(B)

1. 已知两非零不垂直的向量$(\widehat{a,b})$，$(\widehat{a,b})$表示向量 a 和向量 b 之间的夹角，

(1) 求证 $\tan(\widehat{a,b})=\dfrac{|a\times b|}{a\cdot b}$；

(2) 求证 $(a\times b)^2\leqslant a^2b^2$，且求等号成立的充要条件.

2. 已知向量 a,b,c 满足条件 $a+b+c=0$，证明 $a\times b=b\times c=c\times a$.

3. 设 C 是点 A 和点 B 连线以外的一点，证明三点 A,B,C 为共线的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},$$

其中 $\lambda+\mu=1$.

总习题 1

1. 填空题.

(1) 在 y 轴上与点 $A(1,-3,7)$，$B(5,7,-5)$ 等距离的点的坐标是________.

(2) 设向量的方向余弦满足 $\cos\alpha=\cos\beta=0$，则该向量与坐标轴的关系是________.

(3) 设 $a=i+2j+k$，$b=-i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$，则 $\cos(\widehat{a,2b})=$________.

(4) 设 a,b,c 为单位向量，且满足 $a+b+c=0$，则 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=$________.

(5) 已知 $(a\times b)\cdot c=2$，则 $[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$________.

(6) 设数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为 0，使 $\lambda_1a+\lambda_2b+\lambda_3c=0$，则 a,b,c 三个向量是________的.

(7) 设 $a=(2,-1,-2)$，$b=(1,1,z)$，若要使 $(\widehat{a,b})$ 最小，则 z 应为________.

(8) 设 $u=2a+b$，$v=\lambda a+b$，其中 $|a|=1$，$|b|=2$，且 $a\perp b$，若以 u,v 为邻边的平行四边形的面积为 6，则 $\lambda=$________.

2. 选择题(只有一个答案是正确的).

(1) 设 a,b 均为非零向量，则下列结论中正确的是(　).

(A) $a\times b=0$ 是 a 与 b 垂直的充要条件

(B) $a\cdot b=0$ 是 a 与 b 平行的充要条件

(C) a 与 b 的对应分量成比例是 a 与 b 平行的充要条件

(D) 若 $a=\lambda b$(λ 为实数)，则 $a\cdot b=0$

(2) 非零向量 a 与 b 垂直，则(　).

(A) $|a+b|=|a|+|b|$　　(B) $|a+b|\leqslant|a-b|$

(C) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

(3) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,若等式 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立,则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$( ).

(A) 相互垂直　　(B) 相互平行

(C) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　(D) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

(4) 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,且已知 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直,则必有( ).

(A) $\lambda=\mu$　　(B) $\lambda=-\mu$

(C) $\lambda=2\mu$　　(D) $\lambda=3\mu$

(5) 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$( ).

(A) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$　　(B) 一定共线

(C) 一定不共线　　(D) 既可能共线,也可能不共线

(6) 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 共面,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$( ).

(A) 一定不共面　　(B) 一定共面

(C) 是否共面取决于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}$　　(D) 是否共面取决于 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$

(7) 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3),\boldsymbol{c}=(1,-2,-7)$,若向量 $\boldsymbol{A}$ 满足:$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}=10$,则 $\boldsymbol{A}$ 的坐标为( ).

(A) $(0,3,2)$　　(B) $(11,7,1)$

(C) $(4,3,1)$　　(D) $(-7,-5,-1)$

(8) 设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相正交,λ 为任意的非零实数,则 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$ 的大小关系是( ).

(A) $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|$　　(B) $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

(C) 大小不定　　(D) 不能比较

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1),\boldsymbol{b}=(8,-4,1)$,求(1)$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影;(2)与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量;(3)$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

4. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1),M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

5. 在 xOy 平面上求向量 $\boldsymbol{\beta}$,使其垂直于 $\boldsymbol{\alpha}=5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,且与 $\boldsymbol{\alpha}$ 有相同的长度.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴成相等的锐角,求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 若 $|\boldsymbol{a}|=2$,求 $\boldsymbol{a}$.

7. 求同时垂直于 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

8. 已知平行四边形的两对角线向量为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$,而 $|\boldsymbol{m}|=1,|\boldsymbol{n}|=2$,向量 $\boldsymbol{m}$ 和向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\dfrac{\pi}{6}$,求此平行四边形面积.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,-2)$，$\boldsymbol{c}=(2,-2,1)$，求一单位向量 $\boldsymbol{e}$，使 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{c}$，且使向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}$ 共面.

10. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，已知 $\boldsymbol{b}$ 在与 $\boldsymbol{a}$ 平行且正向与 $\boldsymbol{a}$ 一致的数轴上投影为 p，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

11. 已知不在一个平面上的四点：$A(0,0,0)$、$B(2,-3,1)$、$C(1,-1,3)$、$D(1,-2,0)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积.

12. 设 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{b}$ 绕 $\boldsymbol{a}$ 右旋 θ 角得到向量 $\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 及 θ 表示向量 $\boldsymbol{c}$.