郑州轻工业大学 2018—2019 学年 第 二 学期 高等数学 A2 试卷（A）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《高等数学 A2》试卷 A 卷标准答案及评分标准

（电气、计算机、软件、建环各专业 18 年级适用）

注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效

一、选择题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1．具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}$ 的 2 阶常系数齐次方程为----------（ B ）

(A) $y'' - 2y' + y = 0$； (B) $y'' + 2y' + y = 0$；

(C) $y'' - y' - 2y = 0$； (D) $2y'' - y' - y = 0$.

2．函数 $f(x,y) = x^2 + (y-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x'(1,1) =$ -------------（ D ）

(A) −2； (B) −1； (C) 1； (D) 2.

3．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续是函数 $f(x,y)$ 在该点可微的---（ C ）

(A) 充分必要条件； (B) 必要条件非充分条件；

(C) 充分条件非必要条件； (D) 既非充分条件又非必要条件.

4．下列方程中可利用 $p = y', p' = y''$ 降为 p 的一阶微分方程的是----（ A ）

(A) $(y'')^2 + xy' - x = 0$； (B) $y'' + yy' + y^2 = 0$；

(C) $y'' + y^2 y' - y^2 x = 0$； (D) $y'' + yy' + x = 0$.

5．交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx =$ --------------（ D ）

(A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$； (B) $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^1 f(x,y)dy$；

(C) $\int_0^1 dy \int_{-1}^1 f(x,y)dx$； (D) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

6．函数 $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数为-----------------（ C ）

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n}, x \in (-1,3)$； (B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}, x \in (-1,3)$；

(C) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n}, x \in (-1,3)$； (D) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}, x \in (-1,3)$.

二、填空题（7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

7．微分方程 $y' - y \cdot \cot x = 0$ 的通解是__ $y = c\sin x$(c 为任意常数________.

8．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{\sin(xy)}{xe^{xy}} =$ ___ π _______.

9．已知函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$，则 $dz =$ _____ $\dfrac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}$ _________.

10．设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的闭区域，利用柱面坐标表示三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$ ___ $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho dz$ _____（用三次积分表示）。

11．$\int_L (x+y)\mathrm{d}s =$ ___ $\sqrt{2}$ ______，其中 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段。

12．设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x) = -x, -\pi < x \le \pi$.设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则 $S(\pi) =$ _____0________.

三、解答题（7 小题，每题 7 分，共 49 分）

13. 求解微分方程 $y''=x+e^x$.

解：方程两边积分得

$$y'=\frac{x^2}{2}+e^x+C_1.$$ -----------3 分

方程两边再次积分可得 $y=\frac{x^3}{6}+e^x+C_1x+C_2$（$C_1,C_2$ 为任意常数）即为方程通解。

------------------------7 分

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n\cdot 3^n}$ 的敛散性；如果收敛，是否绝对收敛.

解：令 $u_n=\frac{(-1)^n e^n}{n\cdot 3^n}$， ---------------1 分

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{e^n}{n\cdot 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n}{3\cdot(1+n)}=\frac{e}{3}<1$$ -----------4 分

由正项级数比值判别法可得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，从而原级数绝对收敛。

---------------------7 分

15. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,2,2)$ 处的切平面方程和法线方程。

解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$， -------------1 分

则曲面在点 $(1,2,2)$ 处的法向量

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,2,2)}=(2x,4y,6z)\big|_{(1,2,2)}=2(1,4,6)$$ ----------3 分

则曲面在点 $(1,2,2)$ 处的切平面方程 $(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$，即

$x+4y+6z=21$ ---------------------5 分

法线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{6}$ ---------------------------7 分

16. 计算二重积分 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2<4\}$.

解：在极坐标中，闭区域 D 可以表示为

$1\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$ -------------------------2 分

又有 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 则，原积分

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\rho\cdot\rho d\rho d\theta$$ --------------------------------4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^2 d\rho=\frac{14\pi}{3}$$ -----------------------------7 分

17. 计算 $\oint_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为三顶点分别为（0,0），（0,3）和（4,3）的三角形正向边界。

解：令 $P=2xy^3-y^2\cos x, Q=x-2y\sin x+3x^2y^2$， ---------------1 分

且封闭曲线 L 所围区域记为 D，

其中 $\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x, \frac{\partial Q}{\partial x}=1-2y\cos x+6xy^2$ -----------------2 分

由格林公式

$$\oint_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x+3x^2y^2)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$ ---4 分

$$=\iint_D 1dxdy=S_D=\frac{1}{2}\times 3\times 6=9.$$ ---------------7 分

18. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 和锥面 $z^2=x^2+y^2$ 所围空间立体的整个边界曲面的外侧。

解法一：令 $P=x,Q=y,R=z$，设曲面所围立体为Ω，-------------2 分

则由 Gauss 公式可得

$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$ -------------------4 分

由球面坐标且其中Ω:$0\le r\le 2\cos\varphi,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},0\le\theta\le 2\pi$

$\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

------------6 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2dr=\pi.$

则原积分 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3\pi.$ ------------7 分

解法二解法一：令 $P=x,Q=y,R=z$，设曲面所围立体为Ω，-------2 分

则由 Gauss 公式可得

$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3V_{\Omega}$ -----------4 分

联立方程$\begin{cases}x^2+y^2+(z-1)^2=1\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$可得 $z=1$，

可知空间立体Ω是由半径为 1 的半球体和底面半径是 1 高是 1 的圆锥体所组成，其体积$V_{\Omega}=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1=\pi.$

故 $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3\pi.$ ---------------------7 分

19. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{\sqrt{n}}x^n$ 的收敛域。

解：令 $a_n=(-1)^n\dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$, ----------------1 分

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$, ---------4 分

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛； ------------------5 分

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，P 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散；--------------------------6 分

故幂级数的收敛域$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$. --7 分

四、证明题（本题 7 分）

20．设 $z=x^nf(\dfrac{y}{x^2})$, 其中 $f(u)$ 为可微函数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$.

解：令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}f(\dfrac{y}{x^2})+x^nf'(\dfrac{y}{x^2})(-\dfrac{2y}{x^3})=nx^{n-1}f+2x^{n-3}yf'$, ---------3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^nf'(\dfrac{y}{x^2})(\dfrac{1}{x^2})=x^{n-2}f'$, --------------------------6 分

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x(nx^{n-1}f+2x^{n-3}yf')+2yx^{n-2}f'=nx^nf=nz.$-----------7 分

五、应用题（本题 8 分）

21. 设某企业的 Cobb-Douglus 生产函数为 $f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 其中 x,y 分别表示企业投入的劳动力数量和资本数量，若每个劳动力和每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元，该企业的总预算是 50000 元，试问如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本投入，才能使生产量最高。

解：这是条件极值的问题，欲在约束条件 $150x+250y=50000$ 下求函数 $f(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ 的最大值。 --------------------------------------1 分

令 $L(x,y,\lambda)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+(150x+250y-50000)$, -------------------3 分

解方程组 $\begin{cases} L_x = 75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 150\lambda = 0 \\ L_y = 75x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} + 150\lambda = 0 \\ L_\lambda = 150x + 250y - 50000 = 0 \end{cases}$ ----------------------------5 分

联立解得 $x = 250, y = 50.$---------------------------------7 分

由于点 $(x, y) = (250, 50)$ 是该问题的唯一驻点，又问题本身显然存在最大值，

故 $x = 250, y = 50$ 就是所求，即当雇佣 250 个劳动力，其他的作为资本投入

式可获得最大产量 $f(250, 50) = 16719.$ ------------------------8 分