郑州轻工业大学 2021—2022 学年 第 二 学期 高等数学 A2 试卷（A）

专业年级及班级______ 姓名______ 学号______

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《高等数学 A2》试卷（A 卷）评分标准

（机电、电气、计算机、软件、建环等学院各专业 21 年级适用）

一、单项选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列微分方程的阶数是二阶的是--------------------------（ D ）

(A) $xy'''+2y''+x^2y=0$; (B) $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$;

(C) $\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$; (D) $t^3\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{dt}{du}=0$.

2. 微分方程 $y''-y'=x\mathrm{e}^x$ 的特解形式可设为---------------------（ A ）

(A) $x(ax+b)\mathrm{e}^x$; (B) $(ax+b)\mathrm{e}^x$;

(C) $x\mathrm{e}^x$; (D) $(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$.

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则下列说法**不正确**的是-------（ D ）

(A) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

(B) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处极限存在;

(C) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数;

(D) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在连续的偏导数.

4. 交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=$--------------------------（ B ）

(A) $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$; (B) $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

(C) $\int_0^2 dx\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dy$; (D) $\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$.

5. L 为连接 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 两点的直线段，曲线积分 $\int_L (x+y)ds=$（ B ）

(A) $\sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{2}$; (C) 2; (D) 0.

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性为--------------------------------（ B ）

(A) 不确定; (B) 条件收敛;

(C) 绝对收敛; (D) 发散.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$______.

答案：$\ln 2$

8. 已知 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，则 $d\,f(1,2,0)=$______.

答案：$dx+\frac{1}{2}dy+\frac{1}{2}dz$.

9. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\sin x+2y-z=\mathrm{e}^z$ 所确定， 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$______.

答案：$\frac{\cos x}{1+e^z}$

10. 设区域 $\Omega: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv=$______.

答案：3

11. 函数 $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$ 的关于 x 的幂级数展开式为______.

答案：$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}}$, $(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$ （注：不加展开的范围扣 1 分）

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0,\\ 1, & 0 \le x < \pi.\end{cases}$ 则其傅里叶级数在点 $x=0$ 处收敛于____________.

答案： 0.

三、解答题（8 小题，共 49 分）

13.（本题 6 分） 已知一条曲线通过点(0,1), 并且它在点 (x,y) 处的切线斜率为 $x(1-2y)$，求此曲线方程.

解： $y' = x(1-2y) \Rightarrow y' + 2xy = x \Rightarrow y = \mathrm{e}^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} + C\right) \Rightarrow$

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x + C\right) \Rightarrow y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2 + C\right) = \frac{1}{2} + C\,\mathrm{e}^{-x^2}\text{.-------4 分}$$

曲线过点(0,1)，得 $C=\frac{1}{2}$，曲线方程为 $y=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-x^2})$.-----------------------6 分

14. （本题 6 分） 求曲面 $\mathrm{e}^x - x + 2yz - 5 = 0$ 在点 $P(0,1,2)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：令 $F(x,y,z) = \mathrm{e}^x - x + 2yz - 5$，

法向量 $\vec{n} = \left(\mathrm{e}^x - 1, 2z, 2y\right)\big|_{(0,1,2)}$=(0,4,2).--2 分

切平面方程为 $4(y-1)+2(z-2)=0$，即 $2y+z-4=0$.------------------------4 分

法线方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{2}$，即 $\begin{cases}\frac{y-1}{2}=z-2,\\ x=0,\end{cases}$.--------------------------------6 分

15. （本题 6 分） 设函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$，求函数 u 在点 $P(1,1,1)$ 处

(1) 沿从点 $P(1,1,1)$ 到点 $Q(2,2,0)$ 方向的方向导数;

(2) 使方向导数取最大值的方向和方向导数的最大值.

解：由题知，$u_x = y^2 - yz, u_y = 2xy - xz, u_z = 3z^2 - xy$.

从点 $P(1,1,1)$到点 $Q(2,2,0)$的方向为 $\vec{l} = (1,1,-1)$，方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(1,1,1)} = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$== 0 + 1\times\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\times(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\text{.-------------------------------------4 分}$$

函数 u 在点 $P(1,1,1)$处方向导数最大的方向是沿梯度的方向，即为

$$\mathrm{grad}\,u(1,1,1) = (0,1,2)\text{.-------------------------------------2 分}$$

函数 u 在点 $P(1,1,1)$处方向导数的最大值是梯度的模 $\|\mathrm{grad}\,u(1,1,1)\| = \sqrt{5}$.

16. （本题 5 分）设 D 为圆周 $x^2+y^2=1$所围成的闭区域，求二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 的值.

解：在极坐标中，闭区域 D 可以表示为

$$0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi \text{---1 分}$$

又有 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$则，原积分

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_D e^{\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta \text{---3 分}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = \pi\cdot(e-1) \text{--5 分}$$

17. （本题 6 分） 求曲面 $z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2$ 所截出的有限部分的面积.

解：所截曲面在 xOy 面上投影区域为 D: $x^2+y^2\le 2$. ------------------------1 分

则曲面的面积

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy \text{------------------------------------3 分}$$

$=\iint_D \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$ ------------------6 分

18. （本题 6 分） 利用格林公式计算曲线积分

$\oint_L(3x^2y+\cos x^2)\mathrm{d}x+(2xy+x^3)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域的正向边界曲线.

解：令 $P=3x^2y+\cos x^2, Q=2xy+x^3$， ---1 分

设封闭曲线 L 所围区域记为 D，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial x}=2y+3x^2$$ ---2 分

由格林公式

$\oint_L(3x^2y+\cos x^2)\mathrm{d}x+(2xy+x^3)\mathrm{d}y=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ --------------------------3 分

$$=\iint_D 2ydxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}2ydy$$

$$=\int_0^1(x-x^4)dx=\frac{3}{10}.$$ --------------------------6 分

19. （本题 6 分）利用高斯公式计算曲面积分

$\oiint_\Sigma \sin y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 z=1 所围成的立体 Ω 的整个表面的外侧.

解法一: 令 $P=\sin y, Q=\cos z, R=z^2-e^{xy}$， -------------------------------------1 分

则由 Gauss 公式可得（用柱坐标计算三重积分）

$\oiint_\Sigma \sin y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint_\Omega zdv=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_\rho^1 z\rho\mathrm{d}z$ ------3 分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}$$ -----------6 分

解法二: 令 $P=\sin y, Q=\cos z, R=z^2-e^{xy}$， -------------------------------------1 分

则由 Gauss 公式可得（先二后一法计算三重积分）

$\oiint_\Sigma \sin y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint_\Omega zdv=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ -----------3 分

$$=2\int_0^1\pi z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$$ ----------------6 分

20. （本题 8 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域及其和函数.

解法一：令 $t=x-1$，则原幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$. ------------------------------------1 分

先求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$, ---2 分

所以收敛区间为(-1, 1)

当 $t=-1$ 时，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛；---3 分

当 $t=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ 的收敛域 $[-1,1)$. ---------4 分

不妨设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ 在收敛域内的和函数为 $F(t)$, 则

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t t^{n-1}dt=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt$$ --7 分

$$=\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}t^n dx=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t).$$

由此得原幂级数的收敛域为[0, 2),和函数 $S(x)=-\ln(2-x)$.-----------------8 分

解法二：收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$, --2 分

所以收敛区间为(0, 2)

当 $x=0$ 时，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛；--3 分

当 $x=2$ 时，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；--4 分

故幂级数的收敛域 $[0,2)$. --5 分

不妨设幂级数在收敛域内的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^x(x-1)^{n-1}dx=\int_1^x\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1}dx$$ -------------------------8 分

$$=\int_1^x\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n dx=\int_1^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x).$$

四、证明题（本题 7 分）

21．证明曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x-y)\mathrm{d}x-(x+\cos^2 y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内与路径无关，并计算积分值.

证明 1:令 $P=\mathrm{e}^x-y$, $Q=-(x+\cos^2 y)$, --1 分

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 平面内处处成立，所以积分在整个 xOy 平面内与路径无关. --3 分

由于积分与路径无关，所以积分路径可以选择先从(0,0)到(1,0),再从(1,0)到(1,1)的折线

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x-y)\mathrm{d}x-(x+\cos^2 y)\mathrm{d}y=\int_0^1 e^x\mathrm{d}x-\int_0^1(1+\cos^2 y)\mathrm{d}y=e-\frac{5}{2}-\frac{\sin 2}{4}$$ -----7 分

证明 2：令 $P=\mathrm{e}^x-y$, $Q=-(x+\cos^2 y)$, -----------------------------------1 分

由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 平面内处处成立，所以积分在整个 xOy 平面内与路径无关. ------------------------3 分

由于积分与路径无关，所以存在函数 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=(\mathrm{e}^x-y)\mathrm{d}x-(x+\cos^2 y)\mathrm{d}y$$ --------4 分

根据微分法可求得 $u(x,y)=e^x-xy-\dfrac{y}{2}-\dfrac{\sin 2y}{4}$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x-y)\mathrm{d}x-(x+\cos^2 y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}u=u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=e-\frac{5}{2}-\frac{\sin 2}{4}$$.----------7 分

五、应用题（本题 8 分）

22. 某单位靠厂房的后墙修建一座容积为 256 m^3 形状为长方体的仓库，已知仓库地面每单位面积造价为 1 万元. 仓库的屋顶和墙壁每单位面积的造价分别为地面每单位面积造价的 2 倍和 1.5 倍，厂房后墙长和高的尺寸足够大，因而这一面墙壁的造价不计. 利用拉格朗日乘数法分析：长、宽、高各为多少米能使仓库的造价最低?

解：这是条件极值的问题，欲在约束条件 $xyz=256$ 下求函数 $f(x,y)=3xy+3xz+1.5yz$ 的最小值. --1 分

令 $L(x,y,z,\lambda)=3xy+3xz+1.5yz+\lambda(xyz-256)$, ------------------------------3 分

解方程组 $\begin{cases} L_x=3y+3z+\lambda yz=0 \\ L_y=3x+1.5z+\lambda xz=0 \\ L_z=3x+1.5y+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-256=0 \end{cases}$ ---5 分

联立解得 $x=4,y=8,z=8$ ---7 分

由于点 $(x,y,z)=(4,8,8)$ 是该问题的唯一驻点，又问题本身显然存在最小值，

故 $x=4,y=8,z=8$ 就是所求，即当仓库的长宽高分别为 4,8,8 时，仓库的造

价最低，最低造价为 288 万元.--8 分.