第三章 第一型曲线积分和曲面积分

第一节 第一型曲线积分

理解第一型曲线积分的概念,了解其性质,会计算第一型曲线积分并会用第一型曲线积分表达并计算一些几何量和物理量.

知识要点

1. 第一型曲线积分的概念与性质,以及积分存在的条件;
2. 第一型曲线积分的计算法.

典型例题

例 1 计算 $\int_{\Gamma}(x^2+2y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中 Γ 是曲面 $x^2+2y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

分析 本题的关键是将曲线 Γ 用参数方程表示.

解 由 $x+z=1$ 得 $z=1-x$,将其代入 $x^2+2y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 中得 $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$,

该式可写成参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t+\frac{1}{2}\\ y=2\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,于是 $z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t$. 因此

$$\int_{\Gamma}x^2+2y^2+z^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+4\sin^2 t\right)\sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2+(2\cos t)^2+(\sqrt{2}\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}9+8\sin^2 t\mathrm{d}t=26\pi.$$

例 2 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,计算 $\oint_L 2xy+3x^2+4y^2\mathrm{d}s$.

解 原式 $=\oint_L 2xy\mathrm{d}s+\oint_L 3x^2+4y^2\mathrm{d}s$,由对称性得 $\oint_L 2xy\mathrm{d}s=0$,由 L 的方程知 L 上

的点(x,y)满足$3x^2+4y^2=12$，因此$\oint_L 3x^2+4y^2\mathrm{d}s=12\oint_L \mathrm{d}s=12a$，于是$\oint_L 2xy+3x^2+4y^2\mathrm{d}s=12a$.

A 类题

1. 回答下列问题：

(1)如何利用微元法求曲线的质量？

(2)第一型曲线积分的定义是什么？

(3)第一型曲线积分的线性性质和可加性指的是什么？

(4)计算第一型曲线积分的基本方法是什么？

2. 计算下列弧长的曲线积分：

(1)$\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中L是以$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$为顶点的三角形；

(2) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，$L$ 为圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$；

(3) $\int_L y\,ds$，L 为抛物线 $y^2=2x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,2)$ 的一段弧；

(4) $\int_L |y|\,ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 与平面 $x=y$ 的交线；

(5) $\int_L z\,ds$，L 为圆锥螺线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\leqslant t\leqslant t_0)$；

(6) $\int_L x^2\mathrm{d}s$，L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$；

(7) $\int_\Gamma (5yz-9xy)\mathrm{d}s$，$\Gamma$ 是从 $A(1,0,1)$ 到点 $B(3,3,7)$ 的直线段；

(8) $\int_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=at, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

3. 已知曲线 $x=a, y=at, z=\frac{1}{2}at^2, (0\leqslant t\leqslant 1, a>0)$ 上点 (x,y,z) 处的线密度 $\mu=\sqrt{\frac{2z}{a}}$，试求此曲线的质量.

B类题

1. $\int_L xyz\,ds$,其中 L 为曲线 $x=t, y=\frac{2\sqrt{2t^3}}{3}, z=\frac{1}{2}t^2$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的一段弧.

2. $\int_L x^2\,ds$,其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线.

3. 求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant \pi)$ 的弧的质心.

C类题

试利用对称性求 $\oint_\Gamma (x-2y+3z^2)\,ds$,其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

第二节　第一型曲面积分

了解第一型曲面积分的概念,性质及其计算方法,并会用它求一些几何量和物理量.

知识要点

对面积的曲面积分(第一型曲面积分)的概念、性质、存在条件及计算法.

典型例题

例 1　计算 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}\,dS$,其中 $\sum$ 为曲面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1,z\leqslant 1$ 位于第一和第八卦限的部分.

解　用平面 $z=0$ 将曲面 Σ 分为 Σ_1 和 Σ_2 两片,$\sum_1: z=\sqrt{2(1-x^2-y^2)}$,它在 xOy 面上的投影区域为

$$D_1=\left\{(x,y)\left|\frac{1}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right.\right\}$$

$\sum_2: z=-\sqrt{2(1-x^2-y^2)}$,它在 xOy 面上的投影区域为

$$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}\,dS=\iint\limits_{D_1}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{4-(2-2x^2-2y^2)}}\times\sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}\sqrt{\frac{1}{2}}\,dxdy=\frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}\,dS=\iint\limits_{D_2}\sqrt{\frac{1}{2}}\,dxdy=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}\,dS=\iint\limits_{\Sigma_1}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}\,dS+\iint\limits_{\Sigma_2}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}\,dS=\frac{3\sqrt{2}}{16}.$$

A 类题

1. 回答下列问题:

(1)如何利用微元法求空间曲面的面积?

(2)第一型曲面积分的定义是什么？其物理背景如何？

(3)第一型曲面积分的线性性质和可加性指的是什么？

(4)计算第一型曲面积分的基本方法是什么？

2. 计算下列第一型曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$，其中 $\sum$ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$，$\sum$ 为四面体 $x+y+z\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界曲面；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，$\sum$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S$，$\sum$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割的下面的部分；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 $\sum$ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

3. $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$\sum$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截得的有限部分.

B 类题

1. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内那一部分面积.

2. 求球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的表面积.

3. 求平面 $x+y=1$ 上被坐标面与曲面 $z=xy$ 截下的在第一卦限部分的面积.

C类题

设 $\sum$ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in\Sigma$,π 为 $\sum$ 在点 P 的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为原点到平面 π 的距离.求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.