第四章　第二型曲线积分和曲面积分

第一节　第二型曲线积分

理解第二型曲线积分的概念，了解其性质，计算第二型曲线积分并会用第二型曲线积分表达并计算一些几何量和物理量.

知识要点

1. 第二型曲线积分的概念与性质，以及积分存在的条件；
2. 第二型曲线积分的计算法.

典型例题

例 1　计算曲线积分 $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向看去，L 取顺时针方向.

解　这里 L 由一般方程给出，首先要将一般方程化为参数方程，注意到 $x^2+y^2=1$，因此可以令 $x=\cos t, y=\sin t$，再由 $z=2-x+y$ 得 $z=2-\cos t+\sin t$，t 从 2π 变到 0. 于是

$$\text{原式}=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-2-\sin t)\cos t+(\cos t-\sin t)(\sin t+\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\sin t+2\cos t-2\cos 2t-1)\mathrm{d}t=-2\pi.$$

例 2　计算积分 $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行).

分析　可以考虑用参数方程求解.

解　L 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π，于是

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{a(\cos t+\sin t)(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)a\cos t}{a^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -2\pi.$$

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)质点在变力 F 的作用下，沿曲线 L 移动所做的功如何表示？

(2)第二型曲线积分的定义是什么？它与第一型曲线积分的联系？

(3)第二型曲线积分的线性性质和可加性指的是什么？

(4)计算第二型曲线积分的基本方法是什么？

2. 计算 $\int_L (xy-1)\,dx + x^2 y\,dy$，其中 L 分别为由点 $A(1,0)$ 到 $B(0,2)$ 的下列曲线：

(1) 线段 $2x+y=2$；

(2) 抛物线 $4x+y^2=4$；

(3)椭圆弧 $4x^2+y^2=4$.

3. $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$,其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$,$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 沿 t 增加方向的一段.

4. $\oint_L \dfrac{-x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$,且依逆时针方向.

5. 计算 $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$,其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$,$y=a(-\cos t)$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=2\pi$ 的一段弧.

6. $\oint_L y\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$ 其中 L 为 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 x 轴所围的闭曲线,且依顺时针方向.

B 类题

1. 证明曲线积分的估计公式 $\left|\int_{AB} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right| \leqslant LM$，其中 L 为 AB 的弧长，$M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$.

2. 将下列第二型曲线积分化为第一型曲线积分.

(1) $\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y^2=x$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧段；

(2) $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相对应 t 从 0 到 1 的曲线弧段.

3. 计算 $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 由原点到 $A(1,1)$ 上的一段弧.

C类题

1. 设 O 为原点,$A(3,-6,0)$,$B(-2,4,5)$,计算 $\int_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}x + yz^2\mathrm{d}y - zx^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 为:

(1) 直线段 $\overline{OB}$;　(2)圆弧 $\overset{\frown}{AB}$,其方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=45 \\ 2x+y=0 \end{cases}$.

2. 在变力 $F=\{yz,zx,xy\}$ 的作用下,质点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\gamma)$. 问当 ξ,η,γ 取何值时力 F 所做功最大?

第二节　格林公式

掌握格林公式的条件,结论及应用.

知识要点

掌握格林公式的条件,结论及应用.

典型例题

例 1　计算 $I=\int_L [\mathrm{e}^x\sin y - b(x+y)]\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - ax)\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.

分析　本题若将 L 的显式方程或参数方程代入积分表达式直接计算,都难以进行,故考虑用格林公式间接计算.

解　$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y-a$，　$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-b$，　$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=b-a$，

故化为二重积分计算较简便，为此添加辅助线段$\overline{OA}$，$\overline{OA}$与 L 构成闭曲线，它所围的区域记作 D，则有

$$I=\left(\oint_{\overline{OA}+L}-\int_{\overline{OA}}\right)[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=I_1-I_2$$

由格林公式

$$I_1=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)\cdot\frac{\pi a^2}{2}$$

由于$\overline{OA}$在 x 轴上，$y=0$，$\mathrm{d}y=0$，故

$$I_2=\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x=-2a^2b$$

于是 $I=I_1-I_2=\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)什么是单连通区域和复连通区域？其区域边界曲线的正向如何规定的？

(2)格林公式成立的条件是什么？

(3)运用格林公式计算第二型曲线积分应注意哪些问题？

2. 用两种方法(直接法和格林公式法)计算曲线积分$\oint_L (x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中$L$是以$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$和$C(0,2)$为顶点的正方形的正向边界.

3. $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$，其中$m$为常数，$L$是摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$上由点$(0,0)$到点$(\pi a,2a)$的一段弧.

4. $\oint_L \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}+x^2\right)\mathrm{d}y$，其中$L$由$x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$，$x=\sqrt{3}y$，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$正向所围成.

5. 利用曲线积分求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$；

(2)圆 $x^2+y^2=2ax$.

B 类题

1. 证明:若 L 为平面上封闭曲线,l 为任意方向向量,则 $\oint_L \cos(\widehat{\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}s=0$,其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲线 L 的外法线方向.

2. 求 $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$,其中 L 为自原点到点 $A(a,0)$ 的半圆周 $y=\sqrt{ax-x^2}$,$a>0$.

3. 计算 $I=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,$L$ 为正向圆周 $x^2+(y-1)^2=R^2(R\neq 1)$(提示:需分别讨论 $0<R<1$,$R>1$ 的情形).

第三节　平面曲线积分与路径无关的条件、保守场

理解并会用平面曲线积分与路径无关的条件，会判定 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是否为全微分，并会求出 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

知识要点

1. 平面上曲线积分与路径无关的条件；$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某个二元函数的全微分的充要条件；

2. 二元函数的全微分求解.

典型例题

例　利用格林公式计算曲线积分：$\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0,0)到(1,1)的一段弧.

解　由于 $P=(x^2-y)$，$Q=-(x+\sin^2 y)$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

故所给曲线积分与路径无关，将原积分路径 L 改变为从(0,0)到(1,1)的折线路径 L_1+L_2，其中 L_1：$y=0$，x 从 0 变到 1；L_2：$x=1$，y 从 0 变到 1，则

$$原式=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\sin 2-\frac{7}{6}.$$

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)向量场的积分与积分路径无关的定义是什么？

(2)什么是保守场？保守场有何重要性质？

(3)什么是势函数？如何求势函数？

2. 验证下列积分与路径无关，并求它们的值：

(1) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2}$，沿在右平面的路线；

(2) $\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \varphi(x)\mathrm{d}x + \varphi(y)\mathrm{d}y$，其中 φ 为连续函数.

3. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出相应的 $u(x,y)$.

(1) $2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$；

(2) $(2x\cos y + y^2\cos x)\mathrm{d}x + (2y\sin x - x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

4. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，证明对任何光滑封闭曲线 L，有 $\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = 0$.

B 类题

1. 证明：曲线积分 $\int_L (x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并求 $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$.

2. 设 $\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，其中 $\varphi(x)\in C^1$，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

C 类题

1. 选取 a,b 使 $\dfrac{(y^2+2xy+ax^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出 $u(x,y)$.

2. 设 $\boldsymbol{n}$ 为闭曲线 L 的朝外的法向量，D 为 L 所围成的闭区域，函数 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数. 证明：

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$