总习题 10

1. 单项选择题.

(1) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$D_1=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$ 等于（　）.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$　　(B) $4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$

(C) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$　　(D) $4\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$

(2) 设有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\geqslant 0\}$，$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则（　）.

(A) $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v$

(3) 设函数 $f(x,y)$ 在正方形闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上连续，则积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于（　）.

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^0 f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^y f(x,y)\mathrm{d}x$

2. 计算下列积分.

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^9 x\sin(y^2)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{2+x^3}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$.

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \sin x,0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

6. 利用极坐标计算积分$\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

7. 设D是由曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$($a>0,b>0$为常数)与$x$轴,$y$轴所围成的闭区域,计算二重积分$\iint\limits_D y\,dx\,dy$.

8. 设闭区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$,计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$.

9. 求由抛物线$y^2=px$,$y^2=qx$($0<p<q$)以及双曲线$xy=a$,$xy=b$($0<a<b$)所围成的闭区域的面积.

10. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,证明:

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)\,dy=\int_a^b f(y)(b-y)\,dy.$$

11. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,证明:

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)\,dy=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2.$$

12. 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\,dv$,其中$\Omega$是由$xOy$平面上曲线$y^2=2x$绕$x$轴旋转而成的曲面与平面$x=5$所围成的闭区域.

13. 将三次积分$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dz$变换为柱坐标及球坐标形式的三次积分.

14. 在半径为a的均匀半球体的大圆上接一个材料与半球体相同且半径仍为a的圆柱体.为使拼接后的立体的质心位于球心,问圆柱的高应为多少?

15. 求由抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成的均匀薄片(面密度为常数ρ)对于直线$y=-1$的转动惯量.