

一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 曲线  $y = \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  上与  $x$  轴所围成的平面图形的面积为----- ( )
- (A) 2 (B) 4
- (C) 6 (D) 0
2. 反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  收敛需要  $p$  满足----- ( )
- (A)  $p > 1$  (B)  $p \leq 1$
- (C)  $p > 0$  (D)  $p \geq 0$
3. 微分方程  $y'' + 4y = \cos 2x$  的特解形式可设为----- ( )
- (A)  $a \cos 2x$  (B)  $ax \cos 2x$
- (C)  $x(a \cos 2x + b \sin 2x)$  (D)  $a \cos 2x + b \sin 2x$
4. 下列级数中收敛的是----- ( )
- (A)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)}$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$
- (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n \sqrt{n}}$
5. 曲面  $e^z - z + xy = 3$  在点  $(2, 1, 0)$  处的切平面方程为----- ( )
- (A)  $x + 2y - z - 4 = 0$  (B)  $x + 2y - 4 = 0$
- (C)  $2x + y - z - 4 = 0$  (D)  $2x + y - z - 5 = 0$

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 二阶常微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.
7. 设函数  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ , 则全微分  $du|_{(1,1,1)} =$ \_\_\_\_\_.
8.  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x+2} \sin t^2 dt =$ \_\_\_\_\_.
9. 改换积分次序  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy =$ \_\_\_\_\_.

10. 设函数  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 且  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

设  $s(x)$  为  $f(x)$  的傅里叶级数的和函数, 则  $s(\frac{\pi}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $s(3\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、计算题 (6 小题, 每小题 6 分, 共 36 分)

11. 计算定积分:  $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

12. 求微分方程  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$  的通解.

13. 设函数  $z = f(xy, y)$ ,  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

14. 求函数  $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$  的极值.

15. 计算  $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ , 其中  $D$  是由圆心在原点、半径为  $a$  的圆周所围成的闭区域.

16. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^{n-1}}$  的敛散性. 如果收敛, 指出是条件收敛还是绝对收敛.

### 四、分析题 (本题 8 分)

17. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的收敛半径和收敛域.

### 五、解答题 (2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18. 利用高斯公式计算  $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是介于  $z=0$  和  $z=3$  之间的圆柱体  $x^2 + y^2 \leq 9$  整个表面的外侧.

19. 计算曲线积分  $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ , 其中  $L$  为抛物线  $y = x^2$  上从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的一段弧.

### 六、证明题 (本题 5 分)

20. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $x^2 + y^3 - xyz^2 = 0$  确定, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2 - 3y^3}{2xyz}.$$

### 七、应用题 (本题 7 分)

21. 过曲线  $y = x^2$  上点  $(1,1)$  作曲线的切线, 该切线与曲线  $y = x^2$  及  $x$  轴所围成的平面图形为  $D$ , 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.