Zacharias Brohn - 9907174297

Dugga 8 - Fråga 0

Bestäm samtliga lösningar till

$$33x + 3 \equiv 11 \mod 91.$$

Lösning

Vi börjar med att subtrahera 3 från båda sidor av ekvationen

$$33x + 3 \equiv 11 \mod 91 \tag{1}$$
$$33x \equiv 8 \mod 91. \tag{2}$$

Nu kan vi använda den utökade Euklidiska algoritmen för att hitta positiva x, och algoritmen ser ut som sådan

$$\text{GCD}(a,\ b) = ax + by \tag{3}$$

där vi itererar genom följande

$$q_i = \left\lfloor \frac{a_i}{b_i} \right\rfloor, \quad r_i = a_i \mod b_i \tag{4}$$

där q är kvoten av a genom b och r är resten. Vi initierar koefficienterna

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 1 \tag{5}$$

och för varje i uppdaterar vi koefficienterna enligt

$$x_{i+1} = x_{i-1} - q_i x_i, \quad y_{i+1} = y_{i-1} - q_i y_i. \tag{6}$$

Alltså, vi börjar med q_1 och fortsätter tills vi får en rest $r_i = 0$. Första iterationen

$$q_1 = \left\lfloor \frac{91}{33} \right\rfloor = 2,\ r_1 = 91 \mod 33 = 25 \tag{7}$$
$$a_1 = 33,\ b_1 = 25 \tag{8}$$
$$x_2 = x_0 - q_1 x_1 = 1 - 2 \cdot 0 = 1,\ y_2 = y_0 - q_1 y_1 = 0 - 2 \cdot 1 = -2 \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

andra iterationen

$$q_2 = \left\lfloor \frac{33}{25} \right\rfloor = 1,\ r_2 = 33 \mod 25 = 8 \tag{11}$$
$$a_2 = 25,\ b_2 = 8 \tag{12}$$
$$x_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1,\ y_3 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3 \tag{13}$$

tredje iterationen

$$q_3 = \left\lfloor \frac{25}{8} \right\rfloor = 3,\ r_3 = 25 \mod 8 = 1 \tag{14}$$

$$a_3 = 8,\ b_3 = 1 \tag{15}$$

$$x_4 = 1 - 3 \cdot (-1) = 4,\ y_4 = -2 - 3 \cdot 3 = -11 \tag{16}$$

fjärde iterationen

$$q_4 = \left\lfloor \frac{8}{1} \right\rfloor = 8,\ r_4 = 8 \mod 1 = 0. \tag{17}$$

Eftersom $r_4 = 0$ så har vi funnit koefficienterna $x_4 = 4$ och $y_4 = -11$. Vi letar efter den positiva lösningen så vi adderar med 91

$$-11 + 91 = 80 \tag{18}$$

om vi nu multiplicerar höger- och vänsterled i ekv.2 med 80 för att hitta x

$$33x \cdot 80 = 8 \cdot 80 \mod 91 \tag{19}$$

$$2640x = 640 \mod 91 \tag{20}$$

och eftersom

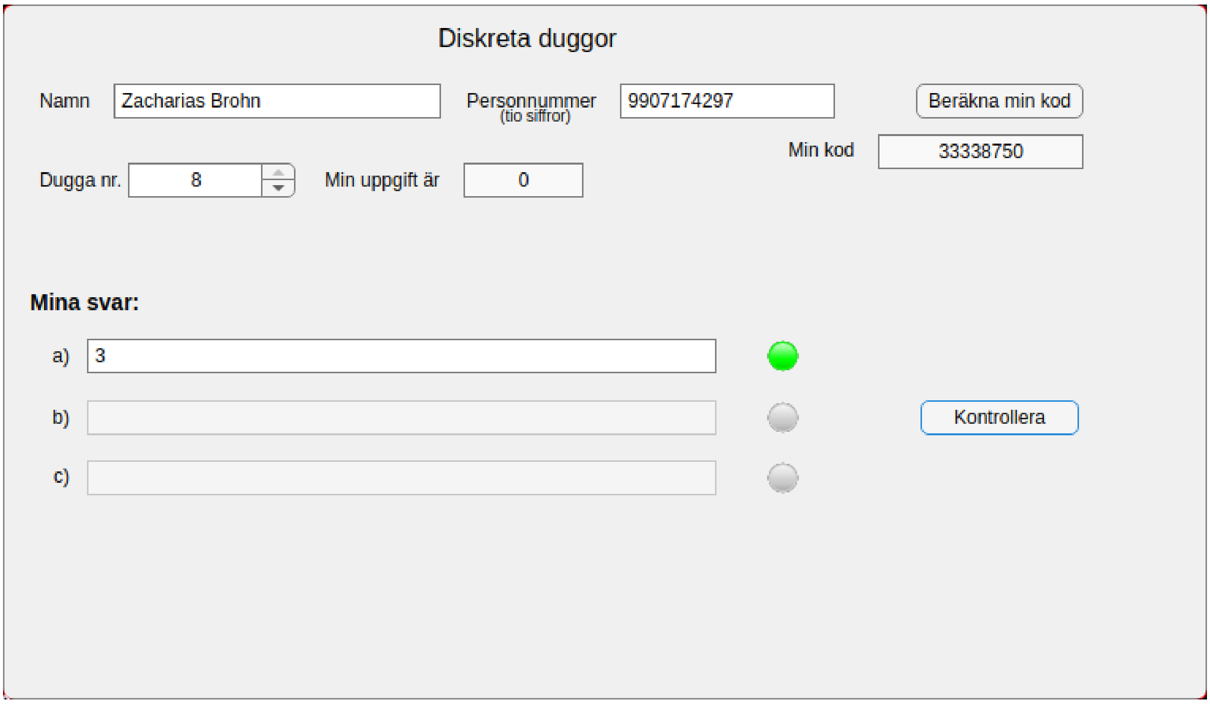
$$2640 \mod 91 = 1$$

kan vi utveckla till

$$x = 640 \mod 91$$
$$x = 3 \mod 91.$$

Svar

Den positiva lösningen är $x = 3$.


Diskreta duggor
Namn
Zacharias Brohn
Personnummer
(tio siffror)
9907174297
Beräkna min kod
Min kod
33338750
Dugga nr.
8
Min uppgift är
0
Mina svar:
a)
3
b)
Kontrollera
c)