

# 2023 年度“杉数杯”数学建模精英联赛

## A 题 扭转弹簧联动系统

弹簧在力学系统中作为重要的组成部分，能够有效控制机械组件的运动。而扭转弹簧与伸缩弹簧的联动是力学模型中经常见到的一个部分。扭转弹簧的运动模式主要是通过转动给予一个力矩，在扭动系统中承担了重要的任务。

如图 1 所示，这是一个扭转弹簧的系统示意图：



图 1：一个扭转弹簧的结构示意图

图 1 是一个扭转弹簧，弹簧存在两个臂，通过扭转的方式产生力矩。这一力矩的计算方式与胡克定律类似，满足：

$$N = K\theta$$

其中， $\theta$  为两个臂的夹角（即扭转角度，单位为 rad）； $K$  为刚度，是扭转弹簧的固定参数； $N$  为产生的力矩（ $\text{N} \cdot \text{m}$ ）。初始状况下可动臂与固定臂平行，记两臂之间夹角为扭转的角度。扭转弹簧的直径为 0.1 米。若忽略两臂的粗细影响，请通过数学建模的方式解决如下弹簧系统的动力学问题：

**问题一：** 如图 2 所示，考虑这样一个系统：在竖直墙面上固定有一个扭转弹簧，一臂垂直固定在墙上，另一臂可绕其支点做圆周运动。假设扭转弹簧的扭矩与其张开的角度成正比，比例系数即扭转弹簧的刚度为  $200 \text{ 牛}\cdot\text{米}$ 。现在在转动臂距离支点  $0.8 \text{ 米}$  的地方固定一个质量为  $25 \text{ 千克}$  半径为  $0.1 \text{ 米}$  的均质小球。我们在小球上施加一个向下为  $10 \text{ 牛}$  的拉力，在扭转弹簧打开并达到平衡后，去掉拉力。记撤掉拉力的瞬间为  $0$  时刻，建立小球的运动模型以描述  $0$ – $10$  秒内小球的运动过程，并给出小球在  $2, 4, 6, 8$  秒时的角速度及扭转弹簧扭转的角度。

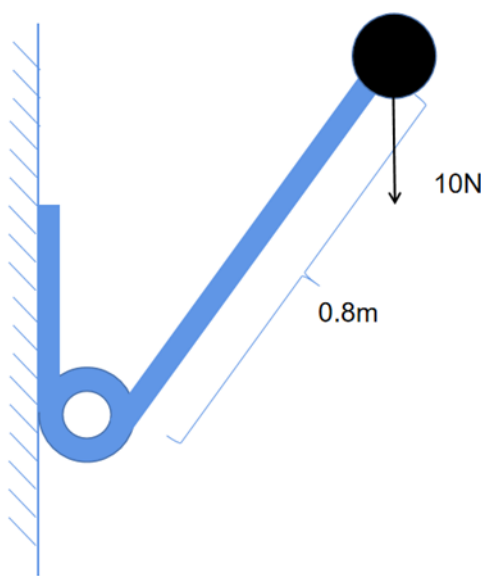


图 2: 问题一中系统的结构示意图

**问题二：** 如图 3 所示，在问题一的基础上将一根刚度系数为  $100000 \text{ 牛/米}$ ，长度为  $0.8 \text{ 米}$  的伸缩弹簧套在可动臂上，弹簧的一端链接支点，另一端链接  $25 \text{ 千克}$  的均质小球，小球半径同样为  $0.1 \text{ 米}$ 。小球可在转动臂上随着弹簧的伸缩做平滑运动。试问：我们在小球上施加一个向下为  $10 \text{ 牛}$  的拉力，在扭转弹簧打开并达到平衡后，去掉拉力。建立小球的运动模型以描述  $0$ – $10$  秒内小球的整个运动过程，并给出小球在  $2, 4, 6, 8$  秒时的角速度，扭转弹簧张开的角度及伸缩弹簧的长度。

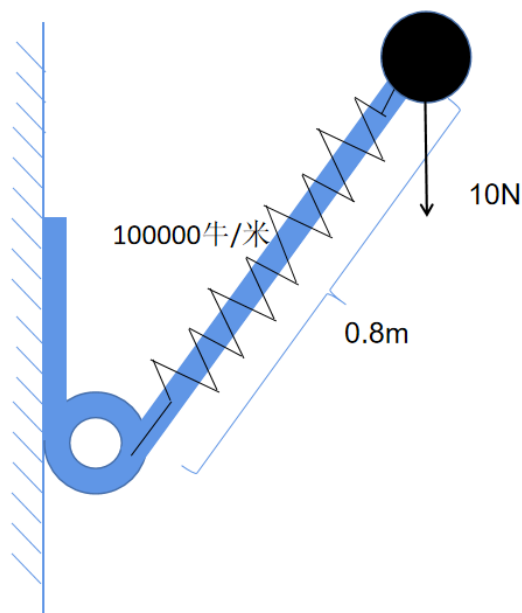


图 3: 问题二中系统的结构示意图

**问题三:** 如图 4 所示, 假设扭转弹簧被平放在水平的光滑平面上, 且两条臂都是可以转动的, 在一条转动臂 0.8 米处固定一个质量为 30 千克的均质小球 (甲球), 在另一条转动臂 0.6 米处固定一个质量为 25 千克的小球 (乙球)。甲乙两球半径均为 0.1 米。扭转弹簧的刚度为 200 牛·米。初始时刻, 扭转弹簧处于闭合状态。现在 30 千克的小球上施加一个水平的周期力  $f \cos \omega t$ , 其中  $f=50$  牛,  $\omega =1.4$  秒<sup>-1</sup>。若以扭转弹簧的轴心为原点, 以平行于两转动轴方向为 y 轴建立平面直角坐标系, 试建立系统的运动模型以描述 0-10 秒内两个小球的运动过程, 并给出甲、乙小球在 2, 4, 6, 8 秒时的角速度、位移及扭转弹簧张开的角度。

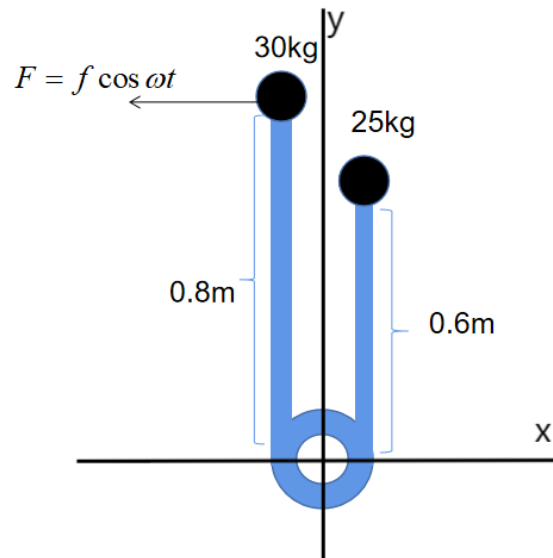


图 4: 问题三中系统的结构示意图

请利用力学知识与数学建模的方法对上述三个问题进行解答，形成完整的论文与数据结果呈现。

#### 模型假设:

注 1: 不考虑弹簧质量及摩擦力。

注 2: 假设弹簧的形变都在其容许范围内。

注 3: 在上述问题中，假设所有小球的半径都是 0.1 米。

注 4: 在问题 2 中，转动轴长度为无限长，不考虑小球离开转动轴的情况