

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

《高等数学 A2》试卷 (A 卷)

(机电、电气、计算机、软件、建环等各专业 2018 年级适用)

(注意: 所有答案必须写在答题卡上, 在试卷上作答无效)

一、选择题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$ 的 2 阶常系数齐次方程为_____ ()

(A) $y'' - 2y' + y = 0$; (B) $y'' + 2y' + y = 0$;

(C) $y'' - y' - 2y = 0$; (D) $2y'' - y' - y = 0$.

2. 函数 $f(x, y) = x^2 + (y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f'_x(1,1) =$ _____ ()

(A) -2; (B) -1; (C) 1; (D) 2.

3. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续是函数 $f(x, y)$ 在该点可微的_____ ()

(A) 充分必要条件; (B) 必要条件非充分条件;
(C) 充分条件非必要条件; (D) 既非充分条件又非必要条件.

4. 下列方程中可利用 $p = y'$, $p' = y''$ 降为 p 的一阶微分方程的是—— ()

(A) $(y'')^2 + xy' - x = 0$; (B) $y'' + yy' + y^2 = 0$;

(C) $y'' + y^2 y' - y^2 x = 0$; (D) $y'' + yy' + x = 0$.

5. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx =$ _____ ()

(A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; (B) $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^1 f(x, y) dy$;

(C) $\int_0^1 dy \int_{-1}^1 f(x, y) dx$; (D) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数为_____ ()

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$; (B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$;

(C) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$; (D) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}, x \in (-1, 3)$.

二、填空题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

7. 微分方程 $y' - y \cdot \cot x = 0$ 的通解是_____.

8. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{\sin(xy)}{xe^{xy}} =$ _____.

9. 已知函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $dz =$ _____.

10. 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的闭区域, 利用柱面坐标表示三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____ (用三次积分表示).

11. $\int_L (x+y) ds =$ _____, 其中 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段.

12. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且 $f(x) = -x, -\pi < x \leq \pi$. 设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数, 则 $S(\pi) =$ _____.

三、解答题 (7 小题, 每题 7 分, 共 49 分)

13. 求解微分方程 $y'' = x + e^x$.

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n \cdot 3^n}$ 的敛散性.

15. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, 2, 2)$ 处的切平面方程和法线方程.

16. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$.

17. 计算 $\oint_L (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (x - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0, 0)$, $(0, 3)$ 和 $(4, 3)$ 的三角形正向边界.

18. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中曲面 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 和锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 所围空间立体的整个边界曲面的外侧.

19. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域.

四、证明题 (1 小题, 共 7 分)

20. 设 $z = x^n f(\frac{y}{x^2})$, 其中 f 为任意可微函数, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

五、应用题 (本题 8 分)

21. 设某企业的 Cobb-Douglas 生产函数为 $f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 其中 x, y 分别表示企业投入的劳动力数量和资本数量, 若每个劳动力和每单位资本的成本分别是 150 元和 250 元, 该企业的总预算是 50000 元 (总预算指可投入到劳动力和资本上的总资金量), 试问如何分配这笔钱于雇佣劳动力和资本投入, 才能使生产量最高.

