

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

《线性代数与空间解析几何》试卷 (A 卷)

(适用班级: 机制自动化、测控、能源、过程装备、车辆、智能制造 22 级各班)

(本试卷共 2 页, 5 道大题, 20 个小题, 满分 100 分)

注意: 所有答案必须写在答题卡上, 在试卷上作答无效

一、选择题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

- 排列 635412 的反序数为_____ ()
(A)12; (B)13; (C) 11; (D) 10.
- 直线 $l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ 与平面 $\pi: x-2y+z-4=0$ 的位置关系为()
(A) $l // \pi$; (B) l 在 π 内; (C) $l \perp \pi$; (D) 不是前面三种关系.
- 设非齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = b$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = n$, 则----- ()
(A) $A_{m \times n}x = b$ 一定有唯一解; (B) $A_{m \times n}x = b$ 可能有无穷多解;
(C) $A_{m \times n}x = 0$ 只有零解 (D) $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解.
- 已知向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$. 如果各向量组的秩分别为 $R(I) = R(II) = 3, R(III) = 4$. 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩为--- ()
(A)3; (B)4; (C) 5; (D) 无法确定
- 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & y & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 x, y 分别为---- ()
(A) 0,0; (B) 0,1; (C) 1,0; (D) 1,1.
- 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_2x_3$ 为正定二次型, 则 t 的取值范围为----- ()
(A) $0 < t < 3$; (B) $-3 < t < 0$; (C) $t < -3$ 或 $t > 3$; (D) $-3 < t < 3$.

二、填空题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

- 已知 4 阶行列式 D 的第 2 行元素分别为 1, 3, -2, 2, 对应的余子式分别为 3, -2, 1, 1, 则 $D =$ _____.
- 空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3z^2 = 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为_____.
- 设 A, B 均是 3 阶可逆矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = 3$, 则 $|2A^{-1}B| =$ _____.
- 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & x & 1 \end{pmatrix}$ 的秩 $R(A) = 2$, 则 $x =$ _____.
- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量, 且 $R(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 0, 3)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (4, 2, 6, 0)^T$, 则方程组 $Ax = b$ 的通解为_____.
- 已知三元二次型 $f = x^T Ax$ 经正交变换 $x = Py$ 化为标准形 $f = y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 若 E 为三阶单位矩阵, 则 $|A + E| =$ _____.

三、解答题 (6 小题, 共 54 分)

- (本题 8 分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

14. (本题 8 分) 求过点 $M_0(1, -4, 7)$ 且过直线 $l: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{3}$ 的平面方程.

15. (本题 8 分) 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可逆, 若可逆求其逆矩阵 A^{-1} .

16. (本题 10 分) 已知向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

线性相关. (1) 求 k 的值; (2) 求上述向量组的秩和一个极大线性无关组, 并把不属于极大线性无关组的向量用极大线性无关组线性表示.

17. (本题 10 分) 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解.

18. (本题 10 分) 已知三阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P 和

对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

四、证明题 (本题 5 分)

19. 设 n 阶矩阵 A 和 B 都是正定矩阵, 证明 $A+B$ 也是正定矩阵.

五、应用题 (本题 5 分)

20. 某中药厂用四种中草药 A~D, 根据不同的比例配制成了 I~IV 四种特效药, 各成分用量见下表 (单位: 克). 某医院要购买这四种特效药, 但药厂的 IV 号药已经卖完, 请问能否用其它三种特效药配制出这种脱销的药品? 如果能, 按什么比例配制?

特效药 中草药	I	II	III	IV
A	1	1	1	4
B	1	2	2	6
C	1	2	3	7
D	1	1	2	5