

## 第十章 重积分

## 第一节 二重积分的概念与性质

## A 类题

1. (1)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ; (2) 0; (3)  $I_2 < I_1 < I_3$ ; (4)  $I_2 < I_1$ .

2. (1)  $0.4 \leq I \leq 0.5$ ; (2)  $0 \leq I \leq \pi^2$ .

## B 类题

1.  $I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq I_4$ . 2. 0.

## C 类题

1. 证明略. 2.  $\frac{1}{2}(a+b)$ .

## 第二节 二重积分的计算法

## A 类题

1. (1)  $\frac{384}{7}$ ; (2)  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ ; (3)  $\int_0^+ \theta d\theta \int_0^2 \rho d\rho$ ; (4)  $\frac{1}{2}$ .

2.  $\frac{1}{e}$ . 3.  $\frac{15}{8}$ .

4. (1)  $\int_0^1 dy \int_e^e f(x, y) dx$ ;

(2)  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$ ;

(3)  $\int_0^a dy \int_{2a-y}^{a+\sqrt{a-y}} f(x, y) dx$ ;

(4)  $\int_0^a dx \int_{\sqrt{a-x}}^a f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{x-a}^{2a} f(x, y) dy$ .

5.  $\frac{1}{6}(1 - \frac{2}{e})$ . 6. (1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho$ ; (2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R f(\rho^2) \rho d\rho$ .

7. (1)  $\frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1)$ ; (2)  $\sqrt{2} - 1$ .

## B 类题

1.  $\frac{2}{3}$ . 2.  $\frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2}$ . 3. (1)  $\frac{20}{3} - \frac{\pi}{4}$ ; (2)  $\frac{\pi}{4}$  (偶倍奇零). 4.  $\frac{R^3 \arctan k}{3}$ .

5.  $\frac{1}{40}\pi^5$ .

## 第三节 三重积分

## A 类题

1. (1) 略; (2)  $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \rho d\rho d\theta dz$ .



2. 直角坐标系下, 投影法:  $I = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz$ ;   
 柱面坐标系下:  $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz$ ; 计算结果:  $\frac{7\pi}{12}$ .   
 (Handwritten:  $6x^2y^2$  and  $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_r^{\sqrt{6-r^2}} z dz = \frac{92}{3}\pi$ )

3. (1)  $\frac{5\pi}{6}a^3$ ; (2)  $\frac{1}{2}\ln 2$ ; (3)  $\frac{\pi R^4}{16}$ ; (4)  $2\pi$ ; (5)  $\frac{31\pi}{10}$ ; (6)  $\frac{59\pi R^5}{480}$ ; (7) 转化成柱面坐标:  $\frac{3\pi}{10}$ .

#### B 类题

1.  $42\pi$ . 2.  $F'(t) = 2\pi t \left[ \frac{h^2}{3} + hf(t^2) \right]$ ;  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{2t} = \pi \left[ \frac{h^2}{3} + hf(0) \right]$ . 3.  $\frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)^{\frac{3}{2}}$ .

#### 第四节 重积分的应用

##### A 类题

1.  $2a^2(\pi - 2)$ . 2.  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ . 3.  $x=0, y=\frac{4b}{3\pi}$ . 4.  $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$ .

##### B 类题

1.  $y^2 = \frac{15p}{32}x$ . 2.  $\frac{\pi}{4}a^3b$ .

3. 设球顶锥体  $\Omega$  由上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$  和锥面  $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$  围成, 则  $F_x = 0, F_y = 0$ ,

$F_z = \frac{1}{4}\pi Gm\rho R$ . 4.  $9\pi$ .

### 第十二章 无穷级数

#### 第一节 常数项级数的概念和性质

##### A 类题

1. (1) D; (2) C; (3) A; (4) D; (5) A.

2. (1) 发散; (2) 收敛,  $\frac{1}{3}$ ; (3) 发散; (4) 收敛,  $\frac{2}{3}$ .

3. (1) 发散; (2) 发散; (3) 发散; (4) 发散. 4. 发散. 5. 发散.

#### 第二节 常数项级数的审敛法

##### A 类题

(1) 发散; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 发散; (7) 发散;  
 (8) 收敛; (9) 发散; (10) 收敛.

##### B 类题

1. (1) 绝对收敛; (2) 绝对收敛; (3) 条件收敛; (4) 发散.

2. 证明略. 3.  $p \leq 0$ , 发散;  $0 < p \leq 1$ , 条件收敛;  $p > 1$ , 绝对收敛.

##### C 类题

1. 证明略, 提示:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n - (c_n - b_n)]$ . 2. 上述证明不对, 提示:  $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$ .

