答案郑州轻工业大学 2021/2022 学年 第 1 学期 线性代数与空间解析几何 试卷（A 卷）

专业年级及班级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

考试类别[学生填写]（□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它）

《线性代数与空间解析几何》试卷 A（标准答案）

（适用专业：电气、食工、化工 2021 级、国教 2020 级、2021 级各专业 ）

一、选择题（9 小题，每小题 2 分，共 18 分）

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,3t,-5,-7)^T,\boldsymbol{\beta}=(-1,1,2,0)^T$ 正交，则 $t=$---- （ A ）

(A) 4； (B) -4； (C) 0； (D) -1.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-5\\1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ------------------------ （ B ）

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\-5&3\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}-3&-5\\1&2\end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix}3&5\\-1&-2\end{pmatrix}$； (D)以上都不对.

3. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均是 3 阶方阵，已知 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&0\\3&0&5\end{pmatrix}$，$|-2\boldsymbol{B}^T|=8$，则 $|\boldsymbol{A}|=$--（ C ）

(A) -2； (B) 2； (C) -8； (D) 8.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维列向量，行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-1$，则行列式

$|-3\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2|=$-- （ B ）

(A) 3； (B) -3； (C) 27； (D) -27.

5. 设 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}+a_{31}&a_{22}+a_{32}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{P}=$ ----------------- （ B ）

(A) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}$，则下列说法正确的是（ D ）

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，满足方程 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，则下列矩阵不可逆的是 --（ A ）

(A) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$； (B) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}$； (C) $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$； (D) $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$.

8. 方程 $-3x^2+y^2-2z^2=0$ 表示的曲面为----------------------- （ C ）

(A) 双叶双曲面； (B) 椭圆抛物面； (C) 锥面； (D) 双曲抛物面.

9. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-5x_3^2$ 为--------（ B ）

(A) 正定二次型； (B) 负定二次型；

(C) 不定二次型； (D) 正交二次型.

二、填空题（6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

10. 已知 4 阶行列式 D 的第 3 行元素分别为 2、-5、3、-1，对应的代数余子式分别等于 6、3、1、4，则 $D=$ ____-4____ .

11. 直线 $\dfrac{x}{-7}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-3}{4}$ 与平面 $x+3y-2z+9=0$ 的距离等于 $3/\sqrt{14}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 维列向量，且 $\boldsymbol{AB}^T=\begin{pmatrix}-7&1&9\\4&10&-5\\0&6&-8\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=$ ____-5____ .

13. 已知矩阵$\begin{pmatrix} 3 & b & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$相似，则 $a =$__-2__.

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}$ 是 R^3 的两个基，且满足$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}. \end{cases}$

则由 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}$ 的过渡矩阵为____$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$____.

15. 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素的和均等于4, 则$\boldsymbol{A}$的一个特征值为__4__ .

三、解答题（5 小题，共 58 分）

16.（**本题 10 分**）计算行列式$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

解法一 利用性质化为上三角形.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_2]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$ ---------------------- 3 分

$$\xlongequal[r_4 \div 2]{r_2+2r_1} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ -------------------------- 5 分

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$ -------------------------- 8 分

$= -18$. ------------------------------ 10 分

解法二 按行或按列展开计算.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1+3c_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$ ------------------ 3 分

$$= -1 \times (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$ ------------------ 8 分

$$= -2 \times (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$= -18$ -------------------------- 10 分

17.（**本题 10 分**）求过点 $M_0(2,-1,1)$ 且与直线$\begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ -2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$垂直的平面方程.

解 记 $n_1 = (1,3,-2)$, $n_2 = (-2,-1,1)$, 则直线的方向向量

$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-5,-7)$$ -------------------- 5 分

因所求平面与已知直线垂直，所以平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 可取作直线的方向向量，

即 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} = (-1,-5,-7)$

由点法式可得平面方程：

$$-1(x-2)-5(y+1)-7(z-1)=0$$

即 $x+5y+7z-4=0$ ________________________ 10 分

18.（**本题 10 分**） 判断下列向量组的线性相关性，并求一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\17\end{pmatrix}.$$

解 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-1&-3&0&1\\2&5&-6&0\\3&4&-5&17\end{pmatrix}$ _______________ 3 分

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&-1&4\\0&1&-4&-6\\0&-2&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&-1&4\\0&0&-5&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ _______________ 6 分

因 $R(\boldsymbol{A})=3<4$ (向量的个数), 所以向量组线性相关. ________ 8 分

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组. ____________________________ 10 分.

19.（**本题 10 分**）解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&-4\\5&6&18\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\\1&3\end{pmatrix}$.

解 $\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&1&2\\-1&0&-4&-3&1\\5&6&18&1&3\end{array}\right)$ _____________________ 3 分

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&1&2\\0&2&-1&-2&3\\0&-4&3&-4&-7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&1&2\\0&2&-1&-2&3\\0&0&1&-8&-1\end{array}\right)$$ _________ 6 分

$$\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&25&5\\0&2&0&-10&2\\0&0&1&-8&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&35&3\\0&2&0&-10&2\\0&0&1&-8&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&35&3\\0&1&0&-5&1\\0&0&1&-8&-1\end{array}\right)$$

__________ 9 分

则 $X=\begin{pmatrix}35&3\\-5&1\\-8&-1\end{pmatrix}$. _______________________ 10 分

20.（**本题 10 分**）求非齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3+5x_4-6x_5=-7\\x_1-x_2+x_4=1\\3x_1-4x_2+x_3-x_4-x_5=3\end{cases}$ 的通解.

解 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccccc:c}2&1&-3&5&-1&-7\\1&-1&0&1&0&1\\3&-4&1&-1&-2&3\end{array}\right)$ ____________________________ 1 分

$$\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&1&0&1\\2&1&-3&5&-6&-7\\3&-4&1&-1&-1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&1&0&1\\0&3&-3&3&-6&-9\\0&-1&1&-4&-1&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&-2&-3\\0&-1&1&-4&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&-2&-3\\0&0&0&-3&-3&-3\end{array}\right)$$ ____ 4 分

$$\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&0&-1&0\\0&1&-1&0&-3&-4\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&-1&0&-4&-4\\0&1&-1&0&-3&-4\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right)$$ ______ 6 分

因 $R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<5$，方程组有无穷多解.

最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3+4x_5-4,\\x_2=x_3+3x_5-4,\\x_4=-x_5+1,\end{cases}$ x_3,x_5 为自由未知量.

取$\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得非齐次方程组的一个特解$\eta_0=\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. ____________ 7 分

导出组为$\begin{cases}x_1=x_3+4x_5,\\x_2=x_3+3x_5,\\x_4=-x_5,\end{cases}$ x_3,x_5为自由未知量.

取$\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得导出组的基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$. ___ 9 分

则非齐次方程组的通解为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in R$. ______10 分.

21.（**本题 8 分**）用正交变换法把$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3$化为标准形, 并写出所用的正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$.

解　二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. ________________________ 1 分

$\boldsymbol{A}$的特征多项式$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2$

得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=2$ ________________________ 3 分

当$\lambda_1=0$时，齐次方程组$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即

$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$； __________ 4 分

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$的基础解系为:

$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. ___________________________________ 6 分

取　$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{p}_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

则正交矩阵　$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. ______________ 7 分

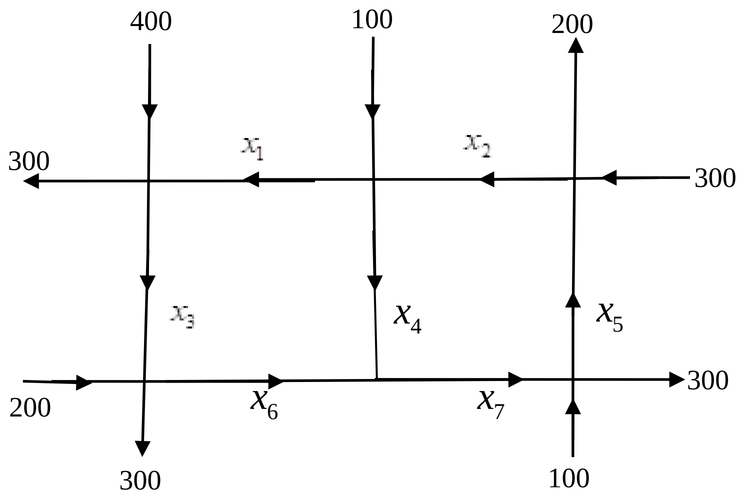
用正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$把二次型化为标准形为$f(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+2y_3^2$.

________________ 8 分

四、应用题（本题 6 分）

随着电子信息技术的发展与革新，越来越多的城市开始建智慧城市、智慧交通系统等. 智慧交通系统可根据车流量的大小，自动调整红绿灯的时间. 下图为某城市一区域街道车流量模型，已知 9 条街道(标数字的)记录了每小时的平均车流量，为了推算内部 7 处街道（x_1～x_7）的平均车流量，

试根据从每个路口进入的车辆等于出去的车辆，建立一个线性方程组.



解 建立的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -100, \\ x_3 - x_6 = 100, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 100, \\ x_4 + x_6 - x_7 = 0, \\ x_2 - x_5 = 100, \\ x_5 - x_7 = -200. \end{cases}$$

------------------ 6 分