(B)

1. $y=\mathrm{e}^{x}$.

2. 提示：由 $y_1=\cos 4x$ 是解，可知 $y_2=\sin 4x$ 也是解，

事实上，将 $y_2=\sin 4x$ 代入 $y^{(4)}+p_1 y'''+p_2 y''+p_3 y'+p_4$，然后，令 $x=t+\frac{\pi}{8}$，得

$$\begin{aligned}&y_2^{(4)}+p_1 y'''_2+p_2 y''_2+p_3 y'_2+p_4 y_2\\&=4^4\sin 4x+p_1(-4^3\cos 4x)+p_2(-4^2\sin 4x)+p_3 4\cos 4x+p_4\sin 4x\\&=4^4\cos 4t+p_1 4^3\sin 4t-p_2 4^2\cos 4t-p_3 4\sin 4t+p_4\cos 4t\\&=y_1^{(4)}+p_1 y'''_1+p_2 y''_1+p_3 y'_1+p_4 y_1=0.\end{aligned}$$

类似地，$y_3=\sin 3x$ 是解，可得 $y_4=\cos 3x$ 也是解. 故方程有通解

$$y(x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$$

因此 $\pm 4i$，$\pm 3i$ 是特征根，故特征方程为 $(\lambda^2+16)(\lambda^2+9)=0$，即 $\lambda^4+25\lambda^2+144=0$. 所以，微分方程为 $y^{(4)}+25y''+144y=0$.

3. $y(x)=C_1 x\cos 4x+C_2 x\sin 4x+C_3\cos 4x+C_4\sin 4x$，$y^{(4)}+32y''+256y=0$.

4. $y=C_1x^3\mathrm{e}^{-x}+C_2x^2\mathrm{e}^{-x}+C_3x\mathrm{e}^{-x}+C_4\mathrm{e}^{-x}$，$y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+y=0$.

总习题 14 答案与提示

1. $y'=-\frac{x}{3y}$.

2. $y=\begin{cases}-(x-c_2)^2, & \text{当 } x<c_2\leqslant 0,\\ 0, & \text{当 } c_2\leqslant x\leqslant c_1,\\ (x-c_1)^2, & \text{当 } x>c_1\geqslant 0,\end{cases}$ 其中，$c_1\geqslant 0$，$c_2\leqslant 0$ 是任意常数.

3. 方程的通解为 $\tan 4y=2(x+\sin x\cos x)+c$，当 $\cos 4y=0$ 时，得 $y=\frac{\pi}{8}+\frac{n}{4}\pi(n\in N)$，直接验证知它们也是方程的解，但它们未含在通解之中.

4. 提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c+\int_0^x q(t)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{px}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{q(x)\mathrm{e}^{px}}{\mathrm{e}^{px}p}=\dfrac{q}{p}$.

5. $y=\frac{1}{x+c}-\frac{2}{x}$ 及 $y=-\frac{2}{x}$.

6. $\mu=\mu[\varphi(x,y)]=\mathrm{e}^{\int f[\varphi]\mathrm{d}\varphi}$ 是积分因子.

7. 方程(1)和(2)的通解分别为

$$y_1(x)=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}\frac{q-t}{p-s}\mathrm{d}x}\left[c_1+c_2\int \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\mathrm{d}x}\left(y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}\frac{q-t}{p-s}\mathrm{d}x}\right)^{-2}\mathrm{d}x\right],$$

$$y_2(x)=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}\frac{q-t}{p-s}\mathrm{d}x}\left[c_1+c_2\int \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}s(x)\mathrm{d}x}\left(y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}\frac{q-t}{p-s}\mathrm{d}x}\right)^{-2}\mathrm{d}x\right],$$

其中 c_1，c_2 是任意常数.

8. $y(x)=4\mathrm{e}^{x}-3\mathrm{e}^{x^2}\cos x-23x^3$.

9. 方程的通解为 $y=(c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{x^2}$，其中 c_1，c_2 是任意常数.

10. 微分方程为 $y^{(4)}+18y''+81y=0$.

11. $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+xe^{2x}$.

12. 该 3 阶方程的通解为 $y=c_1+c_2x^2+c_3(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$.

13. 方程通解为 $y=c_1(2x+1)+c_2(2x+1)^2$.

14. 方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2x^2e^x+xe^{2x}$.

总习题 15 答案与提示

(A)

1. (1) $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}, \\ z=C_1e^x-C_2e^{-x}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3+C_1\cos t+C_2\sin t, \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y_1=C_1e^{-t}+C_3e^t, \\ y_2=C_2e^t, \\ y_3=C_1e^{-t}-C_3e^t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{5t}, \\ y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}; \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t, \\ y=C_1e^{2t}(\cos t-\sin t)+C_2e^{2t}(\cos t+\sin t); \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=C_1(\frac{1}{2}\cos 3t-\frac{3}{2}\sin 3t)+C_2(\frac{3}{2}\cos 3t+\frac{1}{2}\sin 3t), \\ y=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=C_1e^t(1+t)+C_2e^t(-1)-2C_3e^t, \\ y=-C_1te^t+C_2e^t, \\ z=C_3e^t; \end{cases}$ (8) $\begin{cases} y_1=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3\frac{x^2}{2}e^{2x}, \\ y_2=C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}, \\ y_3=C_3e^{2x}. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}e^{5t}-\frac{1}{2}e^{-t}, \\ y=\frac{1}{2}e^{5t}+\frac{1}{2}e^{-t}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1=\frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}+\frac{1}{4}e^t-\frac{2}{5}, \\ x_2=\frac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{5}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1(t)=(-6\cos 5t-\frac{42}{5}\sin 5t)e^{3t}+e^{3t}+5\cos t, \\ x_2(t)=(-\frac{42}{5}\cos 5t+6\sin 5t)e^{3t}+\frac{2}{5}e^{3t}-\sin t+8\cos t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1(t)=-2-t+e^t+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t, \\ x_2(t)=-3-3t+2e^t+\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t+\frac{4}{5}\sin t. \end{cases}$

(B)

1. (1) 提示：令 $s=\sqrt{t}$，$\begin{cases} x=C_1\cos\sqrt{t}\,e^{2\sqrt{t}}+C_2\sin\sqrt{t}\,e^{2\sqrt{t}}, \\ y=C_1\sin\sqrt{t}\,e^{2\sqrt{t}}-C_2\cos\sqrt{t}\,e^{2\sqrt{t}}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\frac{t}{3}, \\ y=\frac{4}{3}t^2-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=c_1e^{3\sqrt{t}}+c_2\sqrt[3]{t}\,e^{\sqrt[3]{t}}, \\ y=\frac{1}{2}(2c_1+c_2+2c_2\sqrt[3]{t})e^{\sqrt[3]{t}}; \end{cases}$ (4) 提示：令 $t=e^s$，$\begin{cases} x=C_1t+C_2t^{-1}+C_3t^2, \\ y=C_1t+2C_2t^{-1}-C_3t^2, \\ z=2C_1t+C_2t^{-1}+3C_3t^2. \end{cases}$