

专业年级及班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 订装 _____

考试类别[学生填写] (正考 补考 重修 补修 缓考 其它)

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评阅人								
题号	八	九	十	十一	十二			
得分								
评阅人								

一、(8 分) 将下列命题符号化

- (1) 小红只能从筐里拿一个苹果或一个梨。
- (2) 他一面吃饭，一面听音乐。
- (3) 有的兔子比所有的乌龟跑得快
- (4) 没有不呼吸的人

二、(10 分) 构造下面推理的证明

(1) 前提: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

结论: $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$

(2) 前提: $p \rightarrow \neg q, \neg r \vee q, r \wedge \neg s$

结论: $\neg p$

三、(8 分) 设 A 、 B 、 C 是任意集合, 证明 $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ 。

四、(10分) 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, R 为 S 上的关系, 其关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求: (1) R 的集合表达式

- (2) R^{-1}
- (3) $\text{dom } R, \text{ran } R, \text{fld } R$
- (4) $r(R), s(R)$

五、(8分) 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, R_4 是 A 上的关系, 其中

$$\square \square R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \quad \square \square R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$\square \square R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}, \quad R_4 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3}\}$$

试判断它们都具有什么性质并给出理由。

六、(10分) 设 S 为 n 元集, 问 S 上可以定义多少个不同的二元运算和一元运算? 其中有多少个二元运算是可交换的? 有多少个二元运算是幂等的? 有多少个二元运算是既不是可交换的也不是幂等的?

七、(12 分) 对于以下各题给定的集合和运算, 判断它们是哪一类代数系统
(半群、独异点、群、环、域、格、布尔代数), 并说明理由。

(1) $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, 运算 \oplus 为模 n 加法。

(2) $S = \{1, 3, 4, 12\}$, 任给 $x, y \in S$,

$$x \circ y = \text{lcm}(x, y), \quad x * y = \text{gcd}(x, y),$$

其中 lcm 是求最小公倍数, gcd 是求最大公约数。

(3) $A = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, 其中 $i^2 = -1$, 运算为复数加法和乘法。

(4) $S = \{1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4\}$, $*$ 为普通乘法。

八、(8 分) $G = Z_{12} = \langle 1 \rangle$ 是 12 阶循环群。

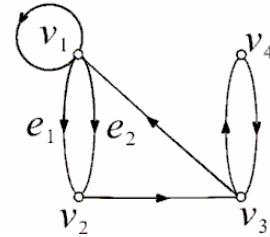
(1) 求出 G 的所有生成元。

(2) 求出 G 的所有子群。

九、(6 分) 无向图 G 有 16 条边, 3 个 4 度顶点, 4 个 3 度顶点, 其余顶点度数均小于 3, 问 G 的阶数 n 至少有几? 在最少顶点的情况下, 写出 G 的度数列、 $\Delta(G)$ 、 $\delta(G)$ 。

十、(6分) 有向图 D 如图所示,

- (1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1,2,3,4 的通路各多少条?
- (2) D 中长度 ≤ 4 的通路有多少条? 其中有几条是回路?
- (3) 写出 D 的可达矩阵。



十一、(8分) 画一个无向图, 使它:

- (1) 即是欧拉图, 又是哈密顿图;
- (2) 是欧拉图, 而不是哈密顿图;
- (3) 不是欧拉图, 而是哈密顿图;
- (4) 即不是欧拉图, 也不是哈密顿图。

十二、(6分) 请证明 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是平面图。