中国地质大学 自动化学院
School of Automation, China University of Geosciences

上机实验

实例讲解

Matlab在系统稳定性分析中的应用

1. Poly()函数， roots()函数

功能： **Poly()**函数用来求矩阵特征多项式系数，

roots()函数用来求取特征值。

调用格式：P=poly($\boldsymbol{A}$),V=roots(P)

实例讲解

【例1】 已知线性时不变系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

试用特征值判据判断系统的稳定性。

实例讲解

解： MATLAB程序如下：

```
A=[-3 -6 -2 -1; 1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0];
P=poly(A),V=roots(P)
```

运行以上程序得：

```
P =

   1.0000    3.0000    6.0000    2.0000    1.0000
V =

  -1.3544 + 1.7825i
  -1.3544 - 1.7825i
  -0.1456 + 0.4223i
  -0.1456 - 0.4223i
```

特征值的实部都小于0，故系统稳定。

实例讲解

2. lyap()函数

功能：函数lyap()用来求解系统的李雅普诺夫方程。

调用格式：$P = lyap(A, Q)$

【例2】已知线性定常系统如图所示，

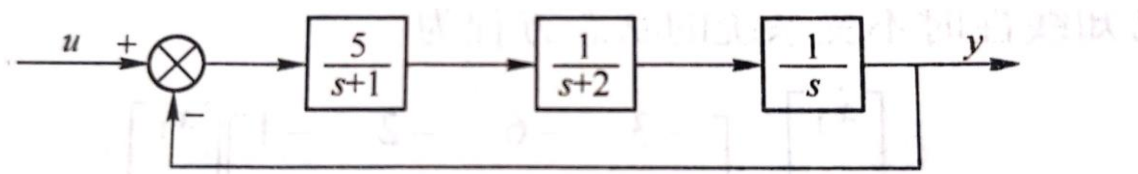

图 4. 10　系统框图

试求系统的状态方程；选择正定的实对称矩阵Q后计算李雅普诺夫方程的解，并利用李雅普诺夫函数确定系统的稳定性。

实例讲解

解： 讨论系统的稳定性时可令给定输入u=0。根据题目要求，因为需要调用函数lyap()，故首先将系统转换成状态空间模型。选定半正定矩阵Q为

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

为了确定系统的稳定性，需验证矩阵P的正定性，这可以对各主子行列式进行校验。综合以上考虑，给出调用函数lyap()的程序：

实例讲解

```
n1 = 5;d1 = [1 1];s1 = tf(n1,d1);
n2 = 1;d2 = [1 2];s2 = tf(n2,d2);
n3 = 1;d3 = [1 0];s3 = tf(n3,d3);
s123 = s1 * s2 * s3;
sb - = feedback(s123,1);
a=tf2ss(sb,num{1},sb.den{1});
q=[0 0 0;0 0 0;0 0 1];
if det(a)~=0
    P=lyap(a,q)
    det1=det(P(1,1))
    det2=det(P(2,2))
    detp=det(P)
end
```

运行结果如下:

P=

12.5000 0.0000 -7.5000

0.0000 7.5000 -0.5000

-7.5000 -0.5000 4.7000

det1=

12.5000

det2=

7.5000

detp=

15.6250

实例讲解

即系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

李雅普诺夫函数为：

$$P = \begin{bmatrix} 12.5 & 0 & -7.5 \\ 0 & 7.5 & -0.5 \\ -7.5 & -0.5 & 4.7 \end{bmatrix}$$

实例讲解

因为

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

是半正定矩阵，由式

$$\dot{V}(x)=-x^{T}Qx=-x_{3}{}^{2}$$

可知，$\dot{V}(x)$是半正定的。最后，对各主子行列式(det1,det2,detp)进行检验，说明矩阵P是正定阵，所以本系统在坐标原点的平衡状态是稳定的，而且是大范围渐近稳定的。

实例讲解

【例3】 已知线性系统动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试计算李雅普诺夫方程的解，并利用李雅普诺夫函数确定系统的稳定性并求李雅普诺夫函数。

实例讲解

解 首先选择正定实对称Q为单位矩阵，即

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

根据题意，给出调用函数lyap()的程序。
MATLAB程序如下：

```
a = [0 1; -1 -1];q=[1 0; 0 1];
if det (a) ~ = 0
    P = lyap(a,q)
    det1 = det(P(1,1))
    detp = det(P)
end
```

实例讲解

运行程序可得

```
P =
    1.5000   -0.5000
   -0.5000    1.0000
det1 =
    1.5000
detp =
    1.2500
```

即李雅普诺夫方程的解为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1.5 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}$$

程序对各主子行列式(det1,detp)进行计算，计算结果说明矩阵P确是正定阵。李雅普诺夫函数为

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.5 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2)$$

实例讲解

在状态空间内，V(x)是正定的，而

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(A^TP+PA)\boldsymbol{x} = x(-I)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -(x_1^2+x_2^2)$$

是负定的。另外，当 $\|x\| \to \infty$ 时，有$V(x) \to \infty$ ，因此系统原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

对于稳定性与李雅普诺夫方法，MATLAB并不限于上面介绍的函数及方法，有兴趣的同学可以参考有关资料获得更多更方便的方法。

上机练习题

4.1设线性系统状态方程如下，试用MATLAB判断系统平衡状态的稳定性

1） $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x$

2） $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -3 & -3\end{bmatrix}x$

上机练习题

4.2已知线性系统动态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}x$$

试计算李雅普诺夫方程的解，利用李雅普诺夫函数确定系统的稳定性并求李雅普诺夫函数