第五章 常微分方程

第一节 微分方程的基本概念

了解微分方程及其解、通解、初始条件和特解以及积分曲线等的概念，会验证某函数是否为微分方程的解.

知识要点

1. 微分方程的基本概念，什么是微分方程的阶，什么是微分方程的解，通解的定义和特解的定义；

2. 微分方程的初始条件和初值问题，利用初始条件确定通解中的任意常数从而得到特解；

3. 积分曲线.

典型例题

例 1 验证 $y=\sin(x+C)$ 是微分方程 $(y')^2+y^2-1=0$ 的通解，并验证 $y=\pm1$ 也是解.

分析 将 $y=\sin(x+C)$ 代入方程验证即可.

解 因 $y=\sin(x+C)$，$y'=\cos(x+C)$，故

$$(y')^2+y^2-1=\cos^2(x+C)+\sin^2(x+C)-1=0$$

即 $y=\sin(x+C)$ 是微分方程 $(y')^2+y^2-1=0$ 的解，又因为解中含有一个任意的常数，与方程的阶数相同，所以它是通解；$y=\pm1$，$y'=0$，显然满足 $(y')^2+y^2-1=0$，故 $y=\pm1$ 也是原方程的解(奇解).

例 2 求一微分方程，使其通解满足题给条件 $y=Ce^{\arcsin x}$.

分析 利用求导消去任意常数即可.

解 对通解求导，得 $y'=\dfrac{Ce^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $y'=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$

故所求的微分方程为 $y'\sqrt{1-x^2}-y=0$.

A类题

1. 一曲线经过点$(1,2)$，且曲线上任意一点(x,y)处的切线斜率等于该点的横坐标，试确定此曲线的方程.

2. 验证下列各题中的函数或隐函数是否为所给微分方程的解：

(1) $y''-2y'+y=0, y=x^2e^x$；

(2) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0, y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$；

(3) $(x-2y)y'=2x-y, x^2-xy+y^2=C$；

(4) $(xy-x)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy)$.

3. 在下列各题中确定其中的参数，使得函数满足所给的初始条件：

(1) $x^2-y^2=C, y|_{x=0}=5$；

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}, y(0)=1, y'(0)=2$.

4. 设曲线上任一点(x,y)的切线在两坐标轴间线段均被切点平分. 试求曲线所满足的微分方程.

B类题

1. 质量为M的物体自离液面h的高度自由落下，已知物体在液体中受的阻力与运动速度成正比，用微分方程表示物体在液体中运动速度与时间的关系，并写出初始条件.

2. 长度为6m，单位长度质量为p的链自桌上滑下，运动开始时，链自桌上垂下部分有1m长，试求下滑的长度与时间t的函数所满足的微分方程和初始条件.

第二节　一阶微分方程

了解一阶微分方程(变量可分离方程,齐次微分方程,一阶线性微分方程及恰当方程)的基本概念,会对一阶微分方程进行求解,了解一阶方程的初等变换及积分因子法求解.

知识要点

1. 一阶微分方程的概念,包括变量可分离方程,齐次微分方程,一阶线性微分方程及恰当方程的概念;

2. 利用初等变换法和积分因子法求解一阶微分方程;

3. 验证一阶微分方程的初值问题解的存在性与唯一性.

典型例题

例 1　求微分方程 $2yy'+2xy^2=xe^{-x^2}$ 的通解.

解　方程可化为 $(y^2)'+2xy^2=xe^{-x^2}$,

若令 $y^2=u$,则原方程化为线性方程 $u'+2xu=xe^{-x^2}$,

故由公式得

$$u=e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int xe^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)$$

所以方程的通解为

$$y^2=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right),\ C\text{ 为任意常数.}$$

例 2　设 $f(x)$ 为可导函数,且满足方程 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=f(x)-x^2$,求 $f(x)$.

分析　积分符号下含有未知函数的方程称为积分方程,积分方程的求解往往先转化为微分方程,然后求解,此方程只要两端分别对 x 求导即可转化为微分方程.

解　方程两端分别对 x 求导,得

$$xf(x)=f'(x)-2x,\text{且 } f(0)=0$$

方程为可分离变量方程,也是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程.分离变量并积分,有

$$\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{2+f(x)}=\int x\mathrm{d}x$$

解得

$$\ln[2+f(x)]=\frac{1}{2}x^2+C$$

由 $f(0)=0$,有 $C=\ln 2$,所以

$$\ln[2+f(x)]=\frac{1}{2}x^2+\ln 2$$

整理得

$$f(x) = 2e^{x^2/2} - 2.$$

A 类题

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $(x+1)y'+1=2e^{-y}$；

(2) $y'=x^{x+y}$；

(3) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$；

(4) $xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$.

2. 求下列微分方程的通解：

(1) $(x^2+y^2)y'=2xy$；

(2) $y'+y\tan x=\sec x$；

(3) $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$；

(4) $e^{-y}dy-(2x+ye^{-x})dx=0$.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$；

(2) $y' + f'(x)y = f(x)f'(x)$, $f'(x)$ 为已知连续函数;

(3) $y' = \dfrac{y-x+1}{y+x+5}$;

(4) $(x^2+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 4x^2$.

4. 求解下列微分方程:

(1) $(3x^2 + 2xe^{-y})\mathrm{d}x + (3y^2 - x^2e^{-y})\mathrm{d}y = 0$;

(2) $2xy\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y = 0$.

5. 求解下列微分方程:

(1) $(2x + y - 4)\mathrm{d}x + (x + y - 1)\mathrm{d}y = 0$;

(2) $y' = \sin^2(x - y + 1)$;

(3) $y' + \dfrac{1}{x}y = x^2y^6$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = y^2(\cos x - \sin x)$.

6. 用积分因子法求解下列方程:

(1) $(3x - 2y + 2y^2)\mathrm{d}x + (2xy - x)\mathrm{d}y = 0$;

(2) $(y+xy+\sin y)\mathrm{d}x+(x+\cos y)\mathrm{d}y=0$.

B 类题

1.求方程 $y'=\dfrac{y^2-x}{2y(x+1)}$ 的通解.

2.已知 $f(x)$ 可微且满足 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$,同时使得曲线积分 $\int_L[\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,求函数 $f(x)$.

3.曲线 $y=f(x)$(函数 $f(x)\geqslant 0$, $f(0)=0$)围成一以 $[0,x]$ 为底的曲边梯形,其面积与 $f(x)$ 的 $n+1$ 次幂成正比,已知 $f(1)=1$,求这条曲线的方程.

4.设有连接点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$,对于曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$ 曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围面积为 x^2,求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

5. 在过原点和点(2,3)的单调光滑曲线上任取一点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴和曲线围成的面积是另一条平行线与 y 轴和曲线围成面积的两倍，求该曲线方程.

C类题

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足初始条件 $y(\ln 2)=0$ 的特解.