

بنام خدا



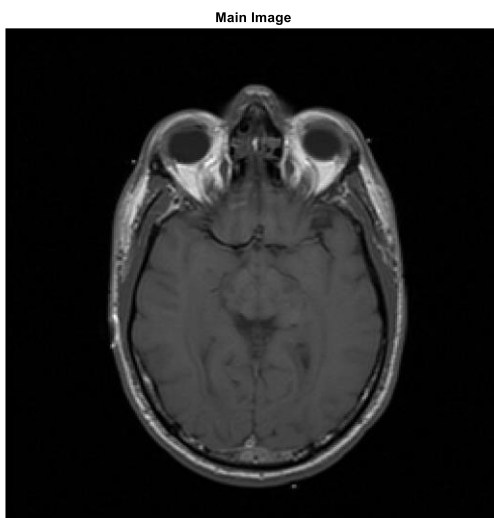
گزارش آزمایش ۷

امیرحسین زاهدی ۹۹۱۰۱۷۰۵

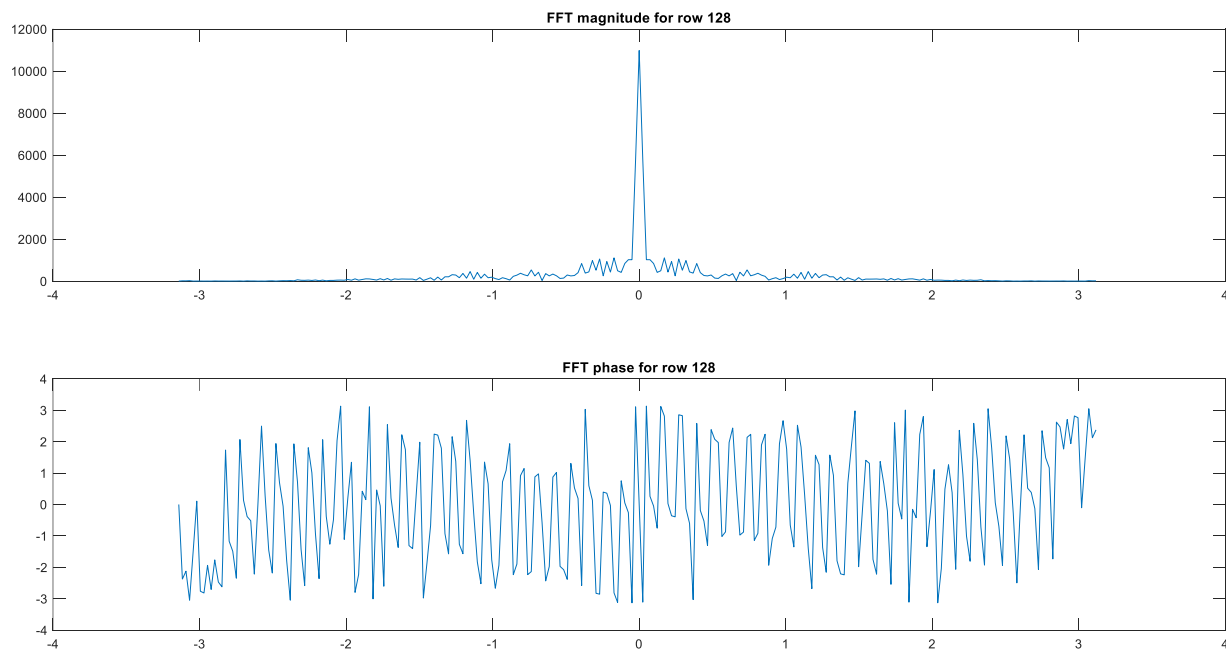
آرشام لؤلؤهری ۹۹۱۰۲۱۵۶

(Q1

تصویر به صورت زیر است:

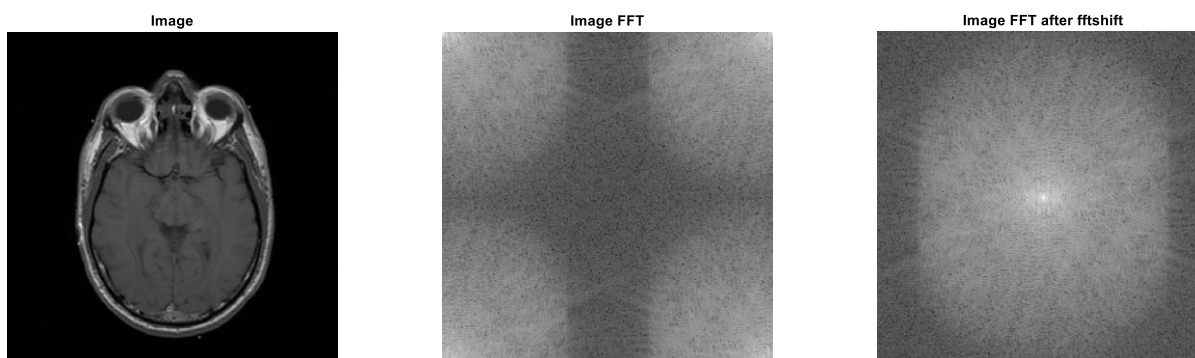


دامنه و فاز تبدیل فوریه ی خط میانی تصویر:



میبینیم که محتوای اصلی این سیگنال، حول فرکانس صفر (ترم DC) قرار دارد و سهم فرکانس های بالاتر، کمتر است. از طرفی تقارن زوج برای دامنه و تقارن فرد برای فاز فوریه داریم چون سیگنال موردنظر (سطر ۱۲۸)، حقیقی است.

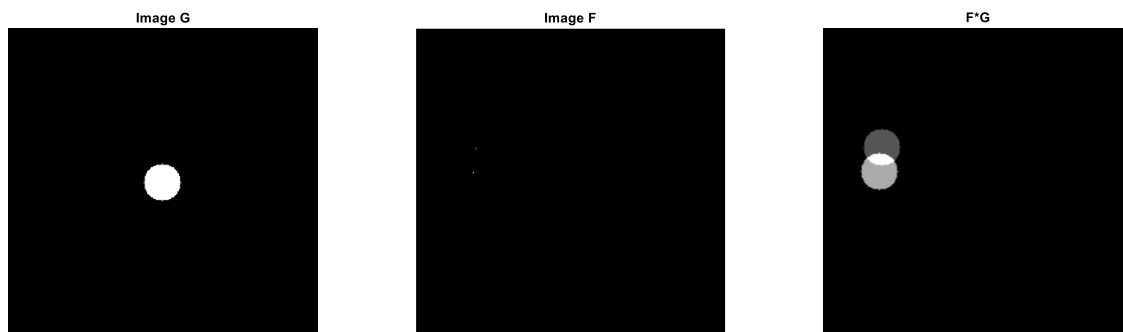
لگاریتم FFT کل تصویر در ستون وسط، و شیفت یافته ی FFT در ستون راست قرار دارد:



دستورهای `fft` و `fft2`، محتوای فرکانس صفر را در ابتدای بردار یا ماتریس قرار میدهند. در نتیجه برای `fft`، فرکانس صفر در ابتدای نمودار، و در `fft2`، فرکانس های صفر در بالا سمت چپ تصویر نمایش داده میشوند. دستور `fftshift` محتوای فرکانسی را در بردار یا ماتریس حاصله، شیفت میدهد تا فرکانس صفر در مرکز قرار گیرد. در تصویر بالا، ستون سمت راست به خوبی میتوان دید که محتوای فرکانس صفر (و نزدیکی صفر) در مرکز تصویر بوده و بیشتر از سایر فرکانسهاست.

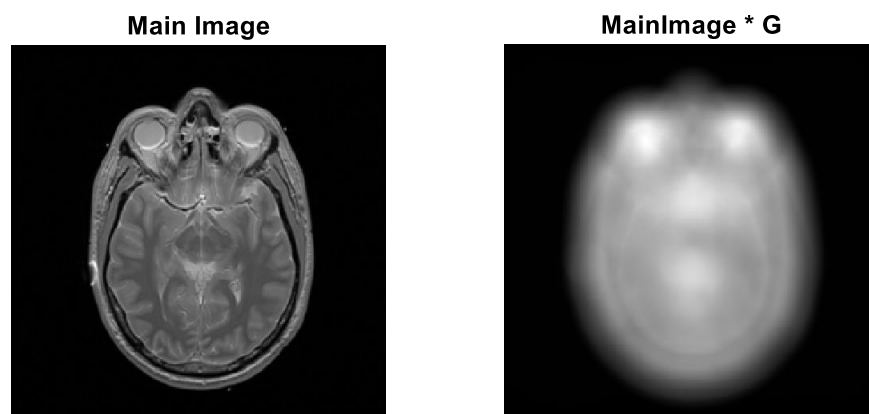
(Q2)

در زیر، ستون چپ تصویر `G`، وسط تصویر `F` و ستون راست نیز کانوالو این دو است:



تصویر F در واقع شامل دو سیگنال ضربه (یکی با دامنه ۱ و یکی با دامنه ۲) است و میدانیم در اثر کانولوشن ضربه با یک تابع (تصویر)، شیفت یافته ی تابع (تصویر) به اندازه ی مکان ضربه، حاصل میشود. ناحیه اشتراک دو دایره نیز مقدار ۳ خواهد داشت. برای کانولوشن نیز کافیست از تصاویر F, G فوریه گرفته و آنها را در هم ضرب کرده و سپس فوریه وارون ($fft2$) بگیریم. ضمناً در انتها از $fftshift$ استفاده میشود تا دوباره مرکز تصویر به وسط برگردد.

تصویر زیر حاصل کانولوشن با G است، که بطور مشابه با ضرب کردن در حوزه فرکانس بدست می آید:



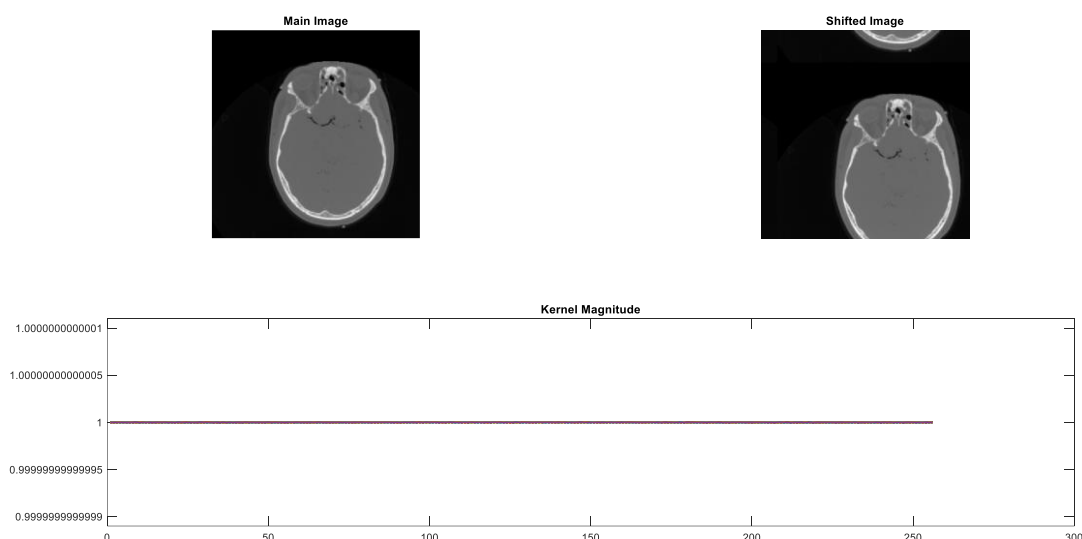
علت حالت blurring این است که تصویر G یک دایره به شعاع ۱۵ بوده. یعنی برای ساختن هر پیکسل از تصویر جدید، پیکسل متناظر با آن در عکس اصلی، و تمام

پیکسل های اطراف آن به شعاع ۱۵ پیکسل، میانگین گرفته میشوند. این میانگین گیری از پیکسل های همسایه موجب ایجاد حالت مات و کمتر شدن نوسانات در تصویر میشود.

(Q4_1

برای شیفت در حوزه مکان، باید فوریه در کرنل به فرم $e^{-\frac{j2\pi}{N}(x_0+y_0)}$ ضرب شود که x_0 و y_0 مقدار شیفت های افقی و عمودی هستند. سپس از حاصل فوریه وارون گرفته میشود.

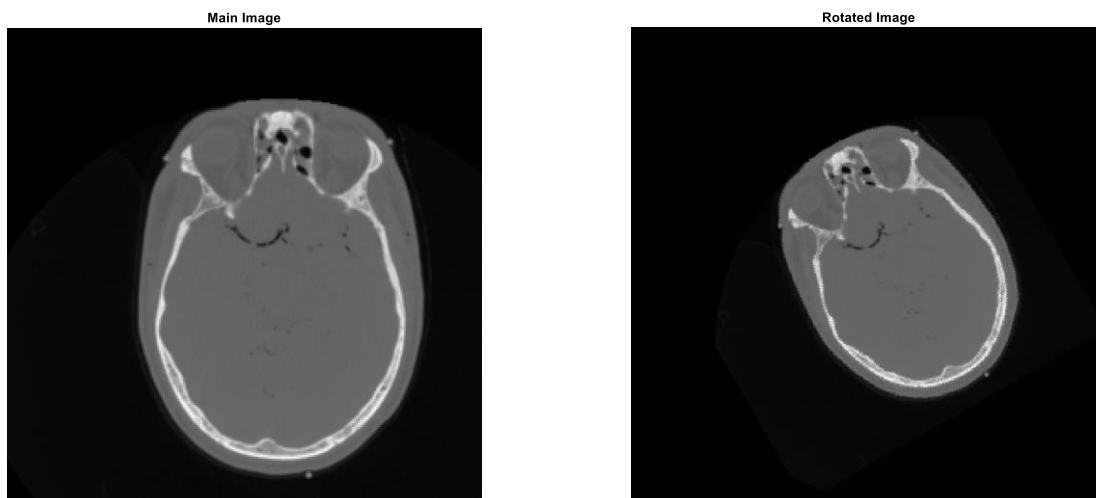
تصویر حاصله در کنار تصویر اصلی و دامنه ی کرنل:



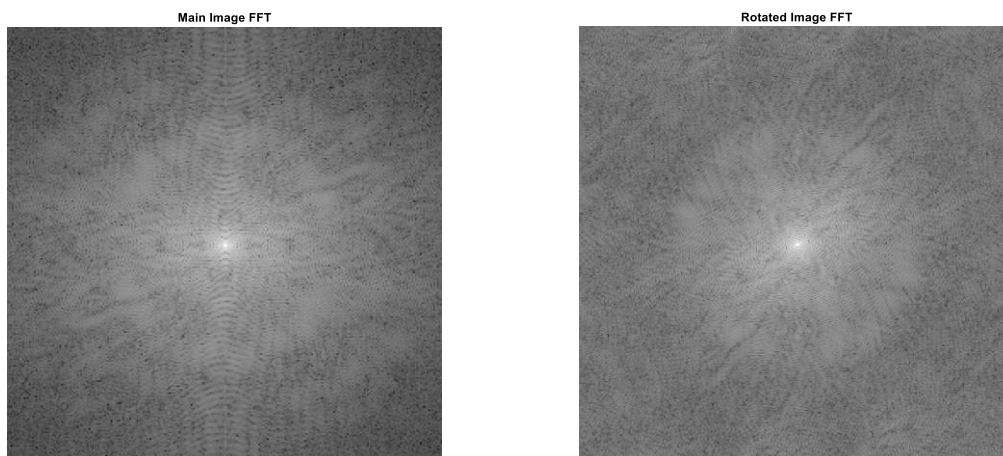
تصویر شیفت یافته است و دامنه کرنل نیز ثابت و ۱ است زیرا کرنل تنها فاز را تغییر میدهد (کرنل در واقع تمام گذر با فاز خطی تعمیم یافته است).

(Q4_2

ابتدا تصویر را با `imrotate` میچرخانیم:

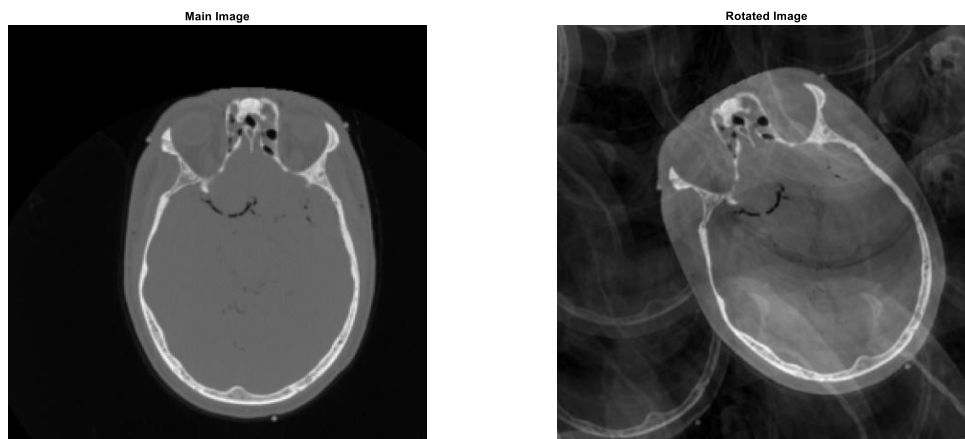


تبدیل فوریه این دو تصویر (پس از شیفت دادن با `fftshift`) به صورت زیر است:



برای این تصویر، محتواهای فرکانسی تا حد خوبی حول فرکانسهای صفر متقارن اند، اما با دقت بیشتر در دو تصویر، میتوان مشاهده کرد که تصویر سمت راست، نسبت به تصویر سمت چپ، ۳۰ درجه چرخش دارد.

حال از همین ویژگی برای چرخش تصویر استفاده میکنیم. فوریه‌ی تصویر را گرفته و با `imrotate`، به اندازه ۳۰ درجه میچرخانیم. حاصل پس از فوریه وارون گیری (و شیفت مجدد با `ifftshift`) به صورت زیر خواهد بود:



که با دقت خوبی، مجدداً چرخش تصویر اتفاق افتاده است.

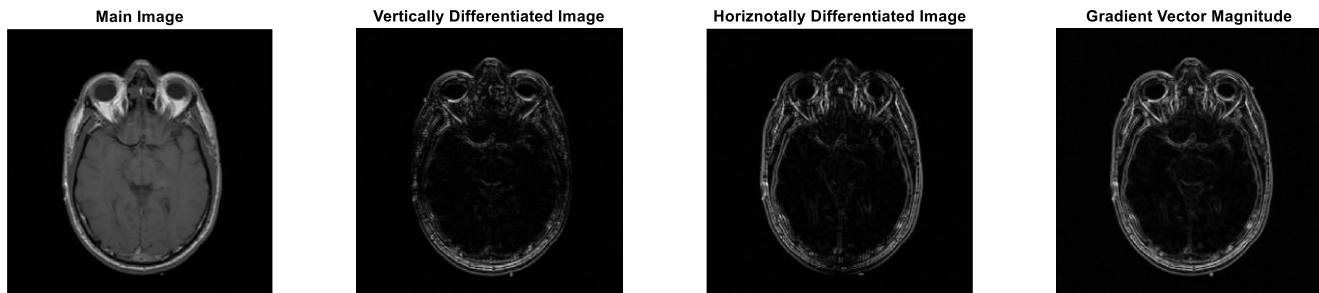
(Q5)

برای مشتق `central` افقی، باید پیکسل سمت راست و چپ هر پیکسل، از هم کم شوند. برای اینکار، سیگنال باید یکبار به اندازه $+1$ و یکبار به اندازه -1 شیفت بخورد، و در نهایت تقسیم بر ۲ انجام میشود.

برای مشتق عمودی نیز پیکسل بالا و پایین از هم کم میشوند. برای این کار باز هم از روش مشابه استفاده کرده، اما راستای انجام `circshift` را به راستای سطری تغییر میدهیم.

این دو مشتق، یک بردار گرادیان میسازند که میتوان اندازه آن را محاسبه کرد.

تصاویر حاصل به صورت زیر هستند:



در این نمایش، قدرمطلق مشتق های افقی و عمودی رسم شده اند چون مشتق منفی با مقدار زیاد نیز به معنای تغییرات زیاد در راستای متناظر میباشد.

تصویر دوم، در محل هایی که تغییرات عمودی داریم، لبه هایی روشن دارد. تصویر سوم نیز برای تغییرات افقی است و تصویر آخر، اندازه بردار حاصل از این دو است. پس هر جا که تغییرات افقی و یا عمودی زیاد داشته باشیم، اندازه بردار گرادیان نیز زیاد است و رنگ روشن دیده میشود.

ضمناً چون بردار گرادیان شامل برابندی از تغییرات افقی و عمودی است، لبه های مایل را نیز بهتر از دو تصویر قبلی نشان میدهد.

(Q6)

در روش Sobel، برای استخراج لبه های افقی و عمودی (به ترتیب)، از کانوالو تصویر اولیه در کرنل های زیر استفاده میشود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

با کانوالو کردن تصویر با ماتریس اول (لبه های افقی)، روشنایی نقاط پیکسل های راست پیکسل موردنظر، از روشنایی پیکسل های سمت چپ آن کم میشود. ضمناً پیکسل های نزدیکتر، ضریب ۲ و پیکسل های دورتر ضریب ۱ دارند. این باعث میشود نقش پیکسل های نزدیکتر در تعیین تغییرات افقی، بیشتر باشد.

به همین ترتیب با کانوالو کردن ماتریس دوم، نقاط پایینی از نقاط بالایی کم شده و تغییرات عمودی تصویر استخراج میشود.

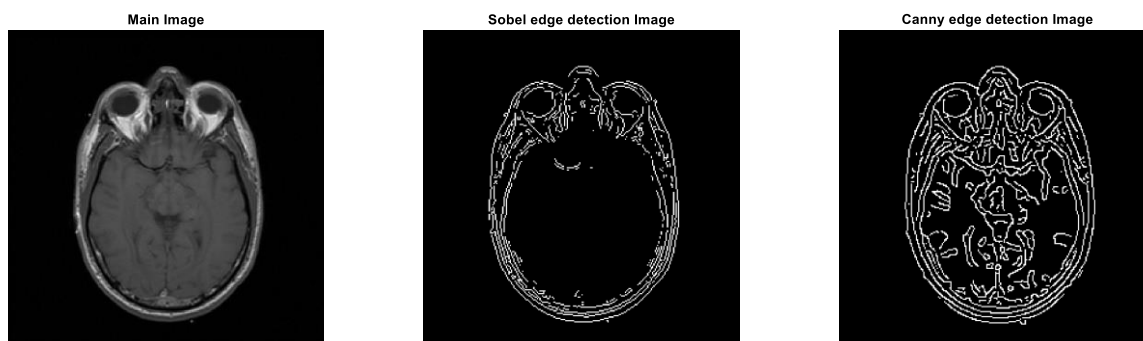
مشابه سوال قبل، با برآیند این دو میتوان بردار گرادیان را ساخت و از روی آن، تمام لبه های افقی و عمودی را در آورد.

در روش Canny، ابتدا تصویر از یک فیلتر گوسی عبور میکند تا smooth تر شود، و سپس از یکی از روش های استخراج لبه، برای رسیدن به تصویر نهایی استفاده میشود. فیلتر گوسی اولیه میتواند به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{159} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

که میانگینی از نقاط همسایه را در پیکسل موردنظر قرار میدهد. هرچه به سمت پیکسل های دورتر برویم، ضریبشان کمتر خواهد شد.

در متلب با استفاده از edge، به دو روش مذکور در بالا، لبه ها را استخراج میکنیم:



مشاهده میکنیم استفاده از فیلتر گاوسی باعث شده که روش canny به مراتب جزئیات بیشتری از لبه ها را استخراج کرده و عملکرد بهتری داشته باشد. اما هر دو روش، نسبت به مشتق central در سوال قبل، لبه ها را بهتر استخراج کرده اند.