第一章 无穷级数

第一节 数项级数的收敛与发散

理解常数项无穷级数的概念;掌握常数项无穷级数的基本性质;熟练掌握等比级数的敛散性.

知识要点

1. 无穷级数收敛与发散的概念,收敛级数的基本性质,级数收敛的必要条件;
2. 几何级数(等比数列)的收敛条件及其收敛和的表示,调和级数的敛散性;
3. 级数收敛的柯西准则.

典型例题

例 1 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 的敛散性.

解 级数的部分和为

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\right]\\ &= 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1-\sqrt{2}$,故原级数收敛,其和为 $1-\sqrt{2}$.

例 2 下列命题是否正确?若不正确,请举反例;若正确,请给出证明.

(1)数列 $\{u_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛或同时发散;

(2)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛,其中 $v_n\neq0$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{v_n}$ 收敛.

解 (1)命题不对.

例如：数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是收敛的，但级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

(2)命题不对.

例如：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，但级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}1$是发散的.

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)数项级数的部分和是什么？

(2)数项级数的收敛与发散怎样定义？

(3)若级数为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$，则其中部分和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$是一个数列；反过来，如何用$S_n$把原来的级数表示出来.

(4)一般项$a_n\to 0(n\to+\infty)$是不是级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛的充分条件？若不是，举例说明.

2. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$；

(2) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$；

(4) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(5) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

3. 证明：若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ 发散.

4. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都发散，试问 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ 一定发散吗？如果这里的 $a_n, b_n (n = 1, 2, \cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

B 类题

1. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

2. 利用 Cauchy 收敛准则判别下列级数的收敛性：

(1) $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots$；

(2) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$.

第二节　正项级数

了解正项级数收敛的充要条件；掌握正项级数敛散性的判别法；熟练掌握 p－级数的敛散性.

知识要点

1. 正项级数收敛的充要条件；
2. 正项级数的比较判别法及其极限形式；
3. 正项级数的比值判别法、根值判别法和积分判别法.

典型例题

例 1　设 $\{u_n\}$，$\{c_n\}$ 为正项数列，证明对任意自然数 n，满足 $u_n c_n - u_{n+1}c_{n+1} \leqslant 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散.

分析　要从 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散推出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散，只需证明 $u_n \geqslant \frac{k}{c_n}$，其中 k 为大于零的常数.

证明　由 $u_n c_n - u_{n+1}c_{n+1} \leqslant 0$，得

$$u_{n+1}c_{n+1} \geqslant u_n c_n \geqslant u_{n-1}c_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant u_1 c_1$$

故 $u_n \geqslant \frac{u_1 c_1}{c_n} = \frac{k}{c_n}$，由比较判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散.

例 2　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性.

分析　判别级数的敛散性时应该首先确定级数的类型. 根据判断这个级数为正项级数.

解　$u_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$

故 u_n 是 $\frac{1}{n}$ 的二阶无穷小，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛.

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)什么叫正项级数？它的部分和数列有什么特点？

(2)p—级数在什么条件下收敛？在什么条件下发散？

(3)设 $a_n \leqslant b_n$，如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛？试举例说明.

(4)设 $a_n \geqslant 0$，且数列 $\{na_n\}$ 有界，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 收敛吗？

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+3}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \dfrac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$.

3. 用比较判别法的极限形式讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5n+1}{n^2(n+2)}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n+n}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n^2}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

4. 用比值法、判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} np^n \quad (0<p<1)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad (x>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{n!}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

扫描全能王 创建

5. 用根值判别法讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

B 类题

1. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1+n}{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$，$a$ 为非负实数；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a(n \to +\infty)$，a_n, a, b 均为正数.

2. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 也收敛；但反之不然，举例说明.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n{}^2$ 都收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n b_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

4. 设数列 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 也收敛.

第三节　一般级数

掌握莱布尼兹判别法；理解绝对收敛与条件收敛的概念.

知识要点

1. 交错级数的莱布尼兹判别法；
2. 级数绝对收敛和条件收敛的概念；
3. 绝对收敛级数的性质.

典型例题

例 1　设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

分析　$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 为正项级数，由通项表达式可用根值判别法.

解　由于数列 $\{a_n\}$ 单调减少又 $a_n > 0$，可知其极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在，记为 a. 由极限的保号

性定理知 $a \geqslant 0$. 若 $a=0$,则由莱布尼兹判别法知道 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 必收敛,这与已知 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 发散矛盾,故 $a>0$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1$$

由根值判别法知, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

例 2 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛,证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛.

证明 因为 $\left|\frac{u_n}{n}\right|\leqslant\frac{u_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}$,而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛,由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛,从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛.

A 类题

1. 回答问题:

(1)什么是交错级数?

(2)什么是级数的绝对收敛和条件收敛?

(3)两级数的乘积是怎样定义的? 在什么条件下两级数的乘积级数必定收敛?

2. 下列是非题,对的给出证明,错的举出反例:

(1)若 $a_n>0$,则 $a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\cdots$ 收敛;

(2)若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 也收敛；

(3)若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ 绝对收敛；

(4)若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛；

(5)若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不绝对收敛；

(6)绝对收敛级数也条件收敛；

(7)若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不是条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散；

扫描全能王 创建

(8)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.

3. 讨论下列级数的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛、发散)：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

4. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 皆收敛，且 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ 也收敛. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 皆发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ 的收敛性如何？

5. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ 皆收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

6. 设常数 $k>0$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{k+n}{n^2}$ 的敛散性(包括绝对收敛与条件收敛).

B类题

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$，能否断定 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 也收敛？研究 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right]$ 的敛散性.

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^p u_n=A$，证明：

(1) 当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 绝对收敛；

(2) 当 $p=1$，且 $A\neq 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散；

(3) 问当 $p=1$ 且 $A=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 能否收敛？

第四节　函数项级数的基本概念

理解函数项级数以及函数项级数的收敛域、发散域、和函数及其一致收敛的概念;掌握函数项级数收敛于和函数的充要条件和函数项级数一致收敛于和函数的定义;掌握函数项级数一致收敛的准则和维尔斯特拉斯 M 判别法;掌握一致收敛级数的和函数的性质.

知识要点

1. 函数列收敛和一致收敛的概念;
2. 函数项级数收敛和一致收敛的概念;
3. 函数项级数一致收敛性的维尔斯特拉斯 M 判别法;
4. 一致收敛函数项级数的性质.

典型例题

例 1　设 $u_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$u_{n+1}(x)=\int_a^x u_n(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$,证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明　因为 $u_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,故 $u_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,即 $\exists M>0$ 使得 $|u_1(x)|\leqslant M$. 于是有 $|u_2(x)|\leqslant M(x-a)$,$|u_3(x)|\leqslant\int_a^x|u_2(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2!}(x-a)^2$,利用数学归纳法知,若 $|u_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$,则

$$|u_{n+1}(x)|\leqslant\int_a^x|u_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{n!}(x-a)^n\leqslant\frac{M}{n!}(b-a)^n$$

因为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{n!}(b-a)^n$ 收敛,所以由维尔斯特拉斯 M 判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

例 2　求函数项级数

$$\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots$$

的收敛域.

分析　判别一个函数项级数是否收敛,也可以利用函数项级数的收敛定义,即看其前 n 项和组成的数列是否有极限.

解

$$S_n(x)=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{n-1}}\right)=\frac{1}{x^n}$$

由此可知，函数项级数在 $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$ 上收敛，收敛域为 $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$，和函数为

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

由题可知，虽然 $u_n(x)$ 在 $x\neq 0$ 连续，但和函数 $S(x)$ 在 $x=0$ 无定义，且在 $x=1$ 处间断.

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)什么叫级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的收敛域和发散域？

(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$ 是怎样定义的？

(3)一致收敛的级数有哪些重要的性质？

2. 试利用维尔斯特拉斯 M 判别法证明下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{2^n}, -\infty<x<+\infty$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}, -\infty<x<+\infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^{3/2}}$,$x\in[-1,1]$；　　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$，$0\leqslant x<+\infty$.

3. 按定义讨论下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$-\infty<x<+\infty$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n$，$0<x<1$.

B 类题

1. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

2. 证明：

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛；

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，但 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ 未必一致收敛. 试以 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(x^n-x^{n+1}),0\leqslant x\leqslant 1$ 为例来说明.

第二章 无穷级数

第一节 幂级数及其收敛性

理解幂级数的概念;理解阿贝尔定理;理解幂级数的收敛半径的概念,并会求幂级数的收敛半径和收敛域;掌握幂级数的运算及其和函数的性质.

知识要点

1. 幂级数及其收敛半径、收敛区间、收敛域;
2. 幂级数收敛半径的求法;
3. 阿贝尔定理及幂级数在其收敛区间内的绝对收敛性;
4. 幂级数的运算及其和函数的性质;
5. 利用幂级数求数项级数的和.

典型例题

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$ 的收敛域.

分析 由于幂级数中 x 的指数为 $2n-1$,缺偶数项幂,因此其收敛半径应该为$\frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

解 $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}$

因此 $R=\frac{1}{\sqrt{\rho}}=\sqrt{3}$

当 $x=-\sqrt{3}$时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{\sqrt{3}}$,发散;

当 $x=\sqrt{3}$时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}$,也发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$ 的收敛域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

例 2 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}$ 的和.

解 根据数项级数的特点构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)x^n$,此幂级数的收敛域为$(-1,1)$.令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)x^n$,由幂级数逐项微分的性质得,当 $x\in(-1,1)$时,有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{x}{1-x}$$

$$=2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^2}$$

由于$-\dfrac{1}{3}\in(-1,1)$,

所以,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3^{n+1}}=-\frac{1}{3}S\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{24}.$$

A 类题

1. 回答下列问题:

(1)什么是幂级数的收敛半径和收敛域?

(2)幂级数的收敛域有何特点?

(3)什么是幂级数在其收敛区间中的内闭一致收敛性?

(4)幂级数在其收敛区间内,和函数有哪些重要性质?

2.求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{2n!}x^n$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n x^n}{n!}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

(8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(x+3)^n}{5^n}$；

(9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(x-5)^n}{n\ln n}$；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n$；

(11) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^{2n}$.

3. 求下列幂级数的收敛域及和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}x^n$；　　(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

4. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 5，试问 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径是多少？

B 类题

1. 求下列函数项级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!x^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n}$.

扫描全能王 创建

2. (1) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处发散，那么它在哪些区域必然发散？

(2) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+5)^n$ 在 $x=-2$ 处发散，那么它在哪些区域必然发散？

3. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}$；

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$；

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2-n+1}{2^n}$.

4. 如果正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 收敛，证明 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上连续.

第二节 Taylor 级数

理解并掌握函数的幂级数展开定理；熟练掌握初等函数，如指数函数、三角函数、对数函数等的幂级数展开式，并能利用这些展开式，结合幂级数的四则运算、分析运算、变量代换等方法，将一些较简单的函数展开为幂级数；掌握泰勒级数应用的技巧.

知识要点

1. 函数展开成泰勒级数的充要条件；
2. 函数的幂级数展开式的唯一性；
3. 常见函数的泰勒级数展开式；
4. 泰勒级数的应用.

典型例题

例 1 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解 由于 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$，而

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2+(x-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$$

其中 $\left|\dfrac{x-3}{2}\right|<1$，即 $x\in(1,5)$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$$

其中 $\left|\dfrac{x-3}{3}\right|<1$，即 $x\in(0,6)$，因此

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-3)^n,x\in(1,5)$$

例 2 将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数，并证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n-1}}{n!}\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1},x\in(-\infty,+\infty)\text{ 且 }x\neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\bigg|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)\bigg|_{x=1}$$

$$=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}\bigg|_{x=1}=1.$$

A 类题

1. 回答下列问题：

(1) 函数 $f(x)$ 能在区间 (x_0-R,x_0+R) 中展开成幂级数的充要条件是什么？

(2) 如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 中有任意阶导数，$f(x)$ 是否能在这区间上展开为幂级数？

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并指出展开式成立的范围：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$；

(2) $f(x)=\sin^2 x$；

(3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$；

(4) $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

3. 将下列函数在指定点展开成幂级数，并指出展开式成立的范围：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x=1$；　(2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}, x=2$；

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+2x+2},\ x=-1$；　(4) $f(x)=\cos x, x=-\dfrac{\pi}{3}$.

B 类题

利用逐项求导和逐项积分的方法，将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

第三节　周期函数的 Fourier 级数

了解傅立叶级数研究的背景；理解并掌握狄利克雷收敛定理；掌握正弦级数和余弦级数.

知识要点

1. 三角级数与三角函数系的正交性；
2. 周期函数的傅立叶系数和傅立叶级数；
3. 傅立叶级数的收敛定理；
4. 正弦级数和余弦级数.

典型例题

例 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi\leqslant x<0\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成傅立叶级数,并由它推出

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

解 注意到 $f(x)$为奇函数,故有

$$a_n=0,n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\pi}{4}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{2n}=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}(n=1,2,\cdots)$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}(-\pi<x<\pi,x\neq 0)$$

在上式中令 $x=\dfrac{\pi}{2}$,得

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

A 类题

1. 回答下列问题:

(1)三角函数系的正交性指的是什么?

(2)Dirichlet 收敛定理的条件有哪些?

(3)周期为 2π 的函数 $f(x)$的 Fourier 级数是否一定收敛?如果收敛,是否一定收敛到自身?

(4)奇函数和偶函数的 Fourier 系数有什么特点?

2. 试将下列以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数.

(1) $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$;

(2) $f(x)=|x|$;

(3) $f(x)=|\cos x|,-\pi\leqslant x<\pi$;

(4) $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & -\pi\leqslant x<0\\ 0, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$;

(5) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},0<x<2\pi$;

(6) $f(x)=x\sin x,-\pi\leqslant x<\pi$.

3. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式是

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

若它的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$,试问 $S(\pm\pi)$ 和 $S(0)$ 的值各为多少?

扫描全能王 创建

B 类题

1. 设 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 是以 2π 为周期的函数：

(1) 若函数 $\varphi(-x)=\Phi(x)$，$-\pi\leqslant x<\pi$，问 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 的 Fourier 系数 a_n,b_n 与 α_n,β_n，$(n=1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

(2) 若函数 $\varphi(-x)=-\Phi(x)$，$-\pi\leqslant x<\pi$，问 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 的 Fourier 系数 a_n,b_n 与 α_n,β_n，$(n=1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，证明：

(1)若函数 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足 $a_{2k+1}=0,b_{2k+1}=0(k=1,2,\cdots)$；

(2)若函数 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足 $a_0=0,a_{2k}=0,b_{2k}=0(k=1,2,\cdots)$.

第四节 任意区间上的 Fourier 级数

掌握通过周期延拓，将定义在区间$[-\pi,\pi]$上的函数展开成傅立叶级数的方法；掌握通过奇延拓或偶延拓将定义在区间$[0,\pi]$的函数展开成正弦级数或余弦级数的方法.

知识要点

1. 函数的奇延拓、偶延拓及周期延拓；
2. 将定义在区间$[-\pi,\pi]$上的函数展开成傅立叶级数；
3. 将定义在区间$[0,\pi]$的函数展开成正弦级数或余弦级数；
4. 傅立叶系数及傅立叶级数的复数形式.

典型例题

例 把 $f(x)=x-1, x\in[0,2]$展开成余弦级数，并求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解 对 $f(x)$作偶延拓，$2l=4, l=2$.

$$b_n=0, n=1,2,\cdots,\ a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ -\dfrac{8}{\pi^2n^2}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}(n=1,2,\cdots)$$

所以
$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}(0\leqslant x\leqslant 2)$$

上式中，令 $x=0$，得
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

而
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

所以
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

A 类题

1. 试将下列周期函数展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<2\end{cases}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<3\end{cases}$；

(3) $f(x)=x\cos x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; (4) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & 1<x<2.\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

2. 试将 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数.

3. 证明:当 $0<x<\pi$ 时,有 $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

4. 将 $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\leqslant 2\\ x-3, & 2<x<4\end{cases}$ 在 $(0,4)$ 上展开成余弦级数.

5. 将 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上分别展开成余弦级数与正弦级数.

6. 将函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成余弦级数.

7. 将 $f(x)=x(1<x<3)$ 展开成 Fourier 级数，并用它证明等式 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

B 类题

证明在$[0,\pi]$上，下式成立：

(1) $x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$；　　(2) $x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

并利用以上结果证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.