第四章 第二型曲线积分和曲面积分

第一节 第二型曲面积分

了解第二型曲面积分的概念,性质及其计算方法,并会用它求一些几何量和物理量.

知识要点

对坐标的曲面积分(第二型曲面积分)的概念、性质、存在条件及计算法.

典型例题

例 1 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 是连续函数,$\sum$ 为一光滑曲面,其面积为 A,且 M 是 $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$ 在 $\sum$ 上的最大值,证明 $\left|\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant MA$.

分析 第二型曲线、曲面积分不易比较大小,应化为第一型曲线、曲面积分或重积分、定积分后再进行估值证不等式.

证明 由于估计的是第二型曲面积分的绝对值,故 $\sum$ 的方向可任选一个,其法向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &= \left|\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\right| \\ &\leqslant \iint\limits_{\Sigma}|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma|\mathrm{d}S \\ &\leqslant \iint\limits_{\Sigma}|(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)|\mathrm{d}S \\ &\leqslant \iint\limits_{\Sigma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\mathrm{d}S\leqslant\iint\limits_{\Sigma}M\mathrm{d}S=MA.\end{aligned}$$

例 2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

分析 化为第一型曲面积分进行计算.

解 由于 $\sum$ 上的任一点 (x,y,z) 处的单位法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2x,-2y,1),$$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(2x+z)\cdot(-2x)+z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(2x+x^2+y^2)\cdot(-2x)+x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}[-4x^2-2x(x^2+y^2)+(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

注：该题也可以考虑用极坐标或者下一节的高斯公式进行计算.

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)什么是双侧曲面？当曲面方程为 $z=f(x,y)$ 时，曲面的上侧与下侧如何通过法向量来表示？

(2)引进第二型曲面积分的物理背景是什么？

(3)计算第二型曲面积分的基本方法是什么？

(4)第二型曲面积分与第一型曲面积分有何联系？

2. 计算下列第二型曲面积分：

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为由 $x=y=z=0$，$x=y=z=a$ 六个平面所围成的立方体表面并取外侧为正向；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\sum$ 是平面 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 围成的四面体的外侧；

(3) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是由平面 $x=y=z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体表面并取外侧为正向；

(4) $\iint\limits_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧为正向.

3. 把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一型曲面积分，其中

(1) Σ 是平面 $x-2y+3z=6$ 在第二卦限部分的上侧；

(2) Σ 是半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$a>0$ 的上侧.

4. 计算积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+3x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧.

B 类题

1. 计算第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{S}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的表面，并取外侧为正向，$f(x),g(y),h(z)$ 为连续函数.

2. 已知 $f(x,y,z)$ 连续，$\sum$ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（提示：利用两类曲面积分的联系，化为第一型曲面积分计算）.

3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中 $\sum$ 为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$,$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 $\sum$ 的朝下的单位法向量.

第二节 高斯公式 通量与散度

了解高斯公式,会用高斯公式计算第二型曲面积分.

知识要点

高斯公式.

典型例题

例 计算积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,$\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧.

分析 曲面 $\sum$ 是封闭的且取外侧,考虑用高斯公式,但被积函数比较复杂且在曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上无定义,不适合用高斯公式,由于被积函数的变量 x,y,z 总在 $\sum$ 上,满足 $x^2+y^2+z^2=9$,将其代入被积函数中化简后再考虑用高斯公式.

解 曲面 $\sum$ 围成的区域记为 Ω.

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}&=-\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-3\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=-\frac{2916\pi}{5}.\end{aligned}$$

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)高斯公式成立的条件是什么？

(2)散度的物理意义是什么？在直角坐标系中向量场的散度的计算公式是怎样的？

2. $\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

3. $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 表面的外侧.

4. $\oiint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体的表面的外侧.

5. 求流速场 $\boldsymbol{V}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 在单位时间内流过圆柱面 $x^2+y^2=a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面外侧的流量.

6. 计算 $\oiint\limits_{S} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的下半部分的上侧.

B类题

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x-z)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-x)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\sum$ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

2. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=1$ 所截的在第一与第二卦限内的部分的右侧.

C 类题

1. 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S$，其中 $\sum$ 为不经过原点的闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 $\sum$ 朝外的单位法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

2. 设曲面 Σ 是曲面 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\quad(z\geqslant 0)$ 的上侧，计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

第三节　斯托克斯公式　方向旋量与旋度

了解斯托克斯公式.

知识要点

斯托克斯公式.

典型例题

例　计算 $I=\oint_{\Gamma}(y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z$,其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $y=-z$ 的交线,且从 z 轴的正向看去,Γ 的方向为逆时针的.

分析　Γ 为一空间闭曲线可考虑用参数方程直接化为定积分,或用斯托克斯公式化为对面积的曲面积分,还可以化为 Γ 在坐标面上的投影曲线上的积分.

解　利用斯托克斯公式,取 $\sum$ 为平面 $y=-z$ 的上侧被 Γ 所围的部分,$z_x=0$,$z_y=-1$,$\sum$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,即 $\cos\alpha=0,\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sum$ 在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+2y^2\leqslant 1\}$,则

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+1 & z+2 & x+3\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(-\sqrt{2})\,\mathrm{d}S=-2\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\sqrt{2}\pi.$$

A 类题

1. 回答下列问题:

(1)斯托克斯公式成立的条件是什么?

(2)旋度的物理意义是什么?在直角坐标系中向量场的旋度的计算公式是怎样的?

2. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

(1) $\boldsymbol{A}=(yz^2,zx^2,xy^2)$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x^2-xy,y^2-yz,z^2-zx)$.

3. $\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为 $x+y+z=1$ 与三坐标面的交线，它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧.

4. 计算 $\oint_\Gamma 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲面 $x^2+y^2=2z$ 与 $z=2$ 的交线，若从 z 轴正向看去 Γ 取逆时针方向.

5. $\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$，其中 L 为 $y^2+z^2=1,x=y$ 所交椭圆的正向.

B 类题

1. 若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的闭曲线，它所包围的区域的面积为 S，求 $\oint_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$，其中 L 依正向进行.

2. 计算 $I=\oint_\Gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 的交线，Γ 的方向为从 z 轴正向看去椭圆取逆时针.

3. 计算 $\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中 Γ 为柱面 $x^2+y^2=2ax$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$，$(0<a<b, z>0)$ 的交线，从 z 轴的正向往下看 Γ 为逆时针方向.