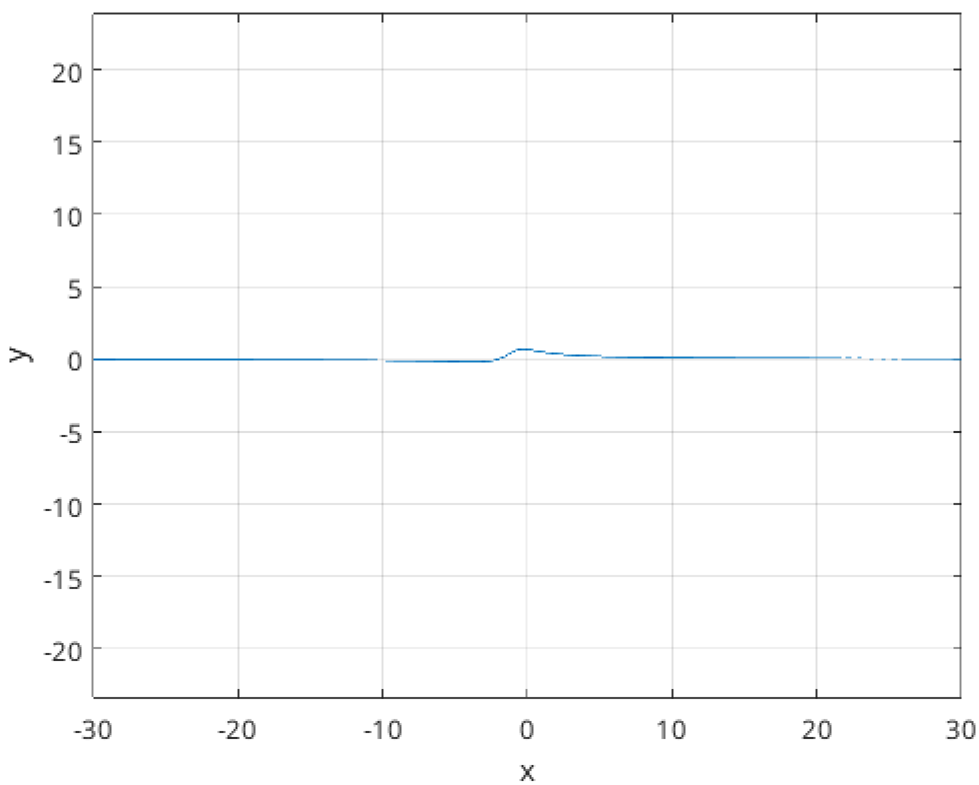
Uppgift 1

Värdemängd för funktionen

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+3}$$

Om vi tar x-värden mellan -30 och 30 kan vi se hur funktionen beter sig

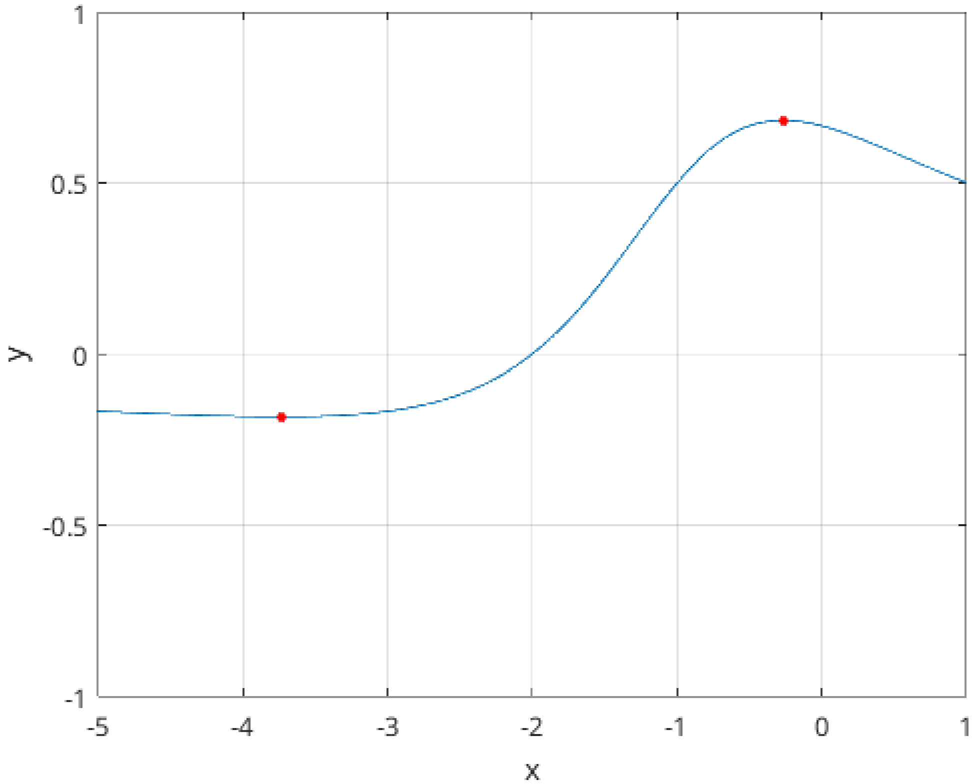
```
x = linspace(-30, 30, 6000);
y = (x + 2) ./ (x.^2 + 2 * x + 3);

figure;
plot(x, y)
xlabel('x')
ylabel('y')
grid on
axis equal;
```



Sedan för att hitta värdemängden kan vi minska x- och y-axeln

```
figure;
plot(x, y)
hold on;
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
grid on
axis([-5 1, -1 1]);

x_hl = [-0.265044, -3.73562];
y_hl = [0.68301, -0.183012];
plot(x_hl, y_hl, 'ro', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'r');
hold off;
```



Indikerat med röda prickar fick jag alltså

$y_{min} \approx -0.18$

$y_{max} \approx 0.68$

vilket ger

$\text{Range}(f) = [-0.18, 0.68].$

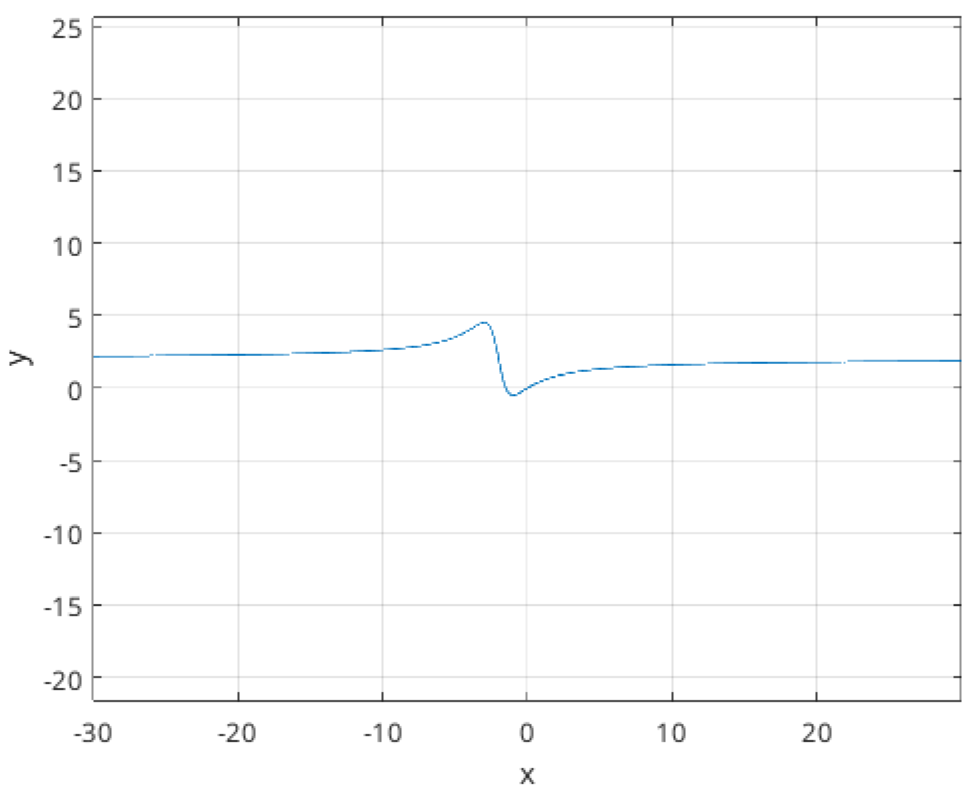
Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 2

Vilken linje/punkt är symmetrisk i funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 5}$$

```
x = linspace(-30, 30, 5000);
y = (2 * x.^2 + 3 * x) ./ (x.^2 + 4 * x + 5);

figure;
plot(x, y);
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on
axis equal
```



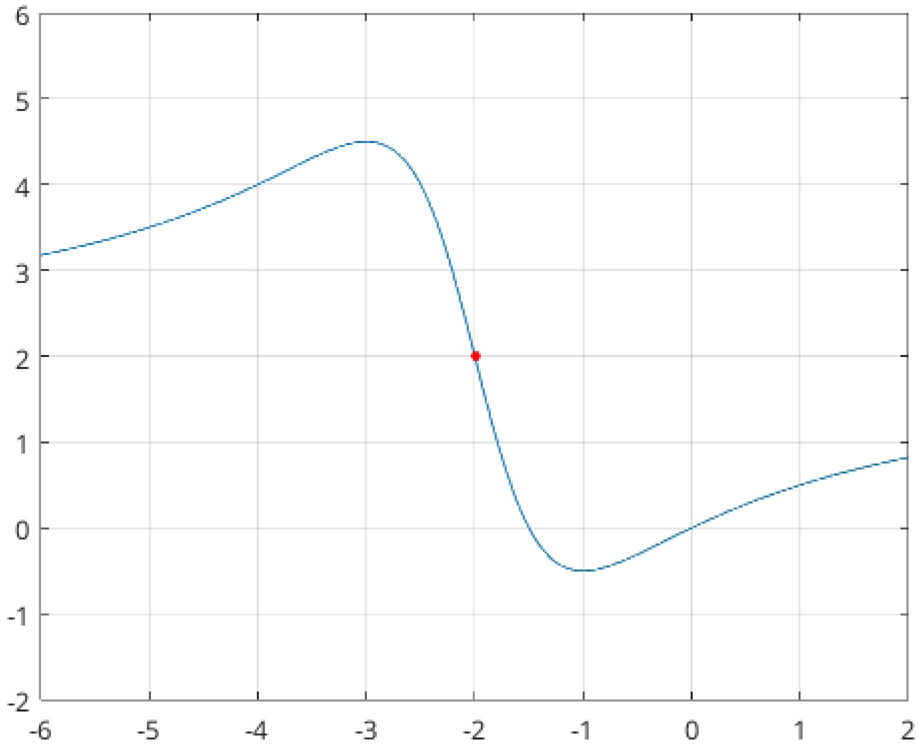
då ser vi att symmetrin ligger här, vid

$$x = -2$$

$$y = 2$$

```
figure;
plot(x, y);
```

```
hold on
x_hl = -2;
y_hl = 2;
plot(x_hl, y_hl, 'ro', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'r');
grid on
axis([-6 2, -2 6]);
hold off
```



Symmetri kan bevisas för (h, k) genom

$f(2h - x) = 2k - f(x)$

så för våran funktion blir det

$$f(-4 - x) = \frac{2(-4 - x)^2 + 3(-4 - x)}{(-4 - x)^2 + 4(-4 - x) + 5}$$

utveckla täljaren

$(-4 - x)^2 = 16 + 8x + x^2$

$2(16 + 8x + x^2) = 32 + 16x + 2x^2$

$3(-4 - x) = -12 - 3x$

$32 + 16x + 2x^2 - 12 - 3x = 2x^2 + 13x + 20$

sedan nämnaren

$$(16+8x+x^2)+(-16-4x)+5=x^2+4x+5$$

då får vi tillslut att

$$f(-4-x)=\frac{2x^2+13x+20}{x^2+4x+5}$$

och nu för $4-f(x)$

$$4-f(x)=4-\frac{2x^2+3x}{x^2+4x+5}$$

flyttar 4 in i bråket

$$\frac{4(x^2+4x+5)-2x^2-3x}{x^2+4x+5}$$

utvecklar täljaren

$$4x^2+16x+20-2x^2-3x=2x^2+13x+20$$

då får vi att

$$4-f(x)=\frac{2x^2+13x+20}{x^2+4x+5}$$

vilket är samma som $f(-4-x)$, vilket betyder att punkten är symmetrisk.

Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 3

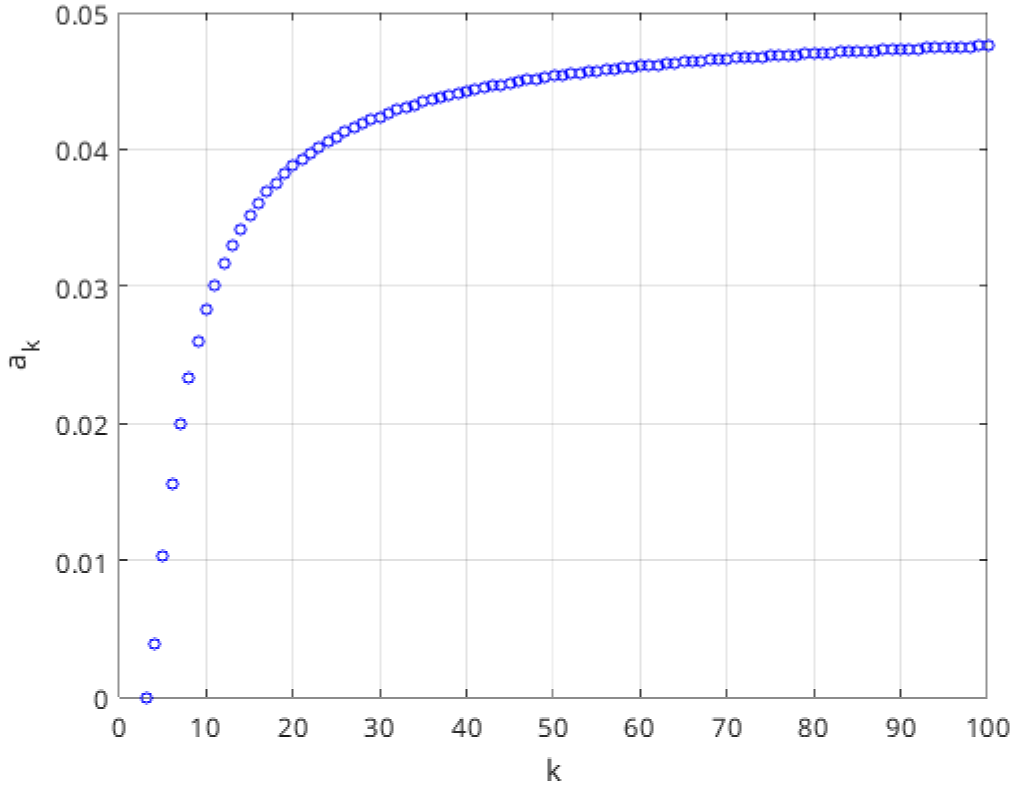
Beräkna a_k tills den verkar konvergera, samt gränsvärde.

$$a_k = (\frac{k-3}{k})^k$$

Jag bestämde mig för att skriva ett skript som beräknar a_k mellan $[1, 100]$.

```
k_values = 1:100;
a = zeros(size(k_values));

for i = 1:length(k_values)
    k = k_values(i);
    a(i) = exp(k * log((k - 3) / k));
end

figure;
plot(k_values, a, 'bo', 'MarkerSize', 4);
hold on;
xlabel('k');
ylabel('a_k');
grid on;
axis([0 100, 0 0.05]);
hold off;
```

Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.



Vi ser att a_k konvergerar runt $a_n \approx 0.047$.

Detta går att bevisa algebraiskt

$$\frac{k-3}{k} = 1 - \frac{3}{k}$$

Så vi söker alltså

$$\lim_{k\to\infty}(1-\frac{3}{k})^k$$

Nu ser den bekant ut, eftersom

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

så vi kan skriva om vår ekvation som

$$\lim_{k\to\infty}(1-\frac{3}{k})^k = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{(-3)}{k})^k = e^{-3}$$

och

$$e^{-3} \approx 0.0498.$$

Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 4

Beräkna totala antalet brev som skickas om varje person som får ett brev skickar ett brev till 3 personer därefter. Första personen skickar 20 brev.

Vi ska använda funktionen sum().

```
brev = 20 * sum(3.^(0:9));
```

vilket ger oss

```
disp(brev);
```

```
    590480
```

antalet brev som skickas är alltså 590480.

Published with MATLAB® R2024b

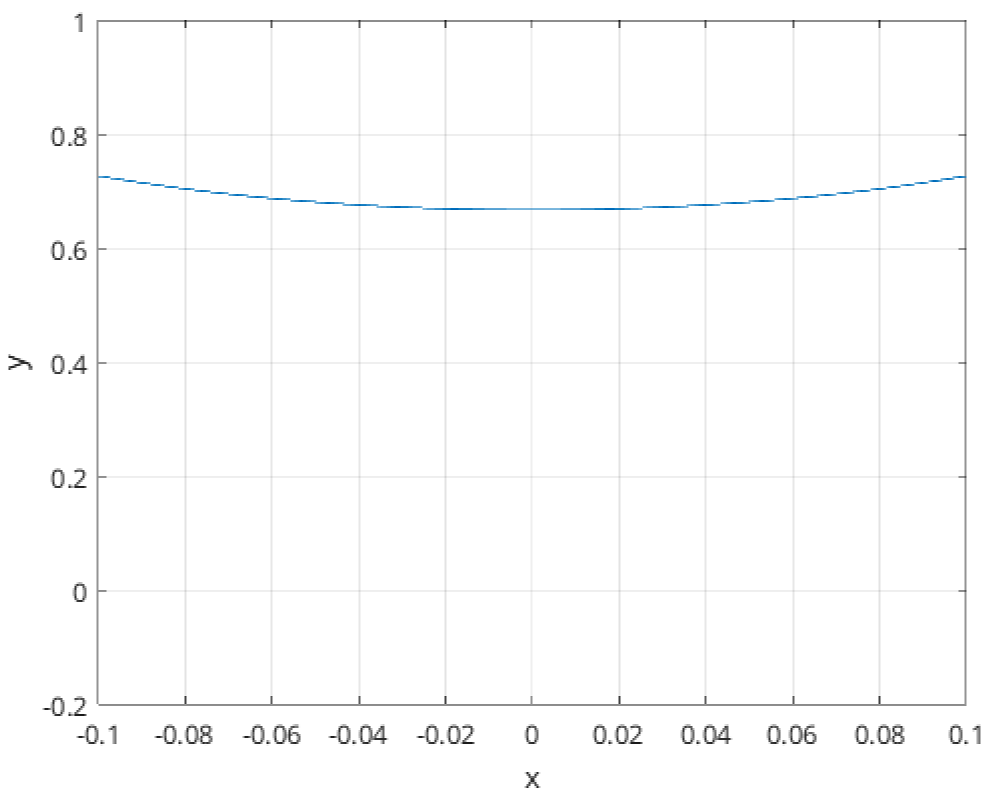
Uppgift 5

Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\pi x)}{\sin(3\pi x)}$$

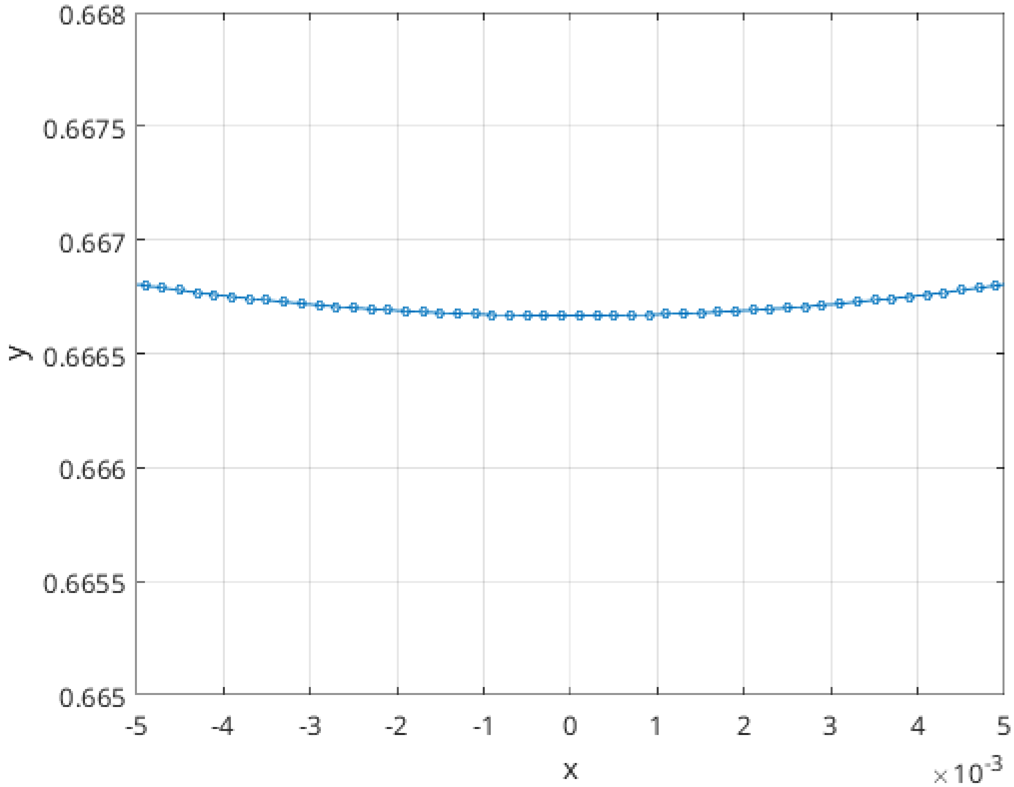
Eftersom vi ska beräkna gränsvärdet för $x \to 0$ så sätter jag små x-värden

```
x = linspace(-0.1, 0.1, 1000);
y = sin(2 * pi * x) ./ sin(3 * pi * x);
figure;
plot(x, y);
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis([-0.1 0.1, -0.2 1]);
```



Om vi nu tittar närmare runt $x = 0$ så kan vi hitta gränsvärdet

```
figure;
plot(x, y, "Marker", "o", "MarkerSize", 3);
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis([-0.005 0.005, 0.665 0.668]);
```



Vi ser här att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\pi x)}{\sin(3\pi x)} \approx 0.67 \approx \frac{2}{3}.$$

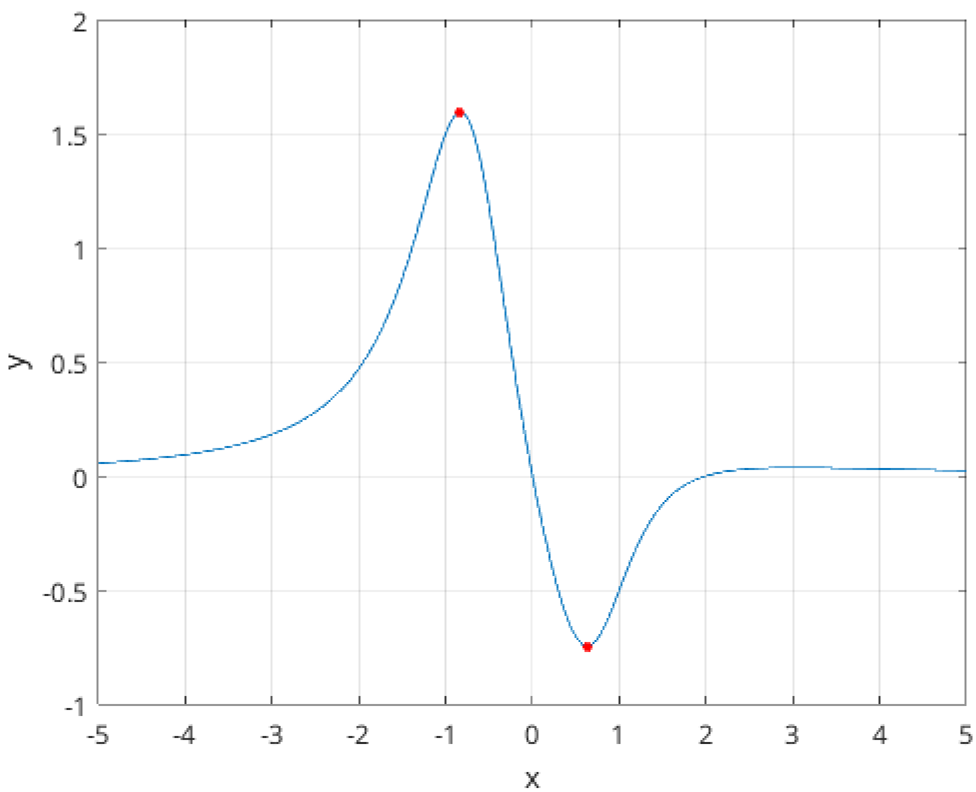
Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 6

Minima och maxima vid punkterna $[-5, 5]$ för funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^4 + 1}$$

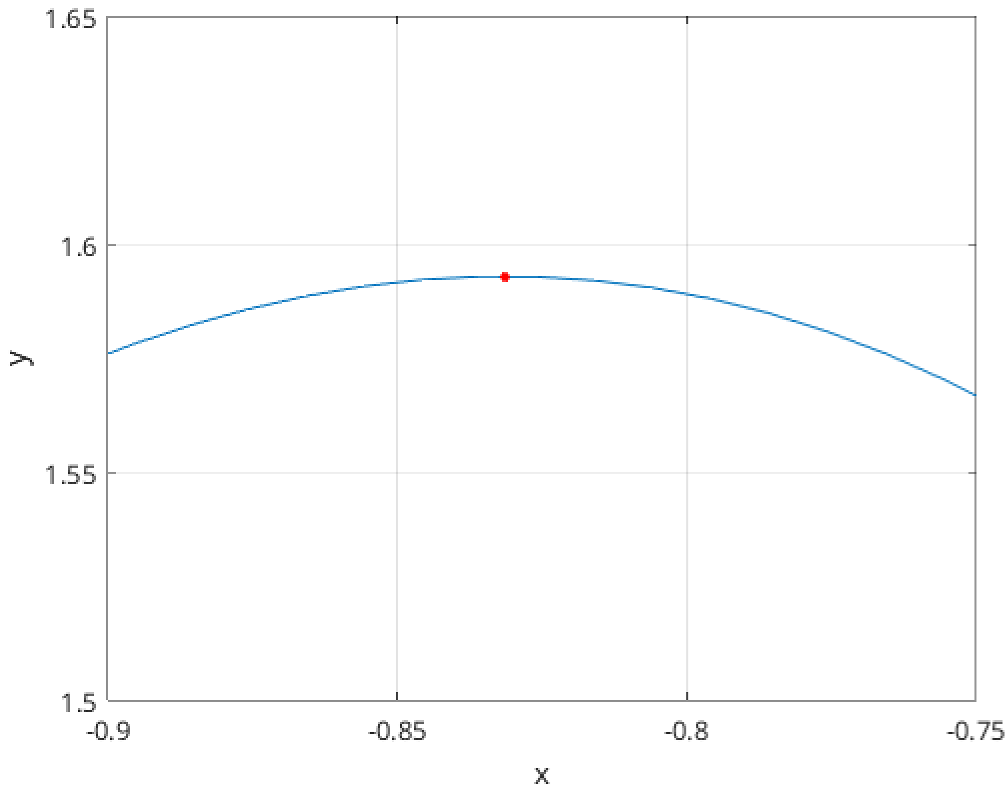
```
x = linspace(-5, 5, 1000);
x1 = -5;
x2 = 5;
y = @(x) (x.^2 - 2*x) ./ (x.^4 + 1);
x_min = fminbnd(@(x) y(x), x1, x2);
x_max = fminbnd(@(x) -y(x), x1, x2);

figure;
plot(x, y(x));
hold on;
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
plot(x_min, y(x_min), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'r');
plot(x_max, y(x_max), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'r');
hold off;
```



Genom att använda fminbnd() så hittar vi minima genom att passera originala funktionen som argument. För att hitta maxima så passerar vi också funktionen som argument, men vi multiplicerar den med -1 för att hitta maxima, alltså omvandlar vi funktionen till $-f(x)$.

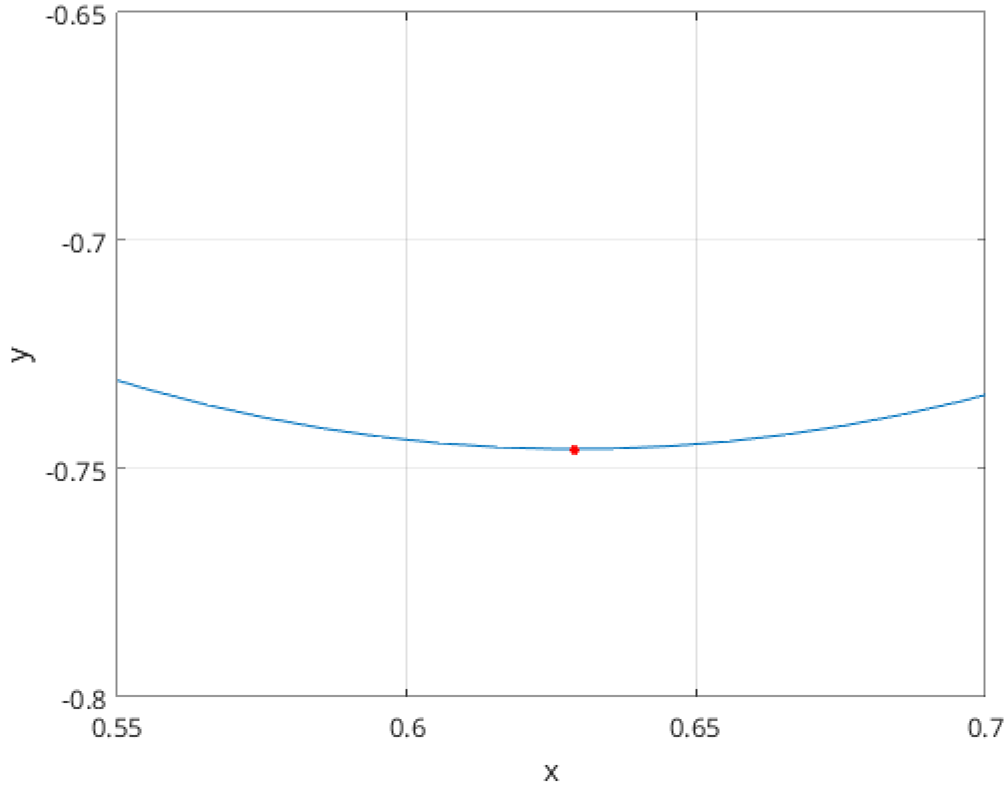
Nu tittar vi närmare på vardera punkt

```
figure;
plot(x, y(x));
hold on;
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
plot(x_max, y(x_max), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'r');
axis([-0.9 -0.75, 1.5 1.65]);
hold off;
```



$x_{max} \approx -0.83$

```
figure;
plot(x, y(x));
hold on;
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
plot(x_min, y(x_min), 'ro', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'r');
axis([0.55 0.7, -0.8 -0.65]);
hold off;
```



$x_{min} \approx 0.629$

Vi har alltså fått att

$x_{min} \approx 0.629,\ \ f(x_{min}) \approx -0.746$

och

$x_{max} \approx -0.831,\ \ f(x_{max}) \approx 1.593.$

Published with MATLAB® R2024b

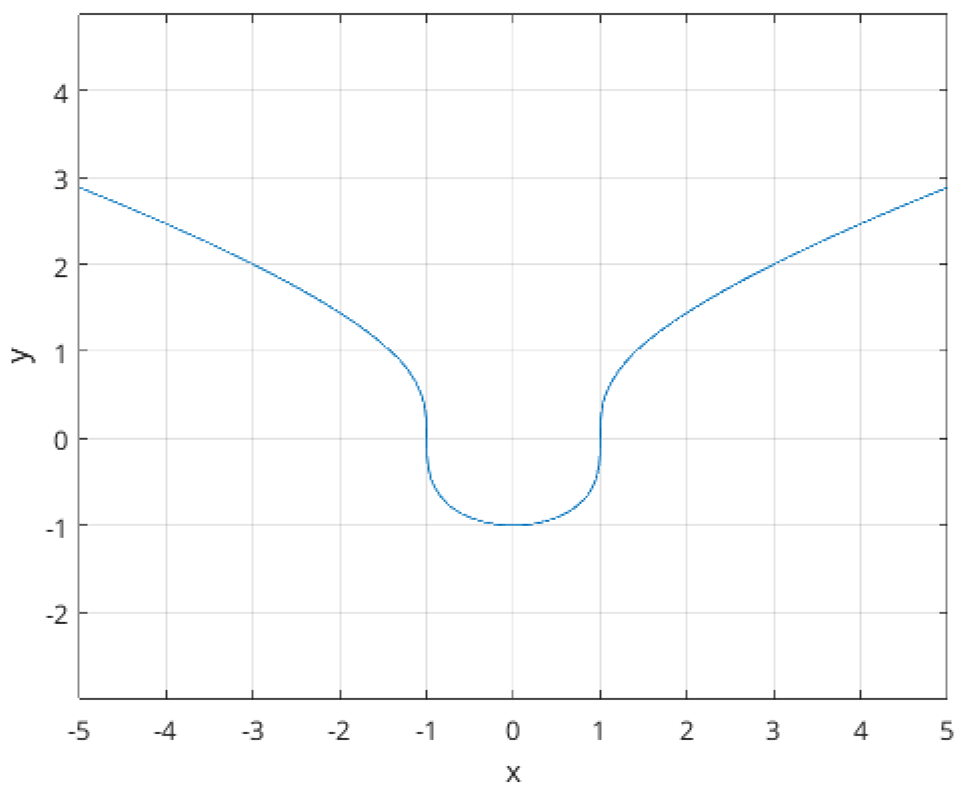
Uppgift 7

Undersök om det finns punkter med horisontell tangens eller saknar tangens till funktionen

$$ y = ({x^2 - 1)^{1/3} $$

```
Error in state of SceneNode.
String scalar or character vector must have valid interpreter syntax:
$$ y = ({x^2 - 1)^{1/3} $$
```

```
x = linspace(-5, 5, 1000);
y = @(x) nthroot((x.^2 - 1), 3);

figure;
plot(x, y(x));
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis equal;
```



Här ser vi att om det kan finnas en horisontell tangens runt $x = 0$, vi kan dubbelkolla.

$$y'(0) = \frac{2x}{3(x^2 - 1)^{2/3}}$$

Om vi sätter in $x = 0$ så får vi att $y' = 0$.

Vi ser också att det kan finnas vertikal tangens runt $x = 1$ och $x = -1$. Så om vi sätter in de x-värdena

$$y'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{3((-1)^2 - 1)^{2/3}} = \frac{-2}{3(1-1)^{2/3}} = \frac{-2}{3(0)^{2/3}} = -\infty$$

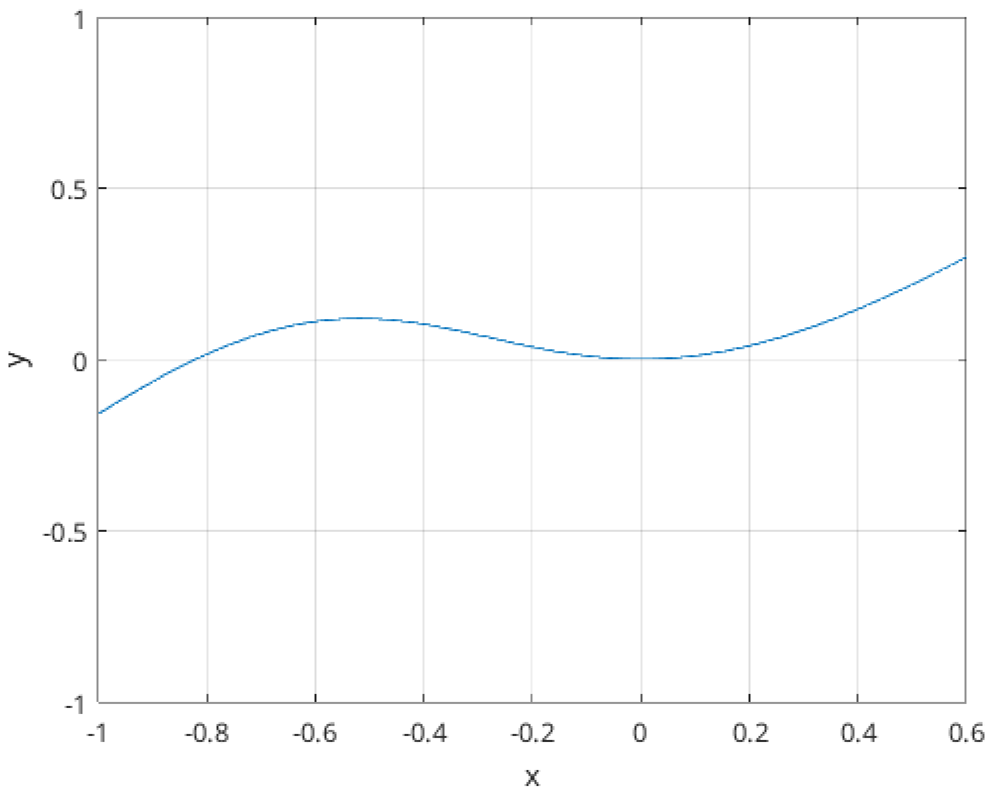
$$y'(1) = \frac{2 \cdot 1}{3(1^2 - 1)^{2/3}} = \frac{2}{3(1-1)^{2/3}} = \frac{-2}{3(0)^{2/3}} = \infty$$

Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 8

Hitta kritiska punkter för funktionen $f(x) = x - sin(\frac{x}{x^2+x+1})$

```
x = linspace(-5, 5, 2000);
f = @(x) x - sin(x ./ (x.^2 + x + 1));

figure;
plot(x, f(x));
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis([-1 0.6, -1 1]);
```

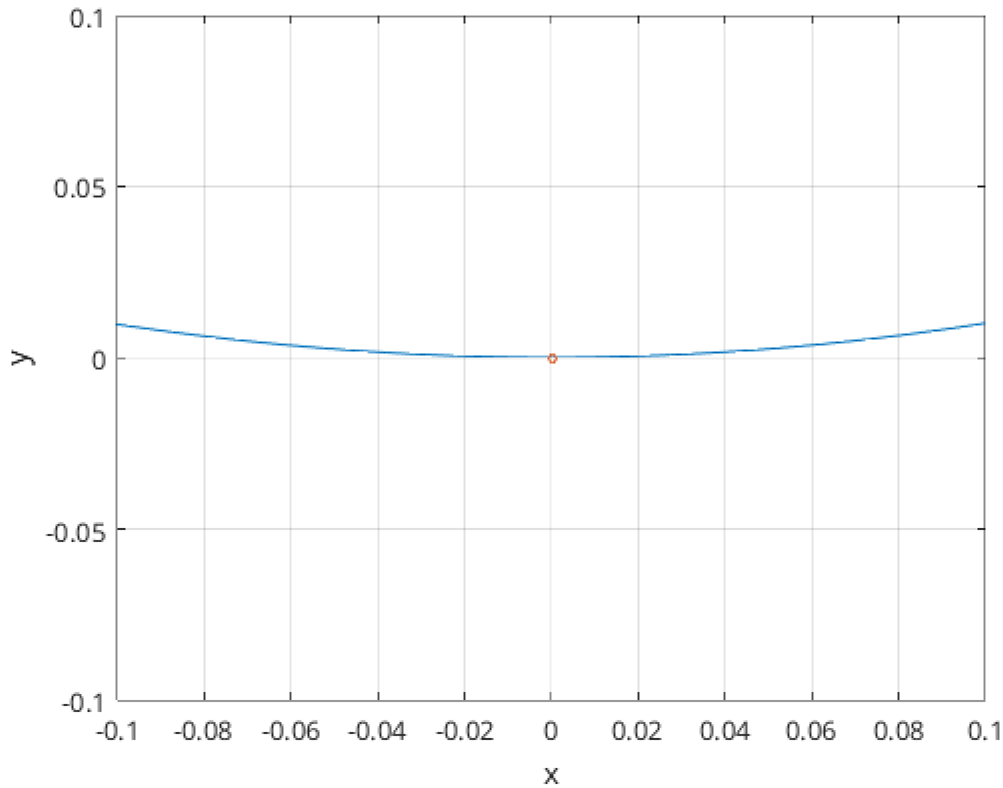


Här kan man se att det finns kritiska punkter runt $x = 0$ och $x \approx -0.518$.

För $x = 0$

```
figure;
plot(x, f(x));
hold on;
x1 = 0;
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
```

```
plot(x1, f(x1), 'o', 'MarkerSize', 3);
axis([-0.1 0.1, -0.1 0.1]);
hold off;
```



För $x \approx -0.518$

```
figure;
plot(x, f(x));
hold on;
x2 = -0.518;
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
plot(x2, f(x2), 'o', 'MarkerSize', 3);
axis([-0.6 -0.4, 0 0.20]);
hold off;
```

Alltså är svaret

$x_{cp1} = 0$

$x_{cp2} \approx -0.518$

Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 9

Om $g(x) = 2x + sin(x)$, visa att g har invers, och hitta $g^{-1}(2)$ och $(g^{-1})'(2)$.

Det går att lösa med kod

```
f = @(x) 2*x + sin(x);
% Vi vet att $g(y(x)) = 2$ så vi sätter $y = 2$ och löser för $x$
y0 = 2;
x0 = 0;

yerror = f(x0) - y0;
yerror_previous = yerror;
dx = 0.1;

% Loopar tills skillnaden är mindre än 1E-5
while abs(yerror)>1E-5
    if yerror*yerror_previous < 0
        dx = dx * 0.1;
    end

    yerror_previous = yerror;

    x0 = x0 - sign(yerror) * dx;

    yerror = f(x0) - y0;
end

fprintf(' finverse(2) = %f \n', x0);
```

```
 finverse(2) = 0.684040
```

Men vi dubbelkollar med fzero()

```
x_fzero = fzero(@(x) f(x) - 2, 0);
fprintf(' finverse(2) = %f \n', x_fzero);
```

```
 finverse(2) = 0.684037
```

Nu hittar vi $(g^{-1})'(2)$, men vi vet redan att

$$y' = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

```
g_inv_prime = 1 ./ (2 + cos(x_fzero));

fprintf(' ginverseprime(2) = %f \n', g_inv_prime);
```

```
 ginverseprime(2) = 0.360357
```

Alltså har vi slutligen

$$g^{-1}(2) = y \approx 0.684$$

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{2+\cos y} \approx 0.360$$

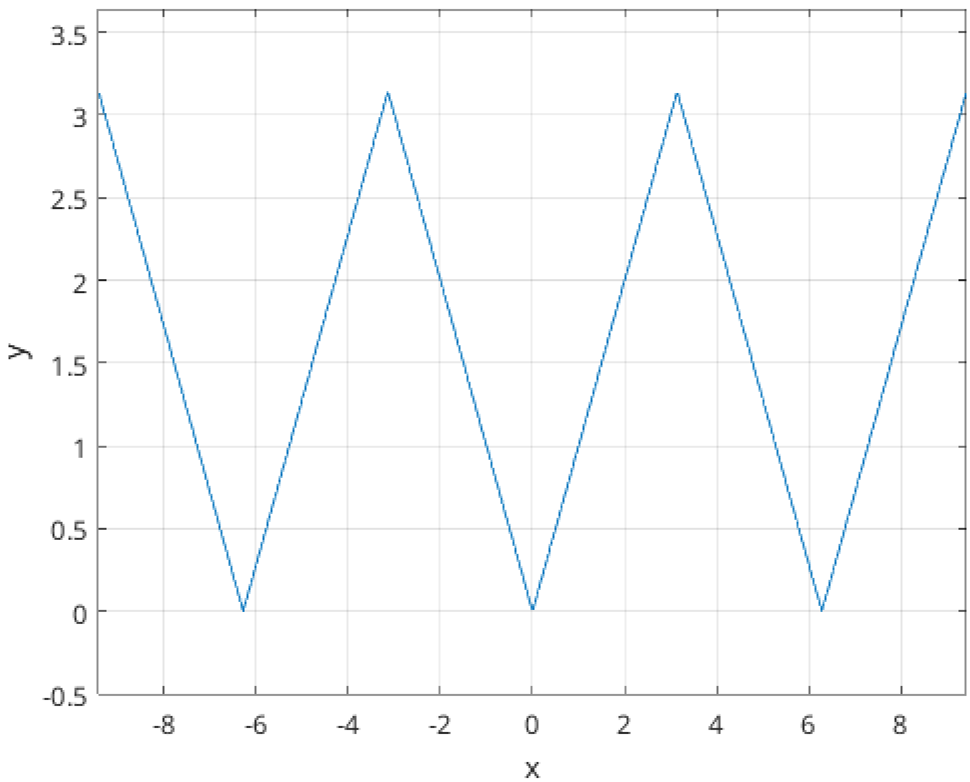
Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 10

Plotta funktionen och se om det finns punkter som icke går att derivera

$f(x) = \cos^{-1}(\cos(x))$

```
x = linspace(-10, 10, 1000);
f = @(x) acos(cos(x));

figure;
plot(x, f(x));
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
axis([(-3 * pi) (3 * pi), -0.5 (pi + 0.5)])
```



Man ser direkt att derivatan är konstant negativ eller positiv. Vi räknar derivatan

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}(-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$$

Om vi nu skulle sätta in $x = 1$

$$f'(1) = \frac{\sin(1)}{|\sin(1)|} = 1$$

eller $x = 4$

$$f'(4) = \frac{\sin(4)}{|\sin(4)|} = -1$$

```
f_prime = @(x) sin(x) / sqrt(1 - cos(x)^2);
f_p1 = f_prime(1);
f_p4 = f_prime(4);
fprintf('f''(1) = %f\n', f_p1);
fprintf('f''(4) = %f\n', f_p4);
```

```
f'(1) = 1.000000
f'(4) = -1.000000
```

Nu för icke-deriverbara punkter. Det skulle vara vid vändningspunkterna på grafen, vilket är vid $x = \pm n\pi$ där n är ett heltal.

Vi testar

```
f_ppi = f_prime(pi);
f_p2pi = f_prime(2 * pi);
f_pn2pi = f_prime(-2 * pi);
f_p10pi = f_prime(10 * pi);
f_pn10pi = f_prime(-10 * pi);
fprintf('f''(pi) = %f\n', f_ppi);
fprintf('f''(2*pi) = %f\n', f_p2pi);
fprintf('f''(-2*pi) = %f\n', f_pn2pi);
fprintf('f''(10*pi) = %f\n', f_p10pi);
fprintf('f''(-10*pi) = %f\n', f_pn10pi);
```

```
f'(pi) = Inf
f'(2*pi) = -Inf
f'(-2*pi) = Inf
f'(10*pi) = -Inf
f'(-10*pi) = Inf
```

Alltså är funktionen kontinuerlig vid alla punkter förutom vid $x = n\pi$ där n är ett heltal.

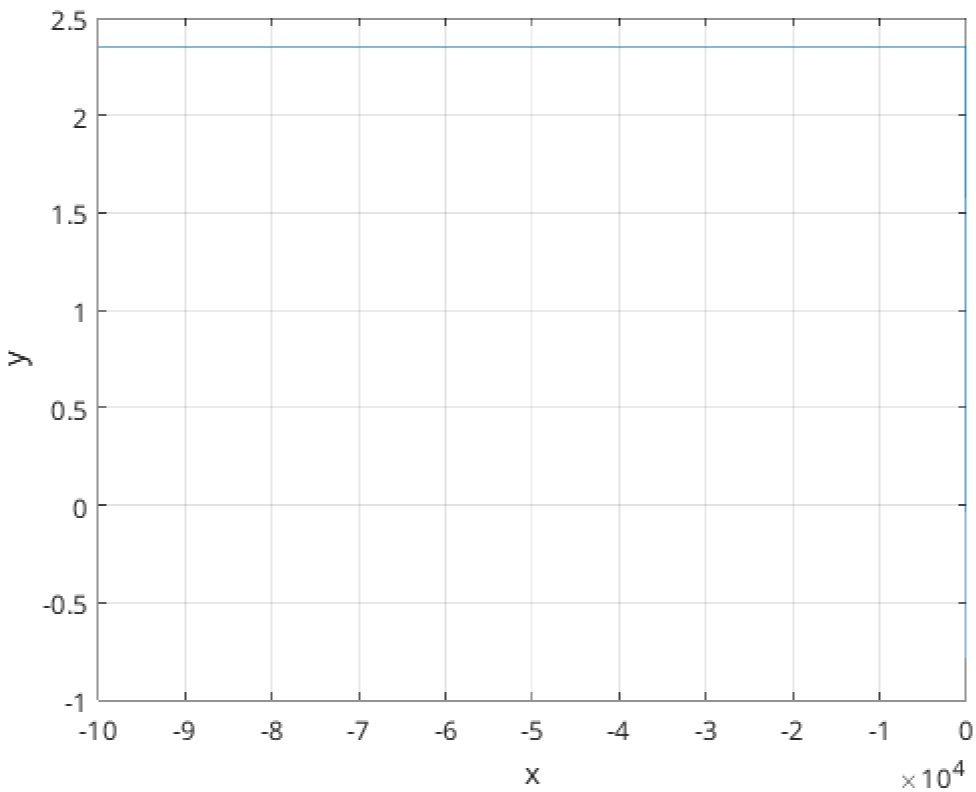
Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 11

Plotta funktionen och hitta konstanta värdet i intervallet $[-a, -1]$ där $a > 0$ är tillräckligt stort

$$f(x) = tan^{-1}(\frac{x-1}{x+1}) - tan^{-1}(x)$$

```
x = linspace(-100000, -1, 100000);
f = @(x) atan((x - 1) ./ (x + 1)) - atan(x);

figure;
plot(x, f(x));
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
```



Funktionen verkar ge sådant konstant värde

$$f(x) \approx 2,356 \approx \frac{3\pi}{4}$$

Det kan bekräftas genom att räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\tan^{-1}(\frac{x-1}{x+1}) - \tan^{-1}(x) \right)$$

vi räknar var för sig

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(\frac{x-1}{x+1}) = \lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(1-\frac{2}{x+1}) = \tan^{-1}(1)$$

och

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

slutligen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \tan^{-1}(1) - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{4}$$

Alltså är det konstanta värdet $\frac{3\pi}{4}$.

Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 12

Hitta rötterna till funktionen

$$x^4 - 8x^2 - x + 16 = 0$$

inom [1, 3] med Newton-Raphsons metod

```
format long;
f = @(x) x.^4 - 8 * x.^2 - x + 16;
f_prime = @(x) 4 * x.^3 - 16 * x - 1;
x0_1 = 1;
x_1 = x0_1;
x0_2 = 3;
x_2 = x0_2;
tol = 1e-10;
while abs(f(x_1)) > tol
    x_1 = x_1 - (f(x_1) ./ f_prime(x_1));
end

while abs(f(x_2)) > tol
    x_2 = x_2 - (f(x_2) ./ f_prime(x_2));
end

fprintf('x = %.10f\n', x_1);
fprintf('x = %.10f\n', x_2);
```

```
x = 1.6480953656
x = 2.3523926477
```

alltså är de två rötter i intervallet [1, 3]

$$x_1 \approx 1.6480953656$$

$$x_2 \approx 2.3523926477$$

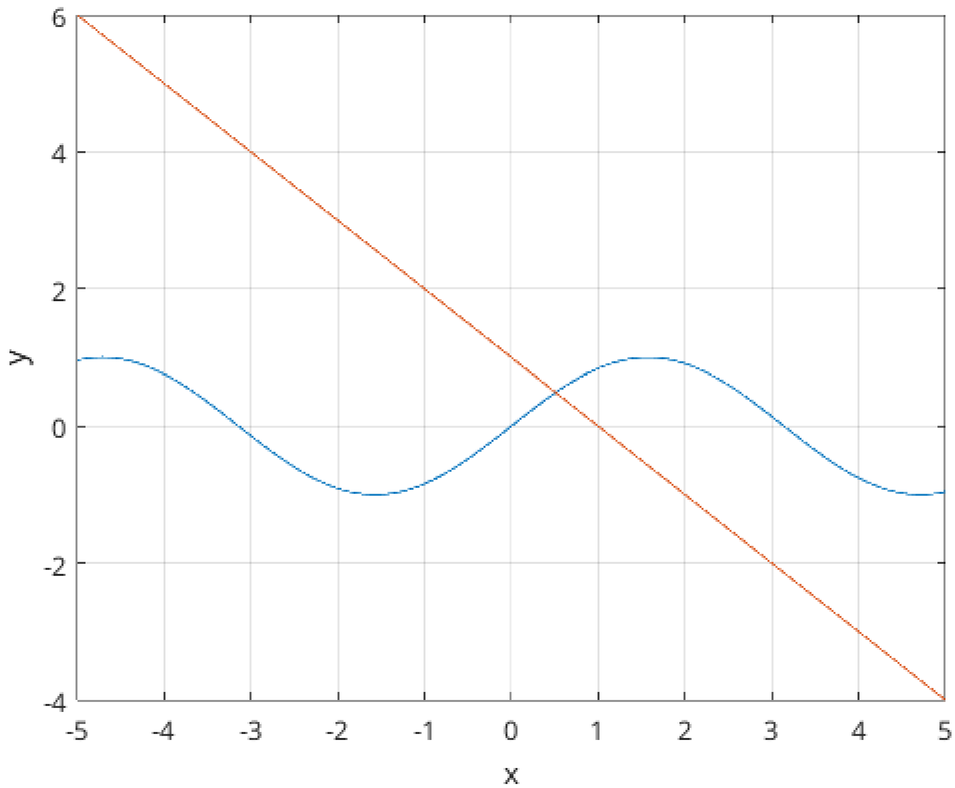
Published with MATLAB® R2024b

Uppgift 13

Lös

$\sin(x) = 1 - x$

```
x = linspace(-5, 5, 1000);
f = @(x) sin(x) - 1 + x;
f1 = @(x) sin(x);
f2 = @(x) 1 - x;

figure;
plot(x, f1(x));
hold on;
plot(x, f2(x));
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on;
hold off;
```



Grafen tyder på att det finns en rot runt $x = 0.5$. Vi använder gissningar $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$.

```
f_prime = @(x) cos(x) + 1;
x_1 = 0;
x_2 = 1;
```

```
tol = 1e-10;
while abs(f(x_1)) > tol
    x_1 = x_1 - (f(x_1) ./ f_prime(x_1));
end

while abs(f(x_2)) > tol
    x_2 = x_2 - (f(x_2) ./ f_prime(x_2));
end

fprintf('x = %.10f\n', x_1);
fprintf('x = %.10f\n', x_2);
```

```
x = 0.5109734294
x = 0.5109734294
```

Därmed får vi svaret att roten ligger vid

$x \approx 0.5109734294$

Published with MATLAB® R2024b

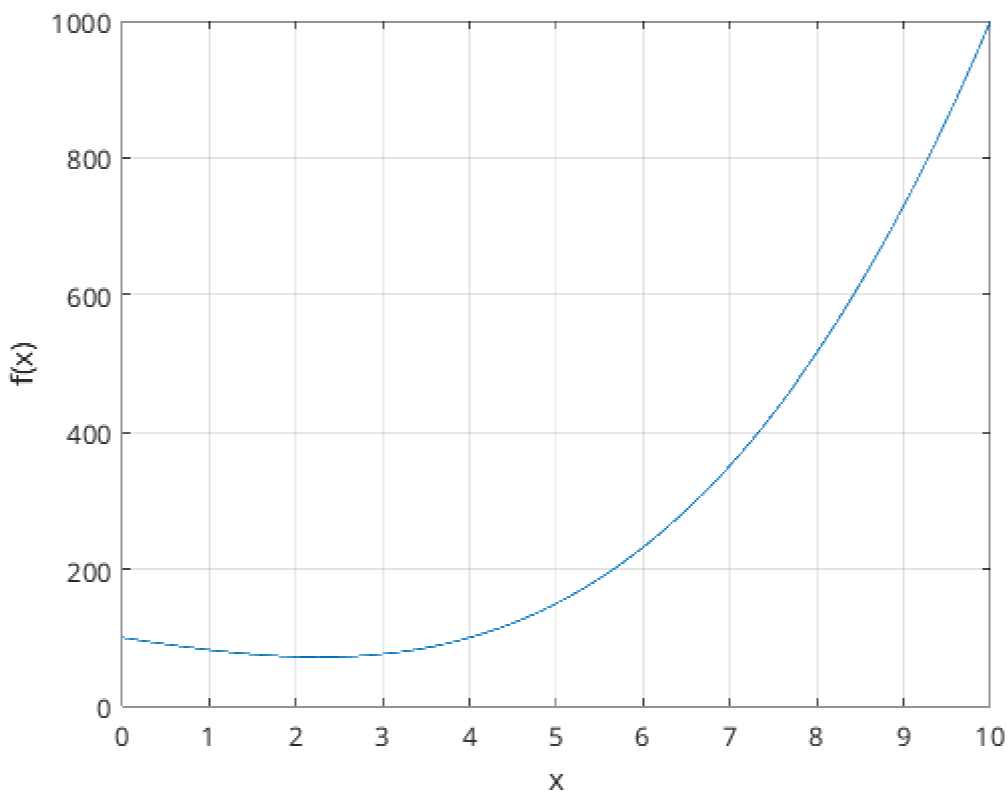
Uppgift 14

Vi har $x + (10 - x) = 10$. Om vi använder det tillsammans med förklaringen av problemet kan vi skriva funktionen som

$f(x) = x^3 + (10 - x)^2$

Först plottar vi funktionen för att se ungefär var minimumvärdet ligger

```
x = linspace(0, 10, 1000);
f = @(x) x.^3 + (10 - x).^2;
plot(x, f(x));
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
grid on;
```



Då ser det ut som att minimumvärdet ligger mellan $2 < x < 3$.

Nu kan vi skriva kod för att räkna ut minimumvärdet samt summan

```
[x_min, f_min] = fminbnd(f, 0, 10);
disp(['Minimum value occurs at x = ', num2str(x_min)]);
disp(['Minimum value of f(x) = ', num2str(f_min)]);
```

Minimum value occurs at x = 2.2701
Minimum value of f(x) = 71.45

Alltså får vi svaret att

$x_{crit} \approx 2,2701$

vilket ger

$f(2,2701) \approx 71,45.$

Published with MATLAB® R2024b