郑州轻工业大学 2022—2023 学年 第 二 学期 线性代数与空间解析几何 试卷（A）

专业年级及班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

装 订 线

试卷类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

题目	一	二	三					四		五	总分
	1—6	7—12	13	14	15	16	17	18	19	20	
得分											
评阅人											

《线性代数与空间解析几何》试卷（A 卷）

(2022 级全校理工科各专业适用)

得　分	

一、单项选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 在四阶行列式$|a_{ij}|$的展开式中,含有$a_{21}a_{12}$的项为---------------（ D ）

(A) $-a_{21}a_{12}a_{23}a_{44}$; (B) $a_{21}a_{12}a_{33}a_{44}$; (C) $-a_{21}a_{12}a_{33}a_{34}$; (D) $a_{21}a_{12}a_{43}a_{34}$.

2. 关于二次曲面,下列说法正确的是-------------------------------------（ C ）

(A) 方程$x^2+y^2-z^2=1$表示圆锥面;

(B) 方程$x^2+y^2-2z^2=0$表示单叶双曲面;

(C) 方程$y^2=x$表示抛物柱面;

(D) 方程$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}z^2=y$表示双曲柱面.

3. 设A,B为3阶矩阵,$|A|=2,|B|=-2$,则$|-3AB|=$------------------（ A ）

(A) 108; (B) 12; (C) -12; (D) -108.

4. 设 A 为$m\times n$矩阵, $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组，则下列结论正确的是---（ B ）

(A) 若 $Ax=b$ 有唯一解, 则 $Ax=0$ 有非零解;

(B) 若 $Ax=b$ 有唯一解, 则 $Ax=0$ 只有零解;

(C) 若 $Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=b$ 有无穷多解;

(D) 若 $Ax=0$ 只有零解, 则 $Ax=b$ 有唯一解.

5. 已知-2是矩阵$A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&x&-2\\-2&2&-2\end{pmatrix}$的特征值，则$x=$--------（ B ）

(A) 4; (B) -4; (C) -2; (D) 2.

6. 已知三元实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+kx_2^2+4x_3^2-4x_2x_3$是正定二次型，则参数$k$的取值范围为---（ D ）

(A) $k>0$; (B) $k<0$; (C) $k>4$; (D) $k>1$.

得　分	

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知四阶行列式D中第三行的元素依次是$1,3,-2,2$，它们的代数余子式分别是$3,-2,1,1$，则行列式$D=$＿＿-3＿＿.

8. xOy 面上的双曲线$\begin{cases}x^2-2y^2=1,\\z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周所得的旋转曲面方程为

$x^2+z^2-2y^2=1$.

9. 已知A为三阶初等矩阵，且

$$A\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\2a_{21}&2a_{22}&2a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

则矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

10. 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3=0, \\ \quad 4x_2+3x_3=0, \\ x_1+5x_2+4x_3=0 \end{cases}$的解空间的维数是<u> 1 </u>.

11. 已知 3 阶方阵 A 满足 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$,则 $|A+4E|=$<u> 6 </u>.

12. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 $1,-2,-3$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的规范形为 $\underline{y_1^2-y_2^2-y_3^2}$.

三、解答题（5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

得　分	

13. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　4 分

$=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　6 分

$=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1.$　　8 分

得　分	

14. 求过点 $(1,1,-1)$ 且平行于直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 和 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$ 的平面方程.

解：由题得，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与两已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(1,-1,0)$ 垂直.

可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(1,1,-3),$　　5 分

所求平面的方程为 $(x-1)+(y-1)-3(z+1)=0$, 即 $x+y-3z-5=0.$　　8 分

得　分	

15. 求解矩阵方程 $AX=B$,

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解：

$(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$　　4 分

$\to\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$　　7 分

故 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　8 分

得　分	

16. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$ 的秩及一个极大无关组,并把不属于极大无关组的其他向量用极大无关组表示出来.

解：作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\-1&-1&1&0\\0&-2&5&7\\4&0&6&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&0&3&3\\0&-2&5&7\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-2&5&7\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$ 3 分

由行阶梯形矩阵 B 可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，一个极大无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

5 分

继续将 B 化为行最简形矩阵

$$B\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.　　8 分

得　分	

17. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$ 的通解.

解：$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 4 分

行最简形对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5-2\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3\end{cases}$，令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, 得原方程组的一个特解为 $\eta_0=(-2,3,0,0,0)^T$，　　5 分

导出组为 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$，令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, 得基础解系

$\xi_1=(1,-2,1,0,0)^T,\xi_2=(1,-2,0,1,0)^T,\xi_3=(5,-6,0,0,1)^T$.　　7 分

因此，原方程组的通解为 $x=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3,\ k_1,k_2,k_3\in R$.　　8 分

四、综合题（2 小题，共 19 分）

得　分	

18.（**本题 9 分**）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+5A+7E=0$，证明：A 与 $A+E$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

证明：由 $A^2+5A+7E=0$ 得，

$A(A+5E)+7E=0,(A+E)(A+4E)+3E=0$，　　4 分

即 $A[-\frac{1}{7}(A+5E)]=E,(A+E)[-\frac{1}{3}(A+4E)]=E$,　　6 分

因此 A 与 $A+E$ 都可逆，且 $A^{-1}=-\frac{1}{7}(A+5E),\ (A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+4E)$.　　9 分

得　分	

19.（**本题 10 分**）求一个正交变换 $x=Py$,将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=4x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3 \text{化为标准形.}$$

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，　　1 分

它的特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-4)^2(\lambda-2)$,

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=2.$　　4 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=4$ 时，解方程组 $(A-4E)x=0$, 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，已

正交，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.　　7 分

当 $\lambda_3=2$ 时，解方程组 $(A-2E)x=0$, 得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, 单位化得

$p_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.　　8 分

取正交矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，　　9 分

则正交变换 $x=Py$ 将原二次型化为标准形 $f=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.　　10 分

得　分	

五、应用题（本题 5 分）

20. 一种防水涂料由 A、B、C、D 四种原料混合而成，这种涂料现有两种规格，这两种规格的涂料中，四种原料的重量比分别为 2:3:1:1 和 1:2:1:2. 现需要四种原料重量比为 4:7:3:5 的第三种规格的涂料，问：第三种规格的涂料可由前两种规格的涂料按什么比例配制而成？

解：设第三种规格的涂料可由 x_1 单位的第一种规格和 x_2 单位的第二种规格配制而成，则　　1 分

$$\begin{cases}2x_1+x_2=4\\3x_1+2x_2=7\\x_1+x_2=3\\x_1+2x_2=5\end{cases}$$　　3 分

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&2&7\\1&1&3\\1&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得方程组的解 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$，因此第三种规格的涂料可由第一种和第二种按照 1:2 的比例配制而成.　　5 分