习题 8.9 答案与提示

1. $f(x)=\dfrac{E}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\dfrac{2E}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{3}\cos\dfrac{n\pi x}{l}\quad\left(-l\leqslant x\leqslant l,x\neq-\dfrac{l}{3},\dfrac{l}{3}\right).$

2. $f(x)=\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(-1)^n\dfrac{i}{n\pi}e^{in\pi x}\quad(x\neq 2k+1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

总习题 8 答案与提示

1. (1)$\dfrac{2}{2-\ln 3}$； (2)$2A-u_1$； (3)$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)},\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2$； (4)$a=0$； (5)$p>0$.

2. (1)$\dfrac{2}{3}$； (2)$(-2,4)$； (3)$\dfrac{3}{2}$； (4)$\dfrac{2\pi}{3}$； (5)$[-2,6)$.

3. (1)(C)； (2)(B)； (3)(D)； (4)(A).

4. (1)(B)； (2)(C)； (3)(D)； (4)(B).

5. (1)绝对收敛； (2)收敛； (3)发散； (4)$a\geqslant\dfrac{1}{e}$时发散，$a<\dfrac{1}{e}$时收敛；

(5)条件收敛； (6)收敛； (7)条件收敛； (8)绝对收敛.

6. 略.

7. 利用 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1+\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

8. 注意 $f(0)=f'(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}f''(0)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

9. 注意 $b_n>0$，$b_n=\dfrac{1}{2}a_n+o(a_n)$.

10. 寻找两个级数的部分和之间的关系.

11. (1)$p>1$ 时为$[-1,1]$，$0<p\leqslant1$ 时为$[-1,1)$； (2)$\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$； (3)$(-1,1)$；

(4)$a\geqslant b$ 时为$(-a,a)$，$a<b$ 时为$(-b,b)$.

12. (1)$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$； (2)$(1,+\infty)$.

13. (1)$S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$，$x\in[-1,1)$；

(2)$S(x)=e^{x^2}(2x^2+1)-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

14. (1)$2(1-\ln2)$； (2)$\dfrac{1}{2}(\cos1-\sin1)$.

15. (1) $\ln(a+x)=\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{na^n},-a<x\leqslant a$;

(2) $\dfrac{1}{1+x+x^2}=1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+\cdots-(x+x^4+x^7+\cdots+x^{3n+1}+\cdots)$，$|x|<1$;

(3)$\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$x\in[-1,1)$.

16. (1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{5\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right](x-3)^n,\ 1<x<5$;

(2) $f(x)=-\frac{1}{e}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{e(n+1)!}(x-1)^{n+1},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $f(x)=e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2},\ x\neq 1$.

17. $f(x)=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\ (5<x<15)$；在 $x=5,15$ 处级数收敛于 0.

18. 1.

19. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x\quad(-\infty<x<+\infty)$.

20. $b_n=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$，$S(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

21. 提示：将 $f(x)=\frac{x^2}{4}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数.

22. 提示：将 $f(x)=e^{2x}$，$x\in[0,\pi]$ 作偶延拓，再展开成 Fourier 级数.

习题 9.1 答案与提示

(A)

1. 略.

2. (1) 内点，$0<x^2+y^2<1$；外点，$x^2+y^2>1$；边界点，$(0,0)$ 以及 $x^2+y^2=1$；聚点，$x^2+y^2\leqslant 1$.

(2) 内点，$y<x^2$；外点，$y>x^2$；边界点，$y=x^2$；聚点，$y\leqslant x^2$.

(3) 内点，$2<\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}<4$；外点，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}<2$ 以及 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}>4$；

边界点，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=2$ 以及 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=4$；聚点，$2\leqslant\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\leqslant 4$.

(4) 内点与外点都是空集，平面 $\mathbf{R}^2$ 中所有点都是边界点和聚点.

3. 题 2 中(1)、(2)是开集；没有闭集；(1)、(2)是开区域；没有闭区域.

(B)

1. 设定点 $\boldsymbol{P}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbf{R}^n$，$\varepsilon>0$ 是某个定数. 凡是与点 $\boldsymbol{P}_0$ 的距离小于 ε 的那些点 $\boldsymbol{P}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 点集，称为 $\boldsymbol{P}_0$ 的 ε 邻域，记作 $O(\boldsymbol{P}_0,\varepsilon)=\{\boldsymbol{P}\mid\boldsymbol{P}\in\mathbf{R},\ \|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0\|\leqslant\varepsilon\}$.

习题 9.2 答案与提示

(A)

1. $(xy)^{x+y}$.

2. (1) $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\leqslant 1\}$；　(2) $\{(x,y)\mid x-y\geqslant -1\}$；　(3) $\{(x,y)\mid x+y<0\}$；