Skolverket

Likvärdig bedömning i matematik med stöd av nationella prov

Matematik kurs D, MA1204, 100 poäng

Sammanfattning

Detta material är framtaget av Timo Hellström och Peter Nyström på Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar vid Umeå universitet i samarbete med Skolverket.

I detta material beskrivs allmänt om hur bedömning går till med stöd av nationella prov. Ett exempel på tolkning av styrdokumenten utifrån kompetenser ges. Dessa kompetenser exemplifieras med uppgiftsexempel med kommentarer, kopplingar till målen och betygskriterierna för matematik D och autentiska elevlösningar, som diskuteras.

Innehållsförteckning

Inledning

Detta är ett exempel på hur bedömning i matematik kan gå till kopplat till hur man arbetar med de nationella kursproven. Materialet innehåller en kortfattad beskrivning av några utgångspunkter för utvecklingen av nationella kursprov i matematik, med konkreta exempel från Matematik D. Först beskrivs några matematiska kompetenser som en möjlig tolkning av kursplaner och betygskriterier i matematik och utgångspunkt för utformning av bedömningssituationer. I det följande avsnittet belyses dessa kompetenser av exempel på matematikuppgifter från kurs D. Till exemplen kopplas även kursplan och betygskriterier, bedömningsanvisningar och bedömda elevlösningar, samt diskussion och kommentarer. Kommunikationskompetensen innehåller även en muntlig del, vilket finns beskrivet i avsnittet efter elevexemplen.

Mål och kriterier

I de för ämnet gemensamma delarna i kursplanen finns rubrikerna Ämnets syfte, Mål att sträva mot samt Ämnets karaktär och uppbyggnad. Beskrivningarna i dessa delar är relativt generella och beskriver ämnets övergripande karaktär och de övergripande målen, samt utgör ett planeringsunderlag för lärare och elever.

I kursplanen för respektive kurs finner man ”Mål som elever skall ha uppnått efter avslutad kurs”. Dessa beskriver vad den specifika kursen ska behandla och vad eleverna som genomgått kursen ska kunna. Till exempel skrivs det i kursmålen för D-kursen att eleven skall ”kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning” (Skolverket, 2000). Betygskriterierna anger kunskapskvaliteterna på olika nivåer och dessa ska tolkas utifrån beskrivningarna av ämnet och dess olika mål.

Som en utgångspunkt för arbetet med nationella kursprov i matematik har NP-gruppen[1] utarbetat en tolkning av styrdokumenten som ska kunna användas som en konkret bas för utformning av matematikuppgifter, bedömningssituationer och bedömningsanvisningar. Tolkningen uttrycks i ett antal *kompetenser* som vi menar kan sammanfatta styrdokumentens olika målbeskrivningar för matematikämnet i gymnasieskolan. Vi vill betona att detta endast utgör *en* möjlig tolkning av styrdokumenten och att denna tolkning förutom att ge en grund för utformning av nationella prov kan utgöra ett underlag för diskussioner om hur bland annat kursplaner i matematik kan tolkas.

Kompetenserna som tolkats som centralt matematiskt kunnande är:

Problemlösningskompetens - Enligt kursplanens beskrivning kan matematiken ses som en mänsklig tankekonstruktion och matematisk problemlösning som en skapande aktivitet. För att ”problemlösning” ska vara en skapande aktivitet som

[1] NP-gruppen är den arbetsgrupp vid Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet, som på Skolverkets uppdrag utvecklar nationella kursprov och provbanker i matematik och naturvetenskapliga ämnen. Se även http://www.umu.se/edmeas/np

kräver mer än endast en användning av utantill inlärda regler bör ”problem” syfta på uppgifter till vilka problemlösaren inte har en färdig lösningsmetod tillgänglig. För att kunna lösa sådana ”problem” behövs *problemlösningskompetens*.

Algoritmkompetens - Med algoritm menas här en inlärd procedur i ett eller flera steg där alla stegen och den övergripande ordningsföljden för de ingående stegen är väl kända för uppgiftslösaren. Att uppnå en *algoritmkompetens* innebär att vissa algebraiska färdigheter, ekvationslösningsmetoder och tillvägagångssätt vid lösning av andra kända uppgiftstyper behärskas.

Begreppskompetens - Att lösa uppgifter som inte kan lösas genom att använda standardprocedurer kan vara en omöjlighet utan en god kännedom om innebörden av relevanta matematiska begrepp. En god förståelse av använda begrepp torde dessutom vara grundläggande för möjligheten att själv upptäcka matematikens skönhet och logik. Ett mål bör därför vara att eleverna uppnår en *begreppskompetens* som här definieras som att eleverna har förtrogenhet med innebörden av relevanta begreppsdefinitioner.

Modelleringskompetens - Innefattar att utifrån utommatematiska situationer *skapa* och *använda* en matematisk modell, *tolka* de resultat som den matematiska modellen ger när den används samt *utvärdera* den matematiska modellen genom att klargöra dess begränsningar och förutsättningar.

Resonemangskompetens - I *resonemangskompetens* ingår en undersökande verksamhet av att hitta mönster, formulera, förbättra och undersöka hypoteser. Det inkluderar också olika former av kritisk granskning, som t ex värdering av bevis och andra former av matematiska argument. Resonemang ska kunna föras dels som en algoritmisk aktivitet med redan kända argument och bevis och dels som en problemlösande aktivitet i nya situationer.

Kommunikationskompetens - Med *kommunikationskompetens* avses förmågan att kunna kommunicera om matematiska idéer och tankegångar såväl i muntlig som i skriftlig form. Detta innebär att kunna ta emot och förstå information med matematiskt innehåll och att kunna producera och förmedla sådan information.

En utförligare beskrivning av dessa kompetenser finns att läsa i en rapport[2] som även innehåller en argumentation för den gjorda tolkningen, beskrivningar av olika uppgiftstyper som för sin lösning kan förväntas kräva dessa kompetenser samt ett antal kommenterade konkreta exempel på uppgifter och elevlösningar.

De uppgifter som elever ställs inför i olika bedömningssituationer erbjuder olika möjligheter för eleverna att visa sina matematiska kompetenser. Naturligtvis kan elever visa kompetenser som en uppgift inte var utformad för att pröva, och det

---

[2] Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, I., & Hellström, T. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion* (Pm nr 199). Umeå: Umeå universitet, Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar. Finns tillgänglig på http://www.umu.se/edmeas/publikationer.

finns alltid anledning att vara öppen för detta. Till exempel kan prov på matematiska resonemang återfinnas i elevers lösningar till uppgifter som är avsedda att pröva algoritmiska färdigheter. I huvudsak är det dock så att uppgiften och hela bedömningssituationen (inklusive hjälpmedel, tid till förfogande etc.) sätter gränser och öppnar möjligheter. Det är därför viktigt att tänka på hur uppgifter utformas.

Bra bedömningssituationer är dock inte tillräckligt för att kunna skaffa sig en god bild av elevers kompetenser. Det krävs även en genomtänkt strategi för att identifiera olika kvaliteter i elevers arbete med en uppgift, vilket är huvudmålet med bedömning.

Bedömning

I de nationella kursproven bygger bedömningen på principen om positiv bedömning, det vill säga det är förtjänster i elevernas arbete som lyfts fram och värderas. Vidare används g-poäng respektive vg-poäng för att markera kvaliteter som kan kopplas till betygskriterier för betygen G respektive VG. Uppdelningen av poäng i g- och vg-poäng är en bedömning baserad på erfarenhet, professionalism och en därpå grundad tolkning av kursmål och betygskriterier. Det kan ge både eleverna och lärarna en uppfattning om uppgiftens svårighetsgrad och vad de avser att mäta. Genom denna uppdelning är det sedan möjligt att lägga särskilda villkor för att erhålla provbetyget VG, t.ex. genom att ange att en viss mängd vg-poäng måste ingå för att provbetyget skall kunna bli VG. Hur sådana avvägningar mellan g- och vg-poäng bör göras måste rimligen avgöras från prov till prov, men en uppdelning i g- och vg-poäng är tänkt att underlätta sådana bedömningar. Vissa uppgifter ska inbjuda till lösningar och resonemang som indikerar kvaliteter som kan kopplas till kriterierna för MVG. De uppgifter där eleven kan uppvisa redovisningar som innehåller sådana kvaliteter markeras med en ”sol” (¤). I detta sammanhang är det viktigt att betona att de nationella kursproven utgör en del av lärarens bedömningsunderlag. Betyget på kursen ska grunda sig på en allsidig bedömning av elevens kunskaper. Detta innebär att provbetyget och kursbetyget mycket väl kan skilja sig åt hos en och samma elev.

Aspektbedömning

För vissa större uppgifter, ofta av mer undersökande och öppen karaktär, används så kallad aspektbedömning. Det innebär att elevernas arbete med uppgiften betraktas utifrån några olika aspekter som var och en fångar något som anses viktigt att bedöma. Syftet är att

- försöka skapa bättre möjligheter att få en tillförlitlig bedömning av elevers arbete med mer omfattande problemställningar,
- utgående från betygskriterierna beskriva olika kvalitativa nivåer inom varje kunskapsaspekt.

Metoden erbjuder också en ökad möjlighet att kommunicera med elever om vad bedömningen går ut på.

För de nationella proven har tre aspekter utformats med utgångspunkt i betygskriterierna, med olika fokus på kvaliteter i elevens prestation:

- ***Metodval och genomförande***. Här bedöms elevens arbete utifrån om eleven genomför problemlösningen och hur relevant metoden är.
- ***Matematiska resonemang***. Det eleven gjort ska här bedömas utifrån förekomsten av och kvaliteten i olika former av matematiska resonemang som värdering, reflektion, bevis etc.
- ***Redovisning och matematiskt språk***. Här bedöms elevens arbete i hur väl lösningar, strategier och resonemang kommuniceras. Dessutom bedöms användningen av matematikens eget språk med tecken och symboler.

Olika uppgifter kan fokusera olika delar av denna bedömning och i högre eller lägre grad möjliggöra bedömning i de tre aspekterna. I vissa uppgifter är t.ex. möjligheterna att visa matematiska resonemang relativt begränsade och därför kommer bedömningen att fokusera på metodval och genomförande samt kommunikation. I andra uppgifter kan inslaget av resonemang vara betydande och kanske dominerande. De tre aspekterna, tillsammans med kriterier för de olika betygen inom varje aspekt, sammanfattas i den så kallade generella bedömningsmatris som återfinns i bilaga 3. Till varje uppgift bör denna generella bedömningsmatris anpassas och göras uppgiftsspecifik för att kunna användas vid bedömningen.

Uppgiftsexempel

I uppgiftsexemplen nedan kopplas uppgifterna till kursplanemålen och betygskriterierna. Dessa beskrivs med en bokstavs- och sifferkombination. Se bilaga 1 och bilaga 2 där de fullständiga målen och betygskriterierna finns. Detta sätt att strukturera målen och betygskriterierna är en hjälp i bedömningen av de nationella kursproven. Man kan direkt se vilken koppling en viss uppgift har till mål och kriterier. Det är dock viktigt att betona att bedömning av en kurs handlar om hela kursen och att mål och kriterier inte kan ses som fristående att ”pricka av”. När läraren bedömer om eleven når målen i kursen ska alla mål beaktas och läraren ska bedöma med vilken kvalitet målen uppnås.

Begreppskompetens

(NKP MaD vt-02, uppgift 5)

Bestäm $g(x)$ om $g'(x) = \sin 3x + \cos 2x$ och $g(\pi) = 2$

Bedömningsanvisning

	Max 3/0
Bestämt minst en primitiv funktion till $g'(x)$ korrekt.	+1 g
Förstått att utnyttja $g(\pi) = 2$ för bestämning av konstanten utifrån erhållen primitiv funktion,	+1 g
med korrekt svar $\left(g(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{5}{3} \right)$	+1 g

Kommentarer till NKP MaD vt-02, uppgift 5

En korrekt lösning av denna uppgift indikerar att eleven har förtrogenhet med begreppet primitiv funktion och sambandet mellan primitiv funktion och derivata. Eleven kan anses vara bekant med uppgiftstypen, trots att formuleringen något avviker från standard. De ingående beräkningarna ska inte vara något hinder för att eleverna ska kunna visa sin förtrogenhet med begreppen.

Uppgiften är utifrån betygskriterierna bedömd som ”g-uppgift”.

Uppgiften testar ***kursplanemålen***

Eleven skall

- kunna bestämma primitiva funktioner (D9)

- kunna omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa enkla trigonometriska ekvationer (T3)

Betygskriterier

- eleven använder lämpliga matematiska begrepp och metoder för att lösa uppgiften i "ett steg" (G1)
- eleven använder matematiska termer, symboler och… (G3)

Elevlösning till MaD vt02 uppgift 5

5 Bestäm $g(x)$ om

$g'(x) = \sin 3x + \cos 2x$ och $g(\pi) = 2$

$g(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\sin 2x}{2} + m$

Bestämmer primitiv funktion korrekt. (+1 g)

$-\frac{\cos \cancel{3}\pi}{\cancel{3}} + \frac{\sin \cancel{2}\pi}{\cancel{2}} + m = 2$

Eleven har förstått att utnyttja $g(\pi) = 2$ och ställt upp ekvationen. (+1 g)

$-\cos \pi + \sin \pi + m = 2$

$1 + 0 + m = 2$

$m = 1$

$y = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\sin 2x}{2} + 1$

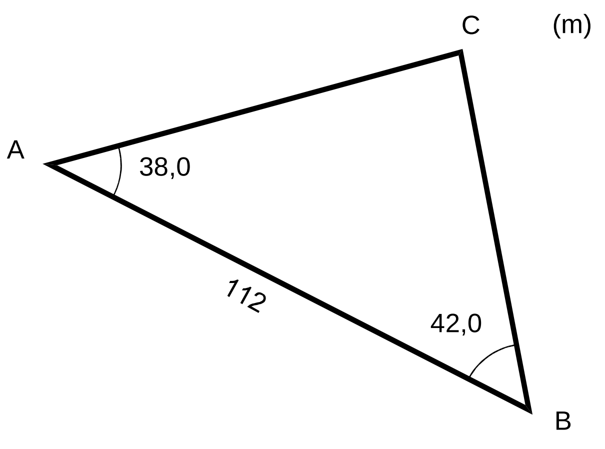
Den förkortning eleven utför visar att det finns allvarliga brister i förståelsen av trigonometriska funktioner.

Allmänna kommentarer

Metoden med "positiv rättning" ger eleven 2 poäng. Om lösningen rättats med "avdragspoäng" (centrala prov i matematik rättades enligt denna princip fram till 1996) hade det fel eleven utfört givit 0 poäng.

Algoritmkompetens
(NKP MaD vt-00, uppgift 5)

Triangeln ABC är given enligt figur. Beräkna arean av triangeln.
(OBS! Figur är ej skalenlig)



Bedömningsanvisning

	Max: 3/0
Redovisad godtagbar metod	+1-2 g
med godtagbart svar $(2620\,\text{m}^2)$	+1 g

Kommentarer till NKP MaD vt-00, uppgift 5

I uppgiften ska eleven använda sig av kända satser som kan förknippas med denna och liknande uppgifter. Eleven kan förväntas vara bekant med både den övergripande proceduren och varje delsteg i lösningen. Så även om han/hon inte vet från början vilka av de trigonometriska satserna som behöver användas i varje delsteg så blir detta ett val av rutinkaraktär om både den övergripande proceduren och varje delsteg i lösningen är bekant. Denna uppgift kan enligt betygskriterierna anses följa kriterierna för betyget godkänt.

Uppgiften testar ***kursplanemålen***

Eleven skall

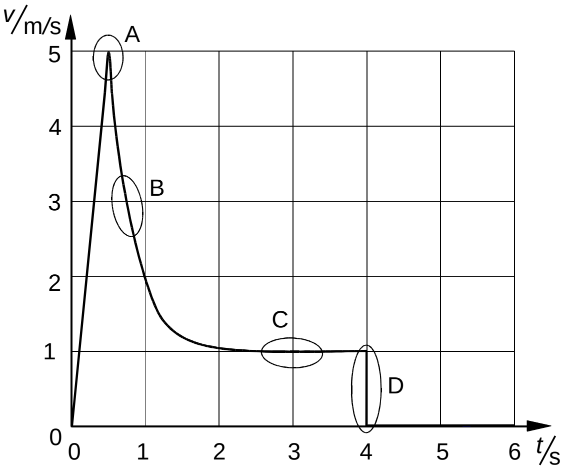
- kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel (T4)

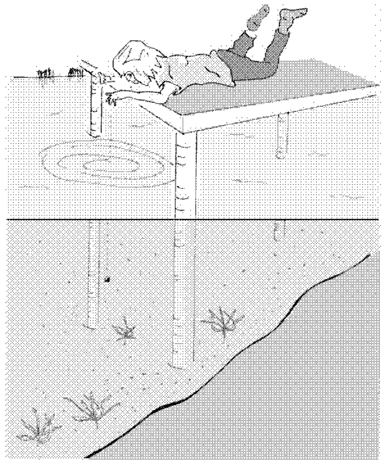
Betygskriterier

- eleven använder lämpliga begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem (G1)

Kommunikations-, begreppsförståelse- och algoritmkompetens
(NKP MaD vt-99, uppgift 12)

En stenkula släpps en bit ovanför en vattenyta. Grafen nedan visar hur stenens hastighet *v* m/s varierar med tiden *t* sekunder från det ögonblick då den släpps.





a) Beskriv vad som händer med stenkulan i A, B, C och D.

b) Hur högt ovanför vattenytan släpptes stenen?

c) Stenkulans hastighet $v(t)$ m/s i vattnet kan beskrivas med funktionen $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$. Bestäm vattendjupet där stenkulan släpps. Ge svaret i meter med två decimaler.

Bedömningsanvisning

	Max 3/2
a) Godtagbar redovisning av två av händelseförloppen	+1 g
godtagbar redovisning av ytterligare två av händelseförloppen	+1 vg
b) Godtagbar ansats med godtagbart svar (1,25 m)	+1 g
c) Godtagbar ansats (t ex angett integralen $\int_{0,5}^{4} v(t)dt$)	+1 g
med godtagbar beräkning av vattendjupet (4,84 m)	+1 vg

Kommentarer till NKP MaD vt-99, uppgift 12

I denna tredelade uppgift ska eleven tolka och tillämpa en matematisk modell. En del lärarkommentarer antyder att uppgiften hade ett fysikinnehåll som gav fördelar för elever som går på naturvetenskapsprogrammet. Studier av skillnaden i lösningsproportion mellan olika program visar inte att så skulle vara fallet (Skolverket, ”Gymnasieskolans kursprov vårterminen 1999”). Däremot kan en uppgift med fysikalisk tonvikt ge skillnader i lösningsproportioner mellan könen. En studie av skillnaden i lösningsproportionen mellan män och kvinnor visar på att kvinnor med en viss provpoäng har lägre lösningsproportion än män med samma totalpoäng. Denna iakttagelse kan antyda att uppgiften är relativt ”fysiktung”.

Uppgiften testar ***kursplanemålen***

Eleven skall

- kunna ställa upp och tolka och använda integraler i olika typer av tillämpningar (D10)
- kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning (D9)

Betygskriterier

- eleven använder lämpliga matematiska begrepp och tillvägagångssätt för att lösa problem i ett steg (G1)
- eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösningar av olika typer av problem (V5)
- eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser (V3)

Elevlösning 1 till MaD vt-99, uppgift 12

12. a) A stenen träffar vattenytan

B Vattnets lyftkraft och friktionen mot vattnet gör att hastigheten minskar.

C Lyftkraften i vattnet och friktionen är lika med stenens tyngdkraft neråt på stenen Och tar ut varandra, hastigheten är konstant.

b) $v = 5\,m/s \quad t = 0.5\,s$

$v \cdot t = s$

$5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\,m$ Svar: 2.5m ovanför vattnet

c) Känt $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$

Sökt vatten djupet

Lösning: Area lika med sträckan i hastighet och tid diagram. Arean lika med integral

$$\int_{0,5}^{4} 1 + 18e^{-3t}\,dt = \left[t + \frac{18e^{-3t}}{-3} \right]_{0,5}^{4} =$$

$$= \left(4 + \frac{18 \cdot e^{-3\cdot 4}}{-3}\right) - \left(0{,}5 + \frac{18 \cdot e^{-3\cdot 0{,}5}}{-3}\right) = 4{,}8387..$$

≈ 4.84 Svar; 4,84 m

Kommentar till elevlösning

a) Uppgiften är korrekt löst. Eleven har beskrivit grafen med fysikaliska begrepp vilket inte är nödvändigt, men visar på den fysikkoppling som uppgiften kan innehålla (+1 g, +1 vg)

b) Eleven har ej insett att arean under kurvan mellan 0s till 0,5 s ger sträckan.

c) Korrekt lösning (+1g, + 1vg)

Elevlösning 2 till MaD vt-02, uppgift 12

a) Beskriv vad som händer med kulan!
A, B, C och D.
A: Kulan når vattenytan ⇒ Retardation av hastigheten (minskning)
B: Kulan sjunker genom vattnet, retardation beroende på vattenmotståndet. (= hastigh. minskning)
C: Kulan far med konstant hastighet (1 m/s).
D: Kulan når botten ⇒ hastigheten = 0.

b) Sträckan = Arean under grafen, tills stenkulan når vattenytan.
$t = 0,5$ s. $s/t_{max} = 5$ m/s. 1,25

$$A = S = \frac{5 \cdot 0,5}{2} = \frac{2,5}{2} = \cancel{1,125}\ 1,25\ m.$$

Svar: Stenen släpptes ca 1,13 meter ovanför vattenytan.

II: För att få arean under grafen måste man skapa ett integraluttryck:
Integrationsgränserna $t = 0,5$ och $t = 4$

$$\int_{0,5}^{4} V(t)\,\delta t = \int_{0,5}^{4} 1+18e^{-3t} = \left[t - 6e^{-3t}\right]_{0,5}^{4} =$$

$$= 4 - 6e^{-3 \cdot 4} - (0,5 - 6e^{-3 \cdot 0,5}) = 3,5 - 6e^{-12} - 6e^{-1,5} \approx$$

$$\approx 3,5 - (-1,3387) \approx 4,84\ m.$$

Svar: Vattendjupet där kulan släpps är ca 4,84 m.

Kommentar till elevlösning

a) Kortfattad och korrekt lösning av uppgiften (+ 1g, +1 vg)

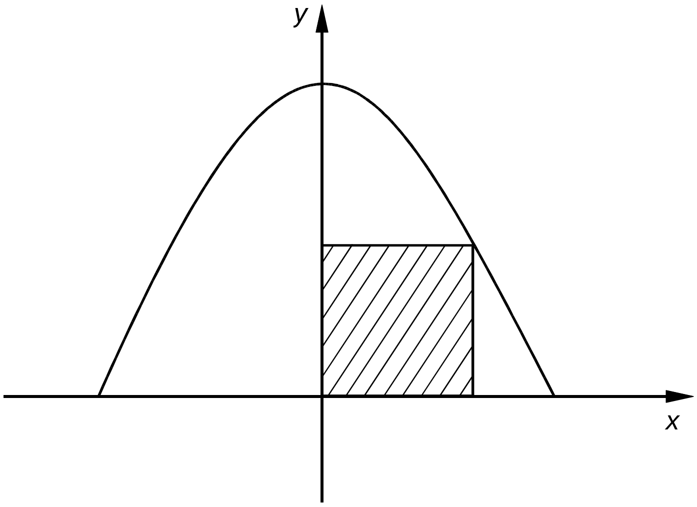
b) Ett ”lapsus” fel i sista steget av lösningen. Godtagbar lösning. (+1 g)

c) Eleven visar med den noggranna beskrivningen av sambandet mellan sträcka och hastighet att han/hon förstår sambanden mellan dessa begrepp. Lösningen är korrekt. (+1g, +1 vg)

Problemlösning

(NKP MaD vt-99, uppgift 13)

Figuren visar en kvadrat och grafen till en funktion. Välj en trigonometrisk funktion vars graf liknar den i figuren och bestäm kvadratens area för den funktion du valt.



Bedömningsanvisning

	Max 0/3/¤
Godtagbar ansats och godtagbar funktion för bestämning av kvadratens sida (t ex $p = \cos p$)	+1-2 vg
med godtagbar bestämning av kvadratens area	+1 vg
Eleven väljer en godtagbar modell och använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt språk.	¤

Kommentarer till NKP MaD vt-99, uppgift 13

För att lösa problemet måste eleverna först välja en trigonometrisk funktion som uppfyller de i uppgiften givna förutsättningarna. Denna öppenhet ger naturligtvis möjlighet till många olika lösningar med olika svar. Exemplen på elevlösningarna nedan visar några olika varianter av lösningar som denna typ av öppenhet ger möjlighet till.

Uppgiften testar ***kursplanemålen***

Eleven skall

- kunna rita (känna igen) grafer till trigonometriska funktioner (T2)
- kunna lösa trigonometriska ekvationer (T3)
- kunna använda någon metod för numerisk ekvationslösning (D7)
- kunna använda grafisk, numerisk programvara (D11)

Betygskriterier

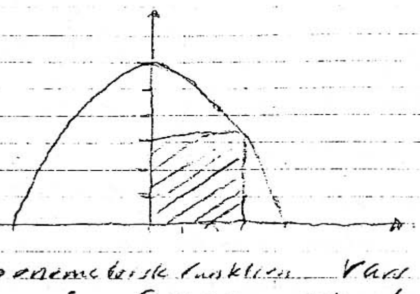
- eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem (V1)
- eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang.. (V3)
- eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk (M1)

Kommentarer till de följande elevlösningarna:

De tre elevlösningarna har alla bedömts vara på mvg-nivå. Det intressanta här är att se hur olika en lösning av denna typ av uppgift kan se ut.

Elevlösning 1 till MaD vt-99, uppgift 13

13. Känt:



Sökt: Trigonometrisk funktion vars graf liknar den i figuren och bestäm kvadratens area.

Lösning: x och y axel måste ha samma skala. Antingen får man öka amp. eller minska perioden eller både och.

Annars ingen kvadrat

$A \cos Bx$ är enkla funktion

Jag väljer $\cos 2x$ och vinkeln i radianer

$y = x$

$y = \cos 2x$

$x = \cos 2x$

$f(x) = \cos 2x - x$

$f'(x) = -2\sin 2x - 1$

$x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ Newton rapson

$x_1 = x_0 - \frac{\cos 2x - x}{-2\sin 2x - 1}$ $\quad x_0 \approx 5$ får vi på grafräknare

$x_1 = 0{,}5150216838$

$x_2 = 0{,}5149332676$

$x_3 = 0{,}5149332647$

$x_4 = 0{,}5149332647$

$x \approx 0{,}515$

Area $= b \cdot h$ $\quad$ kvadrat $= 0{,}515 \cdot 0{,}515 \approx 0{,}265$

Svar: 0,265 ae

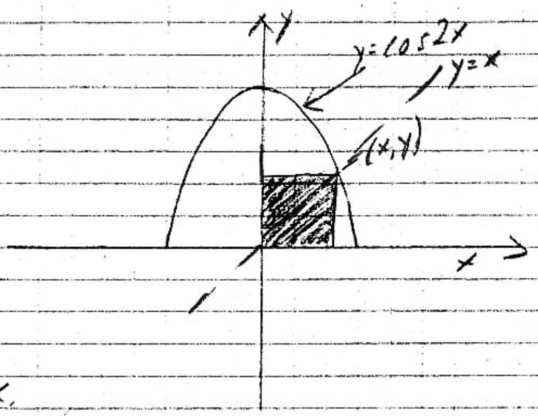
Kommentar till elevlösning:

Med utgångspunkt från ett inledande (korrekt) matematiskt resonemang väljer eleven $y = \cos 2x$ som den trigonometriska funktionen. Eleven löser därefter ekvationen $x = \cos 2x$ med hjälp av Newton-Raphson metoden för att beräkna sidlängden på kvadraten. Här använder sig eleven av en numerisk iterativ metod.

Redovisningen är klar och det matematiska språket är i huvudsak korrekt (0/3/¤).

Elevlösning 2 till MaD vt-99, uppgift 13

13.



y=x.

y= cos2x

Jag ritar upp kurvorna y=cos2x och y=x på grafritarn. Sedan tar jag 2nd CALC – Intersect och får fram värdet 0,51493326. för skärningspunkten Där y=x blir figuren en kvadrat alltså kan jag nu räkna ut arean för figuren.

$0{,}5149^2 = 0{,}265$

Svar: Arean är 0,265 ae

Kommentar till elevlösning:

Eleven väljer en trigonometrisk funktion ($y = \cos 2x$) och med hjälp av grafräknaren löses ekvationen $x = \cos 2x$. Arean av kvadraten beräknas därefter helt korrekt.

Redovisningen är klar och det matematiska språket är i huvudsak korrekt (0/3/¤).

Elevlösning 3 till MaD vt-99, uppgift 13

13 Kurvan skär y-axeln över 0 och
är inte förskjuten
det får bli en cosinuskurva

$y = a \cdot \cos x + b$ (perioden 1 är lättast)

jag vill hitta ett x där $y = x$

$y = a \cdot \cos x + b = x$

Om jag sätter x till $\frac{\pi}{2}$ reduceras
allt till $x = b$ (ty $\cos\frac{\pi}{2} = 0$)
$b = \frac{\pi}{2}$ amplituden a valdes till 5
för att efterlikna figuren i uppgiften

$y = 5 \cdot \cos x + \frac{\pi}{2}$

Arean kan beräknas enligt med en
integral men det
blir enklast med $A = y \cdot x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$A = \frac{\pi^2}{4} \approx 2,47$

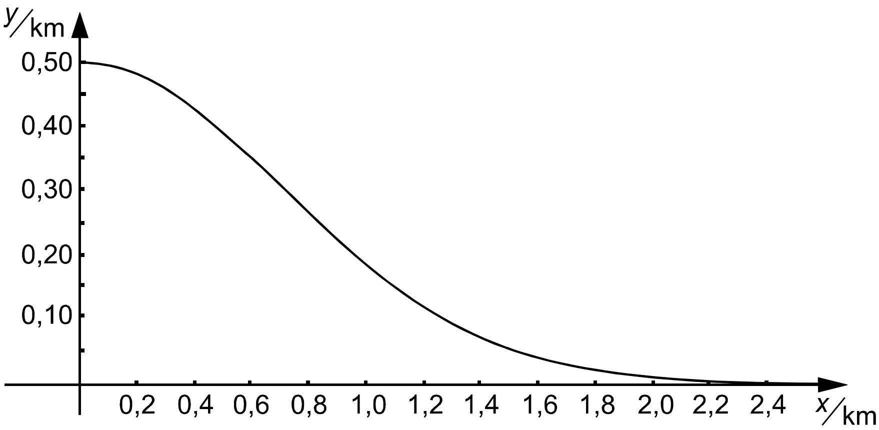
Kommentar till elevlösning:

Eleven väljer en allmän cosinusfunktion med perioden ett. Därefter använder eleven ett matematiskt resonemang för att bestämma funktionen. Eftersom sidlängden på kvadraten redan är bestämt till $\pi/2$ enligt det utförda resonemanget, så kan arean av kvadraten enkelt beräknas.

Redovisningen är klar och det matematiska språket är i huvudsak korrekt (0/3/¤).

Begreppsförståelse, Modellering
(NKP MaD vt-02; uppgift 14)

En skidbacke har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i bilden nedan.



Höjden *y* km är en funktion av sträckan *x* km.

Sambandet mellan *y* och *x* ges av

$y = 0{,}5e^{-x^2} \quad , \qquad 0 \le x \le 2{,}5$

a) Bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen

$y = 0{,}5e^{-ax^2} \quad , \qquad 0 \le x \le 2{,}5$ där *a* är en positiv konstant.

b) Ställ upp en ekvation för bestämning av *x*-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast.

c) Bestäm *a* så att backen är brantast för $x = 1{,}0$

Bedömningsanvisning

Max 0/6/¤

a) Redovisat godtagbar metod	+1 vg
med godtagbart svar $(-0{,}4)$	+1 vg

b) Beräknat andraderivatan ($y'' = ae^{-ax^2}(2ax^2 - 1)$)	+1-2 vg
Tecknad ekvationen $y'' = 0$	+1 vg
Genom att klara uppgiften visar eleven kvaliteter på MVG-nivå genom att använda generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång	¤
c) Bestämt *a* $\left(a = \frac{1}{2}\right)$	+1 vg

Kommentarer till NKP MaD vt-02, uppgift 14

I a-uppgiften ska eleverna derivera en sammansatt funktion för att bestämma lutningen i en viss punkt på backen. I b-uppgiften krävs mycket god begreppsförståelse och mycket goda färdigheter i derivering (tillämpning av andra derivatan) för att ta fram en ekvation (modellering) och slutligen i c-uppgiften använda sig utav den i b-uppgiften framtagna ekvationen. En svår uppgift där speciellt deluppgifterna b och c var utslagsgivande. Uppgiften bedöms ligga på nivån Väl godkänt och Mycket väl godkänt.

Uppgiften testar ***kursplanemålen***

Eleven skall

- kunna deriveringsreglerna för sammansatt funktion samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning (D5)
- kunna använda andra derivatan i olika tillämpade sammanhang (D6)

Betygskriterier

- eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang (V3)
- eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk (M1)

Kommentarer till elevlösningarna

De tre elevlösningarna visar på olika kvalitéer på lösningar. Den första med enbart a-uppgiften löst, men med en intressant iakttagelse. Den andra elevlösningen visar på mvg-kvalitéer medan den tredje elevlösningen som liksom elevlösning två har rätt lösning inte uppnår kraven på MVG.

Elevlösning 1 till MaD vt-02, uppgift 14

14 a) $y = 0{,}5e^{-x^2}$ $\quad y' = -x \cdot e^{-x^2}$

$y'(0{,}8) = -0{,}8 \cdot e^{-0{,}8^2}$

$= \underline{\underline{-0{,}42}}$ alltså lutningen $\approx \underline{\underline{0{,}42}}$

spelar väl ingen roll om det är + eller -

backen lutar ju nedåt?!

b) –

c) –

Kommentar till elevlösning:

Eleven har ej försökt att lösa deluppgifterna b och c. Deluppgift a är korrekt löst och eleven har införd en intressant slutkommentar till sin lösning. (0/2)

Elevlösning 2 till MaD vt-02, uppgift 14

14. $y = 0{,}5e^{-x^2}$

a) lutningen = y'

$y' = -x \cdot e^{-x^2}$

$y'(0{,}8) \approx -0{,}42$

b) $y = 0{,}5 \cdot e^{-ax^2}$

$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$

lutar mest där y' är störst

alltså där y'' är 0

Eleven förklarar varför användning av 2:a derivatan krävs (¤)

$y' = -ax \cdot e^{-ax^2}$

$f(x) = -ax \qquad f' = -a$

$g(x) = e^{-ax^2} \qquad g' = -2ax \cdot e^{-ax^2}$

$y'' = -a\,e^{-ax^2} + 2a^2x^2 \cdot e^{-ax^2} =$

$= a \cdot e^{-ax^2}\left(2ax^2 - 1\right)$

$a \cdot e^{-ax^2} > 0$

$0 = 2ax^2 - 1$

$x = \sqrt{\dfrac{1}{2a}}$

Redovisningen av de olika stegen för att ta fram ekvationen är korrekt och klar (¤)

c) $a = \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

svar: $a = 0{,}5$

Kommentar till elevlösning:

Denna elevlösning är utförd utan felaktigheter. Kommentarer är införda där det så krävs.

Eleven har valt generella metoder och modeller samt redovisningen är klar i sin tankegång. (0/6/¤)

Elevlösning 3 till MaD vt-02, uppgift 14

14 a) $y = 0{,}5e^{-x^2}$

$y' = -0{,}5e^{-x^2} \cdot 2x$

$y'(0{,}8) = -0{,}5e^{-0{,}8^2} \cdot 2 \cdot 0{,}8 \approx \underline{-0{,}42}$

b) $y = 0{,}5\,e^{-ax^2}$

$y' = -a \cdot 0{,}5\,e^{-ax^2} \cdot 2x$

$y'' = a^2 \cdot 2\,e^{-ax^2} \cdot x^2 - a\,e^{-ax^2}$

Det saknas förklaring till varför 2:a derivatan används

$a^2 \cdot 2e^{-ax^2} \cdot x^2 - ae^{-ax^2} = 0$

$a^{\cancel{2}} \cdot 2\cancel{e^{-ax^2}} \cdot x^2 = \cancel{a}\cancel{e^{-ax^2}}$

$a \cdot 2 \cdot x^2 = 1$

$x = (\pm)\sqrt{\frac{1}{2a}}$

Parentes kring +-tecknet.
x ska vara >0

c) $a \cdot 2 \cdot 1{,}0^2 = 1$

$\underline{a = 0{,}5}$

Kommentar till elevlösning:

Eleven har fått fram rätt svar, men lösningen är svår att följa vilket innebär att kravet på redovisning med en klar tankegång och korrekt språk inte kan anses vara uppfyllt (0/6)

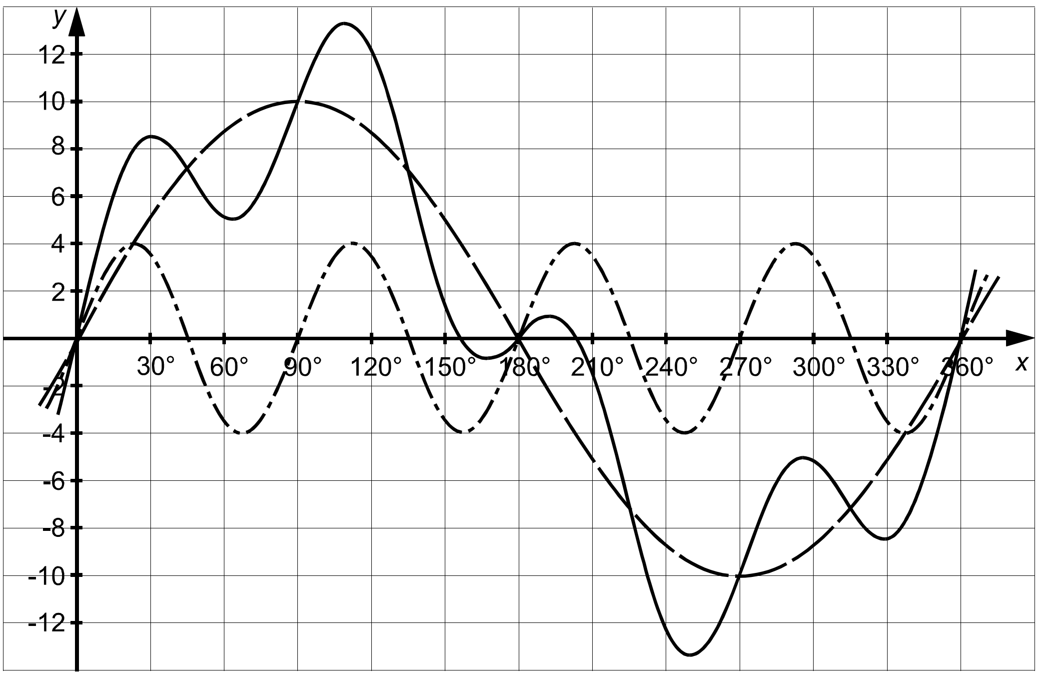
Problemlösningskompetens, Resonemangskompetens
(NKP MaD vt-02, uppgift 15)

En ton låter olika då den spelas på orgel eller fiol. Detta beror på att klangen är sammansatt av en grundton och flera så kallade övertoner. Övertonerna kan vara olika starka och det är detta som ger instrumentets klangfärg.

Övertonernas perioder förhåller sig på ett enkelt sätt till grundtonen. Om vi väljer en fiolsträng som exempel så kan den ge en ton som beskrivs med en summa av termer
$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$

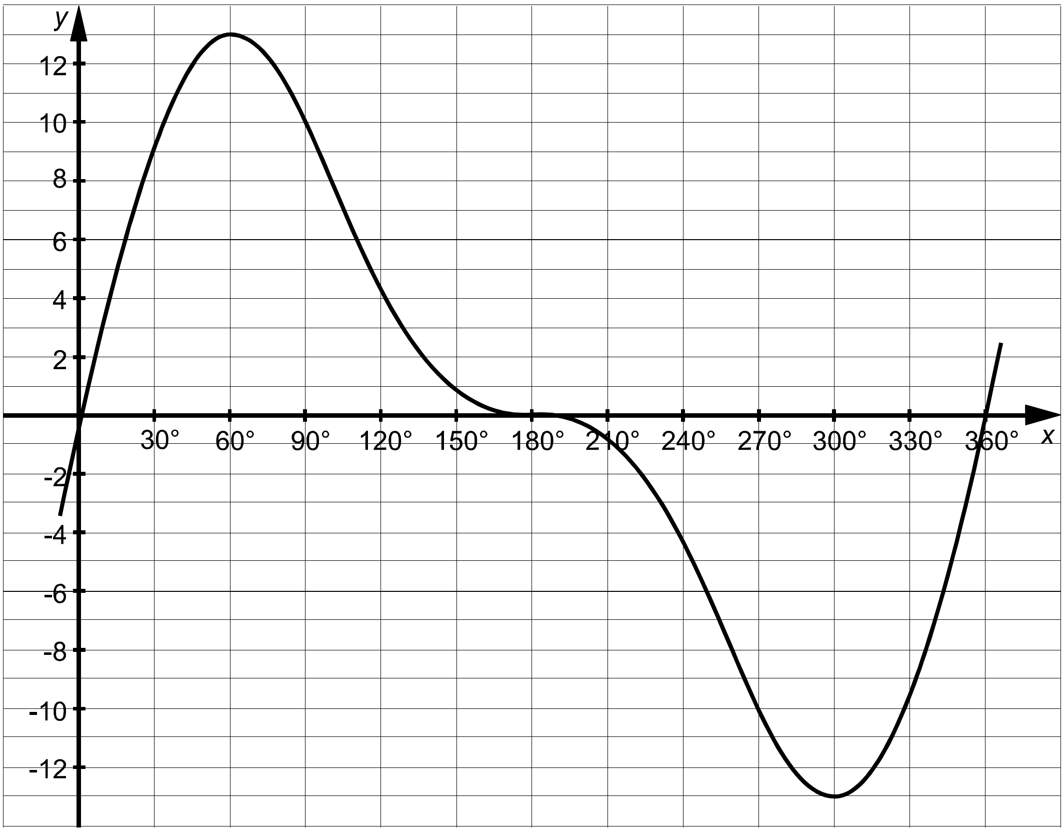
$a_1 \sin x$ motsvarar grundtonen och sedan följer 1:a övertonen, 2:a övertonen osv.

- Figur 1 visar graferna till de funktioner som beskriver en grundton $(y = a \sin x)$, dess tredje överton $(y = b \sin 4x)$ samt den ton som fås av dessa tillsammans $(y = a \sin x + b \sin 4x)$. Bestäm konstanterna *a* och *b*.



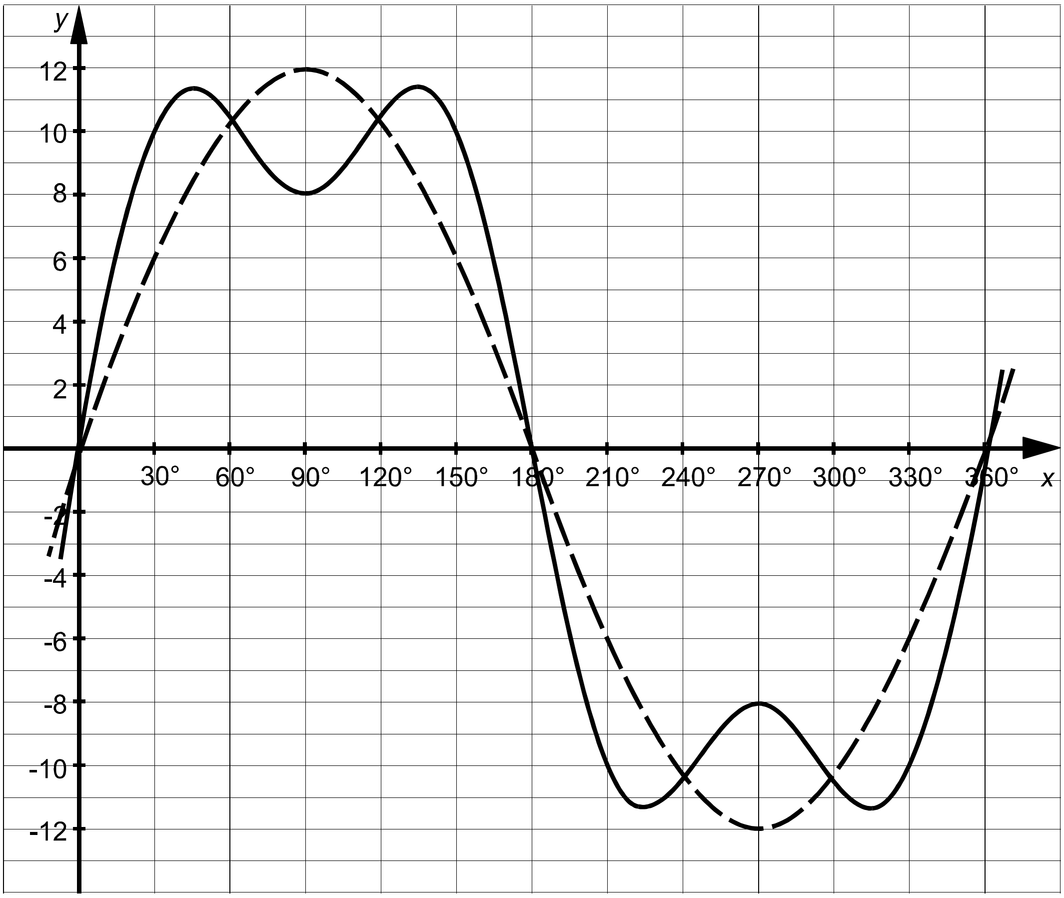
Figur 1

- Figur 2 visar grafen till funktionen $y = 10\sin x + c\sin 2x$. Funktionen beskriver en ton som består av en grundton och dess första överton. Bestäm konstanten *c*.



Figur 2

- Figur 3 visar graferna till de funktioner som beskriver en grundton $y = 12\sin x$, samt den ton $y = 12\sin x + d\sin kx$ som fås av grundtonen tillsammans med en överton. Bestäm konstanterna *d* och *k*.



Figur 3

Antag att du har en figur som visar graferna till funktionerna och $y = p\sin x + q\sin nx$, där n är ett heltal större än två. Beskriv en generell metod för hur man kan bestämma konstanterna p, q och n med hjälp av graferna.

Nedan följer bedömningsmallen för uppgiften. Bedömningen sker utifrån tre aspekter med olika kvalitativa nivåer. I bilaga 3 finns den generella aspektmallen som konkretisera i bedömningen av uppgifter som denna.

Max 2/4/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre**		→ **Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven bestämmer amplituderna i figur 1 korrekt t.ex. genom avläsning. ($a = 10$ och $b = 4$) **1g**	Eleven bestämmer amplituderna i figur 1 korrekt samt använder och redovisar en lämplig metod för bestämning av konstanten *c*. ($c = 5$) **1g och 1vg**	Eleven bestämmer amplituderna i figur 1 korrekt, använder och redovisar lämpliga metoder för bestämning av konstanterna *c*, *d* och *k*. ($d = 4$ och $k = 3$) **1g och 2vg**	**1/2**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*			Eleven använder resonemang som leder till metoder för bestämning av alla konstanterna. Åtminstone resonemanget bakom bestämningen av konstanterna i figur 3 ska vara redovisade. **1vg**	**0/1**

Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*	Redovisningen är möjlig att förstå och följa **1g**	Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är acceptabelt. **1g och 1vg**	**1/1**
Summa			**2/4**

Eleven beskriver en generell metod för bestämning av amplituder och perioder för liknande problem. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Eleven använder ett matematiskt språk och gör det på i huvudsak korrekt sätt.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 15

Elev 1 (2 g)

$y = a \sin x$ det är den stora vågen, en våg per 360°
vågen är högst på 10

$y = b \sin 4x$ det är den kortare vågen
fyra upprepningar per 360°
den är högst på 4

SVAR: $a = 10$ $b = 4$

Eleven har tolkat graferna på ett korrekt sätt (+1g)

Den utdelade poängen är ett gränsfall. Elevens lösning går att följa, men löser bara en liten del av uppgiften (+1g)

Bedömning

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	1/0	
Matematiska resonemang	0/0	
Redovisning och matematiskt språk	1/0	Elevens redovisning är någorlunda fullständig.
Summa	**2/0**	

Elev 2 (2 g och 1 vg)

15. a) $y_1 = a \sin x$ $a =$ Amplituden $= A$ se fig!

$y_2 = b \sin 4x$

$y_1 = A_1 \sin x = 10 \sin x$

$y_2 = A_2 \sin 4x = 4 \sin 4x$

Svar: $a = 10$

$b = 4$

Korrekt bestämning av *a* och *b* (+1g)

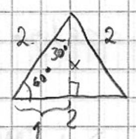
b)

x	y
60°	13
180°	0
300°	-13
360°	0

$y = 10 \sin x + c \sin 2x$

$13 = 10 \sin 60^\circ + c \sin 120^\circ$

$13 = \frac{10\sqrt{3}}{2} + c\frac{\sqrt{3}}{2}$



$2^2 = 1^2 + x^2$

$x = \sqrt{3}$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$13 - 5\sqrt{3} = c\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2(13 - 5\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot c$

$\frac{2(13 - 5\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = c$

$c = 16$

Svar: $c = 16$

Eleven använder en lämplig metod för bestämning av konstanten *c* (+1g) men gör fel vid beräkningen.

c) $y = 12 \sin x + c \sin kx$ $d = 5$

$k = 2$

d) Jag har ingen generell metod.

Eleven har ej redovisat metoden för bestämning av *d* och *k*. Felaktiga värden.

Bedömning

Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/1	Räknefel vid beräkning av konstanten *c*.
Matematiska resonemang	X	0/0	
Redovisning och matematiskt språk	X	1/0	
Summa		**2/1**	

Elev 3 (2 g och 4 vg och ¤)

15a) $a = 10$ (se fig.)

$b = 4$ — " —

max för sinus = 1

$y_{1max} = 10$

$a \cdot 1 = 10$

$a = 10$

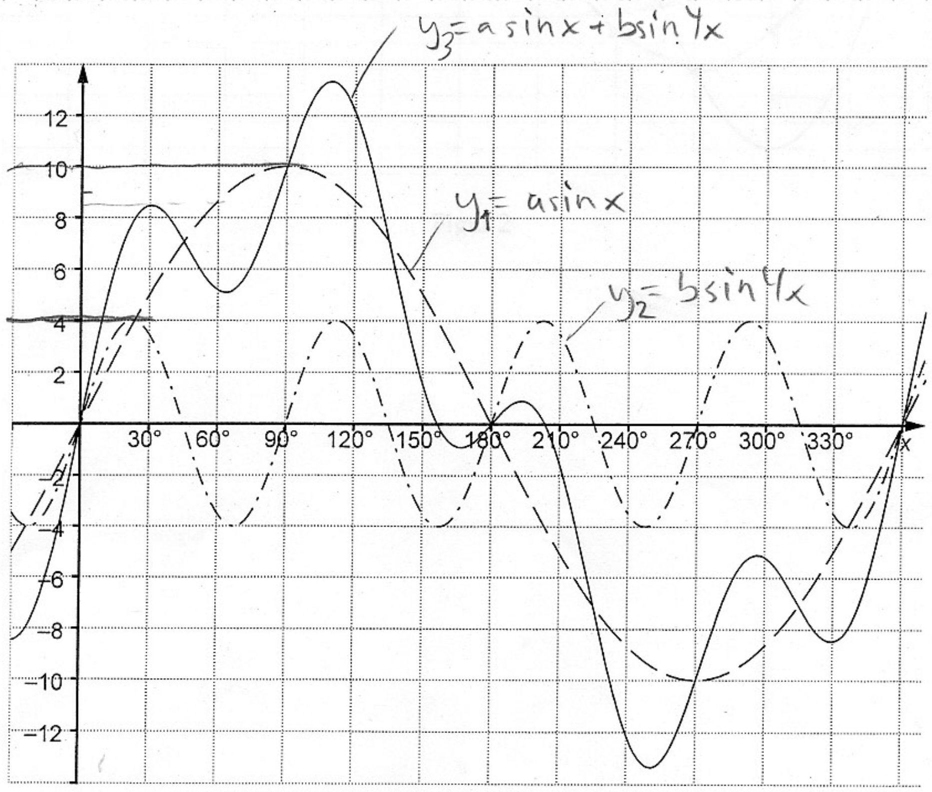
b:

$y_{2max} = 4$

$b \cdot 1 = 4$

$b = 4$

Korrekt bestämning av *a* och *b* (+1g).



Figur 1

b) $y_4 = 10\sin x + c\sin 2x$

grundton: $y_5 = a\sin x = 10\sin x$

1:a övertonen: $y_6 = b\sin 2x = c\sin 2x$

$\sin 2x \Rightarrow$ Perioden $= 180°$

$y_6 = c\sin 2x$ har sitt maxvärde vid $45°$

$\sin = 1$ vid $90°$

$y_6 = c$

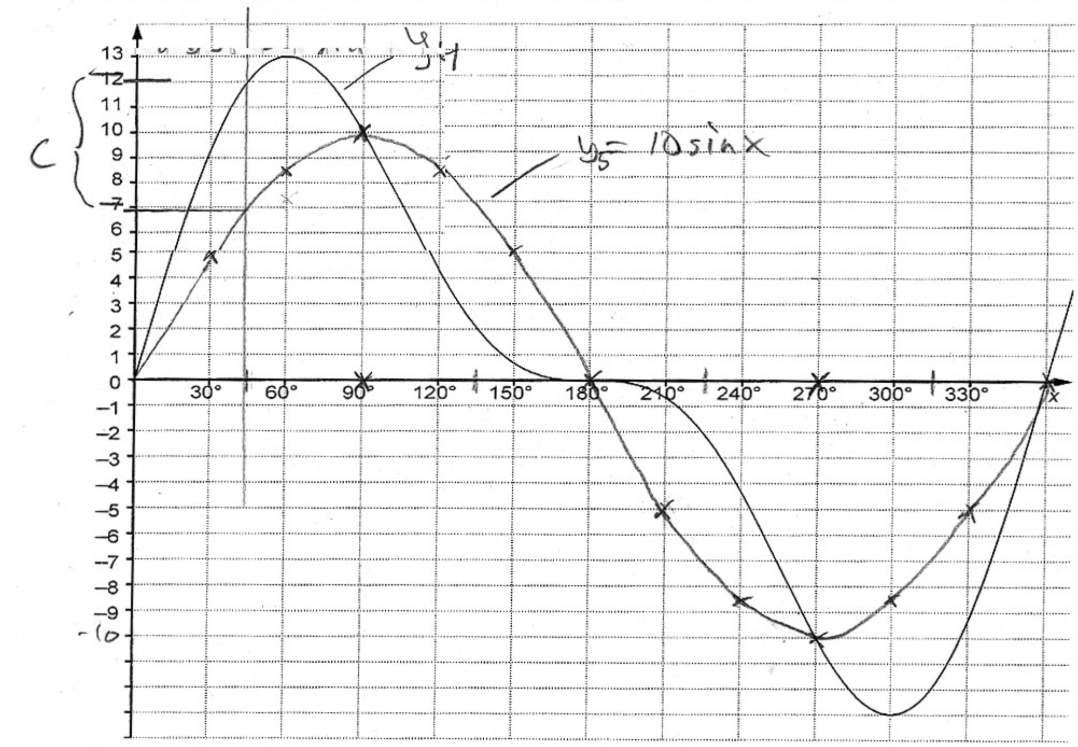
$y_4(90) = 12$

$y_5(90) \approx 7$

(se fig) $y_6 = y_4 - y_5 = 12 - 7 = 5$

Svar: $c = 5$

Eleven redovisar metoden för bestämning av konstanten *c*. Korrekt *c*.



Figur 2

15c)

$d = 10 - 6 = 4$ (se fig)

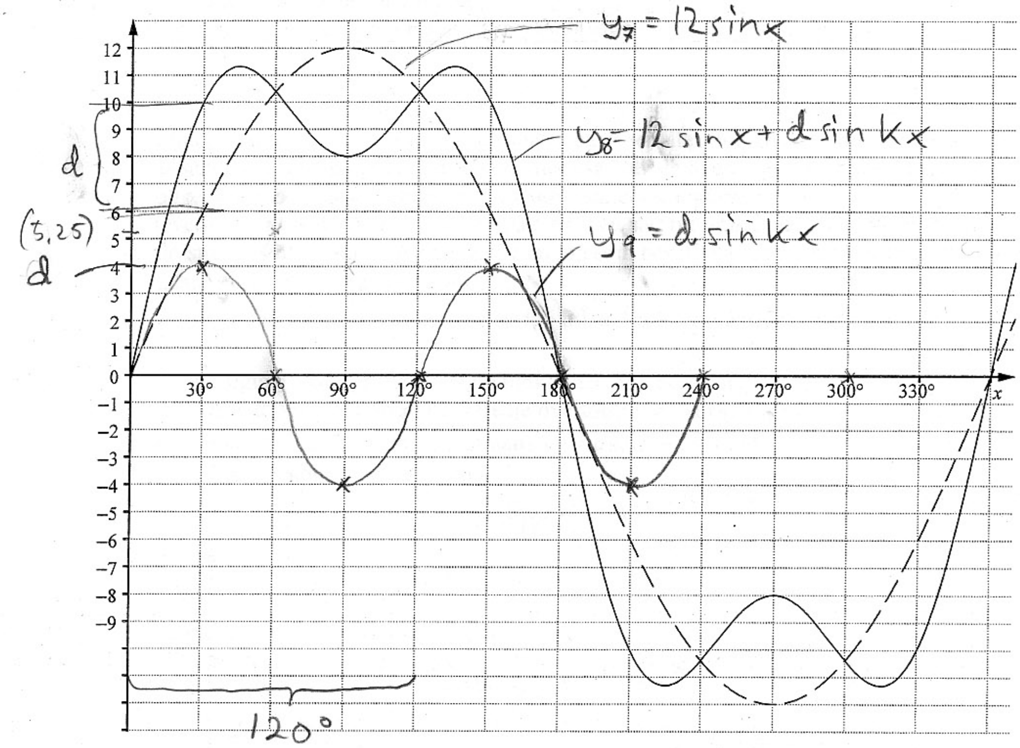
$\text{Period}(y_9) = 120°$

$$k = \frac{360°}{120°} = 3$$

$y_9 = 4 \sin 3x$

Svar: $d = 4$, $k = 3$

Eleven har genom analys av graferna förstått att funktionen *d*sin*kx* har perioden 120 grader (följer topparna på den sammansatta funktionen). *d*-värdet också korrekt beräknat.



Figur 3

15d) $y = p\sin x + q\sin nx$ $n > 2$

Rita in en kurva som är differansen mellan kurvan för grundtonen och den sammansatta kurvan:

$q\sin nx = y - p\sin x$

p och q fås genom att kontrollera resp. kurvas högsta värde som motsvarar p och q

$$n = \frac{360^\circ}{\text{perioden för nya kurvan}}$$

Min metod är (mycket) logisk

Man kan kontrollera värderna genom att sätta in i formlen: $y = p\sin x + q\sin nx$ och lösa ut den bokstav man vill ha reda på

Eleven har beskrivit en fungerande generell metod. Att värdena alltid kan kontrollberäknas är en bra kommentar (¤)

Bedömning

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	1/2	
Matematiska resonemang	0/1	
Redovisning och matematiskt språk	1/1	
Summa	**2/4**	

Eleven beskriver en generell metod. Eleven tolkar resultaten med matematiska resonemang. Eleven använder ett matematiskt språk och gör det på i huvudsak korrekt sätt. ¤

Bedömning av muntlig redovisning

I de mål att sträva mot som är gemensamma för alla gymnasiala kursplaner i matematik betonas på ett mångfacetterat sätt elevernas muntligt kommunikativa förmåga. Specifikt för kursplanen i Matematik D gäller att ”eleven skall under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används”.

Projektgruppen Nationella prov på Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar har utvecklat en modell för att stödja likvärdig bedömning av elevers förmåga att muntligt uttrycka sitt kunnande i matematik. Detta material är speciellt utformat för att användas som ett muntligt delprov i kurs D. Ett deltagande i det muntliga delprovet innebär att den muntliga redovisningen av en sådan mer omfattande uppgift bedöms i enlighet med nedanstående bedömningsanvisningar. Dessa bedömningsanvisningar är en av flera möjliga tolkningar av de nationella betygskriterier som beskriver den kompetens som krävs för respektive betygssteg vad gäller förmågan att muntligt uttrycka matematiska tankar och idéer.

Bedömningsanvisningarna innehåller beskrivningar av olika prestationsnivåer, bedömningsformulär samt bedömda och kommenterade autentiska elevredovisningar. Dessa muntliga elevredovisningar, som bygger på lösningar av en exempeluppgift, finns tillgängliga både i skrift och som ljudupptagning på
http://www.umu.se/edmeas/np

Bedömningsanvisningar

I det följande kommer först en beskrivning av de bedömningsaspekter som bedömningen ska fokusera på. Detta avsnitt följs av hur bedömningen på varje bedömningsaspekt ska vägas samman till ett delprovsbetyg. Sedan följer en beskrivning av betygsnivåerna följt av det bedömningsformulär läraren kan ha vid bedömningstillfället. På detta bedömningsformulär finns korta stödfraser för att påminna om respektive betygsnivå. Det finns också rutor att kryssa i för att markera den bedömning som görs på varje elev.

Beskrivning av bedömningsaspekter

Utgångspunkten för dessa bedömningsanvisningar är att en muntlig presentation av matematiska idéer för matematikkunniga personer består av en muntlig redogörelse som för sin tydlighet också innehåller en matematisk terminologi. Vid presentationen av matematiska tankar används då ett matematiskt språk, innehållande både en vardaglig och en matematisk terminologi.

En *muntlig redogörelse* kan innehålla beskrivningar och förklaringar. Beskrivningar kan vara i form av t ex vilka beräkningar som gjorts (vid lösande av en beräkningsuppgift) eller vilka nya matematiska begrepp som tillkommit under olika tidsepoker (vid en beskrivning av matematikens historia som en ”något mer omfattande uppgift”). Förklaringar kan handla om varför beräkningarna är gjorda eller varför de nämnda matematiska begreppen tillkom just under dessa perioder.

Förekomsten av relevanta beskrivningar och förklaringar är alltså viktiga beståndsdelar i en redovisning. I beskrivningarnas och förklaringarnas relevans ligger att de ska ge lämplig och behövlig information. *Beskrivningarnas och förklaringarnas utförlighet* är också väsentlig. Beräkningarna och förklaringarna måste vara tillräckligt utförliga för att åhörarna ska kunna förstå innehållet. Detta betyder inte nödvändigtvis att beräkningarna och förklaringarna måste vara långa, men att de måste innehålla tillräckligt mycket information för att osäkerheten kring de tankar som framförs ska vara liten.

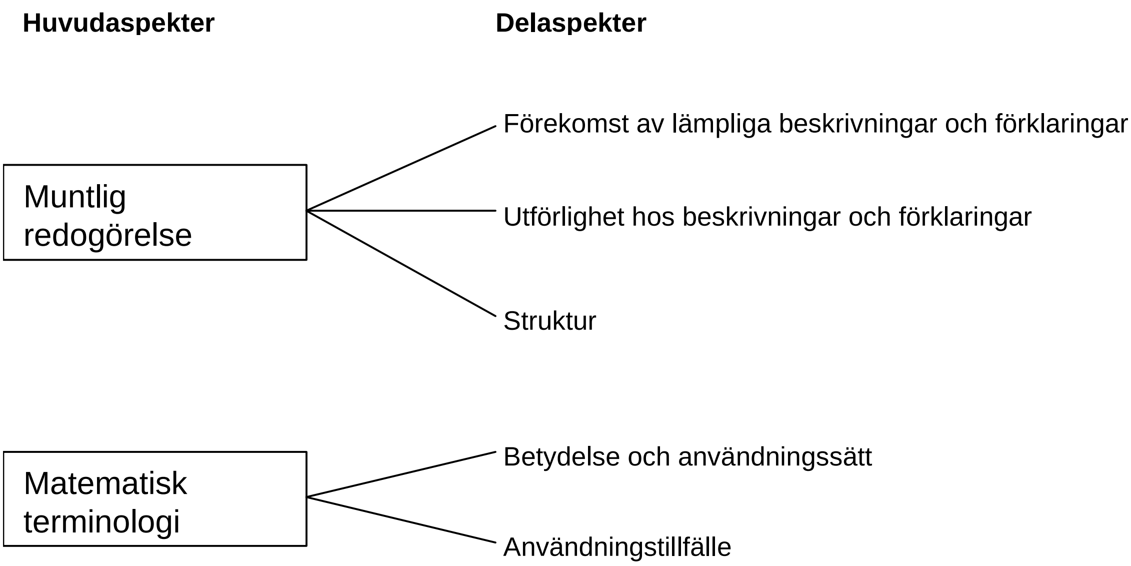
Strukturen på redogörelsen är också viktig. Det som sägs bör komma i lämplig ordning och denna ordning bör vara tydlig för åhöraren. Det som sägs ska vara logiskt uppbyggt så att åhöraren förstår hur förklaringarna hänger ihop med varandra, och hur de hänger ihop med t ex beräkningar och slutsatser. För att eleverna ska kunna visa kunskaper som hör ihop med dessa aspekter bör det vara klart för eleverna att redovisningen sker för personer som inte nödvändigtvis är väl insatta i elevens uppgiftslösning och att tankarna därför kan behöva förklaras ordentligt.

Den matematiska terminologin kan, enligt en tolkning av bl.a. betygskriterierna, definieras som matematiska termer, symboler och konventioner. Den matematiska terminologin bör användas på lämpligt sätt, dvs. lämpliga termer och symboler används med rätt *betydelse* och konventioner används på ett riktigt *sätt*. Den matematiska terminologin bör också användas vid lämpligt *tillfälle*, dvs. den används när en korrekt användning t.ex. kan tydliggöra och precisera något eller förkorta en förklaring.

En redovisning bör enligt denna sista delaspekt innehålla en rik och avancerad matematiskt terminologi när detta kan öka klarheten om de tankar som redovisas för en åhörare som kan den matematiska terminologin. En förlängning av en förklaring på grund av att den matematiska terminologin inte behärskas och ett vardagligt språk (med termer som kan göra tankarna mindre precisa) måste användas är sålunda något som ska beaktas vid bedömningen. För att eleverna ska kunna visa sin kapacitet att använda den matematiska terminologin bör det vara klart för dem att förutsättningen för redovisningen är att den förs i en omgivning där det matematiska språket behärskas.

Mot bakgrund av ovanstående fokuserar bedömningsanvisningen på två huvudaspekter av matematisk kompetens - muntlig redogörelse av matematiska tankar respektive den använda matematiska terminologin. Aspekten muntlig redogörelse kan delas in i tre delaspekter och den matematiska terminologin i två delaspekter. Dessa har använts för att ge en beskrivning av betygsnivåerna och en tydlig progression mellan dessa betygsnivåer.

De två huvudaspekterna som bedömningen ska ta hänsyn till, samt de fem delaspekterna som använts för att ge en struktur på bedömningsanvisningarna kan visualiseras med nedanstående figur:



Bedömningsaspekter att fokusera på

En noggrann fokusering på alla fem delaspekter i bedömningssituationen har bedömts vara för komplext för den relativt korta bedömningstiden till förfogande. Några av delaspekterna har därför slagits ihop och antalet aspekter att fokusera bedömningen på har på så sätt reducerats till följande tre bedömningsaspekter:

1. en sammanslagning av delaspekterna förekomst och utförlighet av beskrivningar och förklaringar
2. redogörelsens struktur
3. den matematiska terminologin

Bedömningen av elevens prestation med avseende på dessa tre bedömningsaspekter vägs sedan samman till en total bedömning av elevens prestation.

För att elevens prestation ska bedömas med delprovsbetyget Godkänt ska prestationen med avseende på alla tre bedömningsaspekter ha bedömts indikera minst nivån Godkänt.

För att elevens prestation ska bedömas med provbetyget Väl godkänt ska prestationen med avseende på alla tre bedömningsaspekter ha bedömts indikera minst nivån Väl godkänt.

För att elevens prestation ska bedömas med provbetyget Mycket väl godkänt ska prestationen ha bedömts indikera minst väl nivån Godkänt avseende aspekt 1 och 2 och nivån Mycket väl godkänt avseende aspekt 3. (Enligt den tolkning av betygskriterierna som ligger till grund för denna bedömningsanvisning finns inte någon skillnad mellan vg- och mvg-nivå vad beträffar bedömningsaspekterna 1 och 2 som är kopplade till muntlig redogörelse.)

På följande sidor finns en sammanställning av de aspekter och kvalitativa nivåer som ligger till grund för bedömningen av den muntliga prestationen.

Beskrivning av betygsnivåer

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** →	
Muntlig redogörelse *Beskrivningar och förklaringar*	Redovisningen innehåller lämpliga beskrivningar, t ex utförda beräkningar (vid lösande av beräkningsuppgift) eller beskrivning av nya matematiska begrepp som tillkommit under olika tidsepoker (vid en historisk beskrivning av ett matematiskt område). Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i beskrivningar och framför allt i de få förklaringar som framförs är begränsad. Det uppstår därför osäkerhet kring, och svårigheter att, följa och förstå de tankar som förs fram, även om det är möjligt. g	Redovisningen innehåller tillräckligt med nog utförliga beskrivningar och förklaringar av den matematik som utförs, eller framförs, för att de uttryckta tankarna ska vara lätta att följa och förstå. En del av dessa förklaringar kommer eventuellt i den andra delen av redovisningen. Förklaringar kan gälla t ex *varför* en viss integral ger svaret på en frågeställning (vid lösande av en beräkningsuppgift) eller *varför* vissa förutsättningar måste vara uppfyllda för att en viss sats ska gälla (då uppgiften består av att läsa in och redovisa ett nytt ämnesområde). vg
Muntlig redogörelse *Struktur*	Den övergripande strukturen är klar men redovisningen är bitvis fragmentarisk eller rörig. Detta kan t ex betyda att beskrivningar eller förklaringar som redovisas inte kommer i lämplig ordningsföljd, att eleven vid ett flertal tillfällen tvingas återkomma med information som inte sagts vid lämpligt tillfälle eller att redogörelsen bitvis är så fragmentarisk att strukturen i vissa delar blir otydlig. g	Redovisningen är väl strukturerad. Beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger väl ihop i en logisk följd. Den röda tråden kan tappas men eleven återkommer till den på ett tydligt sätt och helheten upplevs som strukturerad. vg

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** →		
Matematisk terminologi *(matematiska termer, symboler och konventioner)*	Eleven använder ofta den matematiska terminologin då detta är lämpligt och på ett riktigt sätt. Osäkerhet i det matematiska språket märks dock genom att eleven tvekar kring användningen av ett matematiskt uttryckssätt. Det är då inte ovanligt att eleven p.g.a. brister i den matematiska terminologin tvingas ersätta matematiska termer med andra ord. Termer används också med felaktig betydelse, som t ex ”grafsystem” istället för ”koordinatsystem” och ”rak linje” istället för ”horisontell linje”. Den matematiska terminologin kan också innehålla mindre lämpliga termer som t.ex. ”plusvärde”. Detta sker dock på ett sådant sätt att de uttryckta tankarna är möjliga att följa och förstå. g	Eleven tvingas endast i undantagsfall ersätta matematiska termer med andra ord. Språket kan innehålla en del brister som t ex användning av mindre lämpliga termer och felaktig eller olämplig användning av korrekta matematiska termer. Språket används dock på ett sådant sätt att de uttryckta tankarna är lätta att följa och förstå. T.ex. används inte uttryck som ”rak linje” istället för ”horisontell linje” eller termen ”nollpunkt” i sammanhang som gör det svårt att förstå vad som menas. vg	Eleven använder den matematiska terminologin vid lämpliga tillfällen och på ett korrekt sätt. Brister i den matematiska terminologin, som t ex ett felaktigt eller olämpligt användande av matematiska uttryckssätt, sker endast i något undantagsfall. Dessa brister får dock inga konsekvenser för klarheten i tankegången som förs fram. mvg

Bedömningsformulär

Namn: ____________________ Klass: __________ Delprovsbetyg: __________________

Beskrivningar och förklaringar:		
☐	☐ g	☐ vg
Sådana att tankarna inte går att förstå	Någon förklaring men mest beskrivningar. Knapphändiga, men de framförda tankarna går att förstå.	Tillräckliga för att de framförda tankarna ska vara lätta att förstå.

Struktur:		
☐	☐ g	☐ vg
Redovisningen är fragmentarisk och ostrukturerad	Redovisningen är i stort sett strukturerad men delvis rörig	Redovisningen är välstrukturerad

Matematisk terminologi:			
☐	☐ g	☐ vg	☐ mvg
Felaktig. Framförda tankar går ej att förstå.	Matematiska termer används felaktigt och/eller ersätts med andra ord. Framförda tankar går dock att förstå.	Oftast korrekt. Framförda tankar blir lätta att förstå	Korrekt

Eventuella kommentarer:

____

____

Bilaga 1

Kursplan MaD

Mål som elever skall ha uppnått efter avslutat kurs

Eleven skall

T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning, T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp, T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer, T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning, D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang, D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara, D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå, D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning, D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar, D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser, Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Bilaga 2

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.

G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.

G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.

G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.

V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.

V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.

V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.

V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.

V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.

M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.

M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.

M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.

M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Bilaga 3

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer**		
	Lägre		**Högre**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven löser uppgifter eller deluppgifter av enkel rutinkaraktär och visar därmed grundläggande förståelse för begrepp, metoder, och procedurer.	Eleven löser uppgifter av olika karaktär och visar därmed god förståelse för begrepp, metoder och procedurer samt säkerhet i beräkningar. Eleven gör matematiska tolkningar av situationer och använder matematiska modeller.	Eleven kan utveckla problem och använder lämpliga procedurer. Eleven kan använda generella metoder och modeller vid problemlösning.
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Eleven följer och förstår matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt. Eleven drar slutsatser utifrån prövning i ett eller ett fåtal fall.	Eleven genomför logiska matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt. Eleven drar slutsatser utifrån ett större antal och/eller väl	Eleven tar del av andras argument och framför utifrån dessa egna matematiskt grundade idéer. Eleven värderar och jämför olika metoder samt analyserar och tolkar resultaten från olika typer av matematisk problemlösning. Eleven drar slutsatser från generella resonemang och kan genomföra härled-

		valda fall.	ningar och matematiska bevis.
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*	Redovisningen är möjlig att förstå och följa även om det matematiska språket är torftigt och ibland felaktigt.	Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt.	Redovisningen är välstrukturerad, fullständig och tydlig. Det matematiska språket är korrekt och lämpligt.