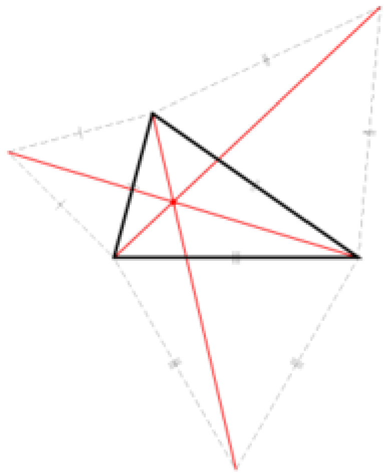
WIKIPEDIA

費馬點

维基百科，自由的百科全书



在几何学中，**费马点**是位于三角形内的一个点。给定一个三角形△ABC的话，从这个三角形的费马点P到三角形的三个顶点A、B、C的距离之和

$$PA + PB + PC$$

比从其它点算起的都要小。这个特殊点对于每个给定的三角形都只有一个。

费马点问题最早是由法国数学家皮埃爾·德·費馬在一封写给意大利数学家埃萬傑利斯塔·托里拆利（气压计的发明者）的信中提出的。[1]托里拆利最早解决了这个问题，而19世纪的数学家斯坦纳重新发现了这个问题，并系统地进行了推广，因此这个点也称为**托里拆利点**或**斯坦纳点**，相关的问题也被称作**费马-托里拆利-斯坦纳问题**。

目录

源起：费马的问题

1638年，勒内·笛卡儿邀请费马思考关于到四个顶点距离为定值的函数的问题。这大概也是1643年，费马写信向埃萬傑利斯塔·托里拆利询问关于费马点的问题的原因[1]。费马的问题是这样的：

> 平面上有三个不在同一条直线上的点A, B, C，对平面上的另一个点P，考虑点P到原来的三个点的距离之和：PA + PB + PC。是否有这样一个点P_0，使得它到点A, B, C的距离之和$P_0A + P_0B + P_0C$比任何其它的PA + PB + PC都要小？

这个问题首先被托里拆利解决，但他生前并没有发表。托里拆利的学生温琴佐·维维亚尼在1659年将他的遗作整理發表，其中包括了费马点问题的证明[2]:124。他的解法中用到了椭圆的焦点的性质。[3][4]

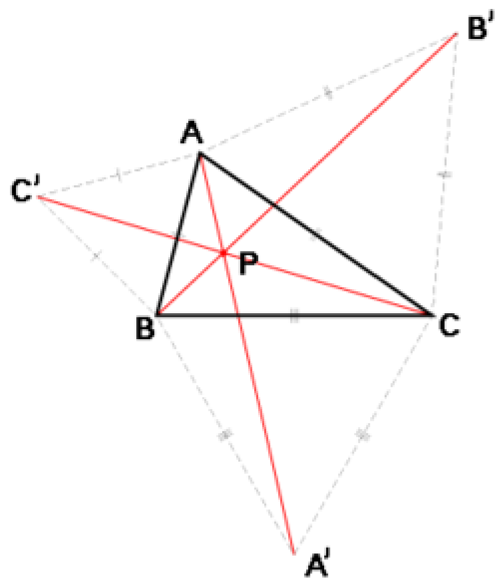
费马-托里拆利点

托里拆利的解法中对这个点的描述是：对于每一个角都小于120°的三角形ABC的每一条边为底边，向外作正三角形，然后作这三个正三角形的外接圆。托里拆利指出这三个外接圆会有一个共同的交点，而这个交点就是所要求的点。这个点和当时已知的三角形特殊点都不一样。这个点因此也叫做托里拆利点。

1647年，博納文圖拉·卡瓦列里在他的著作《几何学题集》（*Exerciones Geometricae*）中也探讨了这个问题。他发现，将作正三角形时作出的三个点与对面的顶点连接，可以得出三条线段。这三条线段交于托里拆利点，而且托里拆利点对每条边张的角都是120°。[5]

作法及证明

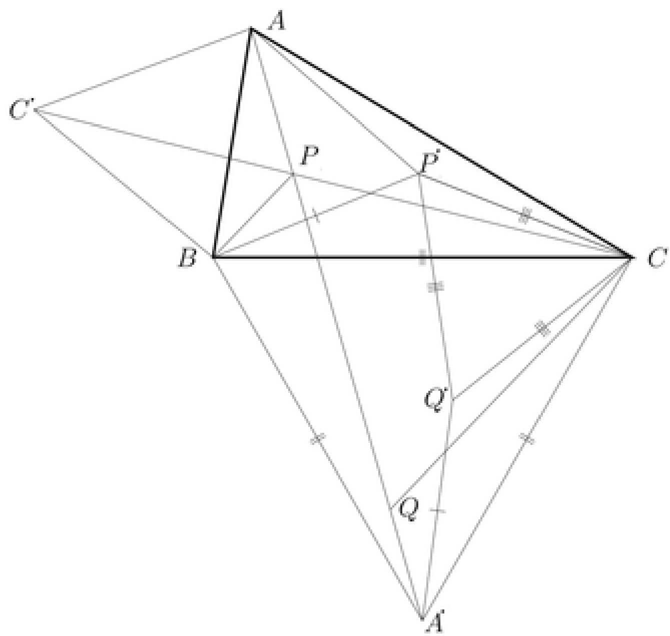
下面是三角形的费马点的作法：



- 当有一个内角不小于120°时，费马点为此角对应顶点。
- 当三角形的内角都小于120°时
  - 以三角形的每一边为底边，向外做三個正三角形△ABC'，△BCA'，△CAB'。
  - 連接CC'、BB'、AA'，则三条线段的交点就是所求的点。[6]

几何证明

三角形的内角都小于120°的情况：
首先证明CC'、BB'、AA'三条线交于一点。



设P为线段CC'和BB'的交点。注意到三角形C'AC和三角形BAB'是全等的，三角形C'AC可以看做是三角形B'AB以A点为轴心顺时针旋转60度得到的，所以角$\angle \mathbf{C'PB}$等于60度，和$\angle \mathbf{C'AB}$相等。因此，A、B、C'、P四点共圆。同样地，可以证明A、B'、C、P四点共圆。于是：

$$\angle \mathbf{APB} = \angle \mathbf{APC} = 120^\circ$$

从而$\angle \mathbf{CPB} = 120^\circ$。于是可以得出：A'、B、C、P四点共圆，即

$$\angle \mathbf{A'PB} = \angle \mathbf{A'CB} = 60^\circ$$

$$\angle \mathbf{APA'} = \angle \mathbf{APB} + \angle \mathbf{A'PB} = \mathbf{120^\circ} + \mathbf{60^\circ}$$

A、A'、P三点共线。也就是说CC'、BB'、AA'三条线交于一点。[6][7]:90

接下来证明交点P就是到三个顶点距离之和最小的点。

在线段AA'上选择一点Q，使得QP = PC。由于$\angle \mathbf{QPC} = \mathbf{60^\circ}$，所以等腰三角形PQC是正三角形。于是$\angle \mathbf{PCB} = \angle \mathbf{QCA'}$。同时QC = PC、BC = A'C，于是可以得出三角形BPC和三角形A'QC是全等三角形。所以QA' = PB。综上可得出：

PA + PB + PC = AA'

对于平面上另外一个点P'，以P'C为底边，向下作正三角形P'Q'C。运用类似以上的推理可以证明三角形BP'C和三角形A'Q'C是全等三角形。因此也有：

P'A + P'B + P'C = AP' + P'Q' + Q'A

平面上两点之间以直线长度最短。因此

P'A + P'B + P'C = AP' + P'Q' + Q'A' ≥ AA' = PA + PB + PC.

也就是说，点P是平面上到点A、B、C距离的和最短的一点。[6][2]:124-125

最后证明唯一性。

如果有另外一点P'使得P'A + P'B + P'C = PA + PB + PC，那么

AA' = AP' + P'Q' + Q'A'

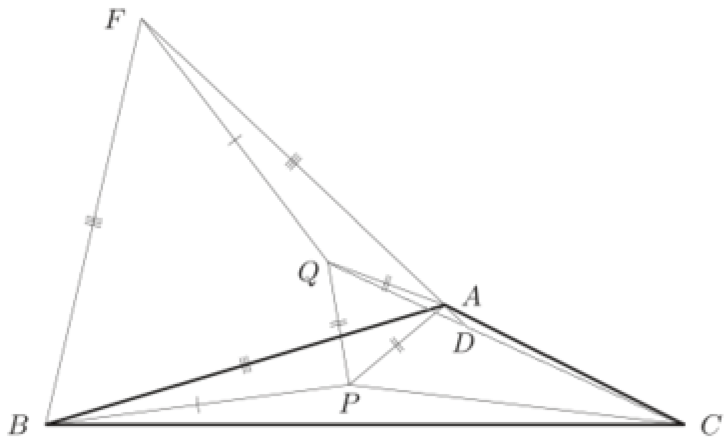
因此点P'和Q'也在线段AA'之上。依照P'和Q'的定义，可以推出

$$\angle \mathbf{AP'B} = \angle \mathbf{AP'C} = \mathbf{120^\circ}$$

因此P'也是CC'、BB'、AA'三条线的交点。因此P'点也就是P点。因此点P是唯一的。[7]:92

有一内角大于120°的情况。

如右图，$\angle \mathbf{BAC}$大于120°，P为三角形内一点。以BA为底边，向上作正三角形BAF；以PA为底边，向上作正三角形PAQ。于是三角形AQF和三角形APB是全等三角形。FQ = PB。所以



PA + PB + PC = FQ + QP + PC.

延长FA交QC于D点，则

FQ + QP + PC > FQ + QC = FQ + QD + DC > FD + DC = FA + AD + DC > FA + AC = AB + AC.
即PA + PB + PC > AB + AC.

所以A点到三顶点的距离比三角形内任意一点到三顶点的距离都小，即A点为费马点。

物理学解释

费马的问题也可以用物理的方法来解决。将平面上所给的三个给定点钻出洞来，再设有三条绳子系在一起，每条绳子各穿过一个洞口，而绳子的末端都绑有一个固定重量**m**的重物。假设摩擦力可以忽略，那么绳子会被拉紧，而绳结最后会停在平面一点的上方。可以证明，这个点就是三个给定点所对应的费马点。首先，由于绳长是固定的，而绳子竖直下垂的部分越长，重物的位置也就越低，势能越低。在平衡态的时候，系统的势能达到最小值，也就是绳子竖直下垂的部分的长度达到最大值，因此水平的部分的长度达到最小值。而绳子的水平部分的长度就是PA + PB + PC，因此这时PA + PB + PC最小，也就是达到费马点。

在系统处于平衡态时，由力学原理可知绳子两两之间张成的角度$\angle\mathbf{APB}$、$\angle\mathbf{BPC}$和$\angle\mathbf{APC}$ 之间满足合力公式：

$$\frac{\sin(\angle \mathrm{APB})}{\mathbf{m}g} = \frac{\sin(\angle \mathrm{BPC})}{\mathbf{m}g} = \frac{\sin(\angle \mathrm{APC})}{\mathbf{m}g}$$

也就是说这三个角相等，即都是120°。[6][8]:197-198

推广

费马点的定义可以推广到更多点的情况。设平面上有m个点：$P_1, P_2, \ldots, P_\mathrm{m}$，又有正实数：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mathrm{m}$。费马问题可以推广为：寻找一个点X，使得它到这m个点的距离在加权后之和:

$$\lambda_1 \cdot XP_1 + \lambda_2 \cdot XP_2 + \cdots + \lambda_m \cdot XP_m$$

是最小的。

高维的情况

费马点问题还可以推广到高维空间中。比如说在n维实向量空间$\mathbb{R}^n$中，给定m个点：$p_1, p_2, \ldots, p_\mathrm{m}$，对空间中另一点$x$，设它到前述m个点的欧几里德距离之和为函数Dist(x)：

$$\mathrm{Dist}(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - p_i\|$$

则费马点问题就变成寻找使得Dist(x)最小的一点$p_\mathrm{min} \in \mathbb{R}^n$[9]:236-237。与平面费马点问题相似，高维情况下的费马点问题也有由林德罗夫和斯图姆证明的类似结论[9]:237：

1. 使得Dist(x)最小点p_min并且是唯一的。
2. 如果从任何一点p_i到剩下的m-1点方向上的m-1个单位向量的向量和长度都大于1，那么：
   - p_min不是$p_1, p_2, \ldots, p_\mathrm{m}$中任何一点，
   - 从p_min到$p_1, p_2, \ldots, p_\mathrm{m}$方向上的m个单位向量的向量和是0。
3. 如果从某一点p_i到剩下的m-1点方向上的m-1个单位向量的向量和长度小于等于1，那么p_min就是这个点。

对于加权的费马点问题，也有类似的结论，只需将上述结论中的向量和替换为加权向量和，条件中的1也要替换为对应点的权重[9]:249-250。

参见

- 西姆松定理
- 九点圆
- 斯坦纳树

参考来源

1. P. de Fermat, "Œvres" , I , H. Tannery (ed.), Paris (1891) (Supplement: Paris 1922)
2. O. Bottema. *Selected Topics in Elementary Geometry*. Springer，第2版，插图版. 2008. ISBN 9780387781310.
3. E. Torricelli, "Opere" , I/2 , Faënza (1919) pp. 90–97
4. E. Torricelli, "Opere" , III , Faënza (1919) pp. 426–431
5. Clark Kimberling. Shortest connectivity: an introduction with applications in phylogeny. Springer. 2004. ISBN 978-0387235387.
6. 張雄. 《費馬——斯坦勒爾問題與平衡態公理》 (PDF). 《数學傳播》: 75–79. （原始内容 (PDF) 存档于2012-11-19）.
7. Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado. *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*. Springer, 插图版. 2009. ISBN 9783034600491.
8. Alexander Ostermann, Gerhard Wanner. *Geometry by Its History*. Springer. 2012. ISBN 9783642291630.
9. Vladimir Boltyanski, Horst Martini, V. Soltan, V. Valerii Petrovich Soltan. *Geometric Methods and Optimization Problems*. Springer, 插图版. 1999. ISBN 9780792354543.

- Stefan Hildebrandt,Anthony Tromba. The parsimonious universe: shape and form in the natural world. Springer. 1996. ISBN 978-0387979915.
- 一个实际的例子，费马点 （英语）.