

Dugga 7 - Fråga 5

Lös rekurrenskvationen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 3^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad (1)$$

Lösning

För att lösa detta, börjar vi med att anta att högerledet är noll för att få den homogena ekvationen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0. \quad (2)$$

Karakteristiska ekvationen

Vi antar en lösning av formen $x_n = r^n$ och sätter in det i den homogena ekvationen

$$r^{n+2} - r^{n+1} - 2r^n = 0 \quad (3)$$

Genom att dividera med r^n (för $r \neq 0$) får vi

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad (4)$$

Vi löser kvadratisk ekvation

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad (5)$$

Detta ger rötterna

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -1. \quad (6)$$

Den homogena lösningen

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir

$$x_n^h = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n, \quad (7)$$

där C_1 och C_2 är konstanter.

Partikulärlösning

Eftersom högerledet är 3^n , gissar vi en partikulärlösning av formen:

$$x_n^p = A \cdot 3^n \quad (8)$$

Vi sätter in x_n^p i originalekvationen

$$A \cdot 3^{n+2} - A \cdot 3^{n+1} - 2A \cdot 3^n = 3^n \quad (9)$$

Förenkla exponenterna

$$9A \cdot 3^n - 3A \cdot 3^n - 2A \cdot 3^n = 3^n \quad (10)$$

Samla termer

$$(9A - 3A - 2A) \cdot 3^n = 3^n \quad (11)$$

Detta ger

$$4A \cdot 3^n = 3^n \quad (12)$$

Lös för A genom att dividera båda led med 3^n

$$4A = 1 \implies A = \frac{1}{4} \quad (13)$$

Den totala lösningen är summan av den homogena och partikulära lösningen

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n + \frac{1}{4} \cdot 3^n. \quad (14)$$

Konstanterna

För $n = 0$

$$x_0 = C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot (-1)^0 + \frac{1}{4} \cdot 3^0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (15)$$

För $n = 1$

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 + \frac{1}{4} \cdot 3^1 = 2C_1 - C_2 + \frac{3}{4} = 1 \quad (16)$$

Från ekv. 15

$$C_1 + C_2 = -\frac{1}{4} \quad (17)$$

Från ekv. 16

$$2C_1 - C_2 = \frac{1}{4} \quad (18)$$

Adderar ekvationerna:

$$(C_1 + C_2) + (2C_1 - C_2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (19)$$

Detta ger:

$$3C_1 = 0 \implies C_1 = 0 \quad (20)$$

Sätt in $C_1 = 0$ i ekv. 17

$$0 + C_2 = -\frac{1}{4} \implies C_2 = -\frac{1}{4}. \quad (21)$$

Lösningen

Sätt in värdena för C_1 och C_2

$$x_n = 0 \cdot 2^n - \frac{1}{4} \cdot (-1)^n + \frac{1}{4} \cdot 3^n \quad (22)$$

Och genom att förenkla detta löser vi rekurrenskvationen

$$x_n = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^n + \frac{1}{4} \cdot 3^n. \quad (23)$$

Diskreta duggor

Namn

Personnummer
(tio siffror)

Dugga nr.

Min uppgift är

Min kod

Mina svar:

a)

b)

c)

☒

☐

☐