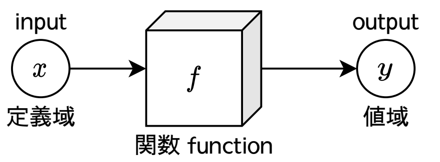
I

関数の基本
～ 1次・2次関数の攻略 ～

ver.2020.09.24β

▷ 関数の定義 $f(x)$

あるxに対するyの値がただ1つに定まる関係のこと（1対1対応）

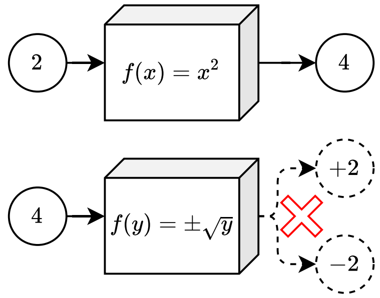


このような関係を $y=f(x)$ と表す。

例 $y=x^2$ について

(ｉ) $x=2$ のとき, $y=4$
$\Rightarrow$ yはxの関数である

$y=x^2 \iff x=\pm\sqrt{y}$ より
(ii) $y=4$ のとき, $x=\pm 2$
$\Rightarrow$ xはyの関数でない
（xが1つの値に定まらない）



読 エフ・エックス

※「エフ・かっこ・エックス」と読まない！

▷ グラフの平行移動

1次・2次関数以外のどんな関数のグラフでも成り立つ！

関数 $y=f(x)$ のグラフについて
x軸方向に$+p$, y軸方向に$+q$だけ平行移動したときのグラフの式は $y-q=f(x-p)$ である

移動したい方向（文字x, y）から移動したい量を引いたものに置換する($x\to x-p, y\to y-q$)

補 数Ⅱ「軌跡」（座標変換）より

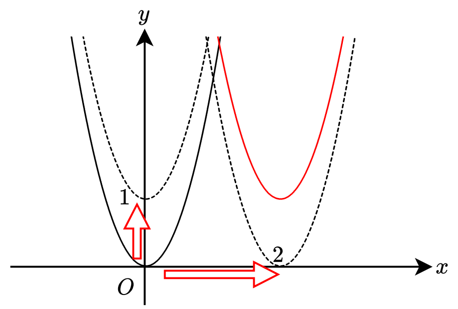
旧座標 $(x,y)\to$新座標 (X,Y) とおくとき

$$\begin{cases} X=x+p \\ Y=y+q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=X-p \\ y=Y-q \end{cases}$$

であるから、関数 $y=f(x)$ のグラフに移動後の新しい点の座標を代入するとそのグラフの式は

$$Y-q=f(X-p)$$

例



$y-1=2x^2$

$y=2(x-2)^2+1$

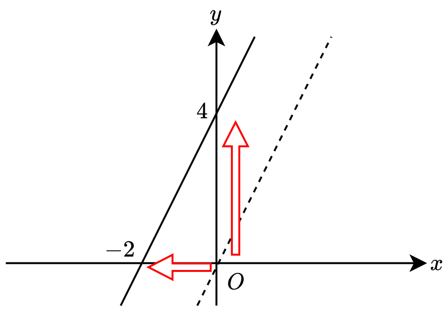
$y-1=2(x-2)^2$

y軸方向に$+1$

x軸方向に$+2$

$y=2x^2$

$y=2(x-2)^2$



$y=2x$

x軸方向に-2
or
y軸方向に$+4$

…同じこと

$$y=2x+4 \iff \begin{cases} y=2\{x-(+2)\} \\ y-4=2x \end{cases}$$

▷ グラフの対称移動

1次・2次関数以外のどんな関数のグラフでも成り立つ！

関数 $y=f(x)$ のグラフについて

x軸対称（上下反対）	$y=-f(x)$
y軸対称（左右反対）	$y=f(-x)$
原点対称	$y=-f(-x)$

補 数Ⅱ「軌跡」（座標変換）より

平行移動と同様の手法で証明できる
旧座標 $(x,y)\to$新座標 (X,Y) とおくとき

x軸対称 $\begin{cases} X=x \\ Y=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=X \\ y=-Y \end{cases} \Rightarrow -Y=f(X)$

y軸対称 $\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-X \\ y=Y \end{cases} \Rightarrow Y=f(-X)$

原点対称 $\begin{cases} X=-x \\ Y=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-X \\ y=-Y \end{cases} \Rightarrow -Y=f(-X)$

補 軸以外の対称移動は？

◇ 平行移動と合わせ技
グラフだけでなく「対称の軸」も移動させる（※右例）

◇ 直線 $y=x$ 対称 $\Rightarrow$ 逆関数 $x=f(y)$ （※数Ⅲ）

新旧座標の対応 $\begin{cases} x=Y \\ y=X \end{cases}$

※ 移動は全部で3種類・・・平行，対称，回転

例 $x=3$についての対称移動

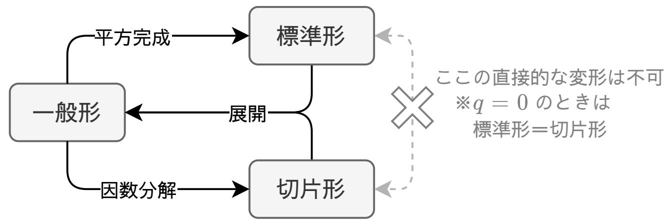
グラフの式	対称の軸	
$y=f(x)$	$x=3$	x軸方向に-3だけ平行移動 (★)
$y=f(x+3)$	$x=0$	y軸について対称移動
$y=f(-(x+3))$	$x=0$	x軸方向に$+3$だけ平行移動 (★を戻す)
$y=f(-(x-3)-3)$	$x=3$	

▷ 式の形

万能型は存在しない
「使い分け」が大切

	1次関数	2次関数
一般形	$ax+by+c=0$ ※計算（方程式）	$y=ax^2+bx+c$ $x=0 \Rightarrow y=c$ (y切片)
標準形	$y=mx+q$ 傾き m, y切片 n	$y=a(x-p)^2+q$ $x=p$ のとき 極値 $y=q$ $\Rightarrow$ 頂点 (p,q)
切片形	$\dfrac{x}{x_1}+\dfrac{y}{y_1}=1$ $y=0\Rightarrow x=x_1$ 切片 $(x_1,0),(0,y_1)$	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $y=0 \Rightarrow x=\alpha,\beta$ x切片 $(\alpha,0),(\beta,0)$

◆2次関数の式変形



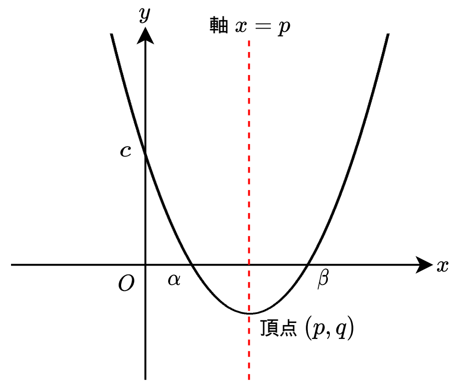
◆2次関数：標準形の理解

標準形 $y=a(x-p)^2+q$ $(a>0)$ について
「2乗は0以上（非負）」という性質から

$$a(x-p)^2 \geqq 0$$
$$a(x-p)^2+q \geqq q \quad \cdots(\bigstar)$$

よって、$a(x-p)^2=0$
すなわち $x=p$ のとき 最小値 $y=q$
$\Rightarrow$ 頂点 (p,q)

また，(★)より 値域 $y\geqq q$ であるが，
この式は「yはqより大きい」ではなく，
「yの最小値がq」と理解すべきである



$y=ax^2+bx+c$ の扱い

▷ 平方完成

2乗(＝平方)の形をつくる

$x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$ の形を無理矢理つくる

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c \\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &=a\left\{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &=a\left\{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \\ \therefore y&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \cdots(\bigstar) \end{aligned}$$

▷ 2次方程式の解の公式

1つの式から2つの解が出るのは $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ のおかげ！

(★)が $y=0$ とすると

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【偶数公式】$ax^2+2b'x+c=0$ のとき

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} \iff x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \quad \left(\frac{D}{4}=b'^2-ac\right)$$

▷ 判別式 Discriminant

判別式を $D=b^2-4ac$ とおくと

$D>0$	$\iff$	異なる2つの実数解をもつ
$D=0$	$\iff$	1つの実数解をもつ（重解）
$D<0$	$\iff$	実数解をもたない

▷ 2次関数の最大値・最小値

定義域の「左端・右端」と「頂点」の3点に着目して場合分け

$a>0$ のとき （※ $a<0$のときはmin，maxが逆になるので要注意）

最大値

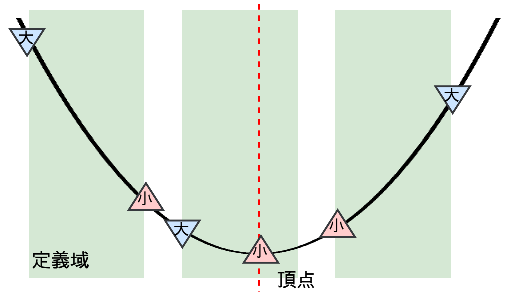
定義域：左側＆頂点：右側 のとき
最大値は「左端」

(＊)

頂点：左側＆定義域：右側 のとき
最大値は「右端」

(＊) 定義域の中央に頂点があるとき

最大値 $=f$(左端) $=f$(右端)



最小値

定義域：左側
頂点：右外 のとき
最小値は「右端」

定義域に頂点を含むとき
最小値は「頂点」

定義域：右側
頂点：左外 のとき
最小値は「左端」

▷ Point

最大値　頂点から遠い方が最大値
最小値　頂点が定義域内部なら最小値確定
　　　　外部なら右外・左外をチェック

▷「漏れなく＆ダブりなく」場合分け
等号の付け忘れに注意して
範囲の重複がないように場合分けをしましょう