得分

一、单项选择题(10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.下列方程中，可利用 $y'=p, y''=p'$，降阶的是-------------------------------------（ D ）

(A) $yy''+2y'^2=0$ ； (B) $y^3y''-1=0$；

(C) $y''=3\sqrt{y}$； (D) $xy''+y'=0$；

2.微分方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解 y^* 可以设为---（ A ）

(A) $x(ax+b)e^{2x}$； (B) $(ax+b)e^{2x}$；

(C) xe^{2x}； (D) $(ax^2+bx+c)e^{2x}$；

3.下列极限存在的是--- ------（ D ）

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x}{x+y}$； (B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2}{x+y}$；

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x+y}$； (D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cos\frac{1}{x+y}$；

4.曲线 $x=e^{2t}, y=\ln t, z=t^2$ 在 t=2 对应点处的切线方程为------------------- - ----（ C ）

(A) $\frac{x-e^4}{2e^4}=\frac{y-\ln 2}{1}=\frac{z-4}{4}$； (B) $\frac{x-e^4}{2e^4}=\frac{y-\ln 2}{\frac{1}{2}}=\frac{z+4}{4}$；

(C) $\frac{x-e^4}{2e^4}=\frac{y-\ln 2}{\frac{1}{2}}=\frac{z-4}{4}$； (D) $\frac{x-e^4}{2e^4}=\frac{y-\ln 2}{1}=\frac{z+4}{4}$；

5.设圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，$f$ 是 D 上的连续函数，则 $\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

---（ A ）

(A) $2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r$； (B) $4\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r$；

(C) $2\pi\int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$； (D) $4\pi\int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$；

6.设有空间闭区域

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\right\},$$

$$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\},$$

则有---（ C ）

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$； (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$；

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$； (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$ ；

7.设 L 为直线 $x+y=1$ 上从 A（1,0）到 B（-1,2）的直线段，则曲线积分 $\int_L (x+y)\mathrm{d}s=$

————————————————————————————————————（ B ）

(A) $\sqrt{2}$； (B) $2\sqrt{2}$ ；

(C) 2； (D) 0；

8.设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=$ ———————————————（ B ）

(A) $4\pi r^4$； (B) $4\pi r^2$；

(C) $2\pi r^4$； (D) $2\pi r^2$；

9.已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项的和为 $S_n=\dfrac{3n}{n+1}(n=1,2,\dots)$，则此级数的通项 $u_n=$ （ A ）

(A) $\dfrac{3}{n(n+1)}$； (B) $\dfrac{n}{3(n+1)}$；

(C) $\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$； (D) $\dfrac{1}{3n(n+1)}$ ；

10.下列级数中收敛的是---（ C ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$； (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n}$；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$；

得分

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11.微分方程 $x(y')^2-2yy'+x=0$ 的阶数为____1__________。

12.设函数 $z=z(x,y)$是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 确定的隐函数，则

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$__1__________。

13. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$__2__________。

14. Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le\frac{9}{\pi}$ 的整个表面的外侧，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__81__________。

15. 设 $f(x)=\begin{cases}0,-\pi\le x<0,\\ 1,0\le x<\pi,\end{cases}$ 若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的Fourier级数的展开式的和函数，则 $S(0)=$__0. 5__________。

三、解答题（5 小题，共 38 分）

得分

16.（本题 7 分）求齐次方程 $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$ 的通解。

解：令 $\frac{y}{x}=u$, 则 $y=xu,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$.——————————————————————2 分

于是原方程可以化为：$u+x\frac{du}{dx}=e^u+u$, 即 $x\frac{du}{dx}=e^u$.

分离变量，得：$e^{-u}du=\frac{1}{x}dx$.——————————————————————————4 分

两边积分，得：$-e^{-u}=\ln|x|+C$ ——————————————————————6 分

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式，可得原方程的通解为：$-e^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+C$.————————7 分

说明：只有最后结果，没有计算过程，不给分。

得分

17.（本题 7 分）求函数 $u=xy^2z$ 在点 P_0（1，-1, 2）处增加最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。

解：

$$\begin{aligned}\nabla u(1,-1,2) &= u_x(1,-1,2)i + u_y(1,-1,2)j + u_z(1,-1,2)k \\ &= y^2z\big|_{(1,-1,2)} i + 2xyz\big|_{(1,-1,2)} j + xy^2\big|_{(1,-1,2)} k \\ &= 2i - 4j + k.\end{aligned}$$

——3 分

取单位向量 $e_l = \dfrac{\nabla u(1,-1,2)}{|\nabla u(1,-1,2)|} = \dfrac{2}{\sqrt{21}} i - \dfrac{4}{\sqrt{21}} j + \dfrac{1}{\sqrt{21}} k.$

——5 分

函 数 $u=xy^2z$ 在 点 P_0（1，-1，2）处 沿 e_l 方 向 增 加 最 快， 方 向 导 数 为 $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,-1,2)} = |\nabla u(1,-1,2)| = \sqrt{21};$

——7 分

说明：只有最后结果，没有计算过程，不给分。

得分

18.（本题 8 分）设平面区域 D 由直线 $y = x, y = 2x$ 和 $x = 1$ 围成，计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy.$

解法 1：

$D = \{(x, y)|0 \le x \le 1, x \le y \le 2x\}.$ ——————————————————————————2 分

$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^1 xdx \int_x^{2x} dy$ ——————————————————————————————4 分

$= \int_0^2 x^2 dx$ ————————————————————————————————————6 分

$= \left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}.$ ——————————————————————————————8 分

解法 2：

$D = D_1 + D_2,$

$D_1 = \left\{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, \dfrac{y}{2} \le x \le y\right\},$

$D_2 = \left\{(x, y) \mid 1 \le y \le 2, \dfrac{y}{2} \le x \le 1\right\}.$

——————————————————————2 分

$$\iint_D xdxdy = \iint_{D_1} xdxdy + \iint_{D_2} xdxdy$$

———————————————————— 3 分

$$= \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} xdx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{1} xdx$$

———————————————————————————————— 4 分

$$= \int_0^1 \frac{3}{8} y^2 dy + \int_1^2 (\frac{1}{2} - \frac{1}{8} y^2) dy$$ ————————————————————6 分

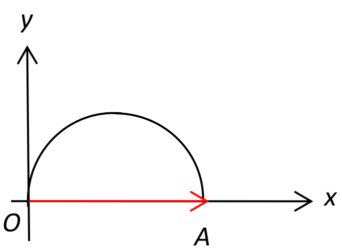
$$= \left[\frac{1}{8} y^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} y - \frac{1}{24} y^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}.$$ ——————————————————8 分

说明：只有最后结果，没有计算过程，不给分。

得分

19.（本题 8 分）计算曲线积分 $\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$，其中 L 是第一象限中从点 O（0,0）沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 A（2,0）的曲线段。

解法 1：



令 $P = x + 2y, Q = 2x + y$ 则—————————2 分

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 xoy 面内恒成立。

所以，曲线积分和路径无关。————————4 分

从而，

$$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$$

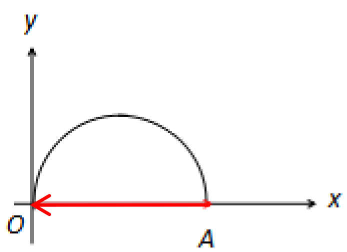
$$= \int_{\overline{OA}} (x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 xdx$$ ————————6 分

$$= [\frac{1}{2} x^2]_0^2 = 2$$

——————————————————————8 分

解法 2：



作辅助线 AO,方向从 A 到 O，D 为圆弧 $\overset{\frown}{OA}$ 和直线 AO 所围成的有界闭区域。

令 $P = x + 2y, Q = 2x + y$. 则 —————————2 分

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 xoy 面内恒成立。

由格林公式，可得：

$$\oint_{L+\overline{AO}}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

————————————————————4 分

所以 $\int_L(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=-\int_{\overline{AO}}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{\overline{OA}}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$

————————————————————6 分

$$=\int_0^2 xdx$$

$$=[\frac{1}{2}x^2]_0^2=2$$

————————————————————8 分

解法 3：$\because L: x=1+\cos t, y=\sin t, t:\pi\to 0.$

————————————————————2 分

$$\therefore \int_L(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_\pi^0[(1+\cos t+2\sin t)(-\sin t)+(2+2\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

————————————————————6 分

$$=\int_\pi^0(-\sin t+2\cos 2t)\mathrm{d}t=2.$$

————————————————————8 分

说明：只有最后结果，没有计算过程，不给分。

得分

20. （本题 8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的收敛半径和收敛域.

解：

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right|=1.$$

————————————————————2 分

当 x=1 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛；————————————————————4 分

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。————————————————————————6 分

所以，幂级数的收敛域为(-1,1].———————————————————————————————8 分

得分

四、证明题（本题 7 分）

21.证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛。

证明： 因为级数满足条件

$$(1)u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}, n=1,2,\ldots;$$

————————————————————————3 分

$$(2)\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

———————————————————————————————6 分

所以，由莱布尼茨定理可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛。 ————————————7 分

说明：只有最后结果，没有计算过程，不给分。

得分

五、应用题（本题 10 分）

22.在飞行器发射升空的过程中，飞行器表面的温度变化情况，牵涉到飞行器材料的选择及制造工艺方面的问题，在经过测试等方法找到了飞行器表面的温度分布函数后，就可以研究具体哪一点的温度最高了。

假设某飞行器表面是一个球面，其球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$，其表面的温度函数为 $T=x+y+z+600$, 求飞行器表面温度最高的点。

解：利用拉格朗日乘数法

作拉格朗日函数 $L(x,y,z)=x+y+z+600+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

——————————————————————2 分

令

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 & (1) \\ L_y=1+2\lambda y=0 & (2) \\ L_z=1+2\lambda z=0 & (3) \\ x^2+y^2+z^2=1 & (4) \end{cases}$$

由（1）式得 $x=y=z=-\dfrac{1}{2\lambda}.$ ————————————————————6 分

代入（4）式可得 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

于是得到两个可能的极值点，即 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}),(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

——————————————8 分

这两个点处的函数值分别为

$$T(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})=600+\sqrt{3};T(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})=600-\sqrt{3}.$$

比较可得，飞行器表面温度的最高点为 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}).$ ————10 分