一、选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}$ 的 2 阶常系数齐次方程为----------（　　）

(A) $y''-2y'+y=0$；　　(B) $y''+2y'+y=0$；

(C) $y''-y'-2y=0$；　　(D) $2y''-y'-y=0$.

2. 函数 $f(x,y)=x^2+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f_x'(1,1)=$ -------------（　　）

(A) -2；　　(B) -1；　　(C) 1；　　(D) 2.

3. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续是函数 $f(x,y)$ 在该点可微的--（　　）

(A) 充分必要条件；　　(B) 必要条件非充分条件；

(C) 充分条件非必要条件；　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

4. 下列方程中可利用 $p=y', p'=y''$ 降为 p 的一阶微分方程的是----（　　）

(A) $(y'')^2+xy'-x=0$；　　(B) $y''+yy'+y^2=0$；

(C) $y''+y^2y'-y^2x=0$；　　(D) $y''+yy'+x=0$.

5. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx=$ --------------（　　）

(A) $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；　　(B) $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^1 f(x,y)dy$；

(C) $\int_0^1 dy\int_{-1}^1 f(x,y)dx$；　　(D) $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

6. 函数 $f(x)=\frac{1}{3-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数为-------------------（　　）

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$；　　(B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$；

(C) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$；　　(D) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}, x\in(-1,3)$.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 微分方程 $y'-y\cdot\cot x=0$ 的通解是________________.

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)}\dfrac{\sin(xy)}{xe^{xy}}=$__________.

9. 已知函数 $z=\ln(x^2+y^2)$, 则 $dz=$__________________.

10. 设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域，利用柱面坐标表示三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=$____（用三次积分表示）.

11. $\int_L(x+y)\mathrm{d}s=$_________，其中 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段.

12. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=-x,-\pi<x\le\pi$.设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则 $S(\pi)=$ _____________.

三、解答题（7 小题，每题 7 分，共 49 分）

13. 求解微分方程 $y''=x+e^x$.

14. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^n}{n\cdot 3^n}$ 的敛散性；如果收敛，是否绝对收敛.

15. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,2,2)$ 处的切平面方程和法线方程.

16. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2<4\right\}$.

17. 计算 $\oint_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 L 为三顶点分别为（0,0），（0,3）和（4,3）的三角形正向边界.

18. 利用高斯公式计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 和锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 所围空间立体的整个边界曲面的外侧.

19. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域.

四、证明题（本题 7 分）

20. 设 $z = x^n f(\dfrac{y}{x^2})$, 其中 $f(u)$ 为可微函数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$.

五、应用题（本题 8 分）

21. 设某企业的 Cobb-Douglus 生产函数为 $f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 其中 x, y 分别表示企业投入的劳动力数量和资本数量，若每个劳动力和每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元，该企业的总预算是 50000 元（总预算指可投入到劳动力和资本上的总资金量），试问如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本投入，才能使生产量最高.