第十章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

本节要求读者理解二重积分的概念,了解二重积分的性质.

知识要点

1. 二重积分的定义及几何意义;

2. 二重积分的可加性、估值不等式及中值定理.

典型例题

例 1 利用二重积分的性质估计积分 $I=\iint\limits_{D} xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 的值.

分析:利用估值不等式可以估算出二重积分的大致范围.

解:设 $f(x,y)=xy(x+y)$ 且 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$

$$\therefore f_{\min}(x,y)=f(0,0)=0,\quad \therefore f_{\max}(x,y)=f(1,1)=2;$$

故由积分估值公式得 $0\cdot\sigma\leqslant I\leqslant 2\cdot\sigma$,而 $\sigma=1$,所以 $0\leqslant I\leqslant 2$.

例 2 估计二重积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\sin^2 y}\mathrm{d}\sigma$ 的值.

分析:可用二重积分的中值定理估计积分值,其本质上与用单调性估值是一致的.

解:利用中值定理,因为 $f(x,y)=\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\sin^2 y}$ 在闭区域 D 上连续,所以在 D 上至少有一点 (ξ,η),使得 $I=\dfrac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\sigma$,显然 $\dfrac{1}{102}\leqslant\dfrac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\leqslant\dfrac{1}{100}$,而 $\sigma=200$,所以 $\dfrac{100}{51}=\dfrac{200}{102}\leqslant I\leqslant\dfrac{200}{100}=2$.

例 3 根据二重积分性质,比较 $\iint\limits_{D}\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_{D}[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小,其中 D 是矩形闭区域:$3\leqslant x\leqslant 5, 0\leqslant y\leqslant 1$.

分析：当积分区域相同时，根据二重积分的性质，可通过比较被积函数在积分区域内的大小来判断二重积分的大小.

解：在 D 上有 $x+y>\mathrm{e}$，所以 $\ln(x+y)>1$，$\ln(x+y)\leqslant[\ln(x+y)]^2$，因而有 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma>\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$.

A 类题

1. 填空题：

(1) 已知 $D: x^2+y^2\leqslant a^2(a>0)$，且 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\pi$，则 $a=$ ______（提示：利用二重积分的几何意义）.

(2) 若区域 D 是以 $(0,1)$，$(0,-1)$，$(1,0)$ 为顶点的三角形区域，则根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=$ ______.

(3) 已知 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}|xy|\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}|xy|\,\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_{-1\leqslant x,y\leqslant1}|xy|\,\mathrm{d}\sigma$，则它们之间的大小关系为______.

(4) 若区域 D 是以 $(1,1)$，$(1,0)$，$(2,0)$ 为顶点的三角形区域，$I_1=\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，则它们之间的大小关系为______.

2. 利用二重积分的性质估计下列积分的值：

(1) $I=\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 其中 $D: 0\leqslant x\leqslant1, 0\leqslant y\leqslant2$.

(2) $I=\iint\limits_D\sin^2x\sin^2y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi$.

B 类题

1. 设 D_1 是 x 轴、y 轴与 $x+y=1$ 所围区域，D_2 为 $(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 2$，试在同一坐标系中画出 D_1 与 D_2 的图形，并根据二重积分的性质由小到大的次序排列出 I_1、I_2、I_3、I_4，其中 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D_1}(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_{D_2}(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$I_4=\iint\limits_{D_2}(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

2. 对于二重积分 $I=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，若积分区域 D 关于 x 轴对称，有(1) 当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时，则 $I=0$；(2) 当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时，则 $I=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,y\geqslant 0\}$. 若积分区域关于 y 轴对称，有(1) 当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时，则 $I=0$；(2) 当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时，则 $I=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$. 试利用此性质计算：$I=\iint\limits_{D}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=4-x^2$，$y=-3x$，$x=1$ 所围成.

C类题

1. 设 $f(x,y)$ 在平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续，证明：

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\pi f(0,0).$$

2. 对于二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，若积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，则有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$（轮换对称性）. 试利用此性质计算下题：

设 $\varphi(x)$ 为 $[0,1]$ 上的正值连续函数，计算 $\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma$，其中 a,b 为常数，$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$.

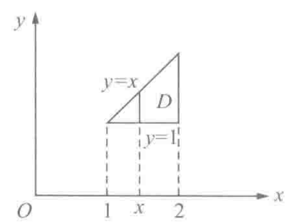
第二节　二重积分的计算法

本节要求读者掌握二重积分在直角坐标系及极坐标系下的计算方法.

知识要点

1. 直角坐标系中二重积分如何化为二次积分（X 型、Y 型）；
2. 极坐标系中二重积分如何化为二次积分；
3. 利用二重积分的几何含义求空间立体的体积.

典型例题



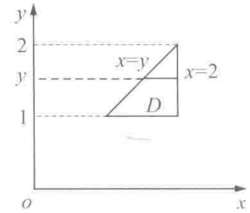
例 1　计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$，$x=2$ 及 $y=x$ 所围.

解法 1:积分区域看作 X 型时,

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2\left[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^x\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right]\Big|_1^2 = 1\frac{1}{8}$$

解法 2:积分区域看做 Y 型时,



$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2\left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_1^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]\Big|_y^2\mathrm{d}y$$

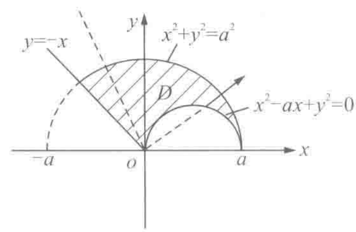
$$= \int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[y^2-\frac{y^4}{8}\right]\Big|_1^2 = 1\frac{1}{8}$$

例 2 求 $I=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 在 x 轴上方,由

$$y=-x,\ x^2+y^2=a^2,\ x^2-ax+y^2=0\ (a>0)\text{ 所围成.}$$

分析:积分区域用极坐标表示较为容易.

解:区域 D 的草图如图所示.用极坐标进行计算.



令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$y=-x$ 为 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$;$x^2+y^2=a^2$ 为 $r=a$;$x^2-ax+y^2=0$ 为 $r=a\cos\theta$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^a r^2\cos\theta\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cos\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}(1-\cos^3\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta+\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^a$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{a^3}{48}(8\sqrt{2}-3\pi)$$

例 3 求由曲面 $z=3x^2+y^2$ 与 $z=1-x^2$ 所围成的立体的体积.

分析:二重积分的几何意义为柱体的体积,因此体积问题可转化为二重积分问题求解.

解:立体在 xoy 坐标面的投影区域为 D_{xy},设 D_1 为 D_{xy} 在第一象限的部分,则由对称性知:

$$V=4\iint\limits_{D_1}[1-x^2-(3x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}(1-4x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}[(1-4x^2)-y^2]\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

A 类题

1. 填空题：

(1) 设 D 是由 $y=x, y=2x$ 及 $x=4$ 所围成的区域，则 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,y\,\mathrm{d}\sigma =$ ________.

(2) 交换积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y =$ ________.

(3) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y$ 在极坐标系下的二次积分为________.

(4) 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x =$ ________.

2. 求 $\iint\limits_D x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 0\}$.

3. 求积分 $\iint\limits_D (1+x)y\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 是顶点为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(1,2)$、$(0,1)$ 的直边梯形.

4. 交换下列二积分的积分次序：

(1) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$;

(3) $\int_a^{2a} dx\int_{2a-x}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$;

(4) $\int_0^a dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x,y)dx$.

5. 求 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy$,其中 D 是以(0,0),(1,1),(0,1) 为定点的三角形.

6. 将下列二次积分化为极坐标下的二次积分:

(1) $\int_0^{2R} dy\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$;

(2) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)dy$.

7. 利用极坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=1$ 所围成的第一象限内的区域；

(2) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$.

B 类题

1. 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(y-x^2)dxdy$ 的值，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

2. 求积分 $\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)d\sigma$ 的值，其中 D 是圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 在第一象限的部分.

3. 选用适当的坐标系计算下列各题：

(1) $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是 $x=-\sqrt{1-y^2}$，$y=-1$，$y=1$ 及 $x=-2$ 所围成的区域；

(2) $I=\iint\limits_D (x^2+xy\mathrm{e}^{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

4. 求由平面 $y=0$，$y=kx(k>0)$，$z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的第一卦限内的立体体积.

5. 设平面薄片所占据的区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上的一段弧$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，其面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，求平面薄片的质量.

第三节　三重积分

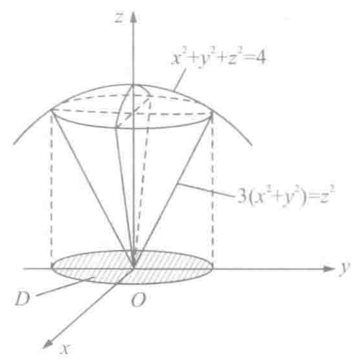
本节要求读者了解三重积分的概念，了解三重积分的计算方法(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

知识要点

1. 三重积分的概念；

2. 在不同坐标系下将三重积分化为三次积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

典型例题



例 1　试将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为累次积分，其中 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=4$，$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成，分别用直角坐标、柱面坐标、球面坐标表达累次积分.

解：积分区域如图所示：由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$ 可得投影柱面为 $x^2+y^2=1$，投影区域为：D：$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1 \\ z=0 \end{cases}$

(1)在直角坐标系下的累次积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

(2)在柱面坐标下的累次积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1} r\mathrm{d}r\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

(3)在球面坐标下的累次积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{2} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

例 2　计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y$.

分析：直接积分困难，可以考虑交换积分次序.

解：积分区域 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的四面体，先对 x 积分，有

$$\begin{aligned}
I&=\iiint\limits_{\Omega}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x\\
&=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y)(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1(1-y)\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)[\mathrm{e}^{-(1-y-1+y)^2}-\mathrm{e}^{-(1-y-0)^2}]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)[1-\mathrm{e}^{-(1-y)^2}]\mathrm{d}y=\frac{1}{4\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

A 类题

1. 填空题:

(1) 设空间区域 Ω_1: $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$; Ω_2: $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x>0, y>0, z>0$, 则 $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=$ ____________ $\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v=$ ____________.

(2) 柱面坐标 (ρ,θ,z) 与直角坐标 (x,y,z) 的关系为____________,在柱面坐标系下体积元素 $\mathrm{d}v=$____________.

2. 分别在直角坐标系、柱面坐标系下将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$ 化为累次积分,其中 Ω 由 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成,并选择其中一种计算出结果.

3. 求下列三重积分:

(1) 求曲面 $x^2+y^2=az\,(a>0)$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积;

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2}$,其中 Ω 是由平面 $x=1$、$x=2$、$z=0$、$y=x$ 及 $z=y$ 围成;

(3) $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$;

(4) $I=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}v$,其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

(5) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1,z=2$ 所围区域;

(6) $I=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\\x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\end{cases}$;

(7) 计算 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$.

B 类题

1. 对于三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$,若积分区域 Ω 关于 xoy 面对称,则

(1) 当 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 时,则 $I=0$;

(2) 当 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 时,则 $I=2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega,z\geqslant 0\}$(偶倍奇零).

若积分区域 Ω 关于 yoz 面对称,

(1) 当 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$ 时,则 $I=0$;

(2) 当 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$ 时,则 $I=2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega,z\geqslant 0\}$.

同理,若有积分区域 Ω 关于 zox 面对称,

(1) 当 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$ 时,则 $I=0$;

(2) 当 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$ 时,则 $I=2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega_1=$

$\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega,z\geqslant0\}$.

试利用此性质计算：$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}v$，其 Ω 由 $z=1$，$z=4$，$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 所围成.

2. 设 $f(x)$ 连续，Ω：$\{(x,y,z)\mid0\leqslant z\leqslant h,x^2+y^2\leqslant t^2\}$，

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}v,$$求 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 及 $\lim\limits_{t\to0}\frac{F(t)}{t^2}$.

3. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=b^2(0<b<a)$ 所围立体的体积.

第四节　重积分的应用

本节要求读者能利用重积分的元素法计算曲面的面积、质心、转动惯量及引力.

知识要点

1. 曲面的面积的计算方法；
2. 平面薄片及空间立体的质心、转动惯量及引力计算公式.

典型例题

例 1　求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的面积.

分析：根据曲面的面积计算公式，选择合适的坐标系进行计算.

解：$\because\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$$\therefore 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=2$$

而曲面在 xoy 面上的投影区域为 $D:(x-1)^2+y^2\leqslant 1$

$$\therefore S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\pi$$

$$=\frac{1}{ab}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^{\frac{1}{2}}$$

例 2　求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心.

分析：对于均匀物体的质心可通过对称性预先判断中间的某些分量的值，再通过质心的计算公式对剩余分量加以计算.

解：因为闭区域 D 对称于 y 轴，所以质心 $C(\bar{x},\bar{y})$ 必位于 y 轴上，于是 $\bar{x}=0$.

$$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho=7\pi,$$

又有
$$\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi,$$

所以
$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma}=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3},\text{所求质心是 }C\left(0,\frac{7}{3}\right).$$

例 3　求曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=6-2x^2-y^2$ 所围立体对 z 轴的转动惯量，物体体密度 $\rho=1$.

解：由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=6-2x^2-y^2\end{cases}$ 消 z，得 $x^2+y^2=2$，故立体在 xoy 坐标面上的投影区域 D_1：$x^2+y^2\leqslant 2$ 对 z 轴的转动惯量

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$$

即
$$I_z=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{6-2x^2-y^2}\mathrm{d}z=3\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\gamma(2-\gamma^2)\gamma\mathrm{d}\gamma=4\pi.$$

A 类题

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分曲面的面积.

2. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

3. 设均匀薄片占据区域$D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$,求质心.

4. 设有一等腰三角形薄片,腰长为a,各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方,求薄片的质心(提示:以直角顶点为原点,以两个等腰为坐标轴建立坐标系)。

B 类题

1. 设密度均匀的平面薄片占据区域D,D由$y=\sqrt{2px}$、$y=0$、$x=X$所围成,当X连续变化时其质心绘出一条曲线,求曲线方程.

2. 求均匀薄片,面密度为1,薄片所占区域为:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$,求其关于$y$轴的转动惯量.

3. 设有密度为ρ的均匀球顶锥体,球心在原点,球半径为R,锥顶角为$\frac{\pi}{3}$,锥顶点在原点,求该球顶锥体对锥顶点处质量为m的质点的引力(引力系数为k).

4. 利用质心坐标计算$\iint\limits_D (5x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由曲线$x^2+y^2+2x-4y-4=0$围成.