# 参考答案

## 第一章 无穷级数

### 第一节 数项级数的收敛与发散

**A 类题**

**1.** 略. **2.** (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 发散. **3.** 提示:反证.
**4.** 略.

**B 类题**

**1.** 略. **2.** 略.

### 第二节 正项级数

**A 类题**

**1.** 略. **2.** (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛. **3.** (1)收敛; (2) 收敛;
(3) 收敛; (4) 收敛; (5) $a>1$ 时收敛, $1\geqslant a>0$ 时发散; (6) 发散.
**4.** (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 发散.
**5.** (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛.

**B 类题**

**1.** (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 发散; (7) 收敛; (8) 收敛;
(9) $|a|\neq 1$ 时收敛, $|a|=1$ 时发散; (10) $b<a$ 时收敛, $b>a$ 时发散, $b=a$ 时不能确定.
**2.** 略. **3.** 略. **4.** 略. **5.** 略.

### 第三节 一般级数

**A 类题**

**1.** 略. **2.** (1) ×; (2) ×; (3) √; (4) ×; (5) √; (6) ×; (7) ×; (8) ×.
**3.** (1) 条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 绝对收敛; (4) 条件收敛; (5) 条件收敛;
(6) 条件收敛. **4.** 略. **5.** 略. **6.** 条件收敛.

**B 类题**

**1.** 略. **2.** 略.

### 第四节 函数项级数的基本概念

**A 类题**

**1.** 略.
**2.** 提示: (1) $\left|\dfrac{\cos nx}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$; (2) $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$; (3) $\left|\dfrac{x^n}{n^{3/2}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{3/2}}$;
(4) $\left|\dfrac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$.

3. (1) 利用莱布尼茨定理中的余项估计，$|r_n(x)|\leqslant\frac{1}{n^2}$；(2) 该级数不收敛.

**B 类题**

1. 和函数 $S(x)=\frac{x^2}{e^x-1}$，估计利用 $|S_n(x)-S(x)|$.　　2. 略.

# 第二章　多元函数的微分学

## 第一节　多元函数的极限与连续

**A 类题**

1. (1) $\frac{x^2-y^2}{2x}$；(2) 0；(3) $\frac{xy}{x^2+y^2}$.　　2. (1) C；(2) A；(3) C.　　3. 略.

4. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

**B 类题**

1. (1) $\frac{1}{2}$；(2) 0；(3) 1.　　2. 略.

## 第二节　偏导数和全微分

**A 类题**

1. (1) 3cos5；(2) 必要;充分；(3) $ye^{xy}\mathrm{d}x+xe^{xy}\mathrm{d}y$；(4) $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

2. (1) D；(2) C；(3) D；(4) D.

3. (1) $z_x=2x\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^3}{x^2+y^2}$，　$z_y=\frac{2yx^2}{x^2+y^2}$；

(2) $z_x=\frac{x-y}{x^2+y^2}$，　$z_y=\frac{x+y}{x^2+y^2}$；

(3) $z_x=y^x\ln y\cdot\ln xy+\frac{1}{x}y^x$，　$z_y=xy^{x-1}\ln(xy)+\frac{1}{y}y^x$.

4. $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)\mathrm{d}y+ye^{yz}\mathrm{d}z$.　　5. 略.

**B 类题**

略.

**C 类题**

略.

## 第三节　复合函数的微分化

**A 类题**

1. (1) $\frac{(t-2)e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$；(2) $4x\cos(x^2-2y)$；(3) $\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

2. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v};$$

**B 类题**

**1.** $5x^2-3y^2=1$.　**2.** $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$.　**3.** $5x^2-4x-16y^2-16z^2+4=0$.

# 第二章　无穷级数

## 第一节　幂级数及其收敛性

**A 类题**

**1.** 略.

**2.** (1) $R=-1,(-1,1)$；(2) $R=\infty,(-\infty,+\infty)$；(3) $R=1,[-1,1)$；(4) $R=3,[0,6)$；

(5) $R=4,(-4,4)$；(6) $R=\infty,(-\infty,+\infty)$；(7) $R=\frac{1}{3},\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$；(8) $R=5,(-2,8)$；

(9) $R=1,[4,6)$；(10) $R=\mathrm{e},(-\mathrm{e},\mathrm{e})$；(11) $R=\frac{1}{\sqrt{2}},\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

**3.** (1) $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$,收敛域为$(-1,1)$；

(2) $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<0,0<x<2\\ \frac{1}{2},x=0\end{cases}$,收敛域为$[-2,2)$；

(3) $S(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x),|x|<1,x\neq0,S(0)=0$,收敛域为$(-1,1)$；

(4) $S(x)=(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}$,收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

**4.** $R=3$.

**B 类题**

**1.** (1) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；(2) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$；(3) $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$.

**2.** (1) 当$|x|>3$或$x=3$时级数发散；(2) 当$x<-8$或$x>-2$时级数发散.

**3.** (1) $\frac{3}{4}$；(2) $-\frac{8}{27}$；(3) $\frac{\pi}{8}$；(4) $\frac{22}{27}$.　**4.** 略.

## 第二节　Taylor 级数

**A 类题**

**1.** 略.

**2.** (1) $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-2)^n]x^n,|x|<\frac{1}{2}$；

(2) $\sin^2x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{2(2n)!},-\infty<x<+\infty$；

(3) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$；

(4) $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x)^{2n+1}}{(2n+1)n!},-\infty<x<+\infty$.

3. (1) $\dfrac{1}{x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n,\ 0<x<2$；

(2) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{4^{n-1}}\right)(x-2)^n,\ 1<x<3$；

(3) $\ln\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^{2n}}{n},\ -2\leqslant x\leqslant 0$；

(4) $\cos x=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{(2n)!}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n}+\dfrac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],\ -\infty<x<+\infty$.

B 类题

$\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n+2}}{(2n+1)4^{2n+1}},\ |x|\leqslant 2$.

## 第三节　周期函数的 Fourier 级数

A 类题

1. 略.

2. (1) $f(x)=-\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left\{\dfrac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\dfrac{1}{n}[1-2(-1)^n]\sin x\right\},(-\infty<x<+\infty,$

$x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，当 $x=2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数收敛于 $-\dfrac{\pi}{2}$，

当 $x=(2k+1)\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数收敛于 $\pi$；

(2) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},\ -\pi<x<\pi$；

(3) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx,\ -\infty<x<+\infty$；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{2a\pi}(1-e^{a\pi})+\dfrac{a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{a^2+n^2}\cos nx+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n[(-1)^n-1]}{a^2+n^2}\sin nx,(-\infty<x<$

$+\infty,x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，当 $x=2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$，当

$x=(2k+1)\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数收敛于 $\dfrac{1}{2}e^{-a\pi}$；

(5) $\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n},\ 0<x<2\pi$；

(6) $f(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx,(-\pi<x<\pi)$，当 $x=\pm\pi$ 时，级数收敛于 0.

3. $S(\pm\pi)=1-\pi+\pi^2,\ S(0)=\dfrac{1}{2}$.

B 类题

1. (1) $a_n=\alpha_n(n=0,1,2,\cdots),\ b_n=-\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$；

(2) $a_n=-\alpha_n(n=0,1,2,\cdots),b_n=\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$.

2. 略.

### 第四节 任意区间上的 Fourier 级数

A 类题

1. (1) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$, $(-2\leqslant x\leqslant 2, x\neq 0)$，当 $x=0$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}$；

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{6}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^n\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]$ $(x\neq 3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$；

(3) $f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2}\sin 2\pi x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$；

(4) $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 3n\pi x}{n^2}$, $0\leqslant x\leqslant 3$.

2. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $0<x\leqslant\pi$.

3. 提示：将 $f(x)=\frac{\pi}{4}$ 在 $(0,\pi)$ 内展开成正弦级数.

4. $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$, $0<x<2$.

5. $x=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$；　$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

6. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$, $\left(0\leqslant x<\pi, x\neq\frac{\pi}{2}\right)$，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

7. $f(x)=2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$, $1<x<3$.

B 类题

略.

## 第三章 多元函数的微分学

### 第一节 隐函数微分法

A 类题

1. (1) $\frac{y^2-e^x}{\cos y}$；　(2) 略.

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-x)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-x)+x\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}=\frac{(2-x)^2+x^2}{(2-z)^3}$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.

4. $z_x=z_y=-1, z_{xx}=z_{xy}=z_{yy}=0$.

B 类题

1. 略.　2. 略.