郑州轻工业大学 2021—2022 学年 第 二 学期 高等数学 A2 试卷（A）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

# 《高等数学 A2》试卷（A 卷）评分标准

（机电、电气、计算机、软件、建环等各专业 21 年级适用）

**注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效**

## 一、单项选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列微分方程的阶数是二阶的是----------------------------（ D ）

(A) $xy''' + 2y'' + x^2 y = 0$； (B) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$；

(C) $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2\theta$； (D) $t^3\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dt}{du} = 0$.

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微，则下列说法**不正确**的是--------（ D ）

(A) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续;

(B) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处极限存在;

(C) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处存在偏导数;

(D) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处存在连续的偏导数.

3. 设 $f(x,y) = x^2 e^{y^2} + (x-1)\arctan\frac{y}{x}$，则有----------------------（ C ）

(A) $f_x'(1,0)=2,\ f_y'(1,0)=1$； (B) $f_x'(1,0)=3,\ f_y'(1,0)=0$；

(C) $f_x'(1,0)=2,\ f_y'(1,0)=0$； (D) $f_x'(1,0)=3,\ f_y'(1,0)=1$.

4. 改换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx =$--------------------------（ B ）

(A) $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$； (B) $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$；

(C) $\int_{y^2}^{2y} dx\int_0^2 f(x,y)dy$； (D) $\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$.

5. $L$ 为连接 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 两点的直线段，曲线积分 $\int_L (x+y)ds =$（ B ）

(A) $\sqrt{2}$； (B) $2\sqrt{2}$； (C) $2$； (D) $0$.

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性为--------------------------------（ B ）

(A) 不确定; (B) 条件收敛;

(C) 绝对收敛; (D) 发散.

## 二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$________________.

答案：$\ln 2$

8. 已知 $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$，则 $d\,f(1,2,0) =$________________.

答案：$dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}dz$.

9. 设函数 $z = f(x,y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$__________.

答案：$\frac{\cos z}{1+e^z}$

10. 设区域 $\Omega: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv =$__________.

答案：3

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$ 的关于 $x$ 的幂级数展开式为________________.

答案：$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}}$，$(-\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$ （注：不加展开的范围扣 1 分）

12. 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，它在 $[-\pi，\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ 则其傅里叶级数在点 $x=0$ 处收敛于____________.

答案： 0.

**三、解答题（7 小题，每题 7 分，共 49 分）**

13. 一曲线通过点(1,1), 并且它在点 $(x,y)$ 处的切线斜率为 $-(1+\dfrac{y}{x})$，求此曲线方程.

解：
$$y'=-(1+\frac{y}{x})\Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=-1\Rightarrow y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int -\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}+C\right)\Rightarrow$$

$$y=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int -\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x+C\right)\Rightarrow y=\frac{1}{x}\left(\int -x\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2+C\right).$$ 曲线过点 $(1,1)$，得 $C=\dfrac{3}{2}$，曲线方程为 $y=\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2}x.$

--------------------7 分

14. 求球面 $x^2+y^2+z^2-6x+2y+7=0$ 在点 $P(4,0,1)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6x+2y+7$，

法向量 $\vec{n}=\left(2x-6,2y+2,2z\right)|_{(4,0,1)}=(2,2,2)$.------------------------------------3 分

切平面方程为 $2(x-4)+2(y-0)+2(z-1)=0$，即 $x+y+z=5$.

法线方程为 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}$，即 $x-4=y=z-1$.-----------------------------7 分

15. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

解：由 $u_x=y^2-yz,u_y=2xy-xz,u_z=3z^2-xy$，可求得

$$\mathrm{grad}\,u(1,1,1)=(0,1,2)$$ .-------------------------------------------3 分

沿梯度方向函数增加最快，沿梯度方向的方向导数取最大值，最大值为梯度的模，即为 $\sqrt{5}$.

沿梯度反方向函数减少最快，沿梯度反方向的方向导数取最小值，最小值为负的梯度的模，即为-$\sqrt{5}$.-------------------------------------------------------7 分

16. 设 $D$ 为圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域，求二重积分 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$ 的值。

解：在极坐标中，闭区域 D 可以表示为

$$0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$$ ----------------------------------------------2 分

又有 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 则，原积分

$$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D e^{\rho}\cdot\rho d\rho d\theta$$ ----------------------------------------------------4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho e^{\rho}d\rho=2\pi\cdot(e^2+1)$$ ---------------------------------------------7 分

17. 利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中 $L$ 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域的正向边界曲线.

解：令 $P=2xy-x^2,Q=x+y^2$，---------------------------------------------1 分

且封闭曲线 $L$ 所围区域记为 D，

其中 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$-------------------------------------------------------3 分

由格林公式

$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ---------------------------------4 分

$=\iint_D (1-2x)dxdy=\int_0^1 (1-2x)dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$ -----------------------------------------------6 分

$=\int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{30}$.--------------------------------------------------------7 分

18. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^2-4x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=2$ 所围成的立体$\Omega$的整个表面的外侧.

解法一: 令 $P=y^2,Q=z^2,R=3z^2-4x^2y^2$，设曲面所围立体为$\Omega$，-------2 分

则由 Gauss 公式可得（用柱坐标计算三重积分）

$\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^2-4x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iiint_\Omega zdv=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_\rho^2 z\mathrm{d}z$ -------5 分

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4\text{-}\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=24\pi$ --------7 分

解法二: 令 $P=y^2,Q=z^2,R=3z^2-4x^2y^2$，设曲面所围立体为$\Omega$，-------2 分

则由 Gauss 公式可得（先二后一法计算三重积分）

$\oiint_\Sigma y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^2-4x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iiint_\Omega zdv=6\int_0^2\mathrm{d}z\iint_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ -------5 分

$=6\int_0^2 \pi z^3\mathrm{d}z=24\pi$ -----------7 分

19. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及其和函数。

解：令 $a_n=\frac{1}{n}$, ----------------1 分

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n+1}=1$, ---------------------------------------2 分

当 $x=-1$ 时，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛；---------------------------------------3 分

当 $x=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；故幂级数的收敛域 $[-1,1)$. ---------------4 分

不妨设幂级数在收敛域内的和函数

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx$ ---------------------------------------7 分

$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^n dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$.

**四、证明题（本题 7 分）**

20. 证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$ 在整个 $xOy$ 平面内与路径无关，并计算积分值.

证明 1:令 $P=x^2-y$, $Q=-(x+\sin^2 y)$, ---------------------------------------------1 分

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 $xOy$ 平面内处处成立，所以积分在整个 $xOy$ 平面内与路径无关. ------------------------------------------3 分

由于积分与路径无关，所以积分路径可以选择先从(0,0)到(1,0),再从(1,0)到(1,1)的折线.

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y=-\frac{7}{6}+\frac{\sin 2}{4}$ -------7 分

证明 2：令 $P=x^2-y$, $Q=-(x+\sin^2 y)$, ------------------------------1 分

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 $xOy$ 平面内处处成立，所以积分在整个 $xOy$ 平面内与路径无关. -----------------------3 分

由于积分与路径无关，所以存在函数 $u(x,y)$，使得

$\mathrm{d}u(x,y)=(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$ ---------------------4 分

根据微分法可求得 $u(x,y)=\dfrac{x^2}{3}-xy-\dfrac{y}{2}+\dfrac{\sin 2y}{4}$.

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}u=u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{\sin 2}{4}$ .-----------7 分

**五、应用题（本题 8 分）**

21. 某单位沿厂房的后墙修建一座容积为 $V$ 形状为长方体的仓库，已知仓库的屋顶和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 2 倍和 1.5 倍，厂房后墙的长和高足够，因而这一面墙壁的造价不计，问如何设计，方能使仓库的造价最低？

解：这是条件极值的问题，欲在约束条件 $xyz=V$ 下求函数

$f(x,y)=3xy+3xz+1.5yz$ 的最小值. --------------------------------------1 分

令 $L(x,y,z,\lambda)=3xy+3xz+1.5yz+\lambda(xyz-V)$,--------------------------------3 分

解方程组 $\begin{cases} L_x=3y+3z+\lambda yz=0 \\ L_y=3x+1.5z+\lambda xz=0 \\ L_z=3x+1.5y+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-V=0 \end{cases}$ ---------------------------------------------5 分

联立解得 $x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},y=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},z=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ ------------------------------------------7 分

由于点 $(x,y,z)=(\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}})$ 是该问题的唯一驻点，又问题本身显然存在最小值，故 $x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},y=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},z=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ 就是所求，即当仓库的长宽高分别为 $\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}},2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ 时，仓库的造价最低，最低造价为 $9\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{2}}$ .---------------8 分.