总习题 9

1. 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\cos\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)^2$.

2. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2}{x^2+y}$存在吗？证明你的结论.

3. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是在该点连续的________条件；$f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是在该点可微分的________条件.

(2) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在是在该点处可微分的________条件；$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是在该点的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件.

(3) 函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点 (x,y) 存在且连续是在该点处可微分的________条件.

(4) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的________条件.

4. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处：

(1) 是否连续；

(2) 两个偏导数是否存在；

(3) 偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 是否连续；

(4) 是否可微.

5. 设 $x^y=y^x\ (x\neq y)$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有连续二阶导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 设方程$\begin{cases} u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$其中 f,g 可微，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

8. 设 $u=\varphi(x+\psi(y))$，其中 φ,ψ 二阶可微，证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

9. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$ 确定，在曲面上点 $(\ln 2,\ln 2,1)$ 处，

(1) 求偏导数；

(2) 求法向量的方向余弦.

10. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，$\boldsymbol{l}_1=\{1,1\}$，$\boldsymbol{l}_2=\{-1,1\}$，已知在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}=0$，试确定单位向量 $\boldsymbol{l}$，使得 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

11. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使 π 过已知直线 L：$\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

12. 证明曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$（其中 a,b,c 是常数）上任一点的切平面通过一个定点.

13. 在球面 $x^2+y^2+z^2=1(x>0,y>0,z>0)$ 上求切平面，使得它与三个坐标面所围的体积最小.

14. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=16$ 与 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=24$ 的交线的最高点和最低点的坐标.

15. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.