



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Пособия к выполнению практических работ

по дисциплине

Моделирование процессов и систем защиты информации

(наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом)

Уровень

специалитет, бакалавриат

(бакалавриат, магистратура, специалитет)

Форма
обучения

очная

(очная, очно-заочная, заочная)

Направлени
е(-я)
подготовки

10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» с учётом специфики специализации: «Создание автоматизированных систем в защищенном исполнении»; 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» с учётом специфики специализации: «Безопасность телекоммуникационных систем информационного взаимодействия»; 10.03.01 «Информационная безопасность» по профилю «Безопасность автоматизированных систем»

(код(-ы) и наименование(-я))

Институт

комплексной безопасности и специального приборостроения
(ИКБиСП)

(полное и краткое наименование)

Кафедра

Защита информации (КБ-8)

(полное и краткое наименование кафедры, реализующей дисциплину (модуль))

Лектор

к.т.н., доцент Лебедев Владимир Владимирович

(сокращенно – ученая степень, ученое звание; полностью – ФИО)

Используются в данной редакции с учебного
года

2021/22

(учебный год цифрами)

Проверено

и

согласовано

« ____ »

20__ г.

*(подпись директора Института/Филиала
с расшифровкой)*

Москва 20__ г.

Содержание

Тема 1. Методы имитационного моделирования случайных процессов	3
Практическое занятие №1	3
Тема 2. Примеры имитационного моделирования случайных процессов	25
Практическое занятие №2	25
Тема 3 Моделирование случайных процессов в стохастических системах с дискретным множеством состояний в дискретном времени с применением схем вероятностных автоматов.....	35
Практическое занятие №3	36
Тема 4. Событийно-временное моделирование случайных процессов в стохастических системах с использованием методов теории систем массового обслуживания	51
Практическое занятие №4	51
Тема 5. Событийно-вероятностное моделирование случайных процессов в стохастических системах с использованием математических схем вероятностных сетей.	72
Практическое занятие №5	72
Список литературы.....	88

Тема 1. Методы имитационного моделирования случайных процессов

Рассматриваются основные принципы и методы имитационного моделирования.

Имитационное моделирование — это частный случай математического моделирования. Существует класс объектов, для которых по различным причинам не разработаны аналитические модели, либо не разработаны методы решения полученной модели. В этом случае математическая модель заменяется имитатором или имитационной моделью.

Имитационная модель — логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

Имитационное моделирование как метод применяют, в первую очередь, в случае, когда необходимо описать поведение сложных систем, особенно стохастических систем.

Практическое занятие №1

Тема: Генерирование и моделирование случайных чисел

Цель: Изучить основные методы и алгоритмы моделирования случайных чисел.

Назначение: Случайные процессы в математических моделях представляются последовательностями случайных чисел, которые подчиняются заданным законам распределения. Метод имитационного моделирования — это технология моделирования случайных процессов в системах. Чтобы разрабатывать такие модели, или использовать готовые инструменты моделирования, надо понимать основы методов, применяемых в алгоритмах.

Принципы имитационного моделирования случайных процессов

Случайные числа находят применение при математическом

моделировании стохастических систем, в поисковых алгоритмах, системах шифрования и алгоритмах управления в системах.

Имитационное моделирование случайных процессов непосредственно связано с моделированием случайных чисел. Случайный процесс в дискретной имитационной модели представляет собой последовательность случайных чисел.

Задание случайного процесса в имитационной модели связано с генерацией некоторого количества исходных случайных процессов, статистические параметры которых известны априорно.

Вырабатываемые моделью вторичные случайные процессы представляют интерес как предмет статистического исследования.

Имитационное моделирование систем воспроизводит поведение систем, которое разворачивается в масштабах модельного или реального времени.

Моделируемое поведение реализует при запуске имитационной модели конкретный сценарий, который соответствует в установленных целях исследования рамках множеству возможных вариантов реализации сценария поведения реальной системы, модель которой исследуется.

Сам статистический эксперимент носит характер статистического испытания, т.к. требует многократного прогона модели с получением отдельного отклика, проявление которого случайно. В результате накапливается множество результатов повторных испытаний, называемое выборкой. Такой метод статистического эксперимента носит название метод Монте-Карло.

Метод Монте-Карло основан на применении генератора псевдослучайных чисел, распределённых по равномерному закону. Обычно применяют генераторы физического, табличного и алгоритмического типов.

Полученные при генерации случайные числа, распределённые по равномерному закону, используют для моделирования случайных чисел, распределённых по другим законам и имеющих другие статистические

характеристики.

Различают методы моделирования случайных чисел, распределённых по дискретным или непрерывным законам распределения.

Для чисел или событий, распределённых по дискретным законам распределения используют метод «разыгрывания жребия».

Для моделирования чисел, имеющих непрерывный закон распределения, используют различные методы: метод обратных функций, метод Неймана, метод интервальной гистограммы или аппроксимации, и многие др.

Общая схема имитационной модели по методу статистического моделирования представлена на рис. 1.

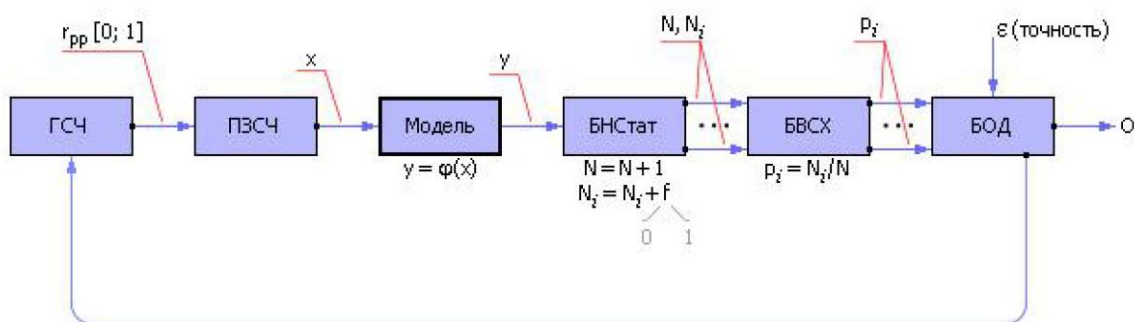


Рисунок 1 Общая схема имитационного статистического моделирования

На схеме:

ГСЧ – генераторы случайных чисел модели (в методе Монте-Карло это равномерно распределённые числа $r_{пр} \in [0,1]$).

ПЗСЧ – преобразование закона распределения с.ч. (моделирование с.ч.).

Модель – модель стохастической системы (имитационная модель случайного процесса).

БНСтат – блок накопления статистических данных.

БВСХ – блок вычисления статистических характеристик.

БОД – блок оценки данных, полученных при использовании модели.

Наблюдаемые в эксперименте значения в зависимости от их полноты характеризуют:

Генеральная совокупность – это совокупность всех мыслимых наблюдений (или всех мысленно возможных объектов интересующего нас типа, с которых «снимаются» наблюдения), которые могли бы быть произведены при данном реальном комплексе условий.

Выборка из данной генеральной совокупности — это результаты ограниченного ряда наблюдений $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ случайной величины ξ .

Статистический ансамбль – это совокупность сколь угодно большого числа одинаковых физических систем многих частиц («копий» данной стохастической системы).

Обработка данных эксперимента по полученной выборке значений сводится к определению выборочных оценок:

- Оценка выборочного (эмпирического) среднего:
- $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$, где N – объём выборки
- Оценка выборочной дисперсии:
- $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}$ – это смещённая оценка выборочной дисперсии
- Полученные на разных выборках наблюдения $V_j = \{\dots, X_i, \dots\} | i = 1, 2, \dots, N$ $j = 1, 2, \dots, M$, где $M > 1$ – количество наблюдаемых выборок, множества оценок $\{\dots, \bar{X}_j, \dots\}$ и $\{\dots, \bar{S}^2_j, \dots\}$ представляют собой случайные величины.

Кроме вычисления указанных оценок осуществляют исследование закона распределения частоты наблюдаемых значений в интервале наблюдаемых данных. Исследование производят с помощью построения гистограммы, см. рис. 2. Подтверждение соответствия наблюдаемого закона заданному или предполагаемому надо производить на основании проверки статистических гипотез с заданным уровнем доверительной вероятности,

например по критерию Пирсона.

Для построения гистограмм разбивают наблюдаемый интервал случайных значений на равные отрезки (карманы) и подсчитывают количество попаданий наблюдаемых значений в карманы: $\{..., v_k, ...\}$ $k = 1, 2, \dots, K$, где K – число карманов.



Рисунок 2. Гистограмма

При моделировании первичных случайных процессов с заданным законом распределения рассмотренные оценки применяют для проверки адекватности результатов моделирования. При получении на модели вторичных случайных процессов этими методами изучают статистические законы выходных процессов.

Объём выборки влияет на точность выборочных оценок. При увеличении объёма точность приближения оценок к теоретическим значениям растёт. Поэтому для получения заданной точности результатов моделирования устанавливают необходимый объём получаемых данных.

Генерация случайных чисел

Методом генерации случайных чисел получают числа, которые распределены равномерно и непрерывно на интервале значений $[0;1]$. Эти числа называют базовыми, их часто обозначают символически в виде

$r_{pp}(0;1)$. Все существующие алгоритмы моделирования случайных чисел опираются на использование базовых случайных чисел, что тесно связано со свойствами статистического распределения этих чисел.

Статистические характеристики закона равномерного непрерывного распределения

Функция плотности непрерывного равномерного распределения в диапазоне $x \in [a, b]$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \forall a \leq x \leq b \\ 0 & \text{вне отрезка} \end{cases}$$

Ниже на рис. 3 представлен график функции плотности.

Равномерное распределение имеет функцию вероятности:

$$PP(a, b): F(x) = \begin{cases} \int_a^{x < b} f(x) dx = \frac{x-a}{b-a} & ; x \in [a, b] \\ 0 & ; x < a \\ 1 & ; x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание: $m_x = \frac{a+b}{2}$

Дисперсия: $\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

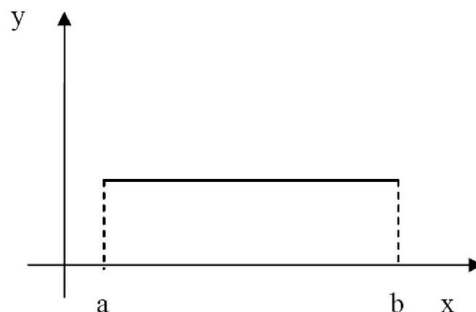


Рисунок 3 Функция плотности равномерного распределения

ГСЧ должен выдавать близкие к следующим значения выборочных

оценок статистических параметров, характерных для равномерного случайного закона для РР СЧ $\in [0,1]$:

Оценка выборочного (эмпирического) среднего:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \approx m_x = \frac{0+1}{2} = 0,5, \text{ где } N - \text{объем выборки}$$

Оценка выборочной дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1} \approx \sigma_x^2 = \frac{(1-0)^2}{12} = 0,0833 - \text{это смещённая оценка}$$

Оценка выборочного среднего квадратического отклонения:

$$S \approx \sigma_x = 0,2887$$

В общем случае качество получаемой с помощью ГСЧ выборки (последовательности) случайных чисел на соответствие требуемому закону распределения проверяют с использованием статистических критериев. Проверка осуществляется на основе доверительной оценки справедливости предложенных статистических гипотез.

Методы генерации базовых случайных чисел

Генераторы случайных чисел по способу получения чисел делятся на:

- 1) физические (аппаратные);
- 2) табличные;
- 3) алгоритмические.

При аппаратном способе случайные числа вырабатываются электронной приставкой (генератор, датчик случайных чисел).

При табличном способе генерации случайные числа оформлены в виде таблицы, которая хранится в оперативной памяти или на внешнем носителе, см. рис. 4. Получение случайных чисел осуществляется выбором цифр при обходе таблицы заданным способом.

При применении алгоритмических способов случайные числа генерируются на компьютере по специальным алгоритмам. На рис. 5 представлены некоторые алгоритмические битовые способы получения СЧ РР(0,1). Алгоритмические способы генерируют псевдослучайные

последовательности, т.к. используют рекуррентные алгоритмы.

Случайные цифры	Равномерно распределенные от 0 до 1 случайные числа
9 2 9 2 0 4 2 6	0.929
9 5 7 3 4 9 0 3	0.204
5 9 1 6 6 5 7 6	0.269
...	...

Рисунок 4 Табличный способ генерации базовых СЧ

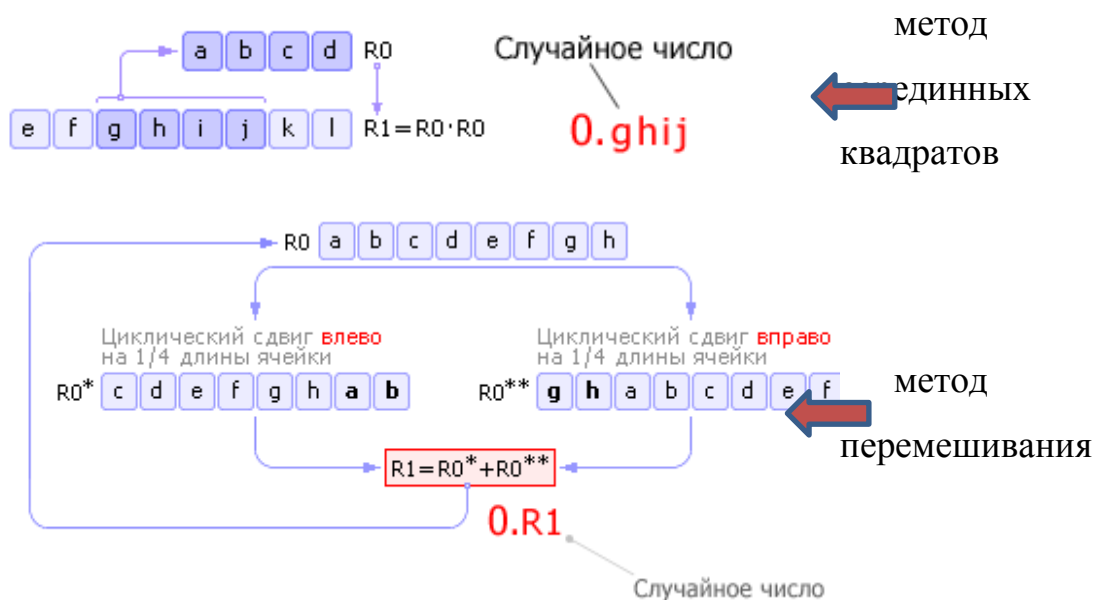


Рис. 5 Алгоритмические битовые способы генерации базовых СЧ

Линейный конгруэнтный метод

В линейном конгруэнтном методе случайное число вычисляется по следующей рекуррентной формуле: $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$, где m — модуль ($m > 0$), a — множитель ($0 \leq a < m$), c — приращение ($0 \leq c < m$), X_0 — начальное значение, которое также иногда называют зерном (от англ. seed) ($0 \leq X_0 < m$). Операция $a \bmod m$ означает вычисление остатка от деления целого числа a на целое число m .

По данной схеме вычисляется последовательность значений остатков целочисленного деления, т.е. множество кольца простых вычетов. Схема определяет псевдослучайную последовательность чисел.

Метод дает при удачно подобранных коэффициентах и больших m достаточно непредсказуемые псевдослучайные числа, но не обладает криптографической стойкостью, так как, зная четыре подряд идущих числа, криптоаналитик может составить систему уравнений, из которой можно найти a , c и m .

Генератор псевдослучайных чисел на основе алгоритма BBS (от англ. Algorithm Blum — Blum — Shub, авт. — Ленор Блум, Мануэль Блум и Майкл Шуб, — по русск. алг. Блюма-Блюма-Шуба).

В этом алгоритме вычисляется множество кольца квадратичных вычетов. Выбираются два больших простых числа p и q . Числа p и q должны быть оба сравнимы с 3 по модулю 4, то есть при делении p и q на 4 должен получаться одинаковый остаток 3. Далее вычисляется число $M = p \cdot q$, называемое целым числом Блюма. Затем выбирается другое случайное целое число x , взаимно простое (то есть не имеющее общих делителей, кроме единицы) с M .

Вычисляем $x_0 = x^2 \cdot \text{mod} M$. x_0 называется стартовым числом генератора.

На каждом $(n + 1)$ -м шаге работы генератора вычисляется $x_{n+1} = x_n^2 \cdot \text{mod} M$. Результатом $(n + 1)$ -го шага является один (обычно младший) бит числа x_{n+1} .

Иногда в качестве результата принимают бит чётности, то есть количество единиц в двоичном представлении элемента. Если количество единиц в записи числа четное — бит четности принимается равным 0, нечетное — бит четности принимается равным 1.

Моделирование случайных чисел

Общая схема моделирования случайных чисел представлена на рис. 6.

Эта схема раскрывает алгоритм работы блока ПЗСЧ (преобразование закона распределения случайных чисел), входящего в общую схему имитационного статистического моделирования, см. выше рис. 1.

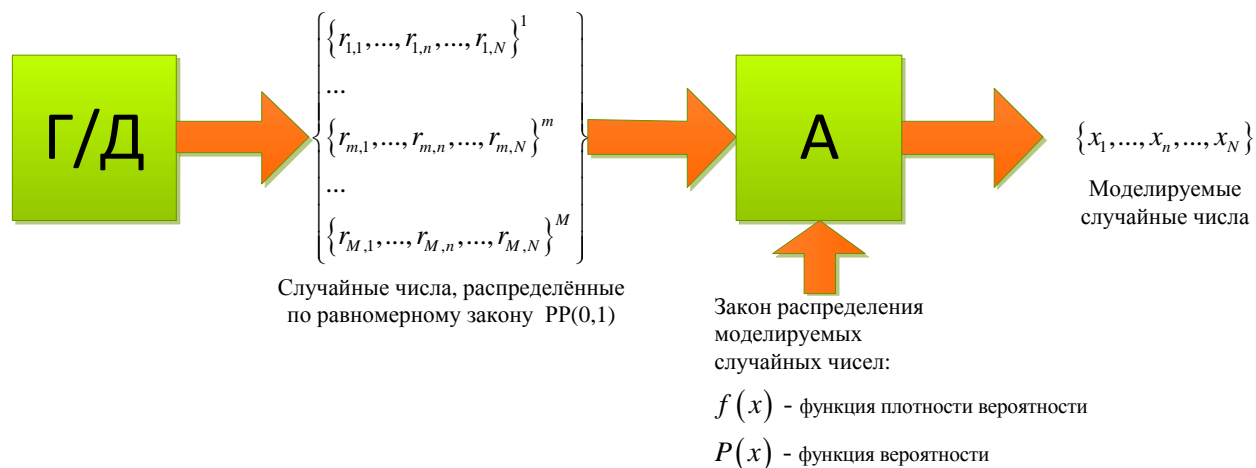


Рисунок 6 Общая схема моделирования случайных чисел

На схеме:

Г/Д – генератор (датчик) случайных чисел, распределённых по равномерному закону;

А – алгоритм, воспроизводящий метод моделирования случайных чисел, требуемых при решении задачи.

Различают моделирование с.ч., распределённых по дискретному и по непрерывному закону.

Дискретные распределения моделируют методом «розыгрыша жребия».

С помощью случайных равномерно распределённых чисел (базовых случайных чисел) можно моделировать случайные события, составляющие конечные или счётные множества исходов и наступающие с заданной вероятностью, – **дискретные распределения**.

Эту процедуру называют еще «**реализацией жребия**».

Пусть событие А наступает с вероятностью p , тогда процедура моделирования этого события с помощью равномерно распределённых в

интервале $(0,1)$ случайных чисел выглядит следующим образом:

1) выбирается очередное сгенерированное равномерно распределённое случайное число r_{ppi}

2) проверкой неравенства $r_{ppi} \leq p$ (1)

устанавливается принадлежность этого числа отрезку $[0, p]$.

Если число r_{ppi} удовлетворяет неравенству (1), говорят, что событие A наступило, в противном случае — не наступило.

Общая схема алгоритма выбора «жеребья» состоит в реализации следующих операций:

1. Разбивают отрезок $[0;1]$ на неперекрывающиеся отрезки, длина которых равна вероятностям элементарных исходов дискретного распределения:

$[0, p_1); [p_1, (p_1 + p_2)); \dots; [(p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}), (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} + p_k)); \dots; [(p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1}), (p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1} + p_N))$, причём $p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1} + p_N = 1$ как сумма всех элементарных исходов данного выбора, где $p_1; p_2; \dots; p_{N-1}; p_N$ — вероятности дискретного распределения.

Длина каждого отрезка, как легко видеть, равна вероятности выбора:

$[0, p_1) \rightarrow p_1; [p_1, (p_1 + p_2)) \rightarrow p_2; \dots; [(p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}), (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} + p_k)) \rightarrow p_k; [(p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1}), (p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1} + p_N)) \rightarrow p_N$.

2. Генерируют случайное число r , распределённое непрерывно по равномерному закону на отрезке $r_{pp} \in [0; 1]$, т.е. базовое случайное число, и затем определяем путём перебора, какому отрезку принадлежит это число по схеме:

Цикл по $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ с шагом 1
 $\forall r \in [0, p_1) \Rightarrow \text{выбор } i \rightarrow 1;$
 $\forall r \in [p_1, (p_1 + p_2)) \Rightarrow \text{выбор } i \rightarrow 2;$
 $\forall r \in [(p_1 + p_2), (p_1 + p_2 + p_3)) \Rightarrow \text{выбор } i \rightarrow 3;$
 \dots

$\forall r \in [(p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}), (p_1 + p_2 + \dots + p_k)) \Rightarrow \text{выбор } i \rightarrow k$
 $\in \{1, 2, \dots, N\};$

...

$\forall r \in [(p_1 + p_2 + \dots + p_{N-1}), (p_1 + p_2 + \dots + p_N)) \Rightarrow \text{выбор } i \rightarrow N;$

Выход из цикла перебора происходит по достижении актуального выбора.

Пример реализации метода «жребия» представлен в таблице 1.

Графическая схема алгоритма для реализации метода моделирования дискретного распределения, имеющего три исхода, представлены на рис. 7.

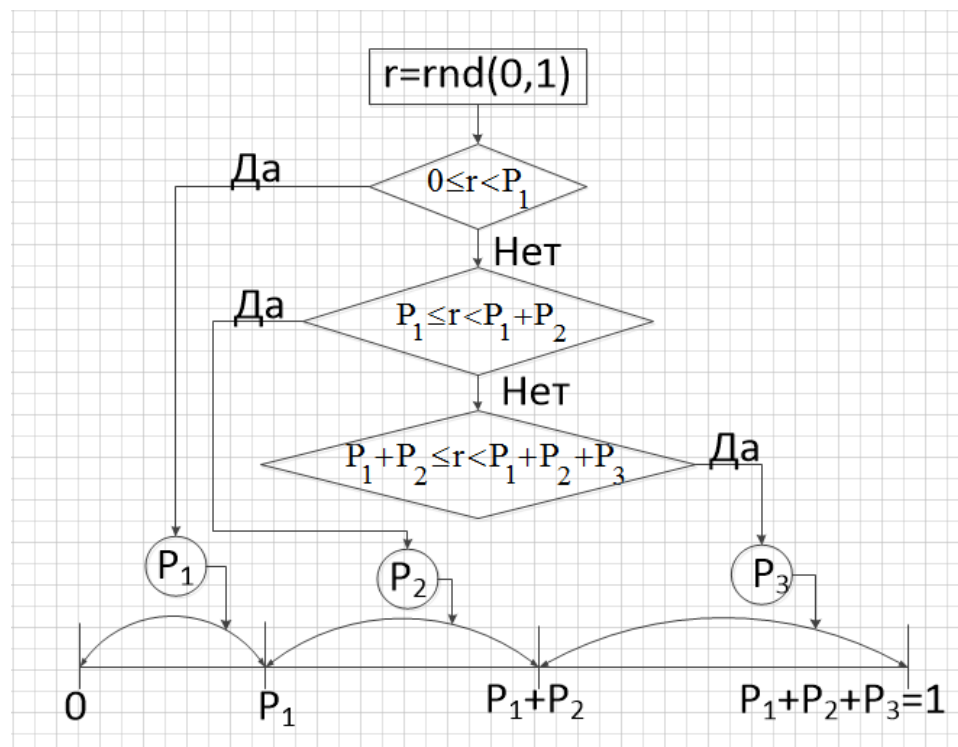


Рисунок 7

Разыгрывается 10 исходов случайной реализации процесса в соответствии с заданным в таблице законом дискретного распределения.

Для этого получают (генерируют) порождающую последовательность равномерно распределённой величины $PP(0,1): \{r\}$.

Затем, пользуясь методом «жребия», получаем выходную последовательность случайных исходов моделируемого процесса.

Таблица 1

Г/Д: [PP(0,1)]		$\{r\}$ $= \{0,26; 0,28; 0,90; 0,74; 0,44; 0,77; 0,65; 0,80; 0,14; 0,48\}$		
Закон распределения:	Исход	1	2	3
	Вероятность	0,5	0,2	0,3
Разбиение отрезка $[0;1]$ под выбор и условие выбора по жребию		$0 \leq r < 0,5$	$0,5 \leq r < 0,5 + 0,2 = 0,7$	$0,7 \leq r \leq 0,7 + 0,3 = 1$
А: Метод «жребия»		$\{x\} = \{1; 1; 3; 3; 1; 3; 2; 3; 1; 1\}$		

Количество исходов связано с числом чисел в $\{r\}$.

Перечень методов **моделирования непрерывных распределений** обширен:

I. Универсальные методы:

- 1) Метод обратных функций
- 2) Метод ступенчатой аппроксимации
- 3) Метод усечения

и др.

II. Специальные методы применяют для моделирования отдельных видов распределений.

Методы моделирования непрерывно распределённых случайных величин, связанных с бесконечным множеством случайных исходов.

Метод обратных функций

Требуется получить случайные числа y_i , являющиеся возможными значениями случайной величины η с законом распределения, заданным функцией плотности $f(y)$ или функцией вероятности $F(y): f(y)=dF(y)/dy$; $F(y) = \int_{-\infty}^y f(y)dy$. Случайная величина $F(\eta)=\xi$, являющаяся значением интеграла от плотности распределения $f(y)$: $F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} f(y)dy = \xi$, и определяющая величину вероятности нахождения значения случайной величины $y \leq \eta$, распределена равномерно в интервале $(0,1)$. Схему метода см. на рис. 8. Для моделирования этим методом надо получить **формулу обратной функции**, решив уравнение.

Решение интегрального уравнения: $\int_{-\infty}^{\eta} f(y)dy = F(\eta) = \xi$ аналитически даёт формулу обратной функции $y = \eta = F^{-1}(\xi)$, а численное решение $\eta(\xi)$ задаёт численный алгоритм. Корень решения есть искомое, моделируемое по заданному закону число. Основанный на этом решении алгоритм моделирования случайных чисел называется **методом обратных функций**.

Алгоритм метода: генерируем базовое случайное число ГСЧ $r \in [0,1]$; подставляем это число в решение уравнения $r \rightarrow \xi; Y \rightarrow y = \eta = F^{-1}(\xi)$. Искомыми случайными числами являются $y = \eta = F^{-1}(\xi) \in Y$. Практическое применение метод находит, если имеется аналитическая формула обратной функции.

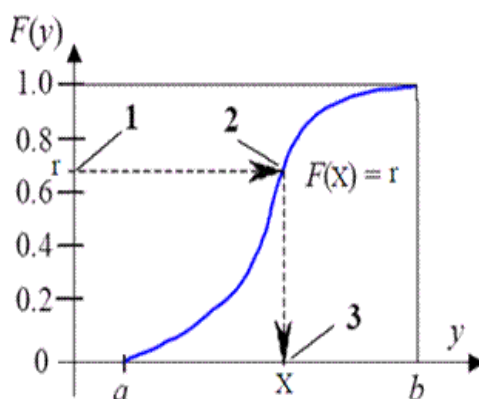


Рисунок 8

Метод усечения Неймана

Можно разыграть случайное число, непрерывно распределённое по заданному закону **методом усечения Неймана**.

Алгоритм метода:

1. Выбираем **функцию плотности вероятности** $f(y)$ для описания заданного в моделировании закона распределения.
2. Ограничим интервал распределения (эта процедура называется усечением): сделаем его конечным, если он бесконечен. Отсечение крайних диапазонов производят, если есть возможность пренебречь вероятностями

наблюдения с.ч. в них.

Пусть x – случайная величина, распределенная на усечённом интервале (a, b) или $[a; b]$, а плотность вероятности сверху ограничена значением в моде M_0 .

3. Заключаем функцию на отрезке усечения в прямоугольник $a - V_2 - V_3 - b - a$, см. рис. 9.

4. Генерируем два числа: r_1, r_2 – базовые случайные числа, представляющие значения равномерно-распределенной в интервале $[0; 1]$ случайной величины r .

5. На плоскости $f(y)$ и y отложим случайную точку $(\cdot)N$ с координатами (α, β) : $N(\alpha, \beta)$. Случайные значения координат α и β точки моделируем по равномерному закону $\alpha = \text{PP}(a, b)$ и $\beta = \text{PP}(0, M_0)$ методом обратных функций. Формулы обратных функций: координата на оси аргументов (моделируемых чисел, горизонтальная) – $\alpha = a + r_1 \cdot (b - a)$ и координата на оси значений функции плотности вероятности (вертикальная) – $\beta = r_2 \cdot M_0$.

Точка находится внутри прямоугольника, см. рис. 9.

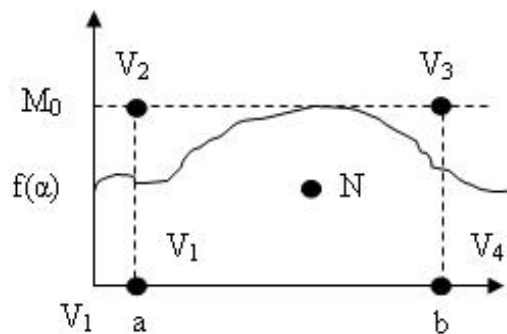


Рисунок 9

6. Если $(\cdot)N$ лежит под кривой, т.е. $\beta < f(\alpha)$, то разыгранное значение x считается равным α : $X \rightarrow \alpha$.

Если $(\cdot)N$ лежит над кривой, то пара r_1 и r_2 отбрасывается и генерируется новая пара значений r_3 и r_4 , и т.д.

Метод *ступенчатой аппроксимации*.

Схема метода показана на рис. 10.

Метод основан на комбинировании двух алгоритмов:

Метод жребия используют для выбора интервала. Разметка метода производится по ступенчатой гистограмме.

В выбранном интервале случайное число определяют методом обратных функций по равномерному распределению: $\eta = x_i + r(x_{i+1} - x_i)$; $r = \text{ГСЧpp}(0,1)$.

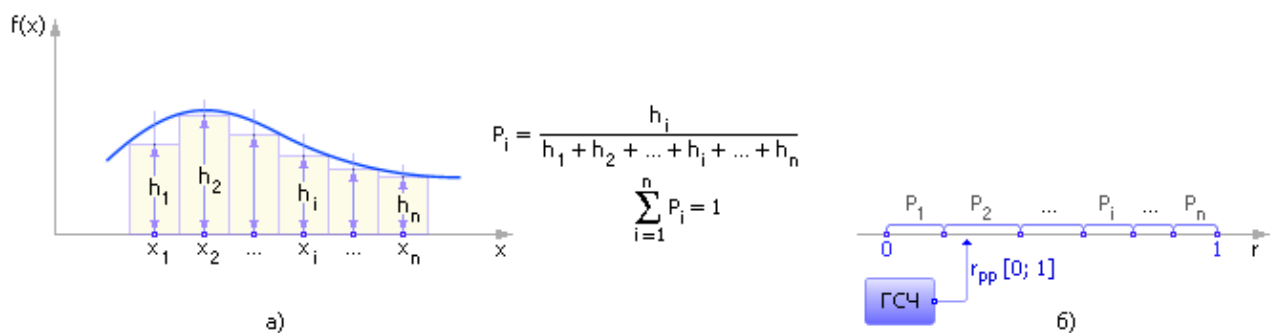


Рисунок 10

В ряде случаев случайные числа, распределенные по некоторым видам непрерывных распределений, моделируют, используя не общие, а специальные алгоритмы. Для примера рассмотрим два способа эффективного моделирования с.ч., распределённых непрерывно по нормальному закону.

Моделирование случайных чисел, распределённых по нормальному закону

Методы моделирования случайных чисел, распределённых по нормальному закону:

- 1) Метод генерации нормально распределенных чисел, использующий *центральную предельную теорему*.
- 2) Метод **Бокса-Мюллера**.

Плотность нормального распределения (функция Гаусса $f(x) =$

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$) представлена на рис. 11.

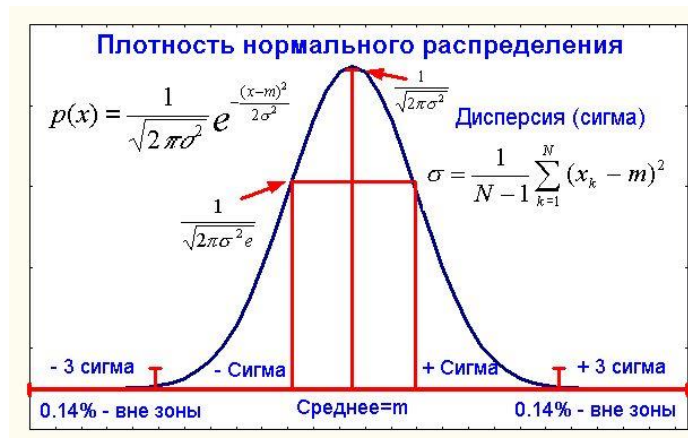


Рисунок 11

Метод моделирования нормально распределенных чисел, использующий **центральную предельную теорему** работает по алгоритму:

Сложим n случайных чисел, используя стандартный ГСЧ pp [0; 1]:

$$v = \sum_{i=1}^n r_i$$

Согласно ЦПТ числа v образуют ряд значений, распределенных по нормальному закону: $v \in V = N(m_V, \sigma_V)$. Эти числа тем лучше описывают нормальный закон, чем больше параметр n . На практике n берут равными 6 или 12. Заметим, что закон распределения чисел V имеет математическое ожидание $m_V = n/2$, $\sigma_V = \sqrt{\frac{n}{12}}$. Поэтому он является смещенным относительно заданного произвольного.

С помощью формулы $z = (v - m_V) / \sigma_V$ нормализуем этот ряд. Получим нормализованный закон нормального распределения чисел Z . То есть $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$.

Формулой (сдвиг на m_x и масштабирование на σ_x) преобразуем ряд Z в ряд X : $x = z \cdot \sigma_x + m_x$.

Метод Мюллера использует формулы: $Z = \sqrt{-2 \ln(r_1)} \cos(2\pi r_2)$, где r_1 и r_2 — случайные числа из ГСЧ pp [0; 1].

$Z = \sqrt{-2\ln(r_1)} \sin(2\pi r_2)$, где r_1 и r_2 — случайные числа из ГСЧРР $[0; 1]$.

Числа Z — распределены непрерывно по нормализованному нормальному закону распределения.

Формулой (сдвиг на m_x и масштабирование на σ_x) преобразуем ряд Z в ряд X : $x = z \cdot \sigma_x + m_x$.

Оценка качества получаемых случайных чисел **на соответствие заданным законам распределения** производится путем **определения выборочных оценок** и последующего их **сравнения с теоретическими параметрами распределения**.

Выборочные:

Среднее выборочное: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

Выборочная дисперсия: $S_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

Смещенная выборочная дисперсия (уточненная оценка):

$$S_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение: S_{n-1}

Кроме вышерассмотренных оценок необходимо проводить **исследование распределения частот наблюдаемых значений по интервалу наблюдаемых значений**. Это исследование можно проводить с помощью построения гистограмм, или проверкой статистических гипотез, например, по критерию Пирсона.

Задания

Результаты оформить в формате документа:

Описать методические основы

Представить условие задачи

Описать шаги решения

Представить результаты

Сделать выводы

Задание 1:

Смоделировать выборку (последовательность не менее 20-ти) равномерно распределённых случайных чисел – СЧ $PP(0,1)$ любым способом.

Проверить качество полученного распределения.

Задание 2:

Промоделировать методом ЦПТ и Бокса-Мюллера случайные числа (последовательность не менее 20-ти), распределённые по нормальному закону, используя компьютерный ГСЧ $pp(0,1)$ и заданные значения m_x и σ_x (значения выбираем произвольно).

Сравнить выборочные статистические характеристики с теоретическими характеристиками распределения.

Задание 3:

Смоделировать методом усечения – Неймана случайные числа (последовательность не менее 20-ти) по закону распределения, заданного в ограниченной области $y \in [a, b]$ плотностью распределения:

$$f(y) = \frac{3\sqrt{A}}{4C\sqrt{C}} \cdot (C - A(y - m)^2) =, \text{ где } A > 0, m > 0, C > 0$$
$$= \frac{6}{4 \cdot (b - a)^3} \cdot ((b - a)^2 - 4 \cdot (y - m)^2) = \frac{6}{4 \cdot (b - a)} \cdot \left(1 - 4 \cdot \left(\frac{y - m}{b - a}\right)^2\right)$$

Задать числа A, C, m ; вычислить $a = m - \sqrt{\frac{C}{A}}, b = m + \sqrt{\frac{C}{A}}$ или, задав a и b , вычислить $m = \frac{a+b}{2}$ по второму варианту представления функции.

Сравнить выборочные статистические характеристики с характеристиками распределения.

Математическое ожидание: $m_y = m$

Дисперсия: $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - m_y^2$, где средний квадрат случайной величины:

$$\frac{C}{y^2} = \frac{20m^2 + 4\frac{C}{A}}{20} = \frac{20m^2 + (b-a)^2}{20}$$

Задание 4:

Смоделировать методом обратных функций случайные числа (последовательность не менее 20-ти), распределённые по закону Рэлея.

Функция плотности вероятности:

$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \forall x \in [0, \infty)$. Параметр σ выбираем произвольно (например, берем с графика)

Функция вероятности:

$$F(X < x) = \int_0^x f(x)dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \in [0,1] \forall x \in [0, \infty)$$

Сравнить выборочные статистические характеристики с характеристиками распределения, см. слайды 15,5-6,22.

Математическое ожидание: $m_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$

Дисперсия: $\sigma_x^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2$

Распределение Рэлея: Функция плотности и функция вероятности, см. рис. 12 ниже.

Задание 5:

Смоделировать методом «розыгрыша жребия» случайные числа (последовательность не менее 20-ти), распределённые по дискретному геометрическому закону.

Член последовательности распределения вероятностей по геометрическому закону описывается по формуле:

$P_k = q^{k-1}p \forall k = 1, 2, \dots, n, \dots \in [1, \infty)$, где

$q, p \in [0; 1]$ – параметры распределения, причём $q + p = 1$, а

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$$

Математическое ожидание $m_K = \frac{1}{p}$

Дисперсия $\sigma_K^2 = \frac{q}{p^2}$

Частичная сумма: $\sum_{j=1}^k P_j = P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1 - q^k$ – используется при разметке интервала $(0; 1)$ в методе жребия, причём $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k P_j = P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1 - q^k = 1$. При моделировании методом жребия проверяем попадание базового случайного числа $r = PP(0; 1)$ в отрезок разбиения: $1 - q^{k-1} < r < 1 - q^k$. При попадании случайным исходом будет k .

Вычислить выборочные характеристики и сравнить с теоретическими.

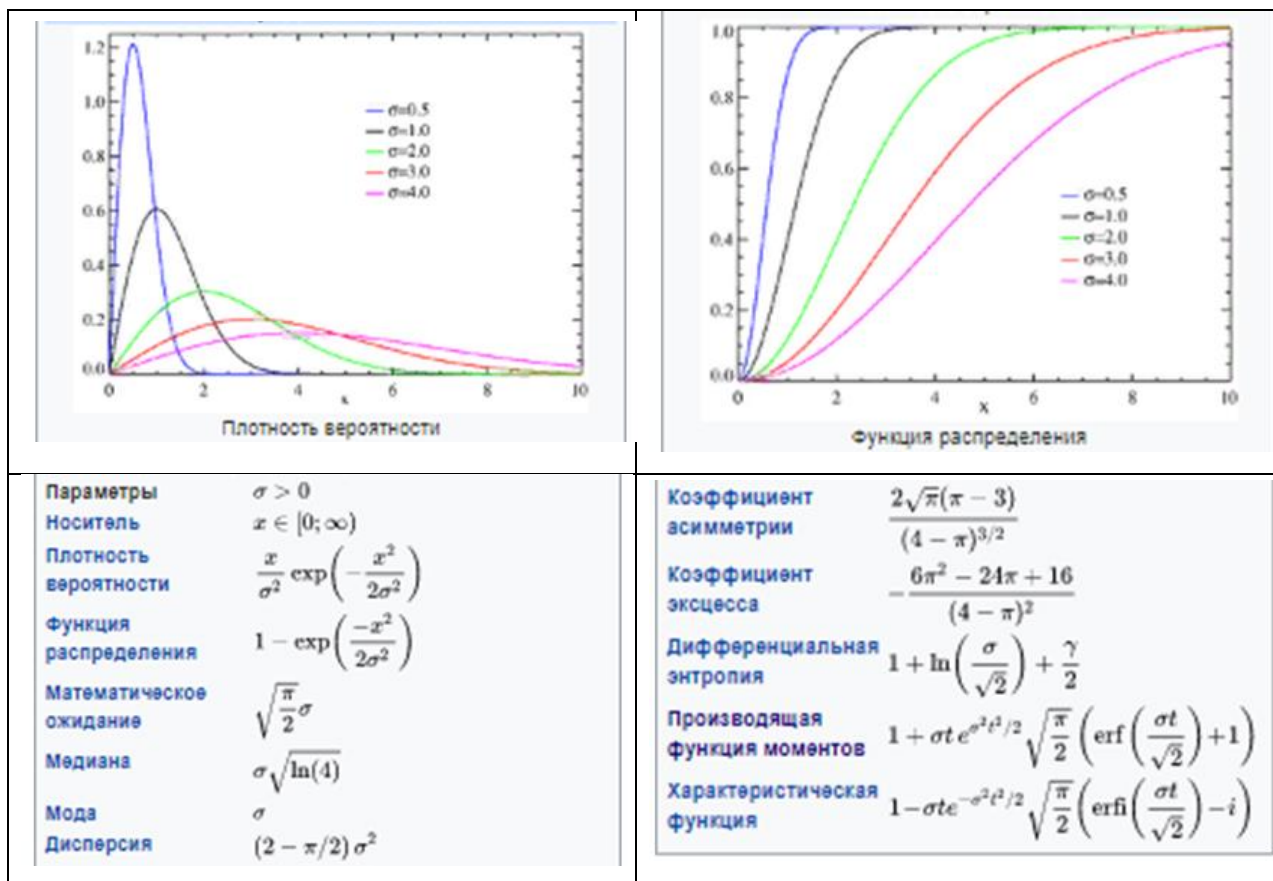


Рисунок 12 Распределение Рэлея

Тема 2. Примеры имитационного моделирования случайных процессов

Рассматриваются вопросы моделирования случайных процессов сигналов в каналах связи ИС.

Сигнал представляет физический процесс. В каналах связи ИС используются электромагнитные процессы передачи сигналов.

Сигнал включает в себя две случайные составляющие: информационную и процесс помехи или шум.

Практическое занятие №2

Тема: Моделирование случайного сигнала в канале связи

Цель: Освоить и закрепить навыки моделирования случайных процессов на примере конкретной задачи – моделирование отсчётов случайного сигнала

Назначение: Случайный сигнал формируется как суперпозиция информационного сигнала и комплексной случайной помехи в канале беспроводной радиосвязи. Моделирование таких задач актуально при разработке каналов связи, аппаратуры цифровой обработки сигналов.

Математическое моделирование сигналов имеет большое значение при проектировании систем цифровой обработки сигналов с целью выбора оптимальных алгоритмов работы цифровых устройств, обеспечивающих обработку сигналов на надлежащем уровне качества.

В процессе передачи сигналы претерпевают различные изменения, связанные с преобразованиями и влиянием помех.

Важной задачей является обеспечение требуемого качества передачи, которое определяется вероятностью возникновения ошибки.

В связи с этим на принимающей стороне возникает задача обнаружения и различения сигнала, детектирования и демодуляции с определением его информационной составляющей с минимальным уровнем искажений или ошибок.

Исследование этих процессов на этапе проектирования осуществляют методом математического моделирования.

Сигнал на входе принимающего устройства можно в общем виде представить в виде смеси полезного сигнала и сигнала аддитивной помехи:

$$r(t) = s(t, \lambda) + y(t), \quad t \in [0; T]$$

Появление на входе в приёмное устройство полезного сигнала представляет, в общем случае, случайный процесс, имеющий дискретное или непрерывное распределение.

Случайный сигнал представляет помеха $y(t)$.

Наблюдаемая реализация $r(t)$, действующая на входе приемника обнаружения, представляется в виде:

$$r(t) = \theta \cdot s(t, \lambda) + y(t), t \in [0; T], \text{ где}$$

$\theta = \{0, 1\}$ – параметр обнаружения, принимающий значение 1 при наличии в смеси $r(t)$ сигнала $s(t, \lambda)$, и 0 – при отсутствии сигнала;

Сигнал $s(t, \lambda)$ представляет детерминированную функцию времени t и параметров $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, которые могут быть случайными величинами или процессами;

$y(t)$ – аддитивная помеха;

T – длительность интервала наблюдения.

Радиоприемное устройство различения в общем (многоальтернативном) случае выносит решение о наличии в смеси $r(t)$ одного из k возможных сигналов $s_i(t, \lambda)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Для $k = 2$ (задача бинарного различения) смесь $r(t)$ можно представить в виде:

$$r(t) = \theta \cdot s_1(t, \lambda) + (1 - \theta) \cdot s_2(t, \lambda) + y(t), \quad t \in [0; T]$$

Определение параметра θ , по значению которого принимают решение о наличии, или отсутствии сигнала в смеси, или решение о различении одного из двух сигналов, производится на основании проверки статистических гипотез. Главный принцип при принятии решения о наличии или не наличии сигнала в смеси – это минимизация рисков принятия

ошибочных решений.

В качестве методов различения могут быть применены разные методы дискриминантной классификации: метод минимизации функции правдоподобия (байесовский классификатор); метод опорных векторов; метод скрытых марковских цепей; нейронные сети, нейронные сети со скрытыми марковскими цепями, нейро-нечёткие сети и т.п.

При оценивании параметра λ сигнала $s(t, \lambda)$ радиоприемное устройство формирует решение $\lambda^*[r(t)]$ в конце интервала наблюдения $t = T$ о значении параметра. Параметр λ считается случайной величиной с заданной априорной плотностью распределения вероятности $W_{Pr}(\lambda)$. Смесь $r(t)$ на входе приёмника записывается в виде

$$r(t) = s(t, \lambda) + y(t), t \in [0; T]$$

Установление значения параметра λ сигнала может производиться прямым измерением, если удастся отфильтровать полезный сигнал из смеси, а затем проанализировать его методами операторного анализа, методами дискриминантной классификации, применением методов корреляционного анализа.

Помехи и шумы

В зависимости от характера изменения во времени и методов рассмотрения случайные процессы можно разделить на три группы: импульсные, флуктуационные и специального вида.

Импульсные процессы представляют собой последовательность одиночных импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через случайные промежутки времени.

Как правило, реализации импульсного процесса представляют собой кусочно-разрывные функции времени.

К импульсным процессам можно отнести искусственно создаваемые импульсные помехи, а также некоторые виды атмосферных помех (например, грозовые разряды) и помех от электрических аппаратов.

Флуктуационные процессы представляют результирующий эффект очень большого числа часто следующих элементарных импульсов, налагающихся друг на друга.

Реализации флуктуационного процесса имеют вид непрерывных функций времени.

К числу флуктуационных процессов относятся тепловые и космические шумы, шумы полупроводниковых приборов и др.

Случайные процессы специального вида могут быть весьма разнообразными. Можно привести следующий пример. Пусть гармоническое колебание $A \cos(\omega t + \phi)$ модулируется по амплитуде флуктуационным напряжением, а по фазе – случайными импульсами. Тогда получим случайный процесс специального вида $A(t) \cos(\omega t + \phi(t))$.

Помехи бывают флуктуационные, т.е. распределенные равномерно по спектру, и сосредоточенные, имеющие спектральную концентрацию на спектре сигнала или на временной оси. Помехи как математические модели делят на виды: аддитивные, мультипликативные, комплексные и специальные.

Аддитивная помеха описывается моделью:

$$z(t) = \mu(t) + n(t)$$

, где $z(t)$ – принимаемый сигнал, $\mu(t)$ – информационный сигнал, а $n(t)$ – случайный процесс помехи.

Мультипликативная помеха описывается моделью:

$$z(t) = k(t) \cdot \mu(t)$$

, где $z(t)$ – принимаемый сигнал, $\mu(t)$ – информационный сигнал, а $k(t)$ – случайный процесс помехи.

Комплексная мультипликативно-аддитивная помеха описывается моделью:

$$z(t) = k(t) \cdot \mu(t) + n(t)$$

, где $z(t)$ – принимаемый сигнал, $\mu(t)$ – информационный сигнал, $n(t)$ – случайный процесс аддитивной помехи, а $k(t)$ – случайный процесс

мультипликативной помехи.

Моделирование сигнала с помехой специального вида

Достаточно адекватной моделью узкополосных радиосигналов, излучаемых антенной, является:

$$s(t) = A(t) \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \psi(t)]$$

Здесь функции $A(t)$ и $\psi(t)$ отображают законы амплитудной и фазовой модуляции. Это медленно изменяющиеся функции по сравнению с колебанием несущей частоты $\cos(\omega_0 \cdot t)$. Ширина $\Delta\omega$ спектра сигнала $s(t)$ много меньше несущей частоты ω_0 .

В силу действия помех в канале радиосвязи сигнал, поступающий на вход приёмного устройства, будет представлен моделью с комплексной помехой специального вида:

$$s(t, \bar{\lambda}) = b(t) \cdot A(t - \tau) \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \psi(t - \tau) - \varphi(t)], \text{ где}$$

множитель $b(t)$ характеризует амплитудные замирания во многих системах радиосвязи;

τ – задержка;

$\varphi(t)$ – фазовый сдвиг по несущей частоте;

$\bar{\lambda} = \{b, \tau, \varphi\}$ -параметры сигнала.

Модель сигнала достаточно полно описывает флуктуации отраженного сигнала в радиолокации и замирания в системах радиосвязи. Совместная плотность распределения вероятности (ПРВ) случайных величин b и φ часто принимается в виде:

$$W(b, \varphi) = \begin{cases} \frac{b}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}, & b \geq 0, |\varphi| \leq \pi \\ 0, & \text{для других } b \text{ и } \varphi \end{cases}$$

Формула представляет совместное распределение коэффициента замирания и фазы в канале радиосвязи в условиях многолучевого приёма различных отражённых копий сигнала. Коэффициент замирания b распределяется по закону Рэлея для положительных вещественных значений

$b \geq 0$, а фаза φ – по равномерному непрерывному закону на отрезке $[-\pi; \pi]$. Периоды квазистационарности или периоды замирания T_b распределены по непрерывному равномерному закону на отрезке $[1; 5]$ сек. Параметр временной дисперсии сигналов в каналах многолучевого приёма – задержка сигнала τ имеет нормальное распределение с $m_\tau = 0,26$ мкс [$1\text{мкс} = 10^{-6}\text{с}$] и $\sigma_\tau = 0,37\text{мкс}$.

В законе Рэлея для плотности $W(b, \varphi)$ принимаем $\sigma = 0,8$, тогда среднее значение параметра замирания $m_b = 1,25\sigma = 1,0$, $\sigma^2 = 0,64$.

Считаем, что в каждом периоде квазистационарности параметры сигнала $\lambda = \{b, \tau, \varphi\}$ стабильны, но меняются скачком в начале следующего периода.

Рассматривается упрощённая модель сигнала с помехой специального вида:

$$y(t) = b \cdot A \cos(\omega_0 t + \varphi), \text{ где}$$

b – случайный коэффициент замирания

φ – случайная фаза сигнала

Таким образом, случайный процесс сигнала в нашей модели формируется из трех независимых случайных процессов: процесс случайных по длительности периодов замирания сигнала $T_b(t)$, которые следуют, сменяя друг друга, ступенчатый случайный процесс коэффициента замирания $b(t)$, ступенчатый случайный процесс фазы сигнала $\varphi(t)$.

Задание

Смоделировать случайный сигнал на протяжении 50-ти периодов замирания, вычислить отсчёты сигнала и построить график отсчётов сигнала.

Последовательность решения задачи.

1. Генерируем последовательность $K = 50$ чисел $\{... T_{b_k} ...\}$ по формуле

$T_{b_k} = 1 + (5 - 1)r_k$, где r_k - случайное число, распределённое по равномерному закону в диапазоне $r_k \in [0,1]$; $k = \{1,2, \dots, K\}$.

2. Вычисляем шкалу моментов изменения случайных параметров сигнала (в промежутках сигнал имеет стабильные параметры) по рекуррентным формулам:

$$t_0 = 0; t_1 = t_0 + T_{b_1}; \dots; t_k = t_{k-1} + T_{b_k}; \dots; t_K = t_{K-1} + T_{b_K}$$

3. Генерируем последовательность $K = 50$ случайных значений фаз сигнала φ_k по формуле $\varphi_k = -\pi + 2\pi r_k$, где r_k - случайное число, распределённое по равномерному закону в диапазоне $r_k \in [0,1]$; $k = \{1,2, \dots, K\}$.

4. Генерируем последовательность $K = 50$ случайных значений параметров замирования сигнала b_k , используя метод обратных функций или численный метод усечения Неймана.

Полученные параметры случайного процесса сигнала представляют собой кусочно-ступенчатые функции, см. рис. 13-15.

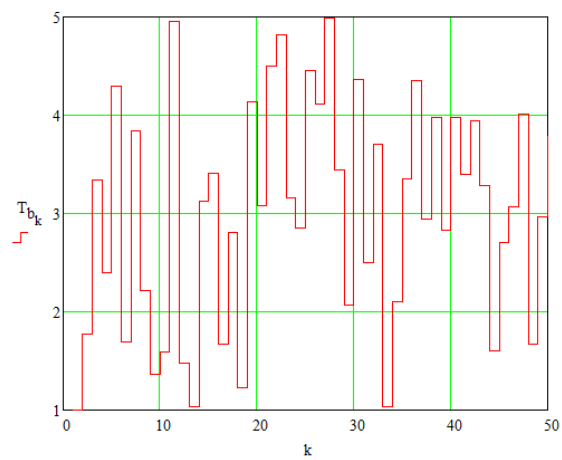


Рисунок 13 Ступенчатая функция периодов замирания

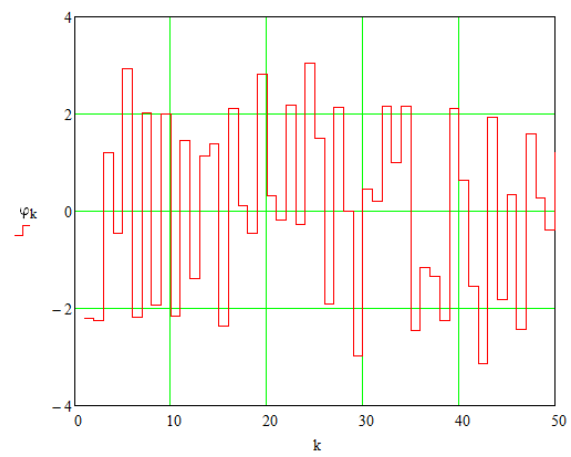


Рисунок 14 Ступенчатая функция фаз сигнала

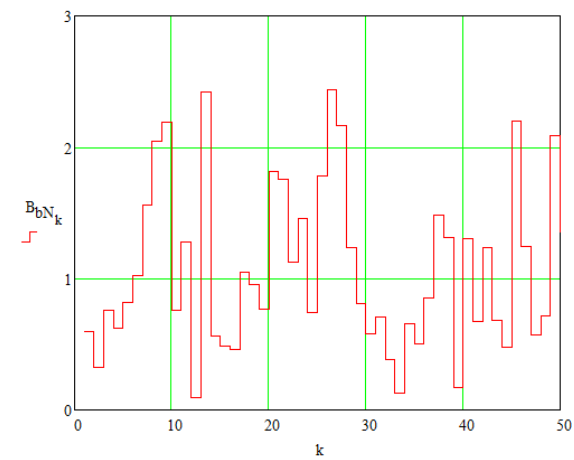


Рисунок 15 Ступенчатая функция коэффициентов замирания

5. Рассчитаем отсчёты сигнала, сделанные через равные промежутки времени $\Delta t = \frac{t_K - t_0}{N_{\text{отсч}}}$, задав количество отсчётов $N_{\text{отсч}}$.

Текущее значение момента отсчёта $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta t$, причём $\tau_0 = t_0$.

Определяем, в какой интервал квазистационарности попадают текущий момент отсчёта, по условию:

$$t_{K-1} \leq \tau_k \leq t_K, \text{ где } K \in \{1, 2, \dots, 50\}, \text{ а } k \in \{1, 2, \dots, 200\}.$$

При невыполнении условия, меняем номер интервала $K = K + 1$.

При выполнении условия вычисляем значение отсчёта сигнала по формуле $s_k = b_K A \cos(\omega \tau_k + \varphi_K)$, см. рис. 16.

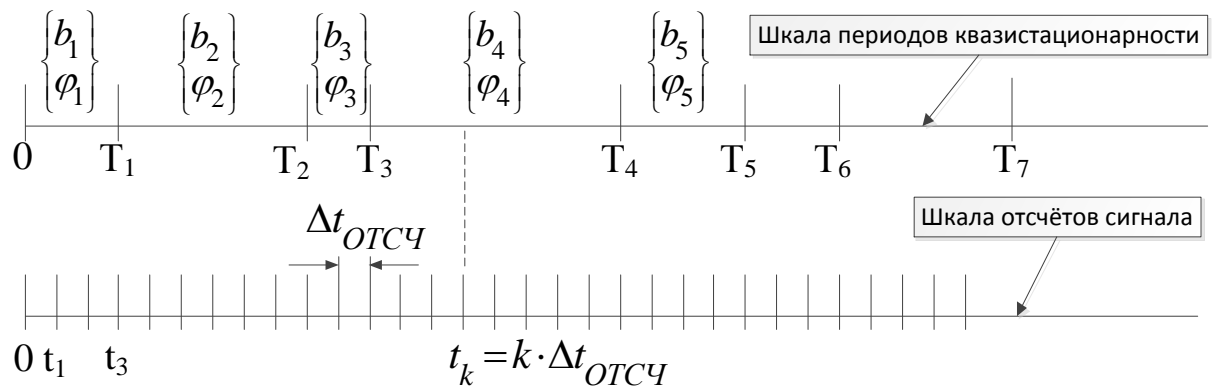


Рисунок 16 Временные шкалы модели

На рис. 17-18 представлены графики отсчётов сигнала, выполненные с линейной огибающей и в виде решётчатой функции.

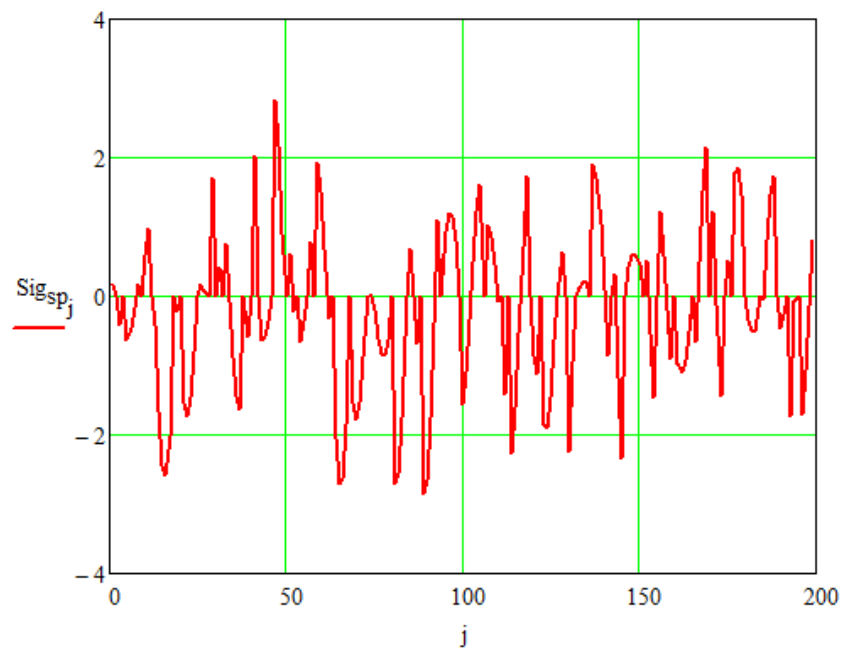


Рисунок 17 График отсчётов сигнала с линейной огибающей

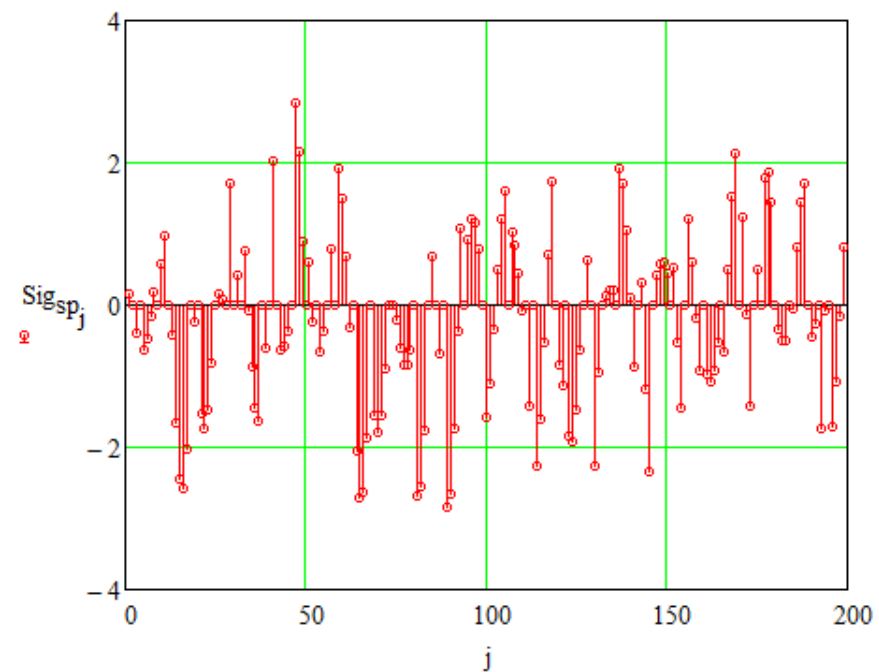


Рисунок 18 График отсчётов в виде решётчатой функции

Тема 3 Моделирование случайных процессов в стохастических системах с дискретным множеством состояний в дискретном времени с применением схем вероятностных автоматов

Вероятностный автомат является типичным представителем моделей стохастической динамической системы с дискретным временем. В определённом плане эту математическую схему можно считать обобщением схемы конечных детерминированных автоматов.

В обобщённой модели, задаваемой математической схемой вероятностного автомата, предполагают ситуацию, при которой состояние и входной сигнал $x(t_j)$ определяют не конкретное состояние $z(t_j)$, а распределение условных вероятностей P_{ij} перехода из состояния $z(t_{j-1})$ в одно из состояний $z_k \in Z$ в момент t_j под действием входного сигнала $x(t_j)$.

Так возникает модель стохастической динамической системы, которую называют автоматом со случайными переходами.

В этой модели пребывание системы в каком-либо состоянии в какой-нибудь момент автоматного (модельного) времени можно оценить лишь вероятностно: в каждый момент автоматного времени имеет место распределение вероятности пребывания системы в одном из состояний множества Z . Это текущее распределение обозначим вектором: $\Pi(t_j) = \Pi_j = (\pi_{j1}, \pi_{j2}, \dots, \pi_{jk}, \dots, \pi_{jn})$, где индекс j соответствует моменту автоматного времени t_j , а n – количество состояний системы в множестве Z , k – индекс состояния $z_k \in Z$, $0 \leq \pi_{jk} \leq 1$ и $\sum_{k=1}^{k=n} \pi_{jk} = 1$. Модель применяется для моделирования поведения дискретной стохастической системы, а также для исследования свойств дискретных распределений состояний стохастической системы.

Различают разновидности схем вероятностных конечных автоматов: вероятностные конечные автоматы со случайными переходами; вероятностные конечные автоматы со случайными начальными состояниями; вероятностные конечные автоматы со случайными выходами.

Практическое занятие №3

Тема: Моделирование случайных процессов в системах с использованием схем конечных вероятностных автоматов

Цель: Изучить применение математических схем вероятностных автоматов (Р-схем) для моделирования случайных процессов в системах

Назначение: Случайный процесс в системах можно представить как изменение их состояния. Математическая схема вероятностного автомата является моделью изучаемой системы. Вероятностные автоматы, таким образом, позволяют:

1. Формировать структуру пространства случайных событий в системе на конечном множестве состояний, и моделировать сценарии случайного поведения систем, а также динамики изменения статистики распределения состояний в пространстве модельного времени.
2. Исследовать эргодические свойства стохастических систем, определять финитные состояния стохастического процесса.

Схема автомата

На рис.19 изображен в качестве примера Граф вероятностного автомата, генерирующего (моделирующего) Марковскую цепь (последовательность – двоичный код) с вероятностью появления 1 в позициях Z_2 и Z_3 – 0,5652. Поскольку события, связанные с пребыванием системы в отдельных состояниях (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) являются несовместными, то сумма вероятностей пребывания системы в любой момент времени в одном из возможных состояний равна 1:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

Описание элементов графа

Цифры около узлов графа, обозначающих состояния автомата, можно считать символами выходного алфавита, поэтому это вероятностный автомат

Мура. Если алфавит двоичный и включает символы 1 (автомат находится в данном состоянии) и 0 (автомат не находится в данном состоянии) то случайные последовательности 0 и 1 в каждой позиции выступают индикаторами состояния и показывают процесс их смены.

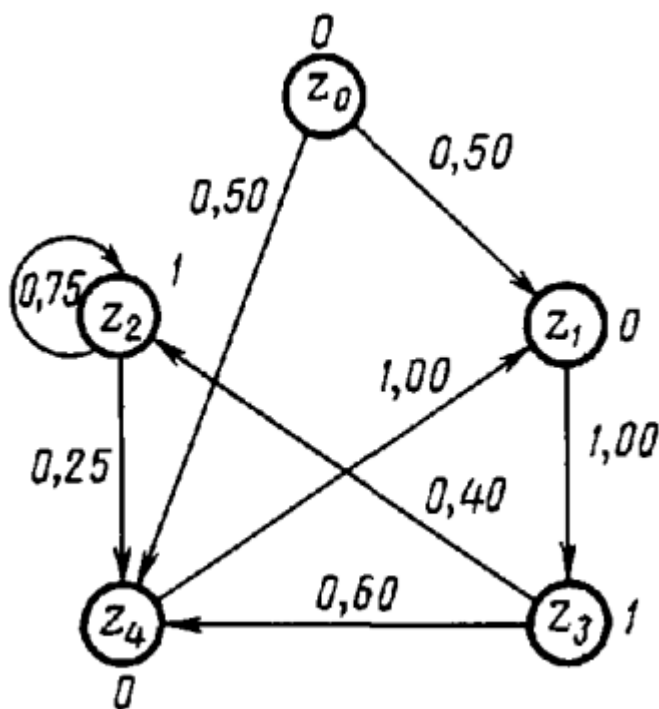


Рисунок 19 Граф вероятностного автомата, генерирующего (моделирующего) Марковскую цепь (последовательность – двоичный код) с вероятностью появления 1 в позициях Z2 и Z3 – 0,5652

Как функционирует автомат?

Работа автомата определяется схемой переходов на графе и матрицей переходных вероятностей:

$$p_Y = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,50 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,40 & 0 & 0,60 \\ 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, где $p_{i,j}$ $i, j = 1, 2, \dots, N$;

N – число состояний системы.

Номера строк и столбцов соответствуют номерам состояний системы.

Строки матрицы содержат вероятности переходов из состояния, соответствующего номеру строки в состояние, соответствующее номеру столбца, а столбцы содержат вероятности переходов в состояние, соответствующее номеру столбца, из состояний, соответствующих номеру строки. Сумма вероятностей переходов в строках матрицы равна 1, как полная вероятность суммы несовместных событий:

$$\sum_{j=0}^{j=N-1} p_{i,j} = 1$$

При работе вероятностного автомата в моменты модельного времени осуществляется смена состояний согласно вероятностному выбору. При каждом запуске автомата он проходит непредсказуемую заранее последовательность состояний. Многократные запуски вероятностного автомата позволяют **экспериментально оценивать частоту нахождения автомата в том или ином состоянии** на каждом шаге модельного времени.

Статистику распределения вероятности состояний на каждом шаге модельного времени **можно определять и теоретически**. Система уравнений Чэпмена-Колмогорова для вычисления вероятности состояний, сменяемых в результате переходов, имеет вид (цепь Маркова):

$P^k_i = \sum_{j=0}^{j=N-1} p_{j,i} \cdot P^{k-1}_j$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ – моменты модельного времени, в которые запускаются переходы в системе из текущего состояния. При запуске перехода в системе происходят изменения, связанные с возможной сменой состояний в ней. Назовём переменные P^k_i элементами вектора распределения вероятностей нахождения системы в состояниях, причём отдельный элемент P^k_i обозначает вероятность нахождения системы на шаге модельного времени k в состоянии $i = 1, 2, \dots, N$.

Это обосновывается общим правилом марковских схем: вероятность перехода в очередное состояние в данный момент модельного времени зависит только от вероятности нахождения в конкретном состоянии до

перехода: если система находилась на шаге модельного времени $(k - 1)$ в состоянии i с вероятностью P_i^{k-1} , то вероятность попасть в состояние j на шаге модельного времени k будет равна: $P_j^k = p_{i,j} \cdot P_i^{k-1}$, где $p_{i,j}$ – условная вероятность перехода из i – го состояния в j – ое состояние (элемент матрицы условных вероятностей перехода: индекс i обозначает номер строки, а индекс j – номер столбца элемента). Для оценки полной вероятности обнаружить систему на $(k - 1)$ -ом шаге модельного времени в состоянии J надо просуммировать все вероятности попадания системы в это состояние из всех возможных состояний на предыдущем шаге модельного времени: $P_J^k = \sum_{I=0}^{I=N-1} p_{I,J} \cdot P_I^{k-1}$, т.е. поэлементно умножить j -ый столбец матрицы условных вероятностей перехода на элементы вектора распределения вероятностей нахождения системы в состояниях на $(k - 1)$ -ом шаге модельного времени, а произведения сложить.

Узел графа “0” – соответствует начальному состоянию системы перед стартом.

Все значения вероятностей состояний после каждого перехода **вычисляются рекуррентно** по распределению вероятностей в предыдущем состоянии. Можно сказать, что состояние системы определяется между переходами распределением вероятностей.

Если автомат инициального типа, то работу он всегда начинает из начального 0-го состояния.

Наш автомат – инициальный. Начальное распределение вероятностей состояний (перед началом работы автомат находится в состоянии Z_0) задаётся вектор-столбцом:

$$P^0 = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если стохастическая система, моделируемая вероятностным автоматом, имеет финитное состояние, при котором все переходы более не

изменяют распределение вероятностей состояний, то такое состояние можно назвать статистически устойчивым или стабильным. Стохастические системы, находящиеся в этих состояниях, и процессы в них называют эргодическими.

Система, имеющая такое свойство, может перейти в финитное состояние после старта через какое-то количество переходов. В данной задаче количество переходов бесконечно, т.е. система асимптотически стремится к эргодическому состоянию.

Схему вероятностного автомата можно применять для имитационного моделирования поведения стохастических систем и процессов.

Смоделируйте несколько шагов рекуррентных вычислений по описанному правилу (до $k = 7$).

Система уравнений для определения финитных вероятностей:

$$P_0 = 0 \cdot (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 0$$

$$P_1 = 0,50 \cdot P_0 + 1,00 \cdot P_4$$

$$P_2 = 0,75 \cdot P_2 + 0,40 \cdot P_3$$

$$P_3 = 1,00 \cdot P_1$$

$$P_4 = 0,50 \cdot P_0 + 0,25 \cdot P_2 + 0,60 \cdot P_3$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

Таким образом:

$$P_1 = 1,00 \cdot P_4$$

$$P_2 = 0,75 \cdot P_2 + 0,40 \cdot P_3$$

$$P_3 = 1,00 \cdot P_1$$

$$P_4 = 0,25 \cdot P_2 + 0,60 \cdot P_3$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

получаем систему для вычисления финитных вероятностей. Обычно последним уравнением заменяют одно из уравнений переходов, а затем находят решение:

$$P_0 = 0$$

$$P_1 = 0,2174$$

$$P_2 = 0,3478$$

$$P_3 = 0,2174$$

$$P_4 = 0,2174$$

Сумма вероятностей пребывания системы в состояниях Z_2 и Z_3 равна:

$$P_2 + P_3 = 0,3478 + 0,2174 = 0,5652$$

Решите систему самостоятельно.

Для определения стационарных вероятностей аналитически нужно составить систему из n алгебраических уравнений:

$$P_i = \sum_j^n P_j * p_{ij}, i = 1, n$$

заменить в ней одно из уравнений следующим:

$$\sum_j^n P_j = 1$$

решить полученную систему относительно P_i .

В левой части – вероятности финитных состояний, соответствующие рассматриваемым вершинам графа.

В правой части – сумма произведений, число слагаемых равно числу дуг. Слагаемое – произведение финитной вероятности того состояния, из которого выходит дуга, на вероятность соответствующего перехода.

Моделирование случайного процесса

В целях имитации развития случайного процесса переходов в системе, сопряженных со сменой ее состояний, необходимо применить алгоритм определения случайного выбора направления перехода в каждом состоянии очередном состоянии на каждом предстоящем шаге. Это напоминает **выбор по жребию**.

Применим метод **Монте-Карло**. Используем генератор случайных чисел $X \in [0,1] \subset R$, распределенных по равномерному закону, для

определения шанса выбора направления перехода. Если на очередном шаге система находится в i -ом состоянии, то для розыгрыша жребия выбора направления следующего перехода мы используем i -ую строку матрицы переходных вероятностей. Поскольку сумма вероятностей перехода из каждого состояния i равна 1 ($\sum_{j=0}^{N-1} p_{i,j} = 1$), то разделив диапазон $[0,1]$ на отрезки, пропорциональные $p_{i,j}$, и оценивая шанс для выбора направления для перехода по правилу:

$$\forall x \in X$$

$$\forall x \in [0, p_{i,0}) \Rightarrow \text{переход } i \rightarrow 0;$$

$$\forall x \in [p_{i,0}, (p_{i,0} + p_{i,1})) \Rightarrow \text{переход } i \rightarrow 1;$$

$$\forall x \in [(p_{i,0} + p_{i,1}), (p_{i,0} + p_{i,1} + p_{i,2})) \Rightarrow \text{переход } i \rightarrow 2;$$

...

$$\forall x \in [(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-3}), (p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-2})) \Rightarrow$$

переход $i \rightarrow (N - 2);$

$$\forall x \in [(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-2}), (p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-1})] \Rightarrow$$

переход $i \rightarrow (N - 1);$

, что эквивалентно более компактной записи:

$$\forall x \in [\sum_{j=0}^{K-1} p_{i,j}, \sum_{j=0}^K p_{i,j}) || (K \in [1, 2, 3, \dots, (N - 1)] \wedge K \neq (N - 1)) \Rightarrow$$

переход $i \rightarrow K;$

$$\forall x \in [\sum_{j=0}^{K-1} p_{i,j}, \sum_{j=0}^K p_{i,j}] || (K \in [1, 2, 3, \dots, (N - 1)] \wedge K = (N - 1)) \Rightarrow$$

переход $i \rightarrow (N - 1);$

- определяем жребий для выбора направления перехода.

Схема этого алгоритма изображена на рис. 20.

Используя, предложенное правило, можно организовать проигрывание поведения системы в пространстве модельного времени ($t = 0, 1, 2, 3, \dots, t, \dots$), реализуя численно единичный сценарий поведения системы. Начальное состояние системы при этом можно считать Z_0 . Если

присвоить действующему состоянию индикаторное значение 1, а остальным состояниям – 0, то вектор состояний системы в начальном состоянии можно представить в виде:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

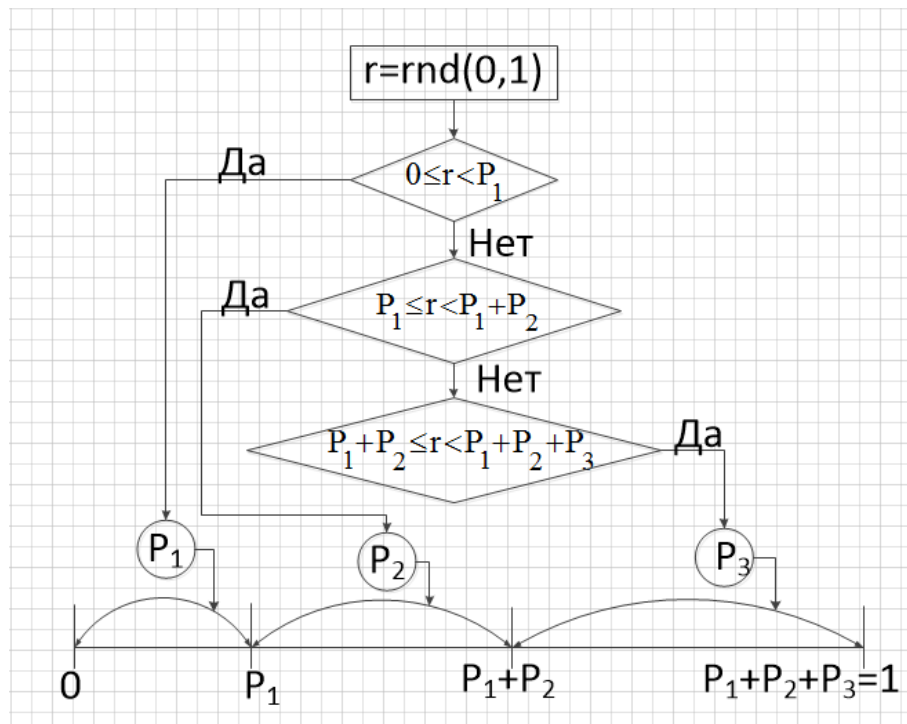


Рисунок 20 **Блок-схема алгоритма метода выбора «жребия»**

При этом на каждом шаге вектор индикации состояний будет иметь 1 в случайной позиции, имитируя, например некоторый двоичный код.

Такой подход имитирует механизм работы вероятностного автомата, определяя индивидуальную траекторию продвижения в пространстве состояний системы, начиная с начального, в соответствии со шкалой модельного времени (шагами).

В силу стохастического характера процесса реализация единичного сценария будет уникальна при каждом повторном запуске, т.е. уникальна будет траектория продвижения агента, см. рис. 21.

При достаточно большом количестве шагов k наступает стационарный режим, при котором P_i^k становятся независимыми от времени (k) и равны P_i^{k-1} . Вектор $P_i = \lim_{k \rightarrow \infty} P_i^k$ – вектор финальных стационарных вероятностей. До наступления стационарного режима имеет место переходной режим, приблизительную длительность (k) которого можно определить, задавшись величиной отклонения $\Delta_i = |P_i - P_i^k|$, если $\Delta_i < \Delta_{don}$ – условие наступления стационарного процесса (Δ_{don} – величина допустимой ошибки). Если это условие достижимо, то процесс сходится к финитному состоянию, а система является эргодической.

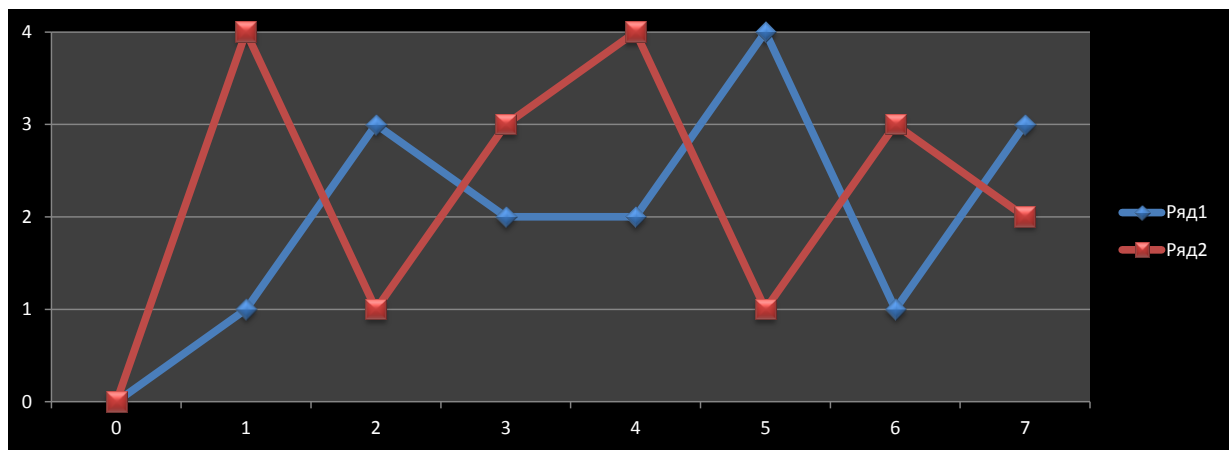


Рисунок 21 **Возможные случайные траектории продвижения системы по состояниям**

Каждая компонента P_i характеризует среднюю долю времени, в течение которого система находилась в состоянии S_i .

Условием эргодичности однородной Марковской цепи является то, что все ее состояния являются сообщающимися, а граф системы сильно связан (возможен переход $S_i S_j$ за конечное число шагов).

Матрицу векторов распределения вероятностей состояний на каждом переходе моделируем, вычисляя каждый столбец матрицы на каждом переходе в определённый момент модельного времени рекуррентно или, используя матричный способ преобразования уравнений Чэпмена-

Колмогорова:

$$P(N, m) = \begin{bmatrix} P_0^0 & P_0^1 & P_0^2 & \dots & P_0^m \\ P_1^0 & P_1^1 & P_1^2 & \dots & P_1^m \\ P_2^0 & P_2^1 & P_2^2 & \dots & P_2^m \\ P_3^0 & P_3^1 & P_3^2 & \dots & P_3^m \\ P_4^0 & P_4^1 & P_4^2 & \dots & P_4^m \end{bmatrix}$$

$P(I, J)$ – и элемент матрицы, где I – номер вершины (узла) графа состояний вероятностного автомата, J – значение модельного времени, определяющий порядковый номер переходов в автомате.

Алгоритм процедуры рекуррентного расчета распределения вероятности состояний автомата после каждого перехода представлен на рис. 22.

Если промоделировать векторы распределения состояний на каждом шаге модельного времени, начиная с инициального состояния на достаточно большой последовательности шагов, то можно увидеть тенденцию к стабилизации значений вероятности, то есть сходимость процесса.

Таким образом, сходимость к финитному состоянию можно наблюдать по виду матрицы, сравнивая между собой значения вероятности в соседних столбцах.

Задание

1. Смоделировать алгоритм численной процедуры имитации продвижения агента в пространстве состояний системы на протяжении заданного конечного числа M шагов на шкале модельного времени $t = 0, 1, 2, 3, \dots, m, \dots, M - 1, M$.
2. Разработать программу численной процедуры на ЭВМ.
3. Рассчитать траекторию движения агента в пространстве состояний методом имитационного моделирования.
4. Определить последовательность меняющегося от состояния к состоянию двоичного кода, который соответствует вектору состояний,

характеризуемых их индикаторными значениями.

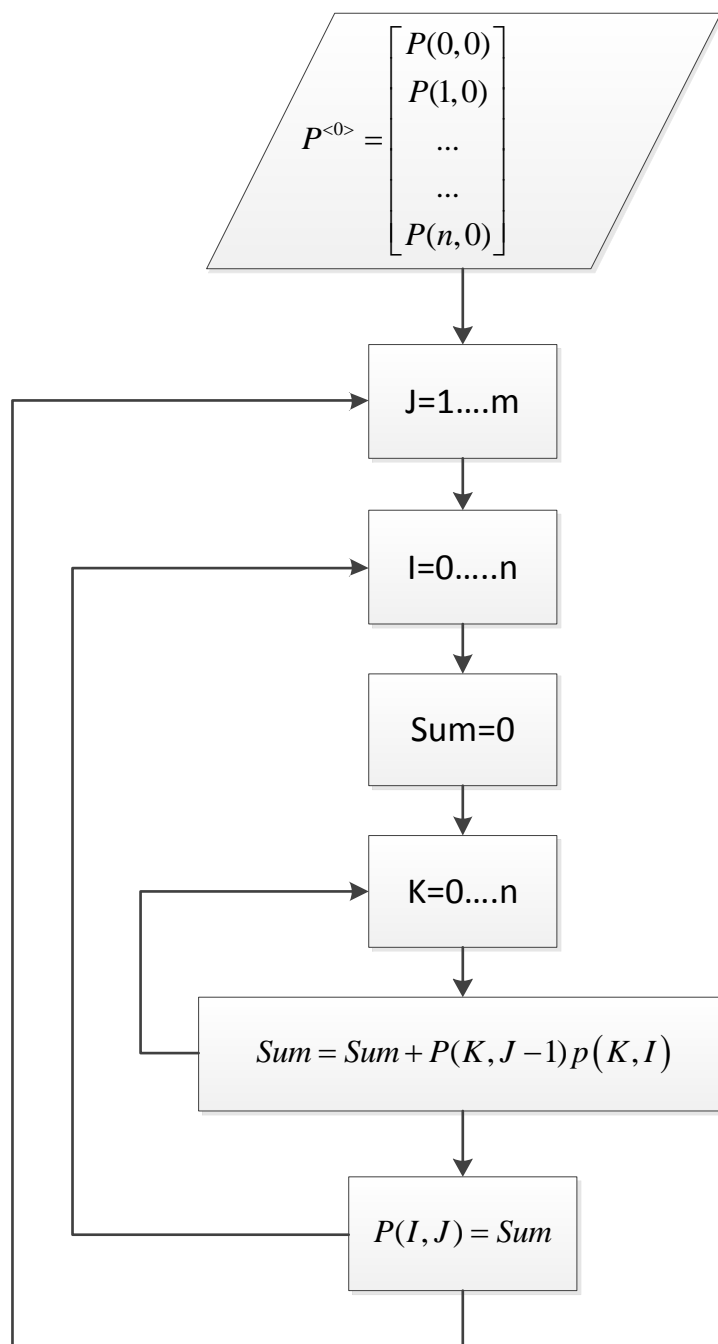


Рисунок 22 Алгоритм рекуррентного расчета статистики переходов

5. Добавить в модель матрицу векторов распределения вероятностей состояний на каждом переходе
6. Разметить граф состояний автомата (для разметки взять схему из таблицы 1 пособия)

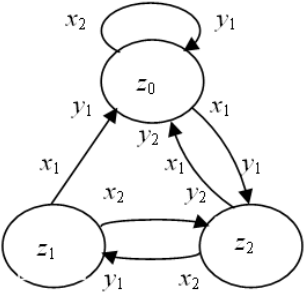
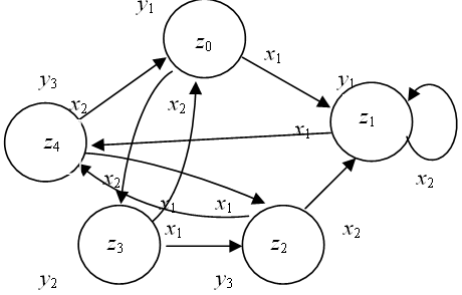
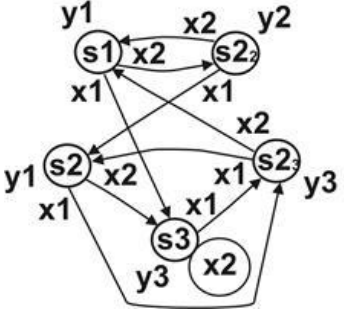
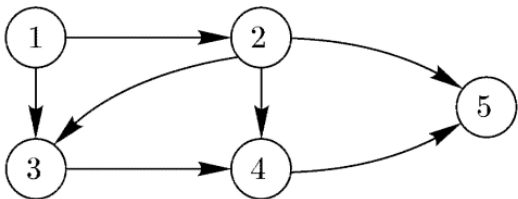
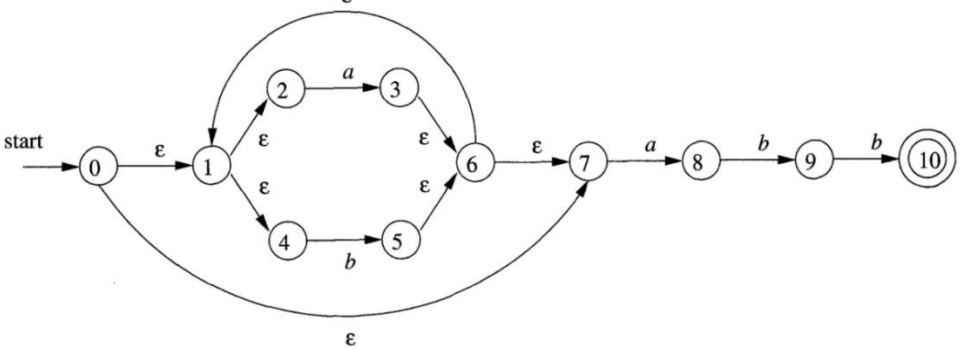
7. Составить отчет, который должен включать:

- описание задачи;
- описание алгоритма;
- описание программы расчета;
- график смены состояний (траекторию продвижения агента) при реализации имитационной модели на ЭВМ;
- матрицу векторов распределения состояний в моменты модельного времени;
- матрицу, представляющую объединение векторов двоичного кода, отвечающего последовательности состояний, проходимых системой при реализации имитационной модели на ЭВМ.

Ниже приводится текст программы на VBA Excel и фрагменты Листа 1 (с входными данными) и Листа 2 (с выходными данными) для данной схемы конечного вероятностного автомата, см. рис. 1.

Варианты схем конечных вероятностных автоматов для выполнения расчётных заданий, приведены в таблице 2.

Таблица 2 Варианты схем конечных вероятностных автоматов для выполнения расчётных заданий

<p>1</p>		<p>2</p>	
<p>3</p>		<p>4</p>	
<p>5</p>			

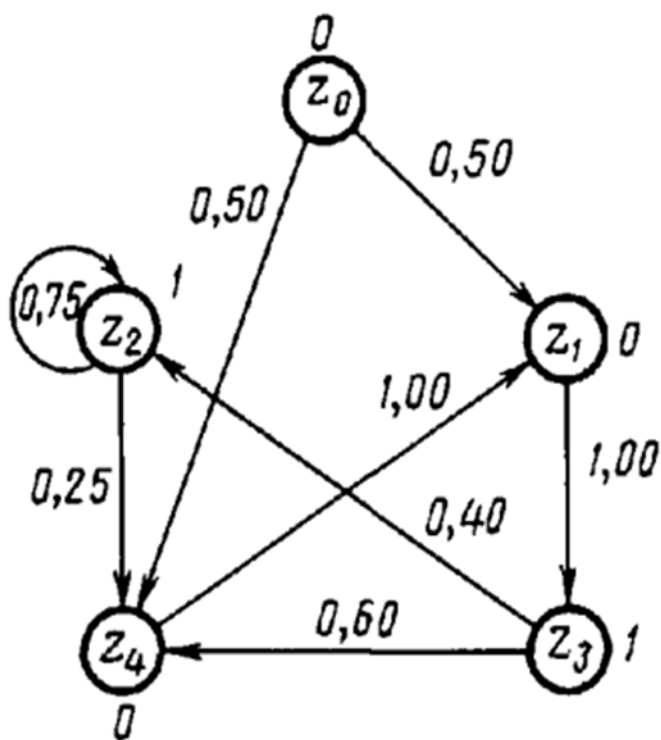
Текст инструкций программы:

```
Sub Probability_Automat_()
Dim Z(5) As Integer, A(5, 100) As Integer, T(100) As Integer, m As Integer,
II As Integer, I As Integer, J As Integer
Dim P(5, 5) As Single, R1(100) As Single, R As Single, S1 As Single, S2 As
Single
With Application.Workbooks("Имитационная модель продвижения системы по
состояниям с применением схемы конечного вероятностного
автомата.xlsm").Worksheets("Лист1")
    m = .Cells(3, 1)
    For I = 0 To 4
        Z(I) = .Cells(I + 3, 2)
    Next I
    For I = 0 To 4
        For J = 0 To 4
            P(I, J) = .Cells(I + 3, J + 4)
        Next J
    Next I
End With
For J = 0 To m
    For I = 0 To 4
        If Z(I) = 1 Then
            II = I
        End If
        A(I, J) = Z(I)
    Next I
    T(J) = II
    R1(J) = Rnd(1)
    S1 = 0
    For I = 0 To 4
        S2 = S1 + P(II, I)
        If R1(J) >= S1 And R1(J) < S2 Then
            Z(I) = 1
        Else
            Z(I) = 0
        End If
        S1 = S1 + P(II, I)
    Next I
Next J
With Application.Workbooks("Имитационная модель продвижения системы по
состояниям с применением схемы конечного вероятностного
автомата.xlsm").Worksheets("Лист2")
    .Cells(1, 2) = m
    For J = 0 To m
        .Cells(3, J + 2) = J
        .Cells(4, J + 2) = R1(J)
        .Cells(5, J + 2) = T(J)
    Next J
    For I = 0 To 4
        For J = 0 To 4
            .Cells(I + 8, J + 2) = P(I, J)
        Next J
    Next I
    For I = 0 To 4
        For J = 0 To m
            .Cells(I + 15, J + 2) = A(I, J)
        Next J
    Next I
End With

End Sub
```

Лист 1:

Количество шагов алгоритма (m)	Индикаторы начального вектора состояний системы	I	Матрица переходных вероятностей автомата				
20	1	0	0,000	0,500	0,000	0,000	0,500
	0	1	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000
	0	2	0,000	0,000	0,750	0,000	0,250
	0	3	0,000	0,000	0,400	0,000	0,600
	0	4	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
		J	0	1	2	3	4



Тема 4. Событийно-временное моделирование случайных процессов в стохастических системах с использованием методов теории систем массового обслуживания

Рассматривается имитационное моделирование случайных процессов в пространстве дискретных состояний и непрерывного времени в стохастической системе, модель которой представлена схемой простой системы массового обслуживания. При проведении работы обучающиеся изучают и применяют методы моделирования случайных чисел, распределённых по априорно заданному закону, используя метод Монте-Карло и метод обратных функций. Полученная модель воспроизводит единичную реализацию случайного процесса. Получаемые вторичные случайные процессы, представляющие результат моделирования, исследуются с целью определения их статистических характеристик. При обработке статистических параметров данных, получаемых с помощью модели обучающиеся закрепляют знания в области применения статистических методов.

Практическое занятие №4.

Тема: Численное имитационное моделирование стохастических систем обработки сообщений в автоматизированных информационных системах и системах защиты информации

Цель: Изучить применение математических схем теории систем массового обслуживания.

Назначение: Позволяет моделировать шкалы случайных моментов времени возникновения случайных событий в информационных системах.

Теоретическая часть

Задача: Смоделировать поток случайных событий поступления заявок на обслуживание в ВС для имитации в численной модели

Описание схемы модели

Модель системы представляет собой модель простой системы

массового обслуживания (СМО) с ординарным однородным рекуррентным потоком заявок без последствия, см. рис. 23. Такой поток называют простейшим.

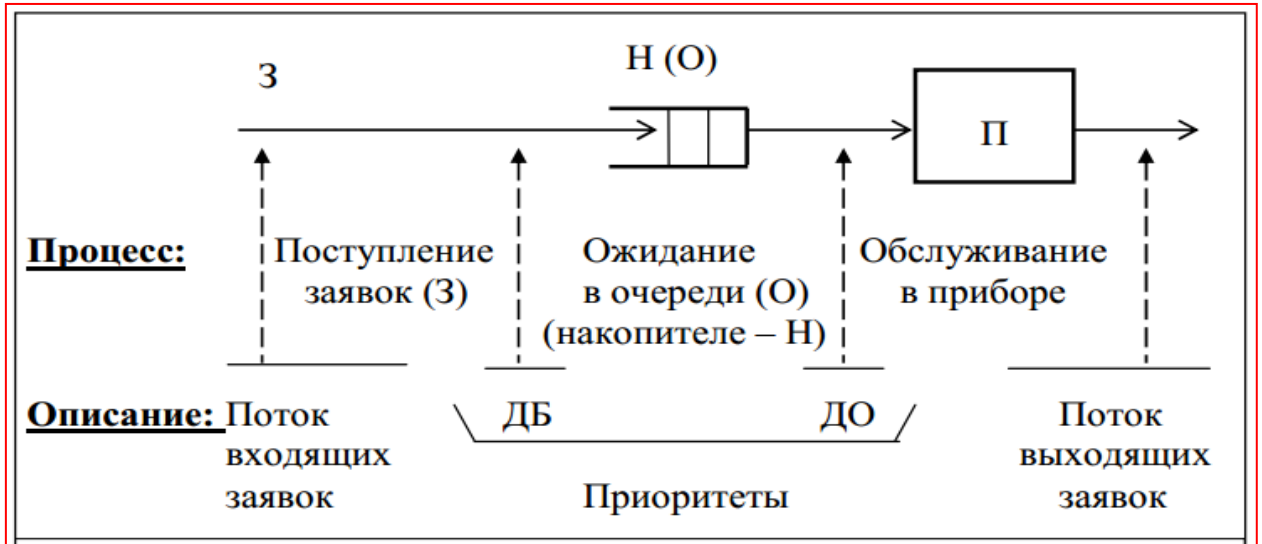


Рисунок 23 Модель простой СМО
Приборы, входящие в модель простой СМО:
 - накопитель заявок;
 - прибор обслуживания (сервер).

Статистический закон распределения интервалов времени между поступающими в систему заявками – экспоненциальный, плотность распределения описывается формулой: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Если в этой модели нет ограничений на количество мест в очереди, то она называется также моделью простой очереди. Вероятность поступления в такую систему за время t k заявок подчиняется закону Пуассона: $P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Задержки времени на обслуживания заявок также являются случайными величинами, которые распределены по экспоненциальному закону.

В общем случае законы распределения промежутков времени могут быть различными, например, дискретными или непрерывными.

Дискретные законы распределения значений промежутков времени имеют место, например, в случае, когда временные интервалы кратны

некоторому такту $\Delta\tau$. Это характерно, например, для временных процессов внутри цифровых микросхем и компьютеров. В этом случае используют геометрическое распределение. Исходы, определяющие случайные значения количества тактов k , формирующих случайное значение интервала $t_k = k \cdot \Delta\tau$, распределяются согласно таблице 3.

Таблица 3 Геометрическое распределение

N	1	2	...	k	...	∞
P_N	$P_1 = q^0 p = 1p = p$	$P_2 = q^1 p = qp$...	$P_k = q^{k-1} p$...	$P_\infty = q^\infty p = 0$

Здесь p и q – параметры распределения, имеющие свойства вероятностей успешного и неуспешного исходов в серии повторных испытаний, т.е. $0 \leq p, q \leq 1$ и $p + q = 1$. Моделируется методом «жребия».

Сумма всех вероятностей по множеству исходов равна:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

1. Генерируем базовое случайное число r . Оно попадает равновероятно в какую-нибудь точку отрезка $[0; 1]$.

2. Проверяем последовательно, начиная, например, с левого края отрезка $[0; 1]$, в какой интервал разбиения указанного отрезка попадает сгенерированное число, и делаем выбор по схеме:

Если $0 \leq r < P_1 = p = 1 - q$, то производим выбор $N = 1$

Если $P_1 = p = 1 - q \leq r < P_1 + P_2 = p \frac{1-q^2}{1-q} = 1 - q^2$, то производим выбор $N = 2$

Если $P_1 + P_2 = 1 - q^2 \leq r < P_1 + P_2 + P_3 = p \frac{1-q^3}{1-q} = 1 - q^3$, то производим выбор $N = 3$

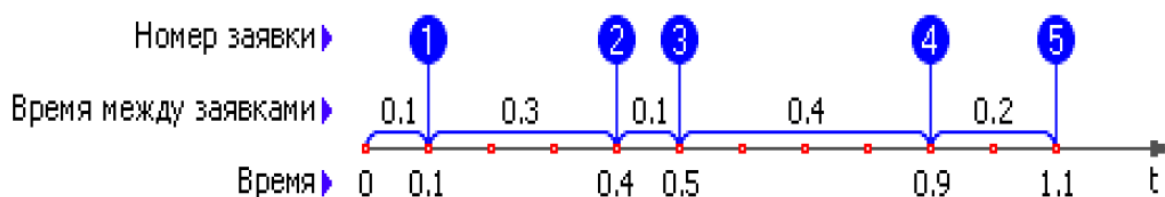
...

Если $P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1} = 1 - q^{k-1} \leq r < P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1} + P_k = 1 - q^k$, то производим выбор $N = k$

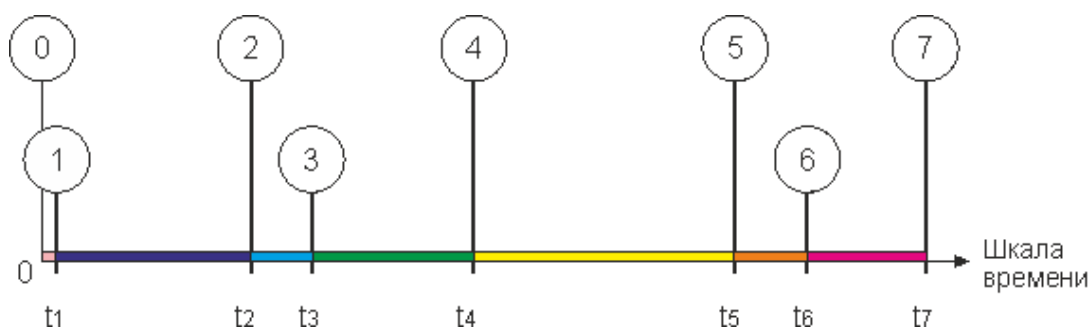
...

и так далее. Перебор условий прерывается при установлении актуального выбора.

Интервалы времени между поступающими в систему запросами формируют шкалу времени случайных событий, связанных с возникновением заявок в системе, см. рис. 24.



a) Случайный процесс прихода заявок в СМО в случае кратной зависимости промежутков времени от такта (дискретное геометрическое распределение промежутков времени)




b)  - индикаторы (флажки) событий; $t_1 \dots t_7$ – моменты времени фиксации событий (непрерывное распределение промежутков времени)

Рисунок 24 Шкала случайных событий в ИС (модель СМО – Q-схема)

Принимаются следующие допущения: заявки мгновенно без задержек возникают в очереди (накопителе) системы и мгновенно без задержек поступают в обслуживающий прибор, если он свободен. После окончания обслуживания заявка мгновенно покидает систему. Если прибор занят, то заявка дожидается своей очереди на обслуживание.

Параметры случайного процесса.

Заявки поступают в систему в случайные моменты времени: длительность интервалов между поступлениями заявок – случайная величина, распределенная по заданному закону.

Длительность обслуживания заявки – случайная величина, распределенная по заданному закону.

Длительность интервала между поступлениями заявок распределена по экспоненциальному закону: $F(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, а генерацию случайных чисел производим по формуле:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - F} \right)$$

Интенсивность поступления заявок: $\lambda = 1/15; 1/20; 1/25 \text{ с}^{-1}$.

Длительность обслуживания распределена также по экспоненциальному закону: $F1(T < t) = 1 - e^{-\mu t}$, а генерацию случайных чисел производим по формуле:

$$t = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{1}{1 - F1} \right)$$

Интенсивность обслуживания: $\mu = 1/20; 1/15; 1/22 \text{ с}^{-1}$.

В разрабатываемой стохастической имитационной модели мы ввели два независимых параметра λ и μ .

Параметр λ статистического экспоненциального закона непрерывного распределения промежутков времени между поступлениями заявок в систему определяет значение математического ожидания моделируемых случайных промежутков времени: $M(\Delta t_k^{\text{пост}}) = \frac{1}{\lambda}$. Для ординарного потока величина, обратная $\frac{1}{M(\Delta t_k^{\text{пост}})} = \lambda$ представляет оценку средней скорости поступления заявок. Поэтому её также называют интенсивностью поступления заявок.

Параметр μ статистического экспоненциального закона непрерывного распределения затрат времени на обработку поступающих в систему заявок

определяет значение математического ожидания моделируемых случайных затрат времени на обслуживание: $M(\Delta t_k^{\text{обсл}}) = \frac{1}{\mu}$. Для ординарного потока величина, обратная $\frac{1}{M(\Delta t_k^{\text{обсл}})} = \mu$ представляет оценку средней скорости обработки (обслуживания) заявок. Поэтому её также называют интенсивностью обслуживания (обработки) заявок.

Таким образом, все статистические результаты, получаемые при прогоне модели, будут так или иначе зависеть от 2 – х параметров: λ и μ .

Исследование модели проведём методом статистических испытаний Монте-Карло. Для этого построим последовательность N-ого количества случайных событий (объём задания N устанавливает преподаватель). Случайные события в модели связаны с поступлением заявок, или сообщений, в систему и выходом их из неё. Во время пребывания заявок внутри системы они могут находиться в состоянии ожидания обслуживания или в процессе обслуживания. Случайный процесс в модели представляется последовательностью случайных чисел. Эти числа моделируют временные интервалы между поступлениями заявок в систему, длительности обслуживания поступающих заявок, моменты времени поступления заявок в систему, моменты времени поступления заявок на обслуживание, длительности ожидания, моменты времени окончания обслуживания.

Моделирование случайных чисел, распределенных по экспоненциальному закону $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, см. графики функции распределения на рис. 25, плотность распределения, которых имеет следующее определение: $f(t) = \frac{dP(T < t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$, см. рис. 26, производим *методом обратных функций*.

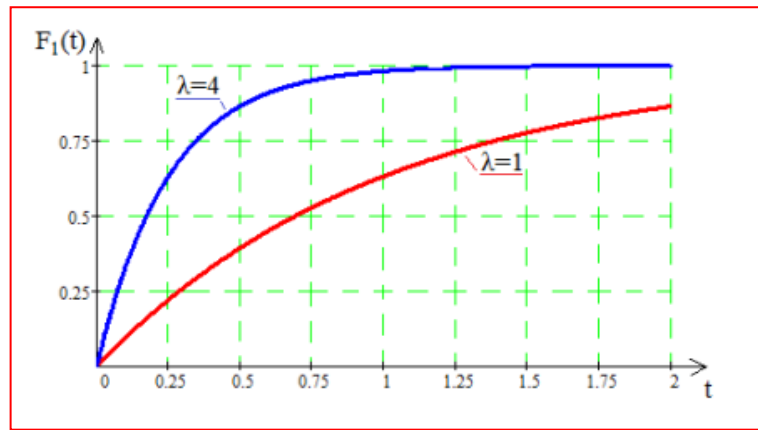


Рисунок 25 Графики функций экспоненциального распределения

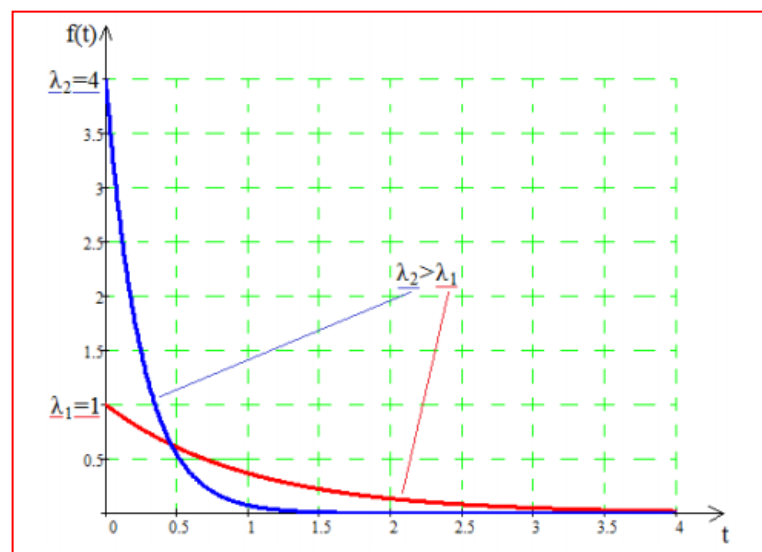


Рисунок 26 Графики функций плотности экспоненциального распределения

Моделирование случайных значений процесса производится с использованием **формулы обратной функции**, которую получают согласно следующему алгоритму:

1). Поскольку $\xi = \int_0^t f(t) dt = P(T < t)$ – случайная величина, которая имеет равномерное распределение в диапазоне $[0;1]$, то моделируются ряды случайных чисел $\xi = P = r$, распределенных по равномерному закону с использованием программного генератора псевдослучайных чисел.

2). Затем определяются соответствующие им числа t , распределенные по экспоненциальному закону по формуле обратной функции, которая получена путём решения следующего уравнения:

$r = P = 1 - e^{-\lambda t}$ – формула вероятности закона распределения.

Преобразуем уравнение перестановкой его членов из правой части уравнения в левую, и, наоборот, к виду:

$$e^{-\lambda t} = 1 - P$$

Прологарифмируем его правую и левую часть. Получим уравнение:

$-\lambda t = \ln(1 - P)$, из которого получаем формулу **обратной функции** для моделирования экспоненциального распределения:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1 - P}\right)$$

Практическая часть

Моделируем значения первичных случайных процессов модели:

1. Для интервалов между поступлениями заявок $\Delta t_k^{\text{пост}} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1 - r1_k}\right)$, где $r1_k$ – сгенерированное случайное число (базовое число), распределённое по равномерному закону, из ряда для моделирования интервалов между поступлениями заявок;

2. Для длительностей обслуживания поступающих заявок $\Delta t_k^{\text{обсл}} = \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{1}{1 - r2_k}\right)$, где $r2_k$ – сгенерированное случайное число (базовое число), распределённое по равномерному закону, из ряда для моделирования длительностей обслуживания поступающих заявок.

Другие временные и прочие параметры модели, которые уже представляют значения и характеристики вторичных случайных процессов, зависящие от значений первичных случайных процессов, рассчитываем, используя формулы:

1. Время поступления:

$$t_k^{\text{пост}} = t_{k-1}^{\text{пост}} + \Delta t_k^{\text{пост}}$$

2. Время ожидания начала обслуживания:

$$\Delta t_k^{\text{ож}} = \begin{cases} t_{k-1}^{\text{ок обсл}} - t_k^{\text{пост}} & \forall t_{k-1}^{\text{ок обсл}} > t_k^{\text{пост}} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

3. Время поступления на обслуживание:

$$t_k^{нач\ обсл} = t_k^{пост} + \Delta t_k^{ож}$$

4. Время окончания обслуживания:

$$t_k^{ок\ обсл} = t_k^{нач\ обсл} + \Delta t_k^{обсл}$$

5. Время пребывания заявки в системе (время жизни):

$$\Delta t_k^{жизни} = \Delta t_k^{ож} + \Delta t_k^{обсл}$$

6. Средняя длина очереди:

$$n_{ср}^{оч} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{t_N^{ок\ обсл}}$$

7. Среднее количество заявок в системе:

$$n_{ср}^{сист} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{t_N^{ок\ обсл}}$$

8. Средняя длительность пребывания заявки в системе:

$$\Delta t_{ср}^{жизни} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{N}$$

9. Средняя длительность ожидания обслуживания:

$$\Delta t_{ср}^{ож} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{N}$$

10. Средний интервал поступлений:

$$\Delta t_{ср}^{пост} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{пост}}{N}$$

11. Средняя интенсивность потока заявок:

$$\lambda_{ср} = \frac{1}{\Delta t_{ср}^{пост}}$$

12. Среднее время обслуживания заявок:

$$\Delta t_{ср}^{обсл} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{обсл}}{N}$$

13. Средняя интенсивность обслуживания:

$$\mu_{ср} = \frac{1}{\Delta t_{ср}^{обсл}}$$

Используя все описанные выше формулы и алгоритмы, моделируется

журнал регистрации событий, представленный ниже.

Задание:

1.) Построить модель журнала регистрации событий в системе, определив следующие значения случайного процесса:

- моментов поступления заявок в систему;
- моментов поступления заявок на обслуживание;
- длительности ожидания обслуживания в очереди;
- длительности обслуживания в приборе;
- длительности пребывания в системе;
- времени окончания обслуживания.

2). Построить диаграммы потоков событий (моделируем с использованием среды Excel), см. рис. 27, используя смоделированные в журнале значения моментов поступления заявок в систему и длительности пребывания в системе каждой заявки (количество последовательных событий принять 20):

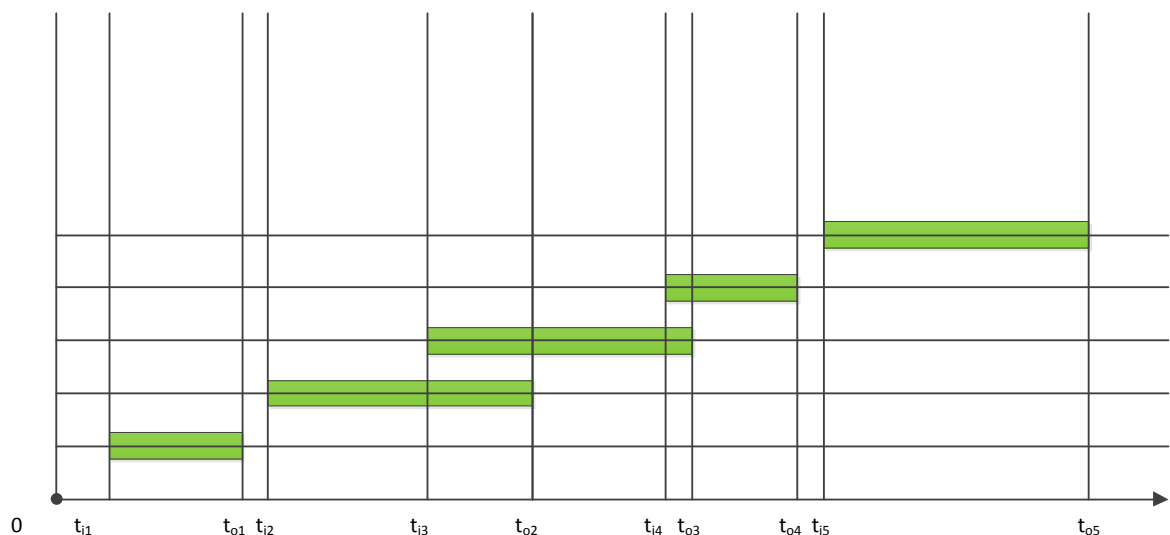


Рисунок 27 Диаграмма событий в системе обслуживания

3). Определить: среднюю длину очереди, среднюю интенсивность

поступления, среднюю интенсивность обслуживания. Расчетные зависимости, представленные ниже, используем для оценки средних характеристик процессов по значениям выборок, полученных в столбцах таблицы при моделировании. Значения этих величин укажите также не только в низу таблицы, но и в формулах ниже после знака «=».

1. Средняя длина очереди:

$$n_{cp}^{oc} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{t_N^{ок\ обсл}} =$$

2. Среднее количество заявок в системе:

$$n_{cp}^{сист} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{t_N^{ок\ обсл}} =$$

3. Средняя длительность пребывания заявки в системе:

$$\Delta t_{cp}^{жизни} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{N} =$$

4. Средняя длительность ожидания обслуживания:

$$\Delta t_{cp}^{ож} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{N} =$$

5. Средний интервал поступлений:

$$\Delta t_{cp}^{пост} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{пост}}{N} =$$

6. Средняя интенсивность потока заявок:

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{\Delta t_{cp}^{пост}} =$$

7. Среднее время обслуживания заявок:

$$\Delta t_{cp}^{обсл} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{обсл}}{N} =$$

8. Средняя интенсивность обслуживания:

$$\mu_{cp} = \frac{1}{\Delta t_{cp}^{обсл}} =$$

Ниже представлена модель журнала регистрации событий в системе, полученная в результате моделирования, см. табл. 3.

Таблица 3 Модель журнала регистрации событий.

интенсивность поступлений заявок в систему				интенсивность обслуживания			
0,0666				0,0500			
случайны е числа 1	случайны е числа 2	интервалы между возникновени ями заявок в системе	длительност и обслуживан ия заявок в системе	моменты поступлен ия заявок в систему	момен ты выхода заявок из систем ы	время ожидания обслуживания	время жизни заявки в системе
0,2661	0,6557	5	21	5	26	0	21
0,3408	0,3409	6	6	11	32	15	21
0,8239	0,4753	26	10	37	47	0	10
0,0695	0,5940	1	14	38	61	9	23
0,7414	0,7104	20	19	58	80	3	22
0,3483	0,9635	6	50	64	130	16	66
0,5408	0,0120	12	0	76	130	54	54
0,0724	0,7190	1	19	77	149	53	72
0,0468	0,5062	1	11	78	160	71	82
0,5629	0,2987	12	5	90	165	70	75
0,6454	0,5473	16	12	106	177	59	71
0,9650	0,4113	50	8	156	185	21	29
0,2644	0,7572	5	21	161	206	24	45
0,7378	0,0744	20	1	181	207	25	26
0,7622	0,5083	22	11	203	218	4	15
0,6360	0,2717	15	5	218	223	0	5
0,4576	0,6706	9	17	227	244	0	17
0,0691	0,2142	1	4	228	248	16	20
0,8986	0,5599	34	12	262	274	0	12
0,7112	0,5152	19	11	281	292	0	11
	Суммы столб. >:	281	257			440	697
Число опытов↓ ↓:		средний интервал между поступлениям и заявок↓↓:	средняя длительност ь обслуживан ия заявок↓↓:			среднее время ожидания обслуживания ↓↓:	среднее время пребыван ия заявок в системе↓ ↓:
		14,05	12,85			22	34,85
		средняя интенсивность поступления заявок в системе↓↓:	средняя интенсивно сть обслуживан ия заявок в системе↓↓ :			средняя длина очереди↓↓:	
20		0,0711	0,0778			2,6666	

4). Определение параметров распределения интервалов времени пребывания заявок в системе.

Выборка значений интервалов времени пребывания заявок в системе находится в результате прогона модели, например, при использовании табличного расчёта в соответствующем столбце таблицы, см., например, в столбце «время жизни заявки в системе» таблицы, представленной выше.

Приводим полученную гистограмму распределения частот наблюдения значений по выборке, см. рис. 28.

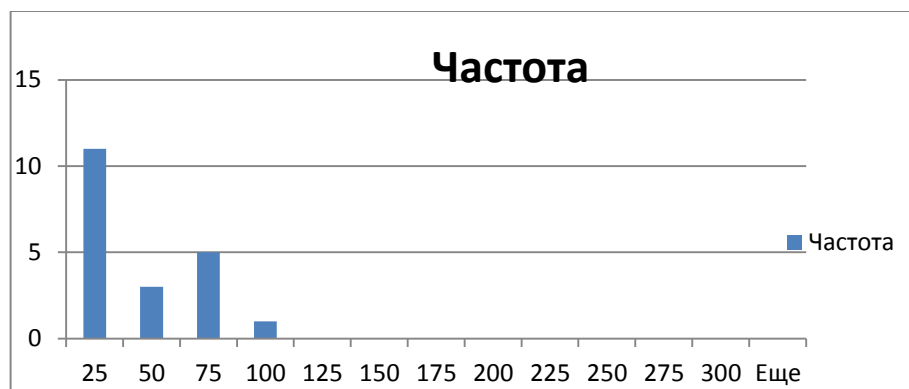


Рисунок 28 Гистограмма распределения значений времени пребывания заявок в системе.

Для построения гистограммы распределения частот появления значений в диапазоне наблюдений исследуемого случайного процесса можно использовать инструмент надстройки Excel – Анализ данных→регрессия→гистограмма, или аналогичные возможности других приложений. Для построения гистограммы надо задать шкалу карманов, которая покрывает наблюдаемый диапазон значений $\Delta t^{\text{жизни}}$ в выборке.

Указываем значения выборочного математического ожидания $\langle \Delta t^{\text{жизни}} \rangle = \Delta t_{\text{ср}}^{\text{жизни}}$, выборочной дисперсии $\langle \Delta t^{\text{жизни}} \rangle^2 = \frac{N}{(N-1)} \left(\overline{\Delta t^{\text{жизни}^2}} - \Delta t_{\text{ср}}^{\text{жизни}^2} \right)$, где $\overline{\Delta t^{\text{жизни}^2}}$ – средний квадрат значений времени пребывания по выборке.

5). Исследовать влияние времени на статистические характеристики (среднее значение, оценка дисперсии распределения) случайных величин *времени ожидания* заявок в очереди на обслуживание и *времени жизни* (задержки) заявок в простой системе массового обслуживания СМО с бесконечной очередью.

Для решения этой задачи варьировать *модельное время* – время проведения эксперимента (суммарное время прохождения всех заявок через систему), меняя число заявок, проходящих в системе за время эксперимента. Например, можно принять следующие последовательности варианты {20,40,60,80,100,120,140,160,180,200}, чтобы получить соответствующее количество точек для построения графиков. Данные представить в табличном виде для каждого времени:

Провести имитационный эксперимент для двух значений интенсивности поступления заявок в систему: $\lambda=\{0,04; 0,1\}$ при интенсивности обслуживания $\mu=0,05$.

Таблиц соответственно будет по две для каждого фиксированного значения λ .

Далее построить графики полученных значений по таблицам: T , \bar{t} , D , $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \{t_i\}$, t_{max} .

Таблица 4 Данные по времени ожидания заявок в очереди на обслуживание

№	Количество поступивших заявок N	Модельное время T	Среднее: \bar{t} $= \frac{\sum_{i=1}^{i=N} t_i}{N}$	Дисперсия выборочная: D $= \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (t_i - \bar{t})^2}{N - 1}$	Максимум: $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \{t_i\}$	Положение максимума на временной оси: От 0 до T t_{max}
1.	20					
2.	40					
3.	60					
4.	80					
5.	100					
6.	120					

7.	140					
8.	160					
9.	180					
10.	200					

Таблица 5 Данные по времени жизни (задержки) заявок в системе

№	Количество поступивших заявок N	Модельное время T	Среднее: \bar{t} $= \frac{\sum_{i=1}^{i=N} t_i}{N}$	Дисперсия выборочная: D $= \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (t_i - \bar{t})^2}{N - 1}$	Максимум: $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \{t_i\}$	Положение максимума на временной оси: От 0 до T t_{max}
11.	20					
12.	40					
13.	60					
14.	80					
15.	100					
16.	120					
17.	140					
18.	160					
19.	180					
20.	200					

Сделать выводы по результатам моделирования. Представить их в табличном виде.

Среднее: $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} t_i}{N}$	Дисперсия выборочная: $D = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (t_i - \bar{t})^2}{N - 1}$	Максимум: $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \{t_i\}$	Положение максимума на временной оси: От 0 до T t_{max}

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (t_i - \bar{t})^2}{N - 1} = \frac{N}{N - 1} \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=N} t_i^2}{N} - \bar{t}^2 \right)$$

6). Исследовать влияние соотношения $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$, или μ на оценку среднего времени пребывания в системе методом регрессионного анализа.

Наша модель зависит от двух параметров: интенсивности поступления

заявок в систему λ и интенсивности обслуживания μ . Будем менять значения интенсивности обслуживания μ , приняв этот параметр за независимый фактор эксперимента, и исследовать его влияние на зависимый фактор модели – отклик, в качестве которого рассмотрим среднее время пребывания заявок в системе $\Delta t_{cp}^{жизни}$.

Для этого при фиксированном значении $\lambda = const$ варьировать значения ρ по определённому плану и вычислять значение $\mu = \rho \times \lambda$. Полученный окончательно план эксперимента представить в виде таблицы, см. табл. 6.

Таблица 6 План численного эксперимента

$\rho(x_j)$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
μ	$0,7 \times \lambda$	$0,8 \times \lambda$	$0,9 \times \lambda$	$1,0 \times \lambda$	$1,1 \times \lambda$	$1,2 \times \lambda$	$1,3 \times \lambda$
$\Delta t_{cp}^{жизни}$?	?	?	?	?	?	?

Независимыми факторами эксперимента будут значения, см. таблицу 7.

Таблица 7 Независимые факторы эксперимента

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
μ	$0,7 \times \lambda$	$0,8 \times \lambda$	$0,9 \times \lambda$	$1,0 \times \lambda$	$1,1 \times \lambda$	$1,2 \times \lambda$	$1,3 \times \lambda$

Полученные значения варианты x_j подставить в имитационную модель процесса и получить соответствующие отклики y_j по оценкам средней длительности пребывания заявок в системе:

$$\Delta t_{cp}^{жизни} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{N} = y_j, \quad \text{которые соответствуют значениям } \mu_j$$

варианты μ из плана эксперимента. Таким образом, мы пытаемся установить экспериментальную зависимость $y(x)$ на основании данных ограниченного планом эксперимента числа опытов.

Несколько увеличиваем число опытов, проводя параллельные эксперименты.

Провести m серий экспериментов. Количество параллельных экспериментов m устанавливает преподаватель.

Полученные данные свести в таблицу 8, и вычислить средние значения столбцов. По этим усреднённым откликам модели $y_{cp} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m}$ далее получаем уравнения регрессии.

Таблица 8 Сводная таблица результатов эксперимента

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}
y_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{26}	y_{27}
...
y_m	y_{m1}	y_{m2}	y_{m3}	y_{m4}	y_{m5}	y_{m6}	y_{m7}
y_{cp}	y_{cp1}	y_{cp2}	y_{cp3}	y_{cp4}	y_{cp5}	y_{cp6}	y_{cp7}

На основании полученных данных восстановить уравнение регрессии, связывающее среднее время жизни и значение μ или $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$.

Уравнение регрессии восстанавливает зависимость между независимыми факторами и зависимыми факторами эксперимента (иначе данными эксперимента), аппроксимируя параметрические функции определённого класса методом наименьших квадратов.

Рассмотрим и сравним эффективность применения линейной и степенной модели. Линейная модель представляется уравнением линейной регрессии: $y = A \cdot x + B$, а определяются коэффициенты A и B . Степенная модель представляется уравнением регрессии вида: $y = C \cdot x^m$, а определяются коэффициенты C и m .

В приложениях используется инструмент получения коэффициентов для линейной регрессии, поскольку в этом случае получаются аналитические формулы для определения коэффициентов. В этом случае сумма квадратов отклонений значений функции регрессии от экспериментальных значений в тех же точках представляет функцию экспериментальных данных и коэффициентов имеет вид:

$$E(\{X_i\}, \{Y_i\}, B, A) = \sum_{i=1}^N (Y_i - Y(X_i))^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - AX_i - B)^2$$

Коэффициенты регрессии получают **методом наименьших квадратов**:

$$(B, A) = \text{Arg} \min_{(B, A) \in \mathbb{R}^2} E(\{X_i\}, \{Y_i\}, B, A)$$

Коэффициенты являются решениями системы уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - B - AX_i) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - B - AX_i)X_i = 0$$

Формулы для определения коэффициентов линейной регрессии:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \sum_{i=1}^N X_i^2 - \sum_{i=1}^N X_i Y_i \sum_{i=1}^N X_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2}$$

$$A = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \sum_{i=1}^N Y_i \sum_{i=1}^N X_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2}$$

Линейная регрессия не всегда аппроксимирует зависимость между данными с хорошей точностью. Точность аппроксимации устанавливается по критерию R-квадрат. Если зависимость между данными близка к линейной, см. рис. 29, то аппроксимация получается с хорошей точностью.

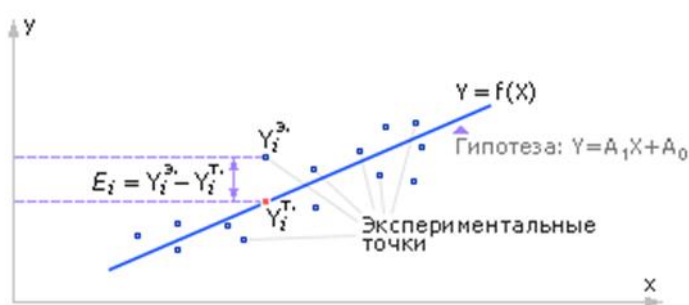


Рисунок 29

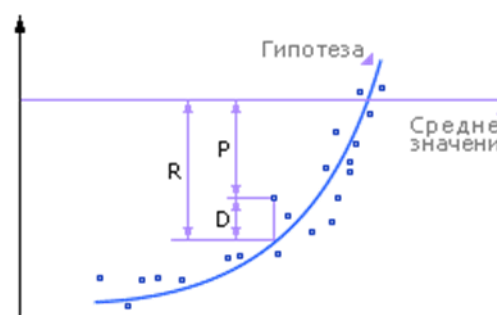


Рисунок 30

Если зависимость между данными проявляет явную нелинейность, см. рис. 30, то применяют некоторые приёмы, чтобы улучшить аппроксимацию

при использовании инструмента линейной регрессии.

К линейной регрессии может быть приведена степенная зависимость путём логарифмирования обеих частей равенства:

$$YR = C \cdot X^m \rightarrow \ln YR = \ln C + m \cdot \ln X$$

В итоге мы получаем линейную регрессию между логарифмами факторов и откликов экспериментальной модели в форме: $Y = A \cdot X + B$.

Вычислив значения $A = m$ и $B = \ln C$, вычислим C по формуле $C = e^B$. Таким образом, мы получим коэффициенты для уравнения степенной регрессии.

В качестве параметрических функций для уравнения регрессии исследовать два вида:

$YL = A \cdot X + B$ – линейная регрессия;

$YR = C \cdot X^m$ – степенная регрессия.

Для получения коэффициентов регрессии представим данные в виде таблицы 9.

Таблица 9

Y	X	LN Y	LN X	YL	YR
Y_{cp1}	x_1				
Y_{cp1}	x_2				
Y_{cp1}	x_3				
Y_{cp1}	x_4				
Y_{cp1}	x_5				
Y_{cp1}	x_6				
Y_{cp1}	x_7				

По результатам обработки данных, вычислив коэффициенты и значения функций в столбцах таблицы 9, строим графики функций регрессии YL , YR и экспериментальных точек Y , см. рис 31.

Получаемые в форме уравнений регрессии зависимости отражают законы, связывающие между собой такие параметры модели, как

интенсивность обслуживания и средняя продолжительность пребывания заявок в системе. Это уравнение само представляет модель зависимости производительности системы обработки заявок при заданной скорости их поступления в систему от интенсивности обслуживания.

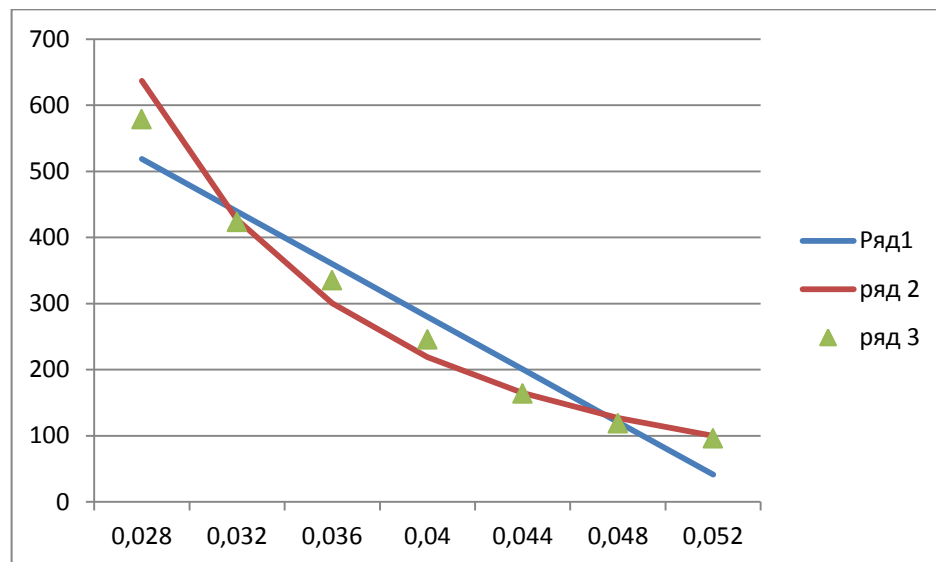


Рисунок 31 Графики линий регрессии и экспериментальных точек

Выводы

Объяснить полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайных процессов.
2. Объясните задачи и цели имитационного моделирования систем.
3. Метод Монте-Карло.
4. Как моделируют случайный процесс: опишите методы и алгоритмы моделирования
5. Что такое распределение случайных чисел.
6. Какие законы статистических распределений случайных величин Вы знаете?
7. Назовите основные характеристики статистических распределений: теоретическое определение и оценки по выборочным значениям.

8. Закон распределения Пуассона.
9. Экспоненциальный закон распределения.
10. Частоты распределения и гистограмма.

Тема 5. Событийно-вероятностное моделирование случайных процессов в стохастических системах с использованием математических схем вероятностных сетей.

В работе рассматривается моделирование случайного процесса в системе с целью исследования изменения во времени распределения вероятностей пребывания в отдельных состояниях стохастической неэргодической системы, имеющей конечное поглощающее состояние. Исследование проводится на модели Марковской цепи, представленной в двух вариантах с помощью схемы размеченного орграфа. Введение в модель шкалы случайных моментов времени возникновения событий в системе, распределённых по непрерывным законам, превращает модель в полумарковскую. Этот приём позволяет промасштабировать абстрактное модельное время запуска переходов в системе к оценке реального времени достижения определённых состояний с априорно заданной вероятностью. Модель позволяет оценить статистически взвешенное время достижения определённых критических состояний в системе защиты ИС. Этот параметр даёт представление о возможных временных рисках, определяющих стойкость системы защиты.

Практическое занятие №5.

Тема: Численное моделирование распределения вероятностей дискретных состояний систем информационной безопасности на основе марковских цепей.

Цель: Изучить применение аппарата марковских цепей и уравнений Чэпмена-Колмогорова для моделирования случайных процессов изменения вероятностей дискретных состояний в систем защиты информации.

Теоретические основы

Рассмотрим примеры применения марковских моделей к моделированию эшелонированных систем защиты информации в автоматизированных информационных системах, а также в

телекоммуникационных системах и сетях.

Данный раздел относится к теории моделирования стохастических дискретных систем. Эволюция состояний системы представляется размеченным орграфом, показывающим возможные направления переходов между состояниями в системе и вероятности этих переходов. Математическое распределение вероятностей состояний системы в моменты модельного времени $t = 0, 1, 2, \dots, K, \dots$ представлено рекуррентными соотношениями Чэпмена-Колмогорова расчёта Марковских цепей. Значения стохастических параметров модели, касающихся временных отрезков, представляются с использованием методов имитационного моделирования, например – метода Монте-Карло для генерации последовательностей случайных чисел.

Процесс преодоления системы эшелонированной защиты информации – вероятностный, имеет конечное число дискретных состояний (равное числу преград плюс единица).

Время преодоления каждой из преград является случайной величиной (в общем случае распределенной по неизвестному закону).

Все события в процессе преодоления защиты совершаются в некоторые дискретные моменты времени (шаги), причем ограничений на длительность шага не накладывается.

Переход из одного состояния в другое происходит с некоторой вероятностью, которая зависит только от того, в каком состоянии система находилась на предыдущем шаге.

Таким образом, процесс преодоления эшелонированной системы защиты информации, в общем случае не Марковский, можно представить Марковским процессом.

Будем полагать, что средства защиты различных эшелонов неоднородны, попытки преодоления одного и того же средства защиты в одном эшелоне независимы.

Рассматриваются следующие модели системы информационной безопасности:

1) Простая Марковская модель эшелонированной системы защиты без восстановления (см. рис. 1) строится исходя из следующих ограничений:

- преодоление очередного эшелона защиты возможно только после преодоления предыдущего;
- преодоленные средства защиты не восстанавливаются.

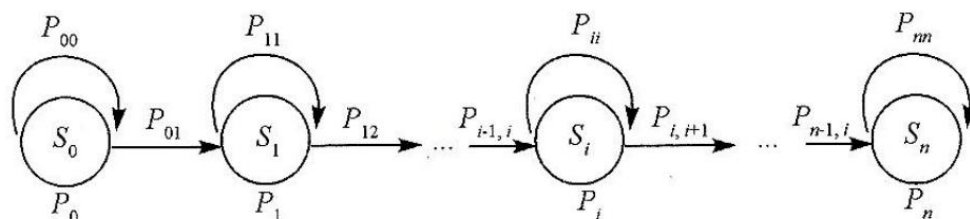


Рисунок 1 Простая Марковская модель эшелонированной системы защиты

Состояния, указанные на графе, имеют следующее содержание: S_0 – злоумышленник осуществляет попытку преодоления внешней преграды (внешнего эшелона); S_1 – злоумышленник преодолел внешнюю преграду и предпринимает попытку преодоления второго эшелона защиты; S_i злоумышленник преодолел i –ый эшелон защиты и предпринимает попытку преодоления $(i+1)$ –го эшелона защиты; S_n – злоумышленник преодолел последний эшелон защиты (поглощающее состояние). При этом всякий переход в последующее состояние интерпретируется как ухудшение состояния защиты, а переход в текущее состояние – как сохранение данного уровня защиты. Фрагмент схемы переходов из i –го узла модели (на рис.1) представлен на рис. 2.

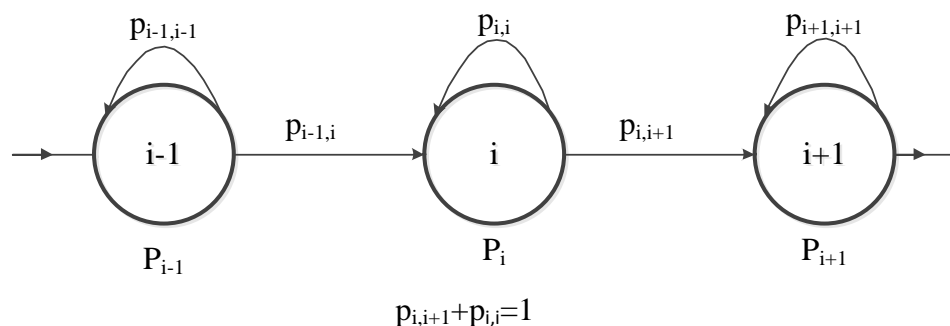


Рисунок 2 Фрагмент схемы Марковской модели эшелонированной пассивной защиты без восстановления состояний

Матрица условных вероятностей перехода 1-ой марковской модели, представлена ниже:

$$\|p_{ij}\| = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{i,i} & p_{i,i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Процесс смены состояний в рассматриваемой системе при преодолении эшелонированной защиты – случайный и дискретный как по состояниям, так и по времени.

Уравнения (рекуррентные формулы) марковской модели (марковской цепи) для вычисления вероятностей пребывания системы одном из возможных состояний в каждый момент модельного времени выведем, используя матрицу условных вероятностей переходов и формулу Байеса для условных вероятностей с учётом Марковости процесса:

$$\begin{aligned} P_0^k &= p_{0,0} P_0^{k-1} \\ P_1^k &= p_{0,1} P_0^{k-1} + p_{1,1} P_1^{k-1} \\ &\dots \\ P_i^k &= p_{i-1,i} P_{i-1}^{k-1} + p_{i,i} P_i^{k-1} \\ &\dots \\ P_n^k &= p_{n-1,n} P_{n-1}^{k-1} + 1 P_n^{k-1} \end{aligned} \quad (1)$$

К системе добавляются условия нормировки (полная сумма вероятностей несовместных событий): $\sum_{j=0}^n P_j^k = 1$; $\sum_{j=0}^n p_{i,j} = 1$

В общем виде результат рекуррентной операции на k -ом шаге для i -ого состояния можно выразить универсальной формулой Чэпмена-Колмогорова:

$$P_i^k = \sum_{j=0}^n p_{j,i} P_j^{k-1} = p_{0,i} P_0^{k-1} + p_{1,i} P_1^{k-1} + \dots + p_{j,i} P_j^{k-1} + \dots + p_{n,i} P_n^{k-1}$$

, где n – номер (индекс) конечного состояния (например, в задаче с 7-ью состояниями $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$, которым соответствует на каждом k -ом

шаге $[k \in \{0, 1, 2, \dots, N, \dots\}]$ распределение вероятностей пребывания системы в этих состояниях $\{P_0^k, P_1^k, P_2^k, P_3^k, P_4^k, P_5^k, P_6^k\}$ номер состояния меняется от 0 до 6).

Согласно уравнению Чэпмена-Колмогорова правило вычисления вероятностей состояний на каждом шаге модельного времени (после очередного перехода) можно сформулировать, представляя распределение вероятности состояний как вектор-столбец или вектор-строку, элементами которой выступают вероятности состояний, причём номер элемента столбца или строки есть номер состояния. Каждый элемент столбца или строки с соответствующим номером есть результат сложения почленного умножения столбца переходной матрицы с номером, соответствующем номеру вычисляемого элемента, на элементы столбца или строки, полученные на предыдущем шаге рекуррентной процедуры.

Вычисляемые таким образом значения представляют собой статистические значения вероятностей нахождения системы в том или ином состоянии на данном шаге модельного времени.

Процедура определения последовательности смены состояний, если система в начале атаки находится в состоянии $S(0): P_0^0 = 1; P_1^0 = 0; P_2^0 = 0; \dots; P_n^0 = 0$ производится расчетом по рекуррентным формулам. На первом шаге:

$$P_0^1 = p_{0,0}$$

$$P_1^1 = p_{0,1}$$

$$P_2^1 = 0$$

...

$$P_n^1 = 0$$

На втором шаге:

$$\begin{aligned}
P_0^2 &= p_{0,0}^2 \\
P_1^2 &= p_{0,1}p_{0,0} + p_{1,1}p_{0,1} = p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) \\
P_2^2 &= p_{1,2}p_{0,1} \\
&\dots \\
P_i^k &= 0 \\
&\dots \\
P_n^k &= 0
\end{aligned}$$

На третьем шаге:

$$\begin{aligned}
P_0^3 &= p_{0,0}^3 \\
P_1^3 &= p_{0,1}p_{0,0}^2 + p_{1,1}p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) \\
P_2^3 &= p_{1,2}p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) + p_{2,2}p_{1,2}p_{0,1} \\
P_3^3 &= p_{2,3}p_{1,2}p_{0,1} \\
&\dots \\
P_i^k &= p_{i-1,i}P_{i-1}^{k-1} + p_{i,i}P_i^{k-1} \\
&\dots \\
P_n^k &= p_{n-1,n}P_{n-1}^{k-1} + 1P_n^{k-1}
\end{aligned}$$

и т.д.

Для численного моделирования последовательности переходных состояний за m -шагов, надо воспользоваться рекуррентными соотношениями (1), по которым в цикле размерностью от 1 до m последовательно вычисляются распределения вероятности состояний на каждом шаге. Для реализации последовательных вычислений надо задать начальное распределение: $\{P_0^0 = 1; P_1^0 = 0; P_2^0 = 0; \dots; P_n^0 = 0\}$

Начальное распределение может быть и другим, но подчиняющимся условию нормировки: $\sum_{j=0}^n P_j^k = 1$

В нашей работе мы рассматриваем систему эшелонированной защиты с 7-ью состояниями $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Состояние S_0 – это исходное, т.е. неповреждённое состояние системы, состояние S_6 – это конечное, т.е. выведенное из строя, состояние системы. Каждый переход в направлении от S_0 до S_6 рассматривается как ухудшение состояния из-за увеличения степени повреждения.

Схема размеченной на 7 состояний информационной системы с пассивной системой эшелонированной защиты без восстановления представлена на рис. 3.

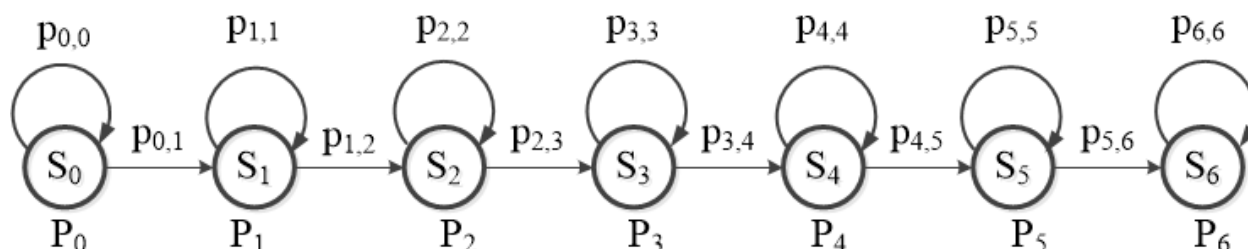


Рисунок 3 Схема размеченной на 7 состояний марковской модели для ИС с пассивной СЗИ без восстановления.

Примеры

Матрицы переходов на 5 состояний при разных уровнях стабильности отдельных состояний рассматриваются ниже.

Вариант1

Переходные вероятности свидетельствуют о высокой консервативности стохастической системы, тяготеющей к сохранению текущего состояния.

$$\begin{vmatrix} 0,9 & 0,1 & & & \\ & 0,9 & 0,1 & & \\ & & 0,9 & 0,1 & \\ & & & 0,9 & 0,1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Первый шаг:

$$P_0^1 = 0,9$$

$$P_1^1 = 0,1$$

$$P_2^1 = 0$$

$$P_3^1 = 0$$

$$P_4^1 = 0$$

Второй шаг:

$$\begin{aligned}
P_0^2 &= 0,81 \\
P_1^2 &= p_{0,1}p_{0,0} + p_{1,1}p_{0,1} = 0,1 \cdot (0,9 + 0,9) = 0,18 \\
P_2^2 &= p_{1,2}p_{0,1} = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \\
P_3^2 &= 0 \\
P_4^2 &= 0
\end{aligned}$$

Третий шаг:

$$\begin{aligned}
P_0^3 &= 0,729 \\
P_1^3 &= p_{0,1}p_{0,0}^2 + p_{1,1}p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) = 0,1 \cdot 0,81 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 1,8 = 0,243 \\
P_2^3 &= p_{1,2}p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) + p_{2,2}p_{1,2}p_{0,1} = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 1,8 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,027 \\
P_3^3 &= p_{2,3}p_{1,2}p_{0,1} = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001 \\
P_4^3 &= 0
\end{aligned}$$

и т.д.

Вариант 2

Переходные вероятности характеризуют систему, имеющую равновероятный характер консервативности и волатильности.

$$\begin{vmatrix}
0,5 & 0,5 & & & \\
& 0,5 & 0,5 & & \\
& & 0,5 & 0,5 & \\
& & & 0,5 & 0,5 \\
& & & & 1
\end{vmatrix}$$

Первый шаг:

$$\begin{aligned}
P_0^1 &= 0,5 \\
P_1^1 &= 0,5 \\
P_2^1 &= 0 \\
P_3^1 &= 0 \\
P_4^1 &= 0
\end{aligned}$$

Второй шаг:

$$\begin{aligned}
P_0^2 &= 0,25 \\
P_1^2 &= p_{0,1}p_{0,0} + p_{1,1}p_{0,1} = 0,5 \cdot (0,5 + 0,5) = 0,5 \\
P_2^2 &= p_{1,2}p_{0,1} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \\
P_3^2 &= 0 \\
P_4^2 &= 0
\end{aligned}$$

Третий шаг:

$$P_0^3 = 0,125$$

$$P_1^3 = p_{0,1}p_{0,0}^2 + p_{1,1}p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) = 0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 = 0,375$$

$$P_2^3 = p_{1,2}p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) + p_{2,2}p_{1,2}p_{0,1} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,375$$

$$P_3^3 = p_{2,3}p_{1,2}p_{0,1} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$$

$$P_4^3 = 0$$

и т.д.

Очевидно, чем больше эшелонов защиты (или промежуточных состояний, в которых может находиться система), тем больше шагов потребуется для полного преодоления защиты. Более стойкая система защиты на каждом эшелоне характеризуется меньшими вероятностями перехода и большими вероятностями сохранения текущего состояния. Таким образом, большей устойчивостью будет обладать консервативная система с большим числом эшелонов.

Рассмотрите пример системы с тяготением к волатильности.

2) Марковская модель эшелонированной системы защиты с восстановлением (см. рис. 4).

Если в системе защиты информации реализована возможность восстановления преодоленных эшелонов защиты, то она характеризуется более высокой устойчивостью.

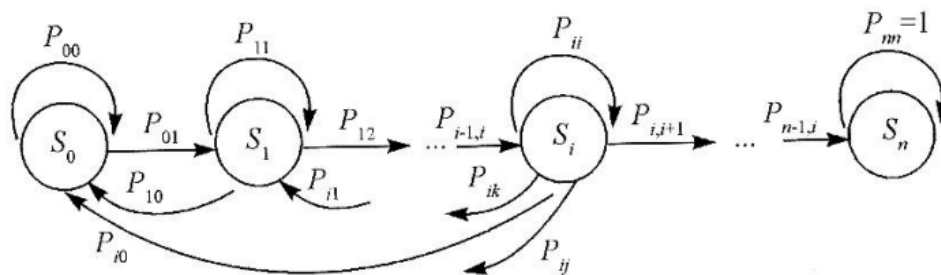
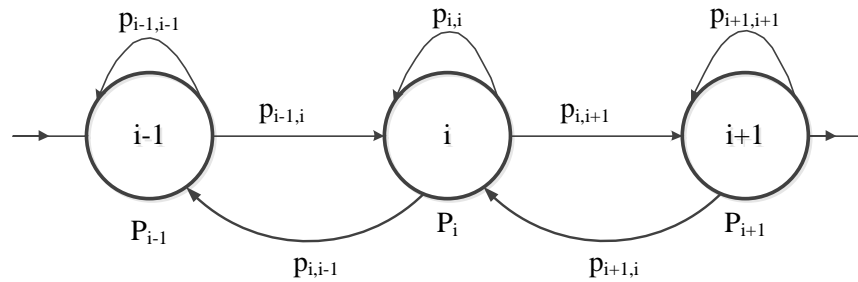


Рисунок 4 Марковская модель эшелонированной активной системы защиты с восстановлением

Во 2-ой модели этом всякий переход в последующее состояние интерпретируется как ухудшение состояния защиты, переход в текущее состояние – как сохранение данного уровня защиты, а переход в любое предыдущее состояние как восстановление более высокого уровня защиты.

Фрагмент схемы переходов из i -го узла модели (на рис.4) представлен на рис. 5.



$$p_{i,i+1} + p_{i,i} + p_{i,i-1} = 1$$

Рисунок 5 Фрагмент схемы Марковской модели эшелонированной активной защиты с восстановлением состояний

Общий вид матрицы условных вероятностей переходов для 2-ой схемы (предполагается упрощённая модель восстановления, когда существует возможность восстановиться только до предыдущего состояния)

$$\|p_{ij}\| = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_{i,i-1} & p_{i,i} & p_{i,i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n-1,n-2} & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Схема размеченной на 7 состояний информационной системы с пассивной системой эшелонированной защиты без восстановления представлена на рис. 6.

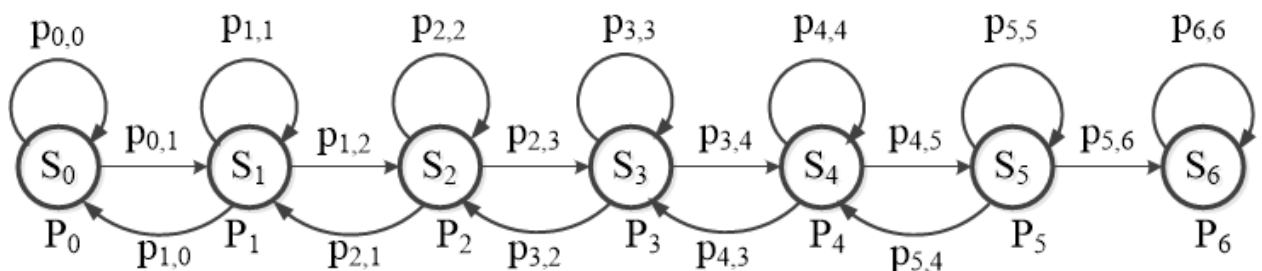


Рисунок 6 Схема размеченной на 7 состояний марковской модели для ИС с активной СЗИ с восстановлением.

При проведении процесса атаки в определённые моменты модельного времени могут происходить переходы с ухудшением состояния системы. Вероятности состояний на каждом шаге модельного времени дают среднестатистическую оценку возможности пребывания системы в каждом из состояний. Принимая в качестве критического уровня угрозы вероятность пребывания в k -ом состоянии $P_k^{\text{крит}}$, определяем количество шагов модельного времени N , при котором оцениваемая вероятность пребывания станет равна или больше заданного значения $P_k^N \geq P_k^{\text{крит}}$. Число шагов модельного времени N в данной модельной интерпретации выступает критерием устойчивости СЗИ в отношении проводимой атаки. На величину N оказывают влияние значения условных вероятностей перехода в рамках рассматриваемой схемы, а также вид схемы. Например, при сопоставимых значениях условных вероятностей перехода в направлении ухудшения состояния СЗИ лучшими свойствами должна обладать модель активной эшелонированной защиты с восстановлением состояний.

Если перейти от модельного времени, измеряемого шагами смены состояний ($t = 1, 2, 3, \dots, m$), к реальному времени, моделируя его случайным процессом, а также моделируя случайным процессом время преодоления очередного барьера, то можно оценить общее время проникновения в тот или иной эшелон.

Задание на работу по моделированию распределения состояний системы.

1. Смоделировать переходные характеристики 1-ой и 2-ой схем, согласно изложенному ниже алгоритму. Для этого необходимо задать матрицы условных вероятностей переходов для 1-ой схемы без восстановления и 2-ой схемы с восстановлением. Для каждой схемы рассчитать статистику состояний по 2-ум вариантам: 1-ый вариант с повышенной

консервативностью состояний, а 2-ой вариант, наоборот, с пониженной консервативностью состояний.

2. Используя рекуррентные формулы (1) рассчитать распределение вероятностей состояний системы после определённого числа событий, связанных с очередной атакой, которая может инициировать процессы перехода, приводящие к смене состояний системы. Число событий – это число шагов. Рекуррентные формулы определяют статистическое определение распределения вероятности, которые в рамках данной дискретной модели считаются строгими.
3. Рассматриваем 500 шагов с фиксацией данных каждого шага.
4. Смоделировать вычисление среднего времени критического состояния по преодолению k -го эшелона на уровне, оцениваемом критическим значением вероятности по условию $P_k^N \geq P_k^{\text{крит}}$.

Оценка времени в модели, таким образом, производится с учётом заданного уровня риска, оцениваемого статистически как критическое значение вероятности пребывания системы k -ом состоянии.

По заданному уровню $P_k^{\text{крит}}$ согласно последовательно вычисляемым рекуррентным формулам (1) определим число шагов N , после которых достигается требуемый уровень.

Принимаем, что закон распределения случайной величины промежутков времени между событиями в системе, инициирующих переходы, – экспоненциальный и имеет вид:

$$P(t - \tau) = 1 - e^{-\lambda(t-\tau)}$$

, где τ – временная постоянная (должна быть задана); λ – характеристика интенсивности потока событий в системе (должно быть задано). Генерируем L (должно быть задано) последовательностей случайных чисел $\{\dots, t_{i,j}, \dots\}_{1,1}^{L,N}$ методом обратных функций по формуле $t_{i,j} = \tau + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-r_{i,j}}\right)$, где $r_{i,j}$ – случайное число в диапазоне $r \in [0,1]$, распределённое по равномерному

закону. Оценка времени инициации N переходов по одной i -ой [$i \in \{1, 2, \dots, L\}$] последовательности вычисляется по формуле $T_i^N = \sum_{j=1}^N t_{i,j}$. Формируем последовательность оценок $\{T_i^N\}_1^L$. По этой выборке вычисляем среднюю оценку $\overline{T^N} = \frac{\sum_{i=1}^L T_i^N}{L}$.

Принимаем, что распределение времени преодоления m -го эшелона является непрерывным логарифмическим нормальным с плотностью, см. рис. 7:

$$f_T(t) = \frac{1}{t\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu_m)^2}{2\sigma_m^2}}$$

, где $m = 0, 1, \dots, k$; σ_m – дисперсия; μ_m – математическое ожидание.

Принимаем за оценку среднего времени преодоления эшелона – математическое ожидание.

Оценку среднего времени достижения критического уровня угрозы в k -ом состоянии определим по формуле $\overline{T_k} = \overline{T^N} + \sum_{m=0}^k \mu_m$.

5. Сравнить данные моделирования на 100-ом шаге и на 500-ом шаге.
6. Оценить устойчивость первой схемы при разных вариантах задания переходных вероятностей (см. пример выше; или для этого можно построить графики $\overline{T_k}$ и $\overline{T^N}$ в зависимости от значений переходной вероятности в 1-ой модели, а также отразить на нём уровень $\overline{T_k}$ и $\overline{T^N}$ для 2-ой модели).
7. Сравнить устойчивость схем 1 и 2.

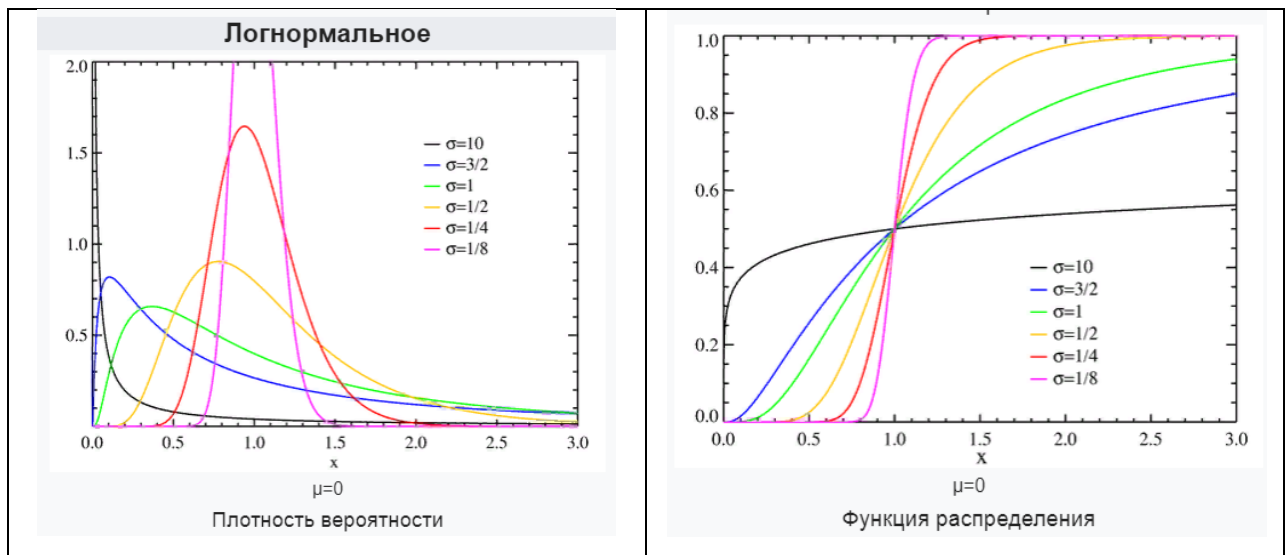


Рисунок 7 Функции непрерывного логнормального распределения.

Дополнительные сведения к выполнению работы

Пример исходных данных задачи.

Принимаем количество рабочих состояний модели системы – 7, а номер состояния, для которого мы исследуем время достижения критического уровня – 5.

Вид матрицы переходов для 1-ой схемы

$$\begin{bmatrix}
 p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{56} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

Вид матрицы переходов для 2-ой схемы (предполагается упрощённая модель восстановления, когда существует возможность восстановиться только до предыдущего состояния)

$$\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Уравнения для вычисления вероятностей на каждом шаге для модели 2:

$$\begin{aligned} P_0^k &= p_{0,0}P_0^{k-1} + p_{1,0}P_1^{k-1} \\ P_1^k &= p_{0,1}P_0^{k-1} + p_{1,1}P_1^{k-1} + p_{2,1}P_2^{k-1} \\ &\quad \dots \\ P_i^k &= p_{i-1,i}P_{i-1}^{k-1} + p_{i,i}P_i^{k-1} + p_{i+1,i}P_{i+1}^{k-1} \\ &\quad \dots \\ P_n^k &= p_{n-1,n}P_{n-1}^{k-1} + 1P_n^{k-1} \end{aligned}$$

Общий вид матрицы переходов для подобных моделей, где имеется возможность переходов из каждого состояния в любые другие:

$$\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} & p_{06} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{50} & p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{60} & p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{bmatrix}$$

В этой модели конечное состояние графа не будет поглощающим.

Примечание !!!

Параметр λ экспоненциального распределения промежутков времени, через которые производятся попытки реализации атак на систему. Принимаем среднее время Δt (например, $\Delta t = 3$ сут), тогда $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$ (в примере $\lambda = \frac{1}{3} \text{ сут}^{-1}$).

Количество параллельных выборок для оценки $T_i^N = \sum_{j=1}^N t_{i,j}$ и $\overline{T^N} = \frac{\sum_{i=1}^L T_i^N}{L}$ принимаем $L = 10$.

Математические ожидания логарифмического нормального

распределения времени, затрачиваемого на преодоление рубежа защиты μ_m , задаём в виде ряда $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$. Величину средней трудоёмкости μ_m задаём в часах (от 1 до 5 часов), а затем переводим и подставляем в ряд в сутках $\left(\frac{\mu_m(\text{час})}{24}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию марковских моделей.
2. Объясните назначение элементов орграфа в марковских моделях.
3. Классификация состояний в марковских моделях.
4. Что такое матрица переходов в модели?
5. Дайте интерпретацию значения вероятности пребывания системы в i -ом состоянии на k -ом шаге P_i^k .
6. Какие параметры модели влияют на степень стойкости системы защиты к атаке на информационную систему?
7. Как определить вероятность успешного проведения атаки на систему?
8. Напишите уравнения Чэпмена-Колмогорова, объясните их.

Список литературы

1. Дорошенко А. Н. Математическое и имитационное моделирование дискретных процессов и систем [Электронный ресурс]: учебное пособие /А. Н. Дорошенко. — М.: МИРЭА, 2018. — 151 с. Электрон, опт. диск (ISO)
2. Масыгин В.Б. Математическое моделирование и информационные технологии при проектировании [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Масыгин В.Б., Волгина Н.В.— Электрон. текстовые данные.— Омск: Омский государственный технический университет, 2017.— 167 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/78442.html>.— ЭБС «IPRbooks»
3. Щеглов А.Ю. Математические модели и методы формального проектирования систем защиты информационных систем [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Щеглов А.Ю., Щеглов К.А.— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Университет ИТМО, 2015.— 93 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/67260.html>.— ЭБС «IPRbooks»
4. Зариковская Н.В. Математическое моделирование систем [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Зариковская Н.В.— Электрон. текстовые данные.— Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2014.— 168 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/72124.html>.— ЭБС «IPRbooks»

б) дополнительная литература:

1. Трухин М.П. Моделирование сигналов и систем. Конечномерные системы и дискретные каналы связи. – Санкт Петербург: Изд-во «Лань», 2019. – 280 с.
2. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учеб, пособие для вузов / Н. В. Голубева. — СПб.: Лань; 2013. — 191 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). — Библиогр.: с. 176-179 (59 назв.)

3. Советов Б.Я. Моделирование систем : учебник для вузов / Б.Я. Советов. — М.: Высш. шк., 2001. — 343 с.
4. Васильев К.К., Служивый М.Н. Математическое моделирование систем связи: учеб, пособие. — УлГТУ, 2008 — 168 с.
5. Ивашкин Ю.А. Мультиагентное имитационное моделирование больших систем: учеб, пособие. — М.: МГУПБ, 2008. — 230 с.
6. Беляева М.А. Моделирование систем: электронное учеб, пособие. — М.: МГУП, 2010.
7. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. — СПб.: БХВ- Петербург, 2006. — 400 с.
8. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем. — М.: ИЛУ РАН, Труды междун. научно-практической конференции. 2005, — 231 с.
9. Костин В.Н., Тишина Н.А. Статистические методы и модели: Учебное пособие. — Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. - 138 с.
10. Ивашкин Ю.А., Ивашкин А.Ю. Агентные технологии имитационного моделирования конфликтных ситуаций. — Воронеж: Материалы 3-й Всероссийской конференции «Теория конфликта и ее приложения», 2004. — С. 48-49.
11. Шмидт Б. Введение в имитационное моделирование в системе Simplex3 / пер. с нем. Ю.А. Ивашкина. — М.: Наука, 2003. — 30 с.
12. Шмидт Б. Искусство моделирования и имитации. Введение в имитационную систему Simplex3 : пер. с нем.: SCS-Европа BVBA, Гент. Бельгия. 2003. — 550 с.
13. Ивашкин Ю.А. Структурно-параметрическое моделирование интеллектуальных агентов и систем. — Воронеж: Сб.: Информационные технологии и системы. Вып. 4, Воронежская гос. технол. академия, 2001. — С 33-37.
14. Гульяев А. В. Визуальное моделирование в среде MATLAB: учебный курс. — СПб.: Питер, 2000. — 432 с.

15. Спицнадель В.И. Основы системного анализа. — СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2000. — 326 с.
16. В.Н. Вапник и др. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей.//под ред. В.Н. Вапника. — М: «НАУКА» главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 816 с.
17. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем — искусство и наука. — М.: Мир, 1978. — 301с.