一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt =$（ ）.

(A) $\sqrt{1+x^4}$　　(B) $2x\sqrt{1+x^4}$　　(C) $2x\sqrt{1+x^2}$　　(D) $\sqrt{1+x^2}$

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 存在, $f(x,y)$ 在该点连续的（ ）.

(A) 充分条件非必要条件　　(B) 必要条件非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

3. 设简单闭曲线 L 所围区域的面积为 S，其中 L 的方向取正向，则 $S =$（ ）.

(A) $\dfrac{1}{2}\oint_L xdx - ydy$　(B) $\dfrac{1}{2}\oint_L ydy - xdx$　(C) $\dfrac{1}{2}\oint_L ydx - xdy$　(D) $\dfrac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

4. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（ ）.

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性与 k 的取值有关

5 . 曲线 $y=e^x$ 与该曲线过原点的切线和 y 轴所围成的图形的面积为（ ）. .

(A) $\int_0^1(e^x - ex)dx$　(B) $\int_0^e(\ln y - \dfrac{y}{e})dy$　(C) $\int_1^e(e^x - ex)dx$　(D) $\int_0^1(\ln y - \dfrac{y}{e})dy$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{\sqrt{xy}-1}{xy-1} =$______.

2. 设函数 $f(x,y) = y\arctan(xy) + (1-y)e^x + \sin(2y)$，则 $f_x(1,0) =$_____.

3. 设 D 是由 $x^2+y^2=1$ 所围的闭区域，$f(x,y)$ 连续，则 $\iint\limits_D[1+xf(x^2+y^2)]dxdy =$____.

4. 微分方程微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为______.

5. 由 $y=x^2, x=1, y=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为______.

三、计算题（每题 6 分，共 42 分）

1. $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $dz\big|_{(1,0)}$.

2. 改变积分次序计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}dy$.

3．解微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$．则

4.利用高斯公式计算$\oint\!\!\oint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+xdxdy$， 其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0,z=3$所围立体的整个边界曲面的外侧.

5．判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$的敛散性.

6．求旋转抛物面$z=x^2+y^2-1$在点（2, 1, 4）处的切平面与法线方程.

7．设$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2$，求 $f(x)$.

四、解答题（本题 7 分）

计算$\int_L (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中$L$为顺时针方向的上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2\ (y\geqslant 0)$.

五、解答题（本题 7 分）

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛域及和函数.

六、应用题（本题满分 8 分）

计算由曲面$x^2+y^2=z$与$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成立体的体积.

七、证明题（本题满分 6 分）

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续、可导，且$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$，证明：

（1）若$f'(x)<0$，则$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

（2）若$f(x)$是偶函数，则$F(x)$也是偶函数；