本题得分

郑州轻工业大学 20XX—20XX 学年
第一学期高等数学 A（Ⅱ） 试卷 A

试卷编号：XX

本题得分

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、$\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=1-\sqrt{x}$，则当 $x\to 1$ 时有（ ）

A α 是比 β 高阶的无穷小 B α 是比 β 低阶的无穷小

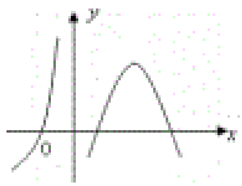
C α 与 β 同阶无穷小，但不等阶 D $\alpha\sim\beta$

2、质点作曲线运动，其位置坐标与时间 t 的关系为 $x=t^2+t-2, y=3t^2-2t-1$，

则当 $t=1$ 时，该质点的速度的大小等于（ ）

A 3 B 4 C 5 D 7

3、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如右图所示，则函数 $f(x)$ 有（ ）个极小值点。



A 1 B 2 C 3 D 4

4、下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是（ ）

A e^x B $\ln|x|$ C $1-x^2$ D $\dfrac{1}{1-x^2}$

5、设在 (a,b) 内，$f'(x)=g'(x)$，则一定有（ ）

A $f(x)=g(x)$ B $f(x)-g(x)=C$

C $\left[\int f(x)dx\right]'=\left[\int g(x)dx\right]'$ D $\int f(x)dx=\int g(x)dx$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、写出一种 $f'(x_0)$ 的定义表达式：$f'(x_0)=$____________.

2、$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的________条件.

3、若 $\int f(x)dx=\sin^2 x+c$，则 $f(x)=$____________.

4、$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数 $a_n=$________.

5、设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$________ .

三．计算题（每题 7 分，共 49 分）

本题得分

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$

本题得分

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\dfrac{1}{x})$.

郑州轻工业学院 / 学年 第 学期 试卷

专业年级及班级 姓名 学号

装 订 线

本题得分

3、设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ t^2-e^y=1 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

本题得分

4、已知 $y=\tan x^2+\ln^2 x+\dfrac{1}{e^5}$，求 dy.

本题得分

5、计算不定积分 $\int x\sec^2 x dx$

本题得分

6、求函数 $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 的间断点并判别其类型.

本题得分

7、一曲线通过点 $(0,0)$，且在任一点 x 处的切线的斜率等于 $e^{\sqrt{x+1}}$，求该曲线的方程。

装

订

线

本题得分

四、（8 分）不画图，列表给出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的单调区间及凹凸区间.

本题得分

五、（8 分）设 $x\in(1,2)$，证明：$x\ln^2 x<(x-1)^2$

本题得分

六、(5 分)

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$.

已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$.

本题得分

郑州轻工业大学 20XX—20XX 学年

第一学期高等数学 A(III)　　试卷 A 答案

试卷编号：X

本题得分

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、$\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=1-\sqrt{x}$，则当 $x\to 1$ 时有（ D ）

A　α 是比 β 高阶的无穷小　　　　B　α 是比 β 低阶的无穷小

C　α 与 β 同阶无穷小，但不等阶　　D　$\alpha\sim\beta$

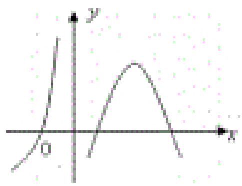
2、质点作曲线运动，其位置坐标与时间 t 的关系为 $x=t^2+t-2, y=3t^2-2t-1$，

则当 $t=1$ 时，该质点的速度的大小等于（ C ）

A 3　　B 4　　C 5　　D 7

3、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图

形如右图所示，则函数 $f(x)$ 有（ B ）个极小值点。



A 1　　B 2　　C 3　　D 4

4、下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是（ C ）

A　e^x　　B　$\ln|x|$　　C　$1-x^2$　　D　$\dfrac{1}{1-x^2}$

5、设在 (a,b) 内，$f'(x)=g'(x)$，则一定有（ B ）

A　$f(x)=g(x)$　　　　B　$f(x)-g(x)=C$

C　$\left[\int f(x)dx\right]'=\left[\int g(x)dx\right]'$　　D　$\int f(x)dx=\int g(x)dx$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、写出一种 $f'(x_0)$ 的定义表达式：$f'(x_0)=$ ___ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ___

2、$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的 __充分必要__ 条件.

3、若 $\int f(x)dx=\sin^2 x+c$，则 $f(x)=$ ___ $\sin 2x$ ___.

4、$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数 $a_n=$ ___ $\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$ ___.

5、设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$ __ ka ______ .

三. 计算题（每题 7 分，共 49 分）

本题得分

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$

解：

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{3x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$ ……4分

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\cdot$$ ……6分

$$=\frac{1}{3}$$ ……7分

本题得分

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\dfrac{1}{x})$.

本题得分

原 $=\lim\limits_{x\to0}(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x})$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$ ………(2分)

解：$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ………(3分)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}$………(6分)

$=0$ ………………(7分)

本题得分

3、设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ t^2-e^y=1\end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dx}{dt}=2t+2$ ………(3分)

$2t-e^y\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{e^y}=\frac{2t}{t^2-1}$ ………(6分)

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2t}{(2t+2)(t^2-1)}$ ………(7分)

本题得分

4、已知 $y=\tan x^2+\ln^2x+\frac{1}{e^3}$，求 dy.

解：

$(\tan x^2)'=2x\sec^2x^2$ ………(3分)

$(\ln^2x)'=2\frac{\ln x}{x}$ ………(6分)

$dy=(2x\sec^2x^2+2\frac{\ln x}{x})dx$ ………（7分）

5、计算不定积分 $\int x\sec^2 x dx$

$\int xd\tan x$ …………(2分)

$=x\tan x-\int\tan xdx$ …………(4分)

解：原式$==x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$=x\tan x+\int\frac{1}{\cos x}d\cos x$ …………(6分)

$=x\tan x+\ln|\cos x|+c$ …………(7分)

本题得分

6、求函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{\sin x}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 的间断点并判别其类型.

解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+\frac{\sin x}{x})=1$ ……(3分)

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\cos\frac{1}{x}=0$ ……(6分)

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ $\Rightarrow x=0$ 是第一类跳跃间断点……（7 分）

本题得分

7、一曲线通过点 $(0,0)$，且在任一点 x 处的切线的斜率等于 $e^{\sqrt{x+1}}$，求该曲线的方程.

解：由题设可知：$y'=e^{\sqrt{x+1}}$ ……(1分)

本题得分

$$y=\int e^{\sqrt{x+1}}dx \quad \cdots\cdots(1分)$$

所以 $\overset{\sqrt{x+1}=t,\,dx=2tdt}{=} 2\int te^t dt \quad \cdots\cdots(4分)$ ，

$$=2(t-1)e^t+c$$

$$=2(\sqrt{x+1}-1)e^{\sqrt{x+1}}+c \quad \cdots\cdots(6分)$$

代入 $x=0,y=0\Rightarrow c=0$ …… （7 分）

本题得分

四、（8 分）不画图，列表给出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的单调区间及凹凸区间.

解：$y'=3x^2-2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{1}{3}, x_2=1 \quad \cdots\cdots(2分)$

$y''=6x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(4分)$

列表：

x	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	—	—	0	+
$f''(x)$	—	—	—	0	+	+	+
$f(x)$	↑凸	极大	↓，凸	拐点	↓，凹	极小	↑，凹

单调增加区间：$(-\infty,-\frac{1}{3})$，$(1,+\infty)$，单调减少区间：$(-\frac{1}{3},1)$

凸区间：$(-\infty,\frac{1}{3})$，凹区间：$(\frac{1}{3},+\infty)$ ……..(8 分)

五、（8 分）证明：当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

解：令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$ …… （2 分）

因为 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ …… （4 分）

$x>0\Rightarrow f'(x)>0$ ，$f(x)$ 单调增加 …… （6 分）

所以 $f(x)>f(0)=0$，命题得证 …… （8 分）

本题得分

六、（5 分）

证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

解：假设存在两个点 $x_1,x_2\in[0,1]\wedge x_1\neq x_2 \ni f(x_1)=f(x_2)=0$ … （2 分）

已知 $f(x_1)$ 在以 x_1,x_2 为端点的闭区间上满足罗尔定理的条件，则

$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)\ni f'(\xi)=3(\xi^2-1)=0$ ……. （4 分）

显然不可能，假设错误，命题得证 ……. （5 分）

线
订