第一章 向量代数

第一节 向量及其线性运算

理解空间直角坐标系、向量的概念及其表示，掌握向量的线性运算. 理解向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标的概念，掌握向量、单位向量、方向余弦的坐标表示法以及用坐标对向量进行线性运算.

知识要点

1. 向量的定义、向量的模、向量的夹角、向量的平行、垂直等概念，向量的运算包含向量的加法，向量的数乘运算，以及向量平行的充分必要条件；

2. 空间直角坐标系的定义，向量的坐标分解式，利用坐标进行向量运算，及利用坐标判断向量的平行；

3. 向量的模、方向角、方向余弦的定义与计算.

典型例题

例 1 求 x 轴上与点 $A(4,4,-7)$ 和点 $B(-1,8,6)$ 等距离的点.

分析 本题主要涉及两个知识点：(1)坐标轴上点坐标表示；(2)空间上两点间的距离公式.

解 设 x 轴上点 P 的坐标为 $(x,0,0)$，依题意可得

$$|PA|=\sqrt{(x-4)^2+16+49}$$

$$|PB|=\sqrt{(x+1)^2+64+36}$$

由 $|PA|=|PB|$ 可解得 $x=-2$，故该点的坐标为 $(-2,0,0)$.

例 2 设一向量与各坐标轴之间的夹角为 α,β,γ，其中 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，求 γ.

分析 本题主要利用向量的三个方向角之间的关系，即 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

解 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，可知

$$\cos^2\gamma=1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)=1-(\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

2. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取线段 AB，其 $|AB|$ 长为 34，求点 B 的坐标.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴成相等的锐角，求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 若 $|\boldsymbol{a}|=2$，求 $\boldsymbol{a}$.

4. 已知三点 A,B,C 的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$. 证明 A,B,C 在同一直线上.

第二节　数量积、向量积、混合积

掌握向量的数量积、向量积定义及运算性质. 掌握数量积和向量积的坐标表示式. 掌握两个向量垂直、平行的条件.

知识要点

1. 数量积的定义、性质及运算律，数量积的坐标表示，利用数量积求两向量的夹角，两个向量垂直、平行的条件；

2. 向量积的定义、性质及运算律，向量积的坐标表示.

典型例题

例 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=\frac{\pi}{3}$，$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=\frac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

分析　本题主要运用数量积运算的性质和运算律.

解　因为

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+$$

$$2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})$$

$$= 2^2+1^2+1^2+4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=8+\sqrt{3}$$

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{8+\sqrt{3}}$.

例 2　已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求$\triangle OAB$的面积.

分析　主要利用向量积的定义以及$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA\times OB|$.

解　因为

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

所以$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{19}$,即$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{19}$.

A 类题

1. 判断题

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^3$.　(　　)

(2) 当$\boldsymbol{a}\neq 0$时,$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}=1$.　(　　)

(3) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$.　(　　)

(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$.　(　　)

(5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0$.　(　　)

(6) 若$\boldsymbol{a}\neq 0$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.　(　　)

2. 填空题

(1) 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__________,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$__________,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角余弦为__________.

(2) 设$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$,则$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=$__________.

(3) 已知$\boldsymbol{a}=(4,-5,3)$,$\boldsymbol{b}=(1,-4,z)$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则$z=$__________.

(4) 已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$__________.

(5) 设向量$\boldsymbol{a}=(\lambda,-3,2)$与$\boldsymbol{b}=(1,2,-\lambda)$相互垂直,则$\lambda=$__________.

3. 选择题

(1)对任意向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,下列表达式中错误的是(　　).

(A) $|\boldsymbol{a}|=|-\boldsymbol{a}|$　　(B) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

(C) $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ (D) $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

(2)下列叙述中不是两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件的是(　　).

(A) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积等于零 (B) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积等于零

(C) 对任意向量 $\boldsymbol{c}$ 有混合积$[\boldsymbol{abc}]=0$ (D) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的坐标对应成比例

(3)设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量,若等式$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$成立,则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(　　).

(A) 相互垂直 (B) 相互平行 (C) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ (D) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

(4)如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线,$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$(　　).

(A) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ (B) 一定共线

(C) 一定不共线 (D) 既可能共线,也可能不共线

(5)设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互正交,λ 为任意的非零实数,则$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$与$|\boldsymbol{a}|$的大小关系是(　　).

(A) $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|$ (B) $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

(C) 大小不定 (D)不能比较

4. 求与向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 平行,且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-22$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $|\boldsymbol{c}|=5$, 并且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$. 计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

6. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{c}|=5$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=7$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=8$,求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$.

7. 求向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 在向量 $\boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 上的投影及分向量.

8. 求同时垂直于 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

B 类题

1. 利用向量证明勾股定理.

2. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，已知 $\boldsymbol{b}$ 在与 $\boldsymbol{a}$ 平行且正向与 $\boldsymbol{a}$ 一致的数轴上投影为 p，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

3. 已知三点 $M_1(2,2,1)$，$M_2(1,1,1)$，$M_3(2,1,2)$，

(1)求 $\angle M_1M_2M_3$；

(2)求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

4. 已知平行四边形以 $\boldsymbol{a}=\{1,2,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-2,1\}$ 为两边，

(1)求它的边长和内角；

(2)求它的两对角线的长和夹角.

5. 设 AD 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高，记 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，证明

$$S_{\triangle ABD}=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|}{2|\boldsymbol{a}|^{2}}$$

C类题

1. 设 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，沿着 $\boldsymbol{a}$ 正方向将 $\boldsymbol{b}$ 绕 $\boldsymbol{a}$ 右旋 θ 角得向量 $\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 及 θ 表示 $\boldsymbol{c}$.

2. 已知两个非零不垂直的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，

(1) 求证 $\tan(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$；

(2) 求证 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leqslant\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$，并求等号成立的充分必要条件.

可得 $\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,由于 $\gamma\in[0,\pi]$,因此 $\gamma=\frac{\pi}{4}$ 或 $\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

例 3 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求以 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为边的平行四边形的对角线长度.

分析 本题涉及向量的加减以及向量模的计算.

解 对角线的长分别为 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|,|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|$,因为

$$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+(-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=(1,-1,1)$$
$$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-(-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=(1,3,-1)$$

所以

$$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$
$$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$$

即平行四边形的边长分别为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$.

A 类题

1. 填空题

(1)若 $A(1,-1,3),B(1,3,0)$,则 AB 中点坐标为__________,$|AB|=$__________.

(2)已知点 $A(1,-6,3)$ 和点 $B(6,4,-2)$,点 P 在 Z 轴上使 $|AP|=|BP|$,则 P 点的坐标为__________.

(3)若点 M 的坐标为 (x,y,z),则向径 $\overrightarrow{OM}$ 用坐标可表示为__________.

(4)平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,5,-6)$ 的单位向量为__________.

(5)已知两点 $A(0,1,2)$ 和 $B(1,-1,0)$,则用坐标表示向量 $\overrightarrow{AB}=$__________,向量 $-3\overrightarrow{BA}$ 用坐标表示为__________.

(6)已知 $\triangle ABC$ 三顶点的坐标分别为 $A(0,0,2),B(8,0,0),C(0,8,6)$,则边 BC 上的中线长为__________.

(7)若 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$__________,$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$__________.

2. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其下底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

3. 求关于点 (x,y,z) (1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点对称的点的坐标.

4. 已知 $A(-1,2,-4)$，$B(6,-2,t)$，且 $|AB|=9$，求：(1)t；(2)线段 AB 的中点坐标.

5. 设 $A(2,-3,1)$，$B(x,1,2)$，$|AB|=5$，求 x.

6. 设已知两点 $A(2,0,5)$ 和 $B(1,\sqrt{2},6)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

7. 求 y 轴上与点 $A(-4,7,1)$ 和点 $B(3,-2,5)$ 等距离的点.

B 类题

1. 向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 的终点 B 的坐标为 $(2,-1,7)$，求它的始点 A 的坐标，并求 $\boldsymbol{a}$ 的模及其方向余弦.