上机实验

实例讲解

一、利用MATLAB实现系统的综合

MATLAB控制系统工具箱为极点配置、状态观测器、系统解耦等系统综合提供了专用函数。

1 acker() 函数

功能：单输入系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$的极点配置

调用格式：$\boldsymbol{K}=\mathrm{acker}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{P})$

其中，P为配置极点， K为反馈增益矩阵。

2 place()函数

功能：单输入或多输入系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{c})$的极点配置

调用格式：$\boldsymbol{K}=place(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{P})$

其中，P为配置极点， K为反馈增益矩阵。

实例讲解

二、利用MATLAB进行闭环系统极点配置

当系统完全能控时，通过状态反馈可实现闭环系统极点的任意配置。关键是求解状态反馈矩阵K，当系统的阶数大于3，或为多输入多输出系统时，具体设计要困难的多。采用MATLAB控制系统工具箱的专用函数，具体设计问题就简单多了。

【例5-1】已知系统的状态方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

试用状态反馈将闭环系统的极点配置为-1,-2,-3，求状态反馈矩阵K。

实例讲解

解：(1) MATLAB仿真程序

```
A=[-2,-1,1;1,0,1;-1,0,1];
b=[1;1;1];
Qc=ctrb(A,b);
rc=rank(Qc);
f=conv([1,1],conv([1,2],[1,3]));
K=[zeros(1,length(A)-1) 1]*inv(Qc)*polyvalm(f,A)
```

运行结果如下：

K =   -1   2   4

实例讲解

(2) 用函数进行极点配置的程序为：

```
A=[-2,-1,1;1,0,1;-1,0,1];
b=[1;1;1];
Qc=ctrb(A,b);
rc=rank(Qc);
P=[-1,-2,-3];
K=acker(A,b,P)
```

运行结果如下：

K = -1 2 4

实例讲解

(3) 用函数 进行极点配置的仿真程序

```
A=[-2,-1,1;1,0,1;-1,0,1];
b=[1;1;1];
Qc=ctrb(A,b);
rc=rank(Qc);
P=[-1,-2,-3];
K=place(A,b,P)
```

运行结果如下：

K = -1.0000   2.0000   4.0000

实例讲解

三、利用MATLAB设计全维状态观测器

极点配置要求系统的状态向量必须全部可测量，当状态向量全部或部分不可直接测量时，则应设计状态观测器进行状态重构。对于被控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，其状态空间表达式为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

若系统完全能观测，则可构造状态观测器。在MATLAB控制系统工具箱中，利用对偶原理，可使设计问题大为简化。首先构造被控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的对偶系统为：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{z} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{z}$$

实例讲解

然后，对偶系统按极点配置求状态反馈矩阵$\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{acker}(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{C}^T, \boldsymbol{P})$$

或

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{place}(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{C}^T, \boldsymbol{P})$$

原系统的状态观测器的反馈矩阵$\boldsymbol{G}$ 就是其对偶系统的状态反馈矩阵$\boldsymbol{K}$ 的转置，即

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{K}^T$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 为状态观测器的给定期望极点；$\boldsymbol{G}$ 为状态观测器的反馈矩阵。

实例讲解

【例5-2】设系统的状态空间表达式为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试设计全维状态观测器，使状态观测器的闭环极点为$-3, -4, -5$。

实例讲解

解：MATLAB仿真程序：

```
A=[0 0 2;1 0 9;0 1 0];
B=[3;2;1];
C=[0 0 1];
n=3
Qo=obsv(A,C);
ro=rank(Qo);
if (ro==n)
    disp('系统是可观测的')
    P=[-3 -4 -5];      %状态观测器的设计
A1=A';
    B1=C';
    K=acker(A1,B1,P);
        G=K'
    AGC=A-G*C
 elseif (ro~=n)
    disp('系统是不可观测的，不能进行观测器的设计')
 end
```

实例讲解

运行结果如下：

n=

3

系统是可观测的

G =

62

56

12

AGC =

0	0	-60
1	0	-47
0	1	-12

实例讲解

被控系统的全维状态观测器为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -47 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 62 \\ 56 \\ 12 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

实例讲解

四、利用MATLAB设计降维状态观测器

已知线性时不变系统为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

若系统完全能观测，则可将状态向量$\boldsymbol{x}$分为可量测和不可量测两部分，通过特定线性非奇异变换可导出相应的系统方程为分块矩阵形式：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \bar{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{x}}_2\end{cases}$$

实例讲解

其中，m维状态$\bar{\boldsymbol{x}}_2$能够直接由输出量$\bar{\boldsymbol{y}}$获得，不必再通过观测器进行重构；$(n-m)$维状态变量$\bar{\boldsymbol{x}}_1$由观测器进行重构。可得关于$\bar{\boldsymbol{x}}_1$的状态方程

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\bar{\boldsymbol{x}}_2 + \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{M} \\ \dot{\bar{\boldsymbol{y}}} - \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{A}}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_2 \end{cases}$$

它与全维状态观测方程进行对比，可得到两者之间的对应关系，如表所示。

全维观测器与降维观测器对比

全维观测器	降维观测器	全维观测器	降维观测器
$\boldsymbol{x}$	$\bar{\boldsymbol{x}}_1$	$\boldsymbol{y}$	$\dot{\bar{\boldsymbol{y}}} - \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{A}$	$\bar{\boldsymbol{A}}_{11}$	$\boldsymbol{C}$	$\bar{\boldsymbol{A}}_{21}$
$\boldsymbol{Bu}$	$\bar{\boldsymbol{A}}_{12}\boldsymbol{y} + \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{G}_{n\times 1}$	$\boldsymbol{G}_{(n-m)\times 1}$

实例讲解

降维观测器的方程为

$$\dot{\hat{\bar{w}}} = (\bar{A}_{11} - \bar{G}\,\bar{A}_{21})\hat{\bar{x}}_1 + (\bar{A}_{12} - \bar{G}\,\bar{A}_{22})\bar{y} + (\bar{B}_1 - \bar{G}\,\bar{B}_2)u$$

$$\hat{\bar{x}}_1 = \hat{\bar{w}} + \bar{G}\bar{y}$$

或

$$\dot{\hat{\bar{w}}} = (\bar{A}_{11} - \bar{G}\,\bar{A}_{21})\hat{\bar{w}} + [(\bar{A}_{11} - \bar{G}\,\bar{A}_{21})\bar{G} + (\bar{A}_{12} - \bar{G}\,\bar{A}_{22})]\bar{y} + (\bar{B}_1 - \bar{G}\,\bar{B}_2)u$$

$$\hat{\bar{x}}_1 = \hat{\bar{w}} + \bar{G}\bar{y}$$

然后，使用MATLAB的函数place() 或acker()，根据全维状态观测的设计方法求解反馈阵$\bar{G}$。

实例讲解

【例5-3】设系统的状态空间表达式为：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试设计一个降维状态观测器，使得观测器的期望极点为$-2, -3$。

解：由于x_1可量测，因此只需设计x_2和x_3的状态观测器，故根据原系统可得不可量测部分的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\bar{\boldsymbol{x}}_2 + \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{M} \\ \bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{A}}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_2 \end{cases}$$

实例讲解

其中$\bar{\boldsymbol{A}}_{11}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -11 & -6\end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{A}}_{12}=\begin{bmatrix}0\\ -6\end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{A}}_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{A}}_{22}=0$，$\bar{\boldsymbol{B}}_{1}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，

$\bar{\boldsymbol{B}}_{2}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$。

等效方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{z}\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{A}_c=\bar{\boldsymbol{A}}_{11}$，$\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\eta}=\bar{\boldsymbol{A}}_{12}\bar{\boldsymbol{y}}+\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{C}_c=\bar{\boldsymbol{A}}_{21}$。

实例讲解

MATLAB仿真程序

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
B=[0;0;1];
C=[1 0 0];
T_inv=[0 1 0; 0 0 1;1 0 0];
T=inv(T_inv);
A_bar=T_inv*A*T;
B_bar= T_inv *B;
C_bar=C*T;
A11_bar =[A_bar(1:2,1:2)];
A12_bar =[A_bar(1:2,3)];
A21_bar =[A_bar(3,1:2)];
A22_bar =[A_bar(3,3)];
B1_bar =B(1:2,1);
B2_bar =B(3,1);
A1= A11_bar;
C1=A21_bar;
AX=( A11_bar)';
BX=(C1)';
P=[-2 -3];
K=acker(AX, BX, P);
G=K'
AGAZ=( A11_bar -G* A21_bar)
AGAY=( A11_bar -G* A21_bar)*G+A12_bar-G*A22_bar
BGBU=B1_bar-G*B2_bar
```

运行结果为:

```
G=
    -1
    1
AGAZ =
    1     1
    -12   -6
AGAY =
    0
    0
BGBU =
    0
    1
```

实例讲解

即降维状态观测器为:

$$\dot{\hat{\bar{\boldsymbol{w}}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -12 & -6 \end{bmatrix} \hat{\bar{\boldsymbol{w}}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{y}$$

$$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_1 = \hat{\boldsymbol{w}} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

实例讲解

五、带状态观测器的系统极点配置

状态观测器解决了受控系统的状态重构问题，为那些状态变量不能直接量测的系统实现状态反馈创造了条件。带状态观测器的状态反馈系统由三部分组成，即被控系统、观测器和状态反馈。

设能控能观测的被控系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

状态反馈控制律为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}$$

实例讲解

状态观测器方程为

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy$$

可得闭环系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = GCx + (A - GC - BK)\hat{x} + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

根据分离原理，系统的状态反馈阵 K 和观测器反馈阵 G 可分别设计。

实例讲解

【例5-4】已知开环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

设计状态反馈使闭环极点为$-1.8 \pm j2.4$，设计状态观测器使其闭环极点为$-8,-8$ 。

解：状态反馈和状态观测器的设计分开进行，状态观测器的设计借助于对偶原理。在设计之前，应先判别系统的能控性和能观测性。MATLAB仿真程序

实例讲解

```
A = [0 1;20.6 0];b=[0;1];C=[1 0];
% Check Controllability and Observability
disp('The rank of Controllability Matrix')
rc = rank(ctrb(A,b))
disp('The rank of Observability Matrix')
ro = rank(obsv(A,C))
% Design Regulator
P = [-1.8+2.4*j -1.8-2.4*j];
K = acker(A,b,P)
% Design State Observer
A1 = A';b1 = C';C1 = b';
P1 = [-8 -8];
K1 = acker(A1,b1,P1);
G = K1'
```

运行结果如下：

```
The rank of Controllability Matrix
rc =
     2
ro =
     2
K =
     29.6000    3.6000
G =
     16.0000
     84.6000
```

对于线性时不变系统的综合，MATLAB并不限于上面介绍的函数及方法，有兴趣的读者可以参考有关资料获得更多更方便的方法。

上机练习题

5.1用MATLAB求解以下习题

1）已知系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

由状态反馈实现闭环极点配置，使得闭环极点为 $\lambda_{1,2} = -3 \pm j2$，试确定状态反馈矩阵K，并画出系统模拟结构图。

上机练习题

2）已知系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

试求：

(1) 能否用状态反馈任意配置闭环极点

(2) 确定状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得闭环系统极点为 $-5, -1 \pm j$

上机练习题

3）已知系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

试求：

（1）系统是否稳定

（2）系统能否镇定。若能，试设计状态反馈使之稳定。

上机练习题

4）已知系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

试求：(1) 全维观测器，观测器极点为 $-5, -5, -5$

(2) 降维观测器，观测器极点为 $-5, -5$

(3) 系统模拟结构图

上机练习题

5.2已知系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

试用MATLAB求解状态反馈阵，使系统闭环极点为-2，-2，-2和-1

上机练习题

5.3试用MATLAB判断以下系统状态反馈能否镇定

$$1)\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$2)\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}4\\5\\0\\7\\0\end{bmatrix}u$$

上机练习题

5.4已知如下系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

试用MATLAB求：

1）系统的极点，判断系统是否稳定；

2）判断系统的能控性和能观性，若不能，请按照能控性和能观性进行结构分解。

3）判断系统是否通过状态反馈镇定。

4）设计状态反馈阵，使得闭环系统极点为-5，-1和-2±2j

5）设计状态观测器，使得观测器极点为-3，-4和-1±j