1 Dugga 4 - Fråga 3

a) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 8$. Är funktionen injektiv? Surjektiv? Bijektiv?

b) Hur många funktioner finns det från A till B om $|A| = 2$ och $|B| = 8$?

c) Hur många surjektiva funktioner finns det från A till B om $|A| = |B| = 6$?

Svar

a) En funktion är injektiv om olika värden på x i definitionsmängden alltid ger olika funktionsvärden $f(x)$. Så jag kan använda:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Så, för $f(x) = 4x - 8$ antar vi att:

$$4x_1 - 8 = 4x_2 - 8 \implies 4x_1 = 4x_2 \implies x_1 = x_2$$

därav är funktionen injektiv. En funktion är surjektiv om varje element i målmängden $\mathbb{R}$ har minst ett motsvarande element i definitionsmängden $\mathbb{R}$, alltså för varje $y \in \mathbb{R}$ finns det minst ett $x \in \mathbb{R}$ sådant att:

$$f(x) = y$$

och med det antagandet får vi:

$$f(x) = 4x - 8 \implies y = 4x - 8 \implies y + 8 = 4x \implies x = \frac{y+8}{4}$$

därav är funktionen surjektiv vilket också betyder att funktionen är bijektiv, eftersom en funktion är bijektiv om funktionen är både injektiv och surjektiv.

b) Varje element i A måste peka på ett element i B, så om $|A| = 2$ och $|B| = 8$ och eftersom valet är oberoende så är antalet funktioner

$$8^2 = 64$$

c) Antalet surjektiva funktioner ges av formeln

$$S(m,n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} (n-k)^m$$

och i vårat fall är $m = n = 6$ vilket ger

$$S(6,6) = 6! \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{6}{k} (6-k)^6$$

och uträkningar för varje k blir

$$ss$$