状态空间法详解传教士和野人问题

传教士和野人问题（The Missionaries and Cannibals Problem）

在河的左岸有**三个传教士、一条船和三个野人**，传教士们想用这条船将所有的成员都运过河去，但是受到以下条件的限制：

① 教士和野人都会划船，但船一次最多只能装运两个；

② ②在任何岸边野人数目都不得超过传教士，否则传教士就会遭遇危险：被野人攻击甚至被吃掉。

此外，假定野人会服从任何一种过河安排，试规划出一个确保全部成员安全过河的计划。

（1）设定状态变量及确定值域。

为了建立这个问题的状态空间，设**左岸传教士数**为 **m**，则

m ={0,1,2,3}；

对应右岸的传教士数为 3－m； **左岸的野人数**为 **c**，则有

c ={0,1,2,3}；

对应右岸野人数为 3－c；**左岸船数**为 **b**，故又有 **b={0,1}**，右岸的船数为 1－b.

（2）确定状态组，分别列出初始状态集和目标状态集。

问题的状态可以用一个三元数组来描述，以左岸的状态来标记，即

Sk =（m,c,b），

右岸的状态可以不必标出。

初始状态一个： **S0 =（3,3,1）**，初始状态表示全部成员在河的左岸；

目标状态也只一个： **Sg =（0,0,0）**，表示全部成员从河左岸渡河完毕。

（3）定义并确定操作集。

仍然以河的左岸为基点来考虑，把船**从左岸划向右岸**定义为 **Pij** 操作。其中,第一下标 i 表示船载的传教士数, 第二下标 j 表示船载的野人数；同理，**从右岸将船划回左岸**称之为 **Qij** 操作，下标的定义同前。则共有 10 种操作，操作集为

F={P01，P10，P11，P02，P20，Q01，Q10，Q11，Q02，Q20}

（4）估计全部的状态空间数，并尽可能列出全部的状态空间或予以描述之。

在这个问题世界中，S0 =（3,3,1）为初始状态，S31 = Sg =（0,0,0）为目标状态。全部的可能状态共有 32 个，如表所示。

状态	m,c,b	状态	m,c,b	状态	m,c,b	状态	m,c,b
S_0	3 3 1	S8	~~1 3 1~~	~~S16~~	~~3 3 0~~	S24	~~1 3 0~~
S_1	3 2 1	S9	~~1 2 1~~	S17	3 2 0	S25	~~1 2 0~~
S2	3 1 1	S10	1 1 1	S18	3 1 0	S26	1 1 0
~~S3~~	~~3 0 1~~	~~S11~~	~~1 0 1~~	S19	3 0 0	~~S27~~	~~1 0 0~~
S4	~~2 3 1~~	S12	0 3 1	S20	~~2 3 0~~	~~S28~~	~~0 3 0~~
S5	2 2 1	S13	0 2 1	S21	2 2 0	S29	0 2 0
~~S6~~	~~2 1 1~~	S14	0 1 1	~~S22~~	~~2 1 0~~	S_{30}	0 1 0
~~S7~~	~~2 0 1~~	~~S15~~	~~0 0 1~~	~~S23~~	~~2 0 0~~	S_{31}	0 0 0

表 1 传教士和野人问题的全部可能状态

注意：按题目规定条件，应划去非法状态，从而加快搜索效率。

1）首先可以划去左岸边**野人**数目超过传教士的情况，即 S4、S8、S9、S20、S24、S25 等 6 种状态是不合法的；

2）应划去右岸边**野人**数目超过修道士的情况，即 S6、S7、S11、S22、S23、S27 等情况；

3）应划去 4 种不可能出现状态：划去 S15 和 S16——船不可能停靠在无人的岸边；划去 S3——传教士不可能在数量占优势的**野人**眼皮底下把船安全地划回来；划去 S28——传教士也不可能在数量占优势的**野人**眼皮底下把船安全地划向对岸。可见，在状态空间中，真正符合题目规定条件的**只有 16 个合理状态**。

（5）当状态数量不是很大时，按问题的有序元组画出状态空间图，依照状态空间图搜索求解。

根据上述分析，共有 16 个合法状态和允许的操作，可以划出传教士和食人者问题的状态空间图，如图所示。

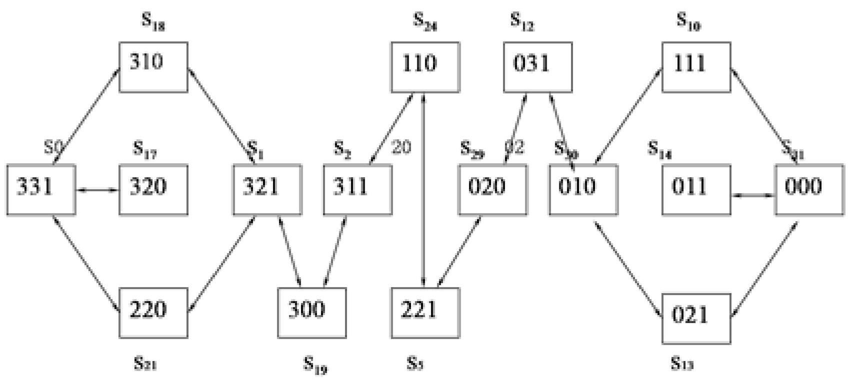


图 2 传教士和野人问题的状态空间

任何一条从 S0 到达 S31 的路径都是该问题的解。

A*算法详解传教士和野人问题

评估函数为 f=h+d=M+N-2*B+d.。

M 表示左岸的传教士的人数，N 表示左岸野人的数目，B 取值为 0 或 1 。1 表示船在左岸，0 表示船在右岸。d 表示节点的深度。

下面来证明 h(n)＝M+C-2B 是满足 A*条件的。

分两种情况考虑。先考虑船在左岸的情况。如果不考虑限制条件，也就是说，船一次可以将三人从左岸运到右岸，然后再有一个人将船送回来。这样，船 一个来回可以运过河 2 人，而船仍然在左岸。而最后剩下的三个人，则可以一次将他们全部从左岸运到右岸。所以，在不考虑限制条件的情况下，也至少需要摆渡 [(M+N-3)/2]*2+1 次。其中分子上的"－

3"表示剩下三个留待最后一次运过去。除以"2"是因为一个来回可以运过去 2 人，需要[(M+N- 3)/2]个来回，而"来回"数不能是小数，需要向上取整，这个用符号[ ]表示。而乘以"2"是因为一个来回相当于两次摆渡，所以要乘以 2。而最后的" ＋1"，则表示将剩下的 3 个运过去，需要一次摆渡。

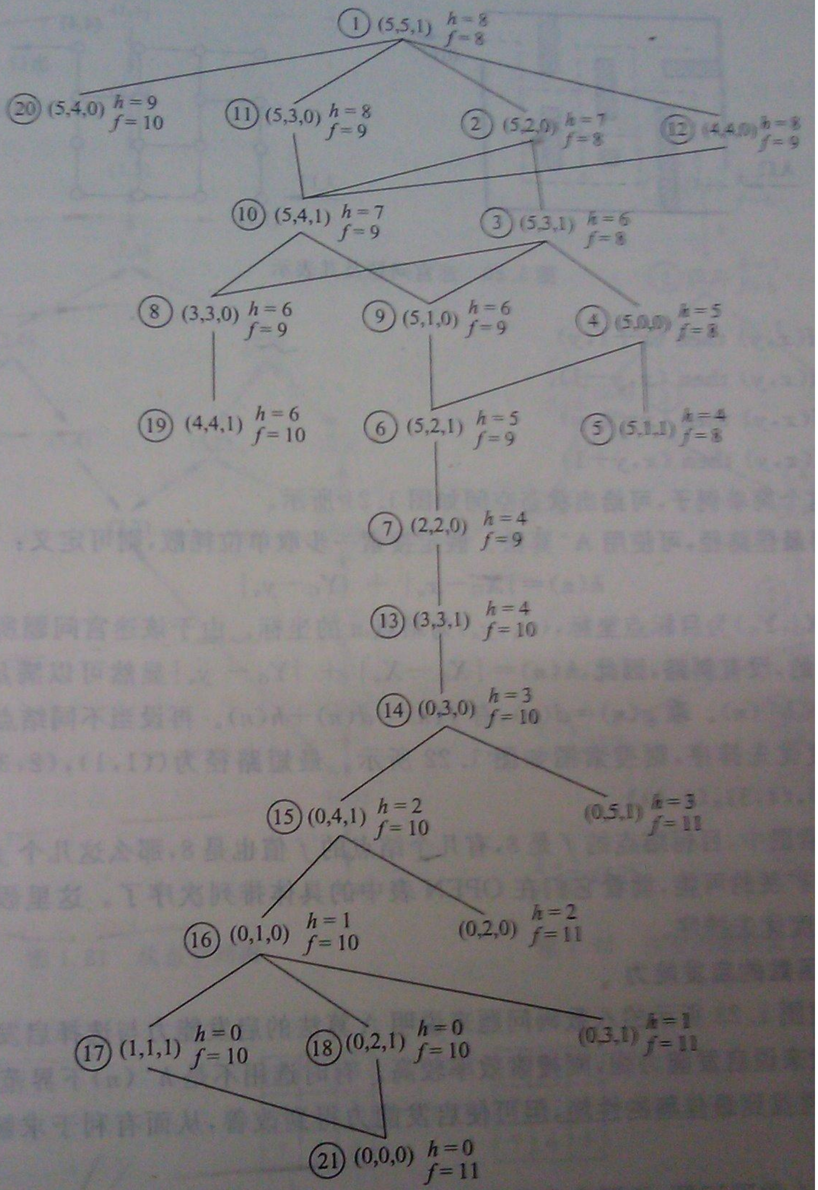
化简有： M+N-2。

再考虑船在右岸的情况。同样不考虑限制条件。船在右岸，需要一个人将船运到左岸。因此对于状态(M，N，0)来说，其所需要的最少摆渡数，相当于船在左岸时状态(M+1，N，1)或(M，N+1，1)所需 要的最少摆渡数，再加上第一次将船从右岸送到左岸的一次摆渡数。因此所需要的最少摆渡数为：(M+N+1)-2+1。其中(M+N+1)的"＋1"表示送 船回到左岸的那个人，而最后边的"＋1"，表示送船到左岸时的一次摆渡。

化简有：(M+N+1)-2+1=M+N。

综合船在左岸和船在右岸两种情况下，所需要的最少摆渡次数用一个式子表示为：M+N-2B。其中 B＝1 表示船在左岸，B＝0 表示船在右岸。

由于该摆渡次数是在不考虑限制条件下，推出的最少所需要的摆渡次数。因此，当有限制条件时，最优的摆渡次数只能大于等于该摆渡次数。所以该启发函数 h 是 A*条件的。



1 (5,5,1) h = 8 f = 8
20 (5,4,0) h = 9 f = 10
11 (5,3,0) h = 8 f = 9
2 (5,2,0) h = 7 f = 8
12 (4,4,0) h = 8 f = 9
10 (5,4,1) h = 7 f = 9
3 (5,3,1) h = 6 f = 8
8 (3,3,0) h = 6 f = 9
9 (5,1,0) h = 6 f = 9
4 (5,0,0) h = 5 f = 8
19 (4,4,1) h = 6 f = 10
6 (5,2,1) h = 5 f = 9
5 (5,1,1) h = 4 f = 8
7 (2,2,0) h = 4 f = 9
13 (3,3,1) h = 4 f = 10
14 (0,3,0) h = 3 f = 10
15 (0,4,1) h = 2 f = 10
(0,5,1) h = 3 f = 11
16 (0,1,0) h = 1 f = 10
(0,2,0) h = 2 f = 11
17 (1,1,1) h = 0 f = 10
18 (0,2,1) h = 0 f = 10
(0,3,1) h = 1 f = 11
21 (0,0,0) h = 0 f = 11

(c) $h(n) = M+C-2B$