

| |
|----|
| 得分 |
| |

一、单项选择题(10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 微分方程 $y'' = e^x + \sin x$ 的通解是----- (C)

- (A) $y = e^x - \cos x + C_1 x + C_2$; (B) $y = e^x + \sin x + C_1 x + C_2$;
(C) $y = e^x - \sin x + C_1 x + C_2$; (D) $y = e^x + \cos x + C_1 x + C_2$.

2. 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处偏导数均存在是 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的--- (B)

- (A) 充分条件; (B) 必要条件;
(C) 充分必要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

3. 曲线 $x = t, y = 2t^2, z = 3t^3$ 在 $t=1$ 对应点处点的一个切向量为----- (C)

- (A) (1, 2, 3); (B) (1, 4, 6);
(C) (1, 4, 9); (D) (1, 4, 8).

4. 设积分区域 D 是圆环: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$ ----- (C)

- (A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho$; (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_\rho^4 \rho^2 d\rho$;
(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho$;. (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho d\rho$.

5. 设曲线 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $\oint_L (x^2 + y^2) ds =$ ----- (B)

- (A) -2π ; (B) 2π .
(C) π ; (D) $-\pi$.

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 的敛散性, 下列说法正确的
是----- (B)

- (A) 收敛; (B) 发散;
(C) 不能确定; (D) 以上均不对.

| |
|----|
| 得分 |
| |

二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

7. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解是 $y = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}}$ 。

8. 设 $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, 则 $\overrightarrow{\text{grad}} f(1, 1, 2) = \underline{\underline{(1, 1, 2)}}$ 。

9. Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \underline{\underline{0}}$ 。

10. 设 Σ 是平面 $z = 1$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截部分的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} z dx dy = \underline{\underline{-\pi}}$ 。

11. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 的和 $s = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ 。

12. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期且 $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数,

则 $S(0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ 。

三、解答题 (7 小题, 共 50 分)

| |
|----|
| 得分 |
| |

13. (本题 7 分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}$ 的通解。

解一: 对应的齐次方程的通解: $\frac{dy}{dx} = -y \cos x$

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx$$

$$y = Ce^{-\sin x} \quad \text{----- 3 分}$$

令 $y = ue^{-\sin x}$, 则 $y' = u'e^{-\sin x} - u \cos x e^{-\sin x}$

代入所求方程得 $u' = 1$, 解得 $u = x + C$ 6 分

故所求方程通解为 $y = (x + C)e^{-\sin x}$ 7 分

解二: $y = e^{-\int \cos x dx} [\int e^{-\sin x} \cdot e^{\int \cos x dx} dx + C]$ 4 分

$$= e^{-\sin x} [\int e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} dx + C] = e^{-\sin x} (x + C) \quad \text{----- 7 分}$$

| |
|----|
| 得分 |
| |

14. (本题 7 分) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面及法线方程。

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$, 则

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\vec{n}|_{(1,2,3)} = (2, 4, 6) \quad \text{3 分}$$

在点 (1, 2, 3) 处球面的切平面方程为

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

即 $x + 2y + 3z - 14 = 0 \quad \text{5 分}$

法线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

即 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{7 分}$

得分

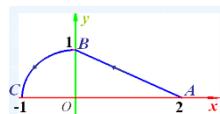
15. (本题 7 分) 改变积分次序并计算: $\int_0^1 dx \int_1^{2-x} \frac{e^y}{2-y} dy$.

解: $\int_0^1 dx \int_1^{2-x} \frac{e^y}{2-y} dy = \int_1^2 dy \int_0^{2-y} \frac{e^y}{2-y} dx \quad \text{4 分}$

$$= \int_1^2 e^y dy = e^2 - e \quad \text{7 分}$$

得分

16. (本题 7 分) 利用格林公式计算曲线积分
 $I = \int_L (x^2 + y) dx + (2x + ye^y) dy$, 其中 L 是由直线 $x + 2y = 2$ 上从 $A(2, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 的一段及圆弧上 $x = -\sqrt{1-y^2}$ 上从 $B(0, 1)$ 到 $C(-1, 0)$ 的一段连接而成的有向曲线。



解 令 $P = x^2 + y, Q = 2x + ye^y$. 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad \text{1 分}$

作辅助线 \overline{CA} , 方向从 C 到 A , D 为曲线 L 和线段 \overline{CA} 所围成的有界闭区域。

由格林公式, 可得:

$$\oint_{L+\overline{CA}} (x^2 + y) dx + (2x + ye^y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \frac{\pi}{4} + 1 \quad \text{——— 3 分}$$

$$\text{而 } \int_{\overline{CA}} (x^2 - y) dx + (2x + ye^y) dy = \int_{-1}^2 x^2 dx = 3 \quad \text{——— 5 分}$$

$$\text{所以 } I = \oint_{L+\overline{CA}} (x^2 - y) dx + (2x + ye^y) dy - \int_{\overline{CA}} (x^2 - y) dx + (2x + ye^y) dy$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) - 3 = \frac{\pi}{4} - 2 \quad \text{——— 7 分}$$

得分

17. (本题 7 分) 利用高斯公式计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz - y dz dx + z dx dy$,

其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围立体的整个表面的外侧

$$\text{解: 令 } P = x, Q = -y, R = z, \text{ 则 } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 \quad \text{——— 2 分}$$

设曲面 Σ 围成的空间闭区域为 Ω

由高斯公式得

$$\begin{aligned} \therefore \iint_{\Sigma_1 + \Sigma} x dy dz - y dz dx + z dx dy &= \iiint_{\Omega} dV \quad \text{——— 5 分} \\ &= \frac{1}{3} \pi \quad \text{——— 7 分} \end{aligned}$$

得分

18. (本题 7 分) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$ 是否收敛, 如收敛, 是绝对收敛

还是条件收敛

$$\text{解 对 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} \quad \text{——— 2 分}$$

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} < 1, \quad \text{——— 5 分}$$

由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 —————— 6 分

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛————— 7 分

得分

19. (本题 8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad 2 \text{ 分}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ 都和发散, —————— 4 分

故级数的收敛域为 $(-1, 1)$ 。————— 5 分

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (-1 < x < 1)$

逐项积分得,

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}, \quad (-1 < x < 1) \quad 7 \text{ 分}$$

故 $S(x) = \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$ —————— 8 分

得分

四、证明题 (本题 6 分)

20. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 试证明:

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} - \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

解 令 $F(x, y, z) = \sin x + 2y - z - e^z$, 则

$$F_x = \cos x, \quad F_y = 2, \quad F_z = -1 - e^z \quad 2 \text{ 分}$$

所以, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\cos x}{-1 - e^z} = \frac{\cos x}{1 + e^z}$, —————— 4 分

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2}{-1 - e^z} = \frac{2}{1 + e^z} \quad 5 \text{ 分}$$

故 $2 \frac{\partial z}{\partial x} - \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\cos x}{1 + e^z} - \frac{2 \cos x}{1 + e^z} = 0$ —————— 6 分

| |
|----|
| 得分 |
| |

五、应用题（本题 8 分）

21. 要设计一个容量为 8 的有盖长方体水箱，试问水箱长、宽、高各等于多少时所用材料最省？

解 设 长方体的长、宽、高分别为 x, y, z , 则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = 8$ 下水箱表面积 $S = 2(xy + yz + zx)$ 最小。—————2 分

令 $L(x, y, z) = (xy + yz + zx) + \lambda(xyz - 8)$ ——————4 分

解方程组
$$\begin{cases} F_x = y + z + \lambda yz = 0 \\ F_y = x + z + \lambda xz = 0 \\ F_z = x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 8 \end{cases}$$
 ——————6 分

解得 $x = y = z = 2$,

由于 $(2, 2, 2)$ 是唯一可能的极值点，而由问题本身知最小值一定存在，故最小值就在 $x = y = z = 2$ 处取得，即水箱是正方体时 $S_{\min} = 24$. ——————8 分

说明：只有最后结果，没有计算过程，不给分。