指数・対数関数の公式

指数（累乗根）・対数の関係をマスターしよう！

対数の定義

$a^b = c \iff \log_a c = b$

ただし、底$a>0$，真数条件$c>0$

底^{指数} ＝ 真数

$\log_{底}$ 真数 ＝ 指数

∴ 対数＝指数

底の変換公式

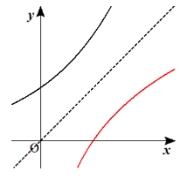
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

（頻出パターン）

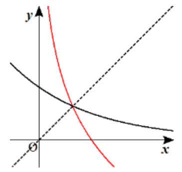
$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

（ｉ）底 $a>1$



（ii）底 $0<a<1$



対数の指数

$a^{\log_a b} = b$

関数のグラフ

逆関数 $\begin{cases} y = a^x \\ x = a^y \end{cases} \iff y = \log_a x$

	指数関数	対数関数
定義域	実数全体	$x>0$
値域	$y>0$	実数全体

指数・対数関数は、直線$y=x$に関して対称（x,yが逆）

指数・累乗根の計算

① 累乗根を指数に直す
② 底をそろえる
③ 指数法則で計算する

＊解答のマナー＊
×負の指数 → ○逆数（分数）
×分数指数 → ○累乗根

対数の利用

水素イオン濃度指数

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H^+}]$$

（$[\mathrm{H^+}]$: 水素イオン濃度mol/L）

デシベル（音量）・利得（ゲイン）

$$\mathrm{dB} = 10\log_{10}\frac{A}{A_0}$$

マグニチュード（地震）

$$M = \frac{2}{3}(\log_{10} E - 4.8)$$

（E: 地震のエネルギーJ）

xがaのn乗根 $\iff$ $x^n = a$		累乗根	複素数範囲（実数範囲）	複素数範囲	根号で表される累乗根 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	
偶数乗 指数nが偶数の場合	$(\pm2)^2 = +4$より	$+4$の平方根は	±2	×	$\sqrt{+4} = +2$	正の累乗根の値
		-4の平方根は	×	$\pm2i$	$\sqrt{-4}$ ＝なし	便宜的に平方根のみ$\sqrt{-1} = i$とする
奇数乗 指数nが奇数の場合	$(+2)^3 = +8$より	$+8$の平方根は	$+2$	$-1\pm\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{+8} = +2$	実数範囲の累乗根の値（実数範囲では必ず1つしかない）
	$(-2)^3 = -8$より	-8の平方根は	-2	$1\pm\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$	

指数・対数の計算	対 数	←〔導出〕← $M = a^m,\ m = \log_a M$ $N = a^n,\ n = \log_a N$	指 数	備 考（指数法則でのaの数え方）
指数の和＝真数の積	$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$	$MN = a^{m+n}$ $m+n = \log_a MN$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\underbrace{(a\times a\times a\times\cdots\times a)}_{m個}\cdot\underbrace{(a\times a\times a\times\cdots\times a)}_{n個}$ （指数法則）
指数の差＝真数の商	$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$	$\frac{M}{N} = a^{m-n}$ $m-n = \log_a \frac{M}{N}$	$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ （別解） $a^m \div a^n = a^m \times (a^n$の逆数$)$ $= a^m \times a^{-n}$ $= a^{m+(-n)}$ 積と結局同じ	$\frac{\overbrace{a\times a\times a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m個}}{\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n個}} = \frac{a^{m-n}}{1}$ $\frac{\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m個}}{\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n個}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)}$ 結局同じ
指数の積＝真数の累乗	$\log_a M^n = n\log_a M$	$M^n = a^{mn}$ $\log_a M^n = m\cdot n$ 累乗根: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a^m)^n = \left.\begin{matrix}\overbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}^{m個}\times \\ a\times a\times a\times\cdots\times a\times \\ \vdots \\ a\times a\times a\times\cdots\times a\end{matrix}\right\}n$セット
積の累乗＝累乗の積		累乗根: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a\cdot b^{-1})^n = a^n b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$
商の累乗＝累乗の商		累乗根: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	分数でも結局同じ
0乗	$\log_a 1 = 0$	定義より	$a^0 = 1$	
負の指数＝逆数	$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M$	$\log_a M^n = n\log_a M$ の利用	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	
累乗根の指数	$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$		$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	

指数法則

（注）底の省略	常用対数 $\log_{10} x$	自然対数 $\log_e x$
高校数学	$\log_{10} x$	$\log x$
科学分野	$\log x$	$\ln x$

自然対数の定義＆利用した公式

自然対数の底（オイラー数、ネイピア数）e

（Bernoulli） $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$

「１足すチョットの＋∞乗」

（Euler） $\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$e = a \quad s.t. \quad \frac{d}{dx}a^x = a^x$

$e = 2.71828182845904(5\cdots)$

（語呂）鮒一鉢二鉢一鉢二鉢至極美味しい

常用対数と桁数

実数M	n桁の数	小数第n位にはじめて0でない数字が表れる
（例）$n=3$	$\left.\begin{matrix}10^2\\100\end{matrix}\right\} \leqq \boxed{123} \leqq 999.9\cdots < \left\{\begin{matrix}10^3\\1000\end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix}10^{-3}\\0.001\end{matrix}\right\} \leqq \boxed{0.005} \leqq 0.00999\cdots < \left\{\begin{matrix}10^{-2}\\0.01\end{matrix}\right.$
指数表示	$10^{n-1} \leqq M < 10^n$	$10^{-n} \leqq M < 10^{-(n-1)}$
常用対数	$\log_{10} 10^{n-1} \leqq \log_{10} M < \log_{10} 10^n$	$\log_{10} 10^{-n} \leqq \log_{10} M < \log_{10} 10^{-(n-1)}$