

考试类别[学生填写] (□正考 □补考 □重修 □补修 □缓考 □其它)

《线性代数与空间解析几何》试卷 (A 卷)

(适用专业: 电气、食工、能动 2021 级、国教 2020 级、2021 级各专业)

(本试卷共 2 页, 4 道大题, 22 个小题, 满分 100 分)

注意: 所有答案必须写在答题卡上, 在试卷上作答无效

一、选择题 (9 小题, 每小题 2 分, 共 18 分)

1. 已知向量 $\alpha = (2, 3t, -5, -7)^T$, $\beta = (-1, 1, 2, 0)^T$ 正交, 则 $t =$ ----- ()

(A) 4 ; (B) -4 ; (C) 0 ; (D) -1 .

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ ----- ()

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; (D) 以上都不对.

3. 设 A, B 均是 3 阶方阵, 已知 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $|-2B^T| = 8$ 则 $|A| =$ ---- ()

(A) -2 ; (B) 2 ; (C) -8 ; (D) 8 .

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维列向量, 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = -1$, 则行列式

$|-3\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2| =$ ----- ()

(A) 3 ; (B) -3 ; (C) 27 ; (D) -27 .

5. 设 $P \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{31} & a_{22} + a_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, 则矩阵 $P =$ ----- ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, 则下列说法正确的是一 ()

(A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;

(B) α_3 可由 α_1, α_2 线性表示;

(C) α_2, α_3 线性相关;

(D) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

7 设 A 是 3 阶矩阵, 满足方程 $|A+E| = |A-3E| = |2A+E| = 0$, 则下列矩阵不可逆的是 ----- ()

(A) $2A+E$; (B) A^2-A ; (C) $3A+2E$; (D) $2A+3E$.

8. 方程 $-3x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 表示的曲面为 ----- ()

(A) 双叶双曲面; (B) 椭圆抛物面; (C) 锥面; (D) 双曲抛物面.

9. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 5x_3^2$ 为 ----- ()

(A) 正定二次型; (B) 负定二次型;

(C) 不定二次型; (D) 正交二次型.

二、填空题 (6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

10. 已知 4 阶行列式 D 第 3 行的元素分别为 2、-5、3、-1, 对应的代数余子式分别等于 6、3、1、4, 则 $D =$ _____.

11. 直线 $\frac{x}{-7} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{4}$ 与平面 $x+3y-2z+9=0$ 的距离等于_____.

12. 设 A, B 为 3 维列向量, 且 $AB^T = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 9 \\ 4 & 10 & -5 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, 则 $A^T B =$ _____.

13. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & b & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a =$ _____.

14. 设 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T$ 与 $\beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T$ 是 R^3 的两个基, 且满足 $\begin{cases} \beta_1^T = \alpha_1^T - \alpha_2^T - \alpha_3^T, \\ \beta_2^T = \alpha_2^T + 2\alpha_3^T, \\ \beta_3^T = \alpha_3^T. \end{cases}$

则由 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T$ 到 $\beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T$ 的过渡矩阵为_____.

15. 已知 3 阶矩阵 A 的每行元素的和均等于 4, 则 A 的一个特征值为_____.

三、解答题 (5 小题, 共 58 分)

16. (本题 10 分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

17. (本题 10 分) 求过点 $M_0(2, -1, 1)$ 且与直线 $\begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ -2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

18. (本题 10 分) 判断下列向量组的线性相关性, 并求一个极大线性无关组.

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}.$

19. (本题 10 分) 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 5 & 6 & 18 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

20. (本题 10 分) 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 6x_5 = -7 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$ 的通解.

21. (本题 8 分) 用正交变换法把 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$ 化为标准形, 并写出所用的正交变换 $x = Py$.

四、应用题 (本题 6 分)

22. 随着电子信息技术的发展与革新, 越来越多的城市开始建智慧城市、智慧交通系统等. 智慧交通系统可根据车流量的大小, 自动调整红绿灯的时间. 下图为某城市一区域街道车流量模型, 已知 9 条街道 (标数字的) 记录了每小时的平均车流量, 为了推算内部 7 处街道 ($x_1 \sim x_7$) 的平均车流量, 试根据从每个路口进入的车辆等于出去的车辆, 建立一个线性方程组.

