第五章 常微分方程

第一节 二阶微分方程

了解二阶微分方程(包括可降阶的二阶微分方程,二阶线性微分方程,二阶常系数线性微分方程以及二阶变系数线性微分方程)的定义,会求这几类二阶微分方程的通解.

知识要点

1. 可降阶的二阶微分方程,二阶线性微分方程,二阶常系数线性微分方程以及二阶变系数线性微分方程的定义;

2. 会求解二阶微分方程,以及几种特殊的二阶变系数线性微分方程的通解.

典型例题

例 1 求微分方程 $xy''+y'=e^x$ 的通解.

分析 方程不显含有 y,属于 $y''=f(x,y')$ 型.

解 令 $y'=p(x)$,则 $y''=\frac{dp}{dx}$,代入方程得

$$xp'+p=e^x \quad 或 \quad p'+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x}e^x$$

这是个一阶线性微分方程,其通解为

$$p=\frac{C_1}{x}+\frac{e^x}{x}$$

即

$$y'=\frac{C_1}{x}+\frac{e^x}{x}$$

故 $y=C_1\ln x+\int\frac{e^x}{x}dx+C_2$,其中 C_1,C_2 是任意常数.

例 2 求微分方程 $y''+2ky'+y=0$ 的通解,其中 k 为实常数.

分析 这是个标准的二阶常系数齐次线性微分方程,因而只要求出其特征方程的根,然后根据根的情况即可写出通解.

解 微分方程的特征方程 $r^2+2kr+1=0$ 的两个特征根为

$$r_{1,2}=-k\pm\sqrt{k^2-1}$$

当$|k|=1$时,r_1,r_2为两个相等实根,故所给微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-kx}$$

当$|k|>1$时,r_1,r_2为两个不相等的实根,故所给微分方程的通解为

$$y=C_1e^{(-k+\sqrt{k^2-1})x}+C_2e^{(-k-\sqrt{k^2-1})x}$$

当$|k|<1$时,r_1,r_2是一对共轭复根,故所给微分方程的通解为

$$y=e^{-kx}\left[C_1\cos(\sqrt{1-k^2}\,x)+C_2\sin(\sqrt{1-k^2}\,x)\right]$$

其中C_1,C_2任意常数.

例 3 求微分方程$y''+4y=4x^2$的通解.

分析 先求齐次通解,再求非齐次特解.

解 (1)求相应的齐次方程$y''+4y=0$的通解,特征方程$r^2+4=0$的特征根为$r_{1,2}=\pm 2i$,故齐次方程的通解为

$$\overline{Y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

(2)求非齐次方程的某个特解,此题中$f(x)=4x^2$属于$f(x)=e^{\lambda x}p_m(x)$型,因$\lambda=0$不是特征方程的根,故方程的特解应具有下面形式

$$y^*=Ax^2+Bx+C$$

将y^*代入微分方程得

$$2A+4(Ax^2+Bx+C)=4x^2$$

比较上式两端x同次幂的系数得

$$\begin{cases}4A=4\\4B=0\\2A+4C=0\end{cases}\quad \text{即有}\quad \begin{cases}A=1\\B=0\\C=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

于是特解为$y^*=x^2-\dfrac{1}{2}$,故原方程的通解为

$$y=\overline{Y}+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x^2-\frac{1}{2}$$

其中C_1,C_2任意常数.

A 类题

1. 选择题:

(1) 微分方程$y''-4y'-5y=e^{-x}+\sin 5x$有形如(   )的特解.

(A) $y=ae^{-x}+b\sin 5x$　　(B) $y=ae^{-x}+b\cos 5x+c\sin 5x$

(C) $y=axe^{-x}+b\sin 5x$　　(D) $y=axe^{-x}+b\cos 5x+c\sin 5x$

(2)设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ 为某二阶常系数线性齐次方程的通解，则该方程为(　).

(A) $y''-2y'+2y=0$　　(B) $y''-2y'+y=0$

(C) $y''-2y'-2y=0$　　(D) $y''-2y'-y=0$

(3)设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，则此微分方程的通解为(　　).

(A) $y=C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

(C) $y=C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $y=C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

2.求解下列微分方程的通解：

(1) $y''=\dfrac{1}{x}y'$；　　(2) $y''-y'-x=0$；

(3) $y^3y''-1=0$；　　(4) $2y''+y'-y=2e^x$.

3.已知方程 $(1-\ln x)y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^2}y=0$ 的一个解 $y_1=\ln x$，求其通解.

4.求下列方程的通解：

(1) $2y''+2y'=5x^2-2x-1$；　　(2) $x^2y''+xy'-y=0$；

(3) $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$;

(4) $x^2y''+2x^2(\tan y)y'^2+xy'-\sin y\cos y=0$;

(5) $(2x+1)^2y''-4(2x+1)y'+8y=0$.

5. 求下列二阶 Euler 方程的通解:

(1) $x^2y''-4xy'+6y=x$;

(2) $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$.

6. 设 $f(x)$ 为连续函数,且满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

7. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$,满足积分方程 $f(x)=1-\frac{1}{5}\int_0^x[f''(t)-4f(t)]\mathrm{d}t\,f(x)$,求 $f(x)$.

B 类题

1. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

2. 设函数 $\varphi(x)$ 有连续的二阶导数，并使曲线积分

$$\int_L [3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}]y\mathrm{d}x+\varphi'(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，求 $\varphi(x)$.

3. 设 $f(0)=0$，$f'(x)=1+\int_0^x 6\sin^2 t-f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 二阶可导，求 $f(x)$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$ 且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点处的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

C类题

设$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$具有连续的二阶偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$，试求函数$u$的表达式.

第二节　高阶微分方程

了解n阶微分方程(可降阶n阶线性微分方程，n阶线性微分方程，n阶常系数线性方程以及n阶Euler方程)的定义以及求解方法.

知识要点

1. 可降阶n阶线性微分方程，n阶线性微分方程，n阶常系数线性方程以及n阶Euler方程的定义；

2. 高阶微分方程的求解.

典型例题

例1　求微分方程$y'''+2y''+y'=0$的通解.

解　所给方程的特征方程为$r^3+2r^2+r=0$，其特征根为

$$r_1=0, r_2=r_3=-1$$

故方程的通解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x)e^{-x}$$

其中是C_1,C_2,C_3任意常数.

A 类题

1. 求下列方程的通解：

(1) $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$；

(2) $y'''+y'=0$；

(3) $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$；

(4) $y^{(6)}-2y^{(4)}-y''+2y=0$.

2. 求初值问题的解

$$y^{(4)}-4y'''+8y''-8y'+3y=0,y(0)=0,y'(0)=0,y''(0)=2,y'''(0)=0.$$

3. 求方程 $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$ 的通解.