(1) $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$；$y(0)=y''(0)=0$，$y'(0)=y'''(0)=1$；

(2) $y^{(4)}-y=0$；$y(0)=2$，$y'(0)=-1$，$y''(0)=-2$，$y'''(0)=1$；

(3) $y^{(4)}-4y'''+8y''-8y'+3y=0$；$y(0)=0$，$y'(0)=0$，$y''(0)=2$，$y'''(0)=0$.

8. 求解方程的通解：

(1) $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$；

(2) $y^{(4)}+2y''+y=\sin x$.

(B)

1. 求初值问题：$y^{(4)}+y=2e^x$；$y(0)=y'(0)=y'''(0)=1$.

2. 设实常系数的 4 阶线性齐次方程有两个解 $\cos 4x$ 和 $\sin 3x$，求其通解，并确定方程.

3. 设 4 阶实系数线性齐次微分方程的一个解是 $x\cos 4x$，求其通解，并确定该方程.

4. 设 4 阶实系数线性齐次微分方程的一个解是 x^3e^{-x}，求其通解，并确定该方程.

总习题 14

1. 试求立方抛物线族 $y=cx^3$ 的正交轨线族所满足的微分方程.

2. 讨论微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2\,|\,y\,|^{\frac{1}{2}},\\ y(0)=0.\end{cases}$$

3. 求 $\dfrac{dy}{dx}=(\cos x\cos 4y)^2$ 的全部解.

4. 设 $q(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)=q$，又 $p>0$，试证明：方程

$$\frac{dy}{dx}+py=q(x)$$

的一切解 $y(x)$，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{q}{p}$.

5. 求解 Riccati 方程 $\dfrac{dy}{dx}=-y^2-\dfrac{4}{x}y-\dfrac{2}{x^2}$.

6. 证明方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 具有形如 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$ 的积分因子的充要条件是 $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-M\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}=f[\varphi(x,y)]$，并求出该积分因子.

7. 如果两个方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$
$$y'' + s(x)y' + t(x)y = 0$$

在 $[a,b]$ 上有一个公共解,试求出此解,并分别求出这两个方程的通解.

8. 设方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的三个解为 $\varphi(x)=2e^x+x^3$,$\psi(x)=3e^x+4x^3$,$\omega(x)=5e^x-e^{x^2}\cos x$,试求此方程满足初始条件:$y(0)=1$,$y'(0)=4$ 的解.

9. 已知方程 $y''-4xy'-(3-4x^2)y=e^{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的两个特解为 $y_1=-e^{x^2}$,$y_2=e^{x+x^2}-e^{x^2}$,试求此方程的通解.

10. 已知一个 4 阶线性齐次微分方程的系数都是实常数,并且它的一个解是 $x\sin 3x$,求其通解,并写出该方程.

11. 设 2 阶微分方程 $y''+ay'+by=ce^{2x}$ 的一个特解为 $y=e^{3x}+(1+x)e^{2x}$,a,b,c 是未知常数,求该方程的通解.

12. 已知 $y_1=x^2$ 是 3 阶方程 $(1-x^2)y'''-xy''+y'=0$ 的一个特解,求方程的通解.

13. 求方程 $(2x+1)y''-4(2x+1)y'+8y=0$ 的通解.

14. 求非齐次方程 $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=(x^2+x-1)e^{2x}$ 的通解.