KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: 0 6 9 2

Przedmiot: matematyka

ZADANIE 1

$$x^3 = (\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5})^3$$

$$x^3 = 6 - 3\sqrt[3]{180} + 3\sqrt[3]{150} + 5$$

$$x^3 - 1 + 3\sqrt[3]{180} - 3\sqrt[3]{150} = 0$$

Z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu wynika, że jedynymi wymiernymi rozwiązaniami równania mogą być liczby 1 i -1, ~~ale~~ ale nie spełniają one równania, więc ma ono jedynie pierwiastek niewymierny, którym jest liczba $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}$

KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: | 0 | 6 | 9 | 2 |

Przedmiot: matematyka

ZADANIE 2

$n \in N$

$\log_2 2n + \log_4 4n + \log_8 8n < 25$

$\log_4 4n = \frac{1}{2}\log_2 4n = \log_2 2n^{\frac{1}{2}}$

$\log_8 8n = \frac{1}{3}\log_2 8n = \log_2 2n^{\frac{1}{3}}$

$\log_2 8n^{\frac{11}{6}} < \log_2 2^{25}$

$8n^{\frac{11}{6}} < \cancel{\log} \; 2^{25}$

$n^{\frac{11}{6}} < 2^{22} \quad / \, ()^6$ $\quad n \in N \Rightarrow$ można pierwiastkować i potęgować

$n^{11} < 2^{132} \quad / \sqrt[11]{\ }$

$n < 2^{12} \qquad 18 | n \Rightarrow n = 18k \quad k \in N$

$18k < 4096$

$k < \frac{4096}{18}$

$k \leq 227$

$a_1 = 18 \quad r = 18$

$S_{227} = \frac{36 + 226 \cdot 18}{2} \cdot 227$

KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: | 0 | 6 | 9 | 2 |

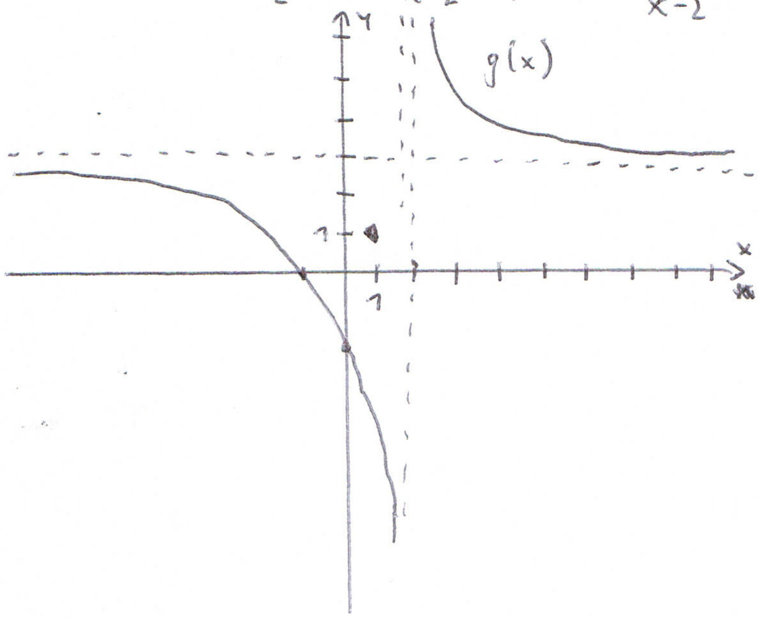
Przedmiot: matematyka

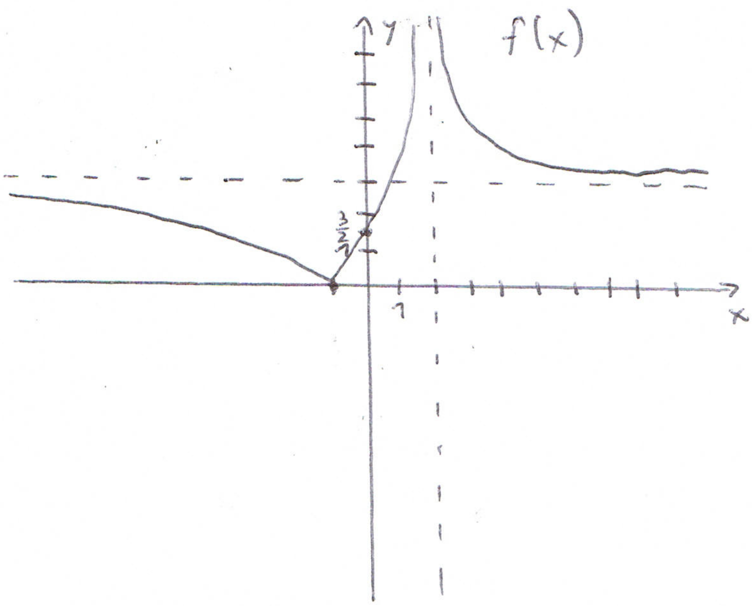
ZADANIE 3

$f(x) = \left|\frac{3x+3}{x-2}\right| \qquad f(x) = |g(x)| \qquad D_f: x \neq 2$

$g(x) = \frac{3x+3}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} + 9 = 3 + \frac{9}{x-2}$

$g(0) = -\frac{3}{2}$





$m \in (0, \frac{3}{2}) \cup (3, \infty)$

KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: 0 6 9 2

Przedmiot: matematyka

ZADANIE 4

$$g(x) = 1 + \frac{4}{x^2} + \frac{16}{x^4} + \frac{64}{x^6} + \dots$$

$$q = \frac{4}{x^2} \qquad \left|\frac{4}{x^2}\right| < 1$$

$$\frac{4}{x^2} > -1 \quad \wedge \quad \frac{4}{x^2} < 1$$

$$4 > -x^2 \quad \wedge \quad x^2 > 4$$

$$x \in R \qquad x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{\frac{x^2-4}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$\Rightarrow$ as. pion. $x = -2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$\Rightarrow$ as. pion. $x = 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

$\Rightarrow$ as. pion. $y = 1$

$$Z_W = (1, \infty)$$

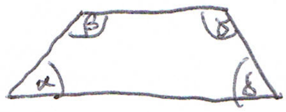
KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: 0 6 9 2

Przedmiot: matematyka

ZADANIE 5

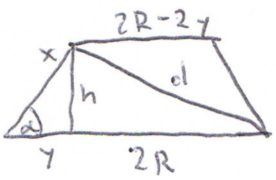


$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ \Rightarrow \beta=180^\circ-\delta$

$\alpha+\beta=180^\circ$

$\alpha+180^\circ-\delta=180^\circ$

$\alpha=\delta \Rightarrow$ trapez jest równoramienny



$R=\text{const}$ $\quad \cos\alpha=\frac{x}{2R}$ $\quad \alpha\in(0^\circ,90^\circ)$

$x=2R\cos\alpha$

$d^2=4R^2-x^2$

$d=\sqrt{4R^2-4R^2\cos\alpha}=2R\sqrt{1-\cos^2\alpha}=2R\sin\alpha$

$\cos\alpha=\frac{y}{x}$

$y=x\cos\alpha=2R\cos^2\alpha$

$2Rh=xd$

$h=\frac{xd}{2R}=\frac{4R^2\sin\alpha\cos\alpha}{2R}=R\sin 2\alpha$

$2R-2y=2R-4R\cos^2\alpha$

$P(\alpha)=\frac{4R-4R\cos^2\alpha}{2}\cdot R\sin 2\alpha=(2R-2R\cos^2\alpha)R\sin 2\alpha=2R^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha=$

$=4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$

$(\sin^3\alpha)'=3\sin^2\alpha\cos\alpha$

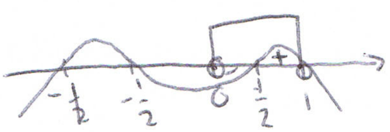
$P'(\alpha)=4R^2(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^4\alpha)=4R^2\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=4R^2(1-\cos^2\alpha)(4\cos^2\alpha-1)$

$=4R^2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(2\cos\alpha-1)(2\cos\alpha+1)$

$4R^2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(2\cos\alpha-1)(2\cos\alpha+1)=0$

$\cos\alpha=1 \vee \cos\alpha=-1 \vee \cos\alpha=\frac{1}{2} \vee \cos\alpha=-\frac{1}{2}$

$\alpha\in(0^\circ,90^\circ)\Rightarrow \cos\alpha\in(0,1)$



$\cos\alpha$	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$
$P'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$P(\alpha)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\cos\alpha_{min}=\frac{1}{2}$

$\cos\alpha$ maleje w $(0^\circ,90^\circ)$, więc kąt α ma największą wartość, kiedy $\cos\alpha$ ma najniższą

$\alpha_{max}=60^\circ$

KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: 0 6 9 2

Przedmiot: matematyka

ZADANIE 6

$n \in N \wedge n > 3$

a) parami różnych:

dla $2 | n$, $\frac{n(n-2)}{2}$

dla $2 \nmid n$, 0

$\frac{n}{2}$ - ilość średnic okr. opisanego

$(n-2)$ - ilość pominiętych wierzchołków

b) parami nieprzystających

~~[illegible]~~

dla $2 \nmid n$, 0

KARTA PRACY

XVII Ogólnopolska Olimpiada O Diamentowy Indeks AGH – etap I

Numer kodowy: | 0 | 6 | 9 | 2 |

Przedmiot: matematyka

ZADANIE 7

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9-25=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=25$

$O(-2,3)$

pr AB: $y=2x-3$

$x^2+4x+4+(2x-6)^2=25$

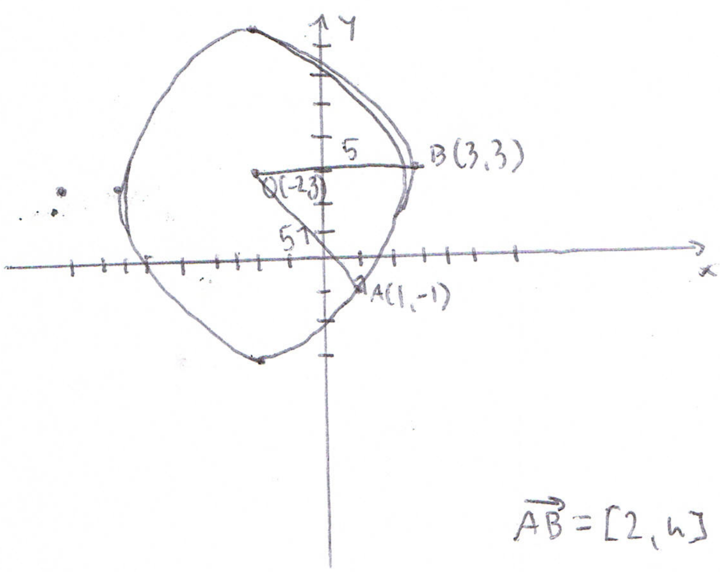
$x^2+4x+4+4x^2-24x+36=25$

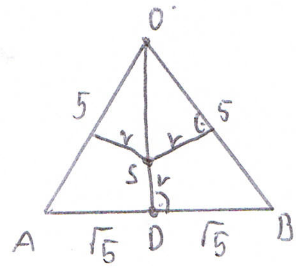
$5x^2-20x+15=0$

$x^2-4x+3=0$

$x_1=1 \quad x_2=3$

$A(1,-1) \quad B(3,3)$





$|AB|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$|OD|=$ ~~...~~ $2\sqrt{5}$

$\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}-r}{r}$

$5r=10-\sqrt{5}r$

$r=\frac{10}{5+\sqrt{5}}$

$\vec{AB}=[2,4] \Rightarrow \vec{AD}=[1,2]$

$\Downarrow$

$D(2,1)$

$\vec{DS}=[a,c]$

$\begin{cases} \vec{DS}\perp\vec{AB} \\ a^2+c^2=\frac{100}{(5+\sqrt{5})^2} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{AB}\circ\vec{DS}=0 \\ a^2+c^2=\frac{100}{(5+\sqrt{5})^2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2a+4c=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}a \\ a^2+c^2=\frac{100}{(5+\sqrt{5})^2} \end{cases}$

$\frac{5}{4}a^2=\frac{100}{(5+\sqrt{5})^2}$

$a^2=\frac{\cancel{100}\,20}{(5+\sqrt{5})^2}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}=\frac{80}{(5+\sqrt{5})^2}$

$a_1=\frac{4\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{25-5}=\frac{4\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{\cancel{20}\,5}=\frac{5\sqrt{5}-5}{5}=\sqrt{5}-1$

punkt o ~~pierwszej~~ współrzędnej $x=1+\sqrt{5}$ nie może ~~...~~ znajdować się wewnątrz ΔAOB

$a_2=1-\sqrt{5}$

$c=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\vec{DS}=[1-\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}-1}{2}] \Rightarrow S(3-\sqrt{5},1+\frac{\sqrt{5}-1}{2})$

$(x-3+\sqrt{5})^2+(y-1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2=\frac{100}{(5+\sqrt{5})^2}$