

$\iint_S (1-x^2-y^2) dS$, 求 $I(t)$ 在 $t > 0$ 上的最大值.

总习题 12

1. 计算下列第一型曲线积分.

(1) $\int_L xyz ds$. 其中 L 为曲线 $x=t, y=\frac{2\sqrt{2}t^3}{3}, z=\frac{1}{2}t^2$ 上相应于 t 从 0 变到 1

的一段弧;

(2) $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线;

(3) $\int_L |y| ds$, 其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$ 的弧.

(4) 设曲线 $C: x^2+xy+y^2=a^2$ 的长度为 L , 计算 $\int \frac{a \sin^x + b \sin^y}{\sin^x + \sin^y} ds$.

2. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内的那一部分面积.

3. 求平面 $x+y=1$ 上被坐标面与曲面 $z=xy$ 截下的在第一卦限部分的面积.

4. 求曲线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$, (1) 绕 x 轴; (2) 绕 y 轴; (3) 绕直线 $y=2a$ 旋转所成旋转曲面的面积, 其中 $a > 0$.

5. 求平面曲线 $x^2+(y-b)^2=a^2 (b \geq a)$ 绕 x 轴所构成的环(轮)面的面积.

6. 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部, 点 $p(x, y, z) \in \Sigma$, π 为 Σ 在点 p

处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 π 的距离, 求 $\iint_{\Sigma} \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$.

7. 计算第一型曲面积分 $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2}} dS$, 其中 $S: x^2+y^2+z^2=$

$a^2, a > 0$.



3. $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4.$

4. $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.$

5. (1) $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi})$; (2) $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

6. $I_{\max}(t) = I(1) = \frac{2}{15}[(8\sqrt{2}-7)\pi].$

总习题 12 答案与提示

1. (1) $\frac{16\sqrt{2}}{143}$; (2) $\frac{2}{3}\pi a^3$; (3) $2a^2(2-\sqrt{2})$; (4) $\frac{1}{2}(a+b)l$.

2. $\sqrt{2}\pi.$

3. $\frac{\sqrt{2}}{6}.$

4. (1) $\frac{64}{3}\pi a^2$; (2) $16\pi^2 a^2$; (3) $\frac{32}{3}\pi a^2$.

5. $4\pi^2 ab.$

6. $\frac{3\pi}{2}.$

7. $I = 4\pi a.$

习题 13.1 答案与提示

(A)

1. (1) $-\frac{56}{15}$; (2) $a^2\pi$; (3) $-\frac{\pi}{2}a^3$; (4) 0; (5) $\frac{1}{2}$; (6) 13.

2. (1) $\frac{34}{3}$; (2) 11; (3) 14; (4) $\frac{32}{3}.$

3. $\vec{F} = k\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (-kx, -ky) (k>0)$, 则 $W = \frac{k}{2}(a^2-b^2).$

4. 力的三个分力为 $P = -\frac{k}{z}\frac{x}{r}, Q = -\frac{k}{z}\frac{y}{r}, R = -\frac{k}{z}\frac{z}{r}, W = \frac{-k}{c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ln 2.$

(B)

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$; (2) -4.

2. 略.

3. $\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}.$

