上机实验

实例讲解

Matlab在系统数学模型中的应用

线性系统的数学模型

- 传递函数模型
- 状态空间模型

传递函数模型与状态空间模型的相互转换

- 状态空间表达式向传递函数形式的转换
- 传递函数到状态空间表达式的变换

线性系统的线性变换

- 系统的非奇异变换
- 标准型状态空间表达式的实现

实例讲解

一、线性系统的数学模型

1 tf()函数

功能：建立系统的传递函数模型TF。

调用格式：sys=tf(num,den)

设单输入单输出连续系统的传递函数为

$$W(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

在Matlab中，可用传递函数分子、分母多项式按 s 的降幂系数排列的行向量，即：

$$num=[b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b_0];$$

$$den=[1, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0];$$

实例讲解

对于单输入单输出离散系统的脉冲传递函数为：

$$W(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

在Matlab中，调用tf()函数建立系统的传递函数模型TF：

$$num=[b_m,b_{m-1},\cdots,b_1,b_0];$$

$$den=[1,a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0];$$

$$sys=\mathrm{tf}\left(num,den,T\right)$$

式中， T 为系统采样周期。

实例讲解

【例1】 已知系统的传递函数为:

$$W(s)=\frac{s^2+3s+1}{s^3+2s^2+4s+6}$$

试用Matlab描述其系统模型。

实例讲解

【例1】

解： Matlab仿真代码如下：

```
num=[1 3 1];       % 分子多项式
den=[1 2 4 6];     % 分母多项式
G=tf(num,den)      %建立传递函数模型
```

运行结果如下：

Transfer function:

```
      s^2 + 3 s + 1
  ---------------------
  s^3 + 2 s^2 + 4 s + 6
```

实例讲解

2 zpk()函数

功能：建立系统的零级点形式的传递函数模型ZPK

调用格式：

$$sys = \mathrm{zpk}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}, k)$$

设系统的传递函数表示为零极点的形式：

$$W(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

则：

$$\boldsymbol{z} = [z_1, z_2, \cdots, z_m];$$

$$\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, \cdots, p_n];$$

$$k = k$$

实例讲解

【例2】 已知系统的零极点传递函数形式为：

$$W(s)=\frac{7(s-3)}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

试用Matlab描述其系统模型。

实例讲解

【例2】

解：Matlab仿真代码如下：

```
z=[3];    %W(s)零点
p=[1,-2,-4];%W(s)极点
k=7;
sys=zpk(z,p,k)
```

运行结果如下：

sys =

```
      7 (s-3)
  -----------------
(s-1) (s+2) (s+4)
```

实例讲解

3. ss()函数

功能：建立系统的状态空间模型SS

调用格式：$sys = \mathrm{ss}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ $sys = \mathrm{ss}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},T)$

对于线性定常连续系统：
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$$

在Matlab中，可调用ss()函数建立连续系统的状态空间模型，其中

$$\boldsymbol{A} = [a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}; \cdots; a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}];$$

$$\boldsymbol{B} = [b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}; b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}; \cdots; b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nr}];$$

$$\boldsymbol{C} = [c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n}; \cdots; c_{m1}, c_{m2}, \cdots, c_{mn}];$$

$$\boldsymbol{D} = [d_{11}, d_{12}, \cdots, d_{1r}; d_{21}, d_{22}, \cdots, d_{2r}; \cdots; d_{m1}, d_{m2}, \cdots, d_{mr}];$$

实例讲解

对于线性定常离散系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

在建立系数矩阵 G、H 、C 、D 后，同样可以调用ss()函数建立系统的状态空间模型：

$$sys = \mathrm{ss}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, T)$$

式中，T 为系统采样周期。

实例讲解

【例3】 已知系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

试用Matlab描述其系统模型。

实例讲解

【例3】

解：Matlab仿真代码如下：

```
A=[0 1;-2 -3];
B=[1 0;1 1];
C=[1 0;1 1;0 2];
D=[0 0;1 0;0 1];
sys=ss(A,B,C,D)
```

运行结果如下：

sys =

A =

	x1	x2
x1	0	1
x2	-2	-3

B =

	u1	u2
x1	1	0
x2	1	1

C =

	x1	x2
y1	1	0
y2	1	1
y3	0	2

D =

	u1	u2
y1	0	0
y2	1	0
y3	0	1

实例讲解

4. series()函数，parallel()函数，feedback()函数

功能：分别实现两个子系统W_1和W_2的串联、并联和反馈连接

调用格式：
$$sys = \mathrm{series}(sys\_1, sys\_2)$$
$$sys = \mathrm{parallel}(sys\_1, sys\_2)$$
$$sys = \mathrm{feedback}(sys\_1, sys\_2, sign)$$

式中，sys，sys_1 和sys_2 可以是状态空间模型，也可是是传递函数模型；$sign$ 表示反馈极性，正反馈取1，负反馈取-1或默认。

实例讲解

当sys、sys_1 和 sys_2 是状态空间模型时，调用格式为：

$$[A,B,C,D]=\text{series}(A_1,B_1,C_1,D_1,A_2,B_2,C_2,D_2)$$

$$[A,B,C,D]=\text{parallel}(A_1,B_1,C_1,D_1,A_2,B_2,C_2,D_2)$$

$$[A,B,C,D]=\text{feedback}(A_1,B_1,C_1,D_1,A_2,B_2,C_2,D_2)$$

当sys、sys_1 和 sys_2 是状态空间模型时，调用格式为：

$$[num,den]=\text{series}(num\_1,den\_1,num\_2,den\_2)$$

$$[num,den]=\text{parallel}(num\_1,den\_1,num\_2,den\_2)$$

$$[num,den]=\text{feedback}(num\_1,den\_1,num\_2,den\_2)$$

实例讲解

【例4】 已知两个系统的传递函数分别为：

$$W_1(s)=\frac{3s+1}{s^2+3s+2},W_2(s)=\frac{s+4}{s+2}$$

试用Matlab求出它们并联组合系统的传递函数。

实例讲解

【例4】

解： Matlab仿真代码如下：

```
num_1=[3 1];
den_1=[1 3 2];
num_2=[1 4];
den_2=[1 2];
[num,den]=parallel(num_1,den_1,num_2,den_2)
```

运行结果如下：

num =
 1 10 21 10
den =
1 5 8 4

实例讲解

【例5】 已知两个系统$\Sigma_1(A_1,B_1,C_1,D_1)$ 和$\Sigma_2(A_2,B_2,C_2,D_2)$状态空间模型分别为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 \end{cases}$$

试用Matlab求出$\Sigma_1(A_1,B_1,C_1,D_1)$ 为前向通道和$\Sigma_2(A_2,B_2,C_2,D_2)$ 为负反馈通道的组合系统的状态空间模型。

实例讲解

【例5】

解： Matlab仿真代码如下：

```
A_1=[0 1 0;0 0 1;-4 -8 -5];
B_1=[0;0;1];
C_1=[1 0 0];
D_1=0;
A_2=[0 1;-2 -3];
B_2=[0;1];
C_2=[1 0];
D_2=0;
sign=-1;
[A,B,C,D]=feedback(A_1,B_1,C_1,D_1,A_2,B_2,C_2,D_2,sign)
```

运行结果如下：

A =

0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
-4	-8	-5	-1	0
0	0	0	0	1
1	0	0	-2	-3

B =

0
0
1
0
0

C =

1 0 0 0 0

D =

0

实例讲解

二、传递函数模型与状态空间模型的相互转换

1 tf2ss()函数，zp2ss()函数

功能：分别将多项式形式、零极点形式的传递函数转换为状态空间的形式

调用格式：$\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\right]=\mathrm{tf\,2ss}(num,den),\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\right]=\mathrm{zp\,2ss}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{p},k)$

注意：ss()函数不仅可用于建立系统的状态空间模型SS，而且可以将任意LTI系数模型sys(传递函数模型TF、零极点模型ZPK)转换为状态空间模型，其调用格式为：$SYS=ss(sys)$

实例讲解

【例6】 已知系统的传递函数为:

$$W(s)=\frac{s^2+3s+1}{s^3+2s^2+4s+6}$$

试用Matlab求其状态空间表达式。

实例讲解

【例6】解： Matlab仿真代码如下：

```
num=[1 3 1];
den=[1 2 4 6];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

运行结果如下：

A =

-2	-4	-6
1	0	0
0	1	0

B =

1
0
0

C =

1	3	1

D =

0

实例讲解

2. ss2tf() 函数，ss2zp()函数

功能：实现从状态空间表达式到传递函数阵的转换

调用格式：对于单输入单输出系统，调用格式如下：

$$[num, den] = \mathrm{ss2tf}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}), [\boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}, k] = \mathrm{ss2zp}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$$

对于多输入多输出系统，调用格式如下：

$$[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}, k] = ss2zp(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, iu)$$

实例讲解

【例7】 已知系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

试用Matlab求系统的传递函数阵。

实例讲解

【例7】解：Matlab仿真代码如下：

```
A=[0,1;-2,-3];
B=[1,0;1,1];
C=[1,0;1,1;0,2];
D=[0,0;1,0;0,1];
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,D,1)
[num2,den2]=ss2tf(A,B,C,D,2)
```

运行结果如下：

num1 =

0	1.0000	4.0000
1.0000	5.0000	4.0000
0	2.0000	-4.0000

den1 =

1 3 2

num2 =

0	0	1.0000
0	1.0000	1.0000
1.0000	5.0000	2.0000

den2 =

1 3 2

可得系统传递函数为：

$$W(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ s^2+5s+4 & s+1 \\ 2s-4 & s^2+5s+2 \end{bmatrix}$$

实例讲解

三、 线性系统的线性变换

1. eig()函数

功能：直接计算矩阵特征值和特征向量

调用格式： $\lambda = eig(\boldsymbol{A})$， $[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Lambda}] = eig(\boldsymbol{A})$

其中，λ为矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值排列而成的向量；P 是由矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征向量组成的矩阵；Λ是由矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值为对角元素组成的对角线矩阵。

实例讲解

【例8】试用 Matlab求出下面矩阵A的特征值和特征向量。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

实例讲解

【例8】解：(1) 单独求取特征值，Matlab仿真代码如下：

```
A=[2 -1 -1; 0 -1 0; 0 2 1];
Larmda = eig(A)
```

运行结果如下

Larmda =

2

1

-1

实例讲解

（2）同时求取特征值和特征向量，Matlab仿真代码如下：

```
A = [2 -1 -1; 0 -1 0; 0 2 1];
[V, Jianj] = eig(A)
```

运行结果如下

V =

1.0000	0.7071	0
0	0	0.7071
0	0.7071	-0.7071

实例讲解

Jianj =

2	0	0
0	1	0
0	0	-1

同样可得矩阵的3个特征值分别为2, 1和-1，它们对应的3个特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

实例讲解

2. jordan()函数

功能：当矩阵$\boldsymbol{A}$具有重特征根时，函数eig()不具有直接计算广义特征向量的功能，可以借助符号计算工具箱的jordan()函数计算所有特征向量。

调用格式：$[\boldsymbol{P},\boldsymbol{J}]=\mathrm{jordan}(\boldsymbol{A})$

其中，P是由矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征向量（包括广义特征向量）组成的矩阵；J 是与矩阵$\boldsymbol{A}$对应的约当阵。

如果仅求取矩阵A对应的约当阵$\boldsymbol{J}$，函数的调用格式可为

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{jordan}(\boldsymbol{A})$$

实例讲解

【例9】试用 Matlab求出下面矩阵A的特征值和特征向量。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

实例讲解

【例9】解： 同时求取特征值和特征向量，Matlab仿真代码如下：

```
A = [0 1 0;0 0 1;8 -12 6];
[P,J] = jordan(A)
```

运行结果如下

P =

4	-2	1
8	0	0
16	8	0

J =

2	1	0
0	2	1
0	0	2

可得A的三个特征值都是2，对应的3个特征向量（包括两个广义特征向量）分别为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}4\\8\\16\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

实例讲解

3. ss2ss()函数

功能：实现系统的线性非奇异变换

调用格式：

$$\boldsymbol{GP}=\mathrm{ss}\,2\,\mathrm{ss}\left(\boldsymbol{G},\boldsymbol{P}\right),\left[\boldsymbol{At},\boldsymbol{Bt},\boldsymbol{Ct},\boldsymbol{Dt},\boldsymbol{P}\right]=\mathrm{ss}\,2\,\mathrm{ss}\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{P}\right)$$

其中，对于前者，G 、GP 分别为变换前和变换后的系统状态空间模型， P为线性非奇异变换矩阵。

对于后者，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$、$[\boldsymbol{At},\boldsymbol{Bt},\boldsymbol{Ct},\boldsymbol{Dt}]$分别为变换前和变换后系统的状态空间模型的系数矩阵，P为线性非奇异变换矩阵。

实例讲解

注意：但是，Matlab中没有可将一般状态空间表达式变换为约当标准型(对角标准型)的函数，只能先调用jordan()函数求出化为约当标准型的变换矩阵，然后再利用ss2ss()函数将状态空间表达式变换为约当标准型(对角标准型)。

实例讲解

【例10】已知状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

试用Matlab将其变换为约当标准型（对角标准型）

实例讲解

【例10】解：Matlab仿真代码如下：

```
A = [0 1 0;0 0 1;8 -12 6];
B=[5;1;5];
C=[1,0,1];
D=0;
[P,J]=jordan(A)
[Ap,Bp,Cp,Dp]=ss2ss(A,B,C,D,inv(P))
```

运行结果如下

```
P =                J =              Ap =              Bp =        Cp =
                                                                  20    6    1
4    -2    1       2    1    0      2    1    0       0.1250
8     0    0       0    2    1      0    2    1       0.3750     Dp =
16    8    0       0    0    2      0    0    2       5.2500     0
```

实例讲解

线性变换后得到的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0.1250 \\ 0.3750 \\ 5.2500 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 20 & 6 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

上机练习题

1.1系统的微分方程为

$$y^{(3)}(t)+3y^{(2)}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=\dot{u}(t)+2u(t)$$

试用MATLAB求其状态空间表达式

1.2系统的传递函数为

$$W(s)=\frac{s^2+3s+1}{s^2+2s+1}$$

试用MATLAB求其状态空间表达式

1.3系统的传递函数为

$$W(s)=\frac{s+1}{s^3+7s^2+14s+5}$$

试用MATLAB求其约当标准型状态空间表达式

上机练习题

1.4系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ -50 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

试用MATLAB求系统的传递函数

上机练习题

1.5子系统$\Sigma_1(A_1,B_1,C_1)$：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

子系统$\Sigma_2(A_2,B_2,C_2)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

试用MATLAB求这两个系统分别的传递函数，以及串联，并联和负反馈连接的组合系统的状态空间表达式和传递函数