Lådvolymsberäkning

Sune Student*

Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå, Sverige

7 september 2021

Sammanfattning

Denna rapport handlar om vilken volym en låda får om den skapas från ett kvadratiskt pappersark i vars hörn kvadrater klipps bort så kanterna sen kan vikas upp. Lösningar ges på två problem.

Det först består i att beräkna volymen givet de bortkippta kvadraterna sidlängder. Som del i lösningen härleds en exakt ekvation för volymen som funktion av de bortkippta kvadraternas sidlängder.

Det andra problemet efterfrågar hur stor lådans volym som mest kan vara. Här utreds ett konkret fall, där arkets sidor är 20 cm och maximala volymen blir 592.59 cm^3, som sen generaliseras. Om s är arkets sidlängder visar det sig att så maximeras volymen, till $2s^3/27$, om de bortkippta kvadraternas sidlängder är $s/6$.

1 Introduktion

I denna rapport ger vi lösningar på två uppgifter som handlar om en låda skapad genom att klippa bort kvadrater i hörnen på ett kvadratiskt papper och vika upp sidorna[1]. Figur 1 (visar en principskiss. Det kvadratiska pappret har sidlängden 20 cm och x är kantlängden i cm på de kvadrater som klipps bort i hörnen.

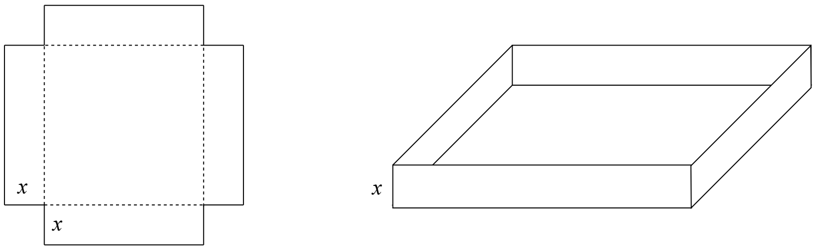
2 En lådas volym

Den första uppgiften vi löser lyder så här:

> Om $x = 2$ cm, vilken volym får lådan uttryckt i liter avrundat till två decimalers noggrannhet?

*email: `sunstu-0@student.ltu.se`. (Artikeln skriven av Håkan Jonsson, Luleå tekniska universitet, till kursen D0015E Datateknik och ingenjörsvetenskap.)

[1] Uppgiften är i hög grad inspirerad av en snarlik uppgift publicerad av *analyzemath.com* [1].



Figur 1: Principskiss av låda.

Om vi klipper bort x cm får lådan höjden x cm när sidorna viks upp. Längden och bredden blir båda $20 - 2x$. Lådan är i grunden ett rätblock, så volymen är produkten av höjd, bredd och längd. Alltså, volymen

$$\begin{aligned} V(x) &= x(20 - 2x)(20 - 2x) \\ &= x(400 - 80x + 4x^2) \\ &= x(4x^2 - 80x + 400) \\ &= 4x^3 - 80x^2 + 400x \text{ cm}^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Sätter vi in $x = 2$ i ekvation 1 blir volymen $V(2) = 4 \cdot 2^3 - 80 \cdot 2^2 + 400 \cdot 2 = 32 - 320 + 800 = 512$ cm^3. Eftersom 1 liter är 1000 cm^3 motsvarar 512 cm^3 volymen 0.512 liter, vilket arundas till 0.51 liter med två decimalers noggrannhet.

3 En lådas maximala volym

Den andra uppgiften handlar om att bestämma hur stor volym lådan som mest kan ha. Vi söker alltså det x för vilken $V(x)$ är maximal. Såna maximeringsproblem kan lösas genom att först derivera, sätta derivatan lika med 0 och lösa ekvationen.

Uttrycket i ekvation 1 är ett polynom i x, varför vi använder deriveringsregeln för polynom. Från matematisk analys är det också känt att derivatan av en summa är summan av derivatorna av termerna. $V(x)$ består av de 3 termerna $4x^3$, $-80x^2$ och $400x$ vars derivator då är $12x^2$, $-160x$ och 400. Låt $V'(x)$ stå för derivatan av $V(x)$. Då är

$$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400. \tag{2}$$

Nästa steg är att lösa ekvationen $V'(x) = 0$, dvs $12x^2 - 160x + 400 = 0$. Detta är en andragradsekvation, och för att lösa sådana finns en formel. Generellt gäller att en andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$ har rötterna

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Med $a = 12$, $b = -160$ och $c = 400$ får vi att

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{-160}{2\cdot 12} \pm \sqrt{\left(\frac{-160}{2\cdot 12}\right)^2 - \frac{400}{12}} \\
&= \frac{20}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{-20}{3}\right)^2 - \frac{100}{3}} \\
&= \frac{20}{3} \pm \sqrt{\frac{400}{9} - \frac{300}{9}} \\
&= \frac{20}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}. \\
&= \frac{20}{3} \pm \frac{10}{3},
\end{aligned}$$

det vill säga de två rötterna

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{20}{3} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{30}{3} = 10 \text{ och} \\
x_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3}.
\end{cases}$$

Frågan som återstår är om båda rötter verkligen maximerar volymen? Genom insättning av x_1 i ekvation 1 får vi

$$\begin{aligned}
V(x_1) &= V(10) \\
&= 4\cdot 10^3 - 80\cdot 10^2 + 400\cdot 10 \\
&= 4000 - 8000 + 4000 \\
&= 0 \text{ cm}^3.
\end{aligned}$$

Men det kan inte vara maximala volymen, för som vi visade i första uppgiften får vi t ex en större volym för $x = 2$(!) Volymen 0 är i själva verket den minsta tänkbara, för vi kan ju inte gärna ha negativ volym, dvs x_1 är ett minimum och inte ett maximum. Sätter vi istället in roten x_2, får vi att

$$\begin{aligned}
V(x_2) &= V\left(3\frac{1}{3}\right) \\
&= 4\cdot\left(3\frac{1}{3}\right)^3 - 80\cdot\left(3\frac{1}{3}\right)^2 + 400\cdot\left(3\frac{1}{3}\right) \\
&= 4\cdot\frac{1000}{27} - 80\cdot\frac{100}{9} + 400\cdot\frac{10}{3} \\
&= \frac{4000}{27} - \frac{8000}{9} + \frac{4000}{3} \\
&= \frac{4000}{27} - \frac{24000}{27} + \frac{36000}{27} \\
&= \frac{16000}{27} \\
&\approx 592.59 \text{ cm}^3,
\end{aligned}$$

eller nästan 6 dl. Är nu detta ett maximum? Ett maximum karaktäriseras av att andraderivatan är negativ. Deriverar vi derivatan $V'(x)$ (ekvation 2) får vi andraderivatan

$$\begin{aligned} V''(x) &= \frac{d}{dx}V'(x) \\ &= \frac{d}{dx}(12x^2 - 160x + 400) \\ &= 24x - 160. \end{aligned}$$

Eftersom $V''(3\frac{1}{3}) = 24\left(3\frac{1}{3}\right) - 160 = 80 - 160 = -80 < 0$, så är x_2 verkligen ett maximum. Största volym får vi alltså om vi klipper bort kvadrater med kantlängden $3\frac{1}{3} \approx 3,33$ cm.

3.1 Generalisering

Lösningen på det andra problemet går att generalisera. Låt s vara arkets sidlängd och sätt in s istället för 20, den fixa sidlängd som problemet egentligen handlade om, i alla ekvationer ovan. Då blir $V(x) = 4x^3 - 4sx^2 + s^2x$, $V'(x) = 12x^2 - 8sx + s^2$ och $V''(x) = 24x - 8s$. Med $a = 12$, $b = -4sx$ och $c = s^2$ blir rötterna till ekvationen $V'(x) = 0$,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{s}{2} \text{ och} \\ x_2 = \dfrac{s}{6}. \end{cases}$$

Av dessa är x_1, liksom tidigare, ett minimum (ty $V(\frac{s}{2}) = 0$) medan x_2 är ett maximum eftersom $V''(\frac{s}{6}) = 24(\frac{s}{6}) - 8s = -4s < 0$ då $s > 0$. Volymen maximeras alltså då vi klipper bort kvadrater med kantlängen $s/6$ (vilken ger volymen $2s^3/27$ enligt ekvation 1).

4 Diskussion

Vi har löst två volymrelaterade problem för en låda skapad genom att vika upp kanterna. Båda lösningarna är generella, som ekvation 1 och avsnitt 3.1 visar.

Det finns flera besläktade problem som vi inte tittat närmare på men som kan vara av intresse. Ett är det vi får om vi vänder på det första problemet: Givet en önskad volym på lådan, hur mycket ska klippas bort? Detta är förmodligen betydligt svårare att lösa än de problem vi studerar i denna rapport eftersom det bland annat involverar att lösa en tredjegradsekvation. Ett annat kommer sig av att i problemen här är såväl de bortkippta hörnen som pappersarket kvadrater. Hur löser man volymproblemen om pappersarket istället är rektangulärt med olika långa sidor?

Referenser

[1] *Free Mathematics Tutorials, Problems and Worksheets.* Webbsida läst 2020-09-10. URL: `www.analyzemath.com/calculus/Problems/maximum_volume_problem.html`