郑州轻工业学院 2017—2018 学年 第 1 学期 线性代数与空间解析几何 试卷 A 卷

专业年级及班级 姓名 学号

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

题号	一	二	三						四	总分
得分										
评阅人										

《线性代数与空间解析几何》期末考试试卷 A 标准答案

适用专业：2017 级理工科本科专业

本试卷共 3 页，四大题 19 小题，总计 100 分

评卷人	
得　分	

一、单项选择题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1．设 A、B 均为 n 阶矩阵，则下列结论中正确的是（ D ）

(A) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$；　(B) $(AB)^k=A^kB^k$；

(C) $|kAB|=k|A||B|$ ；　(D) $|(AB)^k|=|A|^k|B|^k$.

2．如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{13} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{23} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{33} & 2a_{32} \end{vmatrix}=$（ D ）

(A) 4 ；　(B) −4 ；　(C) 16 ；　(D) −16 .

3．下列矩阵中秩为 2 的是（ A ）

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ ；　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4．关于线性方程组的解，下述说法正确的是（ B ）

(A) 若 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax=0}$ 仅有零解；

(B) 若 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax=0}$ 有非零解；

(C) 若 $\boldsymbol{Ax=0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有无穷多解；

(D) 若 $\boldsymbol{Ax=0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有唯一解.

5. 在空间直角坐标系下，下列说法错误的是（ B ）

(A) 方程 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 表示椭球面；

(B) 方程 $x^2+2y^2-3z^2=1$ 表示双叶双曲面；

(C) 方程 $z=x^2+2y^2$ 表示椭圆抛物面；

(D) 方程 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x=Py}$ 下的标准形为 $2\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$，其中 $\boldsymbol{P=(P_1,P_2,P_3)}$，若 $\boldsymbol{Q=(P_3,P_1,P_2)}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在变换 $x=Qy$ 下的标准形为（ D ）

(A) $2\boldsymbol{y}_1^2-\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{y}_3^2$ ；　(B) $2\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$ ；

(C) $2\boldsymbol{y}_1^2-\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$ ；　(D) $-y_1^2+2y_2^2+y_3^2$.

评卷人	
得　分	

二、填空题(6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

7．若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(AB)^T=$ $\underline{-B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}}$.

8．设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,-1)^T$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,x)^T$ 正交，则 $x=$ $\underline{2}$.

9． 点 $P(1,1,1,)$ 到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离等于 $\underline{1/3}$.

10．设 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 1,2,-1，则行列式 $|2A+3E| =$ <u>35</u>.

11．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2+2tx_2x_3+3x_3^2$ 为正定二次型，则 t 的取值范围是 <u>$|t|<3$</u> .

12．空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 xoy 面上投影曲线的方程为: $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$.

三、解答题（6 小题，每小题 9 分，共 54 分）

评卷人	
得　分	

13. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0$ …………(9 分)

评卷人	
得　分	

14. 设 A 为方阵，其伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，判断矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是否可逆，若可逆求出其逆矩阵.

解：因 $\left|A^*\right|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, 所以 A^* 可逆。……………………………………(4 分)

$$\left(A^* \mid E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

所以 $\left(A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ……………………………………………(9 分)

评卷人	
得　分	

15. 求过点 $P(1,1,1)$ 且垂直于直线 $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x-5y+3z+2=0 \end{cases}$ 的平面方程.

解：所求平面方程的法向量为 $\vec{n}=\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ ……..(4 分)

所求平面方程为 $-2(x-1)-5(y-1)-7(z-1)=0$ ，

即 $2x+5y+7z-10=0$ 。 ……………………………………………………(9 分)

评卷人	
得　分	

16. 判断向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性相关性.

解：（解法一）令 $A=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)$ ，则 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$

故向量组 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$ 线性相关。………………………………(9 分)

（解法二）$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&4&-1&-4\\0&1&0&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 。…………(7 分)

$R(A)=3<4$ ，故向量组 $\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4$ 线性相关。……………………(9 分)

评卷人	
得　分	

17．求下列非齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1,\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=-1,\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=1.\end{cases}$$

解：$\mathrm{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&-1&1\\2&-5&3&2&-1\\7&-7&3&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&-1&1\\0&-7&5&4&-3\\0&-14&10&8&-6\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&-1&1\\0&-7&5&4&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

因 $R(A)=R(\tilde{A})=2<4$ ，方程组有无穷多解。再进行行变换将其化为行最简形

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{7})}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&-1&1\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ ………………(3 分)

原线性方程组等价于方程组

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4+\frac{4}{7},\\x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4+\frac{3}{7},\end{cases}$$ 取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，代入可得 $\eta^*=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{3}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$ …………………(5 分)

导出组为 $\begin{cases}x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4,\\x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4,\end{cases}$ ……………………………(6 分)

取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 两组值，代入可得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}$,

于是可得基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$ ……………………………(8 分)

故通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta^*$（$k_1,k_2$ 为任意常数）。……………………………(9 分)

评卷人	
得　分	

18．设 $A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&3-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(2-\lambda)=0$ ，得 λ_1=λ_2=3，λ_3=2.

………………………(4分)

把 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 代入（$A-\lambda_i E$）$x=0$.

可得系 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，解得基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

…………………………(6分)

把 $\lambda_3=2$ 代入（$A-\lambda_i E$）$x=0$. 解得基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

…………………………(7分)

则 $P=(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3)=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 2\end{pmatrix}$. …………………………(9分)

评卷人	
得　分	

四、证明题(共 4 分)

19.设 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，记

(I)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$,，(II)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，

证明：α_m 能由（II）线性表示，但不能由（I）线性表示.

证明：$\because$ β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

$\therefore \beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$　　(1)

若 $k_m=0$，则 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$

这与 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示矛盾，所以 $k_m\neq 0$.

因此，$\alpha_m=\dfrac{1}{k_m}\beta-\dfrac{k_1}{k_m}\alpha_1-\dfrac{k_2}{k_m}\alpha_2-\cdots-\dfrac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}$,

所以，α_m 能由（II）线性表示. …………………………(2分)

若 α_m 能由（I）线性表示

即 $\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$，

将其代入（1）得 $\beta=(k_1+k_m\lambda_1)\alpha_1+(k_2+k_m\lambda_2)\alpha_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m\lambda_{m-1})\alpha_{m-1}$，

这与 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示矛盾，α_m 不能由（I）线性表示.

……………………(4分)