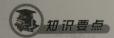
# 第一章 向量代数

### 第一节 向量及其线性运算

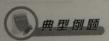
理解空间直角坐标系、向量的概念及其表示,掌握向量的线性运算.理解向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标的概念,掌握向量、单位向量、方向余弦的坐标表示法以及用坐标对向量进行线性运算.



1. 向量的定义、向量的模、向量的夹角、向量的平行、垂直等概念,向量的运算包含向量的加法,向量的数乘运算,以及向量平行的充分必要条件;

2. 空间直角坐标系的定义,向量的坐标分解式,利用坐标进行向量运算,及利用坐标 判断向量的平行;

3. 向量的模、方向角、方向余弦的定义与计算.



**例1** 求 x 轴上与点 A(4, 4, -7) 和点 B(-1, 8, 6) 等距离的点.

分析 本题主要涉及两个知识点:(1)坐标轴上点坐标表示;(2)空间上两点间的距离公式.

解 设 x 轴上点 P 的坐标为(x,0,0),依题意可得

$$|PA| = \sqrt{(x-4)^2 + 16 + 49}$$
  
 $|PB| = \sqrt{(x+1)^2 + 64 + 36}$ 

由|PA| = |PB|可解得x = -2,故该点的坐标为(-2,0,0).

**例 2** 设一向量与各坐标轴之间的夹角为  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , 其中  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $\gamma$ .

分析 本题主要利用向量的三个方向角之间的关系,即 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^3\gamma = 1$ .

解 因为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ,可知

$$\cos^2 \gamma = 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 1 - (\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$



2. 从点 A(2,-1,7)沿向量 a=8i+9j-12k 的方向取线段 AB, 其|AB| 长为 34, 求点 B 的坐标.

3. 已知向量 a 与三个坐标轴成相等的锐角,求 a 的方向余弦. 若 |a|=2,求 a.

4. 已知三点 A, B, C 的向径分别为  $r_1 = 2i + 4j - k$ ,  $r_2 = 3i + 7j + 3k$ ,  $r_3 = 4i + 10j + 7k$ . 证明 A, B, C 在同一直线上.

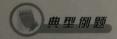
### 第二节 数量积、向量积、混合积

掌握向量的数量积、向量积定义及运算性质. 掌握数量积和向量积的坐标表示式. 掌握两个向量垂直、平行的条件.



1. 数量积的定义、性质及运算律,数量积的坐标表示,利用数量积求两向量的夹角,两个向量垂直、平行的条件;

2. 向量积的定义、性质及运算律,向量积的坐标表示.



**例1** 设 a,b,c 满足  $a\_b,(\hat{a,c}) = \frac{\pi}{3},(\hat{b,c}) = \frac{\pi}{6}, |a| = 2, |b| = |c| = 1, 求 |a+b+c|$ .

分析 本题主要运用数量积运算的性质和运算律.

解 因为

 $|a+b+c|^2 = (a+b+c) \cdot (a+b+c)$ 

$$= |\mathbf{a}|^{2} + |\mathbf{b}|^{2} + |\mathbf{c}|^{2} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$= |\mathbf{a}|^{2} + |\mathbf{b}|^{2} + |\mathbf{c}|^{2} + 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) +$$

$$2 |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{c}}) + 2|\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \cos(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{c}})$$

$$= 2^{2} + 1^{2} + 1^{2} + 4\cos(\frac{\pi}{2}) + 2\cos(\frac{\pi}{6}) + 4\cos(\frac{\pi}{3}) = 8 + \sqrt{3}$$

所以 $|a+b+c|=\sqrt{8+\sqrt{3}}$ .

例 2 已知 $\overrightarrow{OA} = i + 3k$ ,  $\overrightarrow{OB} = j + 3k$ , 求 $\triangle OAB$  的面积.

分析 主要利用向量积的定义以及  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA \times OB|$ .

解 因为

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3i - 3j + k$$

所以  $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}$ ,即  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} \sqrt{19}$ .

#### A类题

#### 1. 判断题

- $(1) a \cdot a \cdot a = a^3.$
- (2) 当  $a \neq 0$  时, $\frac{a}{a} = 1$ .
- $(3) a(a \cdot b) = a^2 b. \tag{}$
- $(4) (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2. \tag{}$
- $(5) (a+b) \times (a-b) = a \times a b \times b = 0.$
- (6) 若  $a\neq 0$ ,  $a\cdot b=a\cdot c$ , 则 b=c.

#### 2. 填空题

(1)  $\mathfrak{P}_{a=3i-2j-k,b=4i+2j+k,\mathbb{N}}$   $a \cdot b = \underline{\hspace{1cm}}, a \times b = \underline{\hspace{1cm}},$ 

### a,b的夹角余弦为\_\_\_\_\_

- (2)  $\mathfrak{B}|a|=2, |b|=2\sqrt{3}, |a+b|=2, \mathfrak{M}(a,b)=$
- (3) 已知  $a=(4,-5,3), b=(1,-4,z), |a+b|=|a-b|, 则 z=______.$
- (4) 已知 $(a \times b) \cdot c = 2$ ,则 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) =$
- (5) 设向量  $a = (\lambda, -3, 2)$  与  $b = (1, 2, -\lambda)$  相互垂直,则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

#### 3. 选择题

- (1)对任意向量 a 与 b, 下列表达式中错误的是( ).
- (A) |a| = |-a|

(B) |a| + |b| > |a+b|



## 6/工科数学分析练习与提高(二)▶

- (C)  $|a| \cdot |b| \geqslant |a \cdot b|$  (D)  $|a| \cdot |b| \geqslant |a \times b|$ .
- (2)下列叙述中不是两个向量 a 与 b 平行的充要条件的是( ).
- (A) a 与 b 的内积等于零 (B) a 与 b 的外积等于零
- (C) 对任意向量 c 有混合积[abc]=0 (D) a 与 b 的坐标对应成比例
- (3)设a和b为非零向量,若等式 $\frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}$ 成立,则a和b( ).

- (A) 相互垂直 (B) 相互平行 (C) a=b (D) |a|=|b|
- (4)如果向量 a 和 b 共线, c 和 b 共线,则 a 和 c ( ).
- (A) **a**=**c** (B) 一定共线
- (C) 一定不共线 (D) 既可能共线,也可能不共线
- (5)设非零向量 a 和 b 相互正交,  $\lambda$  为任意的非零实数,则  $|a+\lambda b|$  与 |a| 的大小关系

#### 是( ).

- (A)  $|a+\lambda b| \leq |a|$  (B)  $|a+\lambda b| \geq |a|$
- (C) 大小不定

- (D)不能比较
- 4. 求与向量 a=3i-j+k 平行,且满足方程  $a \cdot x=-22$  的向量 x.

5. 已知 |a|=1, |b|=4, |c|=5, 并且 a+b+c=0. 计算  $a\times b+b\times c+c\times a$ .

7. 求向量 u=2i+3j-k 在向量 v=-3i-j+k 上的投影及分向量.

8. 求同时垂直于 a=2i-j-k, b=i+2j-k 的单位向量.

B类题

1. 利用向量证明勾股定理.

2. 设 a 是非零向量,已知 b 在与 a 平行且正向与 a 一致的数轴上投影为 p,求极限:  $\lim_{x\to 0} \frac{|a+xb|-|a|}{x}$ .

3. 已知三点  $M_1(2,2,1), M_2(1,1,1), M_3(2,1,2),$ 

(1)求 $\angle M_1 M_2 M_3$ ;

(2)求与 $\overline{M_1M_2}$ , $\overline{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

- 4. 已知平行四边形以  $a = \{1, 2, -1\}, b = \{1, -2, 1\}$  为两边,
- (1)求它的边长和内角;
- (2)求它的两对角线的长和夹角.

5. 设 AD 为 $\triangle ABC$  中 BC 边上的高,记 $\overrightarrow{BA} = c$ , $\overrightarrow{BC} = a$ ,证明

$$S_{\triangle ABD} = \frac{\mid a \cdot c \mid \mid a \times c \mid}{2 \mid a \mid^2}$$

### C类题

1. 设  $a \perp b$ ,沿着 a 正方向将 b 绕 a 右旋  $\theta$  角得向量 c ,试用 a ,b 及  $\theta$  表示 c .

- (1) 求证  $\tan(a,b) = \frac{|a \times b|}{a \cdot b};$
- (2) 求证 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 \leqslant \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2$ ,并求等号成立的充分必要条件.

可得  $\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,由于  $\gamma \in [0,\pi]$ ,因此  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ 或  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ .

**例3** 设m=i+j, n=-2j+k,求以m,n为边的平行四边形的对角线长度.

分析 本题涉及向量的加减以及向量模的计算.

解 对角线的长分别为|m+n|,|m-n|,因为

$$m+n = i+j+(-2j+k) = i-j+k = (1,-1,1)$$
  
 $m-n = i+j-(-2j+k) = i+3j-k = (1,3,-1)$ 

所以

$$|m+n| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
  
 $|m-n| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ 

即平行四边形的边长分别为  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{11}$ .

#### A类题

- (1)若 A(1,-1,3), B(1,3,0), 则 AB 中点坐标为 , |AB| =
- (2)已知点 A(1, -6, 3)和点 B(6, 4, -2),点 P 在 Z 轴上使 |AP| = |BP|,则 P 点 的坐标为
- (3)若点 M 的坐标为(x,y,z),则向径OM用坐标可表示为\_\_\_\_
  - (4)平行于向量 a=(2,5,-6)的单位向量为\_\_\_\_\_.
- (5)已知两点 A(0,1,2)和 B(1,-1,0),则用坐标表示向量 $\overrightarrow{AB}=$ \_\_\_\_\_\_,向量 -3  $\overrightarrow{BA}$ 用坐标表示为\_\_\_\_\_
- (6)已知 $\triangle ABC$  三顶点的坐标分别为A(0,0,2),B(8,0,0),C(0,8,6),则边 BC上的中线长为
- (7)若  $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$  为向量 a 的方向角,则 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma =$ \_\_\_\_\_,  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma =$ \_\_\_\_\_.
- 2. 一边长为 $\alpha$ 的立方体放置在xOy面上,其下底面的中心在坐标原点,底面的顶点在x轴和y轴上,求它各顶点的坐标.

3. 求关于点(x,y,z) (1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点对称的点的坐标.

4. 已知 A(-1,2,-4), B(6,-2,t), E[AB]=9, 求; (1)t; (2) 线段 AB 的中点坐标.

6. 设已知两点 A(2,0,5)和  $B(1,\sqrt{2},6)$ ,计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

7. 求 y 轴上与点 A(-4,7,1) 和点 B(3,-2,5) 等距离的点.

### 

1. 向量 a=4i-4j+7k 的终点 B 的坐标为(2,-1,7),求它的始点 A 的坐标,并求 a 的模及其方向余弦.