# 高等数学（上)重要知识点归纳

## 第一章 函数、极限与连续

### 一、极限的定义与性质

**1**、定义（以数列为例）

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时，$|x_n - a|<\varepsilon$

**2**、性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为某一个无穷小。

(2)（保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$。

(3)*无穷小乘以有界函数仍为无穷小。

### 二、求极限的主要方法与工具

**1**、*两个重要极限公式 (1) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$ (2) $\lim\limits_{\Diamond\to\infty}(1+\frac{1}{\Diamond})^{\Diamond}=e$

**2**、两个准则 (1) *夹逼准则 (2)单调有界准则

**3**、*等价无穷小替换法

常用替换：当 $\Delta\to 0$ 时

(**1**) $\sin\Delta \sim \Delta$ (2) $\tan\Delta\sim\Delta$

(3) $\arcsin\Delta\sim\Delta$ (4) $\arctan\Delta\sim\Delta$

(**5**) $\ln(1+\Delta)\sim\Delta$ (6) $e^{\Delta}-1\sim\Delta$

(**7**) $1-\cos\Delta\sim\frac{1}{2}\Delta^2$ (8) $\sqrt[n]{1+\Delta}-1\sim\frac{\Delta}{n}$

**4**、分子或分母有理化法 5、分解因式法 6 用定积分定义

### 三、无穷小阶的比较* 高阶、同阶、等价

### 四、连续与间断点的分类

**1、连续的定义***

$f(x)$在$a$点连续

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow f(a^+)=f(a^-)=f(a)$$

**2、间断点的分类**

$$\begin{cases} \text{第一类}\begin{cases}\text{可去型（极限存在）}\\ \text{跳跃型（左右极限存在但不相等）}\end{cases} \\ \text{第二类}\begin{cases}\text{无穷型（极限为无穷大）}\\ \text{震荡型（来回波动）}\\ \text{其他}\end{cases} \end{cases}$$

**3、曲线的渐近线***

(1)水平渐近线：若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,则存在渐近线：$y=A$

(2)铅直渐近线：若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$,则存在渐近线：$x=a$

## 五、闭区间连续函数性质

**1、最大值与最小值定理**

**2、介值定理和零点定理**

# 第二章 导数与微分

## 一、导数的概念

**1、导数的定义***

$$y'|_{x=a}=f'(a)=\frac{dy}{dx}|_{x=a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2、左右导数

左导数 $f'_-(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

右导数 $f'_+(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

3、导数的几何意义*

$y'|_{x=a}$=曲线$f(x)$在点（$a,f(a)$)处的切线斜率 $k$

4、导数的物理意义

若运动方程：$s=s(t)$则$s'(t)=v(t)$(速度)，$s''(t)=v'(t)=a(t)$(加速度)

5、可导与连续的关系：　　可导$\to$连续，反之不然。

二、导数的运算

1、四则运算 $(u\pm v)'=u'\pm v'$　　$(uv)'=u'v+uv'$　　$(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

2、复合函数求导 设 $y=f[\varphi(x)]$，一定条件下 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=y'_u u'_x$

3、反函数求导 设 $y=f(x)$和$x=f^{-1}(y)$ 互为反函数，一定条件下：$y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$

4、求导基本公式*（要熟记）

5、隐函数求导* 方法：在 $F(x,y)=0$ 两端同时对 $x$ 求导，其中要注意到：$y$ 是中间变量，然后再解出 $y'$

6、参数方程确定函数的求导* 设$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，一定条件下

$y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$，$y''_x=\dfrac{dy'_x}{dx}=\dfrac{(\dfrac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t}=\dfrac{y''_t x'_t-y'_t x''_t}{(x'_t)^3}$（可以不记）

7、常用的高阶导数公式

（1） $\sin^{(n)} x=\sin(x+\frac{n}{2}\pi),(n=0,1,2...)$

（2） $\cos^{(n)} x=\cos(x+\frac{n}{2}\pi),(n=0,1,2...)$

（3） $\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},(n=12...)$

（4） $(\frac{1}{1+x})^n=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},(n=0,1,2...)$

（5） （莱布尼茨公式） $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

## 三、微分的概念与运算

### 1、微分定义 *

若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则 $y=f(x)$ 可微，记 $dy=A\Delta x=Adx$

### 2、公式： $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$

### 3、可微与可导的关系* 两者等价

### 4、近似计算 当 $|\Delta x|$ 较小时，$\Delta y\approx dy$， $f(x)\approx f(x+\Delta x)+f'(x)\Delta x$

# 第三章 导数的应用

## 一、微分中值定理*

### 1、柯西中值定理*

(1) $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续
(2) $f(x)$、$g(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导
(3) $g(x)\neq 0$，则：

$\exists\xi\in(a,b)$，使得：$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

当取 $g(x)=x$ 时，定理演变成：

### 2、拉格朗日中值定理*

$\exists\xi\in(a,b)$,使得:$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

当加上条件 $f(a)=f(b)$ 则演变成:

3、罗尔定理* $\exists\xi\in(a,b)$,使得:$f'(\xi)=0$

4、泰勒中值定理

在一定条件下:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n)$,$\xi$ 介于 $x_0$、$x$ 之间。

当公式中 n=0 时,定理演变成拉格朗日定理.

当 $x_0=0$ 时,公式变成:

5、麦克劳林公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

6、常用麦克劳林展开式

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$

二、罗比达法则*

记住:法则仅能对 $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ 型直接用,对于 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$,转化后用. 幂

指函数恒等式* $f^{g}=e^{g\ln f}$

三、单调性判别*

1、 $y'>0\Rightarrow y\uparrow,\quad y'<0\Rightarrow y\downarrow$

2、单调区间分界点：驻点和不可导点。

四、极值求法*

1、极值点来自：驻点或不可导点（可疑点).

2、求出可疑点后再加以判别.

3、第一判别法：左右导数要异号，由正变负为极大，由负变正为极小.

4、第二判别法：一阶导等于 0,二阶导不为 0 时，是极值点。正为极小，负为极大.

五、闭区间最值求法*

找出区间内所有驻点、不可导点、区间端点,比较大小.

六、凹凸性与拐点*

1、 $y''>0\Rightarrow y\cup,\quad y''<0\Rightarrow y\cap$

2、拐点：曲线上凹凸分界点$(x_0,y_0)$.

横坐标$x_0$不外乎 $f''(x_0)=0,$或$f''(x_0)$不存在，找到后再加以判别$x_0$附近的二阶导数是否变号.

七、曲率与曲率半径

1、曲率公式$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

2、曲率半径$R=\dfrac{1}{K}$

3、



# 第四章 不定积分

## 一、不定积分的概念*

若在区间 $I$ 上，$F'(x)=f(x)$,亦$dF(x)=f(x)dx$，

则称 $F(x)$为$f(x)$的原函数.

称全体原函数 F(x)+c 为 f（x）的不定积分，记为$\int f(x)dx$。

## 二、微分与积分的互逆关系

1、$[\int f(x)dx]'=f(x)\Leftrightarrow d\int f(x)dx=f(x)dx$

2、$\int f'(x)dx=f(x)+c\Leftrightarrow\int df(x)=f(x)+c$

## 三、积分法*

1、凑微分法*

2、第二类换元法

3、分部积分法* $\int udv=uv-\int vdu$

4、常用的基本积分公式（要熟记）。

# 第五章 定积分

一、定积分的定义 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、可积的必要条件　有界.

三、可积的充分条件　连续或只有有限个第一类间断点或单调。

四、几何意义　定积分等于面积的代数和。

五、主要性质☆

1、可加性 $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$

2、估值 在[a，b]上，$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

3、积分中值定理*

当 f(x) 在 [a,b]上连续时：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),\xi\in[a,b]$

4、函数平均值：$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

六、变上限积分函数☆

1、若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$可导，且$[\int_a^x f(t)dt]'=f(x)$

2、若$f(x)$在$[a,b]$连续，$\varphi(x)$可导，则:$[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt]'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

七、牛—莱公式☆

若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$\int_a^b f(x)dx=[\int f(x)dx]|_a^b=F(b)-F(a)$

八、定积分的积分法*

1、换元法　　牢记：换元同时要换限

2、分部积分法　　$\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$

3、特殊积分

（1） $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0,\text{当}f(x)\text{为奇函数时} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx,\text{当}f(x)\text{为偶函数时} \end{cases}$

（2）当 f（x）为周期为 T 的周期函数时：

$$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx, n \in Z^{+}$$

（3）一定条件下：$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$

（4） $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n} xdx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!},\ n\text{是正奇数时} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2},\ n\text{是正偶数时} \end{cases}$

（5） $\int_{0}^{\pi} \sin^{n} xdx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} xdx$

## 九、反常积分*

### 1、无穷区间上

$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x)|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$ 其他类似

2、p 积分：$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}}dx(a>0): \begin{cases} p>1\text{时收敛} \\ p\le 1\text{时发散} \end{cases}$

3、瑕积分：若 a 为瑕点：

则 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to a^{+}}\int_{x}^{b} f(t)dt = F(x)|_{a^{+}}^{b} = F(b) - F(a^{+})$ 其他类似处理

# 第六章 定积分应用

## 一、几何应用

### 1、面积

（1） $A = \int_{a}^{b}(y_{\text{上}} - y_{\text{下}})\ dx$

$A = \int_{a}^{b}(x_{\text{右}} - x_{\text{左}})\ dy$

（2） $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, (\alpha \le t \le \beta)$, 则 $A = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)| dt$

（3） $C: \rho = \rho(\theta)$, 与 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$，$(\alpha \le \theta \le \beta)$围成图形面积

$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^{2}(\theta)\ d\theta$

2、体积*

(1)旋转体体积* $V_x=\pi\int_a^b y^2dx \quad V_y=\pi\int_c^d x^2dy$ 或 $V_y=2\pi\int_a^b xy\,dx$

（2）截面面积为 $A=A(x)$ 的立体体积为 $V=\int_a^b A(x)dx$

3、弧长

(1) $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx(a\le x\le b)$

(2) $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt,(\alpha\le t\le\beta)$

(3) $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta,(\alpha\le\theta\le\beta)$

二、物理应用

1、变力作功

一般地：先求功元素：$dw=F(x)dx,x\in[a,b]$，再积分 $w=\int_a^b F(x)dx$

克服重力作功的功元素 dw=体积$\times\rho\times g\times$位移

2、水压力

dP=水深$\times$面积$\times\rho\times g$

# 第七章 微分方程

一、可分离变量的微分方程

形式：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

二、一阶线性微分方程*

1、线性齐次：$y'+p(x)y=0$

通解公式*：$y=Ce^{-\int p(x)dx}$

2、线性非齐次 $y'+p(x)y=q(x)$

通解公式*: $y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C)$