

# 数字图像处理第四次作业

22920212204396 黄子安

April 11, 2024

1. 证明拉普拉斯算子  $\nabla^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  的旋转不变性。

原坐标  $(x, y)$  和旋转后坐标  $(x', y')$  的关系如下：

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

*proof*: 根据复合函数求偏导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x'} &= f'_1 \frac{\partial x}{\partial x'} + f'_2 \frac{\partial y}{\partial x'} = f'_1 \cos \theta + f'_2 \sin \theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} &= f''_{11} \cos^2 \theta + 2f''_{12} \cos \theta \sin \theta + f''_{22} \sin^2 \theta \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= f'_1 \frac{\partial x}{\partial y'} + f'_2 \frac{\partial y}{\partial y'} = -f'_1 \sin \theta + f'_2 \cos \theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} &= f''_{11} \sin^2 \theta - 2f''_{12} \cos \theta \sin \theta + f''_{22} \cos^2 \theta\end{aligned}$$

根据拉普拉斯算子定义可知：

$$\nabla^2 f(x', y') = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = f''_{11} + f''_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \nabla^2 f(x, y)$$

因此拉普拉斯算子具有旋转不变性

2. 证明傅里叶变换的旋转性：  $f(r, \theta + \theta_0)$  的傅里叶变换为  $F(\omega, \theta + \theta_0)$

*proof*: 由二维傅里叶变换可知

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

做极坐标变换，令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，此时  $dx dy = r dr d\theta$

再做换元令  $u = \omega \cos \phi, v = \omega \sin \phi$ ，由此可以得到：

$$\begin{aligned}F(\omega, \phi) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-j2\pi(\omega r \cos \theta \cos \phi + \omega r \sin \theta \sin \phi)} r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-j2\pi \omega r \cos(\theta - \phi)} r dr\end{aligned}$$

对旋转后空域函数  $f(r \cos(\theta + \theta_0), r \sin(\theta + \theta_0))$  做二维傅里叶变换可得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} f(r \cos(\theta + \theta_0), r \sin(\theta + \theta_0)) e^{-j2\pi \omega r \cos(\theta - \phi)} r dr$$

注意到  $f(rcos\theta, rsin\theta)$  是关于  $\theta$  周期为  $2\pi$  的周期函数，对  $\theta$  积分区间为  $[0, 2\pi]$ ，因此做换元  $\theta' = \theta + \theta_0$  后积分区间依旧可以采用  $[0, 2\pi]$ ，所以可得：

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{+\infty} f(rcos\theta', rsin\theta') e^{-j2\pi\omega rcos(\theta' - (\theta_0 + \phi))} r dr = F(\omega, \phi + \theta_0)$$

综上  $f(r, \theta + \theta_0)$  的傅里叶变换为  $F(\omega, \theta + \theta_0)$