Студент: Шитов Богдан
Группа: 2375
Вариант: 24
Дата: 12 мая 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика

Индивидуальное домашнее задание №3

Случайный вектор (ξ,η) имеет равномерное распределение в области D:

$$D = \{(x,y) \mid 2x - y \geqslant 1, x \leqslant 1, y \geqslant -1\}$$

$\zeta = 3\xi^3 - 3$, $\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$, $\mu = -2\xi + \eta$

Задание 1. *Найти $p_{\xi,\eta}(x,y)$, функции и плотности распределения компонент. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Так как распределение в области D(Рисунок 1) равномерное, то:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} C, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

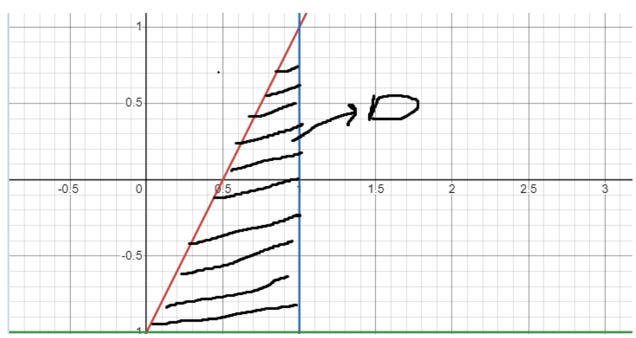

Рис. 1

Так как $\iint_{\mathbb{R}^2} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = 1$, но вне области D значение плотоности распределения равно нулю, получаем:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \iint_D p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{\frac{1+y}{2}}^{1} C dx = C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Тогда получаем следуующую плотность распределения:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Для компоненты ξ:

$$p_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)dy = \int_{-1}^{2x-1} dy = 2x$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Для компоненты η:

$$\int_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)dx = \int^{1} \frac{1+y}{2} dx = \frac{1-y}{2}$$

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1-y}{2}, & y \in [-1;1] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Компоненты независимы, если выполняется $p_{\xi,\eta}(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$ при любых значениях:

$$\frac{1-y}{2} \cdot 2x = 1$$

Неверно для x $=$ 0 и y $=$ 0 $\Rightarrow$ компоненты зависимы.

Найдем функции распределений$F_\xi(x)$(Рисунок 2) и $F_\eta(y)$(Рисунок 3):

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;0] \\ x^2, & x \in (0;1] \\ 1, & x \in (1;\infty) \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\eta(t)dt = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;-1] \\ \frac{1}{2} \cdot y + \frac{-y^2+3}{4}, & y \in (-1;1] \\ 1, & y \in (1;\infty) \end{cases}$$

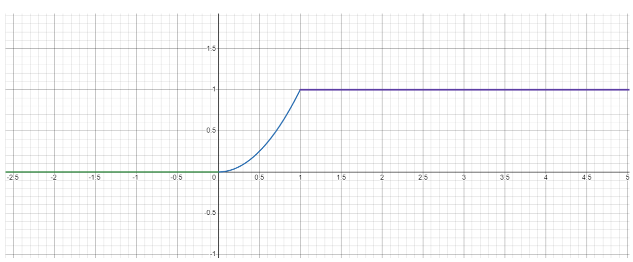

Рис. 2

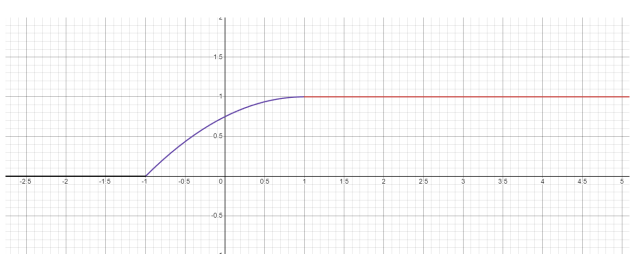

Рис. 3

Задание 2. *Найти распределения случайных величин ζ и ν. Вычислить $\mathbb{E}\zeta$, $\mathbb{D}\zeta$, $\mathbb{E}\nu$ и $\mathbb{D}\nu$. Построить графики функций распределений $F_\zeta(z)$ и $F_\nu(n)$.*

Решение. Найдем носители:
$\zeta = 3\xi^3 - 3$ $\operatorname{supp}\xi = [0;1]$, $\operatorname{supp}\zeta = [-3;0]$. Так как $g(\xi) = 3\xi^3 - 3$ и $g(\xi)$ монотонна:

$$g^{-1}(z) = \sqrt[3]{\frac{z+3}{3}}$$
$$(g^{-1}(z))' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot z^2 + 18 \cdot z + 27}}$$

Рассчитаем плотность и функцию распределения(Рисунок 4):

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{3z^2 + 18z + 27}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{z+3}}{\sqrt[3]{3}}, & z \in [-3;0] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} p_\zeta(t)dt = \begin{cases} 0, & z \in (-\infty;-3] \\ \dfrac{\sqrt[3]{(z+3)^2}}{\sqrt[3]{3^2}}, & z \in (-3;0] \\ 1, & z \in (0;\infty) \end{cases}$$

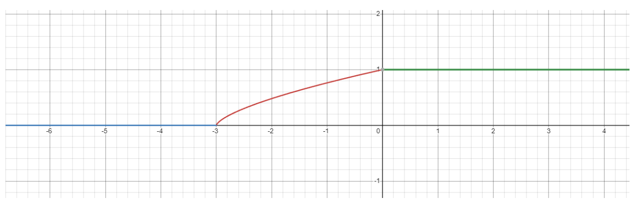

Рис. 4

$$\mathbb{E}\zeta = \int_{-3}^{0} z \cdot p_\zeta(z)dz = -1{,}8$$
$$\mathbb{E}\zeta^2 = \int_{-3}^{0} z^2 \cdot p_\zeta(z)dz = 4{,}05$$
$$\mathbb{D}\zeta = \mathbb{E}\zeta^2 - (\mathbb{E}\zeta)^2 = 4{,}05 - 1{,}8 = 0{,}81$$

Теперь найдем носители для ν и η. $\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$. $\operatorname{supp}\eta = [-1;1]$, $\operatorname{supp}\nu = \lfloor[-5{,}5]\rfloor$. Рассмотрим зависимость между носителями. Получается, что каждые 0,2 значения на носителе η меняется значение ν (Рисунок 5). Тогда найдем вероятнотсть, используя формулу вероятностт попадания случайной величины в заданный интервал:

$$\mathbb{P}(\nu = k) = \mathbb{P}(\eta \in [\frac{c}{5}; \frac{c+1}{5})) = -\int_{\frac{c}{5}}^{\frac{c+1}{5}} \frac{1-y}{2}dy = \frac{9-2c}{100}$$

Задание 3. *Условие задачи №3.*

Решение. Решение задачи №3.

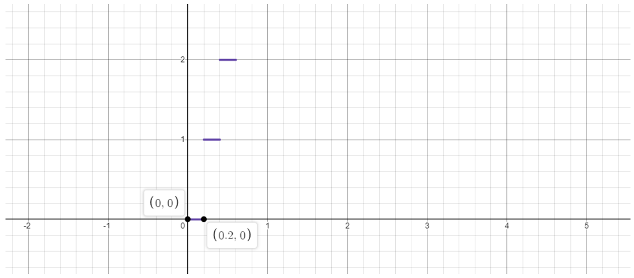

Рис. 5