郑州轻工业大学 2022/2023 学年 第 1 学期 线性代数与空间解析几何 试卷（A卷）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《线性代数与空间解析几何》试卷（A卷答案）

（适用专业：食品、食质、烟草、新能源、IEC软件工程等）

（本试卷共四大题，20 小题，总分 100 分）

注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效

一、单项选择题（1-6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1\. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$ 是 4 维列向量，若 $|\boldsymbol{A}|=-2$，则

$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4|=$---(C).

(A) 4 (B) -4 (C) 2 (D) -2

2\. 下列结论正确的是---(D).

(A) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

(B) 设分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵且可逆，则 $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$

(C) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，则必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$

(D) 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的同型矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

3\. 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则-----------------(B).

(A) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 一定有解 (B) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可能无解

(C) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 (D) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

4\. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=diag(-1,2,1)$ 相似，则下列矩阵中可逆的是(A).

(A) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ (B) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ (D) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$

5\. 方程 $3z=x^2-4y^2$ 表示的曲面为------------------------(B).

(A) 椭圆抛物面；(B) 双曲抛物面；(C) 单叶双曲面；(D) 双叶双曲面.

6\. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2$ 的正定性为-- (C).

(A) 正定 (B) 半正定 (C) 负定 (D) 半负定

二、填空题（7-12 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7\. 设 4 阶行列式 D 的第 3 行元素均为 5，且 $D=20$，$M_{3j}(j=1,2,3,4)$ 为 D 中第 3 行元素的余子式，则 $M_{31}-M_{32}+M_{33}-M_{34}=$ ___4___ .

8\. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,-2)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,5,-7)$，则 $Prj_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}=$ ___7___ .

9\. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ______.

答案：$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ -1 & -\frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$

10\. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 2 & a\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 1，则 $a=$ ___4___ .

11\. 若向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,-1,k)^T$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,-4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-2,5)^T$ 线性表示，则 k 必满足条件 ___$k\neq 13$___ .

12\. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的秩为 3，正惯性指数为 1，则 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的规范形为 ___$y_1^2-y_2^2-y_3^2$___ .

三、解答题（13-19 题，7 小题，共 60 分）

13.（**本题 8 分**）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&-2&5\\4&-1&-10&1\\2&0&-8&0\\0&1&-3&0\end{vmatrix}$.

解法一 $D=\begin{vmatrix}3&0&-2&5\\4&-1&-10&1\\2&0&-8&0\\0&1&-3&0\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2+r_4}}\begin{vmatrix}3&0&-2&5\\4&0&-13&1\\2&0&-8&0\\0&1&-3&0\end{vmatrix}$ ----------------3 分

$=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}3&-2&5\\4&-13&1\\2&-8&0\end{vmatrix}\underline{\underline{c_2+4c_1}}\begin{vmatrix}3&10&5\\4&3&1\\2&0&0\end{vmatrix}$ ___________ 6 分

$=2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}10&5\\3&1\end{vmatrix}=-10.$ ________________________ 8 分

解法二 $D=\begin{vmatrix}3&0&-2&5\\4&-1&-10&1\\2&0&-8&0\\0&1&-3&0\end{vmatrix}\underline{\underline{\substack{r_1-r_2\\r_2-2r_3}}}\begin{vmatrix}-1&1&8&4\\0&-1&6&1\\2&0&-8&0\\0&1&-3&0\end{vmatrix}$ __________ 3 分

$\underline{\underline{r_3+2r_1}}\begin{vmatrix}-1&1&8&4\\0&-1&6&1\\0&2&8&8\\0&1&-3&0\end{vmatrix}$ ________________________ 6 分

$\underline{\underline{\substack{r_3+2r_2\\r_4+r_2}}}\begin{vmatrix}-1&1&8&4\\0&-1&6&1\\0&0&20&10\\0&0&3&1\end{vmatrix}=-10.$ ______________________ 8 分

14.（**本题 8 分**）已知点 $P(1,-2,-3)$，直线 L_0：$\begin{cases}x-2y-z+1=0,\\2x+y+3z-5=0.\end{cases}$

（1）求过点 P 且与直线 L_0 平行的直线 L 的方程；

（2）求过点 P 且与直线 L_0 垂直的平面 Π 的方程.

解 直线 L_0 的方向向量为: $\boldsymbol{s}_0=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&-1\\2&1&3\end{vmatrix}=(-5,-5,\ 5)=-5(1,1,-1)$

____ 2 分

（1）因直线 L 与 L_0 平行, 所以取 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,-1)$ _____ 3 分

由点向式得直线 L 的方程为: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. ______________ 5 分

（2）因直线 L 与平面 Π 垂直, 所以取 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$ ____ 6 分

由点法式可得平面 Π 的方程为：$(x-1)+(y+2)-(z+3)=0,$

即 $x+y-z-2=0.$ ____ 8 分

15.（**本题 8 分**）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&3\\3&2&2\\2&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\\0&3\end{pmatrix}$，求满足方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$ 的矩阵 X.

解 $(\boldsymbol{A}-E\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}4&2&3&-1&2\\3&1&2&1&1\\2&1&1&0&3\end{array}\right)\underline{\substack{r_1-r_2\\r_2-r_3}}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-2&1\\1&0&1&1&-2\\2&1&1&0&3\end{array}\right)$ _______ 2 分

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-2&1\\0&-1&0&3&-3\\0&-1&-1&4&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&-2&1\\0&-1&0&3&-3\\0&0&-1&1&4\end{array}\right)$ ________ 4 分

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&-1&5\\0&-1&0&3&-3\\0&0&-1&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&2&2\\0&1&0&-3&3\\0&0&1&-1&-4\end{array}\right)$$ ---------- 7 分

所以 $X=\begin{pmatrix}2&2\\-3&3\\-1&-4\end{pmatrix}$.

16.（**本题 8 分**）由已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

求出 R^3 的一个基，并求出其余向量在这个基下的坐标.

解 求 R^3 的一个基，就是求出向量组的一个极大无关组，找出三个线性无关的向量.

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\3&1&2&0\\-1&-2&2&1\end{pmatrix}$ ________________ 2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&3\\0&-2&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&3\\0&0&1&6\end{pmatrix}$$ ___________________ 4 分

因 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，是 R^3 的一个基.

___________________________________ 6 分

下求 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&3\\0&0&1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-7\\0&1&0&9\\0&0&1&6\end{pmatrix}$$，则 $\boldsymbol{\alpha}_4=-7\boldsymbol{\alpha}_1+9\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$.

$\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为：$-7,9,6$. ___________________ 8 分

17.（**本题 10 分**）求线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=-1,\\2x_1-x_2+3x_3-4x_4=2,\\3x_1-2x_2+5x_3-3x_4=1,\\x_1-2x_2+3x_3+7x_4=-5\end{cases}$ 的通解.

解 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&-1\\2&-1&3&-4&2\\3&-2&5&-3&1\\1&-2&3&7&-5\end{array}\right)$ ___________________ 1 分

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&-1\\0&1&-1&-6&4\\0&1&-1&-6&4\\0&-1&1&6&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&-1\\0&1&-1&-6&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ ____________ 3 分

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-5&3\\0&1&-1&-6&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ ____________________________________ 4 分

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3+5x_4+3,\\x_2=x_3+6x_4+4.\end{cases}$ x_3,x_4 为自由未知量.

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一特解 $\boldsymbol{\eta}_0=(3,4,0,0)^T$； ________________ 5 分

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得导出组的基础解系 $\xi_1=(-1,1,1,0)^T,\ \xi_2=(5,6,0,1)^T$.

____ 9 分

通解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$(x_3,x_4\in R)$. ___________________ 10 分

18. **(本题 10 分)** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵, 并由此求出 $\boldsymbol{A}^{200}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 一定可以对角化. 须求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(-1-\lambda)(3-\lambda)=0$$

得特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$. ________________________________ 2 分

把 $\lambda_1=-1$ 代入方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即 $\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,

求得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, 令 $\boldsymbol{P}_1=\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; ____________ 4 分

把 $\lambda_1=3$ 代入方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即 $\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,

得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 令 $\boldsymbol{P}_2=\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. ________________ 6 分

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$,

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda P}^T$. ________________________________ 8 分

$$\boldsymbol{A}^{200}=\boldsymbol{P\Lambda}^{200}\boldsymbol{P}^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{200}&0\\0&3^{200}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$ ______________ 9 分

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{3^{200}+1}{2}&\dfrac{3^{200}-1}{2}\\\dfrac{3^{200}-1}{2}&\dfrac{3^{200}+1}{2}\end{pmatrix}.$$ ________________________________ 10 分

19.（**本题 8 分**）把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化成标准形, 并说明 $f=1$ 表示什么图形?

解法一 正交变换法. 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. __________1 分

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2-\lambda&-\lambda&1\\2-\lambda&1&-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-\lambda-1&0\\0&0&-\lambda-1\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$. ____________________________ 4 分

二次型的标准形为 $f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. ____________________________ 6 分

$f=1$ 即 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2=1$ 表示双叶双曲面. _____________________ 8 分

解法二 令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_1+y_2,\\x_3=y_3.\end{cases}$ __________________________ 1 分

代入原二次型并配方得 $f=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3=2(y_1+y_3)^2-2y_2^2-2y_3^2$,

---------------------------- 3 分

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$ 此变换为可逆线性变换.________________ 4 分

二次型的标准形为 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2$. ________________ 6 分

f=1 即 $2z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 = 1$ 表示双叶双曲面. __________ 8 分

四、应用题（本题 4 分）

20. 设某小城市及郊区乡镇共有 50 万人从事农、工、商工作, 假定这个总人数在若干年内保持不变, 经社会调查表明：目前有 25 万人从事农业, 20 万人从事工业，5 万人经商；在务农人员中，每年约有 20%改为务工，10%改为经商；在务工人员中，每年约有 15%改为务农，5%改为经商；在经商人员中，每年约有 10%改为务农, 20%改为务工。试写出在第 n 年后从事各业人员总数之发展趋势模型。(**提示**:用矩阵先写出一年后、二年后各人员情况)

解 设第 n 年后从事农、工、商各业人员的数量分别为 x_n, y_n, z_n.

记向量 $\boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, **则** $\boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$, ____________________ 1 分

而 $\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.05 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0$, ___________________ 2 分

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.05 & 0.7 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}_0$, ______________________________________ 3 分

……………

$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{n-1} = \cdots = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0$. _________________________ 4 分

$\boldsymbol{X}_n$ 即为在第 n 年后从事各业人员总数之发展趋势模型。