发散，当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\left(k>1\right)$ 收敛。

综上，当 $0<a\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 收敛，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 发散. ……6 分

解法三： $u_n=\frac{a^n}{n^k}$，利用比较审敛法及级数收敛的必要条件

当 $0<a\le 1$ 时，$u_n=\frac{a^n}{n^k}\le\frac{1}{n^k}$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\left(k>1\right)$ 收敛，所以由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 收敛. ……4 分

当 $a>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{kx^{k-1}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\left(\ln a\right)^2}{k\left(k-1\right)x^{k-2}}=\cdots=+\infty.$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 发散。

综上，当 $0<a\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 收敛，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}$ 发散. ……6 分

四、分析题（本题 9 分）

20. 设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $y'-\frac{n}{x}y=0$ 满足初值 $y_n(1)=\frac{1}{n}$ 的解，

求(1) $y_n(x)$；(2)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解：（1） $y'-\frac{n}{x}y=0$ 的通解 $y_n(x)=Ce^{\int\frac{n}{x}dx}=Ce^{n\ln x}=Cx^n$， $y_n(1)=\frac{1}{n}$ 代入，得

$C=\frac{1}{n}$，故 $y_n(x)=\frac{x^n}{n}$； ……4 分

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$，当 $x=-1$ 时，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

令和函数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in[-1,1)$, 则 ……7 分

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\int_0^x\frac{1}{1-x}d\left(1-x\right)=-\ln(1-x),$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$ ……9 分

或者 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$， $\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$，

$s(x)-s(0)=-\int_0^x\frac{1}{1-x}d\left(1-x\right)=-\ln(1-x)$， 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$

五、证明题（本题 5 分）

21. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数不存在.

证明：（1）因为 $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)=0,\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le1,$ 所以

$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

……3 分

（2） $f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x^2}$ 不存在，

$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{y\sin\frac{1}{y^2}}{y}=\lim_{y\to0}\sin\frac{1}{y^2}$ 不存在. ……5 分

六、应用题（本题 8 分）

22. 民以食为天，粮食储备是粮食安全的“压舱石”. 目前，又到了夏粮收购的季节，某粮食收购企业计划建一个长方体的粮仓存储粮食. 已知粮仓库顶每平方米造价为 300 元，墙壁每平方米造价为 200 元，地面每平方米造价为 100 元，其它固定费用为 2 万元，现投资 14 万元，问怎样设计才能使仓库的容积最大？最大容积是多少？

解法一：设仓库的长、宽、高分别为 x,y,z 米，则目标函数 $V=xyz$，

约束条件 $400xy+400xz+400yz+20000=140000,$ 即 $xy+xz+yz=300.$

……3 分

引入拉格拉朗日函数 $L=xyz+\lambda(xy+xz+yz-300),$ 则

$\begin{cases}L_x=yz+\lambda(y+z)=0\\L_y=xz+\lambda(x+z)=0\\L_z=xy+\lambda(x+y)=0\\L_\lambda=xy+xz+yz-300=0\end{cases}$，解方程组得 $x=y=z=10$。 ……6 分

由于实际问题的最大值必定存在，且求得驻点只有一个 $(10,10,10)$，所以当仓库的长、宽、高都等于 10 米时，仓库容积最大，且最大容积为

$V=xyz=1000$ 立方米。 ……8 分

解法二：设仓库的长、宽、高分别为x,y,z米，则目标函数 $V=xyz$，

约束条件$400xy+400xz+400yz+20000=140000,$ 即 $xy+xz+yz=300.$

……3 分

利用不等式，则有

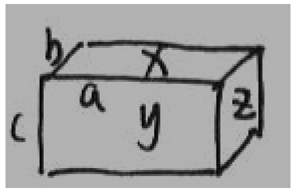
$xy+yz+xz=300\ge 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(xz)}=3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$，

故$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le 100$，即$x^2y^2z^2\le 100^3\Rightarrow xyz\le 1000$，当且仅当$xy=yz=xz$时，

等号成立，即$x=y=z=10$时，体积V取最大值，最大值$V=1000.$

……8 分

解法三：如图，设长方体的三个不同面的面积分别为x,y,z平方米，则



约束条件为 $300x+100x+200\times 2y+200\times 2z+20000=140000$，即

$x+y+z=300$，设长方体底边长为a米，宽为b米，高为c米，则

目标函数$V=abc$，因为$ab=x,ac=y,bc=z$，所以$V=\sqrt{(abc)^2}=\sqrt{xyz}$，

……3 分

引入拉格拉朗日函数$L=xyz+\lambda(x+y+z-300)$则

$$\begin{cases}L_x=yz+\lambda=0\\L_y=xz+\lambda=0\\L_z=xy+\lambda=0\\L_\lambda=x+y+z-300=0\end{cases}$$，解方程组得$x=y=z=100$。 ……6 分

$ab=100,ac=100,bc=100$，即有$a=b=c=10$. 由于实际问题的最大值必定存在，且求得驻点只有一个$(100,100,100)$，此时所以当仓库的长、宽、高都等于 10 米时，仓库容积最大，且最大容积为$V=abc=1000$立方米。

……8 分

解法四：设仓库的长、宽、高分别为x,y,z米，则目标函数 $V=xyz$，

约束条件$400xy+400xz+400yz+20000=140000,$ 即 $xy+yz+xz=300$，

……3 分

将$z=\dfrac{300-xy}{x+y}$代入容积公式化为无条件极值，得

$V=xyz=\dfrac{(300-xy)xy}{x+y}=\dfrac{300xy-x^2y^2}{x+y},x>0,y>0,$ 则

$$\begin{cases}V_x=\dfrac{(300y-2xy^2)(x+y)-(300xy-x^2y^2)}{(x+y)^2}=\dfrac{y^2(300-x^2-2xy)}{(x+y)^2}=0\\V_y=\dfrac{(300x-2x^2y)(x+y)-(300xy-x^2y^2)}{(x+y)^2}=\dfrac{x^2(300-y^2-2xy)}{(x+y)^2}=0\end{cases},$$

解方程得$x=y=10$，即得到唯一驻点 $(10,10)$. ……6 分

由问题的实际意义可知，使得容积最大的x,y一定存在，故$x=10,y=10$时，

容积$V=\dfrac{300xy-x^2y^2}{x+y}$取最大值，此时高$z=10$，即$x=10,y=10,z=10$时，容积最大，最大容积$V=xyz=1000$（米^3）. ……8 分