考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《高等数学 A1、B1》试卷（A 卷）

(电气、机电、食工、物理、能源、计算机、软件、建环各专业 19 级适用)

注意：所有答案必须写在答题卡上，在试卷上作答无效

一、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 函数 $f(x)=\ln(x+5)-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域是 $\underline{\quad -5<x<2 \quad}$.

2.设函数 $y=\ln(\sqrt{1-x^2})$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ $\underline{\quad =0 \quad}$.

3. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的水平渐进线是 $\underline{\quad y=1 \quad}$.

4. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x}，则 $f(x)=\underline{\quad -e^{-x} \quad}$.

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3} f(t)dt=x$，则 $f(8)=\underline{\quad \dfrac{1}{12} \quad}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2}{x})^x=\underline{\quad e^2 \quad}$.

二、单项选择题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中与 x^2 等价的无穷小量是----------（ D ）

A． $1-\cos x$ B． $\sqrt{x}+x^2$ C． e^x-1 D． $\sin x\ln(1+x)$

8. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则下列极限中等于 $f'(a)$ 的是-----（ A ）

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$ D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{3h}$

9. 设在 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)>0, f''(x)<0$ 则曲线 $y=f(x)$ 在该区间上---（ B ）.

A. 上升且凹的 B. 上升且凸的 C. 下降且凹的 D. 下降且凸的

10. 设函数 $f(x)$ 具有连续的导数，则以下等式中错误的是----（ A ）

A. $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=f(x)$ B. $d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)dx$

C. $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)dx$ D. $\int f'(t)\,dt=f(t)+C$

11. 反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ -------------------------------（ C ）

A. 发散 B. 收敛于 1 C. 收敛于 $1/2$ D. 收敛于 $-1/2$

12. 曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 在 $x=1$ 处的切线方程是-------------------------（ A ）

A. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$ B. $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}$ C. $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$ D. $y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}$

三、解答题（7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$.

解：

原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

14. 求 $y=(1+2x)^{\sin x}$ 的微分 dy.

解：因为 $y=(1+2x)^{\sin x}=e^{\sin x\ln(1+2x)}$ ……………………2 分

所以

郑州轻工业大学 2019 — 2020 学年 第二学期 高等数学 A1、B1 试卷（A）

专业年级及班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

装 订 线

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sin x\ln(1+2x)}\left[\cos x\ln(1+2x)+\sin x\frac{2}{1+2x}\right]$$ --------------5 分

$$=(1+2x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+2x)+\frac{2\sin x}{1+2x}\right]$$

故 $\mathrm{d}y=(1+2x)^{\sin x}[\cos x\ln(1+2x)+\dfrac{2\sin x}{1+2x}]\mathrm{d}x$ ---------------6 分

15. 求 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解：二次函数的顶点是（2，-1）----------------------1 分

$y'=2x-4, y''=2$ -----------------------------------2 分

代入曲率公式得 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{1}=2$ -------------------4 分

曲率半径为 $\rho=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{2}$ ---------6 分

16．求由参数方程 $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^3\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3bt}{2a}$ -----------3 分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3b}{2a}\times\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3b}{2a}\times\dfrac{1}{2at}=\dfrac{3b}{4a^2t}$ -------6 分

17. 求不定积分 $\int x^3\ln x dx$.

解：

原式$=\dfrac{1}{4}\int\ln x dx^4=\dfrac{1}{4}\left[x^4\ln x-\int x^4 d\ln x\right]$ ………………………2 分

$=\dfrac{1}{4}\left[x^4\ln x-\int x^3dx\right]$ ………………………4 分

$=\dfrac{1}{4}\left[x^4\ln x-\dfrac{x^4}{4}\right]+C$ ………………………6 分

18. 计算定积分 $\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解：令 $x=\sin t$，则当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$ ………2 分

所以

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$ ………………………………6 分

$$=\frac{\pi}{4}$$

19. 求由曲线 $y=x^2$，$y=x$，$y=2x$ 所围成图形面积.

解：由 $\begin{cases}y=x^2\\ y=x\end{cases}$ 解得交点为 $(0,0),(1,1)$ ………………………………1 分

由 $\begin{cases}y=x^2\\ y=2x\end{cases}$ 解得交点为 $(0,0),(2,4)$ ………………………………2 分

方法一：选取 x 做为积分变量，则可得

$s=\int_0^1(2x-x)dx+\int_1^2(2x-x^2)dx$ ………………………………4 分

$=(\dfrac{x^2}{2})_0^1+(x^2-\dfrac{x^3}{3})_1^2$ ………………………………6 分

$=\dfrac{7}{6}$

方法二：选 y 做积分变量，可得

$s=\int_0^1(y-\dfrac{y}{2})dy+\int_1^2(\sqrt{y}-\dfrac{y}{2})dy$ ----------4 分

$=\dfrac{1}{4}y^2\Big|_0^1+(\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{4}y^2)\Big|_1^4=\dfrac{7}{6}$ ------------6 分

装 订 线

四、证明题（本题 7 分）

20. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$

证明：存在点 $\eta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)=1$.

解： 令 $G(x)=f(x)-x$， ……………………………………3 分

则 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $G(0)=G(1)=0$， ……………………5 分

由罗尔定理可得，至少存在一点 $\eta \in (0,1)$，使得 $G'(\eta)=0$，

即 $f'(\eta)=1$。 ………………………………7 分

五、应用题（本题 7 分）

21. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V, 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小?这时底直径与高的比是多少?

解：由 $V=\pi r^2 h$，可得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$。 ……………………………………2 分

表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$ ……………………..……….4 分

令 $S'=\dfrac{dS}{dr}=0$ 得

$r^3=\dfrac{V}{2\pi}, h^3=(\dfrac{V}{\pi r^2})^3=\dfrac{4V}{\pi}$ ………………………………………..…………..6 分

即底直径与高之比为1:1时，表面积最小。 ………………..…………..7 分

六、分析题（本题 8 分）

22. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x-2}, x<2 \\ k, x=2 \\ ax+4, x>2 \end{cases}$，

（1）k和a分别为何值时，$f(x)$ 在 x=2 处连续？

（2）讨论在 x=2 处是否可导？

解：（1）$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(ax+4)=2a+4=k$， ……………………………………2 分

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} e^{x-2}=1=f(2)=k$ ……………………………………4 分

所以 $k=1, a=-\dfrac{3}{2}$

（2）$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\dfrac{3}{2}$ ……………………………………6 分

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=1$

因为 $f'_+(2)\neq f'_-(2)$，所以函数在 $x=2$ 处不可导。……………………8 分