指数・対数関数の公式

関連分野：複素数、微積分

カッコは正しく使いましょう

$\begin{cases}(2^3)^4 &= 2^{12}\\ 2^{3^4} &= 2^{81}\end{cases}$

対数の定義・公式

底^{指数} = 真数

$\log_{底}$ 真数 = 指数

∴ 対数 = 指数

対数の定義

$a^b = c \iff \log_a c = b$

ただし、底$a>0$，真数条件$c>0$

対数の指数

$a^{\log_a b} = b$

「aを累乗したときにbになる指数」でaを累乗するとbになる

底の変換公式

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

（頻出パターン）

$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

関数のグラフ

$\begin{cases}y = a^x\\ y = \log_a x \iff x = a^y\end{cases}$

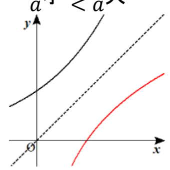
	指数関数 $y=a^x$	対数関数 $y=\log_a x$
定義域	実数全体	$x>0$（真数条件）
値域	$y>0$	実数全体
漸近線	x軸	y軸

直線$y=x$に関して対称

（x, yが逆になる ・・・ 逆関数）

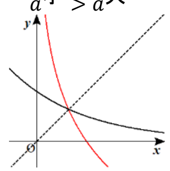
（ⅰ）底$a>1$のとき

$a^{小} < a^{大}$



（ⅱ）底$0<a<1$のとき

$a^{小} > a^{大}$



指数・累乗根の計算

① 累乗根を指数に直す

② 底をそろえる

③ 指数に着目して解く（指数法則）

指数・累乗根を含む計算・方程式・不等式は、どれもこの手順で解決できる！

$256^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{256^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{1}{2^{\frac{8}{6}}} = \dfrac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{2^1\cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

解答マナー	
① ×負の指数	→ ○逆数（分数）
② ×可約分数指数	→ ○既約分数指数
③ ×仮分数指数	→ ○真分数指数
④ ×分数指数	→ ○累乗根
⑤ ×分母の累乗根	→ ○有理化

※ 対数も同様 ・・・ $\log_4 27 = \frac{3}{2}\log_2 3$

③は後からでも可 $\sqrt[3]{2^3\cdot 2^1} = 2\sqrt[3]{2}$

対数の利用

水素イオン濃度指数

$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$

（$[\mathrm{H}^+]$：水素イオン濃度mol/L）

デシベル（音量）・利得（ゲイン）

$\mathrm{dB} = 10\log_{10}\dfrac{A}{A_0}$

累乗根

xがaのn乗根 $\iff x^n = a$		累乗根	複素数範囲：実数範囲	複素数範囲	根号で表される累乗根 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	
偶数乗（指数nが偶数の場合）	$(\pm2)^2 = +4$より	$+4$の平方根は	±2	×	$\sqrt{+4} = +2$	正の累乗根の値
		-4の平方根は	×	$\pm 2i$	$\sqrt{-4}$ =なし	便宜的に平方根のみ$\sqrt{-1} = i$とする
奇数乗（指数nが奇数の場合）	$(+2)^3 = +8$より	$+8$の平方根は	$+2$	$-1\pm\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{+8} = +2$	実数範囲の累乗根の値
	$(-2)^3 = -8$より	-8の平方根は	-2	$1\pm\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$	（2つ以上の実数を累乗根にもつことはない）

指数・対数の計算

$M = a^m\ (m = \log_a M)$，$N = a^n\ (n = \log_a N)$とおく

指数・対数の計算	対数〔導出〕	指数	備考（指数法則でのaの数え方）
指数の和 真数の積	$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ 導出 $MN = a^{m+n}$ $m+n = \log_a MN$	$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$\underbrace{(a\times a\times a\times\cdots\times a)}_{m個}\cdot\underbrace{(a\times a\times a\times\cdots\times a)}_{n個}$
指数の差 真数の商	$\log_a M - \log_a N = \log_a \dfrac{M}{N}$ 導出 $\dfrac{M}{N} = a^{m-n}$ $m-n = \log_a\dfrac{M}{N}$	$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ （別解） $a^m\div a^n = a^m\times(a^n$の逆数$)$ $= a^m\times a^{-n}$ $= a^{m+(-n)}$ 積と同じ	$\dfrac{\overbrace{a\times a\times a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m個}}{\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n個}} = \dfrac{a^{m-n}}{1}$ $\dfrac{\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m個}}{\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n個}} = \dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)}$ どちらも同じ
指数の積 真数の累乗	$\log_a M^n = n\log_a M$ 導出 $M^n = a^{mn}$ $\log_a M^n = mn$ 累乗根：$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^m)^n = \left.\begin{array}{l}\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m個}\times\\ a\times a\times a\times\cdots\times a\times\\ \vdots\\ a\times a\times a\times\cdots\times a\end{array}\right\}n$セット
積の累乗 累乗の積	累乗根：$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$(ab)^n = a^n b^n$	（別解） $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a\cdot b^{-1})^n = a^n b^{-n} = \dfrac{a^n}{b^n}$ 分数でも積と同じ
商の累乗 累乗の商	累乗根：$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	
0乗	$\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	
負の指数 逆数	$\log_a\dfrac{1}{M} = -\log_a M$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	
累乗根の指数	$\log_a\sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\sqrt[n]{a^n} = a$	

指数法則

略記法	常用対数 $\log_{10} x$	自然対数 $\log_e x$
高校数学	$\log_{10} x$	$\log x$
科学分野	$\log x$	$\ln x$

常用対数と桁数

実数M	指数表示 ／ 常用対数表示	（例）$n=3$のとき
n桁の数	$10^{n-1} \leqq M < 10^n$ $\log_{10}10^{n-1} \leqq \log_{10} M < \log_{10}10^n$	$\left.\begin{array}{l}10^2\\100\end{array}\right\} \leqq \boxed{123} \leqq 999.9\cdots < \left\{\begin{array}{l}10^3\\1000\end{array}\right.$
小数第n位にはじめて0でない数字が表れる	$10^{-n} \leqq M < 10^{-n+1}$ $\log_{10}10^{-n} \leqq \log_{10} M < \log_{10}10^{-n+1}$	$\left.\begin{array}{l}10^{-3}\\0.001\end{array}\right\} \leqq \boxed{0.005} \leqq 0.00999\cdots < \left\{\begin{array}{l}10^{-2}\\0.01\end{array}\right.$

自然対数の底（オイラー数、ネイピア数）e〔数Ⅲ〕

（Bernoulli）

$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$

「1足すチョットの+∞乗」

（Euler）

$\lim_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h} = \lim_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

$e = a \quad s.t. \quad \dfrac{d}{dx}a^x = a^x$

$e = 2.71828182845904(5\cdots)$

（語呂）鮒一鉢二鉢一鉢二鉢至極美味しい