$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-i\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-\tau}^{\tau} E\mathrm{e}^{-i\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{E}{n\pi}\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi\tau}{l}} - \mathrm{e}^{-i\frac{n\pi\tau}{l}}) = \frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{l} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)$ 是逐段连续的函数，满足收敛定理的条件，因此有

$$f(x) = \frac{E\tau}{l} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{E}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\tau}{l}\right)\mathrm{e}^{i\frac{n\pi x}{l}} \quad (-l \leqslant x \leqslant l, x \neq -\tau, \tau). \tag{8.76}$$

当 $x=-\tau$ 及 $x=\tau$ 时，上述级数收敛于 $\frac{E}{2}$.

习题 8.9

1. 在例 8.48 所得到的式 (8.76) 中，取 $\tau=\frac{l}{3}$，试将复数形式的 Fourier 级数 (8.76) 的实数形式写出来.

2. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x)=x$，试将 $f(x)$ 展开为复数形式的 Fourier 级数.

总习题 8

1. 填空题.

(1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为__________.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 A，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛于__________.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和序列为 $S_n=\frac{2n}{n+1}$，则 $a_n=$__________，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$__________.

(4) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$ 收敛，则 a 的取值范围为__________.

(5) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ 在 p __________时收敛.

2. 填空题.

(1) 设有级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$，则该级数的收敛半径等于__________.

(2) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

(3) 设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的Fourier级数在 $x=1$ 处收敛于________.

(4) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2 \quad (-\pi<x<\pi)$ 的Fourier级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 b_3 的值为________.

(5) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n4^n}$ 的收敛域为________.

3. 选择题(只有一个答案是正确的).

(1) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于(　).

(A) 3　(B) 7　(C) 8　(D) 9

(2) 设 α 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$(　).

(A) 绝对收敛　(B) 发散　(C) 条件收敛　(D) 收敛性与 α 的取值有关

(3) 设 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是(　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

(4) 下列各选项中正确的是(　).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $a_n>\frac{1}{n}$

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $a_n\geqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛

4. 选择题(只有一个答案是正确的).

(1)设 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x\quad(-\infty<x<+\infty)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$. 则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于（ ）.

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{1}{4}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{2}$

(2)设常数 $p>0$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^p}$ 在其收敛区间的右端点处是（ ）.

(A)条件收敛　(B)绝对收敛

(C)当 $0<p\leqslant1$ 时为条件收敛，当 $p>1$ 时为绝对收敛

(D)当 $0<p\leqslant1$ 时为绝对收敛，当 $p>1$ 时为条件收敛

(3)幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}x^n$ 的收敛域为（ ）.

(A) $(-1,1)$　(B) $[-1,1]$　(C) $(-1,1]$　(D) $[-1,1)$

(4)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n+1}{n!}x^{3n}$ 的和函数为（ ）.

(A) xe^{x^3}　(B) $(1+3x^3)e^{x^3}$　(C) $3x^3e^{x^3}$　(D) $(2+3x^3)e^{x^3}$

5. 判定下列级数的敛散性、绝对收敛性和条件收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$（常数 $\alpha>0$）；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}(a>0)$；

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$.

6. 已知 n 充分大时，且 $a_n>0,b_n>0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，求证：

(1)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；　(2)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

7. 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内连续，且 $f(0)=1,f''(0)=2$. 试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛.

8. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

9. 设 $a_n > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$b_n = 1 - \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

10. 设正数数列 $\{x_n\}$ 单调上升且有界，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

11. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^p}\quad (p>0)$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}\quad (a>0, b>0)$.

12. 求下列函数项级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

13. 求下列幂级数的和函数，并指出其收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}x^{2n}$.

14. 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

15. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域.

(1) $\ln(a+x)\quad (a>0)$；　(2) $\frac{1}{1+x+x^2}$；　(3) $\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

16. 将下列函数在指定点展开成幂级数.

(1) $f(x)=\frac{1}{2x^2+x-3}$，$x_0=3$；　(2) $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$，$x_0=1$；

(3) $f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-1}\right)$，$x_0=1$.

17. 试将函数 $f(x)=10-x\,(5\leqslant x\leqslant 15)$ 展开成以 10 为周期的 Fourier 级数.

18. 试利用 $\frac{\pi-x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上的正弦级数，对于 $-\pi\leqslant\alpha<0<\beta\leqslant\pi$，求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right]\mathrm{d}x.$$

19. 将函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 展开为 Fourier 级数.

20. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\ (-\pi<x<\pi)$，且 $\frac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\ (0<x<\pi)$.

试求 b_n 及 $S(x)$.

21. 证明：在区间$[-\pi,\pi]$上等式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$成立，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

22. 证明：当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，有 $e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2\pi}-1}{4+n^2}\cos nx$.