第四节 任意区间上的 Fourier 级数

A 类题

1. (1) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$, $(-2\leqslant x\leqslant 2, x\neq 0)$,当 $x=0$ 时,级数收敛于$\frac{1}{2}$;

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{6}{\pi^2 n^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^n\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]$$(x\neq 3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$;

(3) $f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2}\sin 2\pi x, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

(4) $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 3n\pi x}{n^2}, 0\leqslant x\leqslant 3$.

2. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, 0<x\leqslant\pi$.

3. 提示:将 $f(x)=\frac{\pi}{4}$在$(0,\pi)$内展开成正弦级数.

4. $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right), 0<x<2$.

5. $x=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, 0\leqslant x\leqslant\pi$; $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, 0\leqslant x\leqslant\pi$.

6. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx$, $\left(0\leqslant x<\pi, x\neq\frac{\pi}{2}\right)$, 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,级数收敛于$\frac{1}{2}$.

7. $f(x)=2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x, 1<x<3$.

B 类题

略.

第三章 多元函数的微分学

第一节 隐函数微分法

A 类题

1. (1) $\frac{y^2-e^x}{\cos y}$; (2) 略.

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-x)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-x)+x(\frac{x}{2-z})}{(2-z)^2}=\frac{(2-x)^2+x^2}{(2-z)^3}$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.

4. $z_x=z_y=-1, z_{xx}=z_{xy}=z_{yy}=0$.

B 类题

1. 略.　　2. 略.

3. (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{3v^2+x}{9u^2v^2-xy}$；$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3u^2+vy}{9u^2v^2-xy}$；

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3v^2+ux}{9u^2v^2-xy}$；$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{3u^2+y}{9u^2v^2-xy}$.　(2) 略.　　4. $-\frac{1}{7}$.

C 类题

略

第二节　多元函数的极值

A 类题

1. (1) 小；(2) $(1,-1)$.　2. (1) C；(2) B；(3) B.

3. (1) $f(a,a)=a^3$ 为极大值；(2) 在点 $(1,0)$ 处，$z(1,0)=-1$ 为极小值.

4. $f(1,0)=-5$；$f(-3,2)=31$.　5. 最大值 1，最小值 0.

B 类题

1. 极小值为 $z(9,3)=3$，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

2. 点 $(0,0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

第三节　多元函数的条件极值

A 类题

1. (1) C；(2) B；(3) A.

2. 极小值 $\frac{1}{2}$.　3. $2\sqrt{5}$.　4. $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.　5. $(\frac{1}{2},0,1)$.

B 类题

1. 最大值为 $z=25$，最小值为 $z=0$.　2. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.　3. $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1$.

C 类题

1. 最大值为 $bc\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$，最小值为 $ac\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$（提示：先求交线上的切平面方程，再求原点到切平面的距离，最后得驻点，通过比较两个驻点处函数值的大小，得距离的最大值和最小值）

2. 略.

第四节　偏导数的几何应用

A 类题

1. (1) B；(2) D；(3) C；(4) C；(5) C；(6) C.

2. (1) 切线方程：$\sqrt{2}x-R=-\sqrt{2}y+R=-\sqrt{2}z+R$，法平面方程：$x-y-z+\frac{\sqrt{2}R}{2}=0$；

(2) 切线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-2}{-5}$，法平面方程：$x-4y-5z+13=0$.

3. (1) $-2(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$，$\frac{x-1}{-2}=y-1=z-2$；

(2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$，$a(x-\frac{a}{\sqrt{3}})=b(y-\frac{b}{\sqrt{3}})=c(z-\frac{c}{\sqrt{3}})$；

(3) $4x+2y-z-6=0$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$;

(4) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z=4+\frac{\pi}{2}$, $\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{1}$.

4. $2(x-\frac{1}{2})-(y+1)+(z+1)=0$; $2(x+\frac{1}{2})-(y-1)+(z-1)=0$.

B 类题

1. 略. **2.** $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$; $\lambda=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

3. 切点为:$(2,-3,-1)$,法平面:$x-4y-2z=16$.

第四章 第二型曲线积分和曲面积

第一节 第二型曲线积分

A 类题

1. 略. **2.** (1) 1; (2) $\frac{17}{15}$; (3) πa^2. **3.** -2π. **4.** 0. **5.** $-2\pi a^2$. **6.** 2.

B 类题

1. 略. **2.** (1) $\int_L \frac{6x^2y^2+y^2}{\sqrt{1+4y^2}}\mathrm{d}s$; (2) $\int_\Gamma \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s$. **3.** $\frac{1}{4}\sin 2-\frac{7}{6}$.

C 类题

1. (1) 91; (2) $\frac{-1085}{4}$. **2.** $(\xi,\eta,\gamma)=(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$.

第二节 格林公式

A 类题

1. 略. **2.** 8. **3.** $\frac{m\pi}{8}a^2$. **4.** $\frac{14}{3}$. **5.** (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (2) πa^2.

B 类题

1. 略. **2.** $-\frac{\pi}{8}ma^2$. **3.** 当 $0<R<1$ 时,$I=0$;当 $R>1$ 时,$I=\pi$.

第三节 平面曲线积分与路径无关的条件、保守场

A 类题

1. 略. **2.** (1) $-\frac{3}{2}$; (2) $y^2\cos x+x^2\cos y$; (3) $2\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x$.

3. (1) $u(x,y)=x^2y$; (2) $u(x,y)=\sin x+x^2\cos y$. **4.** 略.

B 类题

1. 略. **2.** $\frac{1}{2}$.

C 类题

1. $\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$. **2.** 提示:由方向导数、两类曲线积分间的关系及格林公式即证.