

МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МИРЭА)

Кафедра электротехники и механики ФТИ

Родюков М.С., Микаева С.А., Брысин А.Н., Филинов В.В.

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Конспект лекций

Москва, 2018

Лекция 1

Основные положения

1.1. Электрическая цепь. Основные понятия и определения

1.1.1. Электрические цепи и схемы.

Электротехника — это наука о практическом применении электрических и магнитных явлений.

Предметом изучения электротехники являются процессы и явления, происходящие в электрических и магнитных цепях.

Электрическая цепь — совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, электрическом токе и электрическом напряжении.

В состав электрической цепи входят источники и потребители (нагрузка) электрической энергии, коммутационные устройства и измерительные приборы, а также соединяющие их проводники.

В *источниках* происходит преобразование различных видов энергии (чаще всего механической и химической) в электрическую. В *потребителях* (нагрузке) происходит преобразование электрической энергии в другие виды (механическую — электродвигатели, световую — лампы, тепловую — нагревательные приборы и т. д.). *Коммутационные устройства* обеспечивают необходимую конфигурацию цепи, а *измерительные приборы* дают информацию о параметрах электрической цепи.

В зависимости от характерных признаков существует разные классификации электрических цепей:

1. По роду протекающего тока:

- **цепи постоянного тока** — цепи, в которых ток, с течением времени, не меняется по величине;
- **цепи переменного тока** — цепи, в которых ток, с течением времени, меняется по величине.

2. По характеру зависимости между током и напряжением:

- **линейные цепи** — цепи, в которых зависимость между током и напряжением имеет *линейный* характер;

- **нелинейные цепи** — цепи, в которых зависимость между током и напряжением, или (и) током и потокосцеплением, или (и) зарядом и напряжением имеет *нелинейный* характер.
3. По закону изменения тока и напряжения:
- **синусоидальные цепи** — цепи, в которых ток и напряжение изменяются по закону *синуса* (синусоидальный сигнал ещё называется «*гармоническим*»);
 - **несинусоидальные цепи** — цепи, в которых ток и напряжение изменяются по закону, *отличному* от *синуса*.
4. По наличию источника электрической энергии:
- **активные цепи** — электрические цепи, *содержащие* источники электрической энергии;
 - **пассивные цепи** — электрические цепи, *не содержащие* источников электрической энергии.
5. По влиянию длины цепи на её параметры¹:
- **электрическая цепь с сосредоточенными параметрами** — электрическая цепь, в которой электрические сопротивления, индуктивности и электрические емкости считают сосредоточенными на отдельных участках этой цепи;
 - **электрическая цепь с распределенными параметрами** — электрическая цепь, в которой электрические сопротивления, проводимости, индуктивности и электрические емкости распределены вдоль этой цепи.

Для удобства представления и анализа электрических цепей используются *электрические схемы*, на которых элементы электрической цепи изображаются с помощью **условных графических обозначений (УГО)**².

Электрическая схема — это графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее соединения этих элементов.

Существуют около полутора десятка различных видов электрических схем (принципиальные, монтажные и др.), из всего разнообразия которых мы будем пользоваться только *схемами замещения*.

Схема замещения — это схема электрической цепи, в которой вместо реальных элементов используются их идеализированные математические модели, с необходимой точностью отражающие реальные физические

¹Протяжённость электрической цепи начинает оказывать влияние на её параметры когда длина электромагнитной волны, создаваемой источником электрической энергии, будет сопоставима (или больше) длины цепи.

²Применение и начертание условных графических обозначений регламентируются ЕСКД и приведено в стандартах серии 2.7.

процессы, которые протекают в электрической цепи (например, катушка индуктивности, обычно, представляется схемой замещения, состоящей из последовательно соединённых индуктивного и резистивного элементов, где первый описывает магнитные процессы, а второй — потери на активное сопротивление провода обмотки).

Важно понять, что в электротехнике рассматриваются *исключительно математические модели*, которые с необходимой точностью описывают процессы, протекающие в реальной электрической цепи.

1.1.2. Основные величины, характеризующие процессы в электрической цепи

1.1.2.1. Электрический ток

Электрический ток — явление направленного движения носителей электрического заряда³.

В качестве носителей заряда в металлах выступают отрицательно заряженные частицы — электроны, в жидкостях и газах — положительно или отрицательно заряженные ионы.

Исторически за направление тока принято считать направление в котором перемещаются *положительно* заряженные частицы.

Следует отметить, что при расчётах электрических цепей часто используется направление тока в ветвях (реже напряжения), которые отсутствуют в исходных данных. В этом случае направление определяется произвольно и называется *условно–положительным*.

Важно: Если в результате расчёта ток или напряжение получатся отрицательным, то значит *условно–положительное* направление было выбрано неправильно. *Важно понимать, что это не является ошибкой расчёта, а исключительно особенностью метода.*

1.1.2.2. Сила тока

Сила тока является силовой характеристикой электрического тока и характеризует скорость переноса электрических зарядов.

Электрический ток, согласно определению, это явление переноса электрических зарядов, следовательно он характеризуется количеством зарядов, перенесённых в единицу времени:

³Стандарт даёт несколько более сложное определение: *электрический ток* это явление направленного движения носителей электрических зарядов и (или) явление изменения электрического поля во времени, сопровождаемые магнитным полем.

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Единицей измерения силы электрического тока является **ампер** (названа в честь французского физика Андре–Мари Ампера, 1775 — 1836 гг.): *при постоянном токе в один ампер (1 А) через поперечное сечение проводника за одну секунду (1 с) переносится заряд в один кулон (1 Кл).*

$$[i] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}.$$

Сила тока — это скалярная величина, которой приписывается направление, совпадающее с направлением движения положительных зарядов.

Сила тока обозначается латинской буквой i (мгновенное значение), I (постоянный ток или действующее значение переменного), I_m (максимальное или амплитудное значение синусоидального) и \underline{I} (комплексное значение).

1.1.2.3. Напряжение

Напряжение является энергетической характеристикой электрического тока и характеризует энергию, затрачиваемую на перенос электрического заряда.

Электрическое напряжение между двумя точками электрической цепи определяется как разность потенциалов между ними.

Электрический потенциал точки равен работе по переносу электрического заряда из бесконечности в данную точку:

$$V = \frac{dA}{dq}.$$

Единицей измерения электрического потенциала является **вольт**:

$$[V] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Согласно основным обозначением потенциала является латинская буква V , там же определено, в качестве вспомогательного, обозначение потенциала в виде греческой буквы φ , которым, во избежании путаницы с обозначением разности фаз, пользоваться не будем.

Потенциал одной точки в электротехнике не применяется, если же говорится про потенциал точки, то в этом случае подразумевается разность потенциалов между этой точкой и другой, потенциал которой принимается равным нулю.

Наибольшее применение нашла разность потенциалов двух точек, которую называют **электрическим напряжением** (или **падением напряжения**):

$$u = V_2 - V_1 = \frac{dA_{21}}{dq},$$

где dA_{21} — работа по переносу заряда dq из точки 2 в точку 1.

Таким образом *напряжение равно работе по переносу электрического заряда из точки с потенциалом V_2 в точку с потенциалом V_1* (рис. 1.1)

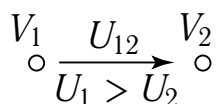


Рис. 1.1.
Напряжение
(разность
потенциалов)

Единицей измерения электрического напряжения является **вольт** (названа в честь итальянского физика Алессандро Вольта, 1745 — 1827 гг.): *при перемещении электрического заряда в 1 Кл между точками электрической цепи, разность потенциалов которых равна 1 В, совершается работа в 1 Дж:*

$$[u] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Напряжение является скалярной величиной, которой приписывается направление, соответствующие направлению, в котором перемещаются положительные заряды, т.е. *направление от точки цепи с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом* (таким образом, направление напряжения совпадает с направлением тока).

Напряжение обозначается латинской буквой u (мгновенное значение), U (постоянное напряжение или действующее значение переменного), U_m (максимальное или амплитудное значение синусоидального) и \underline{U} (комплексное значение).

1.1.2.4. Электродвижущая сила (ЭДС)

Электродвижущая сила (ЭДС) — характеризует работу сторонних сил по разделению зарядов внутри источника электрической энергии (положительные заряды смещаются к зажиму с большим потенциалом, а отрицательные — к зажиму с меньшим потенциалом).

Численно ЭДС равна разности потенциалов между зажимами источника при отсутствии в нём электрического тока.

Единицей измерения ЭДС является **вольт**, а направление определяется от точки с меньшим потенциалом к точке с большим (т.е. совпадает с направлением тока).

ЭДС обозначается латинской буквой e (мгновенное значение), E (постоянная ЭДС или действующее значение переменной), E_m (максимальное или амплитудное значение синусоидальной) и \underline{E} (комплексное значение).

1.1.2.5. Работа, мощность, КПД

При переносе электрического заряда совершается работа, которая исходя из ранее полученного выражения для напряжения $u = dA/dq$,

$$dA = u dq,$$

с учётом определения электрического тока ($i = dq/dt \Rightarrow dq = idt$) получим:

$$dA = u idt.$$

Единицей измерения работы является **джоуль** (названа в честь английского физика Джеймса Прескотта Джоуля, 1818 — 1889 гг.). *Один джоуль (1 Дж) равен энергии, выделяющейся в электрической цепи за одну секунду (1 с) при силе тока в ней один ампер (1 А) и напряжению на её концах один вольт (1 В):*

$$[A] = В \cdot А \cdot с = Дж.$$

Так как мощность численно равна работе, выполненной за некоторое время, и с учётом ранее полученного выражения для работы ($dA = u idt$) получим выражение для **мгновенной мощности**:

$$p = \frac{dA}{dt} = \frac{u idt}{dt}$$

или

$$p = ui$$

Единица измерения **активной мощности ватт** названа в честь английского изобретателя Джеймса Ватта (в другом прочтении — Уатта), 1736 — 1819 гг. *Один ватт (1 Вт) равен средней мощности, при которой за одну секунду (1 с) совершается работа в один джоуль (1 Дж):*

$$[p] = В \cdot А = Вт.$$

Коэффициент полезного действия (КПД) служит для оценки энергетической эффективности электрической системы и равен отношению полезной мощности системы (мощности, которая тратится на нагрузке — $p_{\text{нагр}}$) к затраченной (которую дают источники электрической энергии — $p_{\text{ист}}$):

$$\eta = \frac{p_{\text{нагр}}}{p_{\text{ист}}}.$$

1.1.3. Топологические понятия

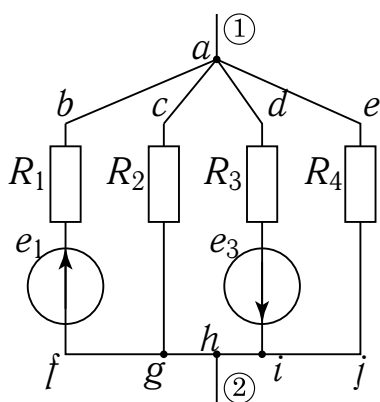


Рис. 1.2. Топологические понятия

Топологические понятия описывают характерные свойства соединений в электрической цепи, остающиеся неизменными при различных отображениях электрической цепи в схему и последующих её трансформациях.

При анализе электрических цепей активно используются понятия *узел*, *ветвь* и *контур*:

Ветвь электрической цепи — участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же электрический ток.

Узел электрической цепи — место соединения трёх и более ветвей электрической цепи.

Контур электрической цепи — последовательность ветвей электрической цепи, образующая замкнутый путь, в которой один из узлов одновременно является началом и концом пути, а остальные встречаются только один раз.

Независимые контуры — контуры, отличающиеся друг от друга хотя бы одной ветвью.

Рассмотрим эти понятия более подробно на примере схемы, приведённой на рис. 1.2. Электрическая цепь, показанная на этой схеме, имеет 4 ветви (fba , gca , ida и jea), два узла (1 и 2) и три контура ($fbacgf$, $gcadihg$ и $idaejji$). В данной цепи можно выделить и другие контуры (например $fbaejihgf$ или $fbadihgf$), но их рассматривать не рекомендуется, т. к. они усложняют анализ цепи.

Не смотря на то, что в нижней части схемы имеются три точки соединения ветвей (g , h и i), мы их рассматриваем как один узел. Это связано с тем, что данная схема является схемой замещения и сопротивление участка $g-h-i$ равно нулю и эти точки можно объединить в одну. Таким образом, точки f , g , h , i и j образуют один узел, а точки g и h — **устранимый узел** или **соединение**.

Если цепь содержит не менее двух узлов и контуров и не менее трёх ветвей, то такая цепь является **разветвлённой**, в противном случае — **неразветвлённой**.

Смешанным соединением участков электрической цепи называется сочетание последовательных и параллельных соединений.

1.1.4. Режимы работы электрических цепей. Шунт

В зависимости от соотношения сопротивления источника и нагрузки различают четыре режима электрической цепи:

1. Рабочие —

- *номинальный* ($R_{\text{н}} = R_{\text{нн}}$, все параметры цепи соответствуют расчётным);
- *согласованный* ($R_{\text{н}} = R_{\text{вн}}$, обеспечивает передачу максимальной мощности от источника к нагрузке при КПД 50 %).

2. Предельные —

- *холостого хода* ($R_{\text{н}} \gg R_{\text{вн}}$, разрыв электрической цепи, напряжение на выходных разъёмах равно ЭДС);
- *короткого замыкания* ($R_{\text{н}} \ll R_{\text{вн}}$, характеризуется высоким значением силы тока, которая ограничена только внутренним сопротивлением источника, обычно является аварийным режимом).

1.1.4.1. Номинальный режим

Номинальный режим — режим электрической цепи, в котором сопротивление нагрузки соответствует паспортному или расчётному ($R_{\text{н}} = R_{\text{нн}}$, рис. 1.3).

Номинальный режим является основным рабочим режимом любой электрической цепи.

Номинальному режиму соответствуют номинальные или расчётные значения напряжения ($u = u_{\text{н}}$) и тока ($i = i_{\text{н}}$).

Параметры номинального режима приводятся в паспорте устройства а также на паспортной табличке (шильдике), расположенном на корпусе устройства.

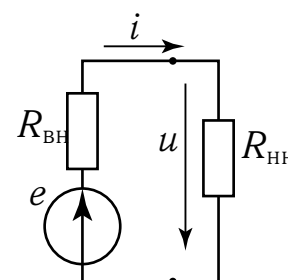


Рис. 1.3.
Номинальный режим

1.1.4.2. Согласованный режим

Согласованный режим — режим электрической цепи, в котором сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника ($R_{\text{н}} = R_{\text{вн}}$, рис. 1.4).

Характерной особенностью согласованного режима является максимум передаваемой мощности от источника к нагрузке. Основным недостатком этого режима является низкий КПД (50 %).

Рассмотрим согласованный режим подробнее.

Ток в цепи и мощность в цепи, приведённой на рис. 1.4 определяются следующими выражениями:

$$i = \frac{e}{R_{\text{вн}} + R_{\text{н}}}$$

$$p = R_{\text{н}} i^2 = R_{\text{н}} \frac{e^2}{(R_{\text{вн}} + R_{\text{н}})^2}$$

Найдём максимум мощности приёмника, приравняв к нулю производную мощности по сопротивлению нагрузки:

$$\frac{dp}{dR_{\text{н}}} = e^2 \frac{(R_{\text{вн}} + R_{\text{н}})^2 - 2(R_{\text{вн}} + R_{\text{н}})R_{\text{н}}}{(R_{\text{вн}} + R_{\text{н}})^4} = 0.$$

Полученное равенство будет выполняться при условии равенства нулю делителя (при $e = 0$ наступит режим холостого хода и передача энергии осуществляться не будет):

$$(R_{\text{вн}} + R_{\text{н}})^2 - 2(R_{\text{вн}} + R_{\text{н}})R_{\text{н}} = 0.$$

И окончательно:

$$R_{\text{вн}} = R_{\text{н}}.$$

Следствием равенства сопротивлений нагрузки и источника является низкое значение КПД:

$$\mu = \frac{R_{\text{н}} i^2}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вн}}) i^2} = \frac{R_{\text{н}}}{2R_{\text{н}}} = \frac{1}{2}.$$

В связи с низким КПД, согласованный режим применяется главным образом в маломощных (в первую очередь электронных) цепях.

1.1.4.3. Режим холостого хода

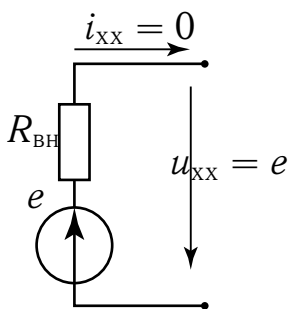


Рис. 1.5. Режим холостого хода

Режим холостого хода — режим электрической цепи, в котором сопротивление нагрузки значительно превышает внутренне сопротивление источника ($R_{\text{хх}} \gg R_{\text{вн}}$, рис. 1.5).

Говоря о режиме холостого хода, обычно, подразумевают работу без нагрузки, что, в случае электрических цепей, соответствует бесконечно большому сопротивлению или разрыву цепи.

Режиму холостого хода соответствует максимум напряжения (будет равно ЭДС: $u_{\text{хх}} = e$) и равенство нулю тока ($i_{\text{хх}} = 0$).

1.1.4.4. Режим короткого замыкания

Режим короткого замыкания — режим электрической цепи, в котором сопротивление нагрузки значительно ниже внутреннего сопротивления источника ($R_{кз} \ll R_{вн}$, рис. 1.6).

Говоря о режиме короткого замыкания, обычно, подразумевают аварийный режим вызванный разрушением изоляции или попаданием в цепь постороннего предмета.

Важно отметить, что в ряде случаев (например при исследовании трансформатора), для получения характеристик электрического устройства, проводят опыт короткого замыкания. В этом случае режим короткого замыкания не является аварийным, т.к. токи и напряжения в электрической цепи не превышают номинальных.

Режиму короткого замыкания соответствует минимум напряжения ($u_{кз} = 0$) и большое значение тока (фактически ток ограничен внутренним сопротивлением источника, $i_{кз} \rightarrow \infty$).

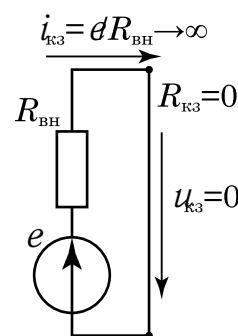


Рис. 1.6.

Режим
короткого
замыкания

1.1.4.5. Сводная таблица параметров основных режимов электрической цепи

Наименование режима	Сопротивление	Напряжение	Сила тока
Номинальный	$R_n = R_{нн}$	$u_n = u_{нн}$	$i_n = i_{нн}$
Согласованный	$R_n = R_{вн}$	—	—
Холостого хода	$R_n \gg R_{вн}$	$u_n = e$	$i_n \rightarrow 0$
Короткого замыкания	$R_n \ll R_{вн}$	$u_n \rightarrow 0$	$i_n \rightarrow \infty$

R_n — сопротивление нагрузки;

$R_{нн}$ — номинальное сопротивление нагрузки;

$R_{вн}$ — внутреннее сопротивление источника;

u_n — напряжение на нагрузке;

$u_{нн}$ — номинальное напряжение на нагрузке;

e — ЭДС;

i_n — сила тока в нагрузке;

$i_{нн}$ — номинальная сила тока в нагрузке;

1.1.4.6. Шунт

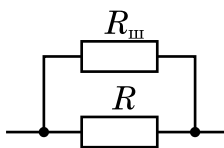


Рис. 1.7. Шунт

$R_{\text{ш}}$ — шунт,
 R — шунтируемый элемент

Шунт (от англ. shunt — ответвление) — элемент электрической цепи, сопротивление которого, в заданном диапазоне частот, значительно меньше сопротивления шунтируемого элемента, к которому шунт включается параллельно (рис. 1.7).

Шунтирование, в основном, применяется в измерительной технике для расширения пределов измерения амперметров.

1.2. Элементы электрической цепи замещения

Как было сказано выше, в электротехнике рассматриваются схемы замещения, в которых элементы представлены своими математическими моделями, с помощью которых, с допустимой точностью, описываются физические процессы, протекающие в электрической цепи. В электротехнике выделяют пять основных элементов схемы замещения, которые делятся на две группы — пассивные и активные.

К **пассивным элементам** относятся те, в которых происходит преобразование энергии электрического тока в другие виды энергии. К пассивным элементам относятся *резистивный* (характеризует процесс необратимого преобразования энергии источника питания в другие виды энергии), *индуктивный* (обратимого преобразования энергии источника питания в энергию магнитного поля) и *емкостного* (обратимого преобразования энергии источника питания в энергию электрического поля)

К **активным элементам** относятся те, в которых происходит преобразование различных видов энергии в энергию электрического тока. К активным элементам относятся *источник ЭДС* (активный элемент, напряжение на выводах которого не зависит от протекающего через него тока) и *источник тока* (активный элемент, в котором протекающий через него ток не зависит от падения напряжения на его выводах).

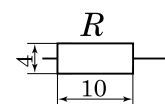
1.2.1. Пассивные элементы

1.2.1.1. Резистивный элемент

Сопротивление

Резистивный элемент это идеализированный элемент, характеризующий свойство реальных элементов электрической цепи необратимо преобразовывать энергию электрического тока в другие виды энергии.

Резистивный элемент, в общем случае, представляется в виде куска материала, препятствующего прохождению носителей заряда.



Падение напряжения на концах резистивного элемента пропорционально протекающему через него току:

$$u = iR.$$

Рис. 1.8.
УГО
резистивного
элемента

Коэффициент

$$R = \frac{u}{i}$$

называется **сопротивлением**.

Единицей измерения сопротивления является **ом** (названа в честь немецкого физика Георга Симона Ома, 1787–1854 гг.). *Один ом (1 Ом) равен электрическому сопротивлению участка электрической цепи, в которой протекает постоянный ток силой один ампер (1 А) при напряжении на его концах один вольт (1 В).*

$$[R] = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}.$$

Величина, обратная сопротивлению называется **проводимость**:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{u}.$$

Единицей измерения проводимости является **сименс** (названа в честь немецкого физика и промышленника Вернера фон Сименса, 1816–1892 гг.). *Один сименс (1 См) равен электрической проводимости участка электрической цепи (проводника), сопротивлением один ом (1 Ом).*

$$[G] = \frac{1}{\text{Ом}} = \frac{\text{А}}{\text{В}} = \text{См}.$$

Величина сопротивления определяется способностью материала, из которого изготавливается резистивный элемент, пропускать электрический ток.

Условное графическое обозначение резистивного элемента приведено на рис. 1.8.

Удельное сопротивление

Удельное сопротивление характеризует сопротивление материала на единицу длины:

$$\rho = R \frac{S}{l},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника,
 l — длина проводника.

Единица измерения удельного сопротивления это *ом на метр* —

$$[\rho] = \text{Ом} \frac{\text{м}^2}{\text{м}} = \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Выражение, учитывающие зависимость удельного сопротивления материала от температуры имеет вид:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \Delta T),$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 273,15К,

$$\Delta T = T - 273,15;$$

T — абсолютная температура,

α — температурный коэффициент сопротивления.

Удельная проводимость

Удельная проводимость это величина, обратная удельному сопротивлению:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Единица измерения удельной проводимости это *сименс на метр* —

$$[\sigma] = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Удельная электрическая проводимость связывает напряжённость электрического поля и плотность тока:

$$\sigma E = j,$$

где j — плотность электрического тока проводимости,

E — напряжённость электрического поля.

Ток и напряжение

Выражения для тока и напряжения на резистивном элементе имеют следующий вид:

$$i = \frac{u}{R}$$

$$u = iR$$

Из полученных выражений для тока и напряжения видно, что протекание тока через резистивный элемент и падение напряжения на нём не зависят от характера изменения тока и напряжения.

Мощность и энергия

Исходя из полученных ранее выражения для мощности и выражений для тока и напряжения на резистивном элементе получим:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2.$$

Из этого выражения видно, что величина мощности, при любых значениях тока и напряжения, будет положительной, т. е. резистивный элемент забирает энергию источника питания, совершая её необратимое преобразование в другие виды энергии.

Количество энергии, преобразуемой резистивным элементом за время t , равно:

$$W = \int_{-\infty}^t p dt = R \int_0^t i^2 dt = G \int_0^t u^2 dt.$$

1.2.1.2. Емкостной элемент

Ёмкость

Емкостной элемент это идеализированный элемент, характеризующий свойство реальных элементов электрической цепи запасать энергию электрического поля.

Емкостной элемент, в общем случае, представляется в виде двух проводящих поверхностей (которые называют обкладками), разделённых диэлектриком.

Величина заряда q на обкладках емкостного элемента прямо пропорциональна приложенному к ним напряжению u :

$$dq = C du.$$

Коэффициент

$$C = \frac{dq}{du}$$

называется **ёмкостью**.

Единицей измерения ёмкости является **фарад** (назван в честь английского физика Майкла Фарадея, 1791–1867 гг.). Один фарад (1 Ф) равен

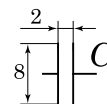


Рис. 1.9. УГО емкостного элемента

электрической ёмкости конденсатора, при которой заряд в один кулон (1 Кл) создаёт на конденсаторе разность потенциалов один вольт (1 В).

$$[C] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \Phi.$$

Величина ёмкости определяется формой, размером и взаимным расположением обкладок, а также диэлектрической проницаемостью диэлектрика, расположенного между ними.

Условное графическое обозначение емкостного элемента приведено на рис. 1.9.

Ток и напряжение

Исходя из определения тока ($i = dq/dt$), величина заряда будет равна $dq = idt$, отсюда $C = dq/du = idt/du$. Следовательно ток и напряжение будут определяться следующими выражениями:

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$u = \frac{1}{C} \int idt$$

Из полученного выражения для тока видно, что его величина определяется скоростью изменения напряжения (du/dt). Чем выше эта скорость (т. е. чем больше величина du при данном dt), тем больше будет ток. Если напряжение не будет изменяться ($du = 0 \Rightarrow u = \text{const}$, постоянное напряжение), то ток через емкостной элемент протекать не будет ($i = 0$).

Мощность и энергия

Исходя из полученных ранее выражений для мощности и тока на емкостном элементе, получим:

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}.$$

Из этого выражения видно, что на емкостном элементе происходит обратимое преобразование энергии: при увеличении напряжения ($du > 0$, соответствует накоплению энергии электрического поля или заряду конденсатора), мощность положительна (т. е. энергия забирается от источника), а при уменьшении напряжения ($du < 0$, соответствует возврату энергии электрического поля в электрическую цепь или разряду конденсатора), мощность отрицательна (т. е. энергия возвращается источнику).

Количество энергии, запасаемой в емкостном элементе, определяется его ёмкостью и равно:

$$W = \int_{-\infty}^t p dt = C \int_0^u u du = C \frac{u^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

1.2.1.3. Индуктивный элемент

Индуктивность

Индуктивный элемент это идеализированный элемент, характеризующий свойство реальных элементов электрической цепи запасать энергию магнитного поля.

Чаще всего индуктивный элемент представляется в виде намотанного в виде цилиндра провода.

Если через индуктивный элемент пропустить ток, то его величина будет прямо пропорциональна создаваемому магнитному потоку Ψ :

$$d\Psi = L di.$$

Коэффициент

$$L = \frac{d\Psi}{di}$$

называется **индуктивностью**.

Единицей измерения индуктивности является **генри** (названа в честь американского физика Джозефа Генри, 1797–1878 гг.). *Один генри (1 Гн) равен индуктивности такого контура, в котором возникнет ЭДС самоиндукции в один вольт (1 В) при равномерном изменении силы тока в этом контуре на один ампер (1 А) за одну секунду (1 с).*

$$[L] = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Гн}.$$

Величина индуктивности определяется количеством витков и формой катушки, а также особенностями намотки и свойствами сердечника (при его наличии).

Условное графическое обозначение индуктивного элемента приведено на рис. 1.10.

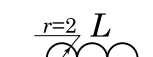


Рис. 1.10. УГО индуктивного элемента

Ток и напряжение

Исходя из закона электромагнитной индукции $u = -e = d\Psi/dt$ и с учётом того, что $d\Psi = L di$, напряжение и ток на индуктивном элементе будут определяться следующими выражениями:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int u dt$$

Из полученного выражения для напряжения видно, что его величина определяется скоростью изменения тока (di/dt). Чем выше эта скорость (т.е. чем больше величина di при данном dt), тем больше будет падение напряжения. Если ток не будет изменяться ($di = 0 \Rightarrow i = \text{const}$, постоянный ток), то падения напряжения на индуктивном элементе не будет ($u = 0$).

Мощность и энергия

Исходя из полученных ранее выражений для мощности и напряжения на индуктивном элементе, получим:

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}.$$

Из этого выражения видно, что на индуктивном элементе происходит обратимое преобразование энергии: при увеличении тока ($di > 0$), мощность положительна (соответствует накоплению энергии магнитного поля), а при уменьшении тока ($di < 0$), мощность отрицательна (соответствует возврату энергии магнитного поля в цепь).

Количество энергии, запасаемой в индуктивном элементе, определяется его индуктивностью и равно:

$$W = \int_{-\infty}^t p dt = L \int_0^i i di = L \frac{i^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

1.2.2. Активные элементы

1.2.2.1. Идеальный источник ЭДС

Идеальный источник ЭДС это идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока.

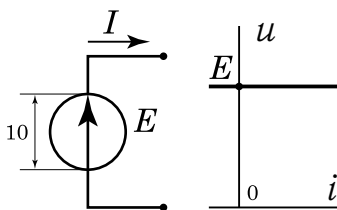


Рис. 1.11. УГО и ВАХ источника ЭДС

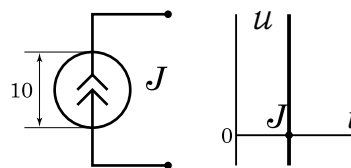


Рис. 1.12. УГО и ВАХ источника тока

На основании определения идеального источника ЭДС, видно, что он не может находиться в режиме короткого замыкания, когда его выводы замкнуты между собой, т.к. в этом случае падение напряжения на его выводах будет равно нулю, а не ЭДС, что должно быть согласно определению.

Условное графическое обозначение идеального источника ЭДС и его ВАХ приведены на рис. 1.11 (на рисунке приведён источник постоянной ЭДС, стрелка указывает направление ЭДС).

1.2.2.2. Идеальный источник тока

Идеальный источник тока это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах.

На основании определения идеального источника тока, видно, что он не может находиться в режиме холостого хода, когда его выводы разомкнуты и он не включён в цепь, т.к. в этом случае ток будет равен нулю, что противоречит определению источника тока.

Условное графическое обозначение идеального источника тока и его ВАХ приведены на рис. 1.12 (на рисунке приведён источник постоянного тока, двойная стрелка указывает направление тока).

1.2.3. Схемы замещения реальных элементов электрической цепи

1.2.3.1. Активные элементы

Как видно из рис. 1.11 и 1.12 ВАХ идеальных источников ЭДС и тока не пересекают оси тока и напряжения соответственно. Это говорит о том, что идеальный источник ЭДС не может находиться в режиме короткого замыкания (в этом случае мы получим $i_{кз} = \infty$, откуда $p = ui = \infty$, что не

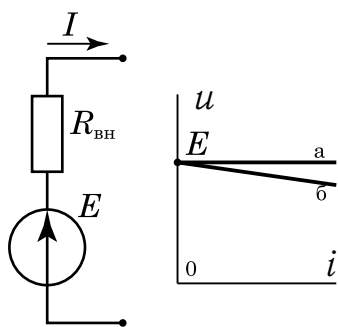


Рис. 1.13. Схема замещения и ВАХ источника напряжения (ВАХ источника ЭДС (а) и источника напряжения (б))

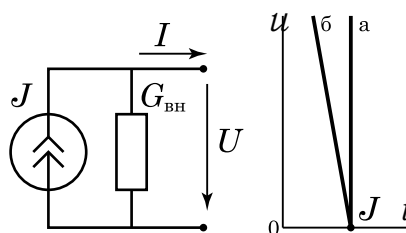


Рис. 1.14. Схема замещения и ВАХ реального источника тока (ВАХ идеального (а) и реального (б) источника тока)

имеет физического смысла), а идеальный источник тока в режиме холостого хода (в этом случае мы получим $u_{xx} = \infty$, откуда $p = ui = \infty$, что не имеет физического смысла).

Таким образом, для моделирования источника напряжения (так, обычно, называют реальный источник ЭДС) нам необходимо добавить последовательно включённый с источником ЭДС резистивный элемент с сопротивлением $R_{вн}$ (который характеризует внутреннее сопротивление источника), ограничивающий ток через источник ЭДС, а для моделирование реального источника тока нам необходимо добавить параллельно включённый с источником тока резистивный элемент с проводимостью $G_{вн}$ (характеризует внутреннюю проводимость источника), ограничивающий падение напряжения на источнике тока.

Схемы замещения реальных источников напряжения и тока и их ВАХ приведены на рис. 1.13 и 1.14.

Источник напряжения используется в качестве схемы замещения источников электрической энергии, внутреннее сопротивление которых много меньше сопротивления нагрузки ($R_{вн} \ll R_n$, это наиболее распространённый случай, соответствующий, например, гальваническим элементам и индуктивным генераторам), противном случае ($R_{вн} \gg R_n$, характерно для емкостных генераторов и полупроводниковых устройств, работающих в соответствующих режимах) используется источник тока.

Следует отметить, что при анализе электрической цепи широко практикуется взаимное преобразование источников тока и напряжения. Целью этих преобразований является исключительно упрощение математических расчётов и они не несут в себе физического смысла.

1.2.3.2. Пассивные элементы

Схема замещения реального элемента электрической цепи характеризует протекающие в нём физические процессы, т.е. является *математической моделью* элемента. Сложность схемы замещения определяется необходимой точностью расчётов, конструктивными особенностями реального элемента и характером протекающего тока. Обычно в качестве основного критерия выступает частота тока — чем выше частота, тем выше роль процессов связанных с преобразованием энергии электрического и магнитного полей и сложнее схема замещения. Выбор схемы замещения является весьма сложной задачей, требующей глубокого понимания процессов протекающих не только в самом элементе, но и их влияния на цепь в целом.

Рассмотрим схемы замещения наиболее распространённых пассивных элементов: резистора, конденсатора и катушки индуктивности.

Резистор

Характеристики идеального резистора будут соответствовать резистивному элементу схемы замещения.

Реальные резисторы, в основной массе случаев, достаточно хорошо отвечают этой модели, однако при необходимости более точных расчётов, особенно на высоких частотах, становится необходимым учитывать индуктивность проволоки (для проволочных резисторов), а также её барьерную ёмкость (рис. 1.15). На сверхвысоких частотах резко возрастает роль индуктивности и ёмкости выводов резистора.

Если резистор выполнен в виде катушки, то индуктивная составляющая будет играть значительную роль уже на сравнительно низких частотах.

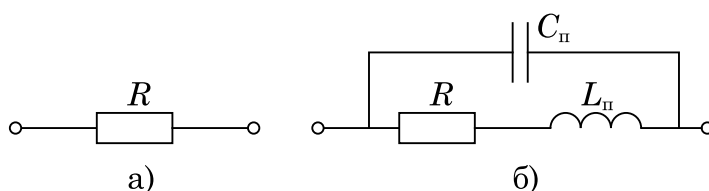


Рис. 1.15. Схема замещения резистора

a — на низких частотах; $б$ — на высоких частотах

C_{π} и L_{π} — паразитные ёмкостная и индуктивная составляющие

Конденсатор

Характеристики идеального конденсатора будут соответствовать ёмкостному элементу схемы замещения.

Реальные конденсаторы, в основной массе случаев, достаточно хорошо отвечают этой модели, однако при необходимости более точных расчётов, особенно на высоких напряжениях, становится необходимым учитывать неидеальность диэлектрика, находящегося между обкладками конденсатора, которая характеризуется током утечки и на схеме замещения представлена в виде резистивного элемента, подключенного параллельно к ёмкостному (рис. 1.16). На сверхвысоких частотах резко возрастает роль индуктивности и ёмкости выводов конденсатора.

Катушка индуктивности

Характеристики идеальной катушки индуктивности будут соответствовать индуктивному элементу схемы замещения.

Реальные катушки индуктивности намотаны из провода, имеющего ненулевое удельное сопротивление, таким образом, чем больше витков содержит катушка, тем будет выше её активное сопротивление, которое, обычно, необходимо учитывать во всём диапазоне частот (следует отметить, что на

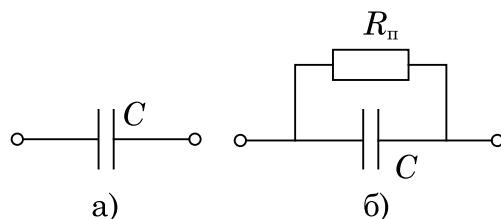


Рис. 1.16. Схема замещения конденсатора
 а — на низких частотах; б — на высоких частотах
 $R_{\text{п}}$ — паразитная резистивная составляющие

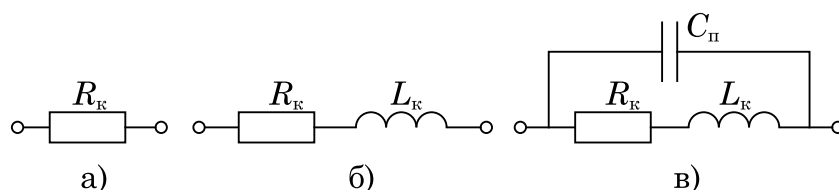


Рис. 1.17. Схема замещения катушки индуктивности
 а — на постоянном токе; б — на низких частотах; в — на высоких частотах
 $R_{\text{к}}$ — активное сопротивление катушки; $C_{\text{п}}$ — паразитная межвитковая ёмкость

постоянном токе индуктивная составляющая катушки будет равна нулю, и в качестве схемы замещения можно использовать один резистивный элемент). С ростом частоты возрастёт влияние межвитковой ёмкости (витки выполнены из изолированного провода, таким образом два соседних можно рассматривать как конденсатор) (рис. 1.17).

На сверхвысоких частотах резко возрастает роль индуктивности и ёмкости выводов катушки индуктивности.

1.3. Законы Кирхгофа и Ома

Закон Ома и два закона (иногда их называют правилами) Кирхгофа являются основополагающими законами электротехники. Они полностью определяют электрическое состояние электрических цепей и лежат в основе всех электротехнических расчетов.

1.3.1. Закон Ома

Закон Ома, связывающий напряжение и ток в электрической цепи, был экспериментально открыт немецким физиком Георгом Симоном Омом (1787 — 1854 гг.) в 1827 г.

Для пассивного участка цепи (рис. 1.18) закон Ома имеет вид:

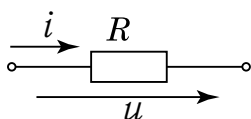


Рис. 1.18. Пассивный участок цепи

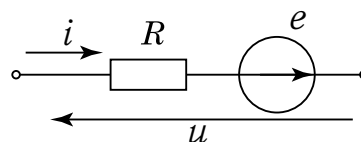


Рис. 1.19. Активный участок цепи

$$i = \frac{u}{R}$$

где R — сопротивление цепи.

Если в электрической цепи (или на её участке, для которого производится расчёт), помимо пассивных элементов, присутствуют источники ЭДС, то их необходимо учитывать при расчёте по закону Ома. Знаки ЭДС и напряжения определяются относительно направления тока: если направления ЭДС или напряжения совпадают с направлением тока, то напряжение и ЭДС берутся со знаком «+», иначе — со знаком «-».

Закон Ома для активного участка цепи (или, как его ещё называют, *Закон Ома для полной цепи*), имеет следующий вид (для цепи, приведённой на рис. 1.19):

$$i = \frac{e - u}{R}$$

Следует понимать, что закон Ома задаёт линейную зависимость между током и напряжением, следовательно, если цепь будет иметь нелинейный характер, закон Ома выполняться не будет.

1.3.2. Законы Кирхгофа

1.3.2.1. Первый закон Кирхгофа

Законы Кирхгофа были теоретически обоснованы выдающимся немецким физиком, профессором Берлинского университета Густавом Робертом Кирхгофом (1824 — 1887 гг.) в 1845 г.

Согласно определению, электрический ток это направленное движение зарядов, таким образом, в части ветвей, входящих в узел электрической цепи, заряды будут двигаться к узлу, а в остальных ветвях данного узла — от него. При этом общая сумма зарядов направленных к узлу и от узла будет равна нулю, т.к. в противном случае заряды будут либо пропадать (или накапливаться в узле), либо браться ниоткуда, что противоречит законам сохранения⁴.

⁴Строгое доказательство первого закона Кирхгофа даётся на основе принципа непрерывности электрического тока.

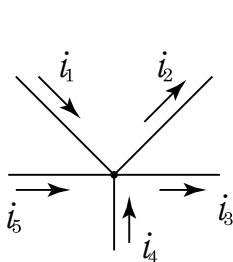


Рис. 1.20. Первый закон Кирхгофа
для узла

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

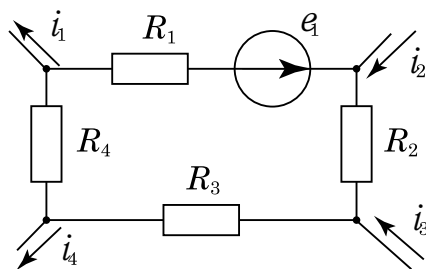


Рис. 1.21. Первый закон Кирхгофа
для участка цепи

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

Таким образом, мы получим первый закон Кирхгофа:

*Алгебраическая сумма токов в узле
электрической цепи равна нулю:*

$$\sum i = 0$$

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа находится *алгебраическая сумма*⁵ токов, протекающих во всех ветвях, сходящихся в данном узле.

Обычно, для удобства расчётов, токи входящие в узел берутся со знаком «–», а токи исходящие из узла берутся со знаком «+» (при необходимости это правило можно поменять на противоположное).

Для схемы, приведённой на рис. 1.20, выражение по первому закону Кирхгофа будет иметь следующий вид:

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0.$$

Следует отметить, что первый закон Кирхгофа может применяться не только к узлам электрической цепи, но и к её отдельным частям (рис. 1.21).

1.3.2.2. Второй закон Кирхгофа

Электрический ток в цепи характеризуется переносом электрических зарядов, который осуществляется за счёт энергии электрического поля, являющегося потенциальным. Как известно из курса физики, работа по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю, таким образом работа по переносу электрического заряда в замкнутом контуре электрической цепи будет равно нулю. Согласно определению (стр. 6) работу по переносу

⁵ *Алгебраическая сумма* — это сумма с учётом знака.

заряда равна разности потенциалов (падению напряжению), следовательно, сумма падений напряжений на всех элементах замкнутого контура (как пассивных, так и активных), будет равна нулю.

Полученный вывод соответствует обобщённой форме Второго закона Кирхгофа:

$$\sum u = 0$$

Алгебраическая сумма падений напряжений в контуре электрической цепи равна нулю.

Знак, с которым берётся напряжение при суммировании, определяется в соответствии с произвольно выбранным направлением обхода контура: если условно-положительное направление тока или напряжения совпадает с направлением обхода, то ставится знак плюс, в противном случае — минус.

В электротехнических расчётах удобно разделять активные и пассивные элементы, поэтому большее применение нашла другая форма второго закона Кирхгофа, в которой в левой части равенства собраны падения напряжения, а в правой — ЭДС:

Алгебраическая сумма падений напряжений в контуре электрической цепи равна алгебраической сумме ЭДС в этом же контуре:

$$\sum Ri = \sum e$$

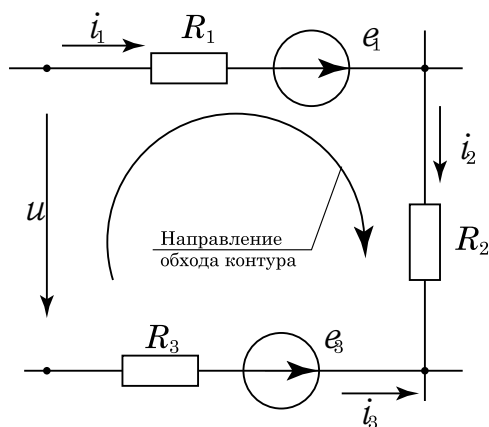


Рис. 1.22. Второй закон Кирхгофа
 $i_1 R_1 + i_2 R_2 - i_3 R_3 - u = e_1 - e_3$

При составлении уравнения по второму закону Кирхгофа, со знаком «+» берутся падения напряжения на элементах, условно-положительное направление тока в которых совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура. В противном случае падение напряжения берётся со знаком «-». Знаки ЭДС определяются аналогично относительно направления обхода. Если в электрической цепи имеются источники тока, то для удобства составления выражений по второму закону Кирхгофа их необходимо преобразовать в источники напряжения (эти преобразования рассмотрены в § 1.4.3 на стр. 29).

Выражение по Второму закону Кирхгофа, для схемы, приведённой на рис. 1.22, будет иметь следующий вид:

$$-u + i_1 R_1 + i_2 R_2 - i_3 R_3 = e_1 - e_3$$

1.4. Эквивалентные преобразования в электрических цепях

Эквивалентные преобразования в электрических цепях основаны на законах Кирхгофа и позволяют проводить теоретически обоснованные замены элементов эквивалентными, не влияющие на режим работы других участков цепи.

Обычно эквивалентные преобразования используются для уменьшения количества элементов в цепи с целью упрощения расчётов.

1.4.1. Последовательное соединение

Составим выражение по II закону Кирхгофа для цепи, приведённой на рис. 1.23:

$$iR_1 + iR_2 + \dots + iR_n - u_{12} = e_1 - e_2 + \dots + e_m$$

$$i \sum_{k=1}^n R_k - u_{12} = \sum_{k=1}^m e_k$$

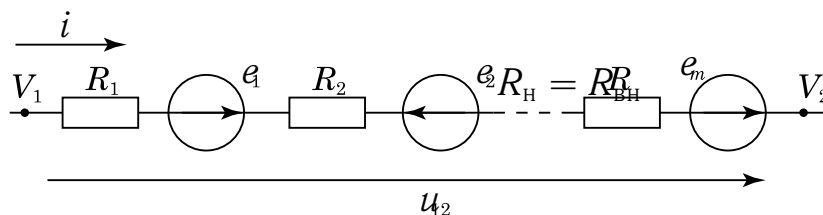


Рис. 1.23. Последовательное соединение

где n — количество пассивных элементов;

m — количество активных элементов;

u_{12} — падение напряжения между точками 1 и 2.

В итоге запишем:

$$iR_{\Sigma} - u_{12} = e_{\Sigma},$$

где $R_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n R_k$ — эквивалентное сопротивление цепи;

$e_{\Sigma} = \sum_{k=1}^m e_k$ — эквивалентная ЭДС цепи.

Отсюда видно, что эквивалентное сопротивление цепи при последовательном соединении элементов будет равно сумме сопротивлений цепи, а эквивалентная ЭДС цепи равна алгебраической (т.е. с учётом знака) сумме всех ЭДС (знак ЭДС выбирается относительно направления тока).

1.4.2. Параллельное соединение

Составим выражение по первому закону Кирхгофа для цепи, приведённой на рис. 1.24 (за условно-положительное направление тока принято направление от узла):

$$i_1 - J_1 + i_2 + J_2 + \dots - i_n + J_m = i$$

$$\sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^m J_k = i,$$

где n — количество пассивных ветвей;

m — количество активных ветвей;

i — общий ток в цепи;

$\sum_{k=1}^n i_k$ — сумма токов в пассивных ветвях;

$\sum_{k=1}^m J_k$ — сумма токов в активных ветвях.

В итоге запишем:

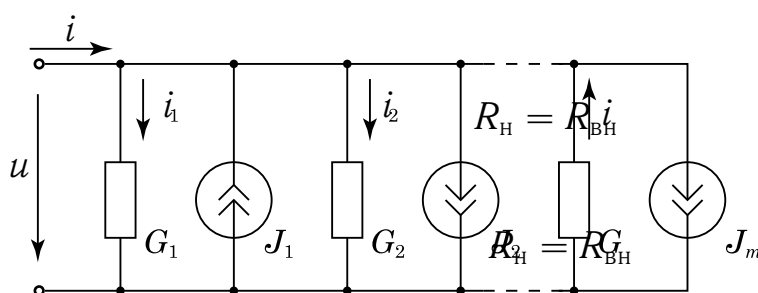


Рис. 1.24. Параллельное соединение

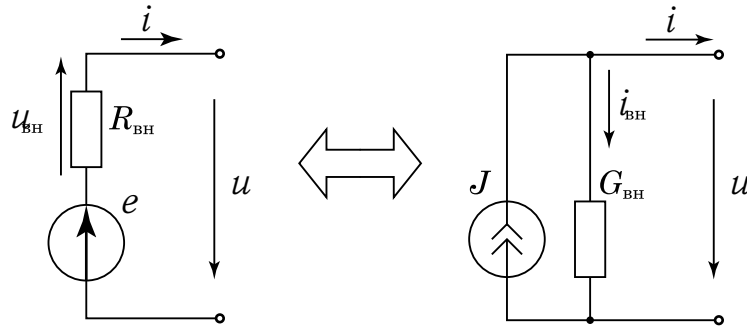


Рис. 1.25. К взаимному преобразованию источников ЭДС и тока

$$i_{\text{э}} + J_{\text{э}} = i,$$

где $i_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n i_k$ — суммарный ток в пассивных ветвях;

$J_{\text{э}} = \sum_{k=1}^m J_k$ — суммарный ток в активных ветвях.

По закону Ома получим:

$$\frac{i_{\text{э}}}{u} = \frac{\sum_{k=1}^n i_k}{u} \Rightarrow G_{\text{э}} = \sum_{k=1}^n G_k,$$

где $G_{\text{э}}$ — эквивалентная проводимость цепи.

Отсюда видно, что *эквивалентная проводимость* цепи при параллельном соединении элементов будет равно *сумме проводимостей* ветвей, а ток от *эквивалентного источника тока*, будет равен *алгебраической* (т. е. с учётом знака) *сумме токов* во всех ветвях, содержащих источники тока (знак тока выбирается в соответствии с первым законом Кирхгофа).

В частном случае параллельного соединения двух сопротивлений R_1 и R_2 используется следующие выражение:

$$R_{\text{э}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Напряжение u на выводах источник ЭДС будет равно:

$$u = e - u_{\text{вн}} = e - R_{\text{вн}} i$$

Напряжение на выводах источника тока будет равно:

$$u = \frac{J}{G_{\text{вн}}} - \frac{1}{G_{\text{вн}}} i$$

1.4.3. Взаимные преобразования источников ЭДС и тока

Исходя из условия равенства тока и напряжения на выводах эквивалентного источника и полученных выше выражений для напряжения, выражения для эквивалентного преобразования источников ЭДС и тока будут иметь следующий вид:

- для преобразования источника тока в источник напряжения–

$$R_{\text{вн}} = \frac{1}{G_{\text{вн}}}, \quad E = \frac{J}{G_{\text{вн}}}$$

- для преобразования источника напряжения в источник тока–

$$G_{\text{вн}} = \frac{1}{R_{\text{вн}}}, \quad J = \frac{e}{R_{\text{вн}}} = e \cdot G_{\text{вн}}$$

Соответствующие этим преобразованиям схемы замещения приведены на рис. 1.25.

Важно понимать, что взаимные преобразования источников напряжения и тока являются математической операцией, направленной на упрощения расчёта электрических цепей, и не несут в себе никакого физического смысла.

1.4.4. Соединение сопротивлений звездой и треугольником

В электрических цепях встречаются случаи, когда соединения элементов нельзя отнести ни к последовательным, ни к параллельным (в качестве примера можно привести мостовую схему, рис. 1.26). В этом случае данное соединение можно рассматривать как звезду или треугольник. Их взаимное эквивалентное преобразование может привести к хорошо знакомым нам параллельному и последовательному соединениям элементов.

В качестве примера рассмотрим мостовую схему, приведённую на рис. 1.26. Элементы исходной схемы R_{ab} , R_{bc} и R_{ca} образуют треугольник сопротивлений, который можно преобразовать в эквивалентную звезду, состоящую из элементов R_a , R_b и R_c . В результате этого преобразования мы получаем достаточно простую схему, состоящую из параллельно включённых элементов $R_a R_1$ и $R_b R_2$ к которым последовательно включён элемент R_c .

По условию эквивалентности, токи и напряжения во внешней, по отношению к преобразуемому участку, цепи в результате преобразования должны остаться неизменными, следовательно токи i_a , i_b , i_c и напряжения u_{ab} , u_{bc} , u_{ca} при взаимном преобразовании звезды и треугольника сопротивлений сохраняют свои значения (рис. 1.27).

Составим выражение по второму закону Кирхгофа для соединения элементов треугольником:

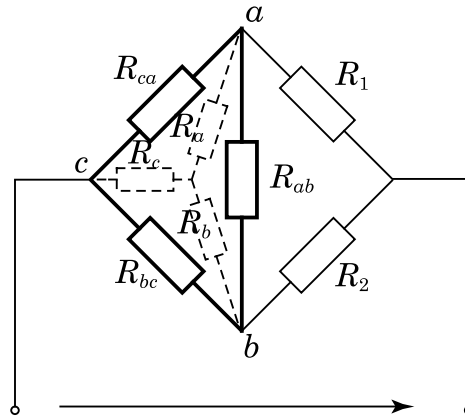


Рис. 1.26. Пример цепи, требующей преобразования треугольника сопротивлений (выделен толстыми линиями) в эквивалентную звезду (выделена тонкими пунктирными линиями)

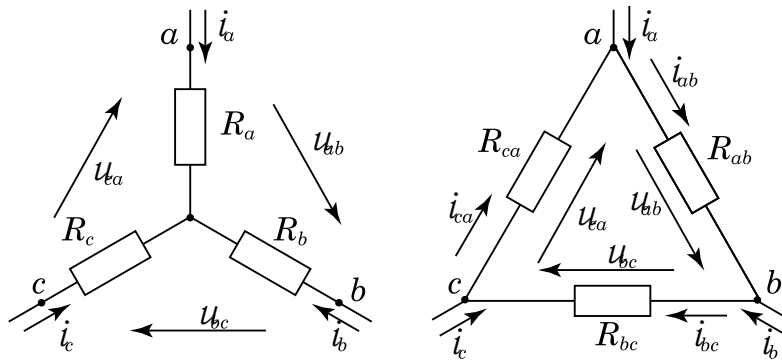


Рис. 1.27. Соединение сопротивлений звездой и треугольником

$$R_{ab}i_{ab} + R_{bc}i_{bc} + R_{ca}i_{ca} = 0$$

Составим выражение по первому закону Кирхгофа для узлов a и b для соединения треугольником:

$$\begin{aligned} i_{ca} &= i_{ab} - i_a; \\ i_{bc} &= i_{ab} + i_b. \end{aligned}$$

Отсюда выражение по второму закону Кирхгофа примет вид:

$$R_{ab}i_{ab} + R_{bc}i_{ab} + R_{bc}i_b + R_{ca}i_{ab} - R_{ca}i_a = 0,$$

откуда получим:

$$\begin{aligned} i_{ab} &= \frac{R_{ca}i_a - R_{bc}i_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ u_{ab} &= R_{ab}i_{ab} = \frac{R_{ab}R_{ca}i_a - R_{ab}R_{bc}i_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \end{aligned}$$

Разность напряжений между точками a и b в соединении звезда будет равно разности падений напряжений на элементах R_a и R_b :

$$u_{ab} = R_a i_a - R_b i_b.$$

Проведя преобразования в полученных выражениях для тока и напряжения в ветви ab треугольника и напряжения между точками a и b звезды, мы можем получить выражения для значений сопротивлений ветвей эквивалентной звезды (выражение для R_c получается аналогично и здесь не приведено):

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_b &= \frac{R_{bc} R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_c &= \frac{R_{ca} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \end{aligned}$$

Путём взаимных подстановок в полученных выражениях мы можем получить выражения для R_{ab} , R_{bc} и R_{ca} (т.е. выражения для преобразования звезды в треугольник):

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}; \\ R_{bc} &= R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}; \\ R_{ca} &= R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}. \end{aligned}$$

1.5. Нелинейные электрические цепи

1.5.1. Общие сведения

Нелинейная электрическая цепь это электрическая цепь, содержащая один или несколько нелинейных элементов .

Нелинейный элемент это элемент электрической цепи, параметры которого зависят от определяющих их величин (сопротивление резистивного элемента от тока и напряжения, ёмкость емкостного элемента от заряда и напряжения, индуктивность индуктивного элемента от магнитного потока и электрического тока).

Таким образом, вольт–амперная $u(i)$ характеристика резистивного элемента, вебер–амперная $\psi(i)$ характеристика индуктивного элемента и ку-

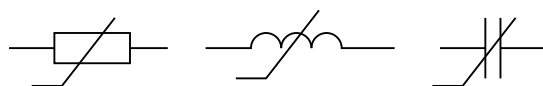


Рис. 1.28. УГО нелинейных резистивного, индуктивного и емкостного элементов

лон–вольтная $q(u)$ характеристика емкостного элемента имеют вид не прямой линии (как в случае линейного элемента), а некой кривой, обычно определяемой экспериментально и не имеющей точного аналитического представления.

Нелинейная электрическая цепь обладает рядом существенных отличий от линейной и в ней могут возникать специфические явления (например гистерезис), поэтому этого методы расчёта линейных цепей к нелинейным цепям неприменимы. Особо следует отметить неприменимость к нелинейным цепям метода наложения (суперпозиции).

Важно понимать, что характеристики реальных элементов никогда не бывают линейными, однако в большинстве инженерных расчётов они, с допустимой точностью, могут считаться линейными.

Все полупроводниковые элементы (диоды, транзисторы, тиристоры и т. д.) являются нелинейными элементами.

Условные графические обозначения нелинейных резистивного, индуктивного и емкостного элементов приведены на рис. 1.28. На выносной площадке может указываться параметр, вызывающий нелинейность (например температура для терморезистора)

1.5.2. Параметры нелинейных элементов

Нелинейные элементы характеризуются статическими ($R_{ст}$, $L_{ст}$, и $C_{ст}$) и дифференциальными (R_d , L_d , и C_d) параметрами.

Статические параметры нелинейного элемента определяются как отношение ординаты выбранной точки характеристики к её абсциссе (рис. 1.29).

Статические параметры пропорциональны тангенсу угла наклона прямой, проведённой через начало координат и точку, для которой производится расчёт. Для примера на рис. 1.29 получим:

$$F_{ст} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{m_y}{m_x} \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона прямой, проведённой через начало координат и рабочую точку A ;

m_y и m_x — масштабы по осям ординат и абсцисс соответственно.

Отсюда статические параметры резистивного, индуктивного и емкостного элементов будут иметь следующий вид:

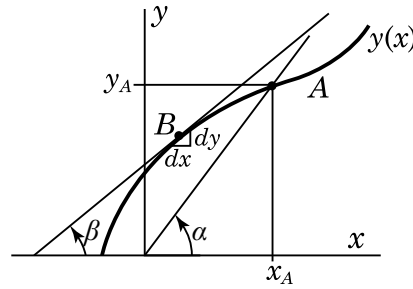


Рис. 1.29. К определению статических и дифференциальных параметров нелинейных элементов

$$F_{\text{ст}} = \frac{y_A}{x_A}, \quad F_{\text{диф}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{R_{\text{ст}} = \frac{u}{i}}, \quad \boxed{L_{\text{ст}} = \frac{\psi}{i}}, \quad \boxed{C_{\text{ст}} = \frac{q}{u}}.$$

Дифференциальные параметры нелинейного элемента определяются как отношение малого приращения ординаты выбранной точки характеристики к малому приращению её абсциссы (рис. 1.29).

Дифференциальные параметры пропорциональны тангенсу угла наклона касательной в рабочей точке характеристики и осью абсцисс. Для примера на рис. 1.29 получим:

$$F_{\text{диф}} = \frac{dy}{dx} = \frac{m_y}{m_x} \operatorname{tg} \beta,$$

где β — угол наклона касательной в рабочей точке B характеристики и осью абсцисс;

m_y и m_x — масштабы по осям ординат и абсцисс соответственно.

Отсюда дифференциальные параметры резистивного, индуктивного и емкостного элементов будут иметь следующий вид:

$$\boxed{R_{\text{диф}} = \frac{du}{di}}, \quad \boxed{L_{\text{диф}} = \frac{d\psi}{di}}, \quad \boxed{C_{\text{диф}} = \frac{dq}{du}}$$

1.5.3. Методы расчёта нелинейных цепей

Нелинейность параметров элементов усложняет расчёт цепи, поэтому в качестве рабочего участка стараются выбрать либо линейный, либо близкий к нему участок характеристики и рассматривают, с допустимой точностью, элемент как линейный. Если же это невозможно или нелинейность

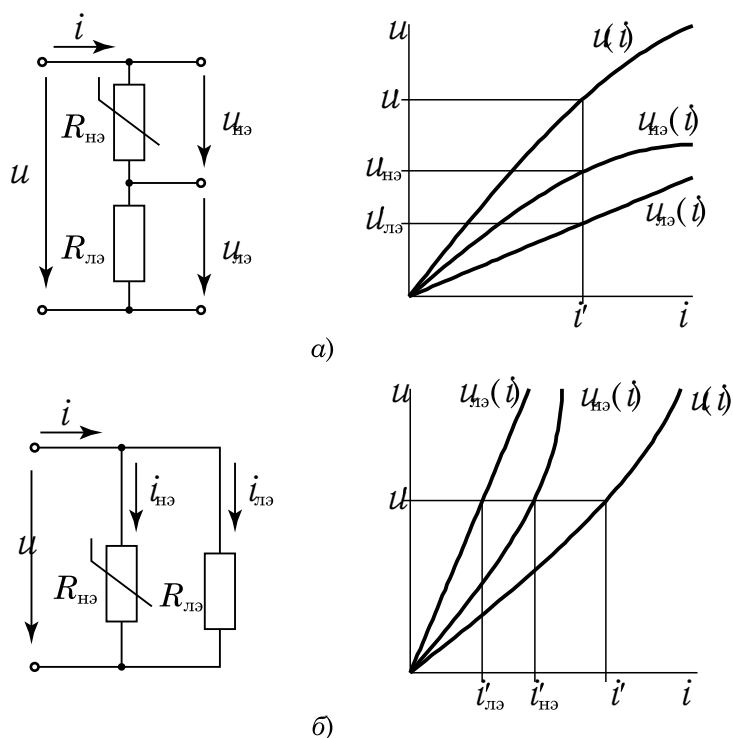


Рис. 1.30. Графический метод расчёта нелинейных цепей.

a — последовательное соединение

$$u(i) = u_{H3}(i) + u_{L3}(i), \text{ для } i = i' : u' = u'_{H3} + u'_{L3}$$

б — параллельное соединение.

$$u(i) = u_{H3}(i) + u_{L3}(i), \text{ для } u = u' : i' = i'_{H3} + i'_{L3}$$

характеристики является причиной выбора элемента (особенно это характерно для полупроводниковых элементов), то применяют специальные методы расчёта — **графический**, **аппроксимации** (**аналитической** и **кусочно-линейной**) и ряд других.

Рассмотрим эти методы более подробно.

Графический метод

Идея метода состоит в построении характеристик элементов цепи (вольт-амперной $u(i)$, вебер-амперной $\psi(i)$ или кулон-вольтной $q(u)$), а затем, путём их графических преобразований (напр. сложения), получения соответствующей характеристики для всей цепи или её участка.

Графический метод расчёта является наиболее простым и наглядным в применении, обеспечивая в основной массе расчётов необходимую точность, однако он применим для небольшого количества нелинейных элементов в цепи и требует аккуратности при проведении графических построений.

Пример расчёта нелинейной цепи графическим методом для последовательного соединения линейного и нелинейного резистивных элементов приведён на рис. 1.30, а, для параллельного — на рис. 1.30, б.

При расчёте последовательной цепи в одних осях строятся характеристики всех рассчитываемых элементов (для рассматриваемого примера это $u_{\text{нэ}}(i)$ для нелинейного резистора $R_{\text{нэ}}$ и $u_{\text{лэ}}(i)$ для линейного $R_{\text{лэ}}$). Характер изменения общего напряжения в цепи $u(i)$ определяется путём сложения характеристик нелинейного $u_{\text{нэ}}(i)$ и линейного $u_{\text{лэ}}(i)$ элементов $u(i) = u_{\text{нэ}}(i) + u_{\text{лэ}}(i)$. Сложение производится при одинаковых значениях тока (для $i = i'$: $u' = u'_{\text{нэ}} + u'_{\text{лэ}}$, см. рис. 1.30, а.).

Расчёт параллельной цепи производится аналогично, только характеристика всей цепи строится путём сложения токов, при постоянном напряжении (для $u = u'$: $i' = i'_{\text{нэ}} + i'_{\text{лэ}}$, см. рис. 1.30, б.).

Метод аппроксимации

Идея метода состоит в замене экспериментально полученной характеристики нелинейного элемента аналитическим выражением.

Различают **аналитическую аппроксимацию**, при которой характеристика элемента заменяется аналитической функцией (например линейной $y = ax + b$, степенным полиномом $y = \sum_{i=0}^k a_i x^i$, гиперболическим синусом $y = a \operatorname{sh} \beta x$ и тангенсом $y = a \operatorname{th} \beta x$ и другими) и **кусочно-линейную**, при которой характеристика элемента заменяется совокупностью прямолинейных отрезков.

Точность аналитической аппроксимации определяется правильностью выбора аппроксимирующей функции и точностью подбора коэффициентов. Преимуществом кусочно-линейной аппроксимации является простота применения и возможность рассмотрения элемента как линейного.

Кроме того, в ограниченном диапазоне изменений сигнала, в котором его изменения можно считать линейным (т. е. в **режиме малого сигнала**), нелинейный элемент, с допустимой точностью, может быть заменён эквивалентным линейным активным двухполюстником (рис. 1.31, более подробно двухполюстник будет рассмотрен в § 2.3.4), где ток и напряжение связаны выражением:

$$U = E + R_{\text{диф}} I,$$

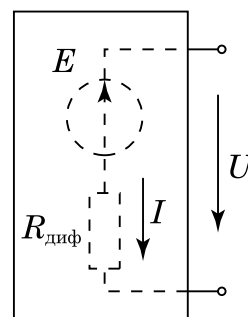


Рис. 1.31. Активный линейный двухполюстник в качестве схемы замещения нелинейного элемента

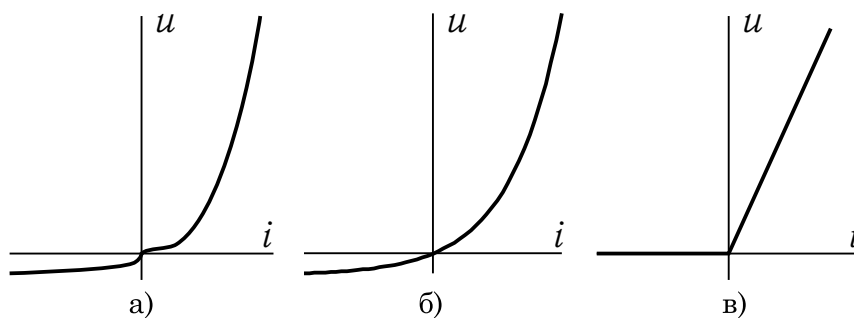


Рис. 1.32. Аппроксимации характеристики полупроводникового диода.

a — исходная характеристика диода;

b — аналитическая аппроксимация с помощью функции вида $i = a(e^{bu} - 1)$;

v — кусочно-линейная аппроксимация.

где $R_{\text{диф}}$ — дифференциальное сопротивление нелинейного элемента на линеаризуемом участке.

Пример аналитической аппроксимации характеристики полупроводникового диода с помощью функции вида $i = a(e^{bu} - 1)$ приведён на рис. 1.32, б, кусочно-линейной аппроксимации — на рис. 1.32, в, исходная характеристика диода приведена на рис. 1.32, а.

Лекция 2

Электрические цепи постоянного тока

2.1. Общие сведения

Отличительной особенностью постоянного тока является то, что он не изменяется с течением времени, т. е. $du = 0$ и $di = 0$. Из этого следует, что напряжение на индуктивном (§ 1.2.1.3: $u_L = L \cdot di/dt$), и ток в емкостном (§ 1.2.1.2: $i = C \cdot du/dt$) элементах будут равны нулю. Это значительно упрощает расчёт цепи, поэтому на примере цепей постоянного тока мы рассмотрим различные методы расчёта электрических цепей.

2.2. Законы Кирхгофа и Ома для цепей постоянного тока

Для обозначения постоянных токов, напряжений и ЭДС применяются заглавные латинские буквы — I , U , E .

В цепях постоянного тока нам известно направление и величина тока и напряжения в любой момент времени, таким образом основные законы электротехники формулируются в следующем виде:

Закон Ома

Сила тока в цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению:

$$I = \frac{U}{R}.$$

I закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum I = 0$$

II закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжений в контуре электрической цепи равна алгебраической сумме ЭДС в этом же контуре:

$$\sum IR = \sum E$$

2.3. Методы расчета электрических цепей постоянного тока

Методы расчёта электрических цепей постоянного и переменного тока, с точки зрения электротехники, абсолютно аналогичны, однако, математически расчёт цепей переменного тока значительно более сложен, в связи с применением в расчётах комплексных чисел, поэтому рассмотрение методов расчёта мы проведём на примере цепей постоянного тока.

Основная задача расчета электрических цепей — определить токи и мощности в различных элементах цепи, а также напряжения на отдельных участках.

Исходными данными, обычно, являются значения ЭДС и напряжений, имеющих в схеме и параметры (сопротивления), либо характеристики (номинальные мощность и напряжение) элементов цепи.

Режим работы источников. По результатам расчета цепи можно определить режим работы источников:

режим источника — ток в источнике и падение напряжения на нём (или его ЭДС) совпадают по направлению;

режим нагрузки — ток в источнике и падение напряжения на нём (или его ЭДС) противоположны по направлению.

Баланс мощностей. Умножив левую и правую часть уравнения по второму закону Кирхгофа на ток получим:

$$\sum I^2 R = \sum EI,$$

таким образом, в любом замкнутом контуре алгебраическая (т. е. с учётом знака) сумма мощностей источников ЭДС равна сумме мощностей потребляемых всеми сопротивлениями. Это условие называется **баланс мощностей** и применяется для проверки правильности расчетов электрических цепей.

2.3.1. Метод эквивалентных преобразований (эквивалентного сопротивления)

Идея метода

Идея метода состоит в замене сложной электрической цепи (или её участка) эквивалентной, которая не изменяет режим работы остальной части цепи.

Порядок расчёта

Расчёт, обычно, ведётся для цепей с одним источником питания и начинается с элементов, наиболее удалённых от источника или точек соединения рассматриваемого участка с остальной цепью.

1. Проведём последовательную замену элементов электрической цепи эквивалентными. Преобразования производятся по правилам, рассмотренным в § 1.4 на стр. 26. Целью преобразований является построение цепи, содержащей два эквивалентных элемента — источник электрической энергии и сопротивление.
2. Находим ток в эквивалентной цепи и, проводя обратное преобразование эквивалентной цепи в исходную, токи в ветвях.

Пример расчёта

Найдём токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.1, сопротивления резисторов и приложенное к цепи напряжение известны.

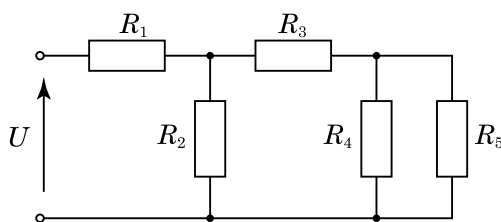


Рис. 2.1. Метод эквивалентных преобразований

Преобразования начнём с наиболее удалённых от источника питания элементов R_4 и R_5 (рис. 2.2, а). Эти элементы соединены параллельно, следовательно проводимость эквивалентного элемента будет равна сумме проводимостей (см. § 1.4.2 на стр. 27):

$$G_{45} = G_4 + G_5 \Rightarrow \frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

После замены элементов R_4 и R_5 на эквивалентный элемент с сопротивлением R_{45} схема примет вид, приведённый на рис. 2.2, б.

На следующем шаге мы видим, что элементы R_3 и R_{45} соединены последовательно, следовательно эквивалентный им элемент будет иметь сопротивление (см. § 1.4.1 на стр. 26):

$$R_{345} = R_3 + R_{45},$$

после чего мы получим схему, приведённую на рис. 2.2, в.

Элементы R_2 и R_{345} соединены параллельно:

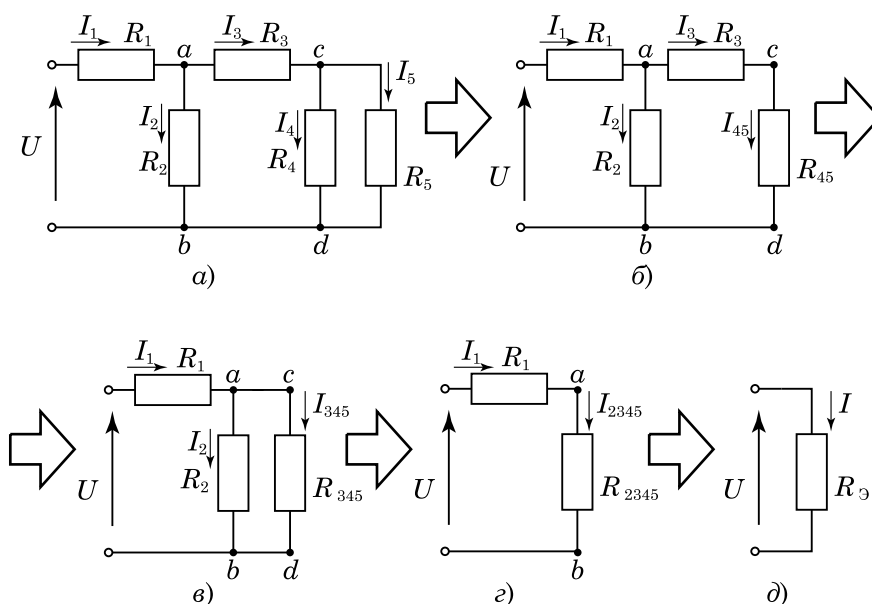


Рис. 2.2. Расчёт методом эквивалентных преобразований

$$R_{2345} = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}},$$

полученная эквивалентная схема приведена на рис. 2.2, г.

Элементы R_1 и R_{2345} соединены последовательно:

$$R_9 = R_1 + R_{2345},$$

итоговая эквивалентная схема на приведена рис. 2.2, д.

Рассчитаем токи в ветвях.

Ток, протекающий в цепи (рис. 2.2, д), будет равен:

$$I = \frac{U}{R_9}.$$

Так как элементы R_1 и R_{2345} включены последовательно а их сумма равна R_9 , то (рис. 2.2, г):

$$I = I_1 = I_{2345}.$$

Зная ток I_{2345} , мы можем рассчитать напряжение U_{cd} :

$$U_{cd} = I_{2345} R_{2345}.$$

Элементы R_2 и R_{2345} соединены параллельно, следовательно на них будет одинаковое напряжение, равное U_{cd} (рис. 2.2, в), отсюда токи, протекающие в этих ветвях будут равны:

$$I_2 = \frac{U_{cd}}{R_2}, \quad I_{345} = \frac{U_{cd}}{R_{345}}$$

Элемент с сопротивлением R_{345} является эквивалентным для последовательного соединения R_3 и R_4 (рис. 2.2, б), следовательно

$$I_3 = I_{45} = I_{345}.$$

Элементы R_4 и R_5 включены параллельно, их эквивалентное сопротивление равно R_{45} ,

Для расчёта токов в двух оставшихся ветвях найдём напряжение U_{ab} (рис. 2.2, а):

$$U_{ab} = I_{45}R_{45},$$

а затем и сами токи:

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4}, \quad I_5 = \frac{U_{ab}}{R_5}.$$

2.3.2. Методы, основанные на законах Кирхгофа

2.3.2.1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа основан на фундаментальных законах электротехники, позволяет расширить и закрепить их понимание и навыки применения.

Идея метода

Идея метода заключается в составлении системы линейных уравнений (СЛУ) по первому и второму законам Кирхгофа, в которой неизвестными являются токи в ветвях.

Порядок расчёта

1. Преобразовать источники тока в источники напряжения.
2. Составить СЛУ по первому и второму законам Кирхгофа, для чего необходимо:
 - а. Определить количество уравнений по первому и второму законам Кирхгофа.

В общем случае, для цепи содержащей « B » ветвей и « Y » узлов, получим:

 - всего уравнений в СЛУ: B ;
 - уравнений по первому закону Кирхгофа: $Y - 1$;
 - уравнений по второму закону Кирхгофа: $B - (Y - 1)$.

- б. Задать условно–положительные направления токов и направления обхода контуров.
- в. Составить СЛУ по законам Кирхгофа.
3. Решить полученную систему любым известным методом.
4. Результаты расчёта проверить составив баланс мощностей.

Пример расчёта

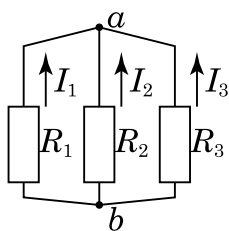


Рис. 2.3. К определению количества уравнений по первому закону Кирхгофа для узла a : $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$ для узла b : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Найдём токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.4, сопротивления резисторов, ЭДС источников напряжения и ток в источниках тока известны.

Преобразуем источники тока в источники напряжения (§ 1.4.3 на стр. 29):

$$R_{\text{вн1}} = \frac{1}{G_{\text{вн1}}}, \quad E_1 = \frac{J_1}{G_{\text{вн1}}}$$

По условию необходимо найти токи ветвей, следовательно количество неизвестных будет равно количеству токов, которое, по определению ветви (см. § 1.1.3, на стр. 8), равно количеству ветвей в цепи.

Количество уравнений по первому закону Кирхгофа будет на единицу меньше количества узлов (одно уравнение будет вырожденным, т. к. его можно выразить через остальные уравнения, например, в схеме на рис. 2.3 уравнения для узлов a и b можно преобразовать одно в другое умножением правой и левой части на « -1 »).

Определим количество уравнений, для анализируемой цепи:

- всего уравнений в СЛУ (равно количеству ветвей в цепи): $B = 6$;
- всего узлов в цепи: $Y = 4$;
- уравнений по первому закону Кирхгофа: $Y - 1 = 4 - 1 = 3$;
- уравнений по второму закону Кирхгофа: $B - Y - 1 = 6 - 4 - 1 = 3$.

Затем зададим условно–положительные направления токов в ветвях, выберем в цепи три узла и три контура для составления уравнений. Для выбранных контуров зададим направления обхода.

После проведённых преобразований и построений схема примет вид, приведённый на рис. 2.5.

Составим уравнения по первому и второму законам Кирхгофа:

Уравнения по первому закону Кирхгофа

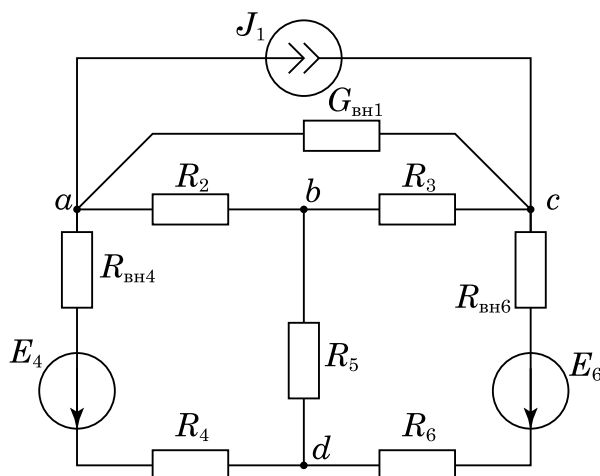


Рис. 2.4. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

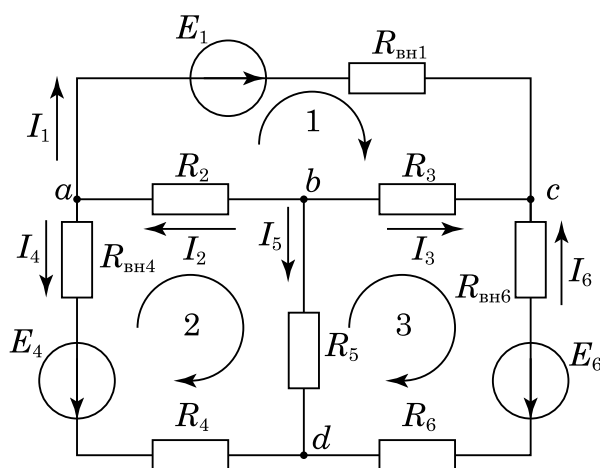


Рис. 2.5. Схема для расчёта по методу непосредственного применения законов Кирхгофа после преобразований

$$-I_1 + I_2 - I_4 = 0 \quad (\text{узел «a»})$$

$$I_2 + I_3 + I_5 = 0 \quad (\text{узел «b»})$$

$$-I_1 - I_3 - I_6 = 0 \quad (\text{узел «c»})$$

Уравнения по второму закону Кирхгофа

$$R_{\text{вн}1}I_1 - R_3I_3 + R_2I_2 = E_1 \quad (\text{контур «1»})$$

$$-R_2I_2 + R_5I_5 - (R_4 + R_{\text{вн}4})I_4 = -E_4 \quad (\text{контур «2»})$$

$$R_3I_3 - (R_6 + R_{\text{вн}6})I_6 - R_5I_5 = E_6 \quad (\text{контур «3»})$$

Подставив в полученные уравнения значения ЭДС и сопротивлений получим СЛУ из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ -I_1 - I_3 - I_6 = 0 \\ R_{вн1}I_1 - R_3I_3 + R_2I_2 = E_1 \\ -R_2I_2 + R_5I_5 - R_{\Sigma 4}I_4 = -E_4 \\ R_3I_3 - R_{\Sigma 6}I_6 - R_5I_5 = E_6 \end{cases}$$

где $R_{\Sigma 4} = R_4 + R_{вн4}$, $R_{\Sigma 6} = R_6 + R_{вн6}$.

Полученная система решается любым удобным методом.

2.3.2.2. Метод контурных токов

Метод контурных токов основан на втором законе Кирхгофа и позволяет упростить расчёт токов в цепи путём уменьшения количества уравнений в СЛУ.

Метод рекомендуется применять, когда число независимых контуров меньше числа узлов в цепи минус один.

Идея метода

Метод контурных токов основан на втором законе Кирхгофа и двух положениях:

- в каждом контуре электрической цепи протекают независимые, *расчётные* токи, называемые *контурными*;
- токи в ветвях цепи равны алгебраической сумме контурных токов, замыкающихся через эти ветви.

Порядок расчёта

1. Преобразовать источники тока в источники напряжения.
2. Выделить в цепи независимые контуры (т.е. отличающиеся друг от друга хотя бы одной ветвью), так, чтобы они охватывали все ветви, и задать условно-положительные направления контурных токов. Выбранные контуры не должны пересекаться ветвями.
3. Составить уравнения по второму закону Кирхгофа, где токи в ветвях представляются в виде алгебраической суммы контурных токов, замыкающихся через рассматриваемую ветвь.
4. Полученные линейные уравнения объединить в СЛУ, которая решается относительно контурных токов любым известным методом.
5. Определить искомые значения токов в ветвях как алгебраическую сумму контурных токов, замыкающихся через данную ветвь. Направление тока в ветви совпадает с направлением большего контурного тока.

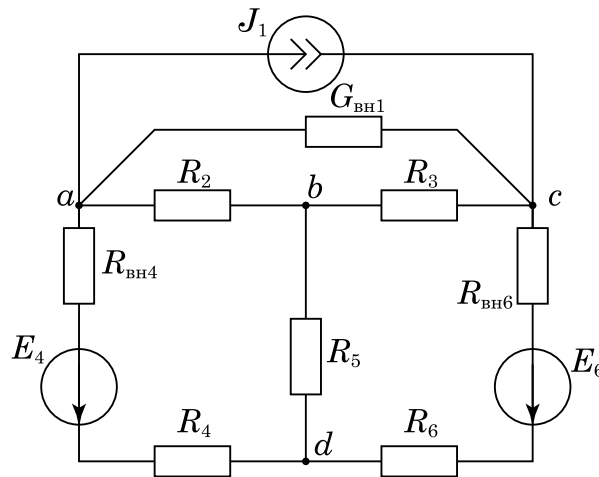


Рис. 2.6. Метод контурных токов

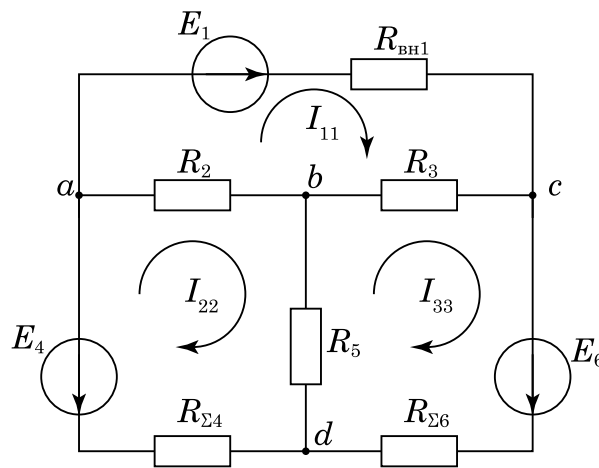


Рис. 2.7. Схема для расчёта по методу контурных токов после преобразований

6. Результаты расчёта проверить составив баланс мощностей.

Примечание: Уравнения для СЛУ (пункт 3) можно составлять по обобщённой формуле, которая приведена на стр. 46.

Пример расчёта

Найдём токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.6. Сопротивления резисторов, ЭДС источников напряжения и ток в источниках тока известны.

Преобразуем источники тока в источники напряжения. Для этого воспользуемся выражениями, полученными в § 1.4.3 на стр. 29:

$$R_{\text{вн}1} = \frac{1}{G_{\text{вн}1}}, \quad E_1 = \frac{J_1}{G_{\text{вн}1}}.$$

Найдём эквивалентные сопротивления ветвей с последовательным соединением элементов:

$$R_{\Sigma 4} = R_4 + R_{\text{вн}4}, \quad R_{\Sigma 6} = R_6 + R_{\text{вн}6}$$

Выберем в цепи независимые контуры и зададим для них условно-положительные направления контурных токов (рис. 2.7).

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_{\text{вн}1}I_{11} + R_3(I_{11} - I_{33}) + R_2(I_{11} - I_{22}) = E_1 \quad (\text{контур «11»})$$

$$R_2(I_{22} - I_{11}) + R_5(I_{22} - I_{33}) + R_{\Sigma 4}I_{22} = -E_4 \quad (\text{контур «22»})$$

$$R_3(I_{33} - I_{11}) + R_{\Sigma 6}I_{33} + R_5(I_{33} - I_{22}) = E_6 \quad (\text{контур «33»})$$

Проведя преобразования в полученных уравнениях и объединив их в СЛУ получим:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} - R_2I_{22} - R_3I_{33} = E_1 \\ -R_2I_{11} + R_{22}I_{22} - R_5I_{33} = -E_4 \\ -R_1I_{11} - R_5I_{22} + R_{33}I_{33} = E_6 \end{cases}$$

где $R_{11} = R_{\text{вн}1} + R_3 + R_2$, $R_{22} = R_2 + R_5 + R_{\Sigma 4}$, $R_{33} = R_4 + R_5 + R_{\Sigma 6}$.

Данная система решается любым известным методом решения СЛУ относительно контурных токов I_{11} , I_{22} и I_{33} .

Используя полученные значения контурных токов, определим токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}, & I_3 &= I_{11} - I_{33}, & I_5 &= I_{22} - I_{33}, \\ I_2 &= I_{11} - I_{22}, & I_4 &= I_{22}, & I_6 &= I_{33}. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что уравнения в СЛУ имеют общий вид:

$$I_{\text{рк}} \sum_{k=1}^n R_k - \sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{l=1}^m E_l,$$

где $I_{\text{рк}}$ — контурный ток контура, для которого строится уравнение по второму закону Кирхгофа (или *расчётный контур*);

$\sum_{k=1}^n R_k$ — сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в расчётный контур;

$\sum_{k=1}^n R_k I_k$ — алгебраическая сумма произведений сопротивлений ветвей, входящих в расчётный контур, на контурные токи (отличные от расчётного) протекающие через эти ветви;

$\sum_{l=1}^m E_l$ — алгебраическая сумма ЭДС от источников ЭДС, входящих в расчётный контур (при их отсутствии — ноль).

Знак «—» в полученном выражении будет присутствовать, если направления контурных токов выбрать одинаковым (например по часовой стрелки.).

2.3.2.3. Метод узловых потенциалов и метод двух узлов

Метод узловых потенциалов основан на первом законе Кирхгофа и позволяет упростить расчёт токов в цепи путём уменьшения количества уравнений в СЛУ. В качестве неизвестных выступают потенциалы узлов цепи.

Метод рекомендуется применять, когда число узлов в цепи минус один меньше числа независимых контуров.

Метод узловых потенциалов

Идея метода

Идея метода состоит в определении электрических потенциалов всех узлов схемы на основе уравнений по первому закону Кирхгофа и последующего расчёта токов в ветвях с помощью закона Ома, исходя из известного сопротивления ветвей и разности рассчитанных потенциалов узлов.

Порядок расчёта

1. Преобразовать все источники ЭДС в источники тока, а сопротивления в проводимости.
2. Выбрать узел, относительно которого будем определять потенциалы узлов и примем его потенциал равным нулю (это не влияет на результаты расчёта, т. к. в расчётах участвуют не величины потенциалов, а их *разности*).
3. Для остальных узлов схемы составить уравнения по первому закону Кирхгофа, выразив токи через потенциалы узлов по закону Ома.
4. Решить полученную СЛУ относительно потенциалов.
5. Найти напряжения между узлами, как разность ранее рассчитанных потенциалов, а затем рассчитать по закону Ома (см. § 1.3.1 на стр. 22) токи в ветвях.
6. Результаты расчёта проверить составив баланс мощностей.

Примечание: Уравнения для СЛУ (пункт 3) можно составлять по обобщённой формуле, которая приведена на стр. 50.

Пример расчёта

Найдём токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.8. Сопротивления резисторов, ЭДС источников напряжения и ток в источниках тока известны.

Сначала, с помощью выражений полученных в § 1.4.3 на стр. 29, преобразуем все источники ЭДС в источники тока (рис. 2.9):

$$J_4 = \frac{E_4}{R_{\text{вн}4} + R_4}, \quad G_{\Sigma 4} = \frac{1}{R_{\text{вн}4} + R_4}$$

$$J_6 = \frac{E_6}{R_{\text{вн}6} + R_6}, \quad G_{\Sigma 6} = \frac{1}{R_{\text{вн}6} + R_6}$$

Проводимости остальных ветвей будут равны:

$$G_2 = \frac{1}{R_2}, \quad G_3 = \frac{1}{R_3}, \quad G_5 = \frac{1}{R_5}.$$

Примем потенциал точки d равным нулю ($V_d = 0$), а потенциалы других точек свяжем соотношением $V_d = 0 < V_a < V_b < V_c$ (выбор соотношений не влияет на расчёт и делается для несколько большей ясности расчёта) и составим для трёх узлов (всего узлов четыре, а потенциал одного из них мы приняли равным нулю) выражения по первому закону Кирхгофа:

$$\text{узел } a: -I_1 - I_2 + I_4 = -J_1 - J_4$$

$$\text{узел } b: I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

$$\text{узел } c: I_1 - I_3 - I_6 = J_1 - J_6$$

Выразим токи в ветвях через потенциалы узлов (с учётом того, что $V_d = 0$):

$$I_1 = (V_c - V_a)G_{\text{вн}1} \quad I_2 = (V_b - V_a)G_2$$

$$I_3 = (V_c - V_b)G_3 \quad I_4 = V_a G_{\Sigma 4}$$

$$I_5 = V_b G_5 \quad I_6 = V_c G_{\Sigma 6}$$

Подставим полученные выражения для токов в ранее полученные выражения по первому закону Кирхгофа:

$$-(V_c - V_a)G_{\text{вн}1} - (V_b - V_a)G_2 + V_a G_{\Sigma 4} = -J_1 - J_4$$

$$(V_b - V_a)G_2 + (V_c - V_b)G_3 + V_b G_5 = 0$$

$$(V_c - V_a)G_{\text{вн}1} - (V_c - V_b)G_3 - V_c G_{\Sigma 6} = J_1 - J_6$$

Проведя преобразования и объединив полученные выражения в систему линейных уравнений, получим:

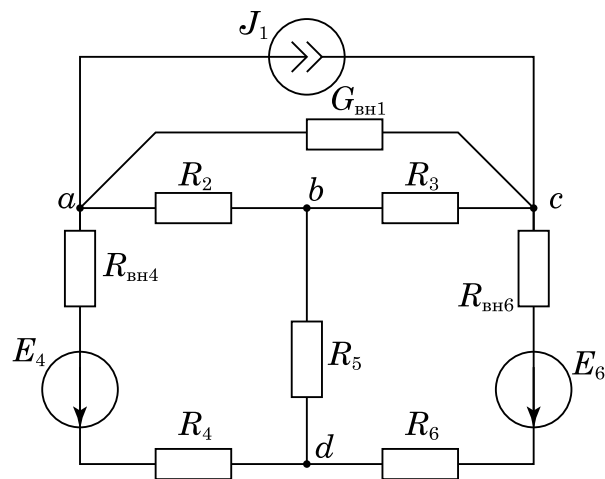


Рис. 2.8. Метод узловых потенциалов

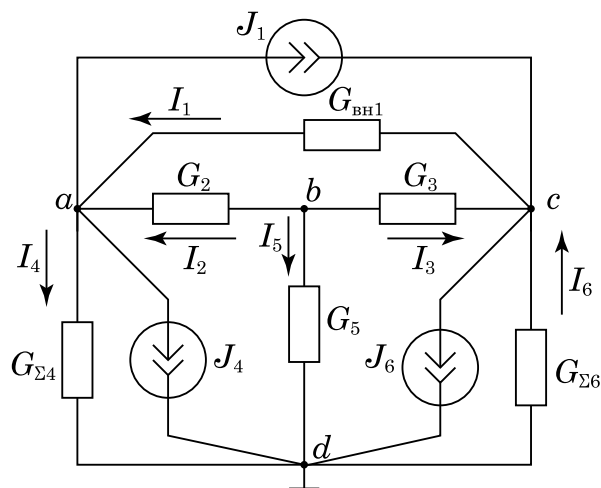


Рис. 2.9. Схема для расчёта по методу узловых потенциалов после преобразований

$$\begin{cases} G_a V_a - G_2 V_b - G_{\text{BH1}} V_c = -J_1 - J_4 \\ G_2 V_a - G_b V_b - G_3 V_c = 0 \\ G_{\text{BH1}} V_a - G_3 V_b - G_c V_c = J_1 + J_6 \end{cases}$$

где $G_a = G_{\text{BH1}} + G_2 + G_{\Sigma 4}$, $G_b = G_2 + G_3 + G_5$, $G_c = G_{\text{BH1}} + G_3 + G_{\Sigma 6}$ — узловые проводимости.

Данная система решается любым известным методом решения СЛУ относительно потенциалов узлов, после чего рассчитанные потенциалы подставляются в полученные ранее выражения для токов.

Интересно отметить, что уравнения в СЛУ имеют общий вид:

$$V_p \sum_{k=1}^n G_k - \sum_{k=1}^n V_k G_k = \sum_{l=1}^m J_l,$$

где V_p — потенциал узла, для которого строится уравнение по первому закону Кирхгофа (или *расчётный узел*),

$\sum_{k=1}^n G_k$ — собственная проводимость k -го узла, равная сумме проводимостей входящих в него ветвей,

$\sum_{k=1}^n V_k G_k$ — алгебраическая сумма произведений потенциалов узлов, соединённых с расчётным ветвями на проводимости этих ветвей,

n — количество входящих в узел пассивных ветвей,

$\sum_{l=1}^m J_l$ — алгебраическая сумма токов от источников тока, присоединённых к расчётной ветви (при их отсутствии — ноль),

m — количество входящих в узел активных ветвей.

Метод двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов и применяется для цепей, содержащих только два узла и неограниченное количество параллельных ветвей.

Идея метода

Идея метода состоит в расчёте напряжения между узлами схемы и последующего расчёта токов в ветвях по закону Ома (§ 1.3.1 на стр. 22).

Порядок расчёта

1. Преобразовать все источники тока в источники напряжения.
2. Рассчитать напряжение между узлами схемы (см. выражение на стр. 52).
3. Рассчитать токи в ветвях по закону Ома (§ 1.3.1 на стр. 22).

Пример расчёта

Найдём токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.10. Сопротивления резисторов, ЭДС источников напряжения и ток в источниках тока известны.

Примем направление напряжения от узла a к узлу b . Направление токов в ветвях примем от узла b к узлу a .

Преобразуем сопротивления ветвей в проводимости:

$$G_1 = \frac{1}{R_1}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2}, \quad G_3 = \frac{1}{R_3}.$$

Составим уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Токи в ветвях, по закону Ома (§ 1.3.1 на стр. 22) будут равны:

$$\begin{aligned} I_1 &= (E_1 - U_{ab})G_1 \\ I_2 &= (-E_2 - U_{ab})G_2 \\ I_3 &= (0 - U_{ab})G_3 = -U_{ab}G_3 \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для токов в уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$(E_1 - U_{ab})G_1 + (-E_2 - U_{ab})G_2 - U_{ab}G_3 = 0.$$

Проведём преобразования в полученном выражении:

$$\begin{aligned} E_1G_1 - U_{ab}G_1 - E_2G_2 - U_{ab}G_2 - U_{ab}G_3 &= 0 \\ E_1G_1 - E_2G_2 &= U_{ab}G_1 + U_{ab}G_2 + U_{ab}G_3 \\ E_1G_1 - E_2G_2 &= U_{ab}(G_1 + G_2 + G_3) \end{aligned}$$

Отсюда напряжение между узлами будет равно:

$$U_{ab} = \frac{E_1G_1 - E_2G_2}{G_1 + G_2 + G_3},$$

В общем виде выражения для расчёта напряжения в методе двух узлов будет иметь вид:

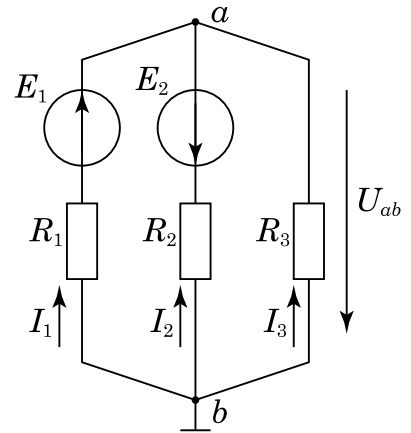


Рис. 2.10. Метод узлового напряжения

$$U_{ab} = \frac{\sum_{i=1}^m E_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i},$$

где m — количество активных ветвей,

n — общее количество ветвей.

В завершении расчёта по закону Ома для активного участка цепи вычисляются токи в ветвях.

2.3.3. Метод наложения

Принцип наложения (суперпозиции) является одним из самых общих законов физики и нашёл самое широкое применение в её различных областях, например в механике, теории поля и др. Он является прямым следствием общих свойств линейных уравнений и может быть применен ко всем явлениям, описываемым линейными уравнениями.

Применительно к электрическим цепям принцип наложения (суперпозиции) заключается в том, что ток в произвольной ветви, возникший при совместном воздействии нескольких источников электрической энергии, равен сумме частных токов, создаваемых каждым из имеющихся в цепи источников в отдельности.

Идея метода

Идея метода состоит в том, что ток в любой ветви электрической цепи равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждым из действующих в цепи источников электрической энергии в отдельности

Порядок расчёта

1. В имеющейся цепи выделить вспомогательные схемы, каждая из которых содержит один из имеющихся в цепи источников электрической энергии (таким образом, количество вспомогательных схем равно количеству источников).
2. Для каждой вспомогательной схемы, в соответствии с направлением ЭДС или тока в источнике, отметить положительные направления токов в ветвях (важно понимать, что наличие в цепи источника электрической энергии однозначно задаёт направление токов в ветвях цепи, напомним, что ток направлен от точки с бóльшим потенциалом к точке с мёньшим).
3. Провести расчёт токов во вспомогательных схемах любым известным методом.

4. Путём суммирования токов в соответствующих ветвях всех вспомогательных схем, найти токи в ветвях основной схемы. Направление тока в ветвях основной схемы совпадёт с направлением наибольшего тока в соответствующей ветви вспомогательной.

Пример расчёта

Найдём токи в электрической цепи, приведённой на рис. 2.11. Сопротивления резисторов, ЭДС источников напряжения и ток в источниках тока известны.

Выделим из основной схемы (рис. 2.11, а) две (по количеству источников ЭДС) вспомогательные цепи (рис. 2.11, б и рис. 2.11, в). В каждой из трёх полученных цепей, учитывая направление ЭДС в источниках, определим направление токов в ветвях а затем произведём расчёт токов в ветвях (например методом эквивалентных преобразований):

расчёт первой вспомогательной схемы —

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_{\text{BH1}} + \frac{R_{\text{BH2}}R_{\text{H}}}{R_{\text{BH2}} + R_{\text{H}}}}, U' = I'_1 \frac{R_{\text{BH2}}R_{\text{H}}}{R_{\text{BH2}} + R_{\text{H}}}, I'_2 = \frac{U'}{R_{\text{BH2}}}, I'_3 = \frac{U'}{R_{\text{H}}}$$

расчёт второй вспомогательной схемы —

$$I''_1 = \frac{E_2}{R_{\text{BH2}} + \frac{R_{\text{BH1}}R_{\text{H}}}{R_{\text{BH1}} + R_{\text{H}}}}, U'' = I''_1 \frac{R_{\text{BH1}}R_{\text{H}}}{R_{\text{BH1}} + R_{\text{H}}}, I''_2 = \frac{U''}{R_{\text{BH1}}}, I''_3 = \frac{U''}{R_{\text{H}}}.$$

конечный расчёт основной схемы —

$$I_1 = I'_1 + I''_1, \quad I_2 = I'_2 + I''_2, \quad I_3 = I'_3 - I''_3.$$

Токи во вспомогательных цепях могут быть рассчитаны другими методами, например метод двух узлов часто даёт более простой расчёт.

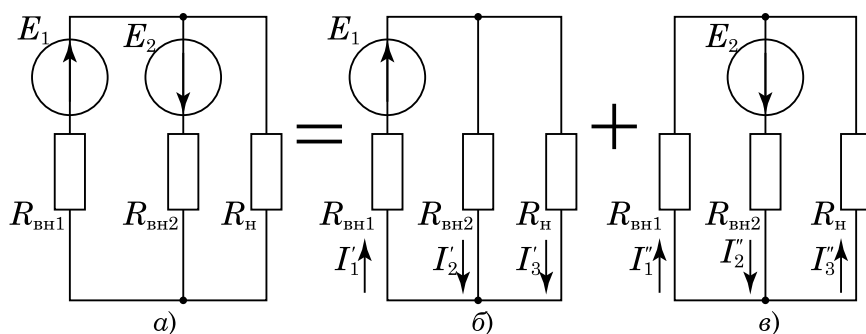


Рис. 2.11. Метод наложения (суперпозиции)

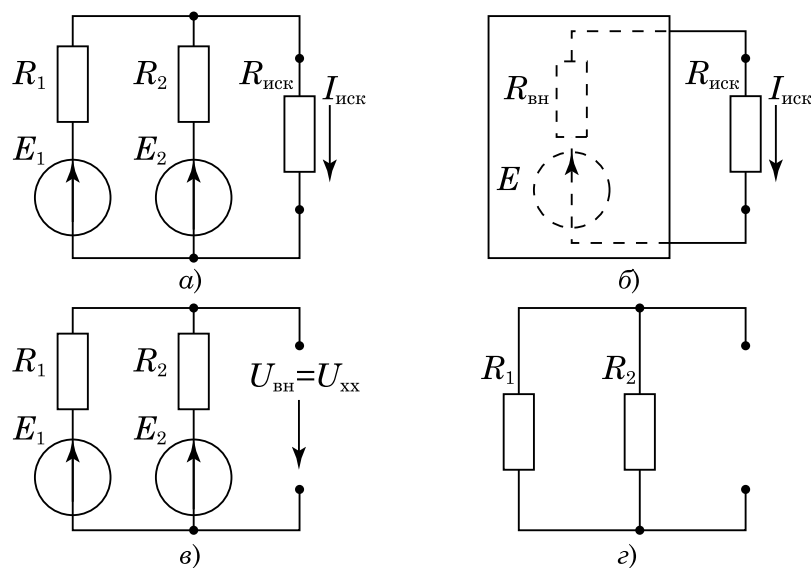


Рис. 2.12. Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника)

2.3.4. Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника)

Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника) используется для определения тока в одной из ветвей сложной электрической цепи, без расчёта всей цепи.

Идея метода

Идея метода состоит в замене участка электрической цепи, имеющего два вывода (двухполюсника) и содержащего активные и пассивные элементы, эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на выводах двухполюсника, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Порядок расчёта

1. Исключить из цепи ветвь, для которой выполняется расчёт.
2. Оставшуюся цепь имеющую два вывода и содержащую активные и пассивные элементы (активный двухполюсник), представить в виде эквивалентного генератора, для чего необходимо рассчитать его ЭДС ($E = U_{хх}$) и внутреннее сопротивление ($R_{вн} = R_{вх}$).
3. Рассчитывается искомый ток I_n в заданной ветви по формуле $I_n = E / (R_{вн} + R_{иск})$.

Пример расчёта

Найдём ток I_H в электрической цепи, приведённой на рис. 2.12, а. Сопротивления резисторов, ЭДС источников напряжения и ток в источниках тока известны.

Для этого выделим в схеме активный двухполюсник (рис. 2.12, б), затем рассчитаем методом двух узлов напряжение внутреннее напряжение эквивалентного генератора (рис. 2.12, в) ($G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$):

$$E = U_{xx} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2},$$

и его внутреннее сопротивление (рис. 2.12, з):

$$R_{BH} = R_{BX} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

после чего найдём искомый ток (рис. 2.12, б):

$$I_H = \frac{E}{R_{BH} + R_H}.$$

Лекция 3

Электрические цепи однофазного синусоидального тока

3.1. Общие сведения

Основу современной энергетики и приборостроения составляют цепи переменного тока.

Переменным, называется ток (а также напряжение и ЭДС), изменяющийся во времени (ГОСТ Р 52002 — 2003).

Наибольшее распространение получил переменный ток, изменяющийся по синусоидальному (гармоническому) закону. Его распространению способствовали простота преобразования переменного тока и напряжения одного уровня в ток и напряжение другого уровня (с помощью трансформаторов), а также простота и надёжность электрических машин, работающих на переменном токе.

Преимуществом двигателей и генераторов переменного тока, по сравнению с машинами постоянного тока, является простота конструкции и высокий (около 75 %) КПД, в результате чего двигатели переменного тока (асинхронные двигатели) стали наиболее распространёнными электрическими двигателями. Среди их недостатков можно отметить сложность регулирования частоты вращения.

3.2. Получение переменного синусоидального тока

Согласно закону электромагнитной индукции любое перемещение проводника относительно магнитного поля вызывает возникновение в проводнике электродвижущей силы.

Рассмотрим электрические процессы, протекающие в рамке, равномерно вращающейся в магнитном поле (рис. 3.1).

Рамка активной¹ длиной l , вращается с постоянной линейной скоростью v в постоянном магнитном поле \vec{B} , совершая полный оборот на 2π радиан за время T . Скорость изменения угла наклона будет равна отношению $2\pi/T$, или $2\pi f$, где $f = 1/T$ — частота, а $\omega = 2\pi f$ — **круговая частота**.

¹Активная длина рамки, это длина её участков, расположенных параллельно магнитным полюсам.

Рамка будет пересекать линии вектора \vec{B} со скоростью

$$v_{\pi} = v \sin \omega t,$$

где ωt — значение угла поворота рамки в момент времени t .

Согласно закону электромагнитной индукции:

$$e = Blv_{\pi},$$

с учётом того, что $v_{\pi} = v \sin \omega t$ получим:

$$e = Blv \sin \omega t,$$

где B — магнитная индукция, l — активная длина рамки, v — линейная скорость активного участка рамки.

Так, как величины B , l и v не изменяются, а их произведение является максимальным значением, которое может принять ЭДС в полученном выражении, то мы можем ввести следующее обозначение:

$$E_m = Blv,$$

где E_m — максимальное или амплитудное значение ЭДС.

Таким образом, ЭДС будет равна:

$$e = E_m \sin \omega t.$$

В общем случае, рамка может начать вращение с некоего начального угла ψ_e , таким образом итоговое выражение для ЭДС примет вид:

$$e = E_m \sin (\omega t + \psi_e)$$

Выражения для синусоидальных тока и напряжения имеют аналогичную форму:

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i)$$

$$u = U_m \sin (\omega t + \psi_u)$$

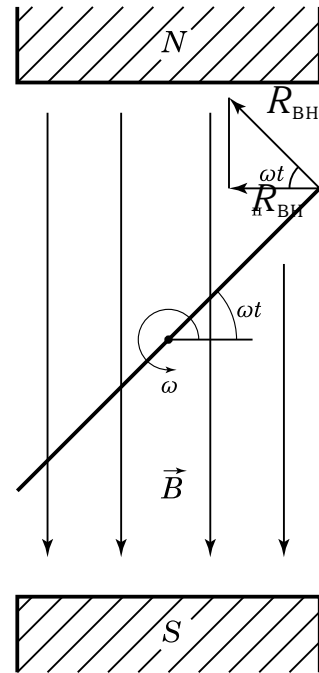


Рис. 3.1. Рамка вращающаяся в магнитном поле

3.3. Основные величины и законы для мгновенных значений

3.3.1. Величины, характеризующие синусоидальную функцию

На рисунке 3.2 представлены графики изменения тока и напряжения, соответствующие выше приведённым выражениям. Рассмотрим более подробно имеющиеся на них обозначения:

e , u , i — **мгновенные значения** ЭДС, напряжения и тока (значения ЭДС, напряжения и тока в рассматриваемый момент времени в данном случае представляются в виде синусоидальных функций времени и позволяют получить значения соответствующих функций в произвольный момент времени t);

E_m , U_m , I_m — **максимальные (амплитудные) значения синусоидальных ЭДС, напряжения и тока** соответственно;

$\omega t + \psi$ — **фаза** синусоидальной функции;

ψ_e , ψ_u , ψ_i — **начальная фаза** соответствующих функций (значение фазы синусоидальной функции при $t = 0$), $[\psi] = \text{рад}$;

φ — **разность фаз** между напряжением и током ($\varphi = \psi_u - \psi_i$);

T — **период** (наименьший интервал времени, по истечении которого мгновенные значения периодического электрического тока повторяются в неизменной последовательности, $[T] = \text{с}$);

f — **частота** (величина обратная периоду, $f = 1/T$, измеряется в герцах $[\text{Гц}] = 1/\text{с} = \text{с}^{-1}$);

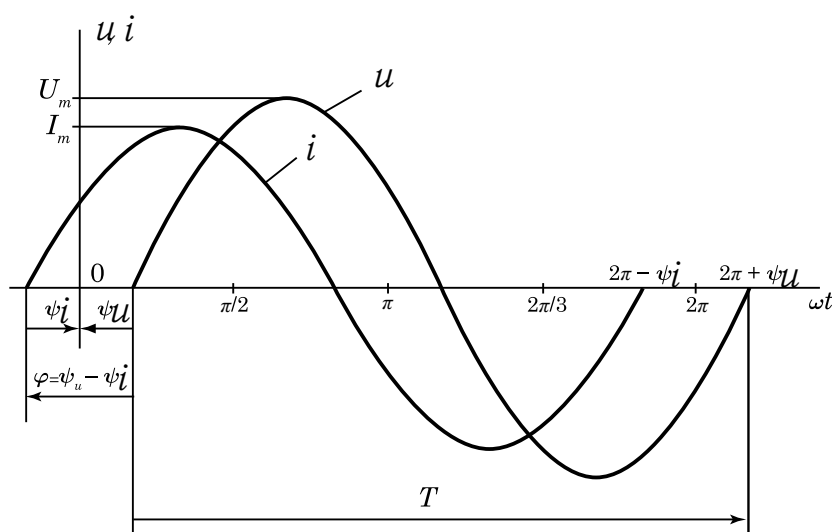


Рис. 3.2. Графики синусоидального тока и напряжения

ω — **круговая частота** (скорость изменения фазы синусоидального электрического тока, равная частоте синусоидального электрического тока, умноженной на 2π , характеризует количество периодов на участке 2π , $\omega = 2\pi f$, $[\omega] = \text{рад/с} = \text{с}^{-1}$).

Начальный фазовый угол отсчитывается от момента, соответствующего началу синусоиды (нулевое значение синусоидальной величины при переходе её от отрицательных к положительным значениям), до момента начала отсчета времени (начало координат). При $\psi < 0$ начало синусоиды сдвинуто вправо, а при $\psi > 0$ — влево относительно начала координат.

Если мы имеем две синусоидальные функции с разными начальными фазами, говорят, что функция с меньшим значением начальной фазы опережает другую, а функция с большим значением начальной фазы отстаёт от величины с меньшим значением (рис. 3.3).

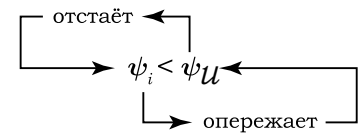


Рис. 3.3. К разъяснению понятий «фаза опережает» и «фаза отстаёт»

На рис. 3.2 ток опережает напряжение на угол φ или, что одно и то же, напряжение отстаёт от тока на угол φ).

3.3.2. Действующее и средние значения синусоидальных функций

Действующее значение

При анализе цепей переменного тока в основном используется **действующее** (или **среднеквадратичное**, в англоязычной литературе используется аббревиатура **RMS** — root mean square) значение переменного тока, напряжения или ЭДС.

Действующее значение переменной тока i равно такому значению постоянного тока I , которое рассеивает на активном сопротивлении R за время T такую же мощность, как и данный переменный ток за период T :

$$W_{\sim} = \int_0^T Ri^2 dt = RI^2 T = W_{-}$$

где $W_{\sim} = \int_0^T Ri^2 dt$ — мощность переменного тока,
 $W_{-} = RI^2 T$ — мощность постоянного тока.

Из полученного равенства выведем выражение для действующего значения тока:

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (I_m \sin \omega t)^2 dt} = \\
 &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T} = \\
 &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m
 \end{aligned}$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения²:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Выражения для максимальных (или амплитудных) значений будут иметь вид:

$$I_m = I\sqrt{2}, \quad U_m = U\sqrt{2}, \quad E_m = E\sqrt{2}$$

Отметим, что $\sqrt{2} \approx 1,4142$, а $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$.

Пример:

Найти действующее значение тока $i = 141 \sin(\omega t + \pi/4)$.

Действующее значение синусоидального тока I в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудного значения, равного, в данном случае $I_m = 141$, таким образом ответ будет:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{1,41} = 100 \text{ A}.$$

Рассчитайте самостоятельно действующие значения токов и напряжений (правильные ответы даны в скобках):

$u = 282 \sin(20t - \pi) \text{ В}$ (ответ: $U = 200 \text{ В}$);

$i = 10 \cos(31,4t - 15^\circ) \text{ А}$ (ответ: $I = 7 \text{ А}$);

$U_m = 123 \text{ В}$ (ответ: $U = 87 \text{ В}$).

Пример:

Найти амплитудное значение синусоидального тока, если его действующее значение $I = 100 \text{ А}$.

Амплитудное значение синусоидального тока I в $\sqrt{2}$ раз больше действующие значения, таким образом ответ будет равен:

²Термин «действующее значение» корректно употреблять по отношению к переменному току, т. к. именно через силу тока определяется тепловое — «действующее» значение электрического тока, к напряжению и ЭДС правильнее применять термин «среднее квадратическое значение» (среднеквадратичное значение, СКЗ)

$$I_m = I\sqrt{2} = 100 \cdot 1,41 = 141 \text{ A.}$$

Рассчитайте самостоятельно амплитудные значения токов и напряжений (правильные ответы даны в скобках):

$$U = 300 \text{ В} \quad (\text{ответ: } U_m = 423 \text{ В});$$

$$I = 1,5 \text{ А} \quad (\text{ответ: } I = 2,1 \text{ А});$$

$$U = 123 \text{ В} \quad (\text{ответ: } U = 173,43 \text{ В}).$$

Амплитудное и действующее значения относятся друг к другу как $\sqrt{2}$ только при синусоидальной форме сигнала, если закон изменения отличен от гармонического, то и действующее значение будет определяться другим соотношением. Но т.к. действующее значение характеризует энергетические свойства тока и напряжения, то оно позволяет сравнивать сигналы разной формы.

Шкалы электроизмерительных приборов, используемых в цепях переменного тока, отградуированы в действующих значениях напряжения или тока.

Среднее значение

Среднее значение синусоидальной функции за период равно нулю, поэтому под средним значением синусоидальной величины обычно понимается среднее значение за половину периода, в течении которой знак не меняется. Для $e = E_m \sin \omega t$, получим:

$$\begin{aligned} E_{\text{cp}} &= \frac{1}{0,5T} \int_0^{0,5T} E_m \sin \omega t \, dt = \left| -\frac{E_m}{0,5T\omega} \cos \omega t \right|_0^{0,5T} = \\ &= \frac{E_m T}{0,5T2\pi} \left| \frac{\cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}}{-1} - \frac{\cos 0}{1} \right| = \frac{2E_m}{\pi} = 0,637E_m \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$E_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} E_m = 0,637E_m$$

Аналогично для тока и напряжения:

$$I_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637I_m$$

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637U_m$$

Среднее значение, в основном, применяется при анализе выпрямителей.

3.3.3. Законы Кирхгофа и Ома для мгновенных значений синусоидальных токов, напряжений и ЭДС

Мгновенные значения физических величин, характеризующих протекание переменного тока, есть их значения в любой произвольный момент времени t . В этот момент их можно считать постоянными и применять к ним законы, полученные для цепей постоянного тока.

Закон Ома

Мгновенная величина силы тока в цепи прямо пропорциональна мгновенному значению напряжения и обратно пропорциональна сопротивлению:

$$i = \frac{u}{R}.$$

Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^l i_k = 0$$

где l — число сходящихся в выбранном узле ветвей.

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма мгновенных значений ЭДС всех источников энергии в любом замкнутом контуре схемы равна алгебраической сумме мгновенных значений напряжения на всех остальных элементах того же контура:

$$\sum_{k=1}^m R_k i_k = \sum_{l=1}^n e_l$$

где m и n — количество активных и пассивных элементов в замкнутом контуре, соответственно.

3.4. Мгновенная мощность

Мгновенная мощность в электрической цепи равна произведению мгновенного напряжения на мгновенный ток:

$$p = ui.$$

С учётом того, что $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, мгновенная мощность p будет равна:

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

В полученном выражении выразим ψ_u через разность фаз ($\varphi = \psi_u - \psi_i \Rightarrow \psi_u = \varphi + \psi_i$):

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi + \psi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

и приняв $\psi_i = 0^3$, выполним преобразование с помощью тригонометрической формулы ($\sin \alpha \cdot \sin \beta = 1/2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$):

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin(\omega t) = \\ &= U_m I_m \cdot 1/2 [\cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \omega t + \varphi)] = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

и окончательно:

$$p = UI[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

Из полученного выражения видно, что мгновенная мощность имеет постоянную $UI \cos(\varphi)$ и переменную $-UI \cos(2\omega t + \varphi)$ составляющие, причём начальная фаза переменной составляющей равна разности фаз между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

3.5. Применение комплексных чисел для расчёта электрических цепей

3.5.1. Общие положения

В электротехнике используется четыре способа представления синусоидальных токов, напряжений и ЭДС:

1. **Аналитическое** в виде тригонометрической функции времени вида $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ — это наиболее полное представление, содержащее информацию об амплитуде, частоте и начальной фазе синусоидальной величины, но его неудобно использовать при расчёте цепей, т. к. алгебраические действия с тригонометрическими функциями требуют громоздких вычислений.

³Поведение электрической цепи определяется, разностью фаз, а величина начальной фазы является вторичной, поэтому приняв $\psi_i = 0$, мы только сместим начала координат в точку, где ток меняет знак «-» на «+», не изменив величину « $\varphi = \psi_u - \psi_i$ », при этом значительно упростив итоговое выражение.

2. **Графическое** в виде временной диаграммы (т. е. графика изменения соответствующей синусоидальной величины во времени), — область применения этого представления ограничена наглядным представлением синусоидальных величин и соотношений между ними, для расчётов электрических цепей не применяется.
3. **Векторное** в виде векторов, длина которых равна действующему (реже амплитудному) значению синусоидальной функции, а угол поворота относительно нулевой оси равен начальной фазе — в этом представлении теряется информация о частоте, но остаётся наиболее важная для расчёта электрических цепей информация об амплитуде и начальной фазе, векторное представление синусоидальной функции позволило применить правила векторной алгебры для расчёта электрических цепей.
4. **В виде комплексного числа**, модуль которого равен действующему (или амплитудному) значению синусоидальной функции, а аргумент начальной фазе — это наиболее удобное представление для расчёта электрических цепей, хотя в нём и отсутствует, также как и в векторном, информация о частоте. В электротехнике не делается различия между представлением в виде комплексных чисел и виде вектора: если вектор, соответствующий синусоидальной функции отложить из начала координат на комплексной плоскости, то точка, на которую указывает его вершина будет соответствовать комплексному числу. Говорят, что комплексное число *символизирует* вектор.

В 1893 г. американский инженер Чарлз Протеус Штейнмец (1865 — 1923 гг.) предложил строить вектора, соответствующие синусоидальным функциям, на комплексной плоскости, при этом точка, на которую указывает проведённый из начала координат вектор, соответствует комплексному числу.

Говорят, что комплексное число *символизирует* вектор, отсюда пошло понятие **символического метода расчёта** электрических цепей, как метода расчёта, основанного на операциях с синусоидальными функциями, представленных в виде комплексных чисел.

В электротехнике не делается различий между представлением и синусоидальных величин в виде векторов и комплексных чисел.

3.5.2. Понятие о комплексных числах

3.5.2.1. Комплексное число

Комплексное число — это число, вида $\underline{X} = X' + jX''$, где X' и X'' — действительные числа, а j^4 — т.н. мнимая единица (число, квадрат которого равен $\sqrt{-1}$; X' называется действительной частью ($X' = \text{Re } \underline{X}$, где Re сокращение от Real), а X'' — мнимой частью комплексного числа ($X'' = \text{Im } \underline{X}$, где Im сокращение от Imagine).

Основы теории комплексных чисел сформулировал «король математики» — Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855 гг.) в 1815 г. Причиной появления комплексных чисел является то, что в их области определения существуют корни уравнений вида $z^2 + 1 = 0$, ($z = \sqrt{-1}$).

3.5.2.2. Формы представления комплексных чисел

Множество комплексных чисел отображают в виде плоскости, на которой действительная ось (обозначается «+1»), обычно, расположена горизонтально, а мнимая (обозначается «+j») — вертикально (рис. 3.4).

Точка \underline{X} на рисунке соответствует **графическому представлению** комплексного числа.

Декартовы координаты точки \underline{X} образуют **алгебраическую форму** комплексного числа:

$$\underline{X} = X' + jX''.$$

Проекции отрезка длиной X , проведённого из начала координат до точки \underline{X} , на действительную и мнимую оси дают **тригонометрическую форму** комплексного числа:

$$\underline{X} = X \cos \varphi + jX \sin \varphi.$$

Тригонометрическая форма показывает связь между алгебраической и показательной формами комплексного числа.

Преобразовав тригонометрическую форму с помощью формулы Эйлера ($e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$) получим **показательную форму** комплексного числа, представляющее комплексное число в полярных координатах:

$$\underline{X} = X e^{j\varphi}.$$

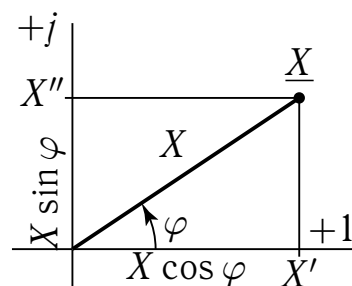
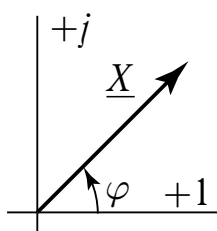


Рис. 3.4. Представление комплексного числа на комплексной плоскости

⁴В математике мнимую единицу принято обозначать как i , однако в электротехнике это обозначение уже занято мгновенным значением тока, поэтому, в соответствии с ГОСТ 1494 — 77, используется j .

**Рис. 3.5.**

Представление
комплексного
числа в виде
вектора на
комплексной
плоскости

Если мы будем рассматривать отрезок проведённый из начала координат к точке \underline{X} в качестве вектора, направленного к этой точке, то мы получим **векторную форму** комплексного числа (рис. 3.5). В электротехнике не делается различие между векторами и комплексными числами, что позволяет применять к расчёту правила векторной алгебры.

Преобразования между различными формами представления комплексных чисел основаны на теореме Пифагора и тригонометрических функциях:

преобразование алгебраической формы в показательную:

$$X' + jX'' \rightarrow Xe^{j\varphi}$$

$$X = \sqrt{X'^2 + X''^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{X'}{X''}, & \text{при } X' > 0; \\ \arctg \frac{X'}{X''} + 180^\circ, & \text{при } X' < 0. \end{cases}$$

преобразование показательной формы в алгебраическую:

$$Xe^{j\varphi} \rightarrow X' + jX''$$

$$X' = X \cos \varphi$$

$$X'' = X \sin \varphi$$

3.5.2.3. Действия с комплексными числами

Сложение:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (I'_1 + jI''_1) + (I'_2 + jI''_2) = (I'_1 + I'_2) + j(I''_1 + I''_2)$$

Вычитание:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (I'_1 + jI''_1) - (I'_2 + jI''_2) = (I'_1 - I'_2) + j(I''_1 - I''_2)$$

Умножение:

$$\underline{I}_1 * \underline{I}_2 = I_1 e^{j\psi_{i1}} * I_2 e^{j\psi_{i2}} = I_1 I_2 e^{j(\psi_{i1} + \psi_{i2})}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 * \underline{I}_2 &= (I'_1 + jI''_1) \cdot (I'_2 + jI''_2) = I'_1 I'_2 + j(I'_1 I''_2) + j(I''_1 I'_2) + j^2(I''_1 I''_2) = \\ &= (I'_1 I'_2 - I''_1 I''_2) + j(I'_1 I''_2 + I''_1 I'_2)\end{aligned}$$

Деление:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} &= \frac{I_1 e^{j\psi_{i1}}}{I_2 e^{j\psi_{i2}}} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\psi_{i1} - \psi_{i2})} \\ \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} &= \frac{I'_1 + jI''_1}{I'_2 + jI''_2} = \frac{I'_1 + jI''_1}{I'_2 + jI''_2} \cdot \frac{I'_2 - jI''_2}{I'_2 - jI''_2} = \\ &= \frac{(I'_1 I'_2 + I''_1 I''_2) + j(-I'_1 I''_2 + I''_1 I'_2)}{(I'_2)^2 - (jI''_2)^2} = \\ &= \frac{(I'_1 I'_2 + I''_1 I''_2) + j(-I'_1 I''_2 + I''_1 I'_2)}{(I'_2)^2 - (-I''_2)^2}.\end{aligned}$$

Умножение на $e^{j\alpha}$:

Из формулы Эйлера ($\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}$) видно, что повороту на угол α соответствует умножение на $e^{j\alpha}$.

В частном случае $\alpha = \pm 90^\circ = \pm \pi/2$, умножению на $e^{j\alpha}$ будет соответствовать умножение на $\pm j$:

$$I e^{j90^\circ} = jI, \quad I e^{-j90^\circ} = -jI.$$

Сопряжённые комплексные числа :

Сопряжёнными называются комплексные числа, которые различаются знаком мнимой части:

$$\underline{I} = I' + jI'' \quad \underline{I}^* = I' - jI''$$

3.5.3. Основные электротехнические величины и законы в комплексной форме

3.5.3.1. Комплексные ток и напряжение

Для расчёта электрических цепей необходимо перевести токи, напряжения и ЭДС, представленные в виде синусоидальных функций времени, в комплексную форму, для чего воспользуемся формальным преобразованием⁵:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

⁵Теоретическое обоснование этого преобразования рассматривается в учебниках по Теории цепей и ТОЭ.

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\psi_u}$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \Leftrightarrow \underline{E} = E e^{j\psi_e}$$

где I , U , E — действующие значения тока, напряжения и ЭДС.

Пример:

Исходные данные и задание:

Синусоидальный ток задан в форме синусоидальной функции времени: $i = 141 \sin(\omega t + \pi/6)$. Представьте его в показательной, тригонометрической и алгебраической формах комплексного числа, а также в виде вектора.

Решение:

Для представления в показательной форме воспользуемся формальным преобразованием:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

$$\text{где } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{1,41} = 100 \text{ А;}$$

$$\psi_i = \pi/6.$$

Таким образом показательная форма комплексного тока имеет вид:

$$\underline{I} = 100 e^{j\pi/6} \quad \text{или} \quad \underline{I} = 100 e^{j30^\circ}$$

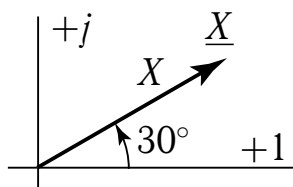
Тригонометрическая форма:

$$\underline{I} = I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i = 100 \cos \pi/6 + j100 \sin \pi/6$$

Алгебраическая форма:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= I' + jI'' = 100 \cos \pi/6 + j100 \sin \pi/6 = \\ &= 100 \frac{\sqrt{3}}{2} + j100 \frac{1}{2} = 50\sqrt{3} + j50. \end{aligned}$$

Векторная форма:



Задания для самостоятельной работы:

Представлена одна из четырёх форм комплексной величины, преобразуйте её в остальные три (алгебраическую, тригонометрическую, показательную или векторную), а также представьте в виде синусоидальной функции времени (мгновенного значения соответствующей величины):

1. Дана алгебраическая форма комплексной ЭДС — $\underline{E} = 3 + j4$

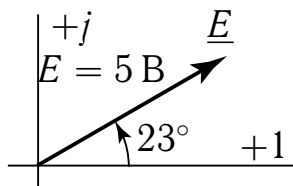
Ответ: тригонометрическая — $\underline{E} = 5 \cos(23^\circ) + j5 \sin(23^\circ)$;

показательная — $\underline{E} = 5 e^{j23^\circ}$;

мгновенное значение — $\underline{E} = 7,2 \sin(\omega t + 23^\circ)$;

векторная форма:

2. Дана показательная форма комплексного напряжения — $\underline{U} = 10 e^{j30^\circ}$

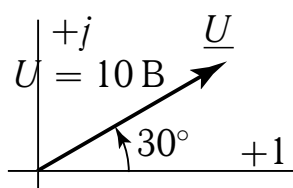


Ответ: тригонометрическая — $\underline{U} = 10 \cos(30^\circ) + j10 \sin(30^\circ)$;

алгебраическая — $\underline{U} = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$;

мгновенное значение — $\underline{E} = 14,1 \sin(\omega t + 30^\circ)$;

векторная форма:



Для наглядного представления соотношения действительных и мнимых составляющих комплексных токов и напряжений используют «**треугольник тока**» (рис. 3.7) и «**треугольник напряжения**» (рис. 3.6).

В электротехнике принято действительные составляющие комплексных величин называть **активными**, а мнимые — **реактивными**.

Таким образом, мы получим:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} = U_a + jU_p, \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i} = I_a + jI_p,$$

где U_a и U_p — активная и реактивная составляющие комплексного напряжения соответственно,

$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$ — модуль комплексного напряжения или **полное напряжение**;

I_a и I_p — активная и реактивная составляющие комплексного тока соответственно;

$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$ — модуль комплексного тока или **полный ток**.

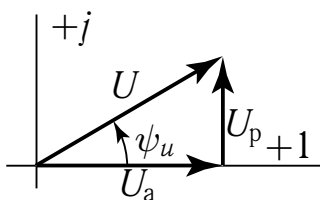


Рис. 3.6. Треугольник напряжений

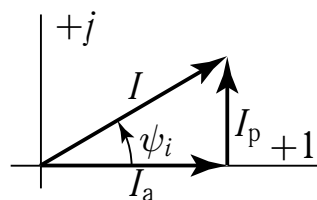


Рис. 3.7. Треугольник токов

3.5.3.2. Законы Кирхгофа и Ома в комплексной форме

С учётом того, что выражения для мгновенных значений токов, напряжений и ЭДС имеют однозначное представление в виде комплексных чисел (которые их символизируют), мы можем записать законы Кирхгофа и Ома в комплексной форме:

Закон Ома

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

где \underline{Z} — комплексное сопротивление.

Первый закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^l \underline{I}_k = 0$$

где l — число сходящихся в данном узле ветвей.

Второй закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^m \underline{Z} \cdot \underline{I}_k = \sum_{l=1}^n \underline{E}_l$$

где n и m — количество активных и пассивных элементов в контуре, соответственно.

3.5.3.3. Комплексные сопротивление и проводимость

По закону Ома в комплексной форме:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX,$$

где \underline{Z} — комплексное сопротивление;

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ — модуль комплексного сопротивления или **полное сопротивление**⁶;

R и X — действительная (активная) и мнимая (реактивная) составляющие комплексного сопротивления соответственно;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$ — разность фаз.

Комплексная проводимость будет равна:

⁶Часто, особенно в электронике, вместо термина «полное сопротивление», используется «импеданс».

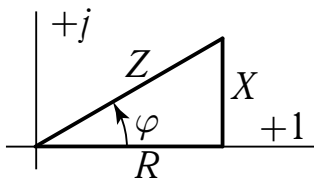


Рис. 3.8. Треугольник сопротивлений

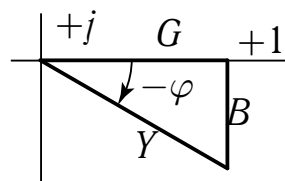


Рис. 3.9. Треугольник проводимостей

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{1}{Z}e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi} = Y \cos(-\varphi) + jY \sin(-\varphi) = G - jB,$$

где $\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U}$ — комплексная проводимость,

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ — модуль комплексной проводимости или **полная проводимость**,

G и B — действительная (активная) и мнимая (реактивная) составляющие комплексной проводимости соответственно.

Для наглядного представления соотношения активных и реактивных составляющих комплексных сопротивлений и проводимости используют «**треугольник сопротивлений**» (рис. 3.8) и «**треугольник проводимостей**» (рис. 3.9).

3.5.3.4. Комплексная мощность

Электрическая мощность, в комплексной форме, определяется следующим выражением (приняв $\psi_i = 0$):

$$\underline{S} = \underline{Z} \cdot \underline{I}^2 = Ze^{\varphi}(Ie^{\psi_i})^2 = Se^{\varphi}.$$

Принятое равенство нулю начальной фазы тока, не оказывает влияние на величину важнейшего параметра, характеризующего протекающие в цепи переменного тока процессы — разность фаз между напряжением и током φ .

Отсюда, выражение для комплексной мощности примет вид:

$$\underline{S} = Se^{j\varphi} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ue^{j\psi_u}Ie^{-j\psi_i}$$

и, окончательно:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*}$$

где $\underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}$ — сопряжённый (т. е. отличающийся знаком мнимой части) ток.

По формуле Эйлера ($\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}$) получим:

$$\underline{S} = Se^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ$$

В этом выражении:

\underline{S} — **комплексная мощность**

(единица измерения — вольт ампер, В·А);

S — **полная мощность**

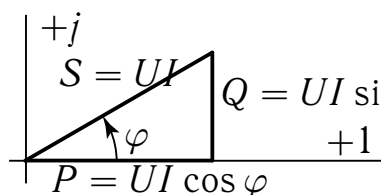
(единица измерения — вольт ампер, В·А);

P — **активная мощность**

(единица измерения — ватт, Вт);

Q — **реактивная мощность**

(единица измерения — вольт-ампер реактивный, вар).



На основании полученного выражения для комплексной мощности, мы можем построить **треугольник мощностей** (рис. 3.10).

Исходя из треугольника мощностей получим следующие соотношения:

Рис. 3.10. Треугольник мощностей

$$S = UI$$

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

3.5.3.5. Коэффициент мощности

Коэффициентом мощности называют отношение *активной* мощности к *полной*:

$$\frac{P}{S} = \frac{P}{UI} = \cos \varphi$$

Коэффициент мощности характеризует какую часть полной мощности составляет активная.

Как будет показано в разделе 3.6, только активная мощность совершает полезную работу, а реактивная производит обмен энергией между источником питания и реактивными элементами (которым соответствуют емкостной и индуктивный элементы схемы замещения), что создаёт дополнительную токовую нагрузку на источник электроэнергии и провода. Таким образом, для оптимизации работы энергосистемы, необходимо стремиться к увеличению активной составляющей электрической мощности.

Исходя из определения коэффициента мощности, это возможно при его увеличении вплоть до максимального значения, равного единице. С учётом того, что $\cos \varphi$ равен единице при $\varphi = 0$, а φ — это разность фаз между напряжением и током, мы видим, что максимуму коэффициента мощности соответствует активный характер электрической цепи.

Основными способами увеличения коэффициента мощности является использование явления электрического резонанса и специальных электрических машин — синхронных компенсаторов.

3.6. Резистивный, индуктивный и емкостной элементы в цепи переменного тока

3.6.1. Цепь переменного тока с резистивным элементом

Резистивный элемент

Резистивный элемент (резистор, активное сопротивление) является элементом электрической схемы замещения, учитывающим необратимое преобразование энергии источника питания в другие виды энергии (например в тепловую).

К потребителям, имеющим преимущественно активную нагрузку, относятся лампы накаливания, электронагревательные приборы и т. д.

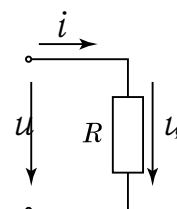


Рис. 3.11. Цепь с резистивным элементом

Ток и напряжение в цепи с резистивным элементом

Рассмотрим электрическая цепь, содержащую резистивный элемент с сопротивлением R , к которому приложено напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и через который протекает ток i (рис. 3.11).

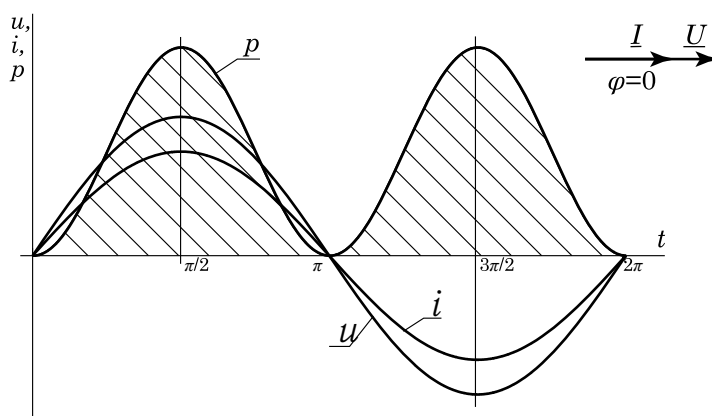


Рис. 3.12. Характер изменения тока, напряжения и мощности и векторная диаграмма тока и напряжения на резистивном элементе при $\psi_u = 0$)

Согласно закону Ома, ток в этой цепи будет равен:

$$i = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Из полученных выражений следует важный вывод, что ток и напряжение, на резистивном элементе *совпадают* по фазе, а разность фаз между напряжением и током равна нулю:

$$\psi_i = \psi_u$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

Графики изменения тока и напряжения на резистивном элементе (**временные диаграммы**) и векторная диаграмма приведены на рис. 3.12.

Сопротивление резистивного элемента

Полное сопротивление

С учётом того, что $I_m = U_m/R$, полное сопротивление резистивного элемента будет равно:

$$Z_R = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{U_m/R} = R.$$

В итоге мы получили величину:

$$Z_R = R$$

которая называется **активным сопротивлением**.

Величина, обратная активному сопротивлению носит название **активной проводимости**:

$$G = \frac{1}{R}$$

Единицами измерения активных сопротивления и проводимости являются *ом* и *сименс*, соответственно:

$$[R] = \text{Ом}, [G] = \text{См}.$$

Комплексное сопротивление

С учётом того, что начальная фаза напряжения на резистивном элементе, совпадает с начальной фазой тока, закон Ома в комплексной форме для резистивного элемента примет вид:

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j0} = R.$$

Мощность в цепи с резистивным элементом

С учётом того, что в цепи переменного тока с резистивным элементом $\varphi = 0$, выражение для мгновенного значения мощности (полученное в § 3.4) примет вид:

$$\begin{aligned} p &= UI [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI [\cos(0) - \cos(2\omega t + 0)]. \end{aligned}$$

Откуда, окончательно, получим:

$$p = UI [1 - \cos(2\omega t)]$$

Из полученного выражения видно, частота изменения мощности в два раза выше частоты изменения тока и напряжения. Кроме того, мощность принимает только положительные значения, т. е. происходит безвозвратное преобразование энергии источника питания в тепловую.

График изменения мощности на резистивном элементе приведён на рис. 3.12 (заштрихованная область).

Комплексная мощность на резистивном элементе будет равна:

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = UI \cos(0) + j UI \sin(0) = UI = P$$

Таким образом видно, что комплексная мощность на резистивном элементе будет активной.

3.6.2. Цепь переменного тока с индуктивным элементом

Индуктивный элемент

Индуктивность L представляет собой элемент схемы замещения, учитывающий свойство элементов электрической цепи, образовывать магнитное поле при протекании по ним тока.

Как правило, индуктивный элемент вводят в схему замещения в случае необходимости учета процессов, происходящих в электромагнитных устройствах (катушках индуктивности, трансформаторах и т. п.). Во всех остальных случаях магнитными процессами в цепи, обычно, можно пренебречь (за исключением высокочастотных цепей, где влияние ЭДС самоиндукции становится значительным).

Ток и напряжение в цепи с индуктивным элементом

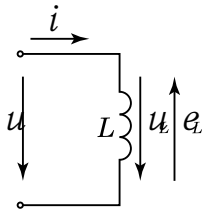


Рис. 3.13. Цепь с индуктивным элементом

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую индуктивный элемент с индуктивностью L , к которому приложено напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и через который протекает ток i (рис. 3.13).

С учётом того, что $u = u_L = -e_L = L di/dt$, ток в этой цепи будет равен:

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L} \int U_m \sin(\omega t + \psi_u) dt = \\ &= -\frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t + \psi_u) = \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \end{aligned}$$

Из полученных выражений следует важный вывод, что ток и напряжение, на индуктивном элементе различаются по фазе на угол $-\pi/2$ (в этом случае говорят, что *ток отстаёт по фазе от напряжения на угол $\pi/2$*), а разность фаз между напряжением и током равна $\pi/2$:

$$\psi_i = \psi_u - \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \left(\psi_u - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Временные и векторные диаграммы тока и напряжения на индуктивном элементе приведены на рис. 3.14.

Сопротивление индуктивного элемента

Полное сопротивление

С учётом того, что $I_m = U_m/\omega L$ получим:

$$Z_L = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{U_m/\omega L} = \omega L = 2\pi f L = X_L.$$

Таким образом:

$$Z_L = X_L = \omega L$$

где X_L — **индуктивное сопротивление**.

Величина, обратная индуктивному сопротивлению носит название **индуктивной проводимости**:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$$

Единицами измерения индуктивных сопротивления и проводимости являются *ом* и *сименс*, соответственно:

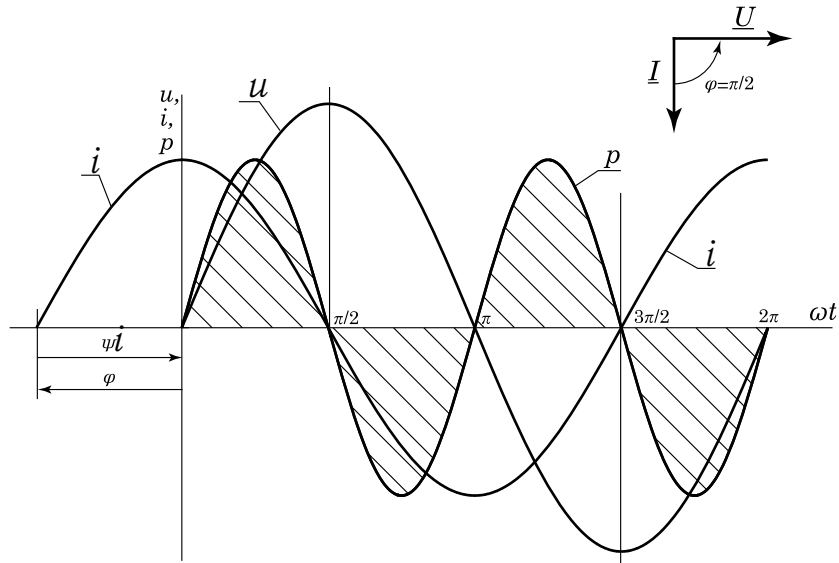


Рис. 3.14. Характер изменения тока, напряжения и мощности и векторная диаграмма тока и напряжения на индуктивном элементе при $\psi_u = 0$

$$[X_L] = \text{Ом}, [B_L] = \text{См}$$

Комплексное сопротивление

С учётом того, что ток отстаёт по фазе от напряжения на угол $\pi/2$ (т.е. $\psi_i = \psi_u - \pi/2$), закон Ома в комплексной форме для индуктивного элемента примет вид:

$$\underline{Z}_L = \frac{U}{I} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = X_L e^{j\pi/2}.$$

С учётом того, что поворот на 90° ($e^{j\pi/2}$) на комплексной плоскости, соответствует умножению на j , мы можем записать:

$$\underline{Z} = X_L e^{j\pi/2} = jX_L$$

Мощность в цепи с индуктивным элементом

С учётом того, что в цепи переменного тока с индуктивным элементов $\varphi = \pi/2$, выражение для мгновенного значения мощности (полученное в разделе 3.4) примет вид:

$$\begin{aligned} p &= UI [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Откуда, окончательно, получим:

$$p = -UI \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Из полученного выражения видно, частота изменения мощности в два раза выше частоты изменения тока и напряжения. Кроме того, мощность принимает не только положительные значения, но и отрицательные, причём площадь положительной части кривой мощности равна отрицательной, что говорит о том, что средняя мощность за период равна нулю, т.е. на индуктивном элементе *не происходит необратимого преобразования энергии*.

Этот важный факт объясняется тем, что индуктивный элемент сначала преобразует энергию источника питания в энергию магнитного поля (на положительном участке характеристики), а затем происходит обратное преобразование — энергия магнитного поля возвращается в источник.

График изменения мощности на индуктивном элементе приведён на рис. 3.14 (заштрихованная область).

Рассмотрим комплексную мощность на индуктивном элементе:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= Se^{j\varphi} = P + jQ = \\ &= S \cos \varphi + jS \sin \varphi = UI \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + jUI \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \\ &= jUI = jQ \end{aligned}$$

3.6.3. Цепь переменного тока с ёмкостным элементом

Ёмкостной элемент

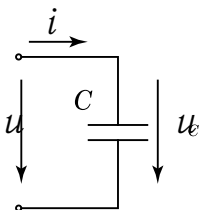


Рис. 3.15.

Цепь с
ёмкостным
элементом

Ёмкостной элемент C представляет собой элемент схемы замещения, учитывающий свойство элементов электрической цепи, образовывать электрическое поле при наличии между элементами цепи разности потенциалов.

Как правило, ёмкостной элемент вводят в схему замещения в случае необходимости учета процессов, происходящих в конденсаторах. Во всех остальных случаях процессами в цепи, связанными с электрическим полем, обычно, можно пренебречь (за исключением высокочастотных цепей, где влияние ёмкости становится значительным).

Ток и напряжение в цепи с ёмкостным элементом

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую ёмкостной элемент ёмкостью C , к которому приложено напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и ток i (рис. 3.15).

С учётом того, что $u = u_C$, $i = C du_C / dt$, ток в этой цепи будет равен:

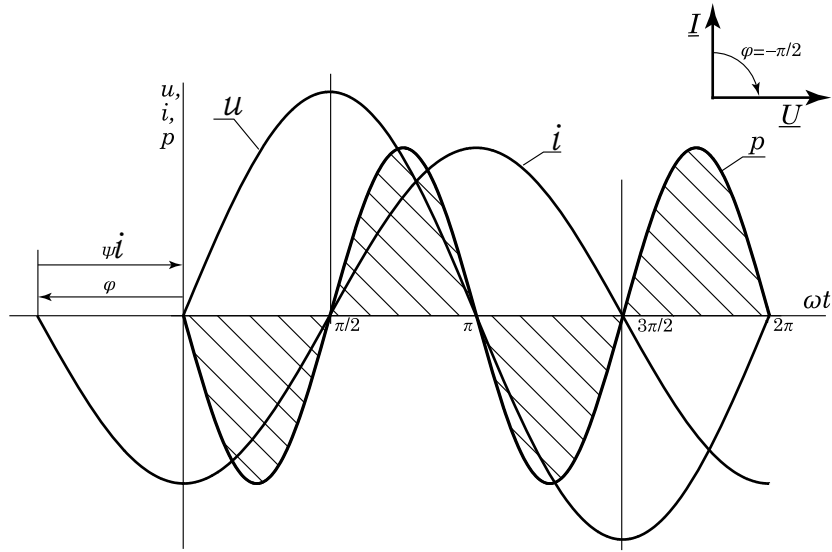


Рис. 3.16. Характер изменения тока, напряжения и мощности и векторная диаграмма тока и напряжения на емкостном элементе при $\psi_u = 0$

$$\begin{aligned}
 i &= C \frac{d}{dt} U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \omega C \cos(\omega t + \psi_u) = \\
 &= U_m \omega C \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)
 \end{aligned}$$

Из полученных выражений следует важный вывод, что ток и напряжение, на емкостном элементе различаются по фазе на угол $\pi/2$ (в этом случае говорят, что *ток опережает по фазе напряжения на угол $\pi/2$*), а разность фаз между напряжением и током равна $-\pi/2$:

$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Временные и векторные диаграммы тока и напряжения на емкостном элементе приведены на рис. 3.16.

Сопротивление емкостного элемента

Полное сопротивление

С учётом того, что $I_m = U_m \omega C$ получим:

$$Z_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{U_m \omega C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = X_C.$$

Таким образом:

$$Z_C = X_C = \frac{1}{\omega C}$$

где X_C — **емкостное сопротивление**.

Величина, обратная емкостному сопротивлению носит название **емкостной проводимости**:

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{1/\omega C} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}$$

Единицами измерения емкостных сопротивления и проводимости являются *ом* и *сименс*, соответственно:

$$[X_C] = \text{Ом}, [B_C] = \text{См}$$

Комплексное сопротивление

С учётом того, что ток опережает по фазе напряжения на угол $\pi/2$ (т.е. $\psi_i = \psi_u - \pi/2$), закон Ома в комплексной форме для емкостного элемента примет вид:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = X_C e^{-j\pi/2}$$

где \underline{Z}_C — комплексное сопротивление емкостного элемента.

С учётом того, что поворот на -90° ($e^{-j\pi/2}$) на комплексной плоскости, соответствует умножению на $-j$, мы можем записать:

$$\underline{Z}_C = X_C e^{-j\pi/2} = -jX_C$$

Мощность в цепи с емкостным элементом

С учётом того, что в цепи переменного тока с емкостным элементом $\varphi = -\pi/2$, выражение для мгновенного значения мощности (получено в § 3.4) примет вид:

$$\begin{aligned} p &= UI [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Откуда, окончательно, получим:

$$p = -UI \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Из полученного выражения видно, частота изменения мощности в два раза выше частоты изменения тока и напряжения. Кроме того, мощность

принимает не только положительные значения, но и отрицательные, причём площадь положительной части кривой мощности равна отрицательной, что говорит о том, что средняя мощность за период равна нулю, т.е. на ёмкостном элементе *не происходит необратимого преобразования энергии*.

Этот важный факт объясняется тем, что ёмкостной элемент сначала преобразует энергию источника питания в энергию электрического поля (на положительном участке характеристики), а затем происходит обратное преобразование — энергия электрического поля возвращается в источник.

Комплексная мощность на ёмкостном элементе будет равна:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= Se^{j\varphi} = P + jQ = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = \\ &= UI \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + jUI \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -jUI = -jQ\end{aligned}$$

График изменения мощности на ёмкостном элементе приведён на рисунке 3.16 (заштрихованная область).

3.6.4. Сводная таблица основных параметров, характеризующих элементы R , L и C

Основные величины, полученные при рассмотрении активного, индуктивного и ёмкостного элементов приведены в таблице 3.1

Таблица 3.1. Основные величины, характеризующие элементы R , L и C

	R	L	C
$\psi_i =$	ψ_u	$\psi_u - \pi/2$	$\psi_u + \pi/2$
$\psi_u =$	ψ_i	$\psi_i + \pi/2$	$\psi_i - \pi/2$
$\varphi =$	0	$\pi/2$	$-\pi/2$
$Z =$	R	$X_L = \omega L$	$X_C = 1/\omega C$
$\underline{Z} =$	R	$X_L e^{j\pi/2} = jX_L$	$X_C e^{-j\pi/2} = -jX_C$

3.7. Последовательное и параллельное соединение элементов R , L и C

3.7.1. Последовательное соединение элементов R , L и C

Уравнения электрического состояния

Для цепи, изображённой на рис. 3.17 составим выражение по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
\underline{U} &= \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{C1} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{C2} + \dots + \underline{U}_{Rn} + \underline{U}_{Ln} + \underline{U}_{Cn} = \\
&= \sum_{k=1}^n \underline{U}_{Rk} + \sum_{k=1}^n \underline{U}_{Lk} + \sum_{k=1}^n \underline{U}_{Ck} = \\
&= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C
\end{aligned}$$

где $\underline{U}_R = \sum_{k=1}^n \underline{U}_{Rk}$, $\underline{U}_L = \sum_{k=1}^n \underline{U}_{Lk}$ и $\underline{U}_C = \sum_{k=1}^n \underline{U}_{Ck}$.

С учётом того, что $\underline{U}_R = U_R e^{j\psi_i}$, $\underline{U}_L = U_L e^{j\psi_i + \pi/2}$ и $\underline{U}_C = U_C e^{j\psi_i - \pi/2}$, а также приняв для упрощения расчётов начальную фазу тока равной нулю ($\psi_i = 0$) получим:

$$\begin{aligned}
\underline{U} &= U_R e^{j0} + U_L e^{j(0+\pi/2)} + U_C e^{j(0-\pi/2)} = \\
&= U_R + jU_L + (-j)U_C = \\
&= U_R + j(U_L - U_C) = \\
&= U_a + jU_p
\end{aligned}$$

где $U_a = U_R$ — активная, а $U_p = U_L - U_C$ — реактивная составляющие напряжение.

Отсюда величина **полного напряжения** будет равно модулю комплексного напряжения:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2},$$

а аргумент, с учётом того, что на резистивном элементе начальные фазы тока и напряжения совпадают, будет равен разности фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R},$$

Приняв, для упрощения расчётов, начальную фазу тока равной нулю ($\psi_i = 0$), согласно закона Ома, получим:

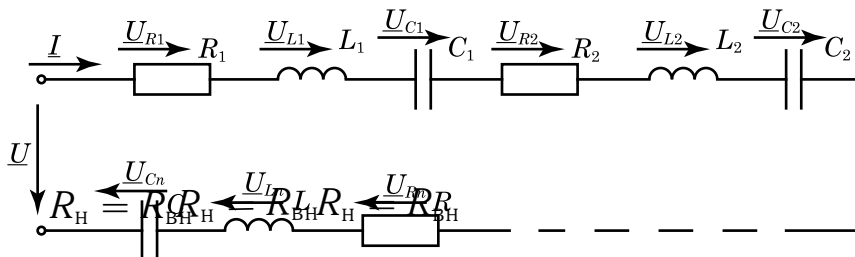


Рис. 3.17. Последовательное соединение элементов R , L и C

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j0}} = \frac{U_R + jU_L - jU_C}{I} = \frac{U_R}{I} + j\frac{U_L}{I} - j\frac{U_C}{I} = \\ &= R + j(X_L - X_C) = R + jX = \underline{Z}\end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод, что действительная часть комплексного сопротивления последовательной цепи состоит из суммы сопротивлений всех резистивных элементов, а мнимая — из разности сопротивлений всех индуктивных и емкостных элементов:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

$$X = X_L - X_C$$

где \underline{Z} — комплексное сопротивление цепи;

R , X , X_L , X_C — активное, реактивное, индуктивное и емкостное сопротивления соответственно.

Модуль комплексного сопротивления называется **полным сопротивлением** или **импедансом**:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Если мы рассмотрим закон Ома в показательной форме, то увидим, что аргумент комплексного сопротивления будет равен разности фаз между напряжением и током:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ze^{j\varphi}$$

Аргумент комплексного сопротивления будет равен:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R},$$

В зависимости от величины угла φ различают пять видов нагрузки (также часто употребляется термин «**характер цепи**»):

$\varphi = 90^\circ$	индуктивная
$0^\circ < \varphi < 90^\circ$	активно-индуктивная
$\varphi = 0^\circ$	активная
$-90^\circ > \varphi > 0^\circ$	активно-емкостная
$\varphi = -90^\circ$	емкостная

В случае активного характера цепи (при $\angle\varphi = 0$) наступает особый режим, имеющий большое значение в электротехнике, который называется **резонансом** (подробно он будет рассмотрен позднее).

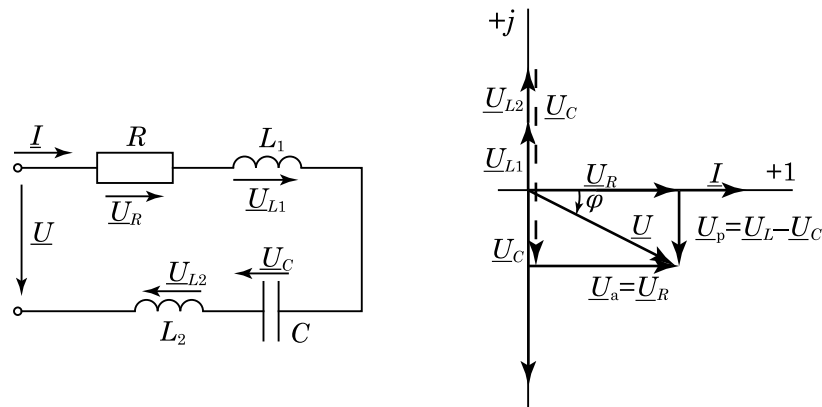
Векторная диаграмма для последовательного соединения

Рис. 3.18. Цепь с последовательным соединением элементов R, L, C и её векторная диаграмма (для случая $(X_{L1} + X_{L2}) < X_C$ и $\psi_i = 0$)

Векторная диаграмма — совокупность отложенных на комплексной плоскости векторов, символизирующих действующие в цепи (или её участке) синусоидальные токи и напряжения. В основном используется для наглядного отображения фазовых и амплитудных соотношений между синусоидальными действующими в цепи токами и напряжениями, а также проведения с ними математических операций средствами векторной алгебры. В электротехнике принято не различать с помощью специальных обозначений вектора тока и напряжения от обозначений их в виде комплексных чисел.

Для построения векторной диаграммы тока и напряжений цепи с последовательным соединением элементов R, L и C необходимо отобразить все комплексные напряжения на комплексной плоскости. При сложении всех векторов напряжения мы получим общее напряжение, приложенное к данной цепи. Угол между векторами общего напряжением цепи и тока протекающего в ней, будет является углом разности фаз (напомним, что в цепи с последовательным соединением протекает один ток). Пример последовательной цепи и соответствующей ей векторной диаграммы приведён на рис. 3.18.

3.7.2. Параллельное соединение элементов R, L и C **Уравнения электрического состояния**

В соответствии с первым законом Кирхгофа ток \underline{I} , протекающий в цепи (рис. 3.19), равен сумме токов в каждой ветви данной цепи:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n.$$

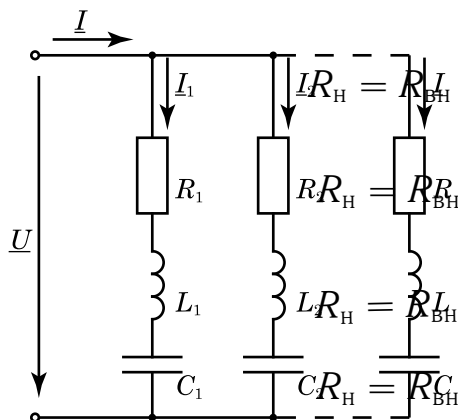


Рис. 3.19. Параллельное соединение элементов R , L и C

Выразив токи по закону Ома получим:

$$\frac{U}{\underline{Z}} = \frac{U}{\underline{Z}_1} + \frac{U}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{U}{\underline{Z}_n}.$$

Сократим правую и левую части уравнения на \underline{U} :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}.$$

Величина, обратная комплексному сопротивлению называется **комплексной проводимостью** и обозначается как " \underline{Y} ". В итоге мы получим, что полная проводимость цепи с параллельным соединением ветвей, содержащих элементы R , L и C равна сумме проводимостей всех ветвей:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n.$$

Проводимость

Согласно определению, *комплексная проводимость* это величина, обратная *комплексному сопротивлению*:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX},$$

где $X = X_L - X_C$ — реактивное сопротивление.

После преобразований получим:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} * \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}.$$

С учётом того, что $\sqrt{R^2 + X^2} = Z$ — полное сопротивление, а $X = X_L - X_C$, получим:

$$\underline{Y} = \frac{R - jX}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j\left(\frac{X_L}{Z^2} - \frac{X_C}{Z^2}\right) = G - j(B_L - B_C).$$

где $G = R/Z^2$ — активная проводимость ветви;

$B = X/Z^2$ — реактивная проводимость ветви;

$B_L = X_L/Z^2$ — индуктивная проводимость ветви;

$B_C = X_C/Z^2$ — емкостная проводимость ветви.

С учётом введённых обозначений получим:

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= G - jB = G - j(B_L - B_C) = \\ &= G - jB_L + jB_C\end{aligned}$$

Модуль комплексной проводимости называется **полной проводимостью цепи**:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

Аргумент комплексной проводимости равен разности фаз между напряжением и током φ и определяется по известным тригонометрическим формулам для прямоугольного треугольника, например:

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G}$$

Исходя из полученных выражений сопротивление и проводимость будут равны:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}$$

Векторная диаграмма для параллельного соединения

Для построения векторной диаграммы токов и напряжения цепи с параллельным соединением элементов R , L и C необходимо отобразить все действующие цепи комплексные токи и приложенное к ней напряжение, на комплексной плоскости. При сложении всех векторов токов мы получим общий ток, протекающий в данной цепи. Угол между векторами общего тока цепи и приложенного к ней напряжения, будет является углом разности

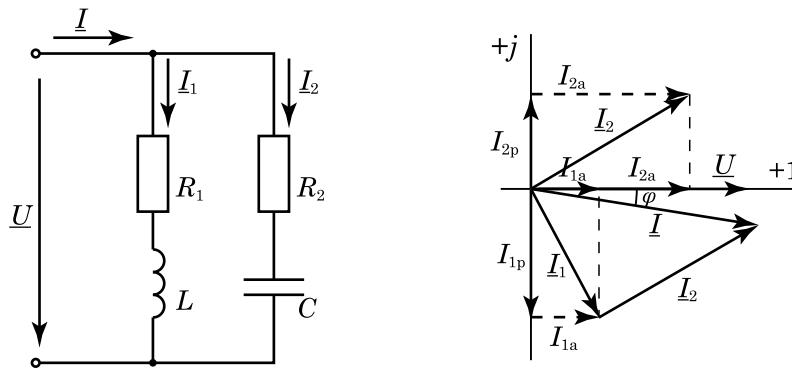


Рис. 3.20. Цепь с параллельным соединением элементов R , L , C и её векторная диаграмма для случая $\psi_u = 0$, $X_C < X_L$
 I_{1a} , I_{2a} , I_{1p} , I_{2p} — активные и реактивные составляющие токов в первой и второй ветви соответственно

фаз (напомним, что в цепи с параллельным соединением общее напряжение для всех соединённых параллельно ветвей). Пример параллельной цепи и соответствующей ей векторной диаграммы приведён на рисунке 3.20.

3.8. Расчёт цепи с элементами R , L и C

Расчёт цепей переменного тока выполняется аналогично расчёту цепей постоянного тока. Основным отличием является то, что все расчёты ведутся в комплексной форме. Рассмотрим пример расчёта цепи со смешанным соединением элементов R , L и C .

Пример расчёта

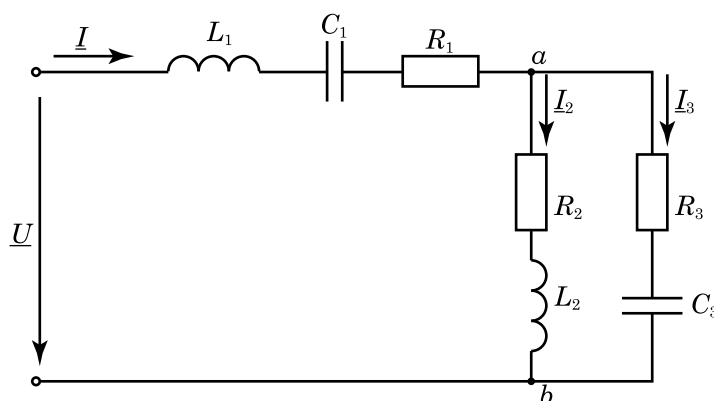


Рис. 3.21. Цепь со смешанным соединением ветвей, содержащих элементы R , L и C

Дано: электрическая цепь (рис. 3.21), параметры элементов, частота тока и напряжение в которой известны:

$$f, R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C_1, C_3, \underline{U}.$$

Найти: токи в ветвях.

Решение:

Для расчёта представленной на рис. 3.21 цепи воспользуемся методом эквивалентного преобразования.

Первым шагом найдём круговую частоту ω :

$$\omega = 2\pi f$$

Вторым шагом найдём по формулам $X_L = \omega L$ и $X_C = 1/\omega C$ сопротивления реактивных элементов:

$$\begin{aligned} X_{L1} &= \omega L_1 & X_{C1} &= \frac{1}{\omega C_1} \\ X_{L2} &= \omega L_2 & X_{C3} &= \frac{1}{\omega C_3} \end{aligned}$$

Третьим шагом найдём комплексные сопротивления ветвей:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = R_1 + jX_1 = Z_1 e^{j\varphi_1} \\ \underline{Z}_2 &= R_2 + jX_{L2} = Z_2 e^{j\varphi_2} \\ \underline{Z}_3 &= R_3 - jX_{C3} = Z_3 e^{j\varphi_3} \end{aligned}$$

где Z_1 , Z_2 и Z_3 — полные сопротивления, а φ_1 , φ_2 и φ_3 аргументы комплексного сопротивления ветвей, равные разности фаз между напряжением и током в соответствующих ветвях (рис. 3.22).

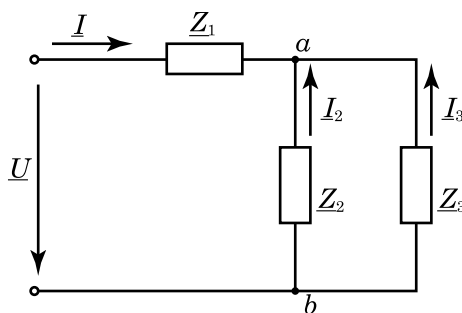


Рис. 3.22. Полные сопротивления ветвей

Четвёртым шагом рассчитаем эквивалентное сопротивление цепи:

Ветви 2 и 3 соединены параллельно (рис. 3.23):

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{Z_2 e^{j\varphi_2} Z_3 e^{j\varphi_3}}{(R_2 + jX_{L2}) + (R_3 - jX_{C3})} = \\
&= \frac{Z_2 Z_3 e^{j(\varphi_2 + \varphi_3)}}{R_2 + R_3 + jX_{L2} - jX_{C3}} = \frac{Z_{23*} e^{j\varphi_{23*}}}{R_{23+} + jX_{23+}} = \frac{Z_{23*} e^{j\varphi_{23*}}}{Z_{23+} e^{j\varphi_{23+}}} = \\
&= \frac{Z_{23*}}{Z_{23+}} e^{j(\varphi_{23*} - \varphi_{23+})} = Z_{23} e^{j\varphi_{23}} = R_{23} + jX_{23}
\end{aligned}$$

здесь Z_{23*} , Z_{23+} , φ_{23*} , φ_{23+} — значения полного сопротивления и аргумента комплексного сопротивления после операций умножения и сложения соответственно.

Ветвь 1 и ветвь с эквивалентным сопротивлением \underline{Z}_{23} соединены последовательно (рис. 3.24):

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\Sigma} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = (R_1 + jX_1) + (R_{23} + jX_{23}) = \\
&= (R_1 + R_{23}) + j(X_1 + X_{23}) = \\
&= R_{\Sigma} + jX_{\Sigma} = Z_{\Sigma} e^{j\varphi_{\Sigma}}
\end{aligned}$$

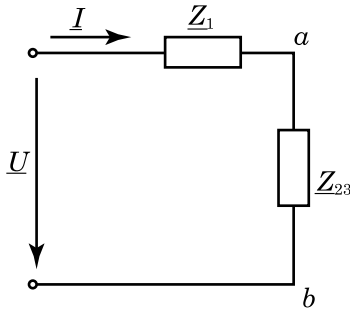


Рис. 3.23. Эквивалентное сопротивление \underline{Z}_{23}

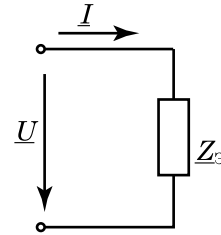


Рис. 3.24. Эквивалентное сопротивление цепи

Пятым шагом найдём ток в цепи:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\Sigma}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{Z_{\Sigma} e^{j\varphi_{\Sigma}}} = \frac{U}{Z_{\Sigma}} e^{j(\psi_u - \varphi_{\Sigma})} = I e^{j\psi_i}$$

Шестым, заключительным, шагом найдём токи во второй и третьей ветвях цепи: определим напряжение между \underline{U}_{ab} точками a и b :

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I} \underline{Z}_{23} = I e^{j\psi_i} Z_{23} e^{j\varphi_{23}} = I Z e^{j(\psi_i + \varphi_{23})} = U_{ab} e^{j\psi_{u_{ab}}}$$

найдем ток во второй ветви:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{U_{ab} e^{j\psi_{u_{ab}}}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{U_{ab}}{Z_2} e^{j(\psi_{u_{ab}} - \varphi_2)} = I_2 e^{j\psi_{i_2}}$$

найдем ток в третьей ветви:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{U_{ab}e^{j\psi_{u_{ab}}}}{Z_3e^{j\varphi_3}} = \frac{U_{ab}}{Z_3}e^{j(\psi_{u_{ab}}-\varphi_3)} = I_3e^{j\psi_{i_3}}$$

При рассмотрении этого примера видно, что структура расчёта полностью аналогична расчёту в цепях постоянного тока, однако математически он более сложен. Это сложность связана, в первую очередь, с необходимостью преобразования комплексных чисел между алгебраической и показательной формами, первая из которых используется в операциях сложения и вычитания, а вторая в операциях умножения и деления.

3.9. Резонанс

Резонанс — явление в электрической (магнитной) цепи, содержащей участки индуктивного и емкостного характера, при котором разность фаз электрического (магнитного) напряжения и тока на входе цепи равна нулю.

В электрических цепях переменного тока различают **резонанс напряжений** (возможен в цепях с последовательным соединением элементов R , L и C) и **резонанс токов** (возможен в цепях с параллельным соединением элементов R , L и C)

3.9.1. Резонанс напряжений

Условие резонанса напряжений

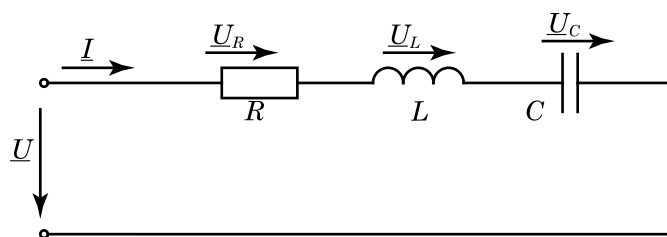


Рис. 3.25. Цепь с последовательным соединением элементов R , L и C

Для цепи с последовательным соединением активного (R), индуктивного (L) и емкостного (C) элементов (рис. 3.25) составим выражения по закону Ома:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\psi_u-\psi_i)} = Ze^{\varphi}$$

Согласно определению, при резонансе $\varphi = 0$, в этом случае реактивная составляющая комплексного сопротивления \underline{Z} будет равна нулю ($X = 0$, см. треугольник сопротивлений на рис. ?? на стр. ??).

Отсюда следует, что резонанс напряжений возможен при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений:

$$X = X_L - X_C = 0$$

или окончательно:

$$X_L = X_C$$

Получение резонанса напряжений

Как было показано выше, для получения резонанса напряжений необходимо равенство индуктивного и емкостного сопротивлений:

$$X_L = X_C$$

или

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота.

Из этого равенства видно, что резонанс зависит от частоты f , индуктивности L и ёмкости C .

При заданной индуктивности и ёмкости резонанс наступит на частоте ω_0 :

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

где ω_0 — частота резонанса напряжений.

Сопротивление индуктивного и ёмкостного элементов на резонансной частоте называется **характеристическим**:

$$X_L = X_C = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho$$

откуда ρ будет равно:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Отношение характеристического сопротивления последовательной цепи к активному, называется **добротностью**:

$$Q = \frac{\rho}{R}$$

Характерные особенности резонанса напряжений

1. Активный характер цепи. Минимум полного сопротивления

С учётом того, что $X = 0$ полное сопротивление будет равно:

$$Z_{\text{рез}} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2} = Z_{\text{min}}$$

Отсюда видно, что полное сопротивление будет минимальным, а комплексное равно активному.

2. Максимальное значение силы тока

При минимальном сопротивлении цепи, протекающий в ней ток будет максимальным:

$$I_{\text{рез}} = \frac{U}{Z} = \frac{U}{Z_{\text{min}}} = I_{\text{max}}$$

Важно: Максимум тока является характерным признаком резонанса напряжений при экспериментальном исследовании.

3. Усиление напряжения

Как было показано выше, при резонансе реактивные составляющие напряжения равны, а их сумма равна нулю.

Отсюда следует то, что напряжения на реактивных элементах ($\underline{U}_L = X_L \underline{I}$ и $\underline{U}_C = X_C \underline{I}$) могут значительно отличаться от напряжения на резистивном элементе, равного общему напряжению цепи:

$$X_L = X_C \gg R = Z \Rightarrow U_L = U_C \gg U_R = U$$

Важно: При резонансе напряжений, напряжения на реактивных элементах могут значительно превышать полное напряжение в цепи.

Коэффициент усиления будет равен добротности контура:

$$\frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U} = \frac{X_L I_{\text{рез}}}{R I_{\text{рез}}} = \frac{X_L}{R} = \frac{\rho}{R} = Q.$$

4. Максимум активной мощности и отсутствие реактивной

Величина активной мощности при резонансе ($\varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1$) будет максимальной для данной цепи:

$$P = UI \cos \varphi = UI_{\text{рез}} \cos 0 = UI_{\text{max}} = P_{\text{max}}$$

Величина реактивной мощности при резонансе ($\varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0$) будет равна нулю:

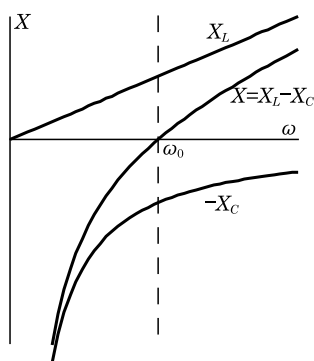


Рис. 3.26. Зависимость реактивного сопротивления от частоты

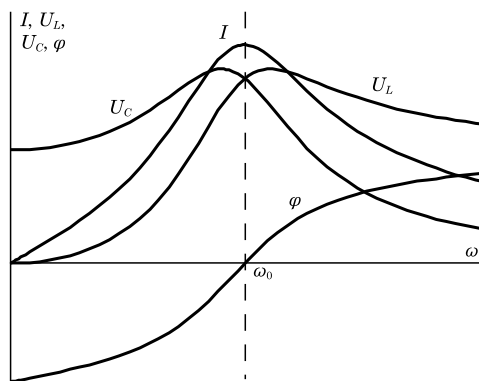


Рис. 3.27. Зависимость тока в цепи, напряжений на индуктивном и емкостном элементах и разности фаз между напряжением и током от частоты

$$Q = UI \sin \varphi = UI_{\text{рез}} \sin 0 = 0$$

Из этого выражения следует, что величины индуктивной и емкостной мощности равны по величине и противоположны по знаку, следовательно между индуктивным и емкостным элементами происходит обмен энергии, в котором источник питания не участвует.

Частотные характеристики

Частотные характеристики показывают зависимость параметров электрической цепи от частоты.

На рисунке 3.26 показан график зависимости реактивного сопротивления от частоты. Точка, в которой реактивное сопротивление равно нулю ($X = X_L - X_C = 0$) соответствует режиму резонанса, частота, на которой это происходит (ω_0) является частотой резонанса напряжений в данной цепи.

Анализируя зависимости $I(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, мы видим, что точкам $\varphi(\omega) = 0$ и $I(\omega) = I_{\text{max}}$ соответствует одна и та же частота ω_0 , которая будет частотой резонанса напряжений в данной цепи.

Важным моментом является то, что максимумы напряжений на ёмкости (U_C) и на индуктивности (U_L) не совпадают с ω_0 , причём U_C достигает максимума на частоте меньшей резонансной, а максимум U_L наступает на частоте большей резонансной. Разность между частотой максимума напряжения на индуктивности и резонансной частотой определяется добротностью катушки — чем выше добротность, тем ближе частота максимума напряжения к резонансной.

3.9.2. Резонанс токов

Условие резонанса токов

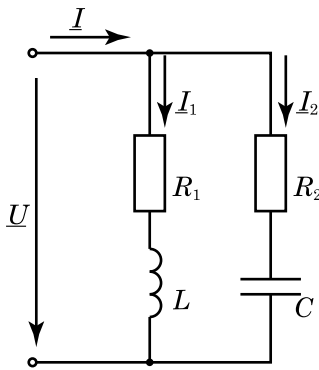


Рис. 3.28. Цепь с параллельным соединением элементов R , L и C

Для изучения резонанса токов рассмотрим электрическую цепь, состоящую из двух включённых параллельно ветвей, одна из которых имеет активно-индуктивный характер, а другая активно-емкостной⁷ (рис. 3.28). Составим для этой цепи выражение по закону Ома:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \underline{Y} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = \\ &= \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)} = Y e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = Y e^{-j\varphi}, \end{aligned}$$

Согласно определению, при резонансе $\varphi = 0$, в этом случае реактивная составляющая комплексной проводимости \underline{Y} будет равна нулю ($B = 0$, см. треугольник проводимостей на рис. ?? на стр. ??).

Отсюда следует, что резонанс токов возможен при равенстве индуктивной и емкостной проводимостей:

$$B = B_1 - B_2 = 0$$

или окончательно:

$$B_1 = B_2$$

где B_1 и B_2 реактивные проводимости ветвей с активно-индуктивной ($R_1 L$) и активно-емкостной ($R_2 C$) нагрузкой соответственно (рис. 3.28).

Получение резонанса токов

Как было показано выше, для получения резонанса токов необходимо равенство индуктивной и емкостной проводимостей:

$$B_1 = B_2$$

с учётом выражений для индуктивной и емкостной проводимостей цепи (стр. 86), получим:

$$\frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{X_C}{Z_2^2}$$

или

⁷Эту цепь, в общем случае, можно рассматривать как эквивалентную цепи, содержащей несколько ветвей с реактивными элементами — первая ветвь является эквивалентной для ветвей с активно-индуктивным характером сопротивлением, а вторая — для ветвей с активно-емкостным сопротивлением.

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}$$

Из этого равенства видно, что резонанс токов, в отличие от резонанса напряжений, зависит не только от частоты $\omega = 2\pi f$, индуктивности L и ёмкости C (как при резонансе напряжений), но и от *активного* сопротивления ветвей.

Рассмотрение режима резонанса мы будем проводить для случая заданных индуктивности, ёмкости и активных сопротивлений, при изменяющейся частоте.

Частота ω'_0 , при которой наступает резонанс токов будет равна:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} \Rightarrow \omega = \omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}}$$

С учётом ранее полученных выражений для частоты резонанса напряжений $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и характеристического сопротивления $\rho = \sqrt{L/C}$, получим:

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}$$

где ω'_0 — частота резонанса тока.

Из полученного выражения следует ряд условий, определяющих особенности получения резонанса токов.

Особенности получения резонанса токов

1. Влияние активных составляющих сопротивления ветвей

Важной особенностью резонанса токов, сильно отличающей его от резонанса напряжений, является влияние активного сопротивления, что видно из полученных выше выражения для определения частоты резонанса токов.

2. Невозможность резонанса при мнимой частоте ω'_0

При $R_1 < \rho < R_2$ или $R_2 < \rho < R_1$ величина $\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2} < 0$, следовательно частота резонанса токов будет иметь мнимый характер, что приведёт к невозможности получения резонанса токов.

3. Возможность резонанса на любой частоте при равенстве активных и характеристического сопротивлений

При $R_1 = R_2 = \rho$ частота резонанса токов приобретает неопределённое значение: $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{0}{0}}$, что соответствует существованию резонанса на любой частоте.

4. Совпадение частот резонанса тока и напряжения при отсутствии активного сопротивления

При R_1 и $R_2 \ll \rho$, что справедливо для многих цепей, мы можем не учитывать активные составляющие сопротивления ветвей в расчёте, в этом случае $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\rho/\rho} = \omega_0$, т.е. частота резонанса токов будет равна частоте резонанса напряжений.

Характерные особенности резонанса токов

1. Активный характер цепи. Максимум полного сопротивления

С учётом того, что $B = 0$ полная проводимость будет равна:

$$Y_{\text{рез}} = \sqrt{G^2 + B^2} = G = Y_{\text{min}} = Z_{\text{max}}$$

Отсюда видно, что полная проводимость будет минимальной, а комплексная равна активной.

2. Минимальное значение силы тока

Т.к. проводимость цепи при резонансе минимальна, то согласно закона Ома:

$$I_{\text{рез}} = UY_{\text{рез}} = UY_{\text{min}} = I_{\text{min}}$$

Важно: минимум тока является характерным признаком резонанса токов при экспериментальном исследовании.

3. Усиление токов

Как было показано выше, $B_1 = B_2$, следовательно, с учётом того, что напряжения в соединённых параллельно параллельно ветвях одинаковое, получим:

$$I_{1p} = UB_1 = UB_2 = I_{2p},$$

т.е. мы видим, что при резонансе реактивные составляющие токов в ветвях равны.

Отсюда следует важный вывод, что ток в ветвях с реактивными элементами может значительно превышать ток во всей цепи:

$$B_L = B_C \gg G = Y \Rightarrow I_L = I_C \gg I_G = I$$

где I_L и I_C токи в ветвях с индуктивным и емкостным элементами в ветвях соответственно (рис. 3.28).

Важно: При резонансе токов, токи в ветвях с реактивными элементами могут значительно превышать общий ток в цепи.

Коэффициент усиления (с учётом того, что R_1 и $R_2 \ll X_L = X_C$) будет равен добротности контура:

$$\begin{aligned} \frac{I_L}{I} &= \frac{B_L U_{\text{рез}}}{G U_{\text{рез}}} = \frac{X_L / (R_1^2 + X_L^2)}{R_1^2 / (R_1^2 + X_L^2) + R_2 / (R_2^2 + X_L^2)} \Big|_{R_1, R_2 \ll X_L = X_C} \approx \\ &\approx \frac{X_L / X_L^2}{R_1 / X_L^2 + R_2 / X_L^2} = \frac{X_L}{R_1 + R_2} = \frac{\rho}{R} = Q. \end{aligned}$$

4. Минимум активной мощности и отсутствие реактивной

Величина активной мощности при резонансе ($\varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1$) будет минимальной для данной цепи:

$$P = UI \cos \varphi = UI_{\text{рез}} \cos 0 = UI_{\text{мин}} = P_{\text{мин}}$$

Величина реактивной мощности при резонансе ($\varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0$) будет равна нулю:

$$Q = UI \sin \varphi = UI_{\text{рез}} \sin 0 = 0$$

Из этого выражения видно, что величины индуктивной и емкостной мощности равны по величине и противоположны по знаку, следовательно между ними происходит обмен энергии, в котором источник питания не участвует.

Частотные характеристики

Частотные характеристики резонанса тока построим для *идеального* контура, ветви которого не имеют активных составляющих сопротивления (рис. 3.29).

На рисунке 3.30 показана зависимость реактивного сопротивления от частоты. Точка, в которой индуктивная проводимость равна емкостной ($B = B_L - B_C = 0$) соответствует режиму резонанса, частота, на которой это происходит (ω_0) является частотой резонанса токов в данной цепи.

На графике $I(\omega)$, мы видим, что точка $I(\omega) = I_{\text{мин}}$ соответствует частота ω_0 , которая, будет частотой резонанса токов в данной цепи. Ток принимает только положительные значения, т.к. мы рассматриваем его действующее значение.

В реальной цепи минимальное значение тока, соответствующее резонансу тока, определяется активным сопротивлением ветвей.

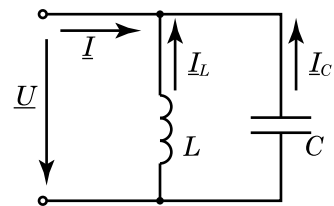


Рис. 3.29. Цепь с параллельным соединением L и C

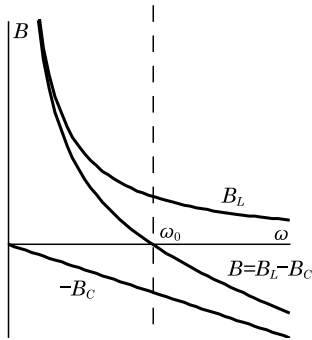


Рис. 3.30. Зависимость реактивной проводимости от частоты

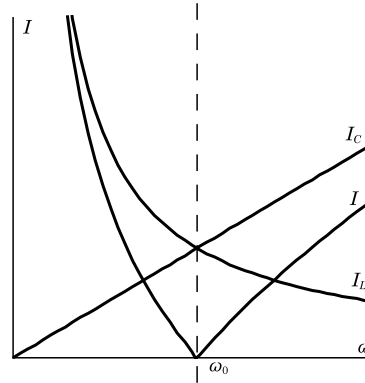


Рис. 3.31. Зависимость тока в ветвях с индуктивным и емкостным элементами и током в цепи от частоты

3.9.3. Мощность в RL и RC цепях

Согласно определению мгновенная мощность электрической цепи равна произведению мгновенных значений напряжения и тока ($p = ui = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i)$).

Примем начальную фазу тока равной нулю ($\psi_u = 0$) и рассчитаем мгновенную активную и реактивную составляющие мощности, для чего представим мгновенное значение напряжения в виде суммы активной и реактивной составляющих:

$$u = u_a + u_p,$$

где u_a и u_p — активная реактивная составляющие напряжения.

Отсюда мгновенная мощность примет вид:

$$p = ui = u_a i + u_p i = p_a + p_p,$$

где p_a и p_p — активная и реактивная составляющие мощности.

При расчёте активной составляющей мощности необходимо учесть, что разность фаз между напряжением и током равна нулю, следовательно $\psi_u = \psi_i = 0$, таким образом, используя для преобразований тригонометрическую формулу $\sin \alpha \cdot \sin \beta = 1/2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$:

$$p_a = u_a i = U_{am} \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_{am} I_m}{2} [\cos 0 - \cos 2\omega t] = U_a I [1 - \cos 2\omega t]$$

На основании треугольника напряжений $U_a = U \cos \varphi$, следовательно

$$p_a = U \cos \varphi I [1 - \cos 2\omega t] = UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos 2\omega t.$$

При расчёте активной составляющей мощности необходимо учесть, что разность фаз между напряжением и током равна $+90^\circ$ для индуктивной и -90° для емкостной нагрузки, следовательно $\psi_u = \psi_i = \pm 90^\circ$, таким образом, используя для преобразований тригонометрическую формулу $\sin \alpha \cdot \sin \beta = 1/2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$:

$$\begin{aligned} p_p &= u_p i = U_{am} \sin(\omega t \pm 90^\circ) \cdot I_m \sin \omega t = \\ &= \frac{U_{pm} I_m}{2} [\cos(\pm 90^\circ) - \cos(2\omega t \pm 90^\circ)] = \\ &= U_p I [\cos(\pm 90^\circ) - \cos(2\omega t \pm 90^\circ)] \end{aligned}$$

На основании треугольника напряжений $U_p = U \sin \varphi$, учитывая также, что $\cos(\pm 90^\circ) = 0$, а $\cos(2\omega t \pm 90^\circ) = \sin(2\omega t)$, получим:

$$p_p = U \sin \varphi I [\cos(\pm 90^\circ) - \cos(2\omega t \pm 90^\circ)] = \pm U \sin \varphi I \sin(2\omega t),$$

знак плюс соответствует индуктивной, а минус емкостной нагрузке.

Рассмотрим наиболее распространённый случай активно — индуктивной нагрузки (в наиболее распространённых цепях реактивная составляющая обусловлена наличием трансформаторов и двигателей, чьи обмотки создают активно — индуктивную нагрузку). В этом случае разность фаз между напряжением и током будет принимать значения от 0 до $\pi/2$.

Лекция 4

Трёхфазные электрические цепи

4.1. Общие сведения

В технике широко применяются электрические цепи в которых действует несколько ЭДС, с одинаковыми частотами и амплитудами, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии, эти цепи получили название *многофазных*.

Многофазная система электрических цепей это совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе, создаваемые общим источником электрической энергии.

Каждую из электрических цепей многофазной системы в отдельности принято называть **фазой** (многофазной системы электрических цепей).

Основное практическое применение нашли **симметричные многофазные системы**, в которых электрические токи равны по амплитуде и сдвинуты друг относительно друга по фазе на одинаковые углы (угол сдвига фаз равен $360^\circ/m = 2\pi/m$, где m — число фаз).

Наибольшее применение практическое нашла трёхфазная симметричная система (угол сдвига фаз равен $360^\circ/3 = 120^\circ$, рис. 4.1).

Симметричная трёхфазная система — совокупность трёх цепей, создаваемых общим источником электрической энергии, с ЭДС одинаковой амплитуды и сдвинутых по фазе друг относительно друга на 120° .

Основные преимущества симметричной трёхфазной системы:

- меньший расход меди в проводах и стали в трансформаторах;
- простота получения вращающегося магнитного поля (важно для работы асинхронных двигателей);
- меньшая пульсация момента на валу роторов генераторов и двигателей;
- наличие одновременно двух уровней напряжения (фазного и линейного).

Помимо трёхфазной системы на практике применяются двухфазная (устройства автоматики), а также двенадцатифазная (выпрямители) системы.

Историческая справка Трёхфазную систему, ставшую основой современной энергетики, разработал Михаил Осипович Доливо–Добровольский (1862 — 1912 гг.). В период с 1889 по 1891 год Михаилом Осиповичем были разработаны все её основные

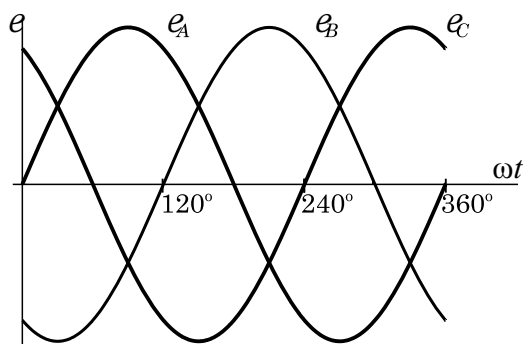


Рис. 4.1. Система трёхфазных ЭДС

элементы, которые, практически без изменений, применяются до настоящего времени: короткозамкнутый ротор типа "беличья клетка" для трехфазного двигателя (заявка на патент подана 8 марта 1889 г., сам двигатель был собран зимой этого же года), фазный ротор (1890 г.), в начале 1891 г. разработан трёхфазный трансформатор, а летом была осуществлена передача энергии от синхронного генератора мощностью 230 кВт на расстояние 170 км с невиданным тогда КПД — 75 %, ставшая прообразом современной энергосистемы. Фактически, работы Михаила Осиповича Доливо-Добровольского завершили формирование круга явлений, являющихся предметом изучения электротехники.

4.2. Трёхфазная система ЭДС

4.2.1. Получение трёхфазной системы ЭДС

Принцип получения трёхфазной системы ЭДС достаточно прост и аналогичен получению однофазной ЭДС — различие заключается в том, что используется не одна обмотка, а три одинаковые, повернутые друг относительно друга на угол 120° ($2\pi/3$ радиан) (рис. 4.2). Эти обмотки вращаются с одинаковой угловой скоростью ωt в однородном постоянном магнитном поле \vec{B} . Так как обмотки идентичны и повернуты друг относительно друга на 120° , то и наводимые в них ЭДС будут иметь одинаковую частоту и амплитуду, а их начальные фазы будут различаться на 120° .

Каждая из трёх обмоток имеет начало (на рисунке отмечено точкой), которое обозначается латинской буквой, находящейся в начале алфавита (A , B , C) и конец (на

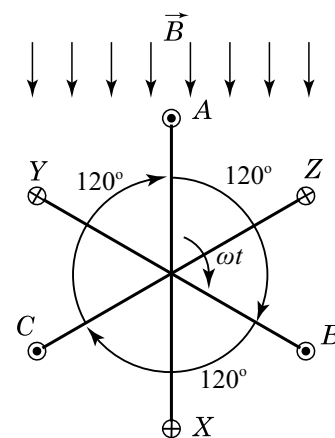


Рис. 4.2. Получение трёхфазной ЭДС

рисунке отмечен крестом), который обозначается латинской буквой, находящейся в конце алфавита (X, Y, Z).

Фазы генератора принято обозначать заглавными (A, B, C, X, Y, Z) буквами, а нагрузки — строчными (a, b, c, x, y, z).

Традиционно фазы называются по букве, обозначающей её начало.

Порядок, в котором ЭДС проходят через одинаковые значения, например максимум, называют порядком следования или чередования фаз. Принят следующий порядок чередования фаз: $A-B-C$. Обратный порядок ($A-C-B$) недопустим, т. к. может привести при включении синхронных генераторов на параллельную работу к авариям, а у двигателей трехфазного тока — к обратному направлению вращения ротора.

В распределительных устройствах участки цепей, относящиеся к разным фазам обозначаются цветами: фаза A — жёлтым, B — зелёным, C — красным.

4.2.2. Способы представления трёхфазной системы ЭДС

При анализе трёхфазных цепей принято считать начальную фазу ЭДС e_A равной нулю. В этом случае начальные фазы ЭДС e_B и e_C будут сдвинуты на $\pm 120^\circ$ ($\pm 2\pi/3$ радиан) относительно фазы A :

тригонометрическая форма:

$$e_A = E_m \sin(\omega t)$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$

комплексная форма:

$$\underline{E}_A = E e^{j0} = E(1 + j0)$$

$$\underline{E}_B = E e^{-j120^\circ} = E \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\underline{E}_C = E e^{-j240^\circ} = E e^{j120^\circ} = E \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

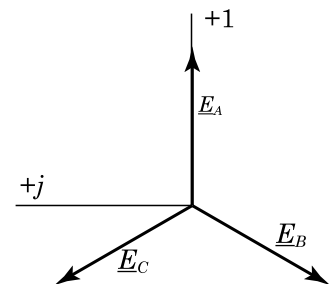


Рис. 4.3. Векторная диаграмма трёхфазной системы ЭДС

векторная форма: рис. 4.3.

Для удобства анализа в векторном представлении, оси комплексной плоскости повернуты на 90° против часовой стрелки, в этом случае \underline{E}_A , лежащая на действительной оси, направлена вертикально вверх, а две остальные фазы вниз под углом $\pm 120^\circ$.

Из рассмотренных представлений видно, что ЭДС \underline{E}_B *отстает* по фазе от \underline{E}_A на угол 120° , а ЭДС \underline{E}_C *опережает* \underline{E}_A на угол 120° .

4.3. Соединение «звездой» и «треугольником» в трёхфазной системе

4.3.1. Соединение «звезда»

При соединении **звездой** концы всех фаз соединяются в одной точке, которая называется нейтральной и обозначается буквой «N» (рис. 4.4).

Напряжения между началами фаз и нейтральной точкой называются **фазными**, а напряжения между началами фаз — **линейными**.

Как видно из рис. 4.4, линейное напряжение равно разности фазных, в частности:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B,$$

где \underline{U}_{AB} — линейное, а \underline{U}_A и \underline{U}_B — фазные напряжения.

Проведём вычисления:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_A - \underline{U}_B = U_\Phi(1 + j0) - U_\Phi \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= U_\Phi \left(1 + \frac{1}{2} \right) + jU_\Phi \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = U_\Phi \left(1\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

Отсюда абсолютная величина линейного напряжения $|\underline{U}_L| = |\underline{U}_{AB}|$ будет равна:

$$|\underline{U}_L| = U_\Phi \sqrt{\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = U_\Phi \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = U_\Phi \sqrt{\frac{12}{4}} = U_\Phi \sqrt{3}$$

Выражения для $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C$ и $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$ будут аналогичными. Выражение

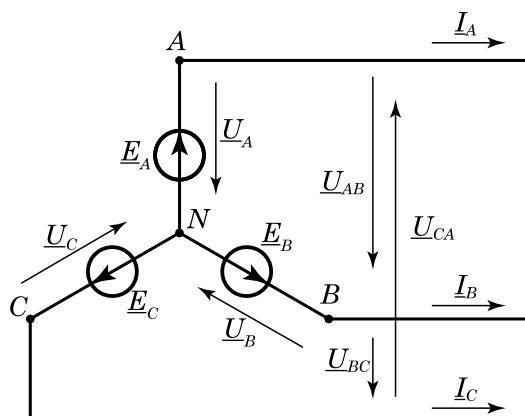


Рис. 4.4. Соединение звездой



Рис. 4.5. Векторная диаграмма для соединения звездой

$$U_{Л\lambda} = U_{Ф\lambda} \sqrt{3}$$

является **основным соотношением для соединения звездой**.

При этом фазные и линейные токи будут равны:

$$I_{Л\lambda} = I_{Ф\lambda}$$

Возможность получения двух разных напряжений (фазного и линейного) является одним из важнейших преимуществ трёхфазной системы. На основании полученных соотношений построена шкала напряжений для трёхфазных цепей: 127/220, 220/380, 380/660, где первое напряжение является фазным, а второе — линейным.

4.3.2. Соединение «треугольник»

При соединении **треугольником**, начало одной фазы, соединяется с концом другой ($A - Z$, $B - X$ и $C - Y$, рис. 4.6).

В результате мы получаем замкнутый контур ABC , в котором действует три ЭДС. На первый взгляд в этом контуре должно произойти короткое замыкание, однако начальные фазы этих ЭДС различаются на 120° и, если

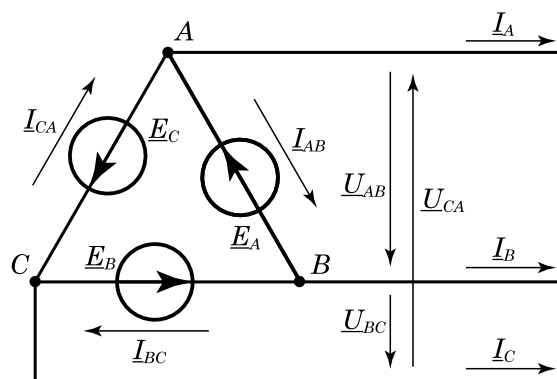


Рис. 4.6. Соединение треугольником

мы сложим все три ЭДС, то получится, что их суммарное значение равно нулю:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = (E + j0E) + \left(-\frac{1}{2}E - j\frac{\sqrt{3}}{2}E\right) + \left(-\frac{1}{2}E + j\frac{\sqrt{3}}{2}E\right) = 0.$$

Аналогичные выражения можно построить для линейных напряжений и токов.

Важно: полученное выражение верно только для трёхфазных токов, напряжений и ЭДС (при соединении треугольником), которые изменяются с рабочей частотой (частотой основной гармоники), следовательно, на частотах, отличных от рабочей, могут существовать не скомпенсированные паразитные токи, которые будут нарушать режим работы электрических машин.

В отличие от соединения звезда, при соединении треугольником фазные напряжения равны линейным, а фазные и линейные токи различаются (рис. 4.6).

Выражение по первому закону Кирхгофа для узла A будет иметь следующий вид:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}$$

После преобразований, аналогичных преобразованиям для напряжений в предыдущем разделе, получим выражение:

$$\boxed{I_{Л\Delta} = \sqrt{3}I_{Ф\Delta}}$$

которое является **основным соотношением для соединения треугольником**.

При этом фазные и линейные напряжения равны:

$$\boxed{U_{Л\Delta} = U_{Ф\Delta}}$$

4.4. Способы соединения источников и потребителей электрической энергии в трёхфазных цепях

Существует три основных способа соединения источников электрической энергии и потребителей в трёхфазной системе:

1. звезда–звезда с нейтральным проводом;
2. звезда–звезда без нейтрального провода;
3. звезда–треугольник.

Важно: в трёхпроводной системе способы соединения (звезда или треугольник) трёхфазных источника и нагрузки между собой не связаны.

Соединение генератора треугольником не нашло широкого применения, в связи с его меньшей функциональностью — оно даёт только один уровень напряжения, отсутствуют механизмы выравнивания характеристик трёхфазной цепи, подобные нейтральной точке при соединении звездой. Кроме того, в треугольнике, на частотах, отличных от рабочей, могут циркулировать паразитные токи.

4.4.1. Соединение звезда–звезда с нейтральным проводом

При соединении звезда–звезда с нейтральным проводом источник и потребитель электрической энергии соединяются по схеме звезда, начала фаз источника соединяются с началами фаз потребителя, нейтральная точка источника соединяется с нейтральной точкой потребителя (рис. 4.7).

При **симметричной нагрузке** (т. е. когда сопротивление нагрузки во всех фазах одинаковое: $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$) фазные напряжения на нагрузки будут равны фазным напряжениям генератора, действующие значения протекающие в линейных проводах токов, будут равны между собой ($|\underline{I}_a| = |\underline{I}_b| = |\underline{I}_c|$), а их начальные фазы будут различаться 120° . Отсюда выражение по первому закону Кирхгофа будет иметь следующий вид:

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_{nN} = 0$$

При **несимметричной нагрузке** (т. е. когда $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$) действующие значения протекающие в линейных проводах токов, не будут равны между собой ($\underline{I}_a \neq \underline{I}_b \neq \underline{I}_c$), а их начальные фазы будут различаться на угол, отличный от 120° . Отсюда выражение по первому закону Кирхгофа будет иметь следующий вид:

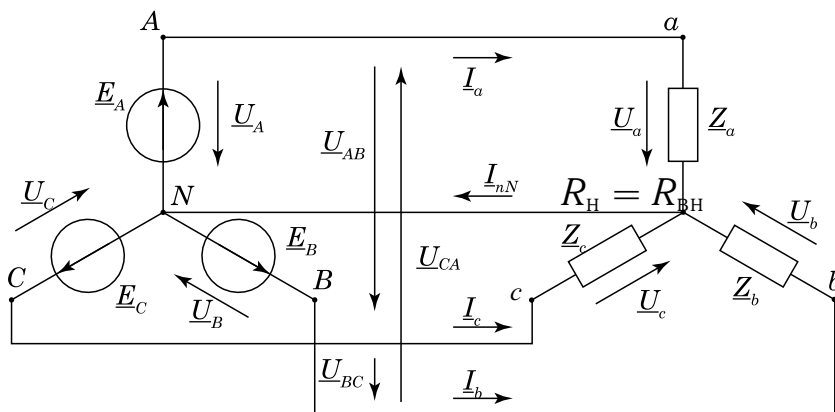


Рис. 4.7. Соединение звезда–звезда с нейтральным проводом

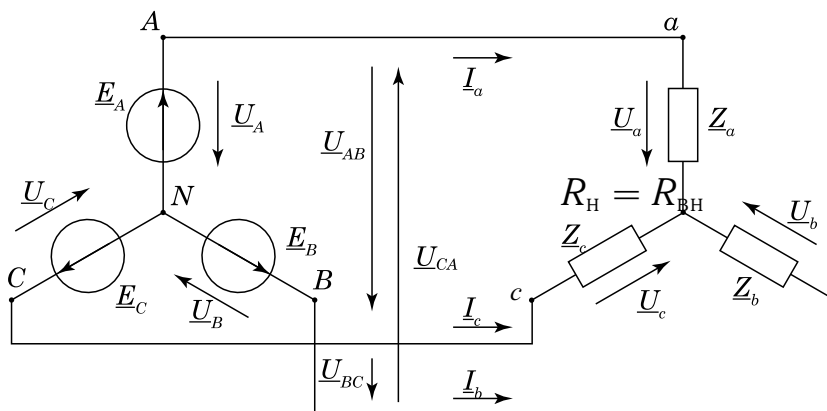


Рис. 4.8. Соединение звезда–звезда без нейтрального провода

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_N \neq 0$$

В этом случае напряжения в фазах источника будут отличаться от напряжений в фазах нагрузки на величину напряжения между нейтральной точкой нагрузки и генератора:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN}, \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN}, \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN}$$

Согласно закону Ома, величина \underline{U}_{nN} определяется током в нейтральном проводе \underline{I}_{nN} и его сопротивлением \underline{Z}_{nN} . Сопротивление нейтрального провода достаточно мало и значительно меньше сопротивления нагрузки, следовательно падение напряжения \underline{U}_{nN} на нём незначительно, а фазные напряжения генератора и нагрузки будут практически равны. Следует также отметить, что для уменьшения сопротивления нейтральный провод выбирается меньшего сечения, чем линейные и во многих случаях его сопротивлением пренебрегают.

Важно: Исходя из полученных выражений видно, что *роль нейтрального провода состоит в обеспечении симметрии фазных напряжений нагрузки при несимметричной нагрузке*

4.4.2. Соединение звезда–звезда без нейтрального провода

При соединении звезда–звезда без нейтрального провода генератор и нагрузка соединяются по схеме звезда, а начала их фаз соединяются проводниками. В отличие от ранее рассмотренного соединения звезда — звезда с нейтральным проводом, нейтральные точки генератора и нагрузки не соединены (рис. 4.8).

При симметричной нагрузке разница между этими соединениями отсутствует — ток в нейтральном проводе не протекает, а разность потенциалов между нейтральными точками генератора и потребителя равна нулю,

следовательно необходимость в нейтральном проводе отпадает. Однако при несимметричной нагрузке, между нейтральными точками возникает разность потенциалов (**смещение нейтрали**), которое, согласно методу двух узлов, равно:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{U}_a \underline{Y}_a + \underline{U}_b \underline{Y}_b + \underline{U}_c \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}$$

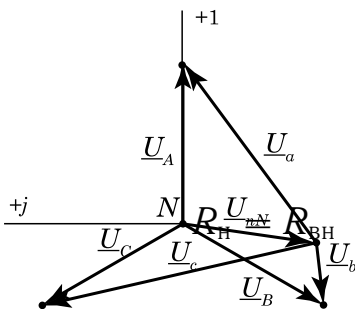


Рис. 4.9. Смещение нейтрали

С учётом ранее полученных выражений, связывающих фазные напряжения генератора и нагрузки с напряжением между нейтральными точками:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN},$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN},$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN}$$

мы увидим, что при достаточно высоких значениях \underline{U}_{nN} фазные напряжения генератора и нагрузки будет сильно различаться как по амплитуде, так и по фазе (см. рис. 4.9), причём величина \underline{U}_{nN} определяется разностью проводимостей потребителей в фазах нагрузки, что в свою очередь, ведёт к разным значениям напряжения в разных фазах нагрузки.

Таким образом, соединение звезда–звезда без нейтрального провода может применяться только в трёхфазных цепях с симметричной нагрузкой. Подобная нагрузка достаточно широка распространена, в качестве примера можно привести асинхронный двигатель.

Важным следствием, вытекающим из рассмотрения роли нейтрального провода, является запрет на установку между нейтральными точками устройств, которые могут разорвать цепь (выключателей, предохранителей).

4.4.3. Соединение звезда-треугольник

При соединении звезда–треугольник генератор соединяется по схеме звезда, нагрузка — по схеме треугольник, при этом возможно соединение по только по трёхпроводной линии (рис. 4.10).

Особенностью этого соединения является то, что при несимметричной нагрузке, напряжения во всех ветвях останутся одинаковыми (так как они определяются линейными напряжениями генератора), а различаться будут только токи. Поэтому соединение треугольником применяется, в частности, при необходимости подключения несимметричных однофазных приёмников в трёхпроводную трёхфазную сеть (в качестве примера можно привести осветительные сети).

Соединение нагрузки треугольником нашло широкое применение для подключения симметричной нагрузки (в частности асинхронных двигателей) и обеспечения необходимого уровня напряжения (например, в сети 220/380 В устройство с номинальным напряжением 220 В включается по схеме звезда, а с номинальным напряжением 380 В по схеме треугольник).

4.5. Аварийные режимы трёхфазной цепи

4.6. Мощность трёхфазной цепи

Активная мощность трёхфазной цепи определяется как сумма активных мощностей отдельных фаз:

$$P = P_a + P_b + P_c$$

В случае симметричной трёхфазной системы, сопротивления (а следовательно и мощности) всех трёх фаз равны, следовательно мы можем записать:

$$P = 3P_\phi$$

Активная мощность каждой из фаз равна:

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi$$

Учитывая связь между фазными и линейными токами и напряжениями для соединений «звезда» ($U_\phi = U_\text{л}/\sqrt{3}$, $I_\phi = I_\text{л}$) и «треугольник» ($U_\phi = U_\text{л}$, $I_\phi = I_\text{л}/\sqrt{3}$), активная мощность будет равна:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_\text{л} I_\text{л} \cos \varphi$$

Аналогично получаем выражения для реактивной

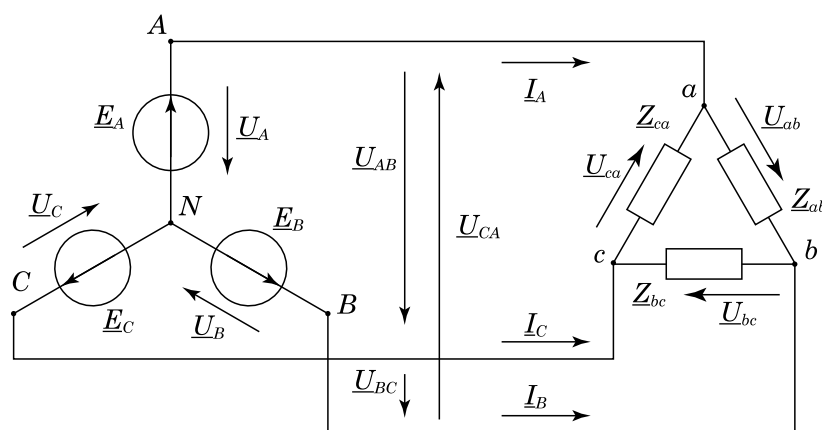


Рис. 4.10. Соединение звезда–треугольник

$$Q = 3U_{\phi}I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \sin \varphi$$

и полной мощности:

$$S = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}$$

В случае несимметричной нагрузки активная, реактивная и полная мощности трёхфазной цепи получаются сложением соответствующих мощностей каждой из фаз:

$$P = P_a + P_b + P_c$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c$$

$$S = S_a + S_b + S_c$$

Лекция 5

Электрические цепи периодических несинусоидальных токов и ЭДС

5.1. Общие положения

Периодические несинусоидальные цепи — это цепи в которых ток, напряжение и ЭДС изменяются во времени с периодом T по закону, отличному от синуса. В общем случае закон имеет вид:

$$f(t) = f(t + kT),$$

где $k = 1, 2, 3 \dots$ — целое число, T — период.

Периодический несинусоидальный сигнал может иметь форму как хорошо знакомых фигур (прямоугольные, треугольные, трапециевидные и др. сигналы), так и более сложную.

Наибольшее применение периодические несинусоидальные сигналы нашли в электронике, в электротехнике несинусоидальные форма сигнала, в основном, является следствием помех и нелинейностей цепи.

5.2. Коэффициенты, характеризующие периодический несинусоидальный сигнал

При анализе периодической функции сложной формы используются ряд коэффициентов, позволяющих сравнить форму данной функции с формой идеальной периодической функции (например, синусоидальной).

Коэффициент амплитуды — отношение максимального значения сигнала к действующему:

$$K_a = \frac{I_m}{I}.$$

Для синусоиды $K_a = \sqrt{2}$.

Коэффициент формы — отношение среднеквадратического (действующего) значения функции к среднему:

$$K_\Phi = \frac{U}{U_{\text{ср}}}$$

Для синусоиды величина K_Φ составит:

$$K_{\Phi} = \frac{U}{U_{\text{ср}}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} / \frac{2U_m}{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Коэффициент искажения — отношение среднеквадратического значения первой гармоники к среднеквадратическому значению функции:

$$d = \frac{U_1}{U}$$

Для синусоиды $d = 1$.

5.3. Анализ несинусоидальный цепей

Анализ несинусоидальных цепей производится методом наложения, для чего несинусоидальный периодический сигнал раскладывается в ряд Фурье, а затем производится расчёт для постоянной и каждой гармонической составляющей ряда Фурье (**гармоники**) в отдельности и последующего сложения (наложения) мгновенных значений токов, напряжений или ЭДС, полученных при расчёте цепи для каждого члена ряда Фурье.

5.3.1. Представление несинусоидальных периодических сигналов в виде ряда Фурье

Представление сигналов в виде ряда Фурье является наиболее распространённым способом анализа несинусоидальных сигналов. С помощью ряда Фурье хорошо аппроксимируется форма сигнала, хотя он не позволяет повторить форму прямоугольных импульсов, с его помощью повторяется энергия сигнала (вообще, при анализе сигналов количество членов ряда Фурье, обычно определяется возможностью восстановления сигнала, энергия которого будет не менее 95% от энергии исходного сигнала).

Теория рядов Фурье подробно рассматриваются в курсе „Высшая математика“, а их практическое применение в курсе „Цифровая обработка сигналов“. Мы рассмотрим только ряд основных положений, необходимых для расчёта электрических цепей, для чего разложение тока, напряжения и ЭДС в ряд Фурье представим в следующем виде:

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_1 + \psi_{ik})$$

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_1 + \psi_{uk})$$

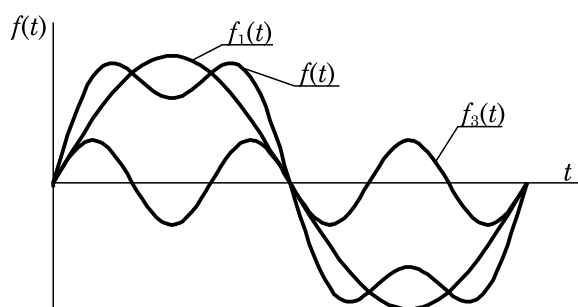


Рис. 5.1. Пример несинусоидального периодического сигнала
 $f(t) = f_1(t) + f_3(t) = F_{m1} \sin \omega t + F_{m3} \sin 3\omega t$

$$e = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mk} \sin(k\omega_1 + \psi_{ek})$$

Пример сигнала, содержащего первую и третью гармонику, представлен на рис. 5.1.

5.3.2. Среднее и действующее значение тока, напряжения и ЭДС несинусоидальных цепях

Также, как и в цепях синусоидального тока, мы можем определить среднее и действующее (среднеквадратичное) значения несинусоидальных периодических тока, напряжения и ЭДС.

Среднее значение

Среднее значение несинусоидальной величины определяется аналогично среднему значению синусоидальной, только мгновенное значение тока, напряжения или ЭДС при расчёте представляется в виде ряда Фурье, т. е.

При анализе несинусоидальных цепей рассматриваются средние значения за период и среднее значение по модулю.

Среднее значение за период:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt, \quad U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt$$

Среднее значение синусоидальной функции за период равно нулю, а т. к. ряд Фурье состоит из суммы постоянной и гармонических (синусоидальных) составляющих, то среднее значение несинусоидальных тока, напряжения и ЭДС будет равно постоянной составляющей, а в случае её отсутствия — нулю.

Среднее значение по модулю:

$$|I_{cp}| = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt, \quad |U_{cp}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt, \quad |E_{cp}| = \frac{1}{T} \int_0^T |e(t)| dt$$

Среднее значение электрических величин за период измеряется приборами магнитоэлектрической системы, а среднее значение по модулю — приборами магнитоэлектрической системы с выпрямителем.

Действующее значение

Действующее значение периодической величины определяется как её среднеквадратичное значение за период, следовательно, например для тока, получим:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_1 + \psi_{ik}) \right]^2 dt} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \end{aligned}$$

Аналогично определяются действующие значения несинусоидальный периодических напряжения и ЭДС:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \\ E &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} E_k^2} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots} \end{aligned}$$

Действующие значения электрических величин измеряются с помощью приборов электромагнитной и электродинамической систем.

5.3.3. Мощность в несинусоидальных цепях

Активная мощность

Согласно **активная мощность** это величина, равная среднеарифметическому значению мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt.$$

Представив ток и напряжение в амплитудно-фазовой (синусной) форме ряда Фурье получим:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_1 + \psi_{uk}) \right] * \\ &\quad * \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_1 + \psi_{ik}) \right] dt = \\ &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что *активная мощность* в несинусоидальной цепи равна сумме активных мощностей постоянной составляющей и всех гармоник.

Реактивная мощность

По аналогии с полученным выше выражением для активной мощности, мы можем записать выражение для реактивной мощности:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = Q_1 + Q_2 + \dots$$

Обратите внимание, что в выражении для реактивной мощности отсутствует нулевая составляющая, соответствующая постоянному току. Это связано с тем, что в цепях постоянного тока реактивная составляющая отсутствует.

Полная мощность

Полная мощность несинусоидальной цепи определяется как произведение действующих (среднеквадратических) значений напряжения и тока:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

Важным отличием от цепей синусоидального тока, является то, что квадрат полной мощности больше суммы квадратов активной и реактивной мощности:

$$S^2 = (UI)^2 > P^2 + Q^2,$$

равенство которых в синусоидальных цепях показано в § 3.10 на стр. 72 с помощью треугольника мощностей.

Величина

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$

называется **мощность искажения** и характеризует степень различия в формах кривых тока и напряжения.

5.3.4. Влияние индуктивного и емкостного элементов на высшие гармоники

В несинусоидальных цепях имеется большое количество гармонических составляющих, следовательно влияние индуктивного и емкостного элементов (влияние которых на процессы в цепи определяется частотой изменения тока) на разные гармоники будут различаться:

$$\frac{I_{kL}}{I_{1L}} = \frac{U_k/X_{Lk}}{U_1/X_{L1}} = \frac{U_k/k\omega_1 L}{U_1/\omega_1 L} = 1/k \frac{U_k}{U_1}$$

$$\frac{I_{kC}}{I_{1C}} = \frac{U_k/X_{Ck}}{U_1/X_{C1}} = \frac{U_k k\omega_1 C}{U_1 \omega_1 C} = k \frac{U_k}{U_1}.$$

Из полученных выражений видно, что индуктивный элемент подавляет влияние высших гармоник тока, а емкостной наоборот, усиливает, причём с ростом гармоники (увеличением её номера k и, соответственно, частоты $k\omega$) влияние как индуктивного, так и емкостного элементов усиливается.

Рассмотренный эффект может привести к резонансу на отдельной гармонике.

5.3.5. Эквивалентная синусоида

В ряде случаев, когда в несинусоидальном периодическом сигнале отсутствует постоянная составляющая и высшие гармоники оказывают сравнительно небольшое влияние на форму сигнала, негармонические ток или напряжение заменяются **эквивалентной синусоидой**, действующее значение которой равно действующему значению исходного несинусоидального тока или напряжения.

Лекция 6

Переходные процессы в электрических цепях

6.1. Общие положения

Рассмотренные ранее электрические цепи находились, в **установившемся режиме**, который характеризуется тем, что закон изменения токов, напряжений и ЭДС с течением времени остаётся неизменным, это обусловлено, в первую очередь, тем, что схема соединения элементов в электрической цепи остаётся неизменной, однако в реальных электрических цепях часто происходят её изменения (например подключение или отключение источника питания).

*Процесс скачкообразного изменения топологии цепи или параметров её элементов (т. е. подключения или отключения элементов, источников питания или участков цепи) называется **коммутацией**¹.*

После коммутации закон изменения токов, напряжений и ЭДС в электрической цепи изменяется и в цепи наступает новый **установившийся режим**, однако это происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени, в течение которого в цепи протекает **переходной процесс** — электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому (ГОСТ Р 52002 — 2003), а электрическая цепь находится в **неустановившемся режиме**.

Важно: токи и напряжения при переходном процессе могут *значительно* отличаться как от токов и напряжений в установившемся режиме, так и от их номинальных значений.

Исследование переходных процессов имеет большое значение для энергетических (возможны перегрузки при включении или отключении потребителей), импульсных (влияние переходных процессов на форму импульса) и других цепей.

¹От лат. commutatio — изменение.

6.2. Основные законы и понятия, характеризующие переходные процессы

6.2.1. Используемые допущения и обозначения

Для дальнейшей работы примем ряд допущений и обозначений:

1. Коммутация (т. е. срабатывание ключа) происходит мгновенно.
2. Коммутация происходит в момент времени $t = 0$.
3. Момент времени «сразу перед» коммутацией (т. е. наступивший за бесконечно малый промежуток времени до коммутации) будем обозначать как 0_- .
4. Момент времени «сразу после» коммутации (т. е. наступивший через бесконечно малый промежуток времени после коммутации) будем обозначать как 0_+ .

Значения тока в индуктивном и напряжения на емкостном элементе в момент времени $t = 0_-$ называются **независимыми начальными условиями**, а их значения при $t = 0_+$ — **зависимыми начальными условиями**. В случае их равенства нулю ($i_L(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$), начальные условия называются **нулевыми**.

6.2.2. Причины возникновения переходных процессов

Возникновение переходных процессов в электрических цепях обусловлено тем, что энергия, накопленная в индуктивном и емкостном элементах, не может изменяться скачком. В индуктивном элементе величина энергии магнитного поля пропорциональна протекающему через него току ($W_M = Li^2/2 = \Psi i/2$), а величина энергии электрического поля в емкостном элементе пропорциональна приложенному напряжению ($W_э = Cu^2/2 = qu/2$).

Предположив отсутствие переходного процесса (т. е. мы принимаем что $dt \rightarrow 0$ и допускаем возможность мгновенного изменения энергии) мы получим, что на изменение энергии электрического и магнитного поля потребуется затратить бесконечно большую мощность:

$$P_M = \left. \frac{dW_M}{dt} \right|_{dt \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad P_э = \left. \frac{dW_э}{dt} \right|_{dt \rightarrow 0} \rightarrow \infty,$$

что не имеет физического смысла.

Как видно из приведённых выше выражений, переходные процессы обусловлены накоплением и расходом энергии в индуктивном и емкостном элементах, т. к. резистивном элементе энергия не накапливается, то и переходные процессы в нём не протекают, а ток и напряжение могут изменяться скачком.

6.2.3. Законы коммутации

Как было показано в § 6.2.2 энергия магнитного поля (запасённого в индуктивном элементе) и электрического поля (запасённая в емкостном элементе) не может изменяться скачком, при этом энергия магнитного поля в индуктивном элементе пропорциональна протекающему через него току, а энергия электрического поля в емкостном элементе — напряжению, таким образом мы можем сформулировать два закона коммутации:

Первый закон коммутации:

Ток в индуктивном элементе не может изменяться скачком

$$i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

Второй закон коммутации:

Напряжение на емкостном элементе не может изменяться скачком

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

Законы коммутации основаны на двух более общих принципах:

1. **Принцип непрерывности во времени потокосцепления:**

$$\Psi(0_-) = \Psi(0_+).$$

2. **Принцип непрерывности во времени электрического заряда:**

$$q(0_-) = q(0_+).$$

Отметим, что законы коммутации ничего не говорят о напряжении на индуктивном элементе и токе через емкостной элемент. Как будет показано позже напряжение на индуктивном и ток в емкостном элементе могут изменяться скачком, т.к. это не связано с изменением энергии в соответствующих элементах.

6.2.4. Методы расчёта переходных процессов

При расчёте переходных процессов в линейных электрических цепях используются уравнения (или их системы), по законам Кирхгофа, в которых токи и напряжения представлены в дифференциальной форме. Таким образом расчёт переходных процессов сводится к решению линейного дифференциального уравнения или их системы, а методы расчёта обусловлены методами решения подобных уравнений и систем.

К основным методам расчёта переходных процессов относятся:

- **классический** — состоит в решении однородного дифференциального уравнения n -го порядка, в виде сумм частного и общего решений (применяется для достаточно простых цепей, дифференциальные уравнения для которых имеют первую или вторую степень, отличается хорошей физической наглядностью);
- **операторный** — состоит в решении системы линейных уравнений, полученной из исходных дифференциальных уравнений, к которым было применено преобразования Лапласа (применяется для достаточно сложных цепей, однако решение сильно формализовано, что делает его физически непрозрачным).

Помимо двух перечисленных методов существуют другие методы расчёта переходных процессов, например метод интеграла Дюамеля (для цепей, в которых напряжение изменяется по сложному закону), метод переменных состояний (исторически первый метод, применявшийся для расчёта на ЭВМ), спектральный метод (применяется для расчёта $i(t)$ по заданному напряжению $u(t)$ в цепей, для которых экспериментально определены зависимости $Z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$) и др., которые менее универсальные и здесь не рассматриваются.

6.3. Расчёт переходных процессов классическим методом

6.3.1. Общие положения

При расчёте переходных процессов **классическим методом**, составляется система дифференциальных уравнений (в простейших случаях может быть одно уравнение), описывающая электрическое состояние цепи (т.е. уравнения по законам Кирхгофа) *после* коммутации. Полученная система преобразуется методом замены переменных в одно дифференциальное уравнение, в общем случае неоднородное, относительно искомого тока или напряжения. Порядок полученного уравнения равен числу независимых начальных условий в схеме (или числу реактивных элементов), после её максимального упрощения.

Решение полученного уравнения находится в виде суммы **установившейся (принуждённой)²** и **свободной составляющих** искомой величины. Таким образом **переходной ток** или **напряжение** (т.е. ток и напряжение, действующие во время переходного процесса) будут иметь вид:

²В литературе используются оба понятия. Термин «установившаяся составляющая» говорит о том что рассматривается цепь после окончания переходного процесса, а термин «принуждённая составляющая» характеризует воздействие на процессы в цепи («принуждение») источников питания, что показывает отличие от «свободной составляющей», которая характеризует процессы в цепи под воздействием запасённой в индуктивном и ёмкостном элементах энергии.

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{\text{уст}}(t) + i_{\text{св}}(t) \\ u(t) &= u_{\text{уст}}(t) + u_{\text{св}}(t). \end{aligned}$$

Установившаяся составляющая тока или напряжения определяется путём расчёта соответствующей величины для цепи после коммутации и соответствует частному решению дифференциального уравнения. Расчёт установившегося значения токов и напряжений проводят с помощью ранее изученных методов расчёта электрических цепей.

Свободная составляющая соответствует общему решению дифференциального уравнения и описывает процессы в цепи, протекающие за счёт энергии, накопленной в индуктивных и емкостных элементах, до начала переходного процесса.

Установившееся и свободная составляющие тока и напряжения при переходном процессе являются *расчётными* величинами, а не реально действующими в цепи токами и напряжениями, разделение их на две составляющие является математической операцией, реализующей принцип наложения (суперпозиции).

Свободная составляющая (общее решение дифференциального уравнения) определяется в следующем виде:

$$i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad u_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$$

где n — порядок дифференциального уравнения;

A_k — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

p_k — корни характеристического уравнения.

Для удобства анализа свободную составляющую преобразуют к следующему виду:

$$i_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{-\frac{t}{\tau}}$$

где τ — постоянная времени.

Постоянная времени τ характеризует скорость протекания переходного процесса и равна времени, за которое свободная составляющая изменится в $e \approx 2,72$ раз. Величина τ имеет размерность *времени* и определяется имеющимися в цепи элементами и способом их соединения.

Из выражений для свободной составляющей видно что переходной процесс длится бесконечно, однако функция $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ изменяется достаточно быстро и к моменту времени $t = 3\tau$ ток или напряжение будут отличаться от установившегося значения на 5 %, а при $t = 5\tau$ менее, чем на один процент:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \begin{aligned} f(3\tau) &= Ae^{-\frac{3\tau}{\tau}} = Ae^{-3} \approx 0,05A \\ f(5\tau) &= Ae^{-\frac{5\tau}{\tau}} = Ae^{-5} \approx 0,006A. \end{aligned}$$

где A — постоянная интегрирования.

На практике длительность переходного процесса принимается равной $3 \dots 5\tau$. Очевидно, что чем больше величина τ , тем дольше длится переходной процесс.

Расчёт переходных процессов классическим методом рассмотрим на примере трёх наиболее важных случаев: 1 — отключение RL цепи от источника постоянной ЭДС и 2 — подключение RC цепи к источнику постоянной ЭДС, которые сопровождаются, соответственно, скачком напряжения и тока и 3 — подключение RLC цепи к источнику постоянной ЭДС, сопровождаемое колебательным процессом.

6.3.2. Отключение RL цепи от источника постоянной ЭДС

6.3.2.1. Общие положения

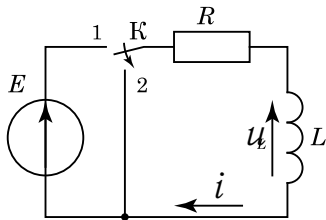


Рис. 6.1. Отключение RL -цепи от источника постоянной ЭДС

Рассмотрим переходной процесс, возникающий при отключении катушки индуктивности (с активным сопротивлением R и индуктивностью L), от источника постоянной ЭДС E и коротким замыканием катушки (рис. 6.1). Подобные условия характерны для электрических машин.

Расчёт классическим методом ведётся в три этапа 1) определение независимых начальных условий, 2) решение дифференциального уравнения для цепи после коммутации и 3) определение искомых токов и напряжений.

6.3.2.2. Порядок расчёта

1 шаг Определим независимые начальные условия

В цепи имеется один реактивный элемент — индуктивность L , поэтому начальные условия (т. е. величины тока и напряжения перед коммутацией, на рис. 6.1 соответствует положению «1» ключа K) определим только для тока, по первому закону коммутации.

В рассматриваемой цепи протекает постоянный ток, поэтому индуктивный элемент не будет оказывать влияние на параметры цепи, а величину тока определим по закону Ома:

$$i(0_-) = \frac{E}{R}.$$

2 шаг Составим и решим характеристическое уравнение цепи после коммутации

Дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа, для цепи после коммутации (ключ К в положении «2») будет иметь вид:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$R + Lp = 0,$$

которое имеет единственный корень:

$$p = -\frac{R}{L}.$$

3 шаг Определим искомые токи и напряжения

Ток в цепи равен сумме установившейся и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}}.$$

В рассматриваемой цепи происходит отключение от источника питания, и поэтому установившаяся составляющая равна нулю:

$$i_{\text{уст}} = 0.$$

Свободную составляющую тока находим в виде показательной функции:

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt}.$$

В этом выражении A является постоянной интегрирования, определяемой из начальных условий и в данном случае соответствует току в момент времени $t = 0_-$. В соответствии с первым законом коммутации $i(0_-) = i(0_+)$, откуда получим:

$$i(0_-) = \frac{E}{R} = i(0_+) = A \Rightarrow A = \frac{E}{R}.$$

Корень характеристического уравнения $p = -R/L$ и свободная составляющая будет примет вид:

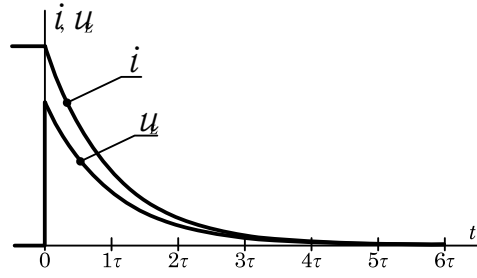


Рис. 6.2. Характер изменения i и u_L при коротком замыкании RL -цепи

$$i_{\text{св}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = \frac{L}{R}$ — **постоянная времени RL цепи**.

Постоянная времени RL цепи характеризует длительность переходного процесса и имеет размерность времени³:

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Итоговое выражение для тока примет вид:

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}} = 0 + \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

и окончательно:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на катушке, после коммутации, будет определяться выражением по второму закону Кирхгофа, в которое подставим полученное выражение для тока:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} = R \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = E e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{EL}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

с учётом того, что $\tau = L/R$, получим:

$$u = E e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{EL}{R\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{E}{R} \frac{L}{L/R} e^{-\frac{t}{\tau}} = E e^{-\frac{t}{\tau}} - E e^{-\frac{t}{\tau}} = u_R - u_L = 0.$$

Характер изменения тока в цепи и напряжения на индуктивном элементе приведён на рис. 6.2.

³Расчёт размерностей описан в специализированной литературе, например.

6.3.2.3. Анализ полученных результатов

Анализируя характер изменения напряжения u_L на индуктивном элементе (рис. 6.2), мы видим, что оно равно нулю до коммутации и скачком увеличивается до уровня ЭДС имеющегося в цепи источника сразу после коммутации.

Нулевой уровень напряжения до коммутации обусловлен тем, что в цепи протекает постоянный ток (т.е. его частота $f = 0$), и индуктивное сопротивление равно нулю ($X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 0 \cdot L = 0$), соответственно, по закону Ома, падение напряжения u_L на индуктивном элементе также будет равно нулю.

Скачѐк ЭДС обусловлен тем, что после коммутации величина тока начала изменяться, что, согласно закона электромагнитной индукции, вызвало появление в обмотке ЭДС самоиндукции. Направление ЭДС противоположно направлению создающего её тока, чем и объясняется знак минус перед ЭДС.

Рассматриваемая схема (рис. 6.1) представляет процессы⁴, характерные для мощных электрических машин, имеющих обмотки с большой индуктивностью. При их отключении от источника питания цепь размыкается и для тока, который высвобождает накопленную в индуктивном элементе энергию магнитного поля, не остаётся иного пути, кроме как через воздушный промежуток между размыкаемыми контактами, в результате чего между ними происходит электрический пробой и возникает электрическая дуга, через которую протекает ток, обусловленный ЭДС самоиндукции обмотки. Возникновение электрической дуги при размыкании контактов ведёт к их разрушению, и для её подавления используются специализированные коммутирующие устройства, сокращающие время коммутации и подавляющие электрическую дугу. Точный анализ переходных процессов, сопровождающихся дуговым разрядом, достаточно сложен, т.к. сопротивление дуги нелинейно.

Особое значение имеет переходной процесс, возникающий при отключении от источника постоянной ЭДС катушки индуктивности с подключенной к ней параллельно элементом.

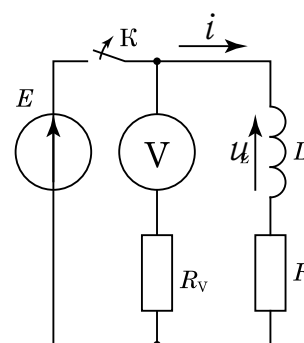


Рис. 6.3. Отключение катушки индуктивности с вольтметром от источника постоянной ЭДС
 R_V — сопротивление вольтметра

⁴Напомним, что мы рассматриваем *схемы замещения*, представляющие, с допустимой точностью, математические модели процессов, протекающих в реальных цепях.

В качестве примера рассмотрим приведённую на рис. 6.3 схему, на которой к катушке индуктивности RL параллельно подключен вольтметр V с внутренним сопротивлением R_V .

Выражения для тока в цепи и напряжения на индуктивном элементе аналогичны ранее полученным, отличие заключается в том, что активное сопротивление будет равно сумме сопротивлений обмотки и вольтметра:

$$R' = R + R_V.$$

В результате изменится постоянная времени:

$$\tau' = \frac{L}{R + R_V} = \frac{L}{R'}.$$

Напряжение на индуктивном элементе примет вид:

$$u'_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau'}} \right) = -\frac{E L}{R \tau'} e^{-\frac{t}{\tau'}} = -I \frac{L}{L/R'} e^{-\frac{t}{\tau'}} = -IR' e^{-\frac{t}{\tau'}},$$

где $E/R = I = A$ — независимые начальные условия.

Рассмотрим соотношение между напряжением в цепях с сопротивлением включённым параллельно катушки (u'_L) и без него (u_L) в момент времени $t = 0$:

$$\frac{u'_L(0)}{u_L(0)} = \frac{-IR' e^{-\frac{0}{\tau'}}}{-IR e^{-\frac{0}{\tau}}} = \frac{R'}{R} = \frac{R + R_V}{R},$$

откуда

$$u'_L(0) = u_L(0) \frac{R + R_V}{R} = E \frac{R + R_V}{R}.$$

Из полученных соотношений видно, что при большой разнице между активными сопротивлениями обмотки и включённого параллельно устройства (это характерно, например, для вольтметра, сопротивление которого превышает на несколько порядков сопротивление обмотки), напряжение на индуктивном элементе после отключения от источника питания будет значительно превышать напряжение, которое было приложено к цепи до коммутации, что может привести к электрическому пробое изоляции и повреждению электротехнических устройств.

Пример

Катушка индуктивности ($R = 100$ Ом, $L = 100$ мГн), к которой подключен вольтметр с внутренним сопротивлением $R_V = 1000$ Ом, отключается от источника постоянной ЭДС $E = 100$ В. Рассчитать $u_L(0)$.

Расчёт проведём по ранее полученному выражению:

$$u_L(0) = E \frac{R + R_V}{R} = 100 \frac{100 + 1\,000}{100} = 100 \cdot 11 = 1\,100 \text{ В.}$$

Таким образом на катушке будет напряжение, превышающее номинальное более чем в 10 раз.

6.3.3. Подключение RC цепи к источнику постоянной ЭДС

6.3.3.1. Общие положения

Рассмотрим переходной процесс, возникающий при подключении цепи, содержащей резистивный и емкостной элементы, с сопротивлением R и ёмкостью C к источнику постоянной ЭДС E (рис. 6.4). Представленные условия подобны, в частности, процессам протекающим в выпрямительных устройствах с емкостными сглаживающими фильтрами.

При анализе будем считать, что перед подключением емкостной элемент был полностью разряжен (т. е. $u_C(0_-) = 0$).

Порядок расчёта аналогичен рассмотренному ранее для RL цепи.

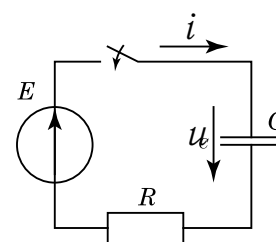


Рис. 6.4.

Подключение RC цепи к источнику постоянной ЭДС

6.3.3.2. Порядок расчёта

1 шаг Определим независимые начальные условия

В цепи имеется только один реактивный элемент — ёмкость C , поэтому начальные условия определим в соответствии со вторым законом коммутации для напряжения на емкостном элементе.

Рассматриваемая цепь до коммутации отключена от источника электрической энергии, а емкостной элемент полностью разряжен, таким образом, мы имеем нулевые начальные условия:

$$u_C(0_-) = 0.$$

2 шаг Составим и решим характеристическое уравнение цепи после коммутации

Уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации имеет вид:

$$Ri + u_C - E = 0.$$

С учётом того, что $i = dq/dt$, а $q = Cu_C$, получим:

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Подставим полученное выражение для тока в выражение по второму закону Кирхгофа:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C - E = 0$$

Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$RCp + 1 = 0,$$

которое имеет единственный корень:

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

3 шаг Определим искомые токи и напряжения

Напряжение на емкостном элементе равно сумме установившейся и свободной составляющих:

$$u_C = u_{C \text{ уст}} + u_{C \text{ св}}.$$

В рассматриваемой цепи происходит подключение к источнику постоянной ЭДС, поэтому установившаяся составляющая равна напряжению источника:

$$u_{C \text{ уст}} = E.$$

Свободную составляющую тока находим в виде показательной функции:

$$u_{C \text{ св}} = Ae^{pt}.$$

В этом выражении A является постоянной интегрирования, определяемой из начальных условий и в данном случае соответствует напряжению в момент времени $t = 0_-$. В соответствии со вторым законом коммутации $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$, откуда получим:

$$u_C(0) = u_{C \text{ уст}} + u_{C \text{ св}} = E + Ae^{p0} = E + A = 0,$$

откуда

$$E + A = 0 \quad \text{или} \quad A = -E.$$

Корень характеристического уравнения $p = -1/RC$ и свободная составляющая будет примет вид:

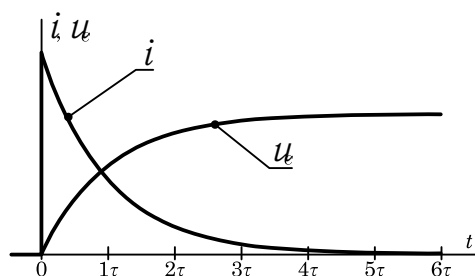


Рис. 6.5. Характер изменения i и u_C при подключении RC -цепи к источнику постоянной ЭДС

$$u_{C\text{св}} = -Ee^{-\frac{1}{RC}t} = -Ee^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = RC$ — **постоянная времени RC цепи**.

Постоянная времени RC -цепи имеет размерность времени:

$$[\tau] = [R][C] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ом} \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В}} = \text{Ом} \cdot \frac{\text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Итоговое выражение для напряжения на емкостном элементе примет вид:

$$u_C = u_{C\text{уст}} + u_{C\text{св}} = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Определим ток в цепи после коммутации :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} E e^{-\frac{t}{\tau}} = C \frac{1}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}} = C \frac{1}{RC} E e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Характер изменения тока в цепи и напряжения на емкостном элементе приведён на рис. 6.5.

6.3.3.3. Анализ полученных результатов

Как видно из представленных на рис. 6.5 зависимостей, ток до коммутации был равен нулю (цепь отключена от источника питания), а после подключения скачком увеличился до максимального значения, ограниченным активным сопротивлением цепи. Переходной процесс длится до тех пор, пока емкостной элемент не зарядится полностью, после чего поле зарядов на его обкладках уравнивает действующую в цепи ЭДС и движение зарядов (т. е. электрический ток) прекратится.

Если до коммутации емкостной элемент был заряжен до напряжения $u_C(0_-) = U_0$, то выражения для напряжения и тока после коммутации примут вид:

$$u_C = E - (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i = \frac{E - U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Скачок тока при подключении емкостного элемента ограничивается только величиной активного сопротивления цепи. Таким образом, если активное сопротивление цепи мало, величина тока может принимать опасные для имеющихся в цепи устройств значения. Кроме того, большие значения тока сопровождаются большими значениями магнитного поля около проводников, что может вносить помехи в работу имеющихся в цепи устройств.

6.3.4. Подключение *RLC* цепи к источнику постоянной ЭДС

6.3.4.1. Общие положения

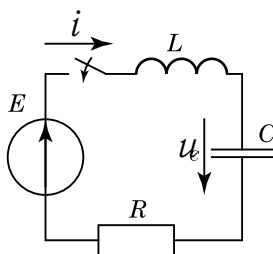


Рис. 6.6.

Подключение *RLC* цепи к источнику постоянной ЭДС

Рассмотрим переходной процесс, возникающий при подключении цепи, содержащей последовательно соединённый резистивный, индуктивный и емкостной элементы, с сопротивлением R , индуктивностью L и ёмкостью C к источнику постоянной ЭДС E (рис. 6.6). Представленные условия подобны, в частности, процессам протекающим в колебательных контурах.

При анализе будем считать, что перед подключением емкостной элемент был полностью разряжен (т. е. $u_C(0_-) = 0$).

6.3.4.2. Порядок расчёта

1 шаг Определим независимые начальные условия

В цепи имеется только два реактивных элемента — ёмкость C и индуктивность L , поэтому начальные условия определим в соответствии с первым и вторым законами коммутации для напряжения на емкостном элементе и тока в цепи (элементы соединены последовательно, поэтому ток в цепи общий).

Рассматриваемая цепь до коммутации отключена от источника электрической энергии, а емкостной элемент полностью разряжен, таким образом, мы имеем нулевые начальные условия:

$$i(0_-) = 0, \quad u_C(0_-) = 0.$$

2 шаг Составим и решим характеристическое уравнение цепи после коммутации

Уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C - E = 0.$$

С учётом того, что $i = dq/dt$, а $q = Cu_C$, получим:

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Подставим полученное выражение для тока в выражение по второму закону Кирхгофа:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C - E = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0,$$

которое имеет корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от соотношения $R^2/4L^2$ и $1/LC$ корни могут быть:

1. действительными различными ($p_1 \neq p_2$) при

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad R > 2\rho;$$

2. действительными равными ($p_1 = p_2$) при

$$R = 2\rho;$$

3. комплексными сопряжёнными ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_c$) при

$$R < 2\rho,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление;

$\delta = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания переходного процесса;

$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — угловая частота собственных затухающих колебаний переходного процесса;

$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ — частота резонанса в последовательной RLC цепи.

Как видно из полученных выражений, корни характеристического уравнения (а следовательно и характер переходного процесса), определяются соотношением активного и характеристического сопротивлений цепи.

Действительным корням соответствует аperiодический процесс (описывается экспоненциальной функцией), а комплексным — затухающий колебательный.

3 шаг Определим искомые токи и напряжения

Напряжение на емкостном элементе равно сумме установившейся и свободной составляющих:

$$u_C = u_{C \text{ уст}} + u_{C \text{ св}}.$$

В рассматриваемой цепи происходит подключение к источнику постоянной ЭДС, поэтому установившаяся составляющая равна напряжению источника:

$$u_{C \text{ уст}} = E.$$

Свободную составляющую напряжения находим в виде показательной функции, с учётом того, что характеристическое уравнение может иметь два корня:

$$u_{C \text{ св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

В этом выражении A_1 и A_2 являются постоянными интегрирования, определяемые из начальных условий и в данном случае соответствует напряжению в момент времени $t = 0_-$.

Согласно второму закону коммутации $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$, следовательно напряжение будет равно:

$$u_C(0) = u_{C \text{ уст}} + u_{C \text{ св}} = E + A_1 e^{p_1 \cdot 0} + A_2 e^{p_2 \cdot 0} = 0,$$

и окончательно:

$$E + A_1 + A_2 = 0.$$

Выражение для тока в цепи будет иметь вид:

$$i(t) = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = p_1 C A_1 e^{p_1 t} + p_2 C A_2 e^{p_2 t}.$$

Для момента коммутации ($t = 0$) получим:

$$i(0) = p_1 C A_1 e^{p_1 t} + p_2 C A_2 e^{p_2 t} = p_1 C A_1 e^{p_1 \cdot 0} + p_2 C A_2 e^{p_2 \cdot 0}.$$

откуда, с учётом того, что $i(0_-) = i(0_+) = 0$, получим:

$$p_1 C A_1 + p_2 C A_2 = 0.$$

Рассматривая полученные выражения для напряжения и тока совместно, получим систему уравнений:

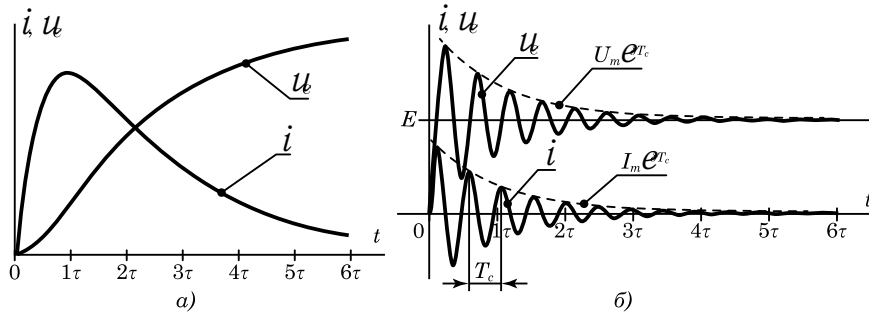


Рис. 6.7. Характер изменения i и u_C при подключении RLC цепи к источнику постоянной ЭДС
 а — аperiodический процесс ($R \geq 2\rho$);
 б — затухающий колебательный процесс ($R < 2\rho$)

$$\begin{cases} E + A_1 + A_2 = 0 \\ p_1 C A_1 + p_2 C A_2 = 0 \end{cases}$$

Решив данную систему мы получим выражения для постоянных интегрирования:

$$A_1 = \frac{p_2 E}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{p_1 E}{p_1 - p_2}.$$

Подставив полученные выражения для постоянных интегрирования в выражения для переходных токов и напряжений, получим:

$$u_C = E + \frac{E}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t});$$

$$i = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Для комплексных сопряжённых корней ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_c$), полученные выражения примут вид:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_c L} e^{-\delta t} \sin \omega_c t$$

$$u_C(t) = E - E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \theta)$$

где $\theta = \arctan(\omega_c/\delta)$.

Характер изменения тока в цепи и напряжения на ёмкостном элементе приведён на рис. 6.7.

6.3.4.3. Анализ полученных результатов

Анализируя колебательный процесс в RLC цепи мы видим, что амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону, который характери-

зуется **декрементом колебаний**⁵:

$$\Delta = e^{\delta T_c},$$

где $T_c = 2\pi/\omega_c$ — период колебаний;

ω_c — угловая частота колебаний;

$\delta = R/2L$ — коэффициент затухания.

Декремент колебаний равен отношению двух соседних (т. е. отстоящих на период свободных колебаний T_c) амплитуд тока или напряжения.

Так же применяется **логарифмический декремент колебаний**:

$$\Theta = \ln \Delta = \ln e^{\delta T_c} = \delta T_c.$$

Чем меньше коэффициент затухания δ по сравнению с ω_c , тем медленнее затухает переходной процесс.

По аналогии с цепями первого порядка (т. е. содержащих один реактивный элемент) для оценки скорости переходного процесса используют **постоянную времени RLC цепи**:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}.$$

Добротность контура будет равна:

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2}\omega_0 \tau$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление;

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — угловая частота свободных незатухающих колебаний (резонансная частота).

6.4. Расчёт переходных процессов операторным методом

6.4.1. Общие положения

При расчёте классическим методом необходимо определять постоянные интегрирования из начальных условий, причём сложность этой задачи возрастает с увеличением порядка уравнения (т. е. с увеличением количества реактивных элементов и усложнением схемы).

Для упрощения расчёта сложных схем широко распространено применение **операторного метода**, суть которого заключается в том, что функции действительной переменной t преобразуются в функции комплексной

⁵От лат. *decrementum* — затухание, уменьшение.

переменной $p = \sigma + j\omega$ (прямое преобразование Лапласа), в результате чего дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические. После решения полученных уравнений выполняется обратное преобразование к функции действительной переменной t (обратное преобразование Лапласа).

Историческая справка Теоретические основы метода, впоследствии получившего название «операционный», были изложены в вышедшей в 1862 г. монографии русского математика Михаила Егоровича Ващенко–Захарченко (1825 – 1912 гг.) «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений». В конце 1892 г. появились работы английского ученого Оливера Хевисайда (1850 – 1925 гг.), посвящённые применению этого метода к решению задач по анализу переходных процессов в электрических цепях. Строгое обоснование было дано значительно позже на основе преобразования Лапласа.

6.4.2. Преобразование Лапласа

Переход от функции действительной переменной t к функции комплексной переменной p осуществляется с помощью **прямого преобразования Лапласа**:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{или} \quad F(p) = L[f(t)].$$

Обратный переход к функции действительной переменной производится с помощью **обратного преобразования Лапласа**:

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad \text{или} \quad f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

В приведённых выражениях функцию времени $f(t)$ называют **оригиналом**, а функцию комплексной переменной $F(p)$ — **изображением** по Лапласу.

Связь между оригиналом и изображением по Лапласу показывают с помощью специального знака « \doteq » — «соответствует», который обычно заменяет вышеприведённые интегральные выражения для прямого и обратного преобразований:

прямое преобразование:

$$f(t) \doteq F(p);$$

обратное преобразование:

$$F(p) \doteq f(t).$$

Комплексное число $p = \sigma + j\omega$ называют **оператором преобразования Лапласа** или **комплексной частотой**.

6.4.3. Основные свойства преобразования Лапласа

Помимо приведённого выше выражения для преобразования Лапласа при нахождении изображений используются теоремы, называемые также свойствами преобразования Лапласа. Рассмотрим некоторые из них без доказательств.

Теорема дифференцирования:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0_+),$$

где $f(0_+)$ — начальные условия.

Отсюда видно, что операция дифференцирования заменяется *умножением* на оператор « p ».

Теорема интегрирования:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Отсюда видно, что операция интегрирования заменяется *делением* на оператор « p ».

Теорема сложения или линейности преобразования:

Изображение суммы оригиналов равно сумме изображений:

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_i F_i(p).$$

Эта теорема используется при доказательстве законов Кирхгофа в операторной форме.

Теорема разложения:

Если можно представить изображение в виде правильной дроби $F(p) = N(p)/M(p)$, в которой числитель и знаменатель не имеют общих корней, то для случая простых корней (т.е. когда уравнение $M(p) = 0$ не имеет кратных и комплексно-сопряжённых корней) выражение для перехода от изображения к оригиналу имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

где $M'(p)$ — производная функции $M(p)$.

Теорема разложения используется для получения оригинала из полученного в результате расчёта изображения вместо приведённого выше выражения для обратного преобразования Лапласа. Применение этой теоремы будет подробно рассмотрено позже.

6.4.4. Изображение по Лапласу некоторых функций

В качестве примера рассмотрим получение изображения единичной функции $1(t)$ (в электрической цепи она может соответствовать, например, включению постоянной ЭДС равной 1 В):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Изображение этой функции найдём с помощью прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = - \left. \frac{e^{-pt}}{p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

или

$$1(t) \doteq \frac{1}{p}.$$

Изображения наиболее распространённых в электротехнике функций приведены в таблице 6.1.

6.4.5. Операторные схемы замещения элементов электрической цепи

При расчёте электрической цепи операторным методом, необходимо представить имеющиеся элементы их операторными схемами замещения, в которых величины, характеризующие элемент, являются изображениями соответствующих величин в исходной схеме.

Резистивный элемент

Изображение напряжения:

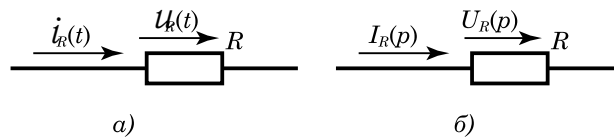
$$u_R(t) = Ri_R(t) \qquad u_R(t) \doteq RI(p)$$

Изображение тока:

Таблица 6.1. Изображения и оригиналы по Лапласу некоторых функций

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
3	A	$\frac{A}{p}$	9	$\cos \omega t + \psi$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
4	$Ae^{\alpha t}$	$\frac{A}{p - \alpha}$	10	$\sin \omega t + \psi$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
5	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$	11	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
6	$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$	13	$\frac{1}{a^2} [1 - e^{-at}(1 - at)]$	$\frac{1}{p(p + a)^2}$

$$i_R(t) = Gu_R(t) \quad i_R(t) \doteq GU(p)$$

**Рис. 6.8.** Операторная схема замещения резистивного элемента
а — резистивный элемент; б — операторная схема замещения

Индуктивный элемент

Изображение напряжения (по теореме дифференцирования):

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad u_L(t) \doteq U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0_+)$$

Изображение тока (по теореме интегрирования):

$$i(t) = i_L(0_+) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt \quad i_L(t) \doteq I_L(p) = \frac{i_L(0_+)}{p} + \frac{U_L(p)}{pL}$$

Емкостной элемент

Изображение напряжения (по теореме интегрирования):

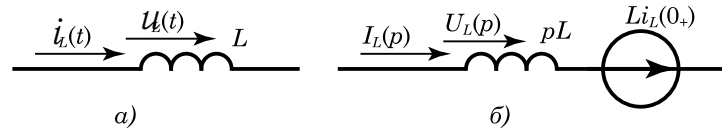


Рис. 6.9. Операторная схема замещения индуктивного элемента
 а — индуктивный элемент; б — операторная схема замещения

$$u_C(t) = u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt \quad u_C(t) \doteq U_C(p) = \frac{u_C(0_+)}{p} + \frac{I_C(p)}{pC}$$

Изображение тока (по теореме дифференцирования):

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \quad i_C(t) \doteq I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0_+)$$

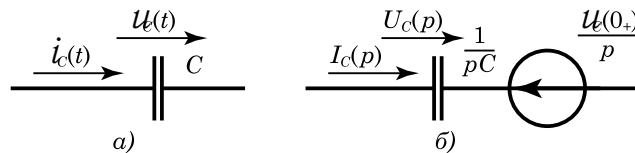


Рис. 6.10. Операторная схема замещения емкостного элемента
 а — емкостной элемент; б — операторная схема замещения

6.4.6. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

Токи и напряжения в законах Кирхгофа и Ома являются функциями времени, поэтому применив к ним преобразование Лапласа и теорему сложения мы получим эти законы в операторной форме:

Первый закон Кирхгофа:

$$\sum I(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа:

$$\sum U(p) = \sum E(p).$$

Закон Ома:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$ — операторное сопротивление.

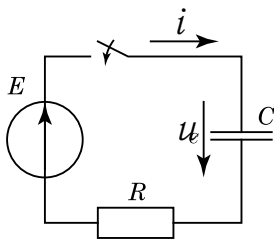


Рис. 6.11. Подключение RC цепи к источнику постоянной ЭДС

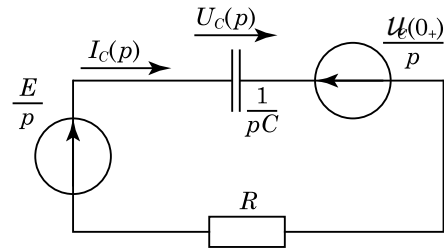


Рис. 6.12. Операторная схема замещения RC цепи после коммутации

6.4.7. Расчёт переходных процессов операторным методом

6.4.7.1. Порядок расчёта

Расчет переходных процессов операторным методом состоит из пяти этапов:

1. Определить начальные условия

Выполняется также как и в классическом методе и заключается в определении токов в индуктивных элементах и напряжения на емкостных в момент коммутации (т. е. при $t = 0$).

2. Составить операторную схему замещения для цепи после коммутации

На этом этапе элементы рассчитываемой схемы замещения заменяются их операторными схемами замещения по правилам, изложенным в § 6.4.5, а токи и напряжения источников — их операторными изображениями (например с помощью таблицы 6.1 на стр. 138).

3. Рассчитать операторные токи и напряжения в цепи

Для полученной в предыдущем пункте операторной схемы замещения необходимо рассчитать любым известным методом расчёта электрических цепей искомые операторные токи и напряжения.

4. Определить оригиналы искомых токов и напряжений

Оригиналы токов и напряжений определяются по имеющимся таблицам (например таблица 6.1 на стр. 138) и с использованием теоремы разложения.

6.4.7.2. Подключение RC цепи к источнику постоянной ЭДС

Для сравнения операторного и классического метода расчёта переходных процессов, рассмотрим переходной процесс, возникающий при отключении RC цепи от источника постоянной ЭДС (рис. 6.11). Расчёт классическим методом приведён в § 6.3.3 на странице 127.

Расчёт проведём в соответствии с § 6.4.7.1.

Определение начальных условий

Рассмотрим переходной процесс, возникающий при подключении цепи, содержащей резистивный и емкостной элементы, с сопротивлением R и ёмкостью C к источнику постоянной ЭДС E (рис. 6.4).

При анализе будем считать, что перед подключением емкостной элемент был полностью разряжен (т. е. $u_C(0_-) = 0$).

Таким образом, начальные условия определяются в соответствии со вторым законом коммутации ($u_C(0_-) = u_C(0_+)$) и будут иметь следующий вид:

$$u_C(0_-) = 0.$$

Составить операторную схему замещения цепи после коммутации

Операторная схема замещения составляется в соответствии с правилами, изложенными § 6.4.5 и приведена на рис. 6.12.

Найдем искомые ток и напряжение

По закону Ома в операторной форме (с учётом нулевых начальных условий — $u_C(0_+)/p = 0$):

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{E/p}{R + 1/pC} = \frac{E}{p(R + 1/pC)} = \\ &= \frac{E}{pR + 1/C} = \frac{E/R}{p + 1/RC} \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$A = \frac{E}{R}, \quad -\alpha = \frac{1}{RC}.$$

Тогда полученное выше выражение для тока примет вид:

$$I(p) = \frac{E/R}{p + 1/RC} = \frac{A}{p - \alpha}.$$

По таблице 6.1 на стр. 138 найдём оригинал полученного тока:

$$i(t) = Ae^{\alpha t} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Рассчитаем по закону Ома напряжение на емкостном элементе:

$$\begin{aligned}
 U_C(p) &= \frac{1}{pC} \cdot I(p) = \frac{1}{pC} \cdot \frac{E}{pR + 1/C} = \frac{E}{pC(Rp + 1/C)} = \\
 &= \frac{E}{RCp^2 + p} = \frac{E}{RCp \left(p + \frac{p}{RCp} \right)} = \frac{E}{RCp(p + 1/RC)} = \\
 &= \frac{E \cdot 1/RC}{p(p + 1/RC)} = \frac{E\alpha}{p(p + \alpha)}
 \end{aligned}$$

где $\alpha = 1/RC$.

Найдём оригинал полученного изображения (пункт 5 таблицы 6.1):

$$u_C(t) = E(1 - e^{t\alpha}) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Сопоставив вычисленные операторным методом ток и напряжение с ранее проведённым расчётом классическим методом (см. § 6.3.3 на стр. 127), мы увидим полную идентичность полученных результатов.

Лекция 7

Трансформаторы

7.1. Общие сведения

Трансформатор — это статическое (т. е. без движущихся частей) электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно связанных обмоток и предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции одной или нескольких систем (фаз) переменного тока в одну или несколько других систем переменного тока (ГОСТ 16110 — 82, термин 1.1).

Важной особенностью трансформатора является то, что в результате преобразования форма и частота тока не изменяются.

Пример:

В современных энергосистемах генераторы на электростанциях вырабатывают электрическую энергию напряжением до 24 кВ, что при мощности, например, в 1 МВт даст силу тока (без учёта реактивной составляющей) $I = P/U = 1 \cdot 10^6 / 24 \cdot 10^3 = 41 \text{ А}$, что потребует медный провод сечением 4 мм², а при увеличении напряжения в два раза (до 48 кВ), сила тока уменьшится до 21 А, а необходимое сечение провода до 1,5 мм². Таким образом мы получаем серьёзный экономический эффект за счёт экономии материала провода, кроме того, провода с меньшим сечением имеют меньшее сопротивление, что ведёт к уменьшению потерь электрической энергии.

Трансформаторы являются одними из самых экономичных устройств в технике — КПД мощных трансформаторов достигает 99 %.

Историческая справка Первый трансформатор разработал русский учёный-электротехник Павел Николаевич Яблочков (1847 — 1894 гг.) в 1878 г. Основой конструкции стала «индукционная катушка Румкорфа», которую разработал немецкий механик Генрих Румкорф (1803 — 1377 гг.), представлявшая собой изолированный железный сердечник с двумя изолированными обмотками, одна из которых подключалась к батарее гальванических элементов. Подобные устройства получили широко распространение в 30 — 40 гг. XIX века и использовались для получения искрового разряда во вторичной обмотке, возникающего при отключении первичной от батареи¹. Заслуга Павла Николаевича состоит в том, что он первым использовал подобную конструкцию для преобразования уровней напряжения и дробления электрической энергии между разными потребителями, применяя несколько вторичных обмоток. Следующим важным этапом было создание венгерскими инженерами Миколошем Дери (1854 — 1934 гг.), Отто Бла-

¹Разряд обусловлен переходными процессами, протекающими при отключении индуктивного элемента от источника.

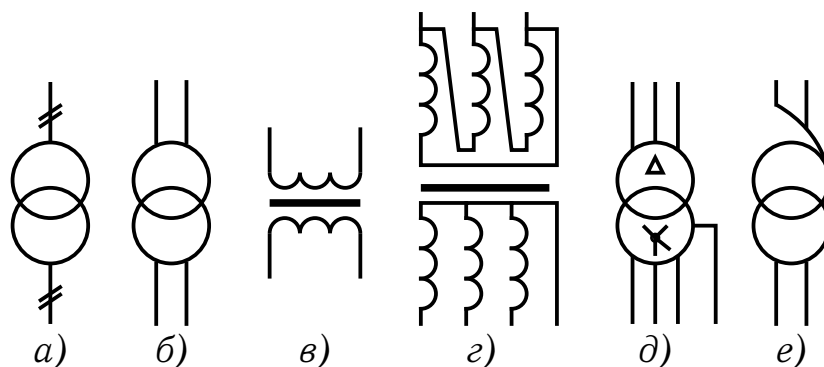


Рис. 7.1. Условные графические обозначения трансформаторов
 а, б — однофазный трансформатор, упрощённый одно- и многолинейный способы соответственно (форма I);
 в — однофазный трансформатор развёрнутый способ (форма II);
 г — трёхфазный трансформатор, одна обмотка которого соединена по схеме «звезда с нейтральным проводом», а другая — «треугольник» (форма II);
 д — двухфазный трансформатор (форма I)

ти (1860 — 1938 гг.) и Кароем Циперновским (1853 — 1942 гг.) в 1985 г. однофазного трансформатора с замкнутым магнитопроводом. Последним принципиальным шагом в развитии трансформаторов было создание Михаилом Осиповичем Доливо-Добровольским (1862 — 1912 гг.) в 1889 г. трёхфазного трансформатора, являющегося основой современных энергосистем.

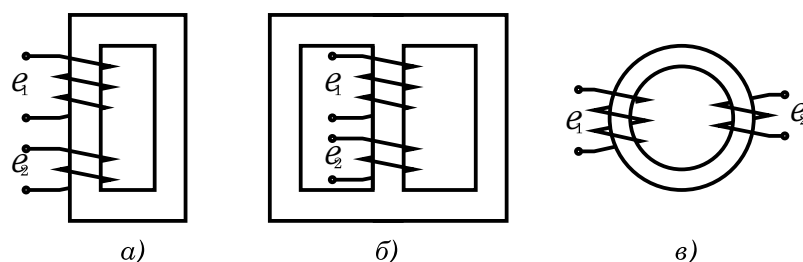
Условное графическое обозначение трансформаторов регламентируется ГОСТ 2.723 — 68. «Единая система конструкторской документации. Обозначения условные графические в схемах. Катушки индуктивности, дроссели, трансформаторы, автотрансформаторы и магнитные усилители» и приведено на рис. 7.1.

В ГОСТ 2.723 — 68 определены три способа обозначений трансформаторов: упрощённые одно- и многолинейные (форма I) и развёрнутая (форма II). Упрощённые обозначения используются в схемах систем энергоснабжения, развёрнутое — при анализе электрических цепей и в электронике.

7.2. Устройство и принцип действия трансформатора

Устройство и принцип действия трансформаторов рассмотрим на примере однофазного трансформатора (принцип действия многофазных и других видов трансформаторов аналогичен).

Однофазный трансформатор (далее трансформатор) (рис. 7.2) состоит из замкнутого магнитопровода, на котором расположены и вторичная обмотки. Первичная обмотка подключается к источнику, а вторична — к нагрузке.

**Рис. 7.2.** Трансформатор

a — стержневой, b — броневой и $в$ — тороидальный магнитопроводы,
 e_1, e_2 — ЭДС первичной и вторичной обмоток

В зависимости от формы магнитопровода трансформаторы делятся **стержневые** (рис. 7.2, a), **броневые** (рис. 7.2, b) и **тороидальные** (рис. 7.2, $в$).

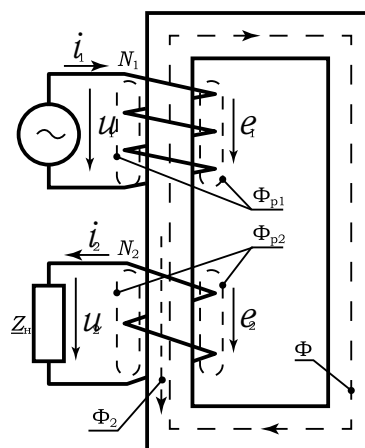
При подключении трансформатора (рис. 7.3) к источнику электрической энергии с переменным напряжением u_1 в первичной обмотке, содержащей N_1 витков, начинает протекать переменный ток i_1 .

Ток i_1 создаёт магнитодвижущую силу (МДС) $N_1 i_1$, в результате чего возникает переменный магнитный поток Φ (замыкается через магнитопровод) и магнитный поток рассеяния Φ_{p1} (замыкается вне магнитопровода). По закону электромагнитной индукции магнитный поток Φ наводит ЭДС в первичной (e_1) и вторичной (e_2) обмотках.

Если ко вторичной обмотке подключена нагрузка, то в ней будет протекать ток i_2 , который, в свою очередь, будет создавать МДС $N_2 i_2$, которая создаёт вне магнитопровода магнитный поток рассеяния Φ_{p2} , а в самом магнитопроводе — магнитный поток Φ_2 , который, согласно правилу Ленца², будет направлен против магнитного потока Φ и будет его подавлять.

Аналогично, по правилу Ленца, ток i_1 в первичной обмотке будет препятствовать изменению магнитного потока Φ , что приведёт к росту i_1 и, соответственно, росту потребляемой от источника мощности.

Направление ЭДС в обмотках будет определяться направлением их намотки, а направление токов — правилом Ленца.

**Рис. 7.3.** Принцип действия трансформатора

²Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток.

7.3. Коэффициент трансформации

Коэффициентом трансформации называется отношение ЭДС первичной обмотки к ЭДС вторичной:

$$\frac{e_1}{e_2} = n.$$

Примечание: К сожалению в настоящее время нет общего и однозначного определения коэффициента трансформации. Международный электротехнический словарь (IEC 60050, термин 321-01-18) определяет коэффициент трансформации трансформатора напряжения как отношение напряжения на первичной обмотки к напряжению на вторичной. В ГОСТ 16110 — 82 (термин 9.1.7) коэффициент трансформации определяется как отношение напряжения на зажимах двух обмоток в режиме холостого хода, при этом в примечании отмечается что надо рассматривать отношение **Высшего напряжения** (ВН) трансформатора к **Низшему** (НН) (соответственно наибольшее и наименьшее из номинальных напряжений трансформатора). В этом случае коэффициент трансформации будет всегда больше единицы, а тип трансформатора — повышающий или понижающий, определяться из контекста.

Мы будем использовать определение коэффициента трансформации в виде отношения ЭДС первичной обмотки к ЭДС вторичной обмотки, как наиболее удобное в методическом плане (в ряде учебников, например, используется обратное соотношение).

Величина ЭДС в обмотках определяется по закону электромагнитной индукции ($e = -Nd\Phi/dt$), следовательно

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{-N_1 \frac{d\Phi}{dt}}{-N_2 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} = n,$$

а для случая идеального трансформатора (когда активным сопротивлением обмоток можно пренебречь и, следовательно, $u = e$):

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n.$$

В комплексной форме записи равенство примет вид:

$$\frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = n.$$

Расчёт коэффициента трансформации как отношение напряжений на первичной и вторичной обмотках широко применяется в практических расчётах и благодаря высокому КПД трансформатора (т.е. малым потерям,

благодаря чему ЭДС и напряжение на обмотке различаются менее чем на 10%) в большинстве случаев обеспечивает допустимую точность.

В зависимости от соотношении количества витков в первичной и вторичной обмотках различают три вида трансформаторов: **понижающие** ($N_1 > N_2$), **разделительные**³ ($N_1 = N_2$) и **повышающие** ($N_1 < N_2$).

Для идеального трансформатора ($KПД = 1$, $\underline{S}_1 = \underline{S}_2$) можно записать:

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_2 \Rightarrow \underline{U}_1 \underline{I}_1 = \underline{U}_2 \underline{I}_2,$$

откуда:

$$n = \frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

Из полученного соотношения видно, что ток и напряжение в обмотках трансформатора связаны *обратным* соотношением, т. е. трансформатор, *повышающий* по напряжению, является *понижающим* по току и наоборот — трансформатор *повышающий* по току, будет понижающим по *напряжению*.

Отношение комплексных сопротивлений первичной и вторичной обмоток равно квадрату коэффициента трансформации (напомним, $n = \underline{U}_1/\underline{U}_2 = \underline{I}_2/\underline{I}_1$):

$$n = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{I}_2 \underline{Z}_2} \Rightarrow \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{I}_2 \underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = n \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = n^2}$$

7.4. Схема замещения трансформатора

7.4.1. Уравнение электрического состояния трансформатора

Уравнениями электрического состояния трансформатора являются выражениями по второму закону Кирхгофа, составленные для первичной и вторичной обмоток. Для того чтобы их составить, необходимо электромагнитные процессы, происходящие в обмотках, представить в виде электрической схемы замещения.

В качестве расчётной модели выберем т. н. «катушку с железом» (т. е. катушку, намотанную на ферромагнитный сердечник). Электромагнитные процессы в этой модели характеризуются активным сопротивлением обмоток R , потоком рассеяния X и потерями на гистерезис и вихревые токи в магнитопроводе R_m и X_m . Соответствующие схемы замещения для первичной

³Разделительные трансформаторы используются для гальванической развязки цепей, обеспечивая непротекания электрического тока из одной цепи, в другую. Используются для повышения электробезопасности.

и вторичной обмоток приведены на рис. 7.4 (направления токов, напряжений и ЭДС даны в соответствии с рис. 7.3).

Составим выражения по II закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} -\underline{U}_1 + \underline{I}_1(R_1 + jX_1) &= \underline{E}_1 \\ \underline{U}_2 + \underline{I}_2(R_2 + jX_2) &= \underline{E}_2 \end{aligned}$$

где $\underline{E}_1 = \underline{I}_1(R_{m1} + jX_{m1})$, $\underline{E}_2 = \underline{I}_2(R_{m2} + jX_{m2})$.

Полученные выражения являются **уравнениями электрического состояния трансформатора**.

7.4.2. Уравнение магнитного состояния трансформатора

Для вывода уравнения магнитного состояния трансформатора, обратим внимание на то, что магнитный поток в магнитопроводе трансформатора практически не зависит от величины нагрузки и определяется свойствами магнитопровода (см. описание принципа действия трансформатора в § 7.2), и поэтому мы можем записать следующее выражение:

$$\Phi_{\text{ном}} = \Phi_x = \text{const}$$

или

$$\underline{I}_1 N_1 - \underline{I}_2 N_2 = \underline{I}_{1x} N_1$$

Знак тока \underline{I}_1 в первичной обмотке однозначно определяется выбранным условно-положительным направлением ЭДС e_1 . Ток холостого хода \underline{I}_{1x} также является током в первичной обмотке и поэтому совпадает по знаку с током \underline{I}_1 .

Это выражение и является **уравнением магнитного состояния трансформатора** или **уравнением магнитодвижущих сил**.

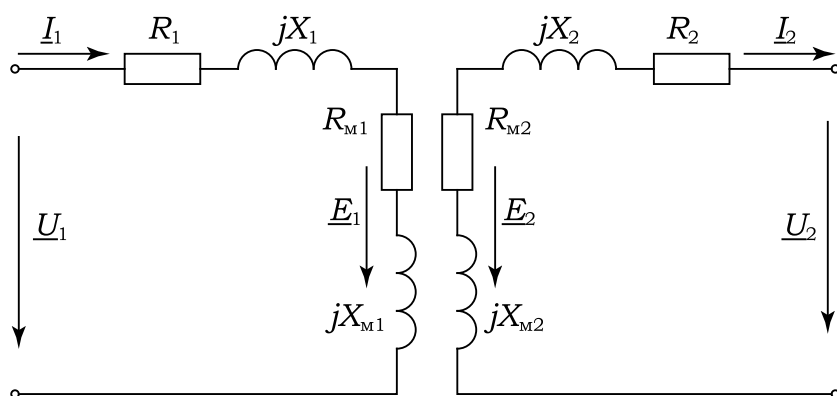


Рис. 7.4. Схемы замещения первичной и вторичной обмоток

7.4.3. Схемы замещения трансформатора

Для исследования режимов работы трансформатора удобно представить магнитную связь между обмотками трансформатора в виде схемы замещения с электрической связью, построенную на основе уравнений электрического и магнитного состояния, в форме с приведёнными вторичными параметрами.

7.4.3.1. Приведённые параметры трансформатора

Чтобы получения схемы замещения трансформатора, нам необходимо связать уравнения электрического состояния между собой. Сделать мы это можем приравняв ЭДС в первичной и вторичной обмоток, которые, согласно определению коэффициента трансформации, различаются между собой в n раз:

$$\frac{\underline{E}_1}{\underline{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} = n, \quad \text{откуда} \quad \underline{E}'_2 = \underline{E}_1 = \underline{E}_2 \frac{N_1}{N_2} = \underline{E}_2 n$$

где \underline{E}'_2 — ЭДС вторичной обмотки, приведённая к числу витков первичной.

Аналогично получим приведённые значения остальных параметров вторичной обмотки:

$$\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2, \quad \underline{I}'_2 = \frac{\underline{I}_2}{n}, \quad R'_2 = n^2 R_2, \quad X'_2 = n^2 X_2.$$

Таким образом приведённое уравнение электрического состояния вторичной обмотки примет вид:

$$\underline{U}'_2 + \underline{I}'_2(R'_2 + jX'_2) = \underline{E}'_2$$

Выразим приведённое уравнение магнитного состояния:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 N_1 &= \underline{I}_{1x} N_1 + \underline{I}_2 N_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_{1x} + \underline{I}_2 \frac{N_2}{N_1} = \underline{I}_{1x} + \underline{I}'_2 \end{aligned}$$

где $\underline{I}'_2 = \underline{I}_2 \frac{N_2}{N_1}$ — вторичный ток, приведённый к первичному.

Уравнения электрического и магнитного состояния, в форме с приведёнными вторичными параметрами, являются основой при построении схем замещения трансформатора.

7.4.3.2. Схемы замещения трансформатора

Заменяв параметры схемы замещения вторичной обмотки (рис. 7.4) на приведённые, мы сможем объединить её со схемой замещения первичной обмотки, в результате чего, получим ***Т-образную схему замещения трансформатора*** (рис. 7.5). Полученная схема наиболее полно отражает протекающие в трансформаторе процессы, однако её параметры сложно определить как с помощью расчётов, так и экспериментально, поэтому она практически не применяется.

Если можно пренебречь полным сопротивлением первичной обмотки и принять $\underline{U}_1 = \underline{E}_1$, то получим ***Г-образную схему замещения*** (рис. 7.6), где $R_k = R_1 + R'_2$ и $X_k = X_1 + X'_2$.

Пренебрегая током холостого хода, (т.е. считая его незначительным по сравнению с токами $\underline{I}_1 = -\underline{I}'_2$), получим ***упрощённую схему замещения трансформатора*** (рис. 7.7). В этом случае сопротивление трансформатора будет равно его сопротивлению в опыте короткого замыкания о котором будет рассказано в § 7.5.2.

7.5. Исследование трансформатора

Для определения эксплуатационных характеристик трансформатора и параметров схемы замещения проводят опыты холостого хода и короткого замыкания, которые регламентируется ГОСТ 3484.1 — 88 для силовых и ГОСТ 22765 — 89 для маломощных трансформаторов.

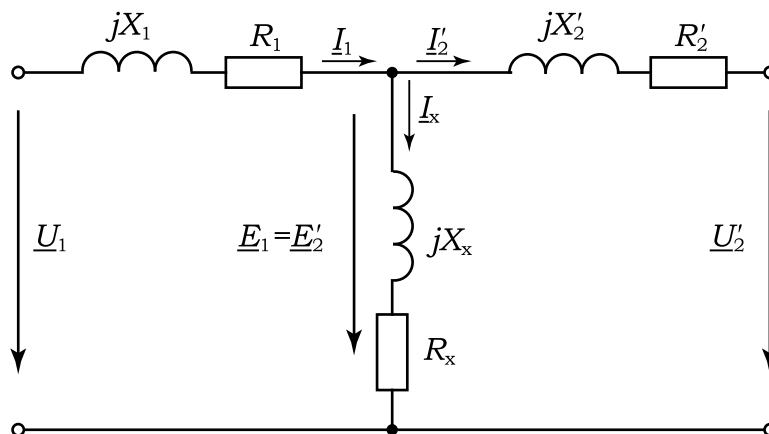


Рис. 7.5. Т-образная схема замещения трансформатора

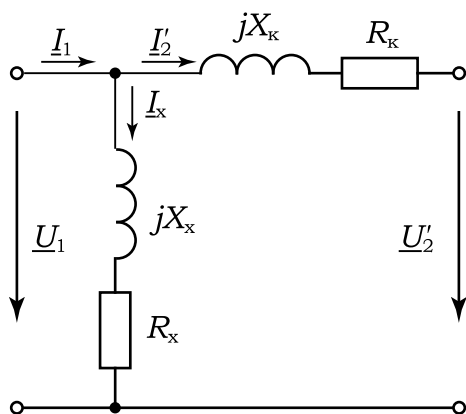


Рис. 7.6. Г-образная схема замещения трансформатора

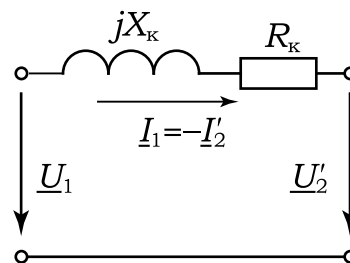


Рис. 7.7. Упрощённая схема замещения трансформатора

7.5.1. Опыт холостого хода

Опыт холостого хода — режим холостого хода трансформатора, осуществляемый при номинальной частоте и различных значениях синусоидального напряжения первичной обмотки с целью опытного определения потерь и тока холостого хода и других параметров и характеристик трансформатора (ГОСТ 16110—82, термин 8.5).

Режим холостого хода трансформатора — режим работы при питании одной из обмоток трансформатора от источника с переменным напряжением и других обмотках, не замкнутых на внешние цепи (ГОСТ 16110—82, термин 8.4).

При проведении опыта холостого хода напряжение на первичной обмотке трансформатора плавно увеличивается до номинального $\underline{U}_{1н}$, а вторичная обмотка разомкнута ($I_{2х} = 0$). Соответствующая электрическая схема приведена на рис. 7.8⁴.

Внешняя характеристика трансформатора в опыте холостого хода $U_{1х}(I_{1х})$ подобна кривой намагничивания магнитопровода. Номинальному напряжению $U_{1н}$, соответствовать максимум характеристики.

Целью проведения опыта является измерение тока в первичной обмотке $I_{1х}$ ⁵, мощности P_x и напряжения холостого хода $U_{2х}$, на основании которых рассчитываются коэффициент трансформации и параметры схемы замещения:

- коэффициент трансформации —

⁴Входное сопротивление вольтметра намного больше выходного сопротивления трансформатора, и его включение во вторичную обмотку не нарушает режим холостого хода.

⁵Обратите внимание — в электрической цепи действуют синусоидальное напряжение u_1 и ток i_1 , которые мы представляем в комплексном виде \underline{U}_1 и \underline{I}_1 , однако вольтметром и амперметром мы измеряем их действующие значения U_1 и I_1 .

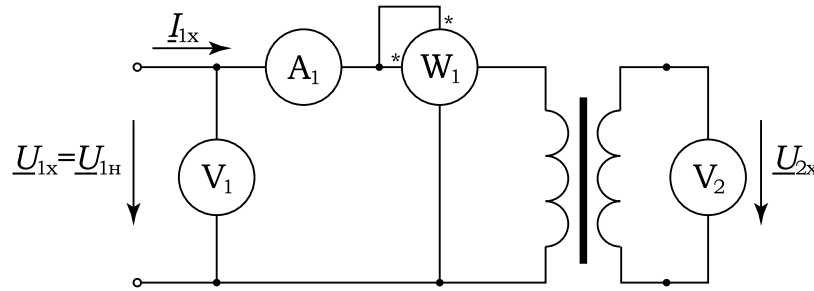


Рис. 7.8. Опыт холостого хода трансформатора

$$n = \frac{U_{1H}}{U_{2x}};$$

- коэффициент мощности —

$$\cos \varphi_x = \frac{P_x}{U_{1H} I_{1x}};$$

- полное сопротивление холостого хода —

$$Z_x = \frac{U_{1H}}{I_{1x}};$$

- активное сопротивление холостого хода —

$$R_x = \frac{P_x}{I_{1x}^2};$$

- реактивное сопротивление холостого хода —

$$X_x = \sqrt{Z_x^2 - R_x^2}.$$

Как было показано в § 7.4.2 величина магнитного потока в магнитопроводе трансформатора не зависит от величины нагрузки, следовательно даже в режиме холостого хода (т.е. при отсутствии нагрузки) в первичной обмотке будет протекать небольшой ток I_{1x} , вызванный затратами энергии на перемагничивание магнитопровода и создающий магнитный поток, соответствующий напряжению U_1 .

В современных трансформаторах величина тока холостого хода составляет около $0,1 I_H$ для трансформаторов малой мощности и $0,02 \dots 0,03 I_H$ для трансформаторов большой мощности (особенности трансформаторов малой мощности будут рассмотрены в § 7.7).

Потребляемая в режиме холостого хода мощность P_x обусловлена затратами энергии на перемагничивание магнитопровода (т.к. ток переменный) и на возникающие в магнитопроводе вихревые токи и характеризует

потери в магнитопроводе (часто употребляется термин «**потери в стали**»). Электрические потери (т. е. потери вызванные активным сопротивлением обмоток) в опыте холостого хода, по причине малой величины $I_{1х}$, незначительны и в расчётах не учитываются.

Для уменьшения затрат энергии на перемагничивание магнитопровод выполняется из магнитомягкого (т. е. с узкой петлёй гистерезиса) материала, а для уменьшения потерь вызванных вихревыми токами магнитопровод изготавливается **шихтованным**, т. е. набираным из тонких (толщиной 0,1...0,35 мм) изолированных пластин электротехнической стали с добавками кремния для уменьшения электропроводности.

7.5.2. Опыт короткого замыкания

Опыт короткого замыкания — режим короткого замыкания, осуществляемый с целью опытного определения потерь напряжения короткого замыкания и др. параметров и характеристик пары обмоток трансформатора при номинальной частоте и пониженном против номинального напряжении на одной из обмоток, при закороченной второй обмотке этой пары и остальных обмотках, не замкнутых на внешние цепи (ГОСТ 16110—82, термин 8.7).

Режим короткого замыкания трансформатора — режим работы трансформатора при питании хотя бы одной из обмоток от источника с переменным напряжением при коротком замыкании на зажимах одной из других обмоток. (ГОСТ 16110—82, термин 8.6).

При проведении опыта короткого замыкания⁶ в цепь вторичной обмотки трансформатора включается амперметр⁷, а на первичную обмотку подаётся такое напряжение $\underline{U}_{1к} \ll \underline{U}_{1н}$, чтобы ток во вторичной обмотке был равен номинальному ($\underline{I}_{2к} = \underline{I}_{2н}$). Соответствующая электрическая схема приведена на рис. 7.9.

Целью проведения опыта является измерение в первичной обмотке напряжения $U_{1к}$, мощности P_k . Токи в первичной $I_{1к} = I_{1н}$ и во вторичной $I_{2к} = I_{2н}$ обмотках должны быть равны номинальным. На основании полученных значений рассчитывают параметры упрощённой схемы замещения (рис. 7.7 на стр. 151) и выражают напряжение $U_{1к}$ в процентах от номинального:

- полное сопротивление —

⁶В опыте короткого замыкания токи и напряжения в обмотках трансформатора не превышают номинальных значений, поэтому его не следует путать с аварийным режимом короткого замыкания. Тем не менее проведение этого опыта требует особой осторожности и внимания.

⁷Входное сопротивление амперметра много меньше выходного сопротивления трансформатора, и его включение во вторичную обмотку обеспечивает режим короткого замыкания.

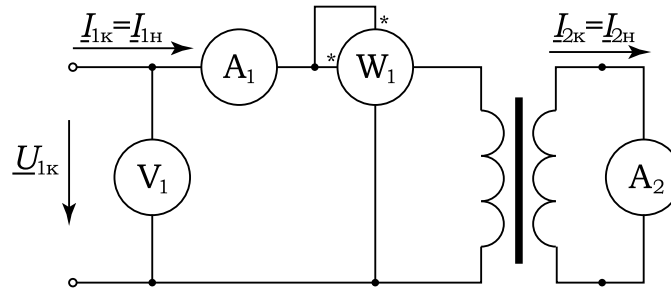


Рис. 7.9. Опыт короткого замыкания трансформатора

$$Z_k = \frac{U_{1к}}{I_{1к}} = \frac{U_{1к}}{I_{1н}};$$

- активное сопротивление —

$$R_k = \frac{P_k}{I_{1к}^2} = \frac{P_k}{I_{1н}^2};$$

- реактивное сопротивление —

$$X_k = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2};$$

- напряжение короткого замыкания
(в процентах от номинального) —

$$U_{к, \%} = \frac{U_{1к}}{U_{1н}} * 100 \%;$$

- активная составляющая напряжения короткого замыкания
(в процентах от номинального) —

$$U_{ка, \%} = \frac{R_k I_{1н}}{U_{1н}} * 100 \%;$$

- реактивная составляющая напряжения короткого замыкания
(в процентах от номинального) —

$$U_{кр, \%} = \frac{X_k I_{1н}}{U_{1н}} * 100 \%.$$

Величины $U_{ка, \%}$ и $U_{кр, \%}$ используются при расчёте внешней характеристики трансформатора (§ 7.6.2).

По закону Ома, ток во вторичной обмотке зависит от напряжения на U_2 , ней и суммы сопротивлений обмотки ($Z_{2обм}$) и нагрузки (Z_H):

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_{2\text{обм}} + Z_{\text{н}}}.$$

В номинальном режиме сопротивление нагрузки значительно превышает сопротивление обмотки, поэтому ток в режиме короткого замыкания (когда $Z_{\text{н}} = 0$), при номинальном напряжении, будет значительно превышать номинальный (для маломощных трансформаторов в 30...40 раз, для остальных в 10...20 раз), что ведёт к разрушению трансформатора. Подобный режим является аварийным режимом короткого замыкания.

При проведении опыта короткого замыкания, для предотвращения аварийного режима, снижается напряжение U_1 , до такого уровня, чтобы ток в обмотках был равен номинальному ($I_{2\text{к}} = I_{2\text{н}}$, $I_{1\text{к}} = I_{1\text{н}}$).

В современных маломощных трансформаторах величина $U_{1\text{к}}$ составляет 3...5% $U_{1\text{н}}$, а в трансформаторах средней и большой мощности 5...10% $U_{1\text{н}}$.

При проведении опыта короткого замыкания падения напряжения в обмотках (а, следовательно, и величина рабочего магнитного потока) значительно меньше номинальных, в то время как токи в обмотках равны номинальным. Поэтому основная часть потребляемой мощности тратится на преодоление активного сопротивления проводов обмоток, в то время как потери на гистерезис и вихревые токи незначительны.

Исходя из выше сказанного, потребляемая в режиме короткого замыкания мощность равна **электрическим потерям** (часто употребляется термин «**потери в меди**») в обмотках трансформатора.

Для уменьшения электрических потерь обмотки трансформаторов выполняются из материалов с высокой электропроводностью — меди или алюминия.

7.6. Работа трансформатора под нагрузкой

7.6.1. КПД трансформатора

Коэффициент полезного действия (КПД) трансформатора равен отношению активной мощности в цепи вторичной обмотки к активной мощности в цепи первичной обмотки:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

Прямой способ определения КПД трансформатора, путём измерения активной мощности в первичной и вторичной обмотках с помощью ваттметров, практически не применяется. Это связано с тем, что КПД трансформаторов может достигать 99%, и величина потерь будет сопоставима с погрешностью ваттметров, поэтому обычно применяется косвенный метод.

Косвенный метод измерения КПД трансформатора основан на том, что в трансформаторе существует два вида потерь — электрические и магнитные, величина которых определяются в опытах холостого хода (§ 7.5.1) и короткого замыкания (§ 7.5.2). Исходя из этого запишем:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + \Delta P_{\text{э}} + \Delta P_{\text{м}}},$$

где $\Delta P_{\text{э}}$ — электрические, а $\Delta P_{\text{м}}$ — магнитные потери трансформатора, равные мощностям в опытах короткого замыкания и холостого хода соответственно ($\Delta P_{\text{э}} = P_{\text{к}}$, $\Delta P_{\text{м}} = P_{\text{х}}$).

При анализе характеристик трансформаторов удобно использовать **коэффициент нагрузки**:

$$\beta = \frac{I_2}{I_{2\text{н}}} = \frac{I_1}{I_{1\text{н}}}.$$

Тогда получим:

$$\Delta P_{\text{э}} = I_1^2 R_{\text{к}} = \beta^2 I_{1\text{н}}^2 R_{\text{к}} = \beta^2 P_{\text{к}}$$

где $P_{\text{к}}$ — мощность, потребляемая от источника при проведении опыта короткого замыкания.

С учётом того, что $\Delta P_{\text{м}} = P_{\text{х}}$ и $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = \beta U_{2\text{н}} I_{2\text{н}} \cos \varphi_2 = \beta P_{2\text{н}}$ получим:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + \Delta P_{\text{э}} + \Delta P_{\text{м}}} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \beta^2 P_{\text{к}} + P_{\text{х}}} = \frac{\beta P_{2\text{н}}}{\beta P_{2\text{н}} + \beta^2 P_{\text{к}} + P_{\text{х}}}.$$

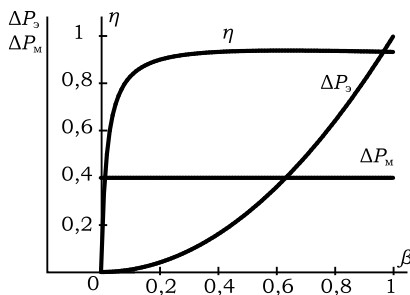


Рис. 7.10. Зависимость КПД и потерь в трансформаторе от нагрузки

Из представленных на рис. 7.10 зависимостей электрических и магнитных потерь и КПД от коэффициента нагрузки, видно, что величина магнитных потерь $\Delta P_{\text{м}}$ в трансформаторе не зависит от нагрузки, что обусловлено постоянством магнитного потока в магнитопроводе трансформатора (см. § 7.4.2), поэтому их называют **постоянными потерями**, а электрические потери $\Delta P_{\text{э}}$ растут при увеличении нагрузки, т. е. являются **переменными потерями**.

КПД на рис. 7.10 растёт достаточно быстро и уже при токе равном $0,2 I_{\text{н}}$ достигает величины $\mu = 0,9$, а своего максимума в точке пересечения кривых электрических и магнитных потерь, т. е. при $\Delta P_{\text{э}} = \Delta P_{\text{м}}$. Подобная зависимость характерна для трансформаторов с малыми потерями (обычно это трансформаторы средней и большой

мощности), у трансформаторов с большими потерями КПД растёт более плавно.

7.6.2. Внешняя характеристика трансформатора

Внешняя характеристика трансформатора — это зависимость вторичного напряжения U_2 от тока во вторичной обмотке I_2 при неизменном напряжении U_1 на первичной обмотке и постоянном коэффициенте мощности $\cos \varphi_2$ вторичной обмотки.

Внешняя характеристика трансформатора рассчитывается по упрощённой схеме замещения (см. рис. 7.7 на стр. 151), для которой уравнение электрического состояния будет иметь следующий вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_2 + \underline{I}'_2(R_k + jX_k)$$

где R_k и X_k — активное и реактивное сопротивления, рассчитанные по результатам опыта короткого замыкания (§ 7.5.2)

Слагаемое

$$\underline{I}'_2(R_k + jX_k) = U_{ка} + jU_{кр} = \Delta \underline{U}$$

равно падению напряжения на внутреннем сопротивлении трансформатора при токе \underline{I}'_2 . Активная и реактивная составляющие напряжения ($U_{ка}$ и $U_{кр}$), рассчитанные по результатам опыта короткого замыкания, который был описан в § 7.5.2.

Обычно это напряжение представляют в тригонометрической форме в процентах к номинальному напряжению

$$\Delta u_{\%} = u_{ка, \%} \cos \varphi_2 + u_{кр, \%} \sin \varphi_2$$

и называют **изменение напряжения**.

Изменение напряжения является паспортной характеристикой трансформатора и одним из основных параметров при его расчёте.

Если необходимо построить внешнюю характеристику трансформатора (т. е. зависимость U_2 от I_2 при неизменном напряжении U_1), то в выражение для изменения напряжения вводится коэффициент нагрузки:

$$\Delta u_{\%} = \beta(u_{ка, \%} \cos \varphi_2 + u_{кр, \%} \sin \varphi_2).$$

Как видно из полученного выражения, внешняя характеристика трансформатора определяется соотношением активной и реактивной составляющих напряжения и характера нагрузки (активная, индуктивная или ёмкостная — определяется разностью фаз между напряжением и током во вторичной обмотке и обозначаемой φ_2).

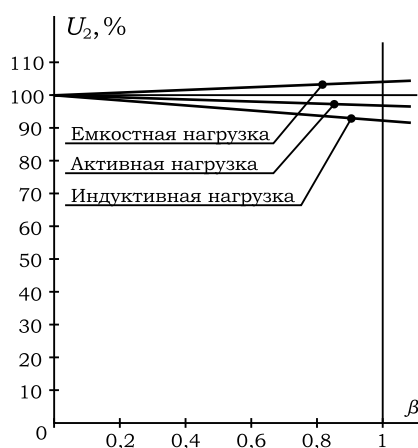


Рис. 7.11. Пример внешней характеристики трансформатора

В мощных трансформаторах (мощностью десятки и более киловольт-ампер) индуктивная составляющая в несколько раз больше активной, в результате чего с ростом φ_2 , изменение напряжения $\Delta u\%$ также будет увеличиваться. Для трансформаторов средней и малой мощности картина будет обратной — с ростом φ_2 , изменение напряжения $\Delta u\%$ будет уменьшаться.

Пример внешней характеристики для мощного трансформатора с малыми потерями приведён на рис. 7.11.

7.7. Особенности трансформаторов малой мощности (микротрансформаторов)

При проектировании трансформаторов малой мощности (в первую очередь для радиоэлектронной аппаратуры), на первое место выходят требования обеспечения необходимой мощности при заданных габаритах и массе, а величина КПД отступает на второй план.

Эти требования достаточно легко решаются увеличением величины магнитного потока в магнитопроводе за счёт роста его индуктивности. Однако увеличение индуктивности ведёт к росту тока холостого хода, который может достигать 30...60% от номинального, и, как следствие, падению КПД до уровня 60...80%.

Подобные процессы наиболее ярко проявляются в трансформаторах мощностью менее 100 вольт-ампер, которые часто называют **микротрансформаторами**.

В микротрансформаторах потоки рассеяния значительно меньше, чем в трансформаторах средней и большой мощности, что приводит к тому, что влияние активной составляющей напряжения больше, чем реактивной, в результате чего активная нагрузка вызывает большее падение напряжения, чем реактивная, т. е. микротрансформаторы имеют более крутую внешнюю характеристику.

7.8. Специальные виды трансформаторов

7.8.1. Автотрансформатор

Автотрансформатор — это трансформатор, две или более обмоток которого гальванически связаны так, что они имеют общую часть (ГОСТ 16110—82, термин 2.25).

Таким образом, обмотка высшего напряжения, является частью обмотки низшего (рис. 7.12).

Важной особенностью автотрансформаторов является наличие не только магнитной связи между обмотками (как в обычных трансформаторах), но и электрической.

Как и в обычном трансформаторе, ток в первичной обмотке автотрансформатора создает в магнитопроводе магнитный поток, который наводит в обмотке ЭДС.

Величина ЭДС пропорциональна количеству витков, поэтому мы можем записать:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} = n.$$

Составим выражение по первому закону Кирхгофа:

$$I_{12} = I_2 - I_1.$$

Ток I_{12} препятствует изменению магнитного потока, создаваемого током I_1 , и поэтому, согласно правилу Ленца, направлен против него.

С учётом коэффициента трансформации:

$$I_{12} = I_2 - \frac{I_2}{n}$$

или

$$I_{12} = I_2 \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Домножим обе части на напряжение во вторичной обмотке:

$$I_{12}U_2 = I_2U_2 \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

и получим выражение для мощностей:

$$\underline{S}_{\text{эм}} = \underline{S}_{\text{э}} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Мощность $\underline{S}_{\text{э}}$ характеризует передачу мощности из первичной обмотки во вторичную через электрическую связь, а $\underline{S}_{\text{эм}}$ — через электромагнитную, кроме того, величина $\underline{S}_{\text{эм}}$ определяет массо-габаритные параметры трансформатора.

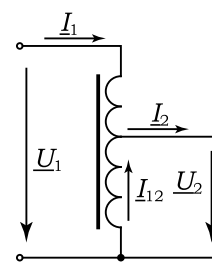


Рис. 7.12. Автотрансформатор

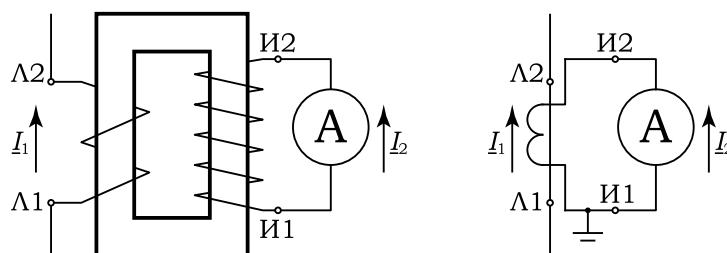


Рис. 7.13. Трансформатор тока

В обычных трансформаторах электрическая связь отсутствует и большая роль электрической связи является преимуществом автотрансформатора, позволяя, за счёт уменьшения доли электромагнитной связи, уменьшить массу трансформатора и увеличить его КПД (уменьшая магнитные потери).

Однако, исходя из последнего выражения, описанные преимущества автотрансформатора возможны лишь при значениях коэффициента трансформации близкому к единице, которое обычно находится в пределах $n = 1 \dots 2,5$.

Недостатком автотрансформатора является электрическая связь между обмотками, делающая возможным попадание высокого напряжения на обмотку низкого напряжения. Также автотрансформаторы характеризуются высокими значениями тока короткого замыкания.

Широкое применение нашли **лабораторные автотрансформаторы регулируемые** (ЛАТР) — маломощные автотрансформаторы, по оголённой части витков которого можно перемещать контакт (обычно в виде угольной щётки), тем самым регулируя количество витков, подключённых к выходу, что обеспечивает плавное регулирование напряжения на выходе от нуля до уровня входного напряжения.

7.8.2. Измерительные трансформаторы

Измерительные трансформаторы используются в электрических сетях переменного тока большой мощности для подключения измерительных приборов, с целью расширения пределов измерения и изоляции измерительных цепей от больших токов и напряжений.

Существуют два основных вида измерительных трансформаторов — трансформаторы тока и трансформаторы напряжения, которые преобразуют измеряемые высокие токи и напряжения и токи в малые, а также токовые клещи, предназначенные для оперативного определения параметров силовых цепей.

7.8.2.1. Трансформатор тока

Первичная обмотка трансформатора тока включается последовательно в разрыв линии, в которой проводятся измерения, а ко вторичной обмотке подключают измерительные приборы (рис. 7.13).

Трансформаторы тока могут быть одновитковыми (первичная обмотка имеет один виток), шинными⁸ (первичной обмоткой служит шина распределительного устройства) и многовитковыми (первичная обмотка имеет более одного витка).

Для подключения ваттметров и счётчиков электрической энергии обозначаются начала и концы первичной (линия — Л1, Л2) и вторичной (измерение — И1, И2) обмоток соответственно (рис. 7.13).

Сопротивление измерительных приборов, подключаемых к трансформатору тока, мало и составляет от долей до единиц ом, поэтому трансформатор тока работает в режиме, близком к короткому замыканию. Увеличение сопротивления цепи вторичной обмотки ведёт к увеличению погрешности измерения. Так же на точность измерений оказывает влияние вносимая обмотками и магнитопроводом трансформатора индуктивная составляющая, создающая разность фаз между токами в первичной и во вторичной обмотках (это важно при измерении мощности).

Особенность эксплуатации трансформаторов тока является то, что при протекании тока в первичной обмотке нельзя размыкать цепь вторичной, т.к. магнитный поток, создаваемый током в первичной обмотке, не будет компенсироваться током вторичной, что ведёт к нагреву магнитопровода и возникновению на выводах вторичной обмотки больших ЭДС, опасных как для оборудования, так и для операторов.

Для обеспечения электробезопасности один из выводов вторичной обмотки и магнитопровод трансформатора тока заземляют.

Разновидностью шинных трансформаторов тока являются токовые клещи, особенность которых состоит в том, что их магнитопровод можно разомкнуть. Для проведения измерений магнитопровод токовых клещей размыкается, в его середину вводится один из проводов линии (который будет выступать в роли первичной обмотки), после чего магнитопровод замыкают и проводят измерения. Токовые клещи имеют бóльшую погрешность, чем трансформаторы тока.

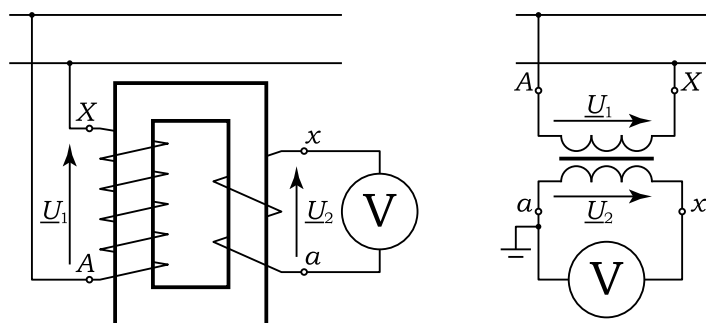


Рис. 7.14. Трансформатор напряжения

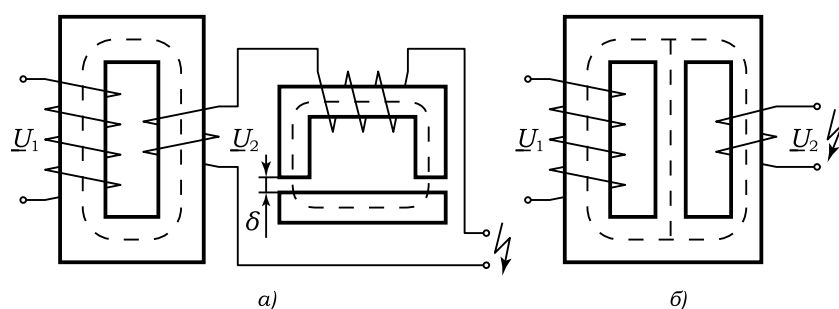


Рис. 7.15. Сварочный трансформатор

7.8.2.2. Трансформатор напряжения

Первичная обмотка трансформатора напряжения включается параллельно в линию, в которой проводятся измерения, а ко вторичной обмотке подключают измерительные приборы (рис. 7.14).

Для подключения ваттметров и счётчиков электрической энергии обозначаются начала и концы первичной (A , X) и вторичной (a , x) обмоток соответственно (рис. 7.13).

Сопротивление измерительных приборов, подключаемых к трансформатору напряжения, высоко и составляет от тысячи ом, поэтому трансформатор напряжения работает в режиме, близком к холостому ходу. Несмотря на большое сопротивление в цепи вторичной обмотки, в не протекают токи, создающие падение напряжения, что обуславливает погрешность измерения. Кроме того, на точность измерения оказывает влияние вносимая обмотками и магнитопроводом трансформатора индуктивная составляющая, создающая разность фаз между напряжениями в первичной и во вторичной обмотках (важно при измерении мощности).

7.8.3. Сварочный трансформатор

Сварочные трансформаторы применяются для контактной и дуговой электросварки. Их основной особенностью является то, что режим короткого замыкания для контактной электросварки является штатным, а для дуговой часто возникающим.

Ограничение тока короткого замыкания достигается за счёт увеличения индуктивной составляющей сопротивления, для чего разносят первичную и вторичную обмотки на магнитопроводе, вводят катушку с регулируемым зазором в магнитопроводе, изменяя величину которого можно управлять током (рис. 7.15, а), или шунтируя магнитный поток (рис. 7.15, б).

Сварочные трансформаторы имеют крутую внешнюю характеристику, которая с уровня напряжения холостого хода (составляющего от единиц до ста вольт, для дуговой электросварки — 60...70 В) резко падает до нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миленина, С.А. Электротехника, электроника и схемотехника: Учебник и практикум для академического бакалавриата / С.А. Миленина, Н.К. Миленин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 399 с.
2. Гальперин, М. В. Электротехника и электроника / М.В. Гальперин. - М.: Форум, Инфра-М, 2016. - 480 с.
3. Прошин, В. М. Сборник задач по электротехнике. Учебное пособие / В.М. Прошин, Г.В. Ярочкина. - М.: Academia, 2015. - 128 с.

⁸ **Шина** — это неизолированный проводник, используемый в качестве силовоточного токопровода.