UMONS
Université de Mons

Faculté Polytechnique

Optimisation Non Linéaire

Récupération d'une image floutée (deblurring)

Projet d'Optimisation

Sabrine RIAHI
Aymerick SOYEZ

POLYTECH MONS

Sous la direction de Monsieur Nicolas GILLIS et Arnaud VANDAELE

Décembre 2017

ACADÉMIE UNIVERSITAIRE WALLONIE-BRUXELLES

Table des matières

1 Introduction

Le problème posé est de déflouter une image dont chaque pixel a été remplacé par une combinaison linéaire des pixels voisins. La matrice de floutage utilisée est donnée. L'objectif de ce projet est donc la résolution du problème suivant :

$$\min_{0 \leq x \leq 1} ||Ax - \tilde{x}||_2^2 + \lambda ||x||_2^2$$

où :
A est la matrice de floutage
$\tilde{x}$ est le vecteur de pixels flouté
λ est un paramètre positif qui dépend du niveau de bruit

2 Étude de la convexité du problème

Pour qu'un problème soit convexe, il faut que
— Son domaine D soit convexe,
— $\forall x, y \in D,\ \forall \lambda \in [0; 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Le domaine est décrit par $D = \{x \mid c(x) \geq 0\}$ et est convexe si $c(x)$ est concave.
Ici : $D = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
On a donc deux inégalités $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$. Ces deux fonctions étant linéaires, elles sont à la fois concaves et convexes, donc ces deux « sous-domaines » sont convexes.
Puisque l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe, l'ensemble D est également convexe.

La norme 2 est une fonction convexe.

Preuve
En utilisant les propriétés de la norme euclidienne :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= ||\ \lambda x + (1-\lambda)y\ || \\ &\leq \lambda\ ||x|| + (1-\lambda)\ ||y|| \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{aligned}$$

On a donc bien une fonction convexe, et on peut conclure que le problème est convexe.

3 Le problème admet-il un minimum global ?

Le domaine du problème est compact (fermé et borné). De plus, la fonction est convexe sur ce domaine. On aura donc soit un ou plusieurs minima locaux à l'intérieur du domaine, soit un minimum local sur l'une de ses bornes.
Le problème étant convexe, tout minimum local est global.
On conclut ainsi que le problème admet un minimum global.

4 Conditions d'optimalité

5 Méthode de descente de coordonnées

6 Méthode du gradient

7 Comparaison des méthodes

8 Étude de la sensibilité de la solution