第二章　多元函数的微分学

第一节　多元函数的极限与连续

了解多元函数的基本概念、多元函数极限和连续的基本问题，会判断多元函数的极限是否存在，能进行简单的多元函数的极限运算，会判定多元函数特别是二元函数的连续性.

知识要点

1. 多元函数的定义、定义域及对应规律；
2. 多元函数判断极限不存在及求极限的方法；
3. 多元函数的连续性及其性质，熟练掌握二元函数的连续和间断的判别.

典型例题

例 1　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　令　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta(r>0;0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

则$(x,y)\to(0,0)$等价于 $r\to 0$.

$$0\leqslant\left|\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{r^2\mid(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\mid}{r}$$
$$=r\mid(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\mid\leqslant 2r$$

故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

例 2　说明极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$不存在.

解　当点 $P(x,y)$沿曲线 $y=kx^3$ 趋于点$(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^3}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^6}{(k^2+1)x^6}=\frac{k}{k^2+1}.$$

显然，此时的极限值随 k 的变化而变化，因此，函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处的极限

存在.

本例小结：证明判断二元函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(0,0)$ 时二重极限不存在的方法：

1）当动点 (x,y) 沿着直线 $y=mx$ 而趋于定点 $(0,0)$ 时，若 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} f(x,y)$ 值与 m 有关，则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

2）令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\lim\limits_{r\to0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 与 θ 有关，则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

注意：若 $\lim\limits_{r\to0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 与 θ 无关，则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在.

3）找自变量的两种变化趋势，使两种趋势下极限不同.

4）证明两个累次极限存在但不相等.

例如，当动点 (x,y) 沿着直线 $y=mx$ 趋于定点 $(0,0)$ 时，若 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} f(x,y)$ 值与 m 无关，能说明二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在吗？

答：不能，因为所谓二元函数存在极限，是指 (x,y) 以任何方式趋于 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近于同一个常数，动点 (x,y) 沿着直线 $y=mx$ 趋于定点 $(0,0)$ 这只是一种方式，还有其他方式，比如上例中 $y=kx^3$.

例 3　讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性.

解　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^\alpha\cos^\alpha\theta}{r^2}$

当 $\alpha>2$，根据无穷小量乘有界变量为无穷小量知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

当 $\alpha=2$，由极限值与 θ 有关，二重极限不存在，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续；

当 $\alpha<2$，由 $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^\alpha\cos^\alpha\theta}{r^2}$ 不存在，则二重极限不存在，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

A 类题

1. 填空题

(1) 设函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$，则 $f(x+y,x-y)=$____________.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(xy+x-y)=$____________.

(3) 若 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，则 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=$____________.

2. 选择题

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 间断，则(　　).

(A)函数在点 P_0 处一定无定义

(B)函数在点 P_0 处极限一定不存在

(C)函数在点 P_0 处可能有定义，也可能有极限

(D)函数在点 P_0 处有定义，也有极限，但极限值不等于该点的函数值

(2)设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$(　　).

(A)处处连续　　(B) 处处有极限，但不连续

(C)仅在(0,0)点连续　　(D) 除(0,0)点外处处连续

(3)函数 $z=\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为(　　).

(A)空集　　(B) 圆域　　(C) 圆周　　(D) 一个点

3. 求下列二元函数的定义域，并绘出定义域的图形:

(1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$；

(2) $z=\ln(x+y)$；

(3) $z=\dfrac{1}{\ln(x+y)}$；

(4) $z=\ln(xy-1)$.

4. 若 $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0)$，求 $f(x)$.

B 类题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}$.

2. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^4}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$.

第二节　偏导数和全微分

了解偏导数的概念与计算，了解多元函数全微分的概念，掌握二元函数可微性与连续性、偏导数存在性的关系.

知识要点

1. 偏导数的定义和计算；
2. 二元函数偏导数的几何意义；
3. 二元函数全微分的定义；
4. 二元函数可微的必要条件和充分条件；
5. 二元函数可微性与连续性、偏导数存在的关系.

典型例题

例 1　设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，证明 $f_x(0,0)$不存在，$f_y(0,0)$存在.

证明　$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}$，因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x}-1}{x-0}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x-0}=-1$，故$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x-0}$，所以 $f_x(0,0)$ 不存在.

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sqrt{0^2+y^4}}-1}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$

所以 $f_y(0,0)$存在.

例 2　设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$，求 $2f_x(0,0)+f_y(0,0)$.

分析　为了利用偏导数的定义求出 $f_x(0,0)$和 $f_y(0,0)$，需要写出函数的表达式，为此要想到利用结论：$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A\Leftrightarrow f(P)=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{P\to P_0}\alpha=0$.

解　因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$，

故 $\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2+\alpha$，　其中 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha=0$，

从而 $f(x,y)=-3x+4y+2(x^2+y^2)+\alpha(x^2+y^2)$，

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x+2x^2+\alpha x^2-0}{x}=-3$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{4y+2y^2+\alpha(y^2)-0}{y}=4$$

故 $2f_x(0,0)+f_y(0,0)=-6+4=2$.

例 3　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在,但不可微.

证明　因为 $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$,且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$,

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$,即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$,

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在.

因为
$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

A 类题

1. 填空题

(1)设 $z=\sin(3x-y)+y$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=$__________.

(2) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微的__________条件,$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微是函数在该点的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在的__________条件.

(3)若函数 $z=e^{xy}$,则 $dz=$__________.

(4)函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分为__________.

2. 选择题

(1)设 $f(x,y)$ 是一二元函数,(x_0,y_0) 是其定义域内的一点,则下列命题中一定正确的是(　　).

(A)若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可导

(B)若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数都存在,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

(C)若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数都存在,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微

(D)若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微,则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

(2)二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足关系(　　).

(A)可微(指全微分存在)$\Leftrightarrow$ 可导(指偏导数存在)$\Rightarrow$连续

(B)可微⇒可导⇒连续

(C)可微⇒可导或可微⇒连续，但可导不一定连续

(D)可导⇒连续，但可导不一定可微

(3)若$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，则 $f(x,y)$在(x_0,y_0)是(　　).

(A)连续但不可微　　(B)连续但不一定可微

(C)可微但不一定连续　　(D)不一定可微也不一定连续

(4)设函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不连续，则 $f(x,y)$在该点处(　　).

(A)必无定义　　(B)极限必不存在

(C)偏导数必不存在　　(D)全微分必不存在

3. 求下列函数的一阶偏导数：

(1) $z=x^2\ln(x^2+y^2)$；

(2) $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x\ln(xy)$.

4. 计算函数 $u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

5. 设 $u = x^{z/y}(x > 0, x \neq 1, y \neq 0)$，求证：$\frac{yx}{z}u_x + yu_y + zu_z = u$.

B 类题

证明 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点(0,0)处可微.

C 类题

已知 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 问

(1) $f(x,y)$ 在(0,0)处是否连续？

(2) $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 是否存在？

(3) f 在(0,0)处是否可微？

第三节　复合函数的微分法

掌握复合函数的求导法，会求复合函数的二阶偏导数.

知识要点

1. 多元复合函数求偏导的链式法则；
2. 一阶全微分形式的不变性；
3. 高阶偏导数.

典型例题

例 1　设 $z=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$($a,b$ 为常数)，证明$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解　先化简函数 $z=\dfrac{1}{2}\ln[(x-a)^2+(y-b)^2]$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},$$

所以　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

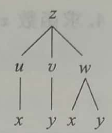
例 2　设 $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot\cos x+f'_3\cdot e^{x+y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$=[f''_{12}\cdot(-\sin y)+f''_{13}\cdot e^{x+y}]\cos x+e^{x+y}f'_3+[f''_{32}\cdot(-\sin y)+f''_{33}\cdot e^{x+y}]e^{x+y}$$

1)明确函数的结构(树形图)



这里 $u=\sin x, v=\cos y, w=e^{x+y}$,那么复合之后 z 是关于 x, y 的二元函数. 根据结构图,可以知道:对 x 的导数,有几条线通到"树梢"上的 x,结果中就应该有几项,而每一项都是一条线上的函数对变量的导数或偏导数的乘积. 简单的说就是,"按线相乘,分线相加".

2) f'_1, f'_3 是 $f'_1(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, $f'_3(\sin x, \cos y, e^{x+y})$ 的简写形式,它们与 z 的结构相同,仍然是 $\sin x, \cos y, e^{x+y}$ 的函数. 所以 f'_1 对 y 求导数为

$$\frac{\partial f'_1}{\partial y}=f''_{12}\cdot(-\sin y)+f''_{13}\cdot e^{x+y}$$

所以求导过程中要始终理清函数结构,确保运算不重、不漏.

3) f 具有二阶连续偏导数,从而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 连续,所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例 3　设 $z=e^u\sin v+x^2, u=x+y, v=xy$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=e^u\sin v+e^u\cos v\cdot y+2x$$

$$=e^{x+y}[\sin(xy)+y\cos(xy)]+2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v+xe^u\cos v=e^{x+y}[\sin(xy)+x\cos(xy)]$$

A 类题

1. 填空题

(1) 设 $z=\sin\dfrac{x}{y}$,而 $x=e^t, y=t^2$. 求全导数 $\dfrac{dz}{dt}=$____________.

(2) 设 $z=\cos(x^2-2y)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

(3) 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}, x=u+v, y=u-v$,则 $z_u+z_v=$____________.

2. 设 $z=f(\sqrt{xy}, \dfrac{x}{y})$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz.

3. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数,而 $u=\eta-\xi, v=\zeta-\xi, w=\xi-\eta$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial \xi}, \dfrac{\partial z}{\partial \eta}, \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}$.

4. 求函数 $z=e^{xy}\sin(x+y)+e^{x+y}\cos xy$ 的偏导数.

5. 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

6. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=\sin(x+2y)$；　　(2) $z=\ln(xy)$.

7. 设 $z=e^u\sin v$，$u=xy$，$v=x+y$，利用全微分形式不变性求全微分.

B 类题

设 $e^z-xyz=xy$，利用微分形势不变性求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial x}{\partial y}$.

C 类题

设二元函数 $u(x,y)$ 具有二阶偏导数，且 $u(x,y)\neq 0$，证明 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充要条件为 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$.

第四节　方向导数与梯度

了解方向导数和梯度的定义、计算方法和它们之间的关系.

知识要点

1. 方向导数的定义和计算；
2. 梯度的定义和计算；
3. 函数在某点处的梯度与函数在该点处的方向导数之间的关系.

典型例题

例 1 求函数 $u=3x^2+2y^2-z^2$ 在点 $P(1,2,-1)$ 处分别沿什么方向时方向导数取得最大值和最小值？并求出其最大值和最小值.

解 该函数在点 P 处的梯度

$$\operatorname{grad} u|_P=(6x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k})|_P=6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

由梯度的定义可知，函数沿向量 $(6,8,2)$ 的方向，方向导数取得最大值：

$$|\operatorname{grad} u|_P=\sqrt{6^2+8^2+2^2}=2\sqrt{26}$$

而沿梯度 $\operatorname{grad} u|_P$ 的反方向 $(-6,-8,-2)$，方向导数取得最小值：

$$-|\operatorname{grad} u|_P=-2\sqrt{26}$$

例 2 求 a,b,c 的值，使函数 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿 z 轴正方向的方向导数有最大值 64.

解 $f_x(x,y,z)=ay^2+3cx^2z^2$，$f_y(x,y,z)=2axy+bz$，$f_z(x,y,z)=by+2cx^3z$，$f_x(1,2,-1)=4a+3c$，$f_y(1,2,-1)=4a-b$，$f_z(1,2,-1)=2b-2c$，

设 $\boldsymbol{l}=(1,0,0)$，则 $\cos\alpha=1$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=0$，

故 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2,-1)}=f_x(1,2,-1)\cos\alpha+f_y(1,2,-1)\cos\beta+f_z(1,2,-1)\cos\gamma=4a+3c$，

由方向导数与梯度的关系知，当 $\boldsymbol{l}=(1,0,0)$ 的方向与梯度 $\operatorname{grad}f(1,2,-1)=(4a+3c,4a-b,2b-2c)$ 的方向一致时，方向导数达到最大值.

据题意有 $\begin{cases}4a+3c=64\\4a-b=0\\2b-2c=0\end{cases}$，故 $a=4$，$b=c=16$.

注：方向导数沿梯度的方向达到最大值，且其最大值为梯度的模.

例 3 求函数 $z=\displaystyle\int_0^{xy^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ 在点 $(1,-1)$ 处沿 $\boldsymbol{a}=\{-1,1\}$ 方向的方向导数.

解 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1)}=\left.\dfrac{y^2}{1+x^4y^8}\right|_{(1,-1)}=\dfrac{1}{2}$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-1)}=\left.\dfrac{2xy}{1+x^4y^8}\right|_{(1,-1)}=-1$

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial a}=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+(-1)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

A 类题

1. 填空题

(1)函数 $f(x,y,z)=\sqrt{3+x^2+y^2+z^2}$ 在点(1,−1,2)处的梯度是____________.

(2)函数 $z=x^2-xy-2y^2$ 在点(1,2)沿着与 x 轴正向构成$\frac{\pi}{3}$角的方向导数是______.

(3)函数 $z=ye^{2x}$ 在点 $P(0,1)$ 处沿着从点 $P(0,1)$ 到点 $Q(-1,2)$ 的方向的方向导数是____________.

2. 选择题

(1)下列命题中正确的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$与$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 等价

(B)函数在点(x_0,y_0)连续,则极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$必定存在

(C)$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$与$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$都存在,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)必连续

(D)$f(x,y)$在 p_0 点沿任何方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数存在,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)必连续

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=0,\end{cases}$ 则在点(0,0)处(　　).

(A)不连续,偏导数存在且可微

(B)连续,偏导数存在,但不可微

(C)沿任何方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$的方向导数存在,且可微

(D)不连续,但沿任何方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$的方向导数存在,并且不可微

(3)若函数 $f(x,y)$在点(x,y)的某个邻域内具有连续的偏导数,则函数在该点沿 $\boldsymbol{e}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$(其中 φ 为 x 轴到 $\boldsymbol{e}$ 的转角)的方向导数为(　　).

(A)$|\mathrm{grad}f(x,y)||\mathbf{e}|$　　(B) $\mathrm{grad}f(x,y)\cdot\boldsymbol{e}$

(C)$|\mathrm{grad}f(x,y)|\cos\varphi$　　(D)$|\mathrm{grad}f(x,y)|\sin\varphi$

3. 求函数 $u=\arctan r$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点(1,1,1)处沿 $\boldsymbol{a}=\{1,0,-1\}$方向的方向导数.

4. 求函数 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿 M_0 到坐标原点 O 方向 $\overrightarrow{M_0O}$ 的方向导数.

5. 求函数 $u=x^{y^z}$ 在点 $(1,2,-1)$ 处沿 $\boldsymbol{a}=\{1,2,-2\}$ 方向的方向导数.

6. 求函数 $u=y(x^2+z^3)$ 在点 $(2,1,1)$ 处沿该点向径方向的方向导数.

B 类题

1. 设函数 $z=\ln(x^2+y^2)$，求 z 在点 $(1,1)$ 沿与过这点的等高线垂直方向的方向导数.

2. 求函数 $u=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ 在点 $P_0(1,-2,2)$ 处沿 $\boldsymbol{r}^0$ 方向的方向导数，其中 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$\boldsymbol{a}$ 为常向量，$\boldsymbol{r}^0=\overline{OP_0}$.

3. 求函数 $u=xy+3yz-zx$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ 平行方向的方向导数.