DM de Mathématiques n° 5

PROBLÈME : ÉTUDE DES DÉRIVATIONS DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les différentes parties du problèmes sont indépendantes.

Notations et définitions

• Dans tout ce problème, n est un entier naturel non nul.

• $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit$\varphi_A\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par $\varphi_A : M\mapsto AM-MA$. On admettra (c'est immédiat) que φ_A est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Un endomorphisme $d\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est une *dérivation* si et seulement si $d(MN)=d(M)N+Md(N)$ pour tout $(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

• Les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront supposés écrits en colonne (autrement dit, on assimile directement $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Il en ira de même des éléments de $\mathbb{C}^n$.

A. Étude de φ_A dans le cas $n=2$

Dans toute cette partie (et dans cette partie seulement!), on prendra $n=2$ et on notera $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On souhaite démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est. On suppose de plus que A n'est pas colinéaire à la matrice I_2.

A.1. Donner la matrice de φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On prendra soin de préciser l'ordre dans lequel on considère les éléments de cette base.

A.2. Montrer que le polynôme caractéristique χ_{φ_A} de φ_A est égal à $X^2(X^2-(d-a)^2-4bc)$.

A.3. (a) Justifier que si $(d-a)^2+4bc>0$, alors φ_A est diagonalisable. On pourra remarquer que $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ contient deux matrices très simples.

(b) Établir soigneusement la réciproque du résultat précédent, à savoir que si φ_A est diagonalisable, alors $(d-a)^2+4bc>0$.

A.4. (a) Donner le polynôme caractéristique χ_A de A.

(b) Montrer soigneusement que A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2+4bc>0$.

(c) Conclure.

B. Étude de φ_A dans le cas général

Dans cette partie, A désigne une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. c désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

B.1. On suppose dans cette question que A est diagonalisable, et on note $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A=PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale ayant $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ pour coefficients diagonaux. Enfin, pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on pose $B_{i,j}=PE_{i,j}P^{-1}$.

(a) Exprimer pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ la matrice $DE_{i,j}-E_{i,j}D$ en fonction de $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

(b) Démontrer que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A.

(c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

B.2. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable. On note $\left(P_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de φ_A, et pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on note $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

(a) Dans cette question, la matrice réelle A est considérée comme étant à coefficients complexes (en vertu du fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). De même, on étend φ_A en un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec la même définition.

(i) Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

(ii) Soit $z\in\mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors c'est aussi une valeur propre de $A^\top$. Justifier de même que $\overline{z}$ est une valeur propre de A, puis de $A^\top$.

(iii) Soit $z\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A. On considère alors $X\in\mathbb{C}^n$ (resp. $Y\in\mathbb{C}^n$) un vecteur propre de A (resp. de $A^\top$) associé à z (resp. à $\bar{z}$). En calculant $\varphi_A(XY^\top)$, démontrer que $z-\bar{z}$ est une valeur propre de φ_A.

(b) En déduire que A possède au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X\in\mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A associé à λ.

(c) Démontrer que pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, il existe un réel $\mu_{i,j}$ que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$ tel que

$$AP_{i,j}X=\mu_{i,j}P_{i,j}X.$$

(d) En déduire que A est diagonalisable. On pourra considérer l'application

$$\theta:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n\\ M & \mapsto & MX\end{array}$$

et démontrer qu'elle est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$.

C. Étude du noyau de φ_A.

Dans cette partie, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

C.1. On suppose dans cette question que φ_A est l'endomorphisme nul, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker}\varphi_A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \operatorname{Vect}(I_n)$. On pourra considérer les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C.2. On suppose dans cette question que u est nilpotent, d'indice de nilpotence égal à n. On considère un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

(a) Démontrer que $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ soit la décomposition du vecteur $v(y)$ sur $\mathscr{E}$. Montrer que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$. On vérifiera que ces deux endomorphismes coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$.

C.3. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les $p \in [\![1,n]\!]$ valeurs propres distinctes de u et pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à λ_k. On note m_k sa dimension.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v.

(b) En déduire que $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si la matrice de v dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u a une forme que l'on précisera.

(c) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi_A$

(d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles de $\dim \operatorname{Ker}\varphi_A$.

D. Étude générale des dérivations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans la suite du problème, on désigne désormais par d une dérivation de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on lui associe l'application suivante F, définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par

$$F : M \mapsto \begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

D.1. Montrer que φ_A est une dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D.2. Question de cours : rappeler, en le démontrant, le lien unissant la trace et le rang d'un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

D.3. On établit ici des propriétés de l'image par F de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Établir que F est un morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, d'une part que F est linéaire, et d'autre part que pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

$$F(MN) = F(M)F(N) \qquad ; \qquad F(I_n) = I_{2n}.$$

(b) Établir que $F(E_{i,i})$ est une matrice de projection pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

(c) Donner le rang de $F(E_{i,i})$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

D.4. On construit ici une base adaptée de $\mathbb{R}^{2n}$.

(a) Justifier l'existence de deux vecteurs $(u,v) \in \mathbb{R}^{2n}$ formant une base de $\operatorname{Im} F(E_{1,1})$.

(b) Montrer que

$$\mathscr{B} = (F(E_{1,1})u, \dots, F(E_{n,1})u, F(E_{1,1})v, \dots, F(E_{n,1})v)$$

forme une base de $\mathbb{R}^{2n}$.

(c) On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathscr{B}$. Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, la matrice $R = P^{-1}F(M)P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ s'écrit par blocs

$$R = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

D.5. On conserve les notations précédentes et on note $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec des blocs (A,B,C,D) carrés d'ordre n.

(a) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$MC = CM \qquad ; \qquad MD = DM \qquad ; \qquad d(M)C = AM - MA \qquad ; \qquad d(M)D = BM - MB.$$

(b) En déduire qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$C = \gamma I_n \qquad ; \qquad D = \delta I_n.$$

(c) Montrer enfin qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $d = \varphi_X$. *Ainsi, les seules dérivations de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont celles étudiées dans les premières parties du problème.*