学号：________ 姓名：________ 专业班级：________ 学院：________

装 订 线 内 不 要 答 题

郑州轻工业大学《线性代数》2020-2021学年

第一学期期末试卷

注意事项：1.本试卷满分100分.

2.考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	四	五	得分
得分						
评阅人						

得分	

一

单项选择题（在每小题的四个备选答案中，选出一个正确答案，并将正确答案的选项填在题后的括号内；每小题3分，共18分）

1. 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域D内连续是这两个二阶混合偏导数在区域D内相等的 B 条件.

(A) 充分必要 (B) 充分 (C) 必要 (D) 不充分也不是必要

2. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且 $f(0,0)=0$，则对 $(x,y)\neq(0,0)$，$f(x,y)$ 应表为（A ）

(A) $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ (B) $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ (C) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (D) $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

3. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有连续的二阶偏导数，则（A ）

(A) $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ (B) $f_{xy}(x_0,y_0)\neq f_{yx}(x_0,y_0)$

(C) $f_{xx}(x_0,y_0)=f_{yy}(x_0,y_0)$ (D) $f_{xx}(x_0,y_0)\neq f_{yy}(x_0,y_0)$

4..设区域 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$,$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0\}$，则(C)

(A) $\iint\limits_{D_1} x\,d\sigma=4\iint\limits_{D_2} x\,d\sigma$ (B) $\iint\limits_{D_1} y\,d\sigma=4\iint\limits_{D_2} y\,d\sigma$ 】

(C) $\iint\limits_{D_1} x^2y^2\,dxdy=4\iint\limits_{D_2} x^2y^2\,dxdy$ (D) $\iint\limits_{D_1} xy\,d\sigma=4\iint\limits_{D_2} xy\,d\sigma$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ （ A ）

(A) 条件收敛 (B) 敛散性不定 (C) 发散 (D) 绝对收敛

6. 设 $f(x,y)$ 在 R^2 上有 $f_x(x,y)<0,\ f_y(x,y)>0,$ 则下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是(C)

（A） $x_1<x_2, y_1<y_2$ （B） $x_1<x_2, y_1>y_2$

（C） $x_1>x_2, y_1<y_2$ （D） $x_1>x_2, y_1>y_2$

二、填空题（每小题3分，共21分）

得分	

1．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的 <u>充分</u> 条件.

2.极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\dfrac{\tan xy}{y}=$ <u>3</u>；

3. 交换积分的次序: $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y}\sqrt{x^2+y^2}dx=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}\sqrt{x^2+y^2}dx$；

4．设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'(x^2-y^2,e^{xy})+xe^{xy}f_2'(x^2-y^2,e^{xy})$.

5．若积分区域 D 由直线 $x=1, y=1$ 以及直线 $x+y=1$ 所围成，则二重积分

$\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$ <u>≤</u> $\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$ （填“≤” 或“≥”） .

6．积分 $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x^2+y^2)dy\ (a>0)$ 在极坐标形式下的二次积分为

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r^2)rdr$

7. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的 <u>必要</u> 条件.

三、多元函数微分的计算与应用（共25分）

得分	

1. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y, v=xy$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.（6分）

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot 1+2v\cdot y$.

$=2(x+y)+2y\cdot xy=2(x+y+xy^2)$ (3分)

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot 1+2v\cdot x$

$=2(x+y)+2x\cdot xy=2(x+y+x^2y)$ (6分)

2. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；（7分）

解 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则 $F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z-4$ （2分）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z}$$ （4分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2-z+xz_x}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$ （7分）

3．求函数 $z=x^2y+\sin(xy)$ 的全微分 dz.

解: 因 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y\cos(xy),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+x\cos(xy)$. （4分）

所以 $dz=[2xy+y\cos(xy)]dx+[x^2+x\cos(xy)]dy$. （6分）

4. 已知函数 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2$，求函数 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值最小值；

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0, \frac{\partial z}{\partial y}=2y=0$，所以 $f(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$ （2分）

在边界上的函数为: $z=5x^2-2\ (-1\le x\le 1)$ （3分）

在边界上的最大值是 $z|_{x=\pm 1}=3$, （4分）

最小值是 $z|_{x=0}=-2$, 而 $f(0,0)=2$ （5分）

所以在椭圆域内最大值是3，最小值是-2 （6分）

四、二重积分的计算与应用（每题8分，共24分）

得分	

1. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中D是由直线 $y=x-2$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成的闭区域.

解: $\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xydx\right]dy$ （4分）

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]dy=\frac{45}{8}$$ （8分）

2. 利用极坐标计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中$D$是园环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$ 域

解:在极坐标系中,积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid a\le\rho\le b,0\le\theta\le2\pi\}$,　　　　（4分）

所以 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{\rho^2}\ \rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b\rho^2d\rho=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$　（8分）

3．计算 $\iint\limits_D\sqrt{y}dxdy$，其中D是由两条抛物线 $y=x^2,y=\sqrt{x}$ 所围成的闭区域.

解: $\iint\limits_D\sqrt{y}dxdy=\int_0^1xdx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}dy$　　　　（4分）

$=\frac{2}{3}\int_0^1x[y^{\frac{2}{3}}]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\frac{6}{55}$　　　　（8分）

得分	

五、无穷级数（每题6分，共12分）

1. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$ 的敛散性.

解　$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{4^n}$　　（3）

$=\frac{1}{4}<1$　　　（4

故级数收敛　　　（6）

2.讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n}$ 的敛散性.

解　$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$　　　　（2分）

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛.　　　　（4分）

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n}$ 绝对收敛　　　　（5分）

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^n}$ 收敛.　　　　（6分）