三角関数の公式の導出

二重枠からの流れを身に付けよう！

三角比の定義

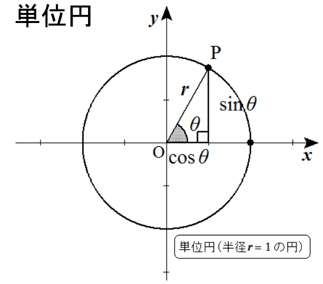
正弦　$\sin\theta = \dfrac{縦}{斜辺}$

余弦　$\cos\theta = \dfrac{横}{斜辺}$

正接　$\tan\theta = \dfrac{縦}{横}$

↓ 斜辺 → 1

単位円



→ 三平方の定理

三角比の基本公式

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

→ 下式 $\times \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ＆ 上式 →

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

→

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1$$

↑ 置換 $2\theta \to x$　$\left(\theta \to \dfrac{x}{2}\right)$

↑ $\theta \to x$

有理関数置換

$t = \tan x$ とおくと

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

←

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと

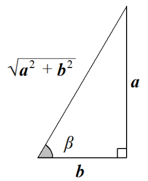
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

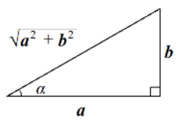
三角関数の合成（加法定理の逆）

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

↑

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$





余弦での合成は、
$\alpha + \beta = 90°$より
余角でも導出可

加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

（複合同順）

→ $\begin{cases}\alpha = \theta \\ \beta = \theta\end{cases}$ →

倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

↓

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$について整理する

→ $\begin{cases}\alpha = \theta \\ \beta = 2\theta\end{cases}$ →

3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

半角公式

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

← 置換 $2\theta \to \theta$　$\left(\theta \to \dfrac{\theta}{2}\right)$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

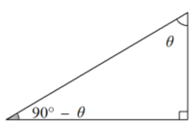
数学ⅠⅡでは、
θの形にまとめたい

数学Ⅲの積分では、
次数を下げたい

（加法定理・）半角公式は
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$より導出

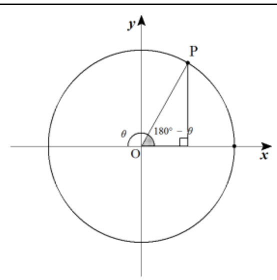
余角

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$



補角

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$



※$\theta + 90°$，$\theta + 180°$，$-\theta$
なども同様に導出できる

↓ ※筆算でかくとよい　$\sin(\alpha+\beta) \pm \sin(\alpha-\beta)$　$\cos(\alpha+\beta) \pm \cos(\alpha-\beta)$

積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

↓ $A = \alpha+\beta$，$B = \alpha-\beta$　とおく
$\Rightarrow\ \alpha = \dfrac{A+B}{2}$，$\beta = \dfrac{A-B}{2}$

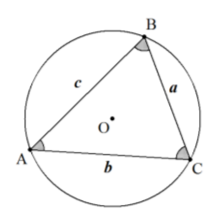
和積公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

（Rは外接円の半径）



余弦定理

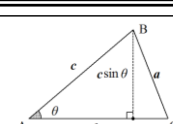
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

※以下の形も使えるように！

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

三角形の面積　$\left(S = \frac{1}{2} \times 底辺 \times 高さ\right)$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$



式ではなく、位置関係＝図で
覚える（2辺と間の角）

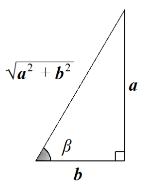
三角関数の公式の導出

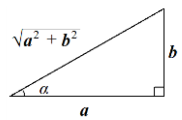
二重枠からの流れを身に付けよう！

三角関数の合成（加法定理の逆）

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$





余弦での合成は、
$\alpha+\beta=90°$より
余角でも導出可

三角比の定義

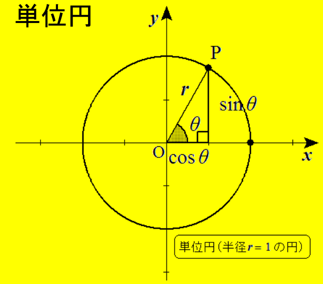
正弦　$\sin\theta = \dfrac{縦}{斜辺}$

余弦　$\cos\theta = \dfrac{横}{斜辺}$

正接　$\tan\theta = \dfrac{縦}{横}$

斜辺 → 1

単位円



三平方の定理

有理関数置換

$t=\tan x$　とおくと

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$
$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$$

$\theta \to x$

$t=\tan\frac{x}{2}$　とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

三角比の基本公式

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

下式 × $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ & 上式

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

置換 $2\theta \to x$　$\left(\theta \to \dfrac{x}{2}\right)$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= \frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1$$

加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

（複合同順）

$\begin{cases}\alpha=\theta\\ \beta=\theta\end{cases}$

倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

凡例

必　須
微積必須
独力導出

※筆算でかくとよい

$\sin(\alpha+\beta)\pm\sin(\alpha-\beta)$
$\cos(\alpha+\beta)\pm\cos(\alpha-\beta)$

$\begin{cases}\alpha=\theta\\ \beta=2\theta\end{cases}$

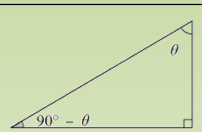
3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$について整理する

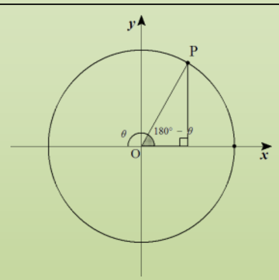
余角

$$\sin(90°-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$



補角

$$\sin(180°-\theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta) = -\tan\theta$$



※$\theta+90°$，$\theta+180°$，$-\theta$
なども同様に導出できる

積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$　とおく
$\Rightarrow$　$\alpha=\frac{A+B}{2}$，$\beta=\frac{A-B}{2}$

和積公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

（加法定理・）半角公式は
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$より導出

半角公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

置換 $2\theta \to \theta$　$\left(\theta \to \dfrac{\theta}{2}\right)$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

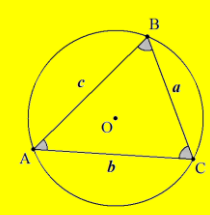
数学ⅠⅡでは、
θの形にまとめたい

数学Ⅲの積分では、
次数を下げたい

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

（Rは外接円の半径）



余弦定理

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$$

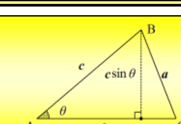
※以下の形も使えるように！

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

三角形の面積

$\left(S=\frac{1}{2}\times底辺\times高さ\right)$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$



式ではなく、位置関係＝図で
覚える（2辺と間の角）