第 1 次小测

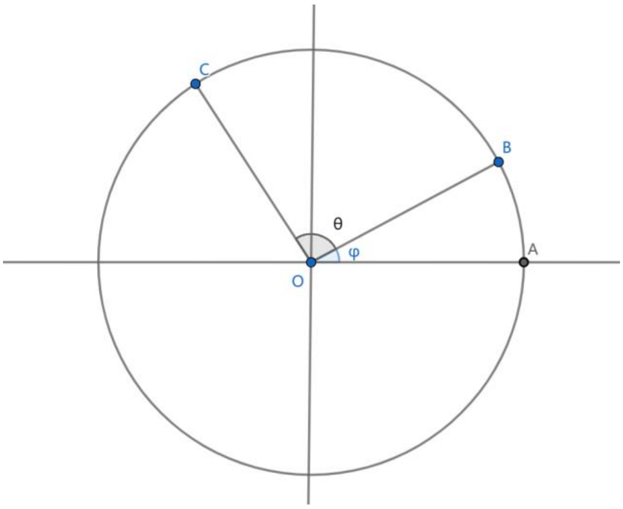
22920212204396 黄子安

- **请推导出数字图像的旋转矩阵：**

$$\boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}$$

方法一：三角函数代数关系

如图所示：



考察点 $B(x,y)$，设 B 原来极坐标为$(rcos\varphi\ ,rsin\varphi)$，经过旋转 θ 角度后变成 C 点，根据三角函数定义可得知 $C(x',y')$的极坐标为$(rcos(\varphi+\theta)\ ,rsin(\varphi+\theta))$，即：

$$\begin{cases}x' = rcos\varphi\cdot cos\theta - rsin\varphi\cdot sin\theta \\ y' = rsin\varphi\cdot cos\theta + rcos\varphi\cdot sin\theta\end{cases}$$

代入 $x = rcos\varphi, y = rsin\theta$ 得：

$$\begin{cases}x' = cos\theta\cdot x - sin\theta\cdot y \\ y' = sin\theta\cdot x + cos\theta\cdot y\end{cases}$$

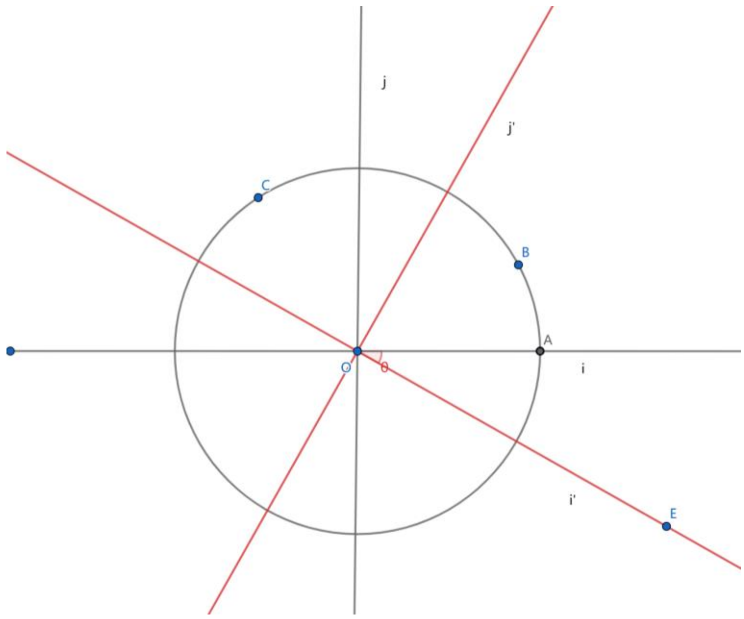
根据矩阵乘法的定义可得

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

最后根据矩阵乘法的几何意义可知旋转变换的矩阵为

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

方法二：线性代数过渡矩阵



看作点不动，根据运动相对性反方向旋转坐标系，根据线性代数知识，求在原坐标中变换后的坐标等价于求在反方向旋转过的新坐标中的坐标

原坐标基向量为$i = [1,0]^T, j = [0,1]^T$，根据三角函数定义可以知道以旧坐标表示的反方向旋转后的新坐标系的基向量为$i' = [cos\theta, -sin\theta]^T, j' = [sin\theta, cos\theta]^T$，因此可以知道过渡矩阵$P = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & sin\theta \end{bmatrix}$，设旋转前坐标为$X$，旋转后的坐标为$Y$，所以$PY = X$，根据过渡矩阵定义可以知道变换矩阵为

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$