
Uppgift 3

Beräkna a_k tills den verkar konvergera, samt gränsvärde.

$$a_k = \left(\frac{k-3}{k}\right)^k$$

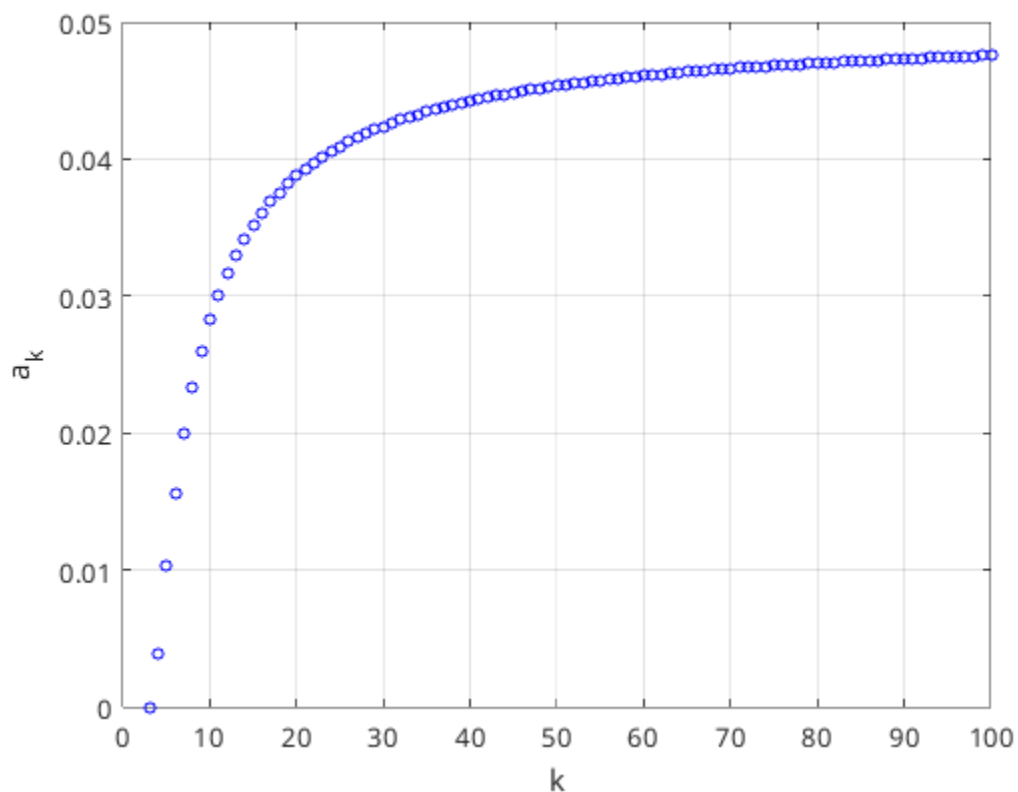
Jag bestämde mig för att skriva ett skript som beräknar a_k mellan $[1, 100]$.

```
k_values = 1:100;
a = zeros(size(k_values));

for i = 1:length(k_values)
    k = k_values(i);
    a(i) = exp(k * log((k - 3) / k));
end

figure;
plot(k_values, a, 'bo', 'MarkerSize', 4);
hold on;
xlabel('k');
ylabel('a_k');
grid on;
axis([0 100, 0 0.05]);
hold off;
```

Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.



Vi ser att a_k konvergerar runt $a_n \approx 0.047$.

Detta går att bevisa algebraiskt

$$\frac{k-3}{k} = 1 - \frac{3}{k}$$

Så vi söker alltså

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{k}\right)^k$$

Nu ser den bekant ut, eftersom

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

så vi kan skriva om vår ekvation som

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{k}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-3)}{k}\right)^k = e^{-3}$$

och

$$e^{-3} \approx 0.0498.$$

Published with MATLAB® R2024b