第三章　多元函数的微分学

第一节　隐函数微分法

了解隐函数存在定理,熟练掌握多元隐函数(包括由方程组确定的隐函数)偏导数的求法.

知识要点

1. 二元及三元方程的隐函数存在定理;
2. 四元方程组的隐函数存在定理;
3. 隐函数的求导方法(公式法、直接法、微分法).

典型例题

例 1　求由方程 $F(y-x,yz)=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数,其中 F_1,F_2 均连续且 $F_2\neq0$.

解　把原方程两边分别对 x,y 求偏导,并注意 $z=z(x,y)$,由链法则得

$$F_1\cdot(-1)+F_2\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$F_1+F_2\left(z+y\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

从中解得　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{yF_2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F+zF_{21}}{yF_2}.$$

例 2　设 $z=z(x,y)$是由 $z+e^z=xy$ 所确定的二元函数,求:$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

分析　此例是最基本的隐函数求导问题,可以直接利用隐函数的求导公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},$$

也可以把方程 $F(x,y,z)=0$ 的两边分别对 x,y 求偏导数.

解法一　利用隐函数的求导公式.

令 $F(x,y,z)=z+e^z-xy$,则由隐函数的求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-y}{1+e^z}=\frac{y}{1+e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-x}{1+e^z}=\frac{x}{1+e^z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-ye^z\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+e^z)^2}=\frac{-y^2e^z}{(1+e^z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1+e^z-ye^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}=\frac{1}{1+e^z}-\frac{-xye^z}{(1+e^z)^3}.$$

解法二 将等式 $z+e^z=xy$ 两边分别对 x,y 求偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}=y,\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+e^z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}+e^z\frac{\partial z}{\partial y}=x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+e^z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{ye^z\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+e^z)^2}=\frac{-y^2e^z}{(1+e^z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1+e^z-ye^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}=\frac{1}{1+e^z}-\frac{-xye^z}{(1+e^z)^3}.$$

备注：一般地，若利用$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$求隐函数的二阶偏导数时，应注意到 z 仍然是 x,y 的函数，需进一步利用复合函数的求导法则去求，这是难点.

A类题

1. 设 $y=f(x)$ 由下列方程确定，求$\frac{dy}{dx}$：

(1) $\sin y+e^x-xy^2=0$；

(2) $x^y=y^x(x\neq y)$.

2. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 设 $z^3-3xyz=1$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 设 $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$，求 z 对 x，y 的一阶与二阶偏导数.

B 类题

1. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

2. 设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

3. 求由下列方程组确定的函数的导数或偏导数：

(1) 设$\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$及$\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

(2) 设$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 设方程 $y = F(x^2 + y^2) + F(x + y)$ 确定隐含数 $y = f(x)$(其中 F 可微)，且 $f(0) = 2, F'(2) = \dfrac{1}{2}, F'(4) = 1$，试求 $f'(0)$ 的值.

C类题

设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$ 确定的隐函数,其中 F 具有连续的二阶偏导数,且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$,求证:$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 和 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

第二节　多元函数的极值

理解多元函数极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会求二元函数的最大值和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

知识要点

1. 多元函数极值的概念;
2. 极值的必要条件;
3. 二元函数极值的充分条件;
4. 最大值和最小值.

典型例题

例 1　已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,证明点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.

分析　由题设,容易推知 $f(0,0)=0$,因此点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值,关键看在点(0,0)的充分小的邻域内 $f(x,y)$ 是恒大于零、恒小于零还是变号.

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知,分子的极限必为零,从而有 $f(0,0)=0$,且

$$f(x,y)-xy=(x^2+y^2)^2+o[(x^2+y^2)^2]\ (|x|,|y|\text{充分小时}),$$

于是 $$f(x,y)-f(0,0)=xy+(x^2+y^2)^2+o[(x^2+y^2)^2].$$

特殊地，当 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)-f(0,0)\approx x^2+4x^4>0$；而当 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)-f(0,0)\approx -x^2+4x^4<0$. 故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

备注：本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数的极值概念，有一定难度. 极限表示式转化为极限值加无穷小量，是有关极限分析过程中常用的方法.

例 2　设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且 $f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值.

分析　为证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，必须找出 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的各个二阶导数，为此需求出 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的一阶偏导数，由已知条件自然会想到利用微分的概念.

解　因为 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，

由全微分的定义知　$f(1,0)=0, f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$.

$$g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x,\ g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y,$$

$$g'_x(0,0)=0,\ g'_y(0,0)=0$$

$$g''_{xx}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2$$

$$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x$$

$$g''_{yy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2y+2f'_2$$

$$A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$$

$$B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1$$

$$C=g''_{yy}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$$

$AC-B^2=3>0$，且 $A<0$，故 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值.

备注：此题考察了全微分的概念、复合函数的导数和极值的充分条件，是概念性、综合性较强的题，当然在求二阶偏导数时，也可以利用偏导数的定义，事实上，这样做运算量会更小.

例 3　试求 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在闭域 $D: x\leqslant 0, y\leqslant 0$ 及 $x+y\geqslant -3$ 上的最大值与最小值.

解　令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y+1=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-x+1=0\end{cases}$，解得 $x=-1, y=-1$，　$f(-1,-1)=-1$.

当 $x=0$ 时，$z=y^2+y$ 在$[-3,0]$上的最大值为 $f(0,-3)=6$，最小值为 $f(0,-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$；

当 $y=0$ 时，$z=x^2+x$ 在$[-3,0]$上的最大值为 $f(-3,0)=6$，最小值为 $f(-\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$；

当 $x+y=-3$ 时，将 $y=-3-x$ 代入目标函数中得 $z=3x^2+9x+6, x\in[-3,0]$；

当 $x=-\frac{3}{2}$时，z 有最小值 $z=-\frac{3}{4}$，即 $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$；

当 $x=0$ 时，z 有最大值 $z=6$，即 $f(0,-3)=6$；

当 $x=-3$ 时，z 有最大值 $z=6$，即 $f(-3,0)=6$.

比较上述各个函数值得：$f(0,-3)=f(-3,0)=6$ 为最大值，$f(-1,-1)=-1$为最小值.

备注：此题的边界由三段直线组成，需分别讨论.

A 类题

1. 填空题

(1)函数 $z=3x^2+4y^2$ 在点$(0,0)$处有极__________(填"大"或"小")值.

(2)函数 $z=2x^2-3y^2-4x-6y-1$ 的驻点是__________.

2. 选择题

(1)设函数 $z=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，在 $P_0(x_0,y_0)$处，有 $f_x(P_0)=0, f_y(P_0)=0, f_{xx}(P_0)=f_{yy}(P_0)=0, f_{xy}(P_0)=f_{yx}(P_0)=2$，则(　　).

(A)点 P_0 是函数 z 的极大值点　　(B)点 P_0 是函数 z 的极小值点

(C)点 P_0 非函数 z 的极值点　　(D)条件不够，无法判定

(2)设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，且 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，则函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处(　　).

(A)必有极值，可能是极大，也可能是极小　　(B)可能有极值，也可能无极值

(C)必有极大值　　(D)必有极小值

(3)下列命题中错误的是(　　).

(A)若 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且存在唯一的极小值点 M_0，则 $f(M_0)$必是 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值

(B)若 $f(x,y)$在有界闭域 D 内存在唯一的极小值点 M_0，则 $f(M_0)$必是 $f(x,y)$在 D 上的最小值

(C)若 $f(x,y)$在有界闭域 D 内取到最小值，且 M_0 是 $f(x,y)$在 D 内的唯一极小值

点，则 $f(M_0)$ 必是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值

(D)连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大、最小值可以都在 ∂D 上取到

3. 求下列函数的极值点：

(1) $f(x,y)=3axy-x^3-y^3$；

(2) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.

4. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

5. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.

B 类题

1. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

第三节 多元函数的条件极值

了解求条件极值的 Lagrange 乘数法，会求解一些较简单的应用问题.

知识要点

1. 条件极值概念；
2. Lagrange 乘数法；
3. 应用问题.

典型例题

例 1 从斜边长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x,y 则周长

$$S=x+y+l,\quad (0<x<l,0<y<l)$$

因此，本题是在 $x^2+y^2=l^2$ 下的条件极值问题，作函数

$$F(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$$

解方程组 $\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0\\ F_y=1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=l^2\end{cases}$ 得唯一可能的极值点 $x=y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在，所以斜边长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形.

例 2 设圆 $x^2+y^2=2y$ 含于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的内部，且圆与椭圆相切于两点(即在这两点圆与椭圆都有公共切线).

(1) 求 a 与 b 满足的等式；

(2) 求 a 与 b 的值，使椭圆的面积最小.

分析 由圆和椭圆的图形及已知条件可知：切点不在 y 轴上，利用题设容易求出第一问，而第二问属于条件极值问题，显然第二问需要利用第一问的结论.

解 (1)设圆与椭圆相切于点(x_0,y_0)，则(x_0,y_0)既满足椭圆方程又满足圆方程，且在(x_0,y_0)处椭圆的切线斜率等于圆的切线斜率，即 $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\dfrac{x_0}{y_0-1}$. 注意到 $x_0\neq 0$，因此，点(x_0,y_0)应满足

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1 & (1)\\ x_0^2+y_0^2=2y_0 & (2)\\ \dfrac{b^2}{a^2y_0}=\dfrac{1}{y_0-1} & (3)\end{cases}$$

由(1)和(2)式，得

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}y_0^2-2y_0+a^2=0. \tag{4}$$

由(3)式得 $y_0=\dfrac{b^2}{b^2-a^2}$. 代入(4)式

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}\cdot\frac{b^4}{(b^2-a^2)^2}-\frac{2b^2}{b^2-a^2}+a^2=0.$$

化简得

$$a^2=\frac{b^2}{b^2-a^2},\quad 或\quad a^2b^2-a^4-b^2=0. \tag{5}$$

(2)按题意，需求椭圆面积 $S=\pi ab$ 在约束条件(5)下的最小值.

构造函数 $L(a,b,\lambda)=ab+\lambda(a^2b^2-a^4-b^2)$.

令
$$\begin{cases} L_a=b+\lambda(2ab^2-4a^3)=0 & (6)\\ L_b=a+\lambda(2a^2b-2b)=0 & (7)\\ L_\lambda=a^2b^2-a^4-b^2=0 & (8)\end{cases}$$

由(6)·a−(7)·b，可得 $b^2=2a^4$，并注意到 $\lambda\neq0$. 代入(8)式得

$$2a^6-a^4-2a^4=0,$$

故 $a=\dfrac{\sqrt6}{2}$. 从而　$b=\sqrt2a^2=\dfrac{3\sqrt2}{2}$.

在实际问题中，符合条件的椭圆面积的最小值是存在的，因此当 $a=\dfrac{\sqrt6}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt2}{2}$ 时，此椭圆的面积最小.

A 类题

1. 选择题

(1)二元实值函数 $z=2x-y$ 在区域 $D=\{(x,y)\in R^2\,|\,0\leqslant y\leqslant 1-|x|\}$ 上的最小值为(　　).

(A) 0　　(B) −1　　(C) −2　　(D) −3

(2)设 $M(x,y,z)$ 为平面 $x+y+z=1$ 上的点，且该点到两定点(1,0,1)，(2,0,1)的距离平方之和为最小，则此点的坐标为(　　).

(A) $(1,\frac12,\frac12)$　　(B) $(1,-\frac12,\frac12)$　　(C) $(1,-\frac12,-\frac12)$　　(D) $(1,\frac12,-\frac12)$

(3)设函数 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0,0)处取得极小值的一个充分条件是(　　).

(A) $f(0)>1, f''(0)>0$　　(B) $f(0)>1, f''(0)<0$

(C) $f(0)<1, f''(0)>0$　　(D) $f(0)<1, f''(0)<0$

2. 利用 Lagrange 乘数法，求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $x+y-1=0$ 下的极值.

3. 求点(2,8)到抛物线 $y^2=4x$ 的距离.

4. 求空间一点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

5. 在平面 $2x-y+z=2$ 上求一点，使该点到原点和 $(-1,0,2)$ 的距离平方和最小.

B 类题

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在圆盘 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\leqslant 9$ 上的最大值与最小值.

2. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大.

3. 求过第一卦限中点 (a,b,c) 的平面，使之与三坐标平面所围成的四面体的体积最小.

C 类题

1. 设 $\sum_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\sum_2:z^2=x^2+y^2$，Γ 为 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 的交线，求椭球面 $\sum_1$ 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

2. 若 a,b,c 均大于 0，证明不等式 $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\leqslant\sqrt[3]{abc}$.

第四节　偏导数的几何应用

了解一元向量值函数及其导数的概念与计算方法，了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，熟练掌握它们的方程的求法.

知识要点

1. 一元向量值函数及其极限、连续性、导数的概念与计算方法；
2. 空间曲线的切线与法平面方程；
3. 空间曲面的切平面与法线方程.

典型例题

例 1　求曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=\frac{3}{4}\\ x-2y+z=0\end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程.

解　方程组两边对 x 求全导数得 $\begin{cases}x+yy'+zz'=0\\ 1-2y'+z'=0\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}y'=\frac{z-x}{y+2y}\\ z'=-\frac{y+2x}{y+2z}\end{cases}$

从而 $y'|_{(1,1,1)}=0$，$z'|_{(1,1,1)}=-1$，故 $\boldsymbol{T}=(1,0,-1)$.

切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$

备注：一般地，

(1) 若 Γ: $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$ 则在 $t=t_0$ 处，切向量 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$；

(2) 若 Γ: $\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$ 则在 $x=x_0$ 处，切向量 $\boldsymbol{T}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$；

(3)若 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 则在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点，切向量 $\boldsymbol{T}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$（注意条件），此例题属第三种情形.

例 2 求球面 $x^2+y^2+z^2-4=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2-2x=0$ 的交线 Γ 在点 $P_0(1,1,\sqrt{2})$ 处的切线方程与法平面方程.

解 对两个曲面方程式两端求全微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0,\quad 2x\mathrm{d}x+zy\mathrm{d}y-2\mathrm{d}x=0$$

在点 $P_0(1,1,\sqrt{2})$ 处，有

$$2\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+2\sqrt{2}\,\mathrm{d}z=0,\ 2\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-2\mathrm{d}x=0,$$

解得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

于是 Γ 在点 P_0 的切向量为 $\boldsymbol{s}=(1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$，

从而求得所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\sqrt{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-\sqrt{2}}=z-\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}(z-\sqrt{2})=0,$$

即 $$\sqrt{2}x-z=0.$$

例 3 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一切平面，它在坐标轴的正半轴截取相等的线段.

分析 只需按题设要求一步一步去完成即可，关键是建立完切平面方程后，应注意到切点满足椭球面方程，最好把切平面方程化简成平面的截距式方程.

解 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，切点为 (x_0,y_0,z_0)，$F_x=\frac{2x_0}{a^2}$，$F_y=\frac{2y_0}{b^2}$，$F_z=\frac{2z_0}{c^2}$，故该点处切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})$，切平面方程为 $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，即 $\dfrac{x}{\frac{a^2}{x_0}}+\dfrac{y}{\frac{b^2}{y_0}}+\dfrac{z}{\frac{c^2}{z_0}}=1.$

依题意,有截距 $\frac{a^2}{x_0}=\frac{b^2}{y_0}=\frac{c^2}{z_0}=k(k>0)$,即 $x_0=\frac{a^2}{k},y_0=\frac{b^2}{k},z_0=\frac{c^2}{k}$.

由于切点在椭球面上,故有 $\frac{\left(\frac{a^2}{k}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b^2}{k}\right)^2}{b^2}+\frac{\left(\frac{c^2}{k}\right)^2}{c^2}=1$,即 $\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}=1$,

从而解得 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

于是有 $x_0=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},y_0=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},z_0=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

切平面方程为 $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

A 类题

1. 选择题

(1)下列做法正确的是(　　).

(A)设方程 $z^2=x^2+y^2+a^2$, $F_x=2zz_x-2x$, $F_z=2z$,代入 $z_x=-\frac{F_x}{F_z}$,得 $z_x=\frac{x}{2z}$

(B)设方程 $z^2=x^2+y^2+a^2$, $F_x=-2x$, $F_z=2z$,代入 $z_x=-\frac{F_x}{F_z}$,得 $z_x=\frac{x}{z}$

(C)求 $z=x^2+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面,因为曲面法向量

$\boldsymbol{n}=(2x,2y,-1)\mathbin{/\!/}(2,2,-1)$, 所以 $\frac{2x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{-1}{-1}$, $\Rightarrow x=1$, $y=1$, $z=-1$

切平面方程为 $2(x-1)+2(y-1)-(z+1)=0$

(D)求 $xyz=8$ 平行于平面 $x+y+z=1$ 的切平面,因为曲面法向量

$\boldsymbol{n}=(yz,xz,xy)\mathbin{/\!/}(1,1,1)$, 所以 $\frac{yz}{1}=\frac{xz}{1}=\frac{xy}{1}$, $\Rightarrow x=y=z=1$

切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

(2)曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 与平面 $x+4y+6z=0$ 平行的切平面方程是(　　).

(A) $x+4y+6z=\pm\frac{21}{2}$　　(B) $x+4y+6z=21$

(C) $x+4y+6z=-21$　　(D) $x+4y+6z=\pm 21$

(3)平面 $2x+3y-z=\lambda$ 是曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 处的切平面,则 λ 的值是(　　).

(A) $\frac{4}{5}$　　(B) $\frac{5}{4}$　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

(4)已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 的切平面 $2x+2y+z=0$,则点 P 的坐标是(　　).

(A) $(1,-1,2)$　　(B) $(-1,1,-2)$

(C) $(1,1,2)$　　(D) $(-1,-1,2)$

(5)曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,-y_0)$ 的切平面方程是(　　).

(A) $z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

(B) $z=f(x_0,-y_0)-f_x(x_0,-y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y+y_0)$

(C) $z=f(x_0,-y_0)+f_x(x_0,-y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,-y_0)(y+y_0)$

(D) $z=f(x_0,-y_0)+f_x(x_0,-y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,-y_0)(y-y_0)$

(6)设函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)附近有定义,且 $f_x(0,0)=-3$, $f_y(0,0)=1$, $f_x(0,0)=-3$ 则(　　).

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为(3,1,1)

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为(1,0,3)

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为(3,0,1)

2.求下列曲线在指定点的切线和法平面方程:

(1) 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$ 在点 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$;

(2)曲线 $L:\begin{cases} 3x^2+2y^2-2z-1=0 \\ x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0 \end{cases}$ 在点 $M(1,1,2)$.

3.求下列曲面在指定点的切平面和法线方程:

(1) 曲面 $y-e^{2x-z}=0$,在点 $M(1,2,2)$;

(2) 曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，在点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$；

(3) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$，在点$(2,1,4)$；

(4) 曲面 $S:\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=2v\end{cases}$，在 $u=2,v=\frac{\pi}{4}$处.

4.已知曲面 $4x^2+y^2-z^2=1$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x-y+z=1$，求切平面的方程.

B 类题

1. 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$上任意一点处的切平面在各个坐标轴上的截距之和等于 a.

2. 求 λ 的值，使两曲面：$xyz=\lambda$ 与$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限内相切，并求出在切点处两曲面的公共切平面方程.

3. 求曲面 $y=1-x^2$ 与曲面 $2x+z=3$ 的交线上一点，使交线在该点处的切线平行于已知直线$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{2}$，并求交线在该点处的法平面.