Jämförelse av algoritmer

Zacharias Brohn*

Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå, Sverige

11 oktober 2024

Sammanfattning

Denna rapport kommer att förklara och jämföra olika algoritmer för att undersöka hur de skiljer sig i både utförning och prestanda. Algoritmerna i fråga används för att den största summan av en sekvens av nummer i en array. Den första algoritmen är en kubisk algoritm som har en komplexitet av $O\left(N^3\right)$, och sedan har vi två kvadratiska algoritmer som har en komplexitet av $O\left(N^2\right)$.

1 Introduktion

Big-Oh, även kallat komplexitet, är namnet på ett uttryck som används för att beskriva hur många steg en algoritm tar för att nå ett svar i det **värsta fallet**. Låt oss illustrera detta med hjälp av ett välkänt exempel som också gör det lättare att förstå problemet vi ska undersöka i rapporten:

Telefonboken

Om vi beskriver N som antalet namn i boken och vi börjar leta överst på listan och går sedan stegvis nedför listan tills vi hittar namnet vi vill ha betyder att i det **värsta fallet** är namnet vi söker längst ner på listan, så antalet steg som behövs för att hitta namnet blir då N, lika många namn som finns i listan, alltså våran 'algoritm' som hittar namnet vi söker kan beskrivas med $O\left(N\right)$.

*email: zacbro-8@student.ltu.se

2 Problembeskrivning: Maximal delfältssumma

Målet med algoritmerna vi ska diskutera är att leta i en array för att hitta en underarray (subarray) som har störst summa. Givet en sekvens av reella tal som representeras av en array X där $X = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$, där N är antalet element i arrayen, är målet att hitta den maximala summan av ett sammanhängande delfält. Detta innebär att vi vill identifiera en del av arrayen, $X[L..U]$, där $1 \leq L \leq U \leq N$, för vilken summan

$$S = \sum_{i=L}^{U} x_i$$

är maximal. Lösningen till problemet är enkelt när alla tal x_i är positiva, eftersom då är den maximala delfältssumman helt enkelt summan av hela sekvensen:

$$\max S = \sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Men utmaningen uppstår när det finns negativa tal i sekvensen. I dessa fall måste vi överväga om vi ska inkludera ett negativt tal x_k, med hopp om att positiva tal bakom och framför, x_{k-1} och x_{k+1} summerar den största underarrayen. Skulle alla tal i sekvensen X vara negativa, så är den största summan av en underarrayen noll:

$$\max S = 0 \quad \text{(för alla } x_i < 0\text{)}.$$

Det enklaste sättet att lösa problemet är att iterera över alla möjliga delfält. För varje par av heltal L och U beräknar vi summan av delfältet $X[L..U]$ och jämför med den största summan vi hittills har funnit.

Den kubiska algoritmen

Den kubiska algoritmen fungerar på det sätt som beskrevs ovan, alltså det enklaste sättet att lösa problemet och kan skrivas som sådan:

```
MaxSoFar := 0.0
for L := 1 to N do
    for U := L to N do
        Sum := 0.0
        for I := L to U do
            Sum := Sum + X[I]
        MaxSoFar := max(MaxSoFar, Sum)
```

Om vi nu illustrerar hur algoritmen fungerar med hjälp av ett exempel taget ur *Programming pearls: algorithm design techniques*, sid. 865:

		3				7			
31	-41	59	23	-53	58	97	-93	-23	84

Så returnerar den kubiska algoritmen svaret $X[3..7]$ och summan av den underarrayen är 187. Så vad är det för fel på den? Jo, problemet är att den är långsam. Algoritmens yttre loop ($for\ L\ :=\ 1\ to\ N\ do$) körs N gånger då L är startindex på underarrayen och den måste söka **varje** möjlig underarray, och den mellersta loopen ($for\ U\ :=\ L\ to\ N\ do$) där U är slutindex på underarrayen och kan däför inte vara mindre än L, som körs högst N gånger för varje körning av den yttre loopen. Till sist har vi ytterligare en loop, ($for\ I\ :=\ L\ to\ U\ do$) där I är index inom underarrayen och det är här som vi räknar summan av elementen i underarrayen, inom mellersta loopen som också körs högst N gånger. Slutligen när vi multiplicerar stegen från vardera loop får vi en komplexitet på $O(N^3)$, därav namnet kubisk algoritm.

3 Kvadratiska Algoritmer

Det finns två sätt att reducera komplexiteten till $O(N^2)$, liksom den kubiska algoritmen har dessa algoritmer fått namnet från sin komplexitet. Trots liknaden i komplexitet är utförningen väldigt olika.

Den Första Kvadratiska Algoritmen

Här har man kunnat ta bort en av de nästlade looparna genom att använda sig av resultat från $X[L..U-1]$ för att snabbare lösa $X[L..U]$:

```
MaxSoFar := 0.0
for L := 1 to N do
    Sum := 0.0
    for U := L to N do
        Sum := Sum + X[U]
        MaxSoFar := max(MaxSoFar, Sum)
```

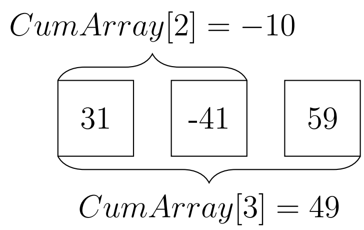
Om vi tar en noggrannare titt på hur algoritmen fungerar så ser vi att den yttre loopen räknar summan av de möjliga underarrayer $X[L..U]$ men märkväl att vi också memorerar summan för varje iteration för att tricket med den här algoritmen är att i den inre loopen tar vi helt enkelt uträkningen från $U-1$ och adderar $X[U]$ vid $Sum := Sum + X[U]$ istället för att räkna summan av alla tal för varje U.

Den Andra Kvadratiska Algoritmen

Denna algoritm tänker om helt och börjar istället med att skapa en ny array som man kallar Cumulative Array eller Prefix Sum. Den nya arrayen sparar summan av nummer från början av den originala arrayen i varje steg $X[I]$ fram till det sista numret $X[N]$.

```
CumArray[0] := 0.0
for I := 1 to N do
    CumArray[I] := CumArray[I-1] + X[I]
MaxSoFar := 0.0
for L := 1 to N do
    for U := L to N do
        Sum := CumArray[U] - CumArray[L-1]
        MaxSoFar := max(MaxSoFar, Sum)
```

Första steget sätter $CumArray[0] := 0.0$ som fungerar som nollposition, sedan för varje I beräknas $CumArray[I]$ genom att addera värdet $X[I]$ till förra $CumArray[I-1]$. Det låter säkert bekant och det är för att den förra algoritmen beräknade på samma sätt, men skillnaden här är att vi endast räknar på dem underarrayer där $L = 1$. En visualisering av en kort array som visar vilken summa index 2 och 3 skulle ha i $CumArray$:



Nu har vi sparat summorna i minnet och därefter kör en ny loop som är lik de första två men skiljer sig i inre loopen, här använder vi oss av summor vi har sparat i minnet och utför en enkel subtraktion av två olika summor från underarrayer vilket ger oss nya underarrayer där vi 'flyttar' på L, och sedanefter jämför den summan med den senaste största summan.

4 Diskussion och slutsatser

Vi har presenterat tre olika algoritmer som räknar den underarray med högst summa. Den kubiska algoritmen är enkel att förstå men ineffektiv för stora datamängder på grund av dess $O\left(N^3\right)$ komplexitet. De två kvadratiska algoritmerna förbättrar prestandan markant men på olika sätt och beroende på hur algoritmerna ska användas så finner man fördelar och nackdelar med båda vilket hjälper till att besluta vilken man vill använda. T.ex. kan andra algoritmen som använder sig av $CumArray$ vara bra om man inte endast vill veta den högsta summan i en underarray utan flera olika. Eftersom den sparar i minnet skulle man få en konstant komplexitet $O(1)$, alltså endast 1 steg, för varje underarray man frågar efter.

Referenser

[1] Jon Bentley. *Programming pearls*. Algorithm design techniques, 27(9):865-866, 1984.