# 数字图像处理第二次作业

22920212204396 黄子安

March 14, 2024

设 $p_r(r)$ 和 $p_s(s)$ 分别是连续型随机变量 $R$ 和 $S$ 的概率密度函数，假设 $S = T(R)$ 且 $T(\cdot)$ 连续可微并单调递增，证明

$$p_s(s) = p_r(r)|\frac{dr}{ds}|$$

solve: 先计算 $S$ 的分布函数，因为 $T(\cdot)$ 连续可微并单调递增，故其反函数存在且单调递增并可微，于是

$$F_s(s) = P\{S \le s\} = P\{T(R) \le s\} = P\{R \le T^{-1}(s)\} = F_r(T^{-1}(s)) = \int_0^{T^{-1}(s)} p_r(t)dt$$

之后根据分布函数和概率密度函数的关系以及反函数求导可得

$$p_s(s) = F_s'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{T^{-1}(s)} p_r(t)dt = p_r(T^{-1}(s)) \cdot \frac{d(T^{-1}(s))}{ds} = p_r(r) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dr}} = p_r(r) \cdot \frac{dr}{ds}$$

此题规定了 $T(\cdot)$ 连续可微并单调递增，对于单调递减得情况，有

$$F_s(s) = P\{S \le s\} = P\{T(R) \le s\} = P\{R \ge T^{-1}(s)\} = 1 - F_r(T^{-1}(s))$$

同理可得

$$p_s(s) = -p_r(r)\frac{dr}{ds}$$

综上可得

$$p_s(s) = p_r(r)|\frac{dr}{ds}|$$