ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Ι)

Ενδιάμεση Γραπτή Εξέταση (Προσομοίωσης Προόδου)

Λύσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Α

Α) Προσδιορίστε ποιοι τύποι είναι ταυτολογίες, ποιοι αντιφάσεις και ποιοι τίποτα από τα δύο:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
3. $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow p$
4. $q \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q))$
6. $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Α

Α) Προσδιορίστε ποιοι τύποι είναι ταυτολογίες, ποιοι αντιφάσεις και ποιοι τίποτα από τα δύο:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
3. $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow p$
4. $q \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q))$
6. $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow p$
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ

p	q	$q \rightarrow p$	$q \rightarrow (q \rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

p	q	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ

p	q	$p \wedge q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Α

Α) Προσδιορίστε ποιοι τύποι είναι ταυτολογίες, ποιοι αντιφάσεις και ποιοι τίποτα από τα δύο:

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to p$
3. $(p \to \neg p) \leftrightarrow p$
4. $q \to (q \to p)$
5. $\neg(p \to (p \to q))$
6. $(p \land q) \to (\neg q \to \neg p)$

$$
\begin{aligned}
p \to (q \to p) &\equiv \neg p \lor (q \to p) && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg p \lor (\neg q \lor p) && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg p \lor (p \lor \neg q) && \text{αντιμεταθετικότητα}\\
&\equiv (\neg p \lor p) \lor \neg q && \text{προσεταιριστικότητα}\\
&\equiv \boldsymbol{\tau} \lor \neg q \equiv \boldsymbol{\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to p &\equiv \neg(p \to q) \lor p && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg(\neg p \lor q) \lor p && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv (\neg\neg p \land \neg q) \lor p && \text{De Morgan}\\
&\equiv (p \land \neg q) \lor p && \text{διπλή άρνηση}\\
&\equiv p && \text{απορρόφηση}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(p \to \neg p) \leftrightarrow p\\
&\equiv [\neg(p \to \neg p) \lor p] \land [\neg p \lor (p \to \neg p)] && \text{αντικατάσταση ισοδυναμίας}\\
&\equiv [\neg(\neg p \lor \neg p) \lor p] \land [\neg p \lor (\neg p \lor \neg p)] && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv (\neg\neg p \lor p) \land \neg p && \text{μοναδιαία ποσότητα}\\
&\equiv (p \lor p) \land \neg p && \text{διπλή άρνηση}\\
&\equiv p \land \neg p \equiv \boldsymbol{a} && \text{μοναδιαία ποσότητα}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q \to (q \to p) &\equiv \neg q \lor (q \to p) && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg q \lor (\neg q \lor p) && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv (\neg q \lor \neg q) \lor p && \text{προσεταιριστικότητα}\\
&\equiv \neg q \lor p && \text{μοναδιαία ποσότητα}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\neg[p \to (q \to p)]\\
&\equiv \neg[\neg p \lor (q \to p)] && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg[\neg p \lor (\neg q \lor p)] && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg[\neg p \lor (p \lor \neg q)] && \text{αντιμεταθετικότητα}\\
&\equiv \neg[(\neg p \lor p) \lor \neg q] && \text{προσεταιριστικότητα}\\
&\equiv \neg(\boldsymbol{\tau} \lor \neg q) \equiv \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(p \land q) \to (\neg q \to \neg p)\\
&\equiv \neg(p \land q) \lor (\neg q \to \neg p) && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg(p \land q) \lor (\neg\neg q \lor \neg p) && \text{αντικατάσταση συνεπαγωγής}\\
&\equiv \neg(p \land q) \lor (q \lor \neg p) && \text{διπλή άρνηση}\\
&\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor (q \lor \neg p) && \text{De Morgan}\\
&\equiv \neg p \lor (\neg q \lor q) \lor \neg p \equiv \boldsymbol{a} && \text{προσεταιριστικότητα}\\
&\equiv \neg p \lor \boldsymbol{\tau} \lor \neg p \equiv \boldsymbol{\tau}
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Β.1

B) Αιτιολογήστε αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Έστω σύνολα τύπων T_1 και T_2, και τύποι φ_1και φ_2τέτοιοι ώστε $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cup T_2 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Β.1

Β) Αιτιολογήστε αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Έστω σύνολα τύπων T_1 και T_2, και τύποι φ_1και φ_2τέτοιοι ώστε $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cup T_2 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Β.1

Το σύνολο $T_1 \cup T_2$ περιέχει όλους τους προτασιακούς τύπους των συνόλων T_1 και T_2. Αν το $T_1 \cup T_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή δεν υπάρχει καμία ανάθεση η οποία να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους τύπους των T_1 και T_2, τότε ισχύει $T_1 \cup T_2 \vDash \psi$ για οποιοδήποτε τύπο ψ, άρα και για $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Διαφορετικά, αν το $T_1 \cup T_2$ είναι ικανοποιήσιμο, τότε για κάθε ανάθεση α η οποία ικανοποιεί και το T_1 και το T_2, από τις ταυτολογικές συνεπαγωγές $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$ έχουμε ότι η α ικανοποιεί και τους τύπους φ_1 και φ_2. Άρα και πάλι ισχύει $T_1 \cup T_2 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Β.1 κ Β.2

Β) Αιτιολογήστε αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Έστω σύνολα τύπων T_1 και T_2, και τύποι φ_1και φ_2τέτοιοι ώστε $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cup T_2 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. Έστω σύνολα τύπων T_1 και T_2, και τύποι φ_1και φ_2τέτοιοι ώστε $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cap T_2 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Β.1 κ Β.2

Β) Αιτιολογήστε αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Έστω σύνολα τύπων T_1 και T_2, και τύποι φ_1και φ_2τέτοιοι ώστε $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cup T_2 \ \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. Έστω σύνολα τύπων T_1 και T_2, και τύποι φ_1και φ_2τέτοιοι ώστε $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cap T_2 \ \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Β.1

Το σύνολο $T_1 \cup T_2$ περιέχει όλους τους προτασιακούς τύπους των συνόλων T_1 και T_2. Αν το $T_1 \cup T_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή δεν υπάρχει καμία ανάθεση η οποία να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους τύπους των T_1 και T_2, τότε ισχύει $T_1 \cup T_2 \vDash \psi$ για οποιοδήποτε τύπο ψ, άρα και για $\psi = \varphi_1 \wedge \ \varphi_2$. Διαφορετικά, αν το $T_1 \cup T_2$ είναι ικανοποιήσιμο, τότε για κάθε ανάθεση α η οποία ικανοποιεί και το T_1 και το T_2, από τις ταυτολογικές συνεπαγωγές $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$ έχουμε ότι η α ικανοποιεί και τους τύπους φ_1 και φ_2. Άρα και πάλι ισχύει $T_1 \cup T_2 \vDash \varphi_1 \wedge \ \varphi_2$.

Β.2

Έστω $T_1 = \{p\}$, $T_2 = \{q\}$ και $\varphi_1 = p$ και $\varphi_2 = q$, όπου p και q μεταβλητές. Προφανώς, ισχύουν οι ταυτολογικές συνεπαγωγές $T_1 \vDash \varphi_1$ και $T_2 \vDash \varphi_2$. Όμως $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή $T_1 \cap T_2 \vDash \psi$ ισχύει μόνο όταν ο τύπος ψ είναι ταυτολογία. Στην περίπτωση μας όμως, έχουμε $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 = p \wedge q$, το οποίο δεν είναι ταυτολογία.

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Γ.1

Γ) Χρησιμοποιώντας μόνο MP και τα ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3, δείξτε ότι:

1. $\{\neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Γ.1

Γ) Χρησιμοποιώντας μόνο MP και τα ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3, δείξτε ότι:

1. $\{\neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$

Γ.1

Έχουμε την τυπική απόδειξη:

1.	$\neg\varphi$	υπόθεση
2.	$\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	ΑΣ1 με $\alpha = \neg\varphi$ και $\beta = \neg\psi$
3.	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	MP 1,2
4.	$(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow [(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi]$	ΑΣ3 με $\alpha = \varphi$ και $\beta = \psi$
5.	$(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$	MP 3,4

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Γ.1 κ Γ.2

Γ) Χρησιμοποιώντας μόνο MP και τα ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3, δείξτε ότι:

1. $\{\neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$
2. $\{\varphi \to \chi,\ \varphi \to (\chi \to \psi\} \vdash \varphi \to \psi$

ΘΕΜΑ 1ο – Ερώτημα Γ.1 κ Γ.2

Γ) Χρησιμοποιώντας μόνο MP και τα ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3, δείξτε ότι:

1. $\{\neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \varphi) \to \psi$
2. $\{\varphi \to \chi,\ \varphi \to (\chi \to \psi)\} \vdash \varphi \to \psi$

Γ.1

Έχουμε την τυπική απόδειξη:

1.	$\neg\varphi$	υπόθεση
2.	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	ΑΣ1 με $\alpha = \neg\varphi$ και $\beta = \neg\psi$
3.	$\neg\psi \to \neg\varphi$	MP 1,2
4.	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to [(\neg\psi \to \varphi) \to \psi]$	ΑΣ3 με $\alpha = \varphi$ και $\beta = \psi$
5.	$(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	MP 3,4

Γ.2

Έχουμε την τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \chi$	υπόθεση
2.	$\varphi \to (\chi \to \psi)$	υπόθεση
3.	$[\varphi \to (\chi \to \psi)] \to [(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)]$	ΑΣ2 με $\alpha = \varphi, \beta = \chi$ και $\gamma = \psi$
4.	$(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)$	MP 2,3
5.	$\varphi \to \psi$	MP 1,4

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Α

Α) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $\boldsymbol{n > 1}$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + < 2 - \frac{1}{n}$$

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Α

Α) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n > 1$

$$1+\frac{1}{2^2}+\ \frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+< 2-\frac{1}{n}$$

Η βάση της επαγωγής είναι για $n = 2$. Έχουμε

$$1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$$

άρα η βάση της επαγωγής ισχύει.

Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι για $n = k \geq 2$ ισχύει

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}.$$

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Α

Α) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n > 1$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+< 2-\frac{1}{n}$$

Στο επαγωγικό βήμα θα δείξουμε ότι για $n = k + 1$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}< 2-\frac{1}{k+1}.$$

Έχουμε

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}< 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση για τους πρώτους k όρους του αθροίσματος.

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Α

Α) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n > 1$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+<2-\frac{1}{n}$$

Τώρα έχουμε

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=2-\frac{k^2+2k+1-k}{k(k+1)^2}$$

$$=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}$$

$$=2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Β

Β) **Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$**

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Β

Β) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Η βάση της επαγωγής είναι για $n = 1$. Έχουμε

$$1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

άρα η βάση της επαγωγής ισχύει.

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Β

Β) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι για $n = k \geq 1$ ισχύει

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Β

Β) **Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$**

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Στο επαγωγικό βήμα θα δείξουμε ότι για $n = k + 1$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Έχουμε

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση για τους πρώτους k όρους του αθροίσματος.

ΘΕΜΑ 2ο – Ερώτημα Β

Β) Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Τώρα έχουμε

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}[k^2 + 4(k+1)] = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4)$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 3ο – Ερώτημα Α.1

Α) Χρησιμοποιώντας ταυτότητες συνόλων δείξτε ότι

1. $(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$
2. $((A^c \cup B) - A))^c = A$

ΘΕΜΑ 3ο – Ερώτημα Α.1

Α) **Χρησιμοποιώντας ταυτότητες συνόλων δείξτε ότι**

1. $(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$
2. $((A^c \cup B) - A))^c = A$

Έχουμε

$$(A \cup B) - (C - A)$$
$$= (A \cup B) - (C \cap A^c)$$
$$= (A \cup B) \cap (C \cap A^c)^c$$
$$= (A \cup B) \cap (C^c \cup (A^c)^c)$$
$$= (A \cup B) \cap (C^c \cup A)$$
$$= (B \cup A) \cap (C^c \cup A)$$
$$= (B \cap C^c) \cup A$$
$$= (B - C) \cup A$$
$$= A \cup (B - C)$$

Α.1

Έχουμε

$$\left((A^c \cup B) - A\right)^c$$
$$= \left((A^c \cup B) \cap A^c\right)^c$$
$$= \left(A^c \cap (A^c \cup B)\right)^c$$
$$= (A^c)^c$$
$$= A$$

Α.2

ΘΕΜΑ 3ο – Ερώτημα Β

Β) Δύο ακέραιοι αριθμοί χ και y λέγονται *αμοιβαία πρώτοι* αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι το 1. Πόσοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί από το 1 έως και το 200 οι οποίοι είναι αμοιβαία πρώτοι με το 30;

ΘΕΜΑ 3ο – Ερώτημα Β

Β) Δύο ακέραιοι αριθμοί χ και y λέγονται *αμοιβαία πρώτοι* αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι το 1. Πόσοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί από το 1 έως και το 200 οι οποίοι είναι αμοιβαία πρώτοι με το 30;

Όπως και παραπάνω, αναλύουμε το 30 σε πρώτους παράγοντες και έχουμε $30 = 2 \times 3 \times 5$. Άρα πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των ακέραιων αριθμών από το 1 έως και το 200 οι οποίοι δε διαιρούνται από τους 2, 3 και 5.

Έστω A_j το σύνολο των ακεραίων στο διάστημα $[1,200]$ οι οποίοι διαιρούνται από ένα θετικό ακέραιο j. Τότε $|A_j| = \lfloor 200/j \rfloor$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου $A_2{}^c \cap A_3{}^c \cap A_5{}^c$. Έχουμε

$$A_2{}^c \cap A_3{}^c \cap A_5{}^c = (A_2 \cup A_3 \cup A_5)^c = \Omega - (A_2 \cup A_3 \cup A_5),$$

όπου $\Omega = \{1, \dots, 200\}$.

Άρα $|A_2{}^c \cap A_3{}^c \cap A_5{}^c| = |\Omega| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 200 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5|$. Απομένει να υπολογίσουμε το $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

Από την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|.$$

Επιπλέον

- $|A_2| = \lfloor 200/2 \rfloor = 100$,
- $|A_3| = \lfloor 200/3 \rfloor = 66$,
- $|A_5| = \lfloor 200/5 \rfloor = 40$,
- $|A_2 \cap A_3| = \lfloor 200/(2 \times 3) \rfloor = 33$,
- $|A_2 \cap A_5| = \lfloor 200/(2 \times 5) \rfloor = 20$,
- $|A_3 \cap A_5| = \lfloor 200/(3 \times 5) \rfloor = 13$,
- $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \lfloor 200/(2 \times 3 \times 5) \rfloor = 6$.

Επομένως $|A_2{}^c \cap A_3{}^c \cap A_5{}^c| = 200 - (100 + 66 + 40 - 33 - 20 - 13 + 6) = 54$.

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Α

Α) Έστω συνάρτηση f από το S στο T, όπου S και T δυο πεπερασμένα σύνολα με $|S| > |T|$.

Μπορεί η f να είναι «1-1»;

Μπορεί να είναι «επί»;

Δικαιολογήστε την απάντηση σας

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Α

Α) Έστω συνάρτηση f από το S στο T, όπου S και T δυο πεπερασμένα σύνολα με $|S| > |T|$.

Μπορεί η f να είναι «1-1»;

Μπορεί να είναι «επί»;

Δικαιολογήστε την απάντηση σας

Θεωρούμε τα στοιχεία του S ως περιστέρια και του T ως περιστερώνες. Το περιστέρι $x \in S$ πηγαίνει στο περιστερώνα $f(x)$. Αφού $|S| > |T|$, η αρχή του περιστερώνα μας λέει ότι κάποιος περιστερώνας έχει τουλάχιστον 2 περιστέρια. Δηλαδή, υπάρχουν $x, y \in S$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Επομένως η f δεν μπορεί να είναι «1-1».

Η f μπορεί να είναι «επί» αν κάθε περιστερώνας έχει τουλάχιστον ένα περιστέρι. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, με $f(1) = f(2) = 1$ και $f(3) = 2$.

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Β

Β) Έστω συνάρτηση f από το S στο T, όπου S και T δυο πεπερασμένα σύνολα με $|S| = k|T|$. Δείξτε ότι υπάρχουν στοιχεία $s_1, s_2, \ldots s_k$ του S όλα διαφορετικά μεταξύ τους ($s_i \neq s_j$ για $i \neq j$), τέτοια ώστε $f(s_1) = f(s_2) = \ldots = f(s_k)$.

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Β

Β) Έστω συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ από το $\boldsymbol{S}$ στο $\boldsymbol{T}$, όπου $\boldsymbol{S}$ και $\boldsymbol{T}$ δυο πεπερασμένα σύνολα με $|\boldsymbol{S}| = \boldsymbol{k}|\boldsymbol{T}|$. Δείξτε ότι υπάρχουν στοιχεία $\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots s_k}$ του $\boldsymbol{S}$ όλα διαφορετικά μεταξύ τους ($\boldsymbol{s_i \neq s_j}$ $\boldsymbol{\gamma\iota\alpha}$ $\boldsymbol{i \neq j}$), τέτοια ώστε $\boldsymbol{f(s_1) = f(s_2) = \ldots = f(s_k)}$.

Θεωρούμε τα στοιχεία του S ως περιστέρια και του T ως περιστερώνες. Το περιστέρι $x \in S$ πηγαίνει στο περιστερώνα $f(x)$. Από τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα, κάποιος περιστερώνας έχει τουλάχιστον $\left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil = k$ περιστέρια. Δηλαδή, υπάρχουν $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ τέτοια ώστε $f(s_1) = f(s_2) = \cdots f(s_k)$.

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Γ

C) Ένας οπωροπώλης έχει 50 καλάθια στα οποία τοποθετεί μήλα.
Δείξτε ότι αν κανένα καλάθι δεν είναι άδειο τότε συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:

1. κάποιο καλάθι έχει τουλάχιστον 25 μήλα,
2. τουλάχιστον 3 καλάθια έχουν το ίδιο πλήθος από μήλα.

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Γ

C) Ένας οπωροπώλης έχει 50 καλάθια στα οποία τοποθετεί μήλα.
Δείξτε ότι αν κανένα καλάθι δεν είναι άδειο τότε συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:

1. κάποιο καλάθι έχει τουλάχιστον 25 μήλα,
2. τουλάχιστον 3 καλάθια έχουν το ίδιο πλήθος από μήλα.

Έστω ότι δεν ισχύει το ενδεχόμενο 1. Θα δείξουμε ότι ισχύει το 2. Από τη στιγμή που κανένα καλάθι δεν είναι άδειο και δεν υπάρχει καλάθι με ≥ 25 μήλα, κάθε καλάθι θα έχει από 1 έως και 24 μήλα. Θεωρούμε τα καλάθια ως περιστέρια και τις ακέραιες τιμές $1, 2, \ldots, 24$ ως περιστερώνες. Από τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα έχουμε ότι υπάρχει περιστερώνας με τουλάχιστον $\left\lceil \frac{50}{24} \right\rceil = 3$ περιστέρια. Άρα, τουλάχιστον 3 καλάθια έχουν το ίδιο πλήθος από μήλα.

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Δ

D) Μια βιβλιοθήκη έχει 10 ράφια στα οποία τοποθετούμε βιβλία έτσι ώστε κανένα ράφι να μην είναι άδειο. Δείξτε ότι συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:

1. κάποιο ράφι έχει τουλάχιστον 4 βιβλία,
2. τουλάχιστον 4 ράφια έχουν το ίδιο πλήθος από βιβλία

ΘΕΜΑ 4ο – Ερώτημα Δ

D) Μια βιβλιοθήκη έχει 10 ράφια στα οποία τοποθετούμε βιβλία έτσι ώστε κανένα ράφι να μην είναι άδειο. Δείξτε ότι συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:

1. κάποιο ράφι έχει τουλάχιστον 4 βιβλία,
2. τουλάχιστον 4 ράφια έχουν το ίδιο πλήθος από βιβλία

Έστω ότι δεν ισχύει το 1, δηλαδή κάθε ράφι έχει από 1 έως και 3 βιβλία. Θα δείξουμε ότι ισχύει το ενδεχόμενο 2. Θεωρούμε τα ράφια ως περιστέρια και τις τιμές 1, 2 και 3 ως περιστερώνες. Από τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα έχουμε ότι υπάρχει περιστερώνας με τουλάχιστον $\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 4$ περιστέρια. Άρα, τουλάχιστον 4 ράφια έχουν το ίδιο πλήθος από βιβλία.