

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. СТЕРЛЯДКИН, К.В. КУЛИКОВСКИЙ, М.А. КОНОНОВ

**ФИЗИКА. ЧАСТЬ II
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

Конспект лекций

Москва- 2019

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	5
1.1 Атомистичность заряда. Электростатическое поле. Закон сохранения заряда	5
1.2. Вектор напряжённости электрического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции.....	6
1.3. Поток вектора напряженности.....	8
1.4. Теорема Остроградского - Гаусса для электростатического поля в вакууме	10
1.5. Работа сил электростатического поля.....	11
1.6. Потенциал поля точечного заряда. Потенциал, создаваемый системой зарядов ...	12
1.7. Разность потенциалов	13
1.8. Напряжённость электростатического поля как градиент потенциала	14
1.9. Циркуляция вектора напряжённости	15
1.10. Эквипотенциальные поверхности	16
1.11 Электрический диполь.....	16
2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ.....	17
2.1. Типы диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Диполь. Полярные и неполярные диэлектрики.....	17
2.2 Вектор поляризации. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды	18
2.3 Теорема Остроградского – Гаусса для поля в диэлектрике. Связь векторов смещения, напряжённости и поляризации	21
2.4 Сегнетоэлектрики.....	22
3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	23
3.1 Распределение зарядов в проводнике. Поле внутри проводника и у его поверхности	23
3.2 Электроёмкость	25
3.4 Постоянный электрический ток и его характеристики	27
3.5 Закон Ома для однородного участка цепи.....	28
3.6 Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС).....	28
3.7 Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	29
3.8 Закон Ома для полной цепи, (замкнутой).....	30
3.9 Закон Джоуля - Ленца.....	30
3.10 Закон Ома и Джоуля - Ленца в дифференциальной форме	31
3.11 Правила Кирхгофа.....	31

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	32
4.1 Закон Био-Савара-Лапласа	32
4.2 Магнитное поле, создаваемое бесконечным прямым током	35
4.3 Поле в центре кругового тока	35
4.4 Поле на оси кругового тока.....	36
4.5. Теорема о циркуляции для магнитного поля	36
4.6 Относительный характер электрической и магнитной составляющей электромагнитного поля.....	38
4.7 Закон Ампера.....	39
4.8 Взаимодействие параллельных проводников с током.....	39
4.9 Действие магнитного поля на рамку или колечко с током	40
4.10 Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля.....	41
4.11 Работа по перемещению проводника или рамки с током в магнитном поле.....	42
4.12 Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле	43
5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ, МАГНЕТИКИ	44
5.1 Магнитные моменты атомов	44
5.2 Намагниченность. Микро- и Макро- токи	45
5.3. Типы магнетиков: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики	46
5.4. Напряженность магнитного поля. Закон полного тока (циркуляция вектора напряженности) для магнитного поля в веществе. Магнитная восприимчивость вещества. Магнитная проницаемость среды.....	46
5.5 Явление электромагнитной индукции. Законы Фарадея и Ленца.....	47
5.6 Самоиндукция. Индуктивность. Токи замыкания и размыкания.....	48
5.7 Взаимная индукция. Взаимная индуктивность	50
5.8 Энергия магнитного поля	50
6. КОЛЕБАНИЯ.....	51
6.1 Единый подход к колебаниям различной физической природы	51
6.2. Гармонические колебания	52
6.5 Электрический колебательный контур	56
7. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	57
7.1. Свободные затухающие колебания. Логарифмический декремент и добротность	57
7.2 Вынужденные колебания. Резонанс	58
7.3. Волны. Образование волн в среде	60
7.4 Продольные и поперечные волны	62

7.5 Волновое уравнение. Фазовая и групповая скорости распространения волн	62
8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.....	64
8.1 Дифференциальное уравнение электромагнитной волны в вакууме.....	64
8.2 Энергия электромагнитных волн. Интенсивность электромагнитных волн.....	65
8.3 Фазовая и групповая скорость электромагнитной волны	66
Приложение 1. Доказательство теоремы Остроградского-Гаусса	70
Приложение 2. Применение теоремы Остроградского – Гаусса к расчёту полей.	70
Приложение 3. Диполь. Напряженность и потенциал поля диполя	75
Приложение 4. Сверхпроводимость. Электрический ток в газах. Несамостоятельный и самостоятельный разряды. Газоразрядная плазма. Работа выхода электронов из металла. Термoeлектронная эмиссия.....	76
Приложение 5. Типы магнетиков: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики	78
Приложение 6. Некоторые дифференциальные соотношения.....	81
Приложение 7. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля	83
Приложение 8. Гармонические колебания	86
П8.1 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих одинаковую частоту	87
П 8.2. Гармонические осцилляторы. Математический маятник	88
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	91

ВВЕДЕНИЕ

Тему «Электричество и магнетизм» можно разделить на 3 раздела:

1. Электростатика – изучает неподвижные заряды и связанные с ними электрические поля.

2. Постоянный ток и магнетизм – изучает равномерно движущиеся заряды и созданные ими магнитные поля.

3. Электродинамика – изучает неравномерно движущиеся заряды и создаваемые при этом переменные электромагнитные поля.

Целесообразно в самом начале курса остановиться на основных свойствах электрических и магнитных полей. В частности, важно знать, чем создаются поля и на что они действуют.

Электрическое поле создаётся зарядами (как неподвижными, так и движущимися), и действует электрическое поле на заряды.

Магнитное поле создаётся движущимися зарядами (или токами) и действует на движущиеся заряды или токи.

Интересные свойства имеются у **переменных полей**:

Изменение электрического поля приводит к возникновению магнитного поля, и наоборот, изменение магнитного поля приводит к появлению электрического поля. В результате возникают электромагнитные волны.

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.1 Атомистичность заряда. Электростатическое поле. Закон сохранения заряда

Известно, что в природе существует два вида зарядов: положительные и отрицательные. Заряды одинакового знака отталкиваются, разных знаков – притягиваются. В 1785г. Француз Огюст **Кулон** сформулировал закон:

Сила взаимодействия между точечными и неподвижными зарядами прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Закон Кулона в вакууме:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}, \quad (1.1)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2$ – константа, которая называется **электрической постоянной**.

По третьему закону Ньютона силы взаимодействия $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ всегда равны по величине и направлены противоположно вдоль линии соединяющей эти заряды (см. рис. 1.1).

Заряды взаимодействуют за счет посредника – **электрического поля**.

Поле – это материальный носитель взаимодействия между телами (зарядами).

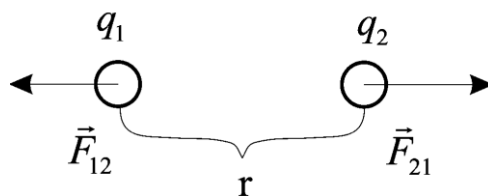


Рисунок 1.1 – Взаимодействие двух зарядов

Есть общий закон Природы: чем поле создается, на то оно и действует. **Электростатическое поле создается зарядами и действует на заряды.** Такое же правило справедливо и для всех остальных полей.

Существует элементарный заряд, разделить который далее уже невозможно.

Любой произвольный заряд состоит из целого числа элементарных зарядов. Это свойство называют **квантованием** зарядов. Величина **элементарного** заряда равна заряду **протона** $e=1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. У **электрона** также заряд e , но только знак отрицателен.

Опыт доказывает существование **Закона сохранения заряда**: суммарный электрический заряд изолированной системы тел не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

1.2. Вектор напряжённости электрического поля. Силовые линии.

Принцип суперпозиции

Зададим себе важный вопрос. Как обнаружить есть или нет электрическое поле в некоторой точке **A**, а если поле обнаружим, то как его характеризовать?

Поскольку мы уже знаем, что электрическое поле действует на заряд, то нам следует поместить в точку **A** любой пробный заряд $q_{пр}$. Если на заряд подействовала **сила F**, то электрическое поле в точке **A** есть.

Казалось бы, поле в точке **A** можно характеризовать величиной силы **F**, которая действует на этот заряд. Но различные люди могут поместить в точку **A** различные пробные заряды и на них будут действовать разные силы. Однако отношение силы к заряду у всех будет одинаковым. Это отношение и называли напряженностью **E** электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}, \quad (1.2)$$

где \vec{E} – вектор напряженности электрического поля;

$q_{пр}$ – пробный заряд;

\vec{F} – сила, действующая на пробный заряд.

Напряженность электрического поля E в некоторой точке – это вектор, равный отношению силы **F**, действующей на пробный заряд $q_{пр}$, к величине пробного заряда, помещенного в данную точку. (Напомним, что **жирным** шрифтом или стрелкой над переменной мы обозначаем векторы).

Напряженность **E** – силовая характеристика электрического поля. Направление вектора **E** совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Физический смысл напряженности в том, что E численно равна силе, действующей на единичный пробный заряд.

Единица измерения: $[E] = \text{Н/Кл} = \text{В/м}$, (В – вольт, В = Дж/Кл).

Поставим еще один важный вопрос.

А какую напряженность создает точечный заряд Q на расстоянии r ? (см. рис. 1.2) Действуем по той же схеме. В точку на расстоянии r поместим пробный заряд $q_{\text{пр}}$. Получим два точечных заряда Q и $q_{\text{пр}}$, для которых справедлив закон Кулона. В соответствии с определением E силу Кулона F поделим на $q_{\text{пр}}$ и получим модуль напряженности:

$$E = \frac{F}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q \cdot q_{\text{пр}}}{r^2} \frac{1}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.3)$$

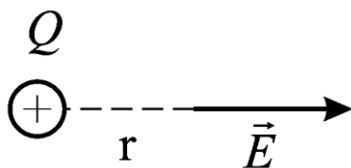


Рисунок 1.2 – Напряженность поля в точке на расстоянии r , создаваемая зарядом Q

Итак, мы получили важную формулу, для **напряженности поля, которое создает точечный заряд**. Напряженность E , созданная положительным зарядом Q направлена по радиусу от заряда на бесконечность, а если заряд будет отрицательным $-Q$, то знак силы в (1.3) и направление вектора E поменяет знак и будет направлено по радиусу к заряду.

Силовыми линиями называются воображаемые кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности электрического поля E .

Условились, что чем больше напряженность поля E , тем гуще изображаются силовые линии. (Силовых линий в природе нет, т.е. их рисуют для наглядности). Силовые линии начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных или на бесконечности. (см. рис. 1.3).

Опыт показал справедливость **принципа суперпозиции**:

Взаимодействие любой пары зарядов не зависит от наличия других зарядов.

Пусть в пространстве есть n зарядов. Найдём напряженность, которую они создают в некоторой точке. Результирующая сила, действующая на пробный заряд, помещенный в данную точку, равна векторной сумме всех сил, созданных каждым зарядом по отдельности:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

В соответствии с определением, результирующая напряженность $E_{\text{рез}}$ в данной точке:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \frac{\vec{F}_{\text{рез}}}{q_{\text{пр}}} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}{q_{\text{пр}}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

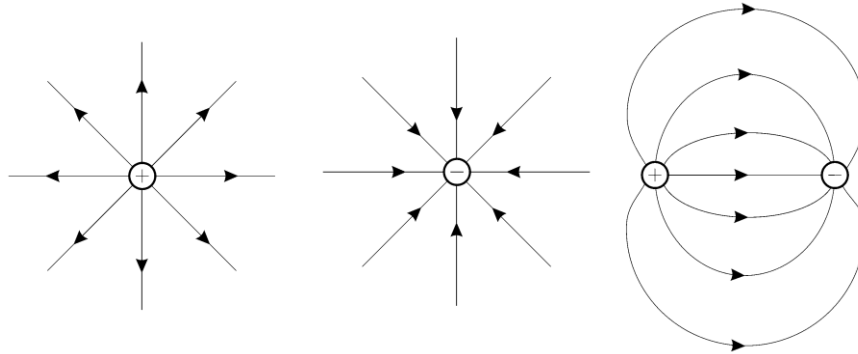


Рисунок 1.3 – Силовые линии электрического поля
а) одиночного положительного заряда; б) отрицательного заряда; в) диполя

Итак, **напряженность электрического поля системы зарядов складывается векторно** из напряженностей, создаваемых отдельными зарядами:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i \quad (1.4)$$

Это является следствием принципа суперпозиции.

Зададим еще один важный вопрос. **А как действует электрическое поле на заряд?** Если дана напряженность поля, **E** то на заряд **q**, в соответствии с определением напряженности, действует сила:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q \quad (1.5)$$

Сила, действующая на заряд, имеет то же направление, что и вектор напряженности **E**, если заряд положителен $q > 0$, (см. рис. 1.4), и сила направлена противоположно вектору **E**, если заряд **q** отрицателен.

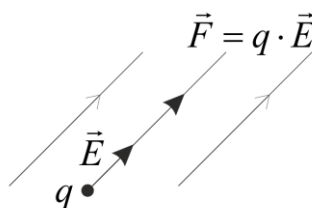


Рисунок 1.4 – Направление вектора напряженности и силы совпадают, если заряд положительный и противоположны, если заряд отрицательный.

1.3. Поток вектора напряженности

Введём понятие вектора площадки **dS**, (см. рис. 1.5). Его величина равна площади **dS**, а направление перпендикулярно к плоскости площадки.

Если ввести единичный вектор **n**, перпендикулярный к площадке, то **dS = n · dS**, (см. рис. 1.5).

Элементарным потоком dΦ_E вектора E через участок поверхности dS называется скалярное произведение:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos\alpha \quad (1.6)$$

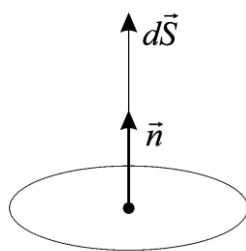


Рисунок 1.5 – Вектор площадки $d\vec{S}$

Физический смысл потока вектора \vec{E} через площадку dS – это число силовых линий, выходящих из данной площадки в направлении вектора $d\vec{S}$, (см. рис. 1.6).

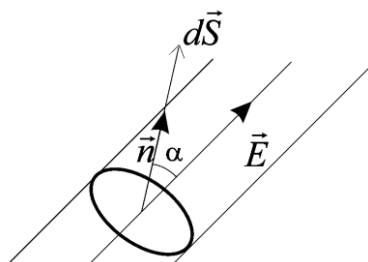


Рисунок 1.6 – Поток вектора \vec{E} через площадку dS

Рассмотрим следующие примеры:

а) Если вектор $d\vec{S} \perp \vec{E}$. (При этом силовые линии скользят параллельно плоскости площадки и не пересекают её), (см. рис. 1.7):

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (1.7)$$

Поток равен нулю.

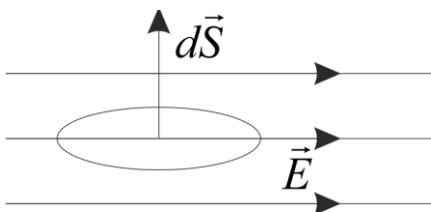


Рисунок 1.7 – Силовые линии \vec{E} параллельны плоскости площадки. Поток $d\Phi_E = 0$

б) Если вектор $d\vec{S} \parallel \vec{E}$. (При этом силовые линии перпендикулярны плоскости площадки, (см. рис. 1.8).

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E \cdot dS \quad (1.8)$$

Поток максимален.

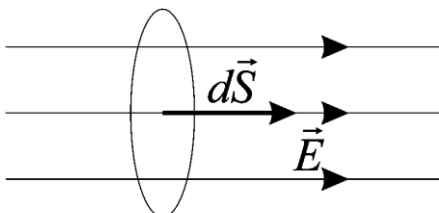


Рисунок 1.8 – Силовые линии \vec{E} перпендикулярны плоскости площадки. Поток максимален

Если поверхность нельзя представить в виде элементарной площадки, тогда полный поток через поверхность S вычисляется в виде интеграла (см. рис. 1.9):

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) \quad (1.9)$$

Физический смысл Φ_E – это число силовых линий, выходящих через поверхность S . Отметим, что если линии вектора \vec{E} на каком-то участке выходят из поверхности в ту же сторону, что и вектор $d\vec{S}$, то поток будет положителен, если же линии вектора \vec{E} входят в площадку, то поток входящих линий будет отрицателен.

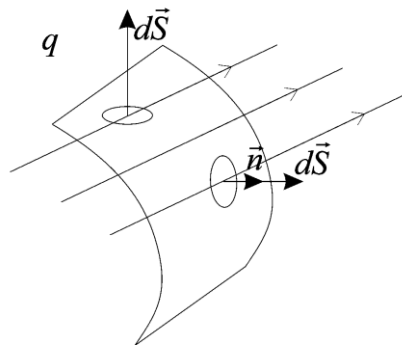


Рисунок 1.9 – Поток вектора \vec{E} через произвольную поверхность

1.4. Теорема Остроградского - Гаусса для электростатического поля в вакууме

Начнём с определения. **Теорема Остроградского – Гаусса:**

В вакууме поток вектора напряженности \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью, деленной на ϵ_0 , (см. рис. 1.10).

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \oint_S E_n \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{\text{внутр. } S} q_i \quad (1.10)$$

(Это теорема Остроградского-Гаусса в вакууме)

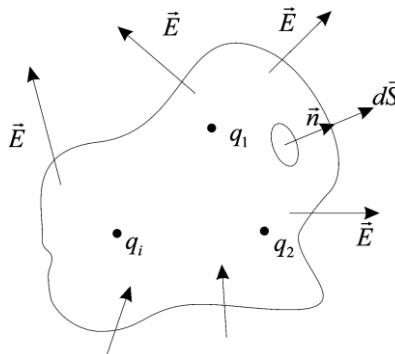


Рисунок 1.10 – Напряженность поля суммы зарядов через замкнутую поверхность

Следует иметь в виду, что обычно единичный вектор нормали \mathbf{n} направляют наружу. В этом случае выходящие из поверхности линии дают поток со знаком («+»), а входящие внутрь линии дают поток со знаком («-»).

Доказательство теоремы Остроградского Гаусса приведено в приложении 1. В приложении 2 рассмотрены примеры использования теоремы для расчета напряженности полей. Приведем полученные соотношения:

1. Напряженность электрического поля **бесконечной заряженной нити** с линейной плотностью заряда τ :

$$E = \frac{\tau}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r},$$

где r – расстояние до нити.

2. Напряженность электрического поля **бесконечной заряженной плоскости** с поверхностной плотностью заряда σ :

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

от расстояния не зависит.

1.5. Работа сил электростатического поля

Работа по перемещению заряда в электростатическом поле не зависит от формы пути, а зависит только от начального и конечного положения заряда (т.е. электростатические силы являются потенциальными или консервативными).

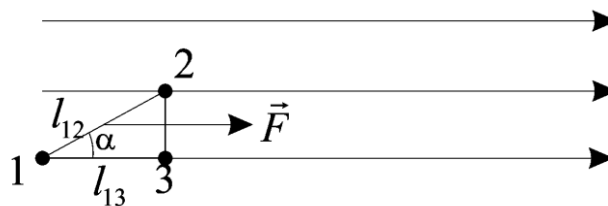


Рисунок 1.11 – Перемещение заряда в электростатическом поле

Рассмотрим перемещение заряда q в однородном электрическом поле напряжённостью E по двум различным траекториям: по участку 1-2 и по участку 1-3-2, (см. рис. 1.11). Покажем, что $A_{12}=A_{132}$. Действительно:

$$A_{12} = (\vec{F} \cdot \vec{l}_{12}) = F \cdot l_{12} \cdot \cos\alpha = q \cdot E \cdot l_{12} \cdot \cos\alpha = q \cdot E \cdot l_{13}$$

$$A_{132} = A_{13} + A_{32} = F \cdot l_{13} \cdot \cos 0^\circ + F \cdot l_{23} \cdot \cos 90^\circ = q \cdot E \cdot l_{13} = A_{12}$$

Можно показать, что при любом перемещении заряда в электрическом поле работа поля не зависит от формы пути. Для этого достаточно разбить траекторию на маленькие прямоугольники, по аналогии с рисунком 1.12. Таким образом, мы показали, что **статическое электрическое поле является консервативным** (потенциальным).

Выражение для **работы электрического поля** при перемещении заряда на любом участке ab имеет вид:

$$A_{ab} = \int_a^b (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = q \cdot \int_a^b (\vec{E} \cdot d\vec{l}) \quad (1.11)$$

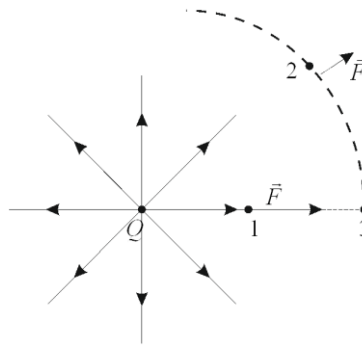


Рисунок 1.12 – Работа силы F на участке 3-2 равна нулю

Поставим задачу. Найдем работу сил электростатического поля по перемещению пробного заряда $q_{\text{пр}}$ в поле точечного заряда Q из точки 1 в точку 2, (см. рис. 1.12). Разобьем траекторию 1-2 на два участка 1-3 и 3-2, так, что точки 3 и 2 находятся на одинаковом расстоянии до заряда Q .

$$A_{12} = A_{13} + A_{32} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = \int_1^3 F \cdot \cos 0^\circ dl + \int_3^2 F \cdot \cos 90^\circ dl = \int_{r_1}^{r_2} F dr$$

Здесь мы учли, что r_3 равно r_2 , а на участке 3-2 сила перпендикулярна перемещению, поэтому и работа A_{32} равна нулю. С учетом закона Кулона, окончательно получаем:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot q_{\text{пр}} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q \cdot q_{\text{пр}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.12)$$

С другой стороны, в потенциальных полях работа поля равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2} \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.12) и (1.13), получим выражение для потенциальной энергии пробного заряда $q_{\text{пр}}$ в поле точечного заряда Q :

$$W_{\Pi} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q \cdot q_{\text{пр}}}{r} + \text{const}$$

Важно! Обычно потенциальную энергию на бесконечности принимают равной нулю $W_{\Pi}(r=\infty)=0$, тогда const в предыдущем уравнении равна нулю.

Итак. Потенциальная энергия пробного заряда в поле точечного заряда Q :

$$W_{\Pi} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q \cdot q_{\text{пр}}}{r}, \quad (1.14)$$

где r – расстояние между зарядами.

1.6. Потенциал поля точечного заряда. Потенциал, создаваемый системой зарядов

По определению **потенциалом электростатического поля ϕ** в заданной точке пространства (см. рис. 1.13) называется энергетическая

характеристика этого поля, равная отношению потенциальной энергии W_{Π} заряда q_{np} помещенного в данную точку к величине заряда q_{np} :

$$\varphi = \frac{W_{\Pi}}{q_{np}} \quad (1.15)$$

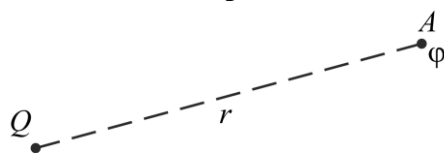


Рисунок 1.13 – Схема определения потенциала электростатического поля в точке A

Физический смысл потенциала в том, что он численно равен потенциальной энергии пробного единичного заряда, помещенного в рассматриваемую точку поля.

Найдём потенциал поля созданный точечным зарядом Q в точке на расстоянии r от него, воспользовавшись уравнением (1.16).

$$\varphi = \frac{W_{\Pi}}{q_{np}} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q \cdot q_{np}}{r \cdot q_{np}} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (1.16)$$

где Q – точечный заряд;

r – расстояние до рассматриваемой точки.

(Это формула для потенциала поля, созданного точечным зарядом)

Потенциал, создаваемый системой зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \quad (1.17)$$

Это свойство следует из принципа суперпозиции. (Потенциал - скаляр, поэтому его рассчитать легче, чем напряженность).

Если в пространстве (x, y, z) задан потенциал $\varphi(x, y, z)$, то потенциальная энергия заряда q в данной точке равна:

$$W_{\Pi} = q \cdot \varphi \quad (1.18)$$

(Это связь потенциальной энергии и потенциала)

1.7. Разность потенциалов

Пусть даны потенциалы φ_1 и φ_2 в двух точках пространства. Чему равна работа A_{12} сил поля по перемещению q_{np} из точки 1 в точку 2, (см. рис. 1.14)?

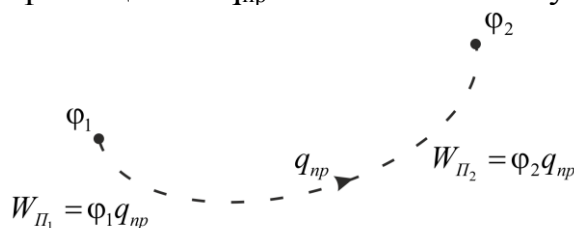


Рисунок 1.14 – Схема к расчету работы силы поля по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2

Работа силы поля A_{12} по перемещению $q_{\text{пр}}$ из точки 1 в точку 2 определяется выражением:

$$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2} = q_{\text{пр}} \cdot \varphi_1 - q_{\text{пр}} \cdot \varphi_2 = -q_{\text{пр}} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1.19)$$

Элементарная работа при малом перемещении: $dA = -q \cdot d\varphi$.

Рассмотрим вопрос. Какую работу совершает поле, если заряд удалить на бесконечность? (см. рис. 1.15).

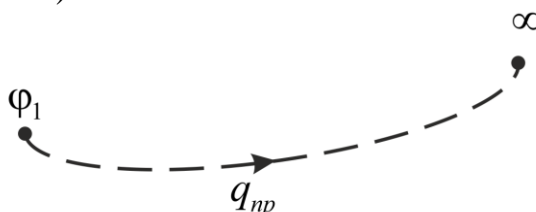


Рисунок 1.15 – Схема к расчету работы силы поля по перемещению пробного заряда в бесконечность

Потенциал на бесконечности принят равным нулю: $\varphi(\infty) = W_{\Pi}(\infty)/q_{\text{пр}} = 0$, поэтому работа по перемещению заряда в бесконечность определяется по формуле:

$$A_{1\infty} = q_{\text{пр}} \cdot (\varphi_1 - \varphi_{\infty}) = q_{\text{пр}} \cdot \varphi_1,$$

если пробный заряд $q_{\text{пр}}=1$, то работа равна $A_{1\infty}=\varphi_1$. Следовательно, потенциал численно равен работе, которую совершает поле при удалении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Работа внешних сил (против сил поля) противоположна по знаку работе сил поля:

$$A_{12}^{\text{внеш}} = -A_{12}^{\text{поля}} = q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Единица измерения потенциала в СИ: $[\varphi] = \text{В (Вольт)} = \text{Дж/Кл}$.

1.8. Напряжённость электростатического поля как градиент потенциала

Найдем работу dA , при условии, что заряд q перемещается в поле напряжённостью \vec{E} вдоль оси x на расстояние dx . (см рис. 1.16):

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{x}) = F \cdot \cos\alpha \cdot dx = E_x \cdot q \cdot dx.$$

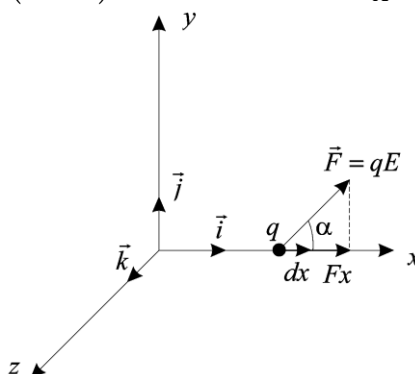


Рисунок 1.16 – Схема к расчету элементарной работы поля

Здесь мы учли, что $F \cdot \cos \alpha = F_x = q dx$ является проекцией силы на ось x . С другой стороны: $dA = -q \cdot d\varphi$, т.е. $E_x \cdot q \cdot dx = -q \cdot d\varphi$.

В результате получаем **связь проекции напряженности электрического поля с потенциалом**:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \quad (1.20)$$

Строго говоря, в правой части (1.20) должна использоваться частная производная по x . Аналогично, выражения для других проекций электростатического поля имеют вид:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, E_z = -\frac{d\varphi}{dz} \quad (1.21)$$

Соотношение (1.21) можно записать векторно:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) = -\text{grad}(\varphi), \quad (1.22)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты системы координат.

(Связь напряжённости электрического поля с потенциалом)

По определению векторная величина в круглой скобке называется **градиентом** и обозначается как **grad**.

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Отметим **физический смысл градиента**. Градиент это вектор, который указывает направление и величину самого крутого подъёма функции. (Альпинисты любят трудности и лезут по градиенту, по самому крутому подъёму, а вода стекает противоположно градиенту).

1.9. Циркуляция вектора напряжённости

На произвольном участке пути 1-2 работа поля связана с потенциалом соотношением:

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Найдем работу поля по замкнутому контуру (см. рис. 1.17):

$$A_{121} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_1) = 0$$

$$A_{121} = q \cdot \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

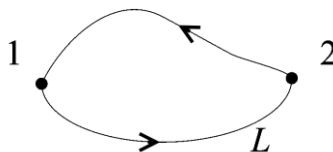


Рисунок 1.17 – Схема к определению работы поля по контуру

По определению интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией вектора \vec{E}** по контуру L и обозначается колечком на знаке интеграла $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Итак, мы получили, что циркуляция вектора напряженности \vec{E} вдоль любого замкнутого контура в электростатическом поле равна 0.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Поле является потенциальным, если выполняется это условие.

1.10. Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек с одинаковым потенциалом называется **эквипотенциальной поверхностью** (см. рис. 1.18).

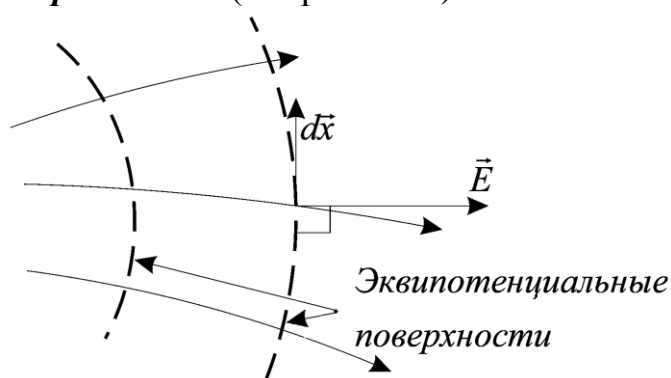


Рисунок 1.18 – Эквипотенциальные поверхности

Пусть $d\vec{x} \perp \vec{E}$, тогда $E_x = 0$. Поскольку $E_x = -\frac{d\phi}{dx} = 0$, то, следовательно, в направлении оси x $\phi = \text{const}$. Таким образом, мы доказали, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям!

1.11 Электрический диполь

Электрический диполь — это система из двух равных по величине, но противоположных по знаку электрических зарядов. Расстояние между зарядами l называется **плечом диполя**, который является вектором, направленным от отрицательного заряда к положительному. Вектор $\vec{p}_e = ql$ называется **электрическим дипольным моментом**.

В электрическом поле \vec{E} дипольный момент, вектор \vec{p}_e , стремится развернуться вдоль вектора \vec{E} .

В приложении 3 представлены свойства диполя, расчеты **напряженности и потенциала на оси диполя**.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

2.1. Типы диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Диполь.

Полярные и неполярные диэлектрики

*Вещества, которые в обычных условиях не проводят электрический ток, называются **диэлектриками**.*

В действительности диэлектрики проводят ток, но очень слабо: их проводимость в $10^{15} \dots 10^{20}$ раз хуже, чем у проводников. Это обусловлено тем, что в обычных условиях заряды в диэлектриках связаны в довольно устойчивые молекулы и не могут, как в проводниках, легко отрываться и становиться свободными.

*Заряды называются **связанными**, если они входят в состав атомов, молекул, либо в кристаллическую решетку твердых тел.*

*Заряды не связанные с атомами, молекулами или кристаллической решеткой называются **свободными**.*

Например, свободными являются:

1. электроны проводимости в металлах;
2. ионы в электролитах и газах;
3. избыточные заряды, сообщенные диэлектрику извне.

Молекулы диэлектрика электрически нейтральны, но обладают, несмотря на это, интересными электрическими свойствами.

Различают два основных типа диэлектриков: **неполярный** и **полярный**.

Диэлектрик называется **неполярным**, если в его молекулах в отсутствие электрического поля центры тяжести отрицательных и положительных зарядов совпадают (есть симметрия), (см. рис. 2.1). Например: H_2 , O_2 , CH_4 .

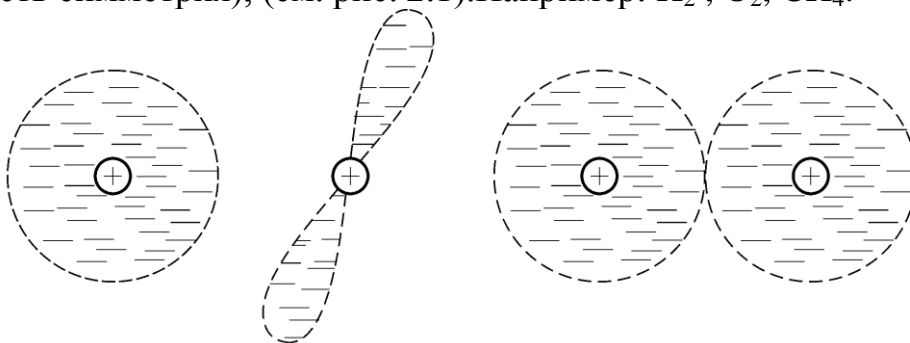


Рисунок 2.1 – В неполярных диэлектриках есть центр симметрии. В отсутствие электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают

В молекулах **полярных** диэлектриков в отсутствие электрического поля центры тяжести отрицательных и положительных зарядов не совпадают (нет симметрии). Например: CO , (см. рис. 2.2 и рис. 2.3), H_2O .

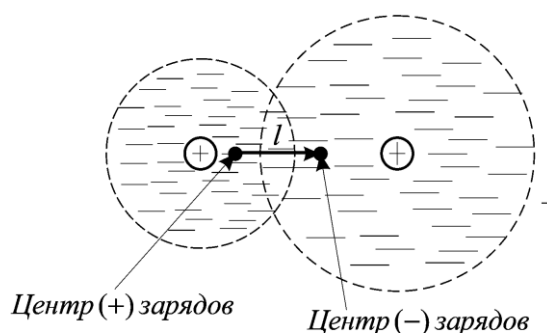


Рисунок 2.2 – В полярных диэлектриках «центры тяжести» зарядов (+) и (-) не совпадают, образуя диполь

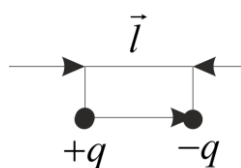


Рисунок 2.3 – Дипольный момент $\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l}$ диполя направлен от (-) к (+)

2.2 Вектор поляризации. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды

В электрическом поле в диэлектриках происходит некоторое перераспределение зарядов, которое называют поляризацией диэлектрика.

Количественной мерой поляризации диэлектрика является **вектор поляризации \mathbf{P}** , который равен отношению суммарного дипольного момента в малом объеме ΔV диэлектрика к величине этого объема (\vec{p}_i - дипольные моменты молекул):

$$\vec{P} = \sum_{\Delta V} \vec{p}_i / \Delta V \quad (2.1)$$

Физический смысл вектора поляризации \mathbf{P} в том, что он численно равен дипольному моменту единицы объема.

Различают **электронную** и **ориентационную** поляризацию диэлектриков:

1. **Электронная поляризация** имеет место в неполярных диэлектриках.

1.1) Пусть электрического поля нет, $\mathbf{E}=0$, тогда дипольный момент \mathbf{p}_i каждой молекулы равен нулю и вектор поляризации $\mathbf{P}=0$ (см. рис. 2.4);

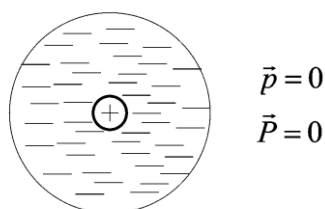


Рисунок 2.4 – Вектор поляризации и дипольный момент в неполярном диэлектрике в отсутствии электрического поля

1.2) Если электрическое поле есть, то в нём электронная оболочка сместится относительно ядра навстречу полю.

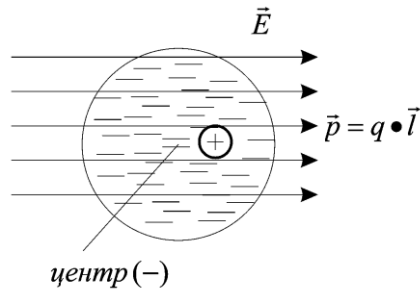


Рисунок 2.5 – В электрическом поле у неполярных молекул появляется дипольный момент $\vec{p} = q \cdot \vec{l} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$

В молекуле возникнет (индуцируется) дипольный момент \vec{p} , величина которого пропорциональна напряженности электрического поля \vec{E} , (см. рис. 2.5) $\vec{p} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$ (упругий диполь).

Величина α называется **коэффициентом поляризуемости** молекулы.

Этот процесс происходит в каждой молекуле диэлектрика, поэтому суммарный дипольный момент единицы объема (вектор поляризации \vec{P}) равен:

$$\vec{P} = n_0 \cdot \vec{p} = n_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}, \quad (2.2)$$

где n_0 - концентрация молекул (число молекул в единице объема), а величина $\chi = n_0 \cdot \alpha$ - называется **диэлектрической восприимчивостью** вещества. Величина χ - (хи) величина безразмерная.

2. Ориентационная поляризация имеет место в полярных диэлектриках.

2.1) Если электрического поля нет ($\vec{E}=0$), то за счет теплового движения диполи ориентированы хаотически (см. рис. 2.6). Вектор поляризации равен:

$$\vec{P} = \sum_{\Delta V} \vec{p}_i / \Delta V = 0$$

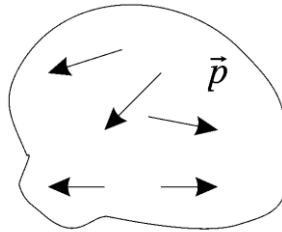


Рисунок 2.6 – В отсутствии поля диполи ориентированы хаотически. Суммарный дипольный момент (вектор поляризации) $\vec{P} = 0$

2.2) Пусть электрическое поле равно \vec{E} , (см. рис. 2.7). Диполь в электрическом поле стремится расположиться вдоль поля. Ориентации диполей вдоль поля \vec{E} препятствует тепловое движение.

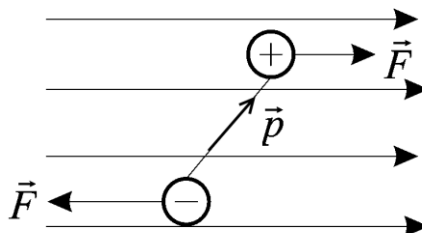


Рисунок 2.7 – Электрическое поле стремится развернуть диполь вдоль силовых линий

В результате степень ориентации (и поляризация) тем больше, чем больше напряженность электрического поля \mathbf{E} и чем меньше температура. Поэтому и в полярных диэлектриках наблюдается прямая пропорциональность между вектором поляризации \mathbf{P} и напряженностью электрического поля: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \mathbf{E}$.

Для всех типов поляризации, в первом приближении (при не слишком больших напряженностях поля), вектор поляризации диэлектрика связан с электрическим полем соотношением:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}, \quad (2.3)$$

Рассмотрим, к чему приводит поляризация диэлектрика.

Поляризация молекулы в электрическом поле эквивалентна сдвигу отрицательного заряда относительно положительного на расстояние l .

Т.к. поляризуются одновременно все молекулы, то поляризация диэлектрика эквивалентна сдвигу всех отрицательных зарядов относительно положительных на величину l навстречу внешнему электрическому полю, (рис. 2.8).

Следовательно, там, где входят силовые линии, в слое толщиной l останутся лишь отрицательные заряды, на противоположной стороне останутся положительные заряды.

На площади S поверхности возникает заряд $Q = S \cdot l \cdot n \cdot q$ равный числу зарядов в слое толщиной l , где: n - концентрация молекул в диэлектрике; q - заряд электрона.

Поверхностная плотность поляризованного заряда на поверхности диэлектрика:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = n \cdot l \cdot q = n \cdot p = |\vec{P}|, \quad (2.4)$$

В общем случае, если поверхность диэлектрика не перпендикулярна \mathbf{E} , то поверхностная плотность заряда $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cdot \cos \alpha$, где α - угол между нормалью \mathbf{n} и вектором \mathbf{P} .

В общем случае на поверхности S диэлектрика накапливается заряд:

$$Q_{\text{полн}} = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (2.5)$$

Поляризованный диэлектрик эквивалентен конденсатору, (см. рис. 2.9). Поле, созданное конденсатором, показано пунктиром. Оно ослабляет внешнее поле внутри диэлектрика.

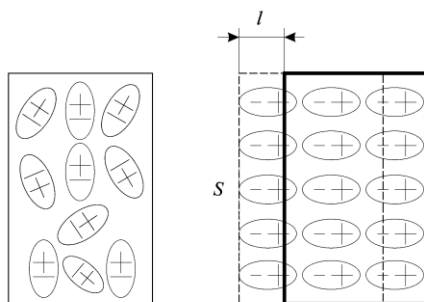


Рисунок 2.8 – Одновременная поляризация всех молекул диэлектрика

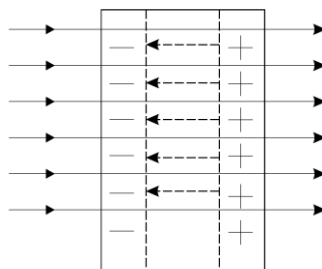


Рисунок 2.9 – Поляризованный диэлектрик эквивалентен конденсатору

Вне диэлектрика поле не изменяется. Найдем поле внутри диэлектрика E_d .

Напряженность дополнительного электрического поля, созданного поляризованными зарядами (конденсатором):

$$E_{\text{пол}} = \frac{\sigma_{\text{пол}}}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 \cdot \chi \cdot E_d}{\epsilon_0} = \chi \cdot E_d.$$

Поле внутри диэлектрика E_d складывается из внешнего $E_{\text{внеш}}$ и поля, созданного поляризованным диэлектриком $E_{\text{пол}}$: $E_d = E_{\text{внеш}} - E_{\text{пол}} = E_{\text{внеш}} - \chi \cdot E_d$, откуда получаем:

$$E_d = \frac{E_{\text{внеш}}}{1 + \chi} = \frac{E_{\text{внеш}}}{\epsilon}. \quad (2.6)$$

Величина $\epsilon = 1 + \chi$ называется **диэлектрической проницаемостью вещества**.

Итак, поле в диэлектрике ослабляется в ϵ раз. Отметим, что первичным является внешнее поле, оно приводит к поляризации диэлектрика, и ослаблению поля внутри него в ϵ раз.

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}. \quad (2.7)$$

(Закон Кулона в веществе)

В воде $\epsilon=81$, то сила притяжения молекул снижается в 81 раз. Поэтому вода – сильный растворитель, а море имеет соленый вкус.

2.3 Теорема Остроградского – Гаусса для поля в диэлектрике. Связь векторов смещения, напряжённости и поляризации

Теорема Остроградского-Гаусса в вакууме имеет вид:

$$\oint \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} = q, \quad (2.8)$$

где q - суммарный заряд, охватываемый замкнутой поверхностью.
В веществе заряд q складывается из свободных и связанных зарядов.

$$\oint \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{своб}} + q_{\text{связ}}, \text{ но}$$

$$q_{\text{связ}} = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S},$$

где \vec{P} - вектор поляризации диэлектрика. Следовательно:

$$\oint \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{своб}} - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad \text{или}$$

$$\oint (\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_{\text{своб}}.$$

Величина $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$ - называется **вектором электрического смещения**.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E}$$

Единица измерения вектора электрического смещения: $[\vec{D}] = [\vec{P}] = \text{Кл/м}^2$.

Итак:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E}. \quad (2.9)$$

Уравнение Остроградского-Гаусса (2.8) в веществе приобретает вид:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{своб}}. \quad (2.10)$$

Поток вектора электрического смещения \vec{D} через замкнутую поверхность S равен сумме свободных зарядов ($q_{\text{своб}}$), охватываемых поверхностью S .

Напомним, что полученные соотношения справедливы для изотропных диэлектриков, (у которых свойства во всех направлениях одинаковы).

Можно показать, что на границе раздела двух диэлектриков одинаковы тангенциальные составляющие электрического поля $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ и нормальные составляющие вектора смещения $D_{n1} = D_{n2}$.

2.4 Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектрики, например сегнетова соль $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ обладают удивительными свойствами (см. рис. 2.10):

1) резкое возрастание диэлектрической проницаемости ϵ (до $\epsilon \approx 10^3$) в определенном диапазоне температур (для справки отметим, что у обычных материалов $\epsilon \approx 1 \dots 10$);

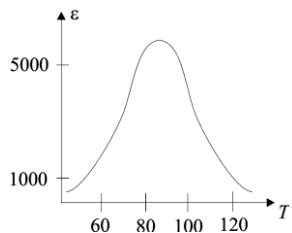


Рисунок 2.10 – Температурная зависимость диэлектрической проницаемости сегнетовой соли

2) ϵ и χ зависят от напряженности поля \vec{E} и от предыстории (гистерезис).

С чем это связано?

Оказалось, что монокристалл сегнетоэлектрика разбит на области (домены). Внутри каждого домена все молекулы (диполи) ориентированы одинаково (самопроизвольная, спонтанная поляризация внутри доменов).

В отсутствии поля домены между собой ориентированы хаотически, средняя суммарная поляризация кристалла равна нулю. В поле происходит преимущественная ориентация доменов.

Домены образуются в определенном температурном интервале — между нижней и верхней точками Кюри. Вне этого интервала домены разрушаются.

3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

3.1 Распределение зарядов в проводнике. Поле внутри проводника и у его поверхности

Вещества, содержащие свободные заряды, способные перемещаться под действием сколь угодно слабого электрического поля, называются проводниками.

1) Что произойдет, если проводник поместить в электростатическое поле (см. рис. 3.1)?

Электроны начнут двигаться против поля, накапливаясь у поверхности. Положительные заряды окажутся в другой стороне. При этом каждая пара, положительная и отрицательная создает свое внутреннее поле, которое частично компенсирует внешнее. На рис.3.1 это поле показано пунктиром.

Такое перераспределение зарядов будет происходить до тех пор, пока внутри проводника останется хоть какое-либо поле.

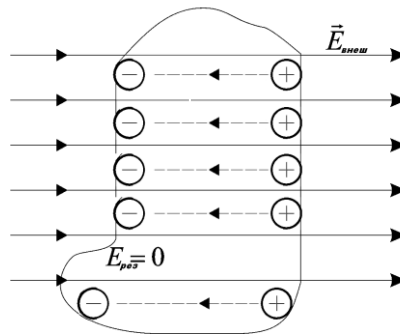


Рисунок 3.1 – Проводник в электростатическом поле. Накапливаясь у поверхности, заряды полностью компенсируют поле внутри проводника

Мы получили вывод 1: Внутри проводника поле $\mathbf{E}=0$, следовательно, $\mathbf{D}=0$.

2) Где же располагаются заряды в проводнике?

На поверхности проводника. Это следует из теоремы Гаусса. Если внутри проводника провести произвольную замкнутую поверхность, то поток через нее будет равен нулю, т.к. поле внутри равно нулю. Следовательно, и заряд внутри любой внутренней поверхности будет равен нулю.

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q = 0$$

Вывод 2: В проводнике не скомпенсированные заряды располагаются только на поверхности. Внутри проводника заряд равен нулю.

3) Рассмотрим вопрос: Как направлено поле у поверхности проводника?

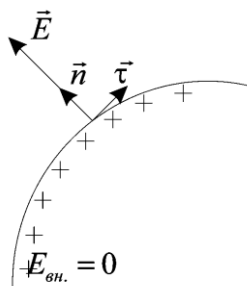


Рисунок 3.2 – Вне проводника вектор \mathbf{E} всегда перпендикулярен поверхности

Оказывается, вне проводника поле \mathbf{E} всегда перпендикулярно к поверхности, (см. рис. 3.2). Иначе, если бы была составляющая поля вдоль поверхности, то появилось бы движение зарядов (ток), а мы рассматриваем стационарный случай, когда заряды уже не перемещаются и токи равны нулю:

$$E_{\tau} = 0. \quad (3.1)$$

Вывод 3: В электростатическом случае вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} перпендикулярен поверхности проводника.

4) Теперь найдём величину напряженности электростатического поля \mathbf{E} вблизи поверхности проводника.

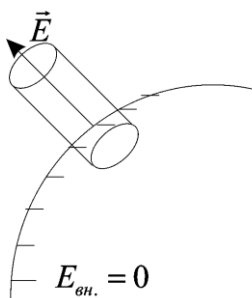


Рисунок 3.3 – Окружение проводника воображаемой цилиндрической поверхностью

Окружим участок поверхности воображаемым цилиндром с площадью основания dS (см. рис. 3.3). Из теоремы Гаусса $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q / \epsilon_0$, получаем:

$$E \cdot dS = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0},$$

здесь мы учли, что внутри поверхности S оказался поверхностный заряд $\sigma \cdot dS$.

Отсюда нетрудно получить напряжённость электрического поля вблизи поверхности проводника:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.2)$$

Итак, получаем вывод 4:

1. поле внутри проводника: $E_{\tau}=0$, $E_n=0$;
2. поле вне проводника: $E_{\tau}=0$, $E_n=\sigma/\epsilon_0$.

5) Как меняется потенциал в проводнике?

Так как внутри проводника $E_{\text{внутр}} = d\phi/dl = 0$, получаем, что $\phi_{\text{внутр}} = \text{const}$

Вывод 5: Все точки проводника имеет одинаковый потенциал (эквипотенциальны).

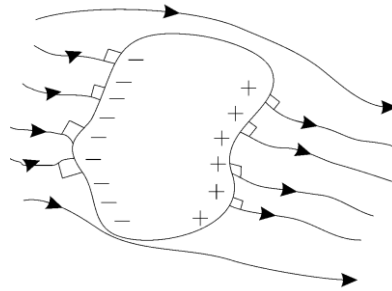


Рисунок 3.4 – Разрыв силовых линий поля проводником

Проводник как бы разрывает часть силовых линий электростатического поля (рис. 3.4). Проводник, в целом, не заряжен. Плотность зарядов различна в разных точках поверхности.

3.2 Электроёмкость

Проводник, вблизи которого нет никаких других проводников, называется уединенным.

Пусть заряд проводника равен q . Потенциал в любой точке, в т.ч. на самом проводнике, пропорционален заряду проводника (см. рис.3.5). Это записывают в виде:

$$q = C \cdot \phi \quad \text{или} \quad C = \frac{q}{\phi},$$

где коэффициент пропорциональности C называют электрической ёмкостью уединенного проводника.

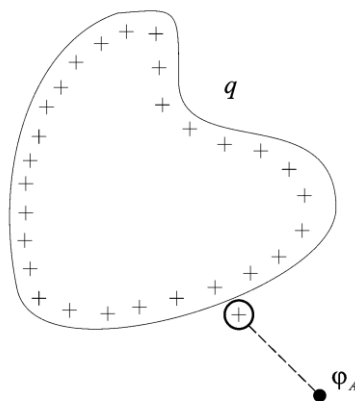


Рисунок 3.5 – Заряд проводника q пропорционален потенциалу проводника ϕ : $q = C \cdot \phi$

Ёмкость проводника численно равна заряду, который нужно сообщить данному проводнику, чтобы его потенциала стал равным 1 Вольту. В СИ единица ёмкости $[C] = \text{Кл/В} = \text{Ф}$ (Фарада).

Пример: Потенциал заряженного шара $\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{q}{R}$.

Отсюда ёмкость шара равна:

$$C_{\text{шара}} = \frac{q}{\varphi} = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R. \quad (3.3)$$

Емкость уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, формы и диэлектрических свойств окружающей среды и не зависит от величины заряда проводника.

Рассмотрим теперь два близко расположенных проводника. Определим **взаимную емкость** двух проводников по формуле:

$$C = \frac{dq}{d(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{или} \quad C = \frac{q}{\Delta\varphi} \quad (3.4)$$

Взаимная ёмкость численно равна заряду, который нужно перенести с одного проводника на другой, чтобы изменить разность потенциалов между ними на единицу. Взаимная емкость зависит от формы, размеров, взаимного расположения проводников и диэлектрической проницаемости среды.

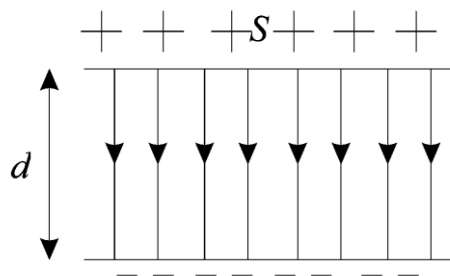


Рисунок 3.6 – Плоский конденсатор

На основе определения (3.4) найдем емкость плоского конденсатора (см. рис. 3.6). В конденсаторе напряженность поля равна:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}.$$

Где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов в конденсаторе равна: $\Delta\varphi = E \cdot d$. Следовательно, емкость плоского конденсатора:

$$C_{\text{плоск.конт}} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}. \quad (3.5)$$

3.3. Объёмная плотность энергии электрического поля

Энергия заряженного конденсатора является одновременно энергией его электростатического поля, которое расположено в объёме $V = S \cdot d$ между обкладками. Рассчитаем энергию электростатического поля, приходящуюся на единицу объема в плоском конденсаторе (см. рис. 3.6).

Энергия поля в конденсаторе определяется как $W = \frac{C \cdot (\Delta\varphi)^2}{2}$, но разность потенциалов связана с напряженностью поля и параметрами конденсатора как

$\Delta\varphi = E \cdot d$, а емкость плоского конденсатора равна $C_{\text{плоск.конд}} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}$.

Следовательно, энергия поля внутри конденсатора равна:

$$W = \frac{C \cdot (\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot E^2 \cdot d^2}{2 \cdot d} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2}{2} \cdot S \cdot d = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2}{2} \cdot V,$$

где: $V = S \cdot d$ - объем между пластинами.

По определению **объёмной плотности энергии** электрического поля w_E называется величина:

$$w_E = \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

Она численно равна энергии электростатического поля, заключенной в единице объема:

$$w_E = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2}{2} = \frac{D \cdot E}{2}, \quad (3.6)$$

где ε_0 - электрическая постоянная;

ε - диэлектрическая проницаемость среды;

E - напряжённость электрического поля;

$D = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E$ - электрическое смещение.

3.4 Постоянный электрический ток и его характеристики

Электрический ток – это всякое упорядоченное движение зарядов. За направление тока принято направление движения положительных зарядов (ток направлен противоположно движению отрицательных зарядов).

Линии тока – это линии, вдоль которых движутся положительные заряды

Сила тока I в проводнике численно равна величине заряда, проходящего в единицу времени через полное поперечное сечение проводника. Точное определение имеет вид:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.7)$$

(для постоянного тока $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$).

Вектор плотности тока численно равен заряду, проходящему через единичное поперечное сечение проводника за единицу времени и имеет направления движения положительных зарядов:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} = \frac{dq}{dt \cdot dS_{\perp}}, \quad (3.8)$$

где dS_{\perp} – площадка, перпендикулярная линиям тока.

Ток через произвольную площадку S равен скалярному произведению:

$$dI = (\vec{j} \cdot d\vec{S}).$$

В физике понятия ток или поток означают перенос чего-либо через полное сечение. Например, поток крокодилов через реку Нил означает количество крокодилов, проходящих через полное поперечное сечение реки за

одну секунду. Плотность потока крокодилов означает количество крокодилов, проходящих через единичное поперечное сечение за единицу времени.

Существует три различных скорости, связанные с электрическим током:

1) *Скорость теплового движения* $V_{\text{тепл}} \sim 10^5$ м/с. Электроны в металлах совершают хаотическое тепловое движение со скоростями $V_{\text{тепл}} \sim 100$ км/с. В отсутствие внешнего поля, при $E=0$, упорядоченного движения зарядов (и тока) нет.

2) *Скорость дрейфа зарядов* $V_{\text{др}} \sim 10^{-4}$ м/с. Поле E дополнительно сообщает всем электронам упорядоченное движение (дрейф) со скоростью $V_{\text{др}} \sim 10^{-3} \dots 10^{-5}$ м/с. При этом появляется ток.

3) *Скорость распространения тока*. Однако, ток в замкнутой цепи распространяется со скоростью света $V=c \sim 10^8$ м/с, хотя сами электроны чуть сдвигаются. С этой скоростью распространяется электрическое поле вдоль проводов.

3.5 Закон Ома для однородного участка цепи

Заряды в проводнике движутся с трением (ударами о решетку). За счёт этого проводники обладают электрическим сопротивлением R .

Для проводника сила тока пропорциональна разности потенциалов на его концах, (см. рис. 3.7).

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R}, \quad (3.9)$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов; R – электрическое сопротивление, которое связано с параметрами проводника формулой:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}, \quad (3.10)$$

где l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения;

ρ – удельное сопротивление (сопротивление проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения).

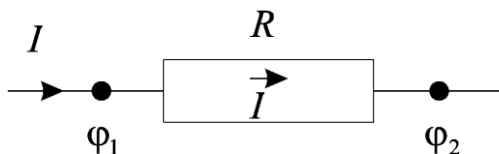


Рисунок 3.7 – Разность потенциалов на концах сопротивления R пропорциональна произведению силы тока I и сопротивления R : $\varphi_1 - \varphi_2 = IR$

3.6 Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС)

На рис. 3.8а представлен ток воды по замкнутому контуру. Этот ток воды поддерживают сторонние силы негравитационного происхождения (они переносят воду от меньшего потенциала к большему).

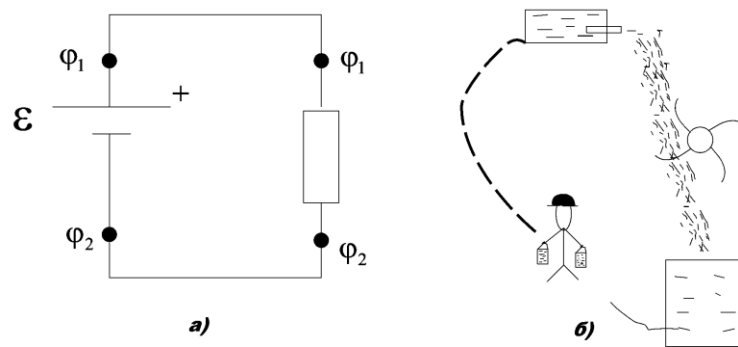


Рисунок 3.8 – Ток воды как эквивалент току в электрической цепи а) схема тока воды; б) эквивалентная электрическая схема

Аналогичный процесс происходит и в замкнутой цепи тока. Сторонние силы (батарея) производят перенос зарядов от меньшего потенциала к большему против кулоновских сил и поэтому имеют неэлектрическое происхождение (например, химическое в батарейках).

Электродвижущей силой (ЭДС) (ε) называется величина численно равная работе сторонних сил при переносе единичного положительного заряда:

$$\varepsilon = \frac{\delta A_{\text{стор}}}{dq}. \quad (3.11)$$

Если через , батарейку с ЭДС ε прошел заряд q , то работа ЭДС равна $A_{\text{ЭДС}} = \varepsilon \cdot q$. Единица измерения ЭДС та же, что и у потенциала – Вольт [ε]=В.

3.7 Закон Ома для неоднородного участка цепи

Участок электрической цепи называется неоднородным, если в цепи есть не только сопротивления, но и элементы ЭДС.

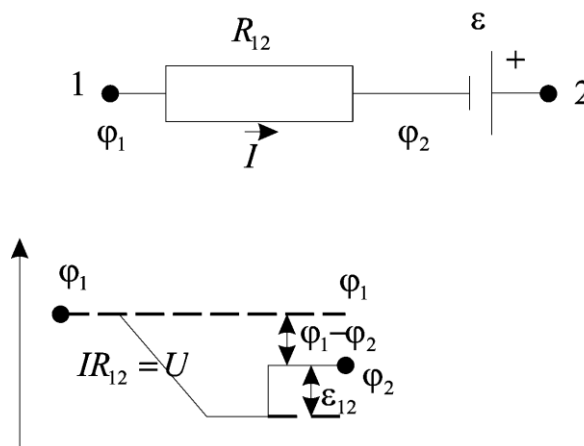


Рисунок 3.9 – На сопротивлении R потенциал падает на $U = I \cdot R$, а ЭДС поднимает потенциал ε

Из рис. 3.9 видно, что для неоднородного участка цепи, имеющего (ЭДС)

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = I \cdot R_{12},$$

откуда получаем:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R_{12}}, \quad (3.12)$$

(закон Ома для неоднородного участка цепи)

где R_{12} – суммарное сопротивление участка цепи.

Величина $\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = U_{12}$ называется **напряжением** на участке цепи 1-2.

Правило знаков. Если при переходе через ЭДС потенциал увеличивается, то $\varepsilon > 0$, иначе $\varepsilon < 0$.

3.8 Закон Ома для полной цепи, (замкнутой)

Рассмотрим замкнутую цепь. При обходе цепи и возвращении в исходную точку (см. рис. 3.10) разность потенциалов: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, тогда $I \cdot R_{12} = \varepsilon_{12}$.

$$I = \frac{\varepsilon_{12}}{R_{12}} \quad \text{или} \quad I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (3.13)$$

(Закон Ома для полной цепи)

где ε – алгебраическая сумма всех ЭДС с учётом правила знаков;

$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ – сумма внутренних сопротивлений всех ЭДС;

$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ – суммарное внешнее сопротивление.

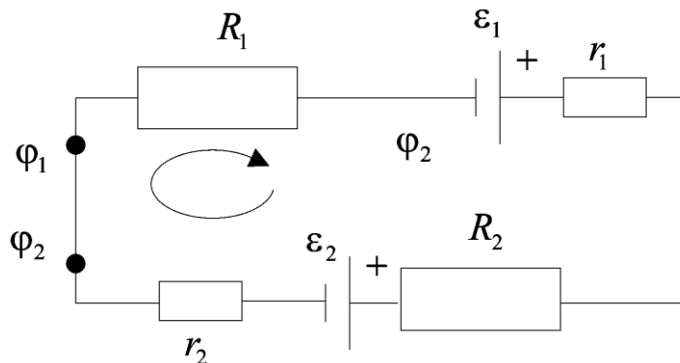


Рисунок 3.10 – Замкнутая цепь

3.9 Закон Джоуля - Ленца

Работа электрического поля на участке 1-2 (см. рис. 3.11), задаётся соотношением:

$$A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2),$$

но заряд определяется как $q = I \cdot t$, а разность потенциалов как $\varphi_1 - \varphi_2 = I \cdot R$.

На сопротивлении выделяется теплота Q , равная работе тока:

$$Q = A = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = I \cdot U \cdot t, \quad (3.14)$$

где R – сопротивление; U – напряжение; I – ток; t – время протекания тока.

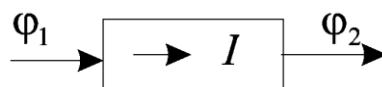


Рисунок 3.11 – Участок цепи

Работа электрического поля расходуется на трение (удары электронов о решётку) и переходит в тепло. Мощность тока, выделяемая на сопротивлении R равна:

$$P = \frac{dA}{dt} = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} = I \cdot U, \quad (3.15)$$

3.10 Закон Ома и Джоуля - Ленца в дифференциальной форме

В классической электронной теории электропроводности металлов Друде и Лоренц предложили следующую модель:

1) в металлах ионы образуют твёрдый скелет, а свободные электроны образуют идеальный газ электронов, находящийся в тепловом движении внутри решетки;

2) электроны сталкиваются, в основном, с ионами решетки.

3) За счёт электрического поля \vec{E} электроны приобретают дополнительную скорость $V_{др}$ (дрейф в поле). Кинетическая энергия дрейфа теряется при каждом столкновении электрона с решёткой. Эта энергия выделяется в виде тепла.

На основе данной теории получено выражение для плотности тока (Закон Ома в дифференциальной форме):

$$\vec{j} = \left(\frac{e^2 \cdot n_0 \cdot \langle \lambda \rangle}{2 \cdot m \cdot V_{тепл}} \right) \cdot \vec{E} \quad \text{т.е.} \quad \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad (3.16)$$

где e – заряд электрона;

n_0 – концентрация электронов;

λ – средняя длина свободного пробега электрона;

m – масса электрона;

$V_{тепл}$ – тепловая скорость электрона;

γ – коэффициент перед E , который называют удельной электропроводностью вещества:

$$\gamma = \frac{e^2 \cdot n_0 \cdot \langle \lambda \rangle}{2 \cdot m \cdot V_{тепл}}, \quad (3.17)$$

Аналогично закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме имеет вид:

$$Q = \left(\frac{e^2 \cdot n_0 \cdot \langle \lambda \rangle}{2 \cdot m \cdot \langle V_{тепл} \rangle} \right) \cdot E^2 = \gamma \cdot E^2. \quad (3.18)$$

Дифференциальная форма закона Ома не означает дифференциалы, а относится к малым участкам проводника.

3.11 Правила Кирхгофа

Существует два правила Кирхгофа, которые используются для расчёта разветвлённых цепей. С помощью этих правил рассчитывают токи по заданным ЭДС и сопротивлениям участков цепи.

Первое правило Кирхгофа (правило узлов): Алгебраическая сумма токов I_k , сходящихся в узле равна нулю. Знак токов подходящих к узлу принимают (+), а отходящих - (-), (см. рис. 3.12).

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (3.19)$$

Это правило, очевидно, если представить ток в виде тока жидкости. Ясно, что, сколько воды (зарядов) приходит к точке, столько же должно и уходить.

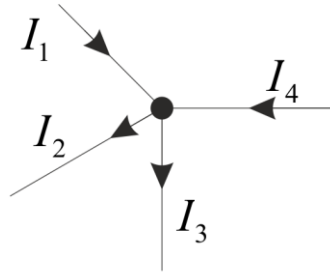


Рисунок 3.12 – Узел токов: токи I_1, I_2, I_3 – вытекающие токи, а ток I_4 втекающий ток

Второе правило Кирхгофа (правило контуров): В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма $I_k \cdot R_k$ равна алгебраической сумме ЭДС \mathcal{E}_k .

Это является очевидным следствием закона Ома для замкнутого контура.

$$\sum_{k=1}^n I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k. \quad (3.20)$$

Следует учитывать правила знаков. Если направление обхода контура совпадает с током, то величину $I \cdot R$ берём со знаком (+), а если ток через данное сопротивление противоположен направлению обхода, то $I \cdot R$ берём со знаком (-). ЭДС берём с (+), если при переходе через ЭДС потенциал увеличивается, и берём (-), если при переходе через ЭДС потенциал уменьшается.

В приложение 4 вынесены разделы: сверхпроводимость; электрический ток в газах; несамостоятельный и самостоятельный разряды; газоразрядная плазма; работа выхода электронов из металла; термоэлектронная эмиссия.

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

4.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Опыт показывает, что наряду с электрическим полем существует и другое поле – магнитное, которое создаётся токами или движущимися зарядами и действует на токи или движущиеся заряды.

Магнитное поле характеризуется векторной величиной \mathbf{B} , которую назвали **магнитной индукцией**. Био, Савар и Лаплас установили закон, по которому малый участок тока протяженностью $d\mathbf{l}$ (вектор $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока), создает в окружающем пространстве магнитное поле.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.1)$$

(Закон Био – Савара – Лапласа)

где $d\vec{B}$ - магнитная индукция, создаваемая элементом тока $I \cdot d\vec{l}$ в точке, удаленной на расстояние r (см. рис.4.1);

μ_0 - константа, называемая **магнитной постоянной**: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Здесь Гн – генри, единица индуктивности катушки.

Направление магнитного поля задаётся векторным произведением $d\vec{l} \times \vec{r}$. Элемент тока создаёт вокруг себя поле, которое изображают линиями магнитной индукции \vec{B} . Для элемента тока $I \cdot d\vec{l}$ они имеют вид концентрических окружностей (см. рис.4.1). Касательные к линиям индукции задают направление поля \vec{B} в точке касания.

Силовые линии магнитного поля замкнуты. Единица измерения $[\vec{B}] = \text{Тл}$ (Тесла).

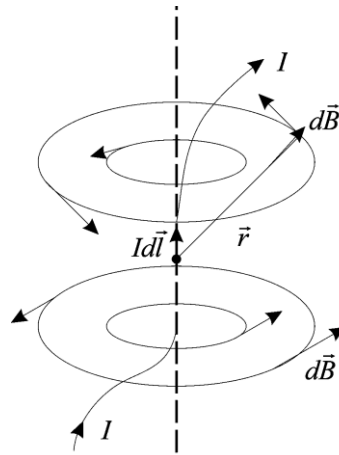


Рисунок 4.1 – Элемент тока $I \cdot d\vec{l}$ создает вокруг себя магнитное поле, линии которого имеют вид концентрических окружностей

Величина магнитной индукции (модуль) описывается соотношением:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (4.2)$$

где α - угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

Зависимость поля $d\vec{B}$ от расстояния r имеет вид: $B \sim I \cdot dl / r^2$, что аналогично формуле для электрического поля, создаваемого точечным зарядом $E \sim q / r^2$.

Ток образуется движущимися зарядами, поэтому заряд q , перемещающийся со скоростью \vec{V} эквивалентен току, и созданное им магнитное поле описывается формулой, аналогичной (4.1):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{V} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (4.3)$$

(поле, создаваемое движущимся зарядом)

Для магнитного поля характерен **принцип суперпозиции**: Результирующее поле \vec{B} равно векторной сумме полей, создаваемых каждым элементом тока по отдельности:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i . \quad (4.4)$$

Используя Закон Био-Савара-Лапласа, вычислим поля, создаваемые различными проводниками с током.

Рассмотрим поле, возникающее на расстоянии r_0 от отрезка прямого тока (см. рис.4.3). Разобьём отрезок на малые элементы $I \cdot dl$. Поскольку в точке О каждый элемент тока создаёт поле, направленное от нас перпендикулярно плоскости листа, то результирующее поле в точке О будет являться скалярной суммой (интегралом) от полей $d\vec{B}$, создаваемых каждым элементом тока.

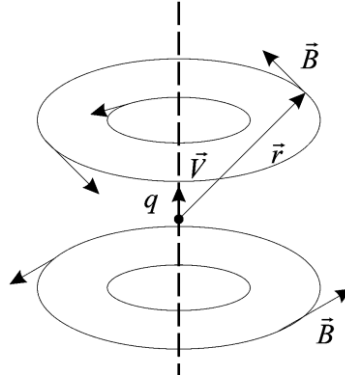


Рисунок 4.2 – Заряд q , имеющий скорость V , создает поле, аналогичное полю тока

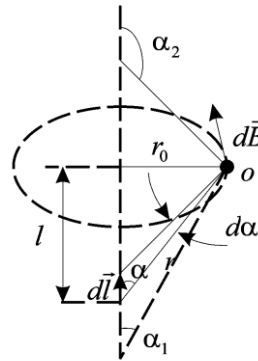


Рисунок 4.3 – Поле, возникающее на расстоянии r_0 от отрезка прямого тока

Учитывая, что $r=r_0/\sin\alpha$, $l=r_0 \cdot \text{ctg}\alpha$, а приращение $|dl|=(r_0/\sin^2\alpha) \cdot d\alpha$, получим из (4.2) индукцию поля, создаваемого в точке О малым током $I \cdot dl$:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r_0 \cdot d\alpha \cdot \sin\alpha}{4\pi \cdot \sin^2\alpha \cdot r_0^2 / \sin^2\alpha} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \sin\alpha \cdot d\alpha .$$

Интегрируя поле dB вдоль всего отрезка тока в диапазоне углов $\alpha_1 \dots \alpha_2$, получим:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot (-\cos\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) .$$

Итак, индукция магнитного поля B , создаваемая отрезком прямого тока, описывается формулой:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) , \quad (4.5)$$

где I - сила тока в отрезке;

r_0 - расстояние до точки (см. рис.4.3);

α_1 и α_2 - углы между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} для краёв отрезка.

4.2 Магнитное поле, создаваемое бесконечным прямым током

Такой ток можно получить из отрезка прямого тока, при увеличении длины отрезка до бесконечности в обе стороны.

При этом в формуле (4.5) $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 180$, и мы получим:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot [1 - (-1)] = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_0}, \quad (4.6)$$

(поле бесконечного прямого тока)

где I - сила тока;

r_0 - расстояние от тока до рассматриваемой точки пространства (см. рис.4.4).

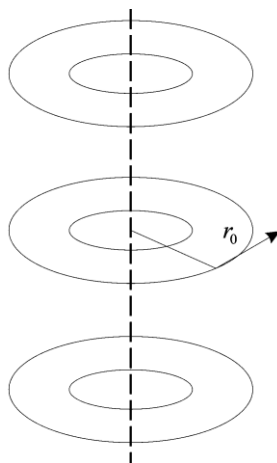


Рисунок 4.4 – Магнитное поле прямого тока уменьшается как $1/r$

4.3 Поле в центре кругового тока

В соответствии с Законом Био-Савара-Лапласа (4.1), каждый элемент кругового тока $d\mathbf{l}$ создаёт в центре поле $d\mathbf{B}$ (рис.4.5), направленное перпендикулярно плоскости кольца по правилу буравчика.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R^2} dl$$

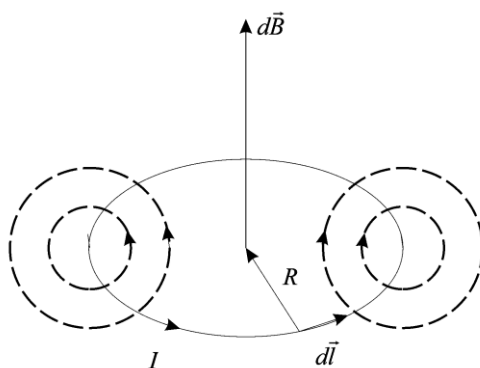


Рисунок 4.5 – Элемент кругового тока $I \cdot d\mathbf{l}$ создает в центре поля $d\mathbf{B}$, направленное перпендикулярно плоскости кольца по правилу буравчика

Т.к. все векторы $d\mathbf{B}$ одинаково направлены, то результирующее поле \mathbf{B} можно найти как скалярную сумму (интеграл).

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R^2} \int_L dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R^2} 2\pi \cdot R = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$$

где I – сила тока в колечке; R – его радиус, и мы учли, что интеграл от dl дает длину всей окружности $2\pi R$.

Итак, в центре кругового тока результирующее поле имеет вид:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}. \quad (4.7)$$

4.4 Поле на оси кругового тока

Формулу для поля на оси кругового тока (см. рис. 4.6), приведём без вывода:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot P_m}{2\pi \cdot (R^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (4.8)$$

где I – сила тока в кольце;

R – радиус кольца;

r – расстояние от кольца до точки на оси;

$P_m = I \cdot \pi \cdot R^2 = I \cdot S$ – называется **магнитным моментом** кольца тока.

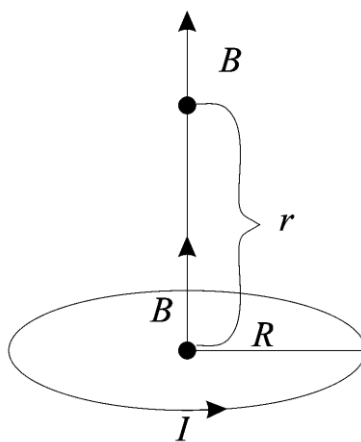


Рисунок 4.6 – Поле на оси кругового тока

4.5. Теорема о циркуляции для магнитного поля

Циркуляцией магнитного поля \mathbf{B} по контуру L называют интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

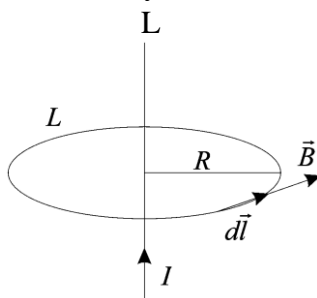


Рисунок 4.7 – Циркуляция магнитного поля \mathbf{B} по контуру L

Найдём циркуляцию магнитного поля вокруг бесконечного тока (см. рис. 4.7):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_L B \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = B \cdot \int_L dl = B \cdot 2\pi \cdot r.$$

Учитывая, что $B = \mu_0 \cdot I / 2\pi \cdot r$, получаем выражение для циркуляции:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I.$$

Можно показать, что данное уравнение справедливо и для контура L произвольной формы, независимо от того, в каком месте ток пронизывает контур.

В силу принципа суперпозиции теорема о циркуляции (её также называют законом полного тока) справедлива для произвольного числа токов, пронизывающих плоскость контура:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_k I_k \text{ (теорема о циркуляции),} \quad (4.9)$$

где суммирование проводится по всем токам I_1, I_2, \dots, I_n , охваченных контуром.

При этом справедливо правило знаков: если направление обхода контура согласуется с направлением тока по правилу буравчика, то ток берём со знаком (+), противном случае со знаком (-). В частности, на рис. 4.8, токи имеют следующие знаки ($+I_1 - I_2 - I_3$).

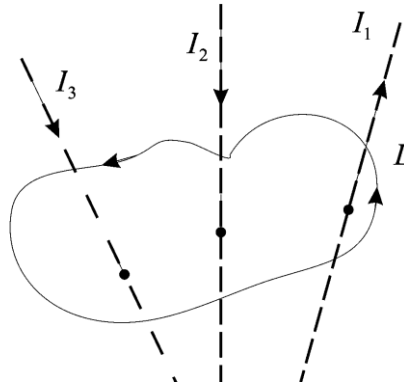


Рисунок 4.8 – При заданном направлении обхода контура L ток I_1 в формуле (4.9) берем со знаком (+), а токи I_2 и I_3 – со знаком (-)

Применим теорему о циркуляции для расчёта магнитного поля тороида (см. рис.4.9). (Тороид это «бублик», на который намотан провод). Внутри тороида проведём воображаемый контур L_2 с радиусом r_2 . Вследствие круговой симметрии, поле B во всех точках контура одинаково, а плоскость контура пересекают N витков тороида. Поэтому

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \int_L dl = B \cdot 2\pi \cdot r_2 = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

Отсюда получаем поле внутри тороида:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot r} = \mu_0 \cdot I \cdot n, \quad (4.10)$$

где $n=N/(2\pi \cdot r)$ – плотность намотки витков (число витков на единицу длины).

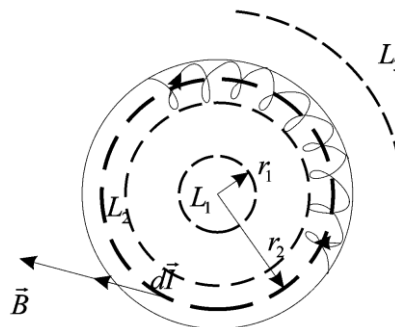


Рисунок 4.9 – Контур L_2 охватил N витков тороида

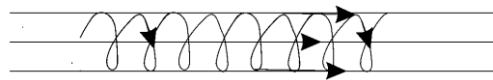
Для поля вне тороида (контуров L_1 и L_2) по теореме о циркуляции получаем:

$$\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{L_1} dl = B \cdot 2\pi \cdot r_1 = \mu_0 \cdot 0.$$

Откуда следует, что поле $B=0$ вне тороида (см. рис. 4.10).

Найдём магнитное поле **бесконечно длинного соленоида** (см. рис.4.10).

$$B = 0$$



$$B_{\text{вне}} = 0$$

Рисунок 4.10 – Индукция магнитного поля вне соленоида равна 0, а внутри $B=\mu_0 \cdot n \cdot I$

Этот случай можно получить из задачи о тороиде, полагая, что радиус тороида стремится к бесконечности. Поэтому поле **бесконечного соленоида**:

$$\begin{aligned} \text{поле внутри соленоида} \quad B &= \mu_0 \cdot I \cdot n, \\ \text{поле вне соленоида} \quad B &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

где n – плотность намотки витков (число витков на единицу длины).

4.6 Относительный характер электрической и магнитной составляющей электромагнитного поля

Электрические и магнитные поля тесно взаимосвязаны. Изменение электрического поля вызывает изменение магнитного поля, а изменение магнитного, в свою очередь, вызывает изменение электрического поля.

Относительный характер электрической и магнитной составляющих в том, что в разных инерциальных системах отсчета электрическое и магнитное поля имеют разную величину.

Например, если в 1-ой системе есть неподвижный заряд, то в ней есть только электростатическое поле. Магнитного поля нет. Во 2-ой системе заряд

уже будет движущийся, и кроме электростатического поля добавится и магнитное поле.

Далее мы рассмотрим действие магнитного поля на токи и движущиеся заряды.

4.7 Закон Ампера

В предыдущем разделе мы выяснили, как создаётся магнитное поле. Рассмотрим теперь действие магнитного поля на токи и движущиеся заряды.

Ампер установил следующий закон, который носит его имя.

На любой элемент тока $I \cdot d\vec{l}$ в магнитном поле индукцией \vec{B} действует сила $d\vec{F}$, равная векторному произведению этих величин (см. рис. 4.11).

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (4.11)$$

Если ток протекает по протяженному проводнику, то его разбивают на элементы тока и складывают векторно все силы.

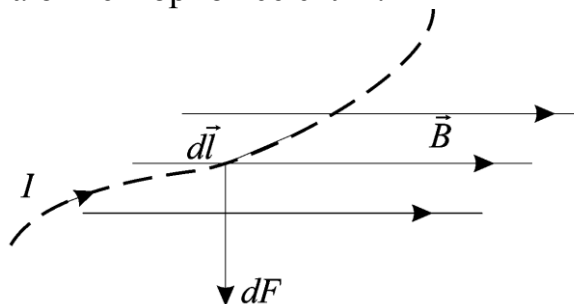


Рисунок 4.11 – Силу в законе Ампера находят по правилу буравчика. Ручку буравчика нужно поворачивать от первого вектора в произведении (4.11) $d\vec{l}$ ко второму \vec{B} . Направление смещения буравчика задаст направления векторного произведения

4.8 Взаимодействие параллельных проводников с током

На рисунке 4.12 показаны два прямых бесконечных тока I_1 и I_2 , имеющих одинаковое направление и находящихся на расстоянии r_0 друг от друга. Эти токи притягиваются. Найдём силу их взаимного притяжения, которая действует на каждый метр длины.

Первый ток I_1 создает вокруг себя магнитное поле с индукцией $B_1 = (\mu_0 \cdot I_1) / (2\pi \cdot r_0)$, которое направлено перпендикулярно токам (см. рис.4.12). Это поле действует на каждый участок длиной dl второго тока с силой Ампера $d\vec{F} = I_2 \cdot d\vec{l} \times \vec{B}_1$. Модуль этой силы равен: $dF = I_2 \cdot dl \cdot \sin 90^\circ = (I_2 \cdot dl \cdot \mu_0 \cdot I_1) / (2\pi \cdot r_0)$. На каждый метр $dl=1$ действует сила, а именно:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_0}.$$

По правилу буравчика можем найти, что эта сила направлена к первому току (см рис.4.12).

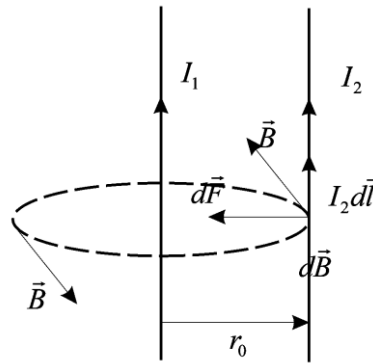


Рисунок 4.12 – Взаимодействие двух прямых параллельных проводников с током

4.9 Действие магнитного поля на рамку или колечко с током

Предположим, что в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} находится прямоугольная рамка, по которой течёт ток I (см. рис. 4.13).

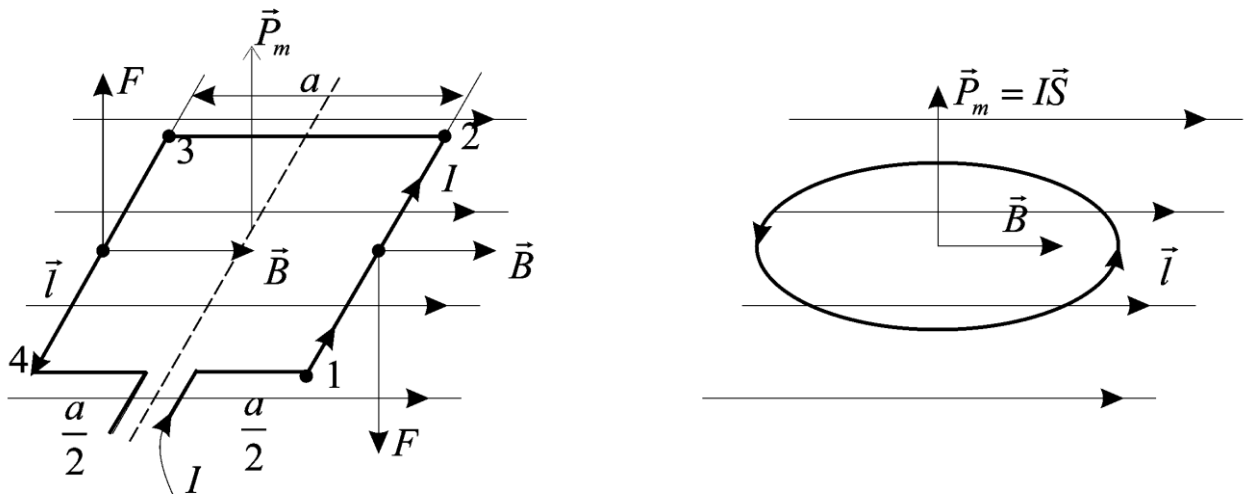


Рисунок 4.13 – Рамка с током или колечко с током имеют магнитный момент $P_m = I \cdot S$, вектор которого в магнитном поле стремится развернуться вдоль вектора \vec{B}

Найдём силы Ампера F , действующие на каждый участок рамки одна сторона которой длиной l , а другая a (см. рис.4.13). На участок 1-2 сила Ампера действует вниз, на участок 3-4 – вверх, а на участки 2-3 и 4-1 сила Ампера не действует вообще, т.к. для этих участков направление тока \vec{I} и вектора индукции \vec{B} совпадают ($\sin 0^\circ = 0$) или противоположны ($\sin 180^\circ = 0$).

Результирующая сила, действующая на рамку, равна нулю, поскольку силы $F = I \cdot l \cdot B$ направлены в противоположные стороны. Однако эти силы создают вращающий механический момент сил M относительно оси, проходящей через стороны a :

$$M = F \cdot \frac{a}{2} + F \cdot \frac{a}{2} = F \cdot a = I \cdot l \cdot B \cdot a = I \cdot S \cdot B = P_m \cdot B,$$

где $P_m = I \cdot S$ - магнитный момент рамки с током.

В общем случае, когда рамка или колечко с током ориентированы под произвольным углом, момент силы является векторным произведением:

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}. \quad (4.12)$$

Ориентация рамки, представленная на рис. 4.13, соответствует максимальному вращающему моменту $M_{\max} = P_m \cdot B \cdot \sin 90^\circ = P_m \cdot B$, при этом угол между P_m и B равен 90° , ($\sin 90^\circ = 1$).

Таким образом, магнитное поле стремится развернуть колечко с током так, чтобы магнитный момент P_m колечка был ориентирован вдоль поля B .

4.10 Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля

Элементарным потоком магнитного поля B через площадку dS называется скалярное произведение этих векторов, представленных на рис. 4.14:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot dS \cdot \cos \alpha. \quad (4.13)$$

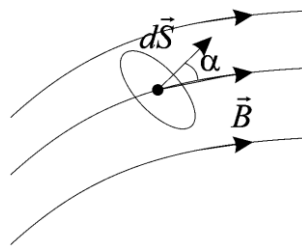


Рисунок 4.14 – Элементарный поток магнитного поля B через площадку dS

Физический смысл потока – это число линий индукции B , пронизывающих данную площадку.

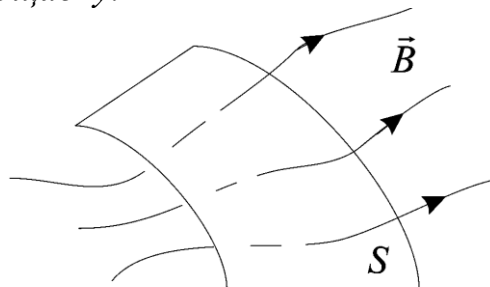


Рисунок 4.15 – Поток магнитного поля B через произвольную поверхность площадью S

Магнитный поток через произвольную поверхность (см. рис. 4.15), вычисляется как интеграл от элементарных потоков через всю поверхность:

$$\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.14)$$

Теорема Гаусса для магнитного поля: Магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.15)$$

Это связано с тем, что линии магнитного поля замкнуты (см. рис. 4.16), поэтому всегда число линий входящих внутрь замкнутой поверхности (поток со знаком минус) равно числу линий, выходящих из поверхности. (поток со знаком плюс).

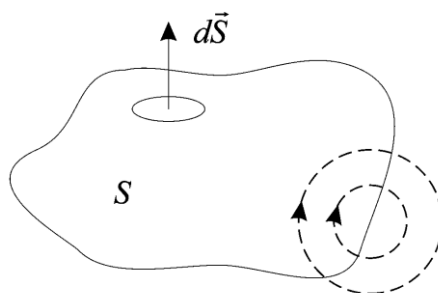


Рисунок 4.16 – Поток магнитного поля \mathbf{B} через замкнутую поверхность всегда равен нулю, т.к. число выходящих из поверхности линий всегда равно числу входящих

4.11 Работа по перемещению проводника или рамки с током в магнитном поле

На проводник длиной l (см. рис. 4.17), в магнитном поле действует сила по закону Ампера:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin 90^\circ = I \cdot l \cdot B$$

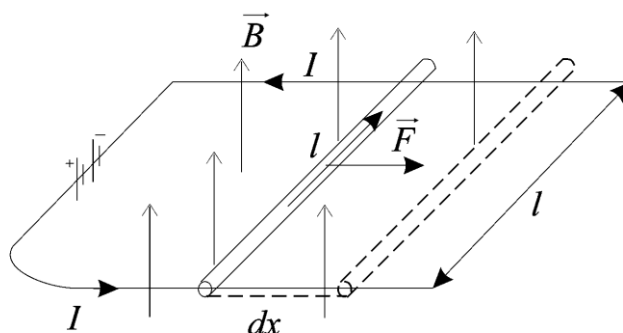


Рисунок 4.17 – При измерении магнитного потока через контур совершается работа $dA = I \cdot d\Phi$

Если под действием этой силы проводник сместится на расстояние dx , то будет совершена работа:

$$dA = F \cdot dx = I \cdot B \cdot l \cdot dx = I \cdot B \cdot dS = I \cdot d\Phi,$$

где $dS = l \cdot dx$ – изменение площади контура; $d\Phi = B \cdot dS$ – изменение потока, пронизывающего контур.

Полученная формула справедлива не только для физически малого изменения потока, но и для конечного изменения:

$$dA = I \cdot d\Phi, \quad (4.16)$$

$$\Delta A = I \cdot \Delta\Phi = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1), \quad (4.17)$$

где Φ_2 и Φ_1 – потоки магнитной индукции через контур с током в конечный и начальный моменты времени, соответственно.

Важно отметить, что работа совершается не за счёт энергии магнитного поля, а за счёт энергии источника тока в контуре.

На данном принципе работают электрические двигатели. Ток в рамке, представленной на рис. 4.18, создаёт магнитный момент \mathbf{P}_m , который в магнитном поле стремится развернуться вдоль вектора \mathbf{B} .

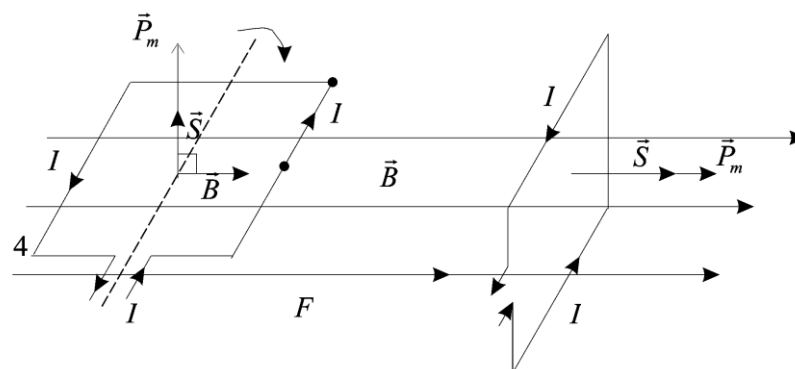


Рисунок 4.18 – В электрическом двигателе рамка с током имеет магнитный момент P_m , который разворачивается вдоль магнитного поля B

В конечном положении (см. рис. 4.18б), магнитный поток:

$$\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos 0^\circ = B \cdot S$$

В начальном положении (см. рис. 4.18а), поток равен:

$$\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Ток совершает работу:

$$A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot B \cdot S$$

Обычно в электродвигателе ток поочерёдно пропускают через несколько обмоток, повёрнутых друг относительно друга так, что момент силы $M = P_m \times B$ был близок к максимальному. Этому положению соответствует положение обмотки на рис. 4.18а. В результате такого расположения обмоток двигатель в любой момент времени развивает момент силы близкий к максимальному.

Можно показать, что потенциальная энергия рамки с током в магнитном поле равна: $W_{\Pi} = -(P_m \cdot B)$. Она минимальна (отрицательна) и равна $(-P_m B)$ в положении равновесия, когда магнитный момент рамки P_m направлен по направлению магнитного поля B , (см. рис. 4.18б). Потенциальная энергия рамки с током равна нулю, когда P_m направлен перпендикулярно магнитному полю B (см. рис. 4.18а).

4.12 Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Перейдём теперь к действию магнитного поля на движущиеся заряды. Поскольку ток есть движение зарядов, то из закона Ампера нетрудно получить силу, действующую на движущийся заряд в магнитном поле. Её обычно называют силой Лоренца:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \times \vec{B}, \quad (4.18)$$

(Сила Лоренца)

где q – величина заряда частицы;

V – скорость частицы;

B – индукция магнитного поля.

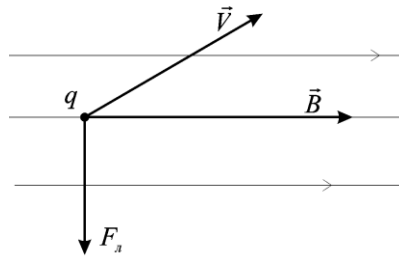


Рисунок 4.19 – Направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд

На рис. 4.19 показано направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд. При сравнении с рис. 4.11, видна эквивалентность силы Лоренца и силы Ампера.

Если заряженная частица влетает в магнитное поле, перпендикулярно вектору \mathbf{B} (см. рис.4.20), то под действием силы Лоренца положительная частица начинает вращаться в одну сторону, а отрицательная – в другую. Если скорость заряженной частицы не перпендикулярна магнитным линиям, то частица будет двигаться по спиралям.

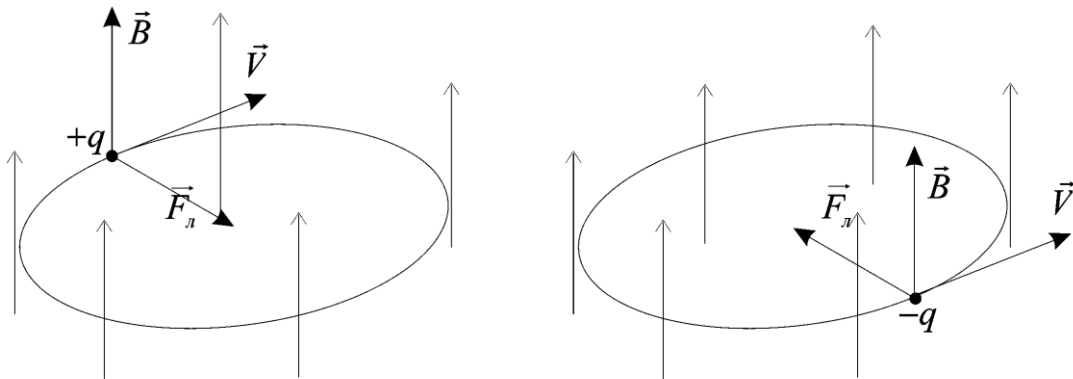


Рисунок 4.20. В магнитном поле \mathbf{B} , перпендикулярном скорости \mathbf{V} , положительно и отрицательно заряженные частицы движутся в противоположных направлениях по окружностям

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ, МАГНЕТИКИ

В предыдущих х мы рассматривали токи и магнитные поля в вакууме. Теперь рассмотрим магнитные поля в веществе.

5.1 Магнитные моменты атомов

Магнетики это вещества, способные приобретать магнитные свойства во внешнем магнитном поле.

Причина заключается в том, что движение электронов в атомах эквивалентно замкнутым контурам с током .

Орбитальный магнитный момент электрона (см. рис. 5.1):

$$\vec{P}_m = I \cdot \vec{S} = e \cdot v \cdot \vec{S}, \quad (5.1)$$

где v - число оборотов электрона на орбите за 1 секунду.

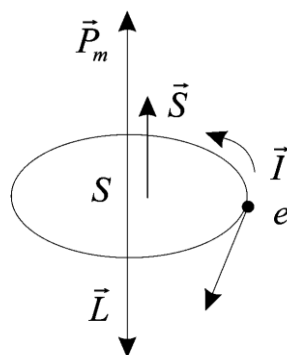


Рисунок 5.1 – Орбитальный магнитный момент электрона

Орбитальный магнитный момент атома складывается из магнитных моментов всех электронов атома.

$$\vec{P}_m = \sum_i \vec{P}_{m_i}, \quad (5.2)$$

где i – номера электронов в атоме.

Существует еще собственное вращение электрона – спин. Оно дает спиновой магнитный момент, который добавляется к орбитальному магнитному моменту:

$$\vec{P}_m = \sum_i \vec{P}_{m_i} + \sum_i \vec{P}_{ms_i}$$

Этот магнитный момент существует у каждой молекулы независимо от наличия магнитного поля.

В некоторых симметричных атомах орбитальные и спиновые моменты могут взаимно компенсироваться, давая нулевой суммарный магнитный момент атома $\vec{P}_m=0$.

5.2 Намагниченность. Микро- и Макро- токи

Введём понятие вектора намагниченности.

Вектор намагниченности \vec{J} - отношение магнитного момента малого объема ΔV вещества к величине этого объема.

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{P}_m, \quad (5.3)$$

где \vec{P}_m - магнитные моменты атомов.

Физический смысл \vec{J} - это магнитный момент единицы объема вещества.

Различают два типа токов, создающих магнитное поле:

1) Микротоки - токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах.

2) Макротоки - токи проводимости.

Важно отметить, что магнитное поле создается любыми токами, независимо от их природы.

5.3. Типы магнетиков: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

Диамагнетики – вещества, у которых магнитные моменты атомов (молекул) в отсутствие магнитного поля равны нулю (векторная сумма орбитальных моментов всех электронов атома равна нулю), ($P_m=0$).

Но в магнитном поле у каждого атома появляется наведенный (дополнительный) магнитный момент $\Delta P_m \sim B$ следовательно $J \sim \Delta P_m \sim B$ откуда намагниченность можно выразить соотношением:

$$\vec{J} = \frac{\chi'}{\mu_0} \vec{B}, \text{ диамагнетики } \chi' < 0, \quad (5.4)$$

где χ' - (хи) коэффициент пропорциональности.

Парамагнетики – вещества, у которых магнитные моменты атомов (молекул) в отсутствие внешнего магнитного поля отличны от нуля ($P_m \neq 0$).

В магнитном поле (внешнем) магнитные моменты атомов стремятся ориентироваться вдоль внешнего поля (тепловое движение этому препятствует). В результате степень ориентации и намагниченность тем сильнее, чем больше магнитное поле: $J \sim B$. Вводя коэффициент пропорциональности, получим:

$$\vec{J} = \frac{\chi'}{\mu_0} \vec{B}, \text{ парамагнетики } \chi' > 0. \quad (5.5)$$

Ферромагнетики – вещества, у которых внутреннее магнитное поле в сотни раз превышает вызвавшее его внешнее поле, но для них также справедливо уравнение:

$$\vec{J} = \frac{\chi'}{\mu_0} \vec{B}, \text{ ферромагнетики } \chi' \approx 1. \quad (5.6)$$

Более подробно свойства магнетиков описаны в приложении 5

5.4. Напряженность магнитного поля. Закон полного тока (циркуляция вектора напряженности) для магнитного поля в веществе. Магнитная восприимчивость вещества. Магнитная проницаемость среды

Итак, поле в веществе B складывается из внешнего магнитного поля B_0 и внутреннего (наведенного) $B_{\text{внутр}}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{внутр}}.$$

Напряженностью магнитного поля называется вектор:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

Можно показать, что закон полного тока в веществе приобретает вид:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{макро}} \quad (5.7)$$

Для изотропной среды:

$$\vec{J} = \frac{\chi'}{\mu_0} \vec{B} \text{ и } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} (1 - \chi').$$

Магнитной восприимчивостью вещества χ называется величина, связанная с χ' соотношением:

$$1 + \chi = \frac{1}{1 - \chi'}. \quad (5.8)$$

Тогда

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \cdot (1 + \chi)}.$$

Величина $\mu = 1 + \chi$ - называется **магнитной проницаемостью среды**. С учётом последнего замечания получаем связь **H** и **B** :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \cdot \mu}, \quad \text{или} \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}, \quad (5.9)$$

где **H** - напряженность магнитного поля в веществе;

B - магнитная индукция в веществе;

μ - магнитная проницаемость среды:

$$\mu = 1 + \chi, \quad (5.10)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Ниже приведем значения магнитной проницаемости, магнитной восприимчивости и коэффициентов пропорциональности для следующих категорий веществ:

Для вакуума $\mu=1$	$\chi=0$	$\chi'=0$
У диамагнетиков $\mu<1$	$\chi<0$	$\chi'<0$
У парамагнетиков $\mu>1$	$\chi>0$	$\chi'>0$
У ферромагнетиков $\mu>>1$	$\chi>>1$	$\chi'\approx 1$

5.5 Явление электромагнитной индукции. Законы Фарадея и Ленца

Может ли магнитное поле создать ток в проводнике? На этот вопрос ответил Фарадей. Он доказал, что магнитное поле может создать ток.

Явление электромагнитной индукции заключается в появлении ЭДС в контурах, магнитный поток, через которые меняется.

Если контур замкнуть – то по нему пойдет индукционный ток (см. рис. 5.2).

Закон Фарадея. ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$, возникающая в замкнутом контуре, пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ_B , сцепленного с этим контуром.

$$\varepsilon_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (5.11)$$

(закон Фарадея)

Правило Ленца: возникающий в замкнутом контуре индукционный ток имеет такое направление, что стремится поддержать магнитный поток неизменным. Создаваемый им магнитный поток через контур

противодействует изменению магнитного потока, которое вызвало индукционный ток.

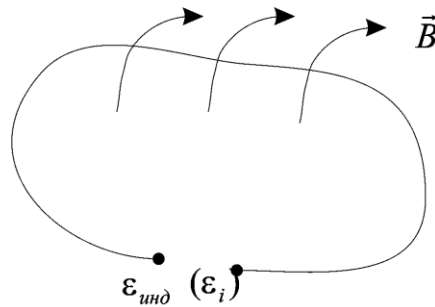


Рисунок 5.2 – Схема появления ЭДС индукции

5.6 Самоиндукция. Индуктивность. Токи замыкания и размыкания

Возникновение ЭДС индукции в контуре вследствие изменения магнитного потока, создаваемого током в этом же контуре называется самоиндукцией (см. рис. 5.3).

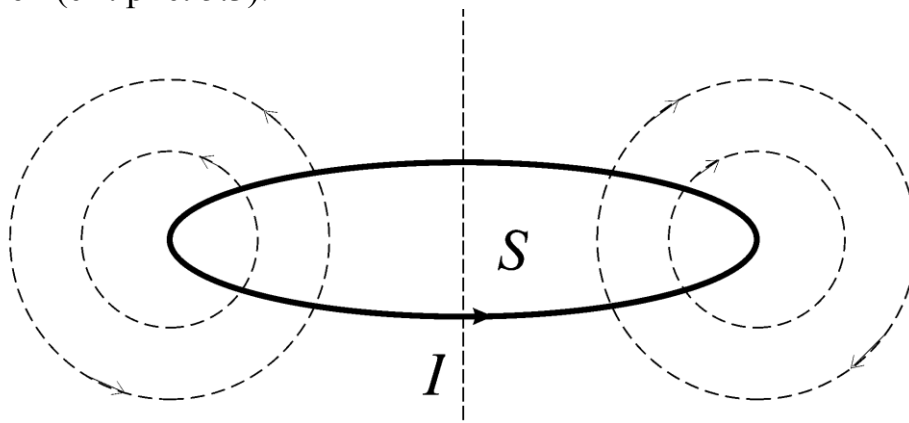


Рисунок 5.3 – Ток в контуре I создает собственное поле B и собственный поток Φ_B через контур S

Ток в контуре I создает собственное поле B и собственный поток Φ_B через контур S , (рис. 5.3). Причем $I \sim B \sim \Phi_B$. Следовательно, можно записать:

$$\Phi_B = L \cdot I, \quad (5.12)$$

где L – называют индуктивностью контура, L является коэффициентом пропорциональности.

Единица измерения индуктивности: $[L] = \text{В} \cdot \text{с} / \text{А} = \text{Гн}$ (Генри).

С учётом (5.12) получаем:

$$\varepsilon_{\text{самоинд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (5.13)$$

Если в катушке число витков равно N , то полный поток (потокосцепление) $\Psi = N \cdot \Phi_B$, и ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{\text{самоинд}} = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (5.14)$$

Экстратоки - это возникающие в проводнике токи самоиндукции.

При замыкании цепи и размыкании ток нарастает и убывает постепенно, если в цепи есть индуктивность L , (рис. 5.4).

1) **Размыкание.** Пусть при $t=0$ источник отключается, и цепь замыкается накоротко (ключ $1 \Rightarrow 2$).

$$I \cdot R = \varepsilon_{\text{самоинд}} = -L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad \text{откуда получаем} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид:

$$I = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right). \quad (5.15)$$

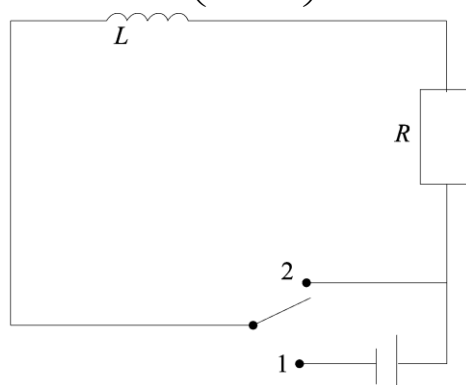


Рисунок 5.4 – При замыкании цепи и размыкании ток нарастает и убывает постепенно, если в цепи есть индуктивность L

График убывания тока в цепи представлен на рис. 5.5. Характерное время, за которое ток падает в $e=2.7$ раз, обозначается $\tau_0 = \frac{L}{R}$.

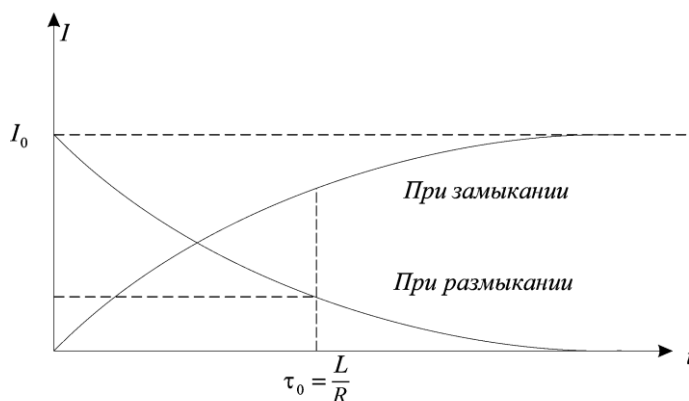


Рисунок 5.5 – График изменения тока в цепи, представленной на рис. 5.4

2) **При замыкании** (ключ $2 \Rightarrow 1$) ток нарастает также не мгновенно (см. рис. 5.5):

$$I = I_0 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)\right]. \quad (5.16)$$

Экстратоки объясняются тем, что появление тока в катушке означает появление магнитного поля, которое имеет запас энергии. Появление энергии в катушке и её исчезновение не может происходить мгновенно.

5.7 Взаимная индукция. Взаимная индуктивность

Если вблизи цепи 1 с изменяющимся током I_1 расположен контур 2, то в нем наводится ЭДС индукции (рис. 5.6). Это явление взаимной индукции.

Изменение I_1 вызовет изменение потока Φ_{12} через контур 2 и в нем возникнет ЭДС - это взаимная индукция. Аналогично, изменения I_2 вызывает ЭДС в контуре 1:

$$\varepsilon_{2 \text{ инд}} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt}. \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_{1 \text{ инд}} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \cdot \frac{dI_2}{dt}. \quad (5.18)$$

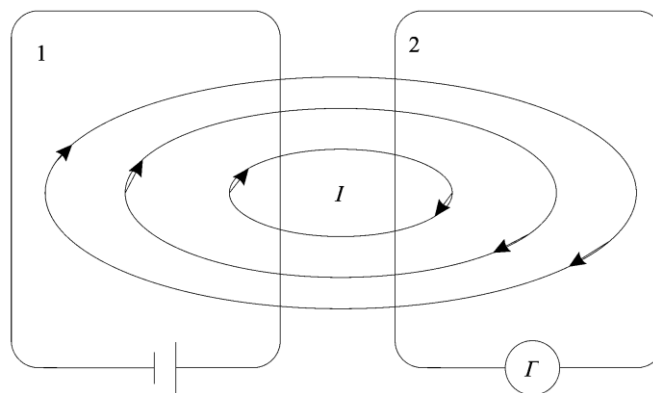


Рисунок 5.6 - Если вблизи цепи 1 с изменяющимся током I_1 расположен контур 2, то в нем находится ЭДС индукции

Оказывается, что коэффициенты пропорциональности, которые называются коэффициентами взаимной индукции, равны между собой:

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (5.19)$$

5.8 Энергия магнитного поля

Чтобы создать в контуре ток I , а значит, и магнитное поле, надо совершить работу A по преодолению ЭДС самоиндукции, которая препятствует нарастанию тока.

Чтобы увеличить поток надо совершить работу: $dA = I \cdot d\Phi$, но $d\Phi = L \cdot dI$, откуда получаем $dA = I \cdot L \cdot dI$. Общая работа по созданию тока вычисляется как интеграл:

$$A = L \cdot \int_0^I I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

Итак:

$$A = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

Работа по созданию тока в проводнике идет на создание магнитного поля вокруг проводника, т.е. это есть энергия магнитного поля.

$$W_m = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (5.20)$$

(Энергия магнитного поля в катушке индуктивности)

Можно показать, что если магнитное поле однородно, то энергия поля, заключенная в единице объема, или объемная плотность энергии магнитного поля равна:

$$w_{\text{магн}} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \frac{B^2}{2}. \quad (5.21)$$

т. к. напряженность магнитного поля $H = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu}$, то

$$w_{\text{магн}} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \mu \cdot H^2. \quad (5.22)$$

где B – индукция магнитного поля;

H – напряженность магнитного поля;

μ_0 – магнитная постоянная;

μ – магнитная проницаемость среды.

В приложении 6 и 7 рассмотрена теория и уравнения Максвелла.

6. КОЛЕБАНИЯ

6.1 Единый подход к колебаниям различной физической природы

Точное определение колебаний дать сложно. Объединяющим для колебаний является периодичность или приблизительная периодичность процессов.

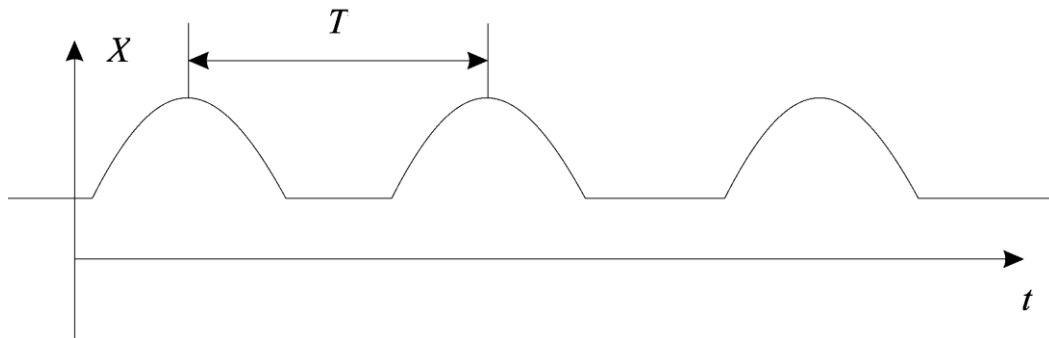


Рисунок 6.1 – Периодический процесс с периодом T

Строго периодичным называется процесс бесконечный во времени, для которого справедливо $f(t)=f(t+T)$, здесь T – период.

Очевидно, что таких процессов в природе не существует, хотя бы потому, что любой процесс ограничен по времени. Поэтому в определении колебаний говорится о приблизительной периодичности процесса.

Примеры колебаний: маятник часов, приливы-отливы, переменный ток, звук, электромагнитные волны. При этом периодически изменяются различные физические величины: координаты, ток, плотность, напряжённость электрического и магнитного поля.

Самое удивительное в том, что совершенно различные с виду колебательные явления описываются одинаковыми математическими уравнениями и поэтому обладают одинаковыми свойствами. Изучая колебания в механике, можно понять некоторые оптические явления и наоборот.

Советский физик А.И. Мандельштам с полным основанием утверждал, что главные открытия в физике по существу были колебательными.

Хотя мы будем рассматривать только временные колебания, повторяющиеся во времени, следует знать, что понятие колебаний распространяют и на процессы, повторяющиеся в пространстве. Это т.н. пространственные колебания.

6.2. Гармонические колебания

Рассмотрим колебания тела на пружине в отсутствие трения (см. рис.6.2): m – масса тела, k – жёсткость пружины. На тело действует упругая возвращающая сила $F=-k \cdot x$, где x – смещение из положения равновесия.

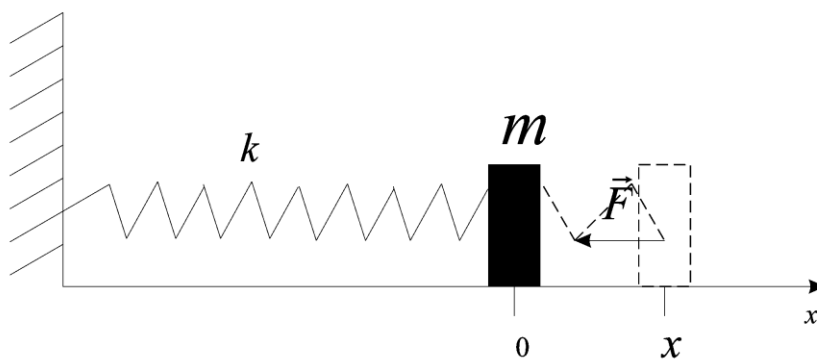


Рисунок 6.2 – Колебания тела на пружине

Из уравнения движения $m \cdot a = F$ получаем дифференциальное уравнение для гармонических колебаний:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad (6.1)$$

Это обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решением является **гармоническое колебание**, которое имеет вид (см. рис. 6.3):

$$X = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad (6.2)$$

где A – амплитуда колебания, (амплитуда соответствует максимальному отклонению от положения равновесия),

$(\omega \cdot t + \varphi)$ – фаза колебания,

φ – начальная фаза, соответствует фазе при $t=0$.

$\omega = 2\pi \cdot \nu$ – круговая частота, ее физический смысл – изменение фазы колебания за 1 секунду

$\nu = 1/T$ – частота колебаний, это число полных колебаний за единицу времени. Единица измерения $[\nu] = \text{Гц}$.

$T = 1/\nu$ – период колебаний, это время одного полного колебания. $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Гармоническое колебание можно записать в другом виде:

$$X = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = A \cos(2\pi\nu \cdot t + \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$$

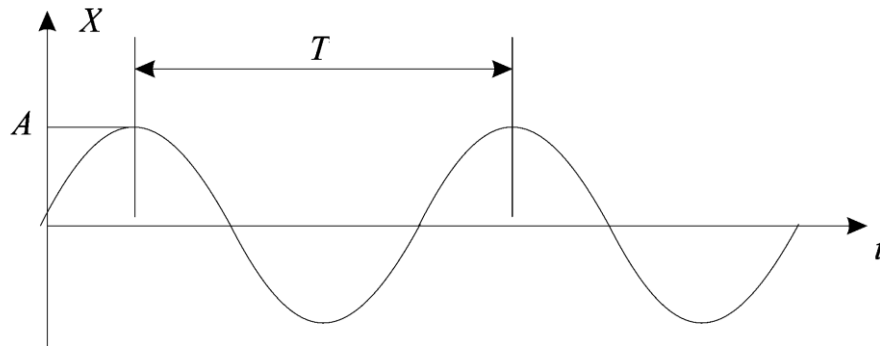


Рисунок 6.3 – График гармонического колебания

Далее мы убедимся, что такое же дифференциальное уравнение (6.1) и такое же решение (6.2) будет описывать огромное число колебательных процессов. Отличие будет заключаться только в коэффициенте перед переменной x . (Вместо k/m будут другие параметры соответствующей колебательной системы).

Величины A и φ в (6.2) определяются начальными или граничными условиями, ω – круговая частота, определяется параметрами колебательной системы: оказывается, что всегда ω^2 равна коэффициенту перед x в уравнении (6.3):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.3)$$

Круговая частота ω связана с обычной частотой ν соотношением:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu. \quad (6.4)$$

Единица измерения $[\nu] = \text{Гц}$.

Уравнение гармонических колебаний описывает бесконечное число различных физических явлений:

1) звук: $\Delta p = \Delta p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – изменение давления в точке,

2) свет: $E = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – напряженность электрического поля в точке экрана.

Энергия гармонических колебаний грузика на пружинке складывается из кинетической энергии и потенциальной ($W = W_K + W_{\Pi}$).

Кинетическая энергия грузика m равна:

$$W_K = \frac{m \cdot V^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2} \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi).$$

Аналогичное выражение для потенциальной энергии сжатой пружины имеет вид:

$$W_{\Pi} = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{k}{2} \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi).$$

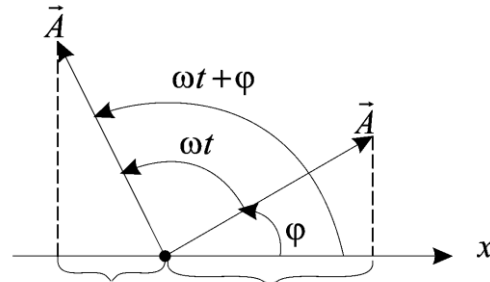
Учитывая что $\omega^2 = k/m$, получим выражение для полной энергии колебательной системы в любой момент времени:

$$W = W_K + W_{\Pi} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

Нетрудно видеть, что это выражение не зависит от времени и равно максимальной потенциальной энергии сжатой пружины.

6.3 Векторные диаграммы. Кинематика гармонических колебаний

Гармоническое колебание $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ можно представить на **векторной диаграмме** в виде проекции на ось x вектора длиной A , вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω (см. рис. 6.4).



$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad x(t=0)$$

Рисунок 6.4 – Представление колебания на векторной диаграмме

В момент времени $t=0$, фаза равна φ и вектор A отклонён на угол φ . В момент времени t угол увеличивается на $\omega \cdot t$ и полный угол поворота вектора A составляет $(\omega \cdot t + \varphi)$.

6.4. Сложение (суперпозиция) скалярных колебаний и векторных колебаний одного направления

Пример сложения скалярных колебаний - звук. Два звуковых колебаний, имеющих одинаковую круговую частоту ω создают колебания давления, которые имеют вид:

$$\Delta p_1 = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad \Delta p_2 = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2).$$

При сложении двух звуковых волн получаем результирующее колебание:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$$

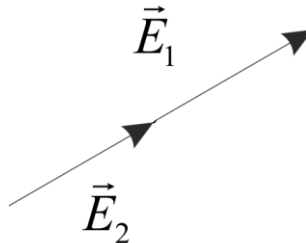


Рисунок 6.5 – Пример сложения векторных колебаний \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , имеющих одинаковое направление

Пример векторных колебаний – электромагнитные волны, например свет. Напряжённость электрического поля в некоторой точке экрана можно выразить гармоническими колебаниями:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

При сложении двух световых волн в данной точке экрана они складываются скалярно $E=E_1+E_2$ только при условии, что колебания имеют одинаковое направление, т.е. $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2$, иначе колебания должны складываться векторно (рис. 6.5).

Пусть складываются векторные колебания одного направления (или скалярные колебания), имеющие одинаковую круговую частоту (важна одинаковость частот $\omega_1=\omega_2=\omega$):

$$X_1 = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad X_2 = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

Тогда их суперпозиция также даёт гармоническое колебание с некоторой амплитудой A и фазой φ :

$$X = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

где амплитуда и фаза результирующего колебания определяются соотношениями:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{и} \quad (6.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}.$$

Геометрическое сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты эквивалентно сложению векторов на векторной диаграмме (см. рис. 6.6.) При этом результирующий вектор A и весь треугольник вращается с частотой ω против часовой стрелки. А результирующее колебание x является проекцией вектора A на горизонтальную ось X .

Если складываются колебания от многих источников, то последовательно складываются все векторы (см. рис. 6.7).

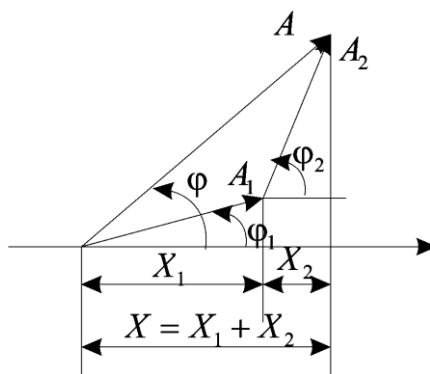


Рисунок 6.6 – Сложение двух колебаний одинаковой частоты на векторной диаграмме

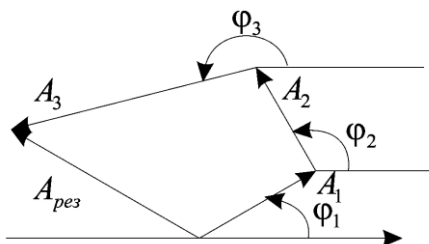


Рисунок 6.7 – Сложение трех скалярных колебаний одинаковой частоты

Условия *max* и *min* при сложении двух колебаний:

1) **Условие *max* амплитуды** реализуется, если $\varphi_1 = \varphi_2$ (точнее $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \cdot n$, n – целое число). В этом случае $A_{рез} = A_1 + A_2$ – получим в сумме максимальную амплитуду результирующего колебания (см. рис. 6.8). Поэтому условие максимума для разности фаз имеет вид:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \cdot n, n=0, \pm 1, \pm 2... \quad (6.6)$$

(условие *max*)

2) **Условие *min* амплитуды** реализуется, если $\varphi_1 = \pi + \varphi_2$ (точнее $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + 2\pi \cdot n$, n – целое число). В этом случае $A_{рез} = A_1 - A_2$ – получим в сумме минимальную амплитуду результирующего колебания (см. рис. 6.9). Поэтому **условие минимума** имеет вид:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + 2\pi \cdot n, n=0, \pm 1, \pm 2... \quad (6.7)$$

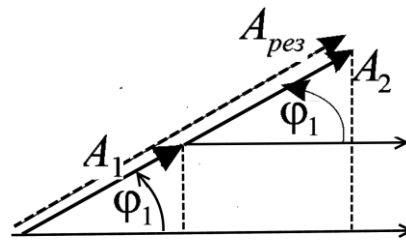


Рисунок 6.8 – Векторная диаграмма для условия максимума при сложении двух колебаний $A_{рез} = A_1 + A_2$

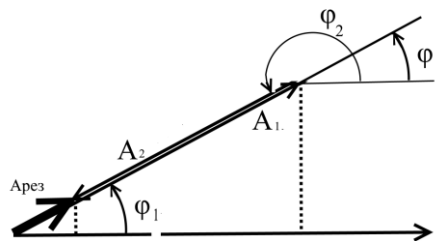


Рисунок 6.9 – Векторная диаграмма для условия минимума при сложении двух колебаний $A_{рез} = |A_1 - A_2|$

6.5 Электрический колебательный контур

Простейший колебательный контур состоит из индуктивности L и параллельно подключённой ёмкости C . (см. рис. 6.10).

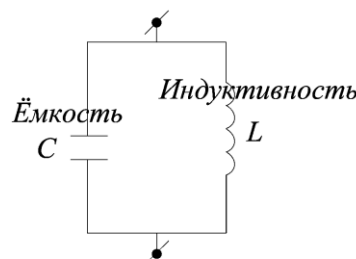


Рисунок 6.10 – Колебательный контур

$U_C = \frac{q}{C}$ – разность потенциалов на конденсаторе;

$$U_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} - \text{разность потенциалов на катушке.}$$

При параллельном соединении $U_L = U_C$ и мы получаем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C \cdot L} \cdot q = 0$$

Его решение: $q = q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$. Коэффициент перед переменной q равен ω^2 , поэтому для колебательного контура:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}, \quad T_{\text{конт}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}. \quad (6.8)$$

7. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

7.1. Свободные затухающие колебания. Логарифмический декремент и добротность

Часто на тело действует не только упругая сила $F = -k \cdot x$, но и сила сопротивления или трения $F_{\text{тр}} = -r \cdot dx/dt$, пропорциональная скорости тела (противоположно ей направлена). Уравнение движения приобретает вид:

$$m \cdot a = -k \cdot x - r \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \text{или} \quad (7.1)$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + r \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0.$$

Введем коэффициент затухания $\beta = r/(2 \cdot m)$.

1) При $\frac{r}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$, ($\beta < \omega_0$), решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (7.2)$$

Это **уравнение свободных затухающих колебаний**. Здесь параметры A и φ определяются начальными условиями.

По определению величину $\beta = r/(2 \cdot m)$ называют **коэффициентом затухания**,

Частота затухающих колебаний определяется формулой:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2 \cdot m}\right)^2} \quad (7.3)$$

$\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ является **частотой свободных незатухающих колебаний**.

График затухающего колебания представлен на рис. 7.1. Амплитуда такого колебания убывает по закону $A_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t)$.

Строго говоря, это график не периодической функции, но для него можно ввести условный период $T = 2\pi/\omega$.

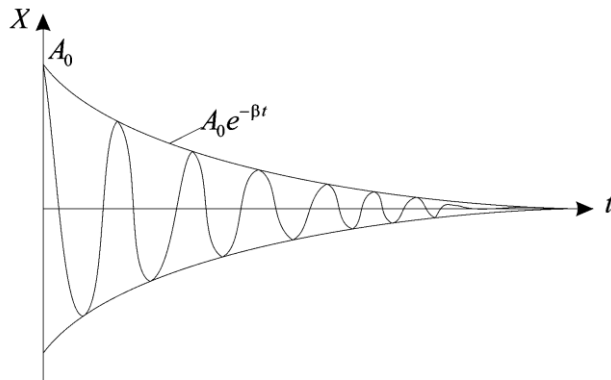


Рисунок 7.1 – График затухающего колебания

2) При большом коэффициенте затухания $\beta > \omega_0$ решением является **апериодическое колебание**. При этом амплитуда без колебаний быстро спадает до нуля.

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения отклонения системы в моменты времени t и $t+T$:

$$\mathcal{D} = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \beta \cdot T \quad (7.4)$$

Величина $1/\mathcal{D}$ равна числу колебаний (числу периодов) за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Добротностью Q называется величина $Q = \pi/\mathcal{D}$. Чем выше добротность колебательной системы, тем медленнее затухают колебания.

7.2 Вынужденные колебания. Резонанс

Если на колебательную систему действует периодическая внешняя вынуждающая сила $F(t)$, то колебания называют **вынужденными**.

Наиболее часто встречается гармоническое возмущение $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t)$, где Ω – частота возмущающей силы. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (7.5)$$

Его решение:

$$X = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1),$$

где

$$A = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot \Omega^2}}, \quad (7.6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2 \cdot \beta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

$$\beta = \frac{r}{2 \cdot m},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

На рис. 7.2 и 7.3 приведены зависимости амплитуды A и фазы φ_1 от частоты Ω внешней силы (резонансные кривые).

1) При $\Omega \ll \omega_0$ амплитуда $A \approx F_0/(m \cdot \omega^2) = F_0/k$ имеем статическую деформацию под действием постоянной силы F_0 .

2) При $\Omega \gg \omega_0$ амплитуда $A \approx F_0/(m \cdot \Omega^2)$, т.е. амплитуда быстро уменьшается с ростом частоты Ω .

3) Максимальная амплитуда A_{\max} соответствует частоте резонанса:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \beta^2}$$

При этом

$$A_{\max} = \frac{F_0}{2 \cdot \beta \cdot m \cdot \omega},$$

где $\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ - собственная циклическая частота колебаний системы.

При малом коэффициенте затухания β резонанс наступает при частоте возмущений близкой к частоте собственных колебаний системы.

Отметим, что выражение (7.6) для амплитуды и фазы вынужденных колебаний относятся к установившемуся колебаниям, которые получаются в результате длительного воздействия вынуждающей силы. В такое состояние колебательная система переходит не сразу, а в результате некоторого переходного процесса, изучение которого выходит за рамки нашего курса.

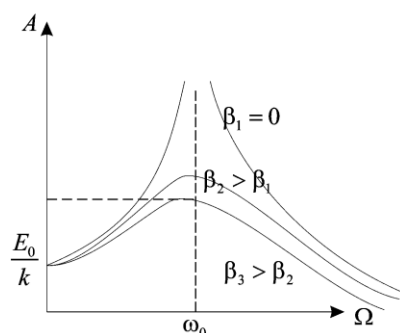


Рисунок 7.2 – Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы Ω

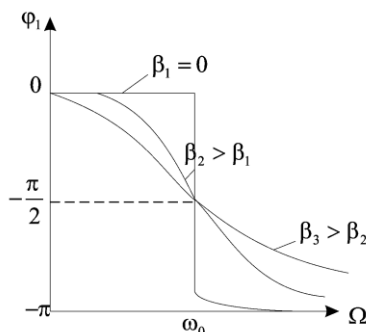


Рисунок 7.3 – Зависимость фазы вынужденных колебаний от частоты вынужденных колебаний Ω

7.3. Волны. Образование волн в среде

Возмущения, распространяющиеся в пространстве (среде) называют волнами.

Примеры:

1) **Механические волны:** звук в веществе, струна, приливы.

2) **Электромагнитные волны:** свет, радио, рентген (распространяются даже в вакууме).

3) **Поверхностные волны:** волны на поверхности воды, звук над водой.

Несмотря на разнообразие волновых явлений, они описываются одинаковыми законами, которые мы и будем изучать. Общность волновых законов позволяет, изучив детально волны одного типа, например звуковые, перенести все закономерности на любые другие волны, например, на электромагнитные.

Рассмотрим горизонтально натянутый резиновый жгут (см. рис.7.4.). Если начало жгута возмутить, резко сместив вверх-вниз по закону $S_1(t)$, где S_1 – отклонение по вертикали, t – время, то вдоль жгута побегит волна с некоторой скоростью V . Это означает, что движение точек жгута будет аналогично движению начала жгута, но с задержкой по времени $\Delta t = x/V$, где x – положение рассматриваемой точки жгута.

$$S(x,t) = S_1\left(t - \frac{x}{V}\right), \quad (7.7)$$

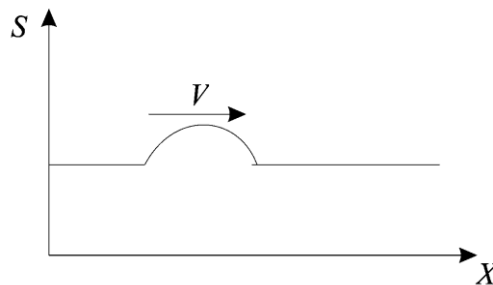


Рисунок 7.4 – Возмущение натянутого резинового жгута

Это наиболее общий вид **уравнения бегущей волны**, распространяющейся вдоль оси X вправо (см. рис. 7.4). Аналогично, волна, бегущая влево, имеет вид:

$$S(x,t) = S_1\left(t + \frac{x}{V}\right). \quad (7.8)$$

Одно из основных свойств бегущих волн то, что они переносят энергию, хотя переноса вещества, как правило, не происходит: точки жгута вдоль X не сдвигаются. Например, электромагнитные волны, создаваемые переменным электрическим током, передают энергию от электростанции к лампочке, хотя заряды в проводах остаются на месте.

Если начальное возмущение $S_1(t)$ синусоидально: $S_1 = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, то получим уравнение **синусоидальной или гармонической бегущей волны**:

$$S = A \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{V}\right) + \varphi\right]. \quad (7.9)$$

Так как круговая частота ω связана с периодом T соотношением $\omega=2\pi/T$, то (7.9) можно представить в другом виде:

$$S = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \omega \cdot \frac{x}{v} + \phi\right) = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{T \cdot v} + \phi\right) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \phi), \quad (7.9)$$

где $A=\text{const}$ – **амплитуда волны**;

$\omega=2\pi/T$ – **круговая частота**;

T – **период волны**, и введены понятия:

длина волны:

$$\lambda = v \cdot T \quad \text{и} \quad (7.10)$$

волновое число:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (7.11)$$

Аргумент под косинусом называется **фазой волны**:

$$\Phi = \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi \right] = (\omega \cdot t - k \cdot x + \phi) \quad (7.12)$$

При дополнительном смещении по оси X на λ фаза волны изменяется на 2π :

$$\Phi(x_0 + \lambda) = \left[\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} (x_0 + \lambda) + \phi \right] = \left[\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} x + \phi \right] - 2 \cdot \pi = \Phi(x_0) - 2 \cdot \pi$$

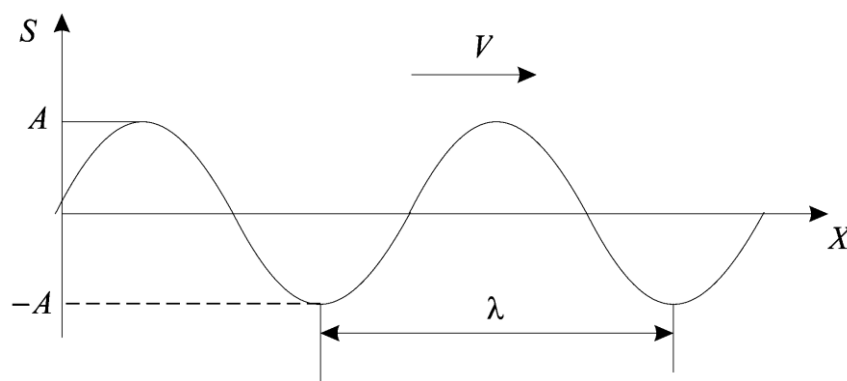


Рисунок 7.5 – График бегущей синусоидальной волны

Волновой поверхностью называют геометрическое место точек, имеющих постоянную фазу.

Фронт волны - волновая поверхность, отделяющая возмущенную часть среды от невозмущенной.

Если волновые поверхности параллельные плоскости, то волну называют **плоской**.

Волны на рис. 7.6 являются плоскими, т.к. фаза не зависит от Y и Z , и для каждого значения X и t является константой.

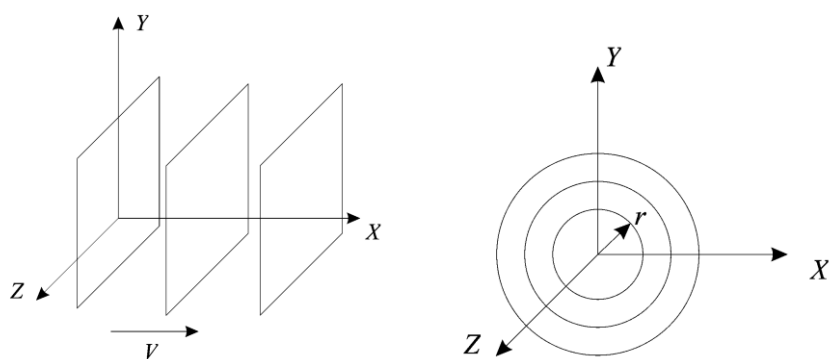


Рисунок 7.6 – Плоская и сферическая волны

7.4 Продольные и поперечные волны

Если вектор возмущения (смещение частиц среды) совпадает с направлением распространения волны, то такая волна называется **продольной** (рис.7.7, график 2).

Если смещение частиц среды происходит перпендикулярно направлению распространения волны, то волну называют **поперечной** (рис.7.7 график 3).

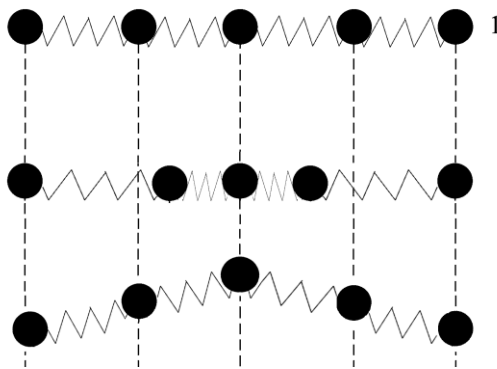


Рисунок 7.7 – Продольное и поперечное смещение частиц среды

Продольные механические волны бывают в средах, которые сопротивляются сжатию (газ, жидкость, твердые тела). Поперечные механические волны могут возникать на границах раздела сред (поверхностные волны) и в средах, которые сопротивляются сдвигу (в газах и жидкостях поперечных волн не бывает).

7.5 Волновое уравнение. Фазовая и групповая скорости распространения волн

Рассмотрим участок упругого жгута (см. рис.7.8). Деформация соседнего участка приводит к появлению упругой силы: $F_{\text{упр}} \sim \Delta S$ и $F_{\text{упр}} \sim 1/\Delta x$ в итоге $F_{\text{упр}} = k \cdot ds/dx$. Сила упругости пропорциональна относительной деформации ds/dx .

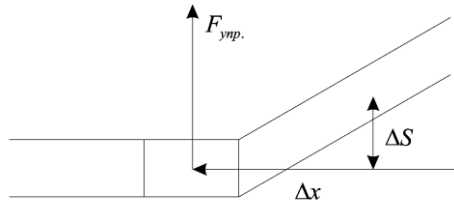


Рисунок 7.8 – Деформация соседнего участка упругого жгута приводит к появлению упругой силы

Уравнение движения участка для жгута длиной dx , (см. рис.7.9):

$$F_{\text{рез}} = F_1 - F_2 = k \cdot \left. \frac{dS}{dx} \right|_{\Delta x} - k \cdot \left. \frac{dS}{dx} \right|_0 = k \cdot \frac{\left. \frac{dS}{dx} \right|_{\Delta x} - \left. \frac{dS}{dx} \right|_0}{dX} \cdot dX = k \cdot \frac{d^2 S}{dx^2} \cdot dX,$$

где масса участка $m = \rho \cdot dx$;

ρ – масса жгута единичной длины.

Подставляя $F_{\text{рез}}$ в уравнение движения $F_{\text{рез}} = m \cdot a$, и, учитывая, что $a = d^2 S / dt^2$, получим:

$$k \cdot \frac{d^2 S}{dx^2} \cdot dx = \rho \cdot dx \cdot \frac{d^2 S}{dt^2}$$

В итоге получаем уравнение:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{\rho}{k} \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (7.13)$$

Это дифференциальное уравнение называют **волновым уравнением**.

Его решение можно представить как сумму двух бегущих волн:

$$S = S_1 \left(t - \frac{x}{V} \right) + S_2 \left(t + \frac{x}{V} \right) \quad (7.14)$$

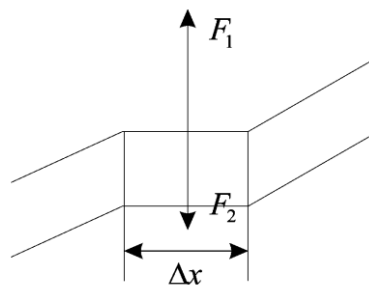


Рисунок 7.9 – Движения участка для жгута длиной dx

Если подставить (7.14) в (7.13), то оказывается, что коэффициент перед $d^2 S / dt^2$ равен $1/V^2$, т.е. скорость нашей волны $V = (k/\rho)^{1/2}$.

Скорость распространения V бесконечной синусоидальной волны называется **фазовой скоростью**. В случае плоской синусоидальной волны V является скоростью перемещения точек одинаковых фаз. Действительно, из условия постоянства фазы $\omega \cdot t - k \cdot x + \phi = \text{const}$, следует, что:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Идеальная синусоида бесконечна в пространстве.

В реальных средах скорость распространения волн зависит от их частоты. Это явление называется **дисперсией**.

8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

8.1 Дифференциальное уравнение электромагнитной волны в вакууме

В вакууме или в непроводящей среде зарядов и токов нет $\rho=0$, $\mathbf{j}=0$. Из уравнений Максвелла (Приложение 7) следует, что напряженности электрического поля \mathbf{E} и напряженности магнитного поля \mathbf{H} подчиняются уравнениям вида:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

где $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Это волновые уравнения, решением которых является электромагнитная волна, например, которая распространяется вдоль оси x , (см. рис. 8.1):

$$E_y = E_m \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \phi)$$

$$H_z = H_m \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \phi),$$

где E_m, H_m – амплитуды волн; $\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi/T$ – круговая частота;
 $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $\lambda = V \cdot T = V/\nu$ – длина волны;
 T – период.

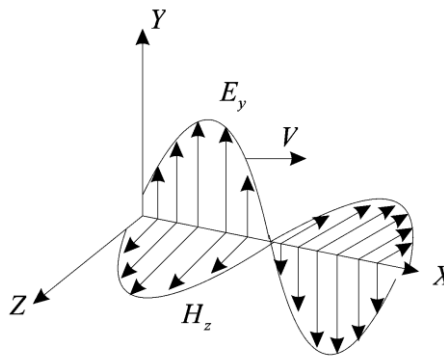


Рисунок 8.1 – Электромагнитная волна

Скорость распространения волны V :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{n},$$

где $c = 1/(\mu_0 \cdot \varepsilon_0)^{1/2}$ – скорость света в вакууме, здесь:

ε_0 – электрическая постоянная;

μ_0 – магнитная постоянная;

ε – диэлектрическая проницаемость среды;
 μ – магнитная проницаемость среды;
 $n=(\varepsilon \cdot \mu)^{1/2}$ – показатель преломления среды. Он указывает во сколько раз скорость в среде меньше, чем в вакууме.

Электрическая и магнитная напряженности поля в волне связаны между собой соотношением:

$$E \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0} \quad (8.2)$$

Из данного уравнения следует, что максимумы и минимумы электрического и магнитного полей совпадают.

8.2 Энергия электромагнитных волн. Интенсивность электромагнитных волн

Мгновенное значение объемной плотности энергии электромагнитного поля равно сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w_{\text{МГН}} = w_E + w_H = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot \mu_0 \cdot H^2 \quad (8.3)$$

где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, соответственно;
 ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Согласно (8.2), $E \cdot (\varepsilon \cdot \varepsilon_0)^{1/2} = H \cdot (\mu \cdot \mu_0)^{1/2}$, поэтому

$$w_{\text{МГН}} = E^2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 = H^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 = \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0} \cdot E \cdot H = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{\vec{V}} \quad (8.4)$$

где $V=1/(\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0)^{1/2}$ – скорость электромагнитной волны;

$\vec{E} \times \vec{H}$ – означает векторное произведение векторов.

Если в (8.4) подставить значение мгновенной напряженности электрического поля \vec{E} для плоской монохроматической волны, то получим:

$$w_{\text{МГН}} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$$

Но такое выражение имеет мгновенное значение объемной плотности энергии в момент времени t в некоторой точке пространства (x). Обычно рассматривается среднее за период значение w . Напомним, что усреднение за период мы обозначаем скобками $\langle \dots \rangle$:

$$w = w_{\text{ср}} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \left\langle \sin^2(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot \mu_0 \cdot H_0^2, \quad (8.5)$$

где учтено, что $\langle \sin^2(\dots) \rangle = 1/2$.

Данная энергия распространяется вместе с волной со скоростью света. Мгновенный поток энергии через единичную площадку (плотность потока) равна:

$$\vec{P} = w_{\text{МГН}} \cdot \vec{V}.$$

Используя соотношение (8.4) $w_{\text{МГН}} \cdot \vec{V} = \vec{E} \times \vec{H}$, получаем:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (8.6)$$

По определению вектор $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ называют – **вектором Пойтинга**. Его смысл соответствует мгновенной плотности потока энергии электромагнитных волн. (Часто эту величину обозначают буквой $S = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$)

Интенсивностью электромагнитной волны называют модуль вектора Пойтинга, усредненный за один период:

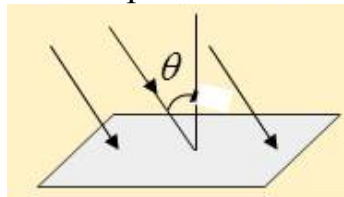
$$I = \langle \mathbf{P} \rangle = \omega_{\text{ср}} \cdot V = \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \cdot \epsilon_0}} \cdot \frac{H_0^2}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{\mu \cdot \mu_0}} \cdot \frac{E_0^2}{2} = \frac{1}{2} E_0 \cdot H_0, \quad (8.7)$$

Импульс и давление электромагнитных волн.

Электромагнитная волна обладает импульсом:

$$p = \frac{W}{c}$$

Здесь W – энергия волны, а c – скорость света.



Если волна интенсивностью I падает на поверхность с коэффициентом отражения R под углом падения α , то она оказывает давление:

$$p = \frac{I}{c} (1 + R) \cdot \cos^2(\alpha)$$

Существуют проекты построения космических аппаратов, которые будут разгоняться за счет топлива, которое улетает из корабля с самой большой скоростью – скоростью света. Таким топливом является электромагнитные волны. Другие проекты предлагают использовать космический парус, который будет отражать свет, идущий от соседних ярких звезд. Однако следует понимать, что давление света очень мало, и эти проекты пока нереальны.

8.3 Фазовая и групповая скорость электромагнитной волны

Напомним, что *скорость распространения V бесконечной синусоидальной волны называется фазовой скоростью*.

Эта скорость V является скоростью перемещения точек одинаковых фаз у бесконечной синусоиды. Из условия постоянства фазы $(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = \text{const}$, следует, что фазовая скорость:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

В вакууме фазовая скорость всех электромагнитных волн не зависит от их частоты и равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

В реальных средах фазовая скорость распространения волн зависит от их частоты. Это явление называется дисперсией.

Реальная волна ограничена как во времени, так и в пространстве. Типичный пример ограниченной волны – локальный одиночный экстремум,

«горб» (см. рис. 8.2). Оказывается, что скорость распространения такого «горба» отличается от фазовой.

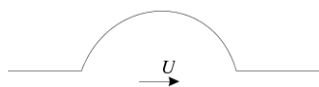


Рисунок 8.2 – Пример ограниченной волны

Групповой скоростью U называют скорость распространения локальных экстремумов (например, одиночного «горба», см. рис. 8.2.). С этой скоростью переносится и информация, передаваемая волной. У синусоидальной волны групповая скорость равна фазовой $U=V$. Оказывается, что, в случае наличия **дисперсии**, т.е., если фазовая скорость волны V зависит от длины волны λ , групповая скорость U отличается от фазовой V и может быть вычислена по формуле:

$$U = V - \lambda \cdot \frac{dV}{d\lambda}. \quad (8.8)$$

Именно с групповой скоростью U распространяется информация и энергия волны.

8.4 Образование стоячих волн. Поведение волн на границе двух сред

В линейных средах волны распространяются независимо друг от друга. Это **принцип суперпозиции**. Если навстречу друг другу распространяются две синусоидальные волны (см. рис. 8.3):

$$y_1 = A \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{V} \right) \right] \quad y_2 = A \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{V} \right) \right]$$

при их сложении (наложении) образуется стоячая волна:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot A \cdot \cos \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \cos \cdot (\omega \cdot t). \quad (8.9)$$

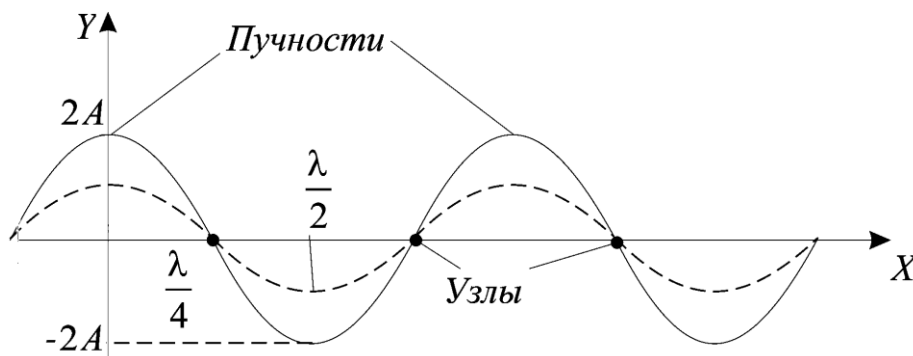


Рисунок 8.3 – Стоячая волна, образованная сложением двух встречно распространяемых колебаний

В такой волне координаты максимумов и нулей не перемещаются в пространстве, волна «стоит» на месте (см. рис. 8.3).

Нули стоячей волны называются **узлами**. В узлах $\cos(2\pi \cdot x/\lambda)=0$. Условие узла: $x=\lambda/4+n\cdot\lambda/2$, где n – целое число.

Точки максимальных амплитуд стоячих волн называют **пучностями**. В пучностях $\cos(2\pi \cdot x/\lambda)=1$, координаты пучности $x=n\cdot\lambda/2$, где n – целое число.

Если волна отражается от границы с более плотной средой, то в результате сложения прямой и отраженной волн на границе получается узел (пример: гитарная струна). При этом отраженная волна меняет свою фазу в месте отражения на противоположную (*потеря полуволны*).

При отражении от менее плотной среды фаза отраженной волны не меняется, поэтому прямая и отраженная волны в точке отражения складываются в фазе. На границе получается пучность. Этот пример изображен на рис. 8.3.

В заключение отметим, что свойства волн являются универсальными. Изучая свойства волн в акустике, полученные закономерности можно перенести на оптику или на поверхностные волны в море. В частности потеря полуволны при отражении от более плотной среды выполняется и для электромагнитных волн.

Из уравнений Максвелла можно показать, что при падении электромагнитной волны на плоскую границу двух сред выполняются законы отражения и преломления.

Во-первых, волновой вектор \mathbf{k} падающей на плоскость раздела волны, а также волновые векторы \mathbf{k}' у отраженной волны и вектор \mathbf{k}'' у преломленной волны лежат в одной плоскости, которую называют **плоскостью падения**. Напомним, что плоскость падения формируется вектором нормали \mathbf{n} к плоскости раздела в точке падения и волновым вектором \mathbf{k} , который имеет направление распространения падающей волны (см. рис. 8.4).

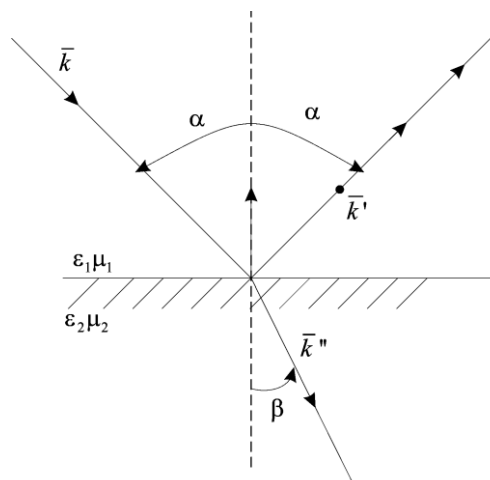


Рисунок 8.4 – Пример выполнения законов преломления и отражения

Закон отражения заключается в том, что угол падения α , между падающим лучом \mathbf{k} и нормалью к плоскости раздела, равен углу отражения (между нормалью и вектором \mathbf{k}' , см. рис. 8.4).

Закон преломления связывает угол падения α с углом преломления β (между нормалью и вектором \mathbf{k}''):

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$$

или в более привычном виде:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (8.10)$$

где $n_1 = (\epsilon_1 \cdot \mu_1)^{1/2}$, $n_2 = (\epsilon_2 \cdot \mu_2)^{1/2}$ – показатели преломления первой и второй среды, соответственно. Напомним, что ϵ_1 и ϵ_2 – диэлектрические проницаемости первой и второй среды, соответственно; μ_1 и μ_2 – магнитные проницаемости сред.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Докажем теорему **Остроградского-Гаусса** на примере точечного заряда. Окружим точечный заряд q воображаемой сферой радиуса r . Найдём общий поток Φ_E через эту сферу S , (см. рис. П1.1).

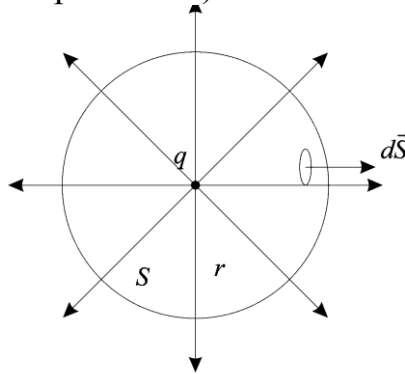


Рисунок П1.1 – Окружение точечного заряда q воображаемой сферой радиуса r

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \oint_S E \cdot \cos 0^\circ \cdot dS$$

Напряженность поля точечного заряда равна:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Поскольку модуль $|\mathbf{E}|=E$ не изменяется на поверхности сферы, то величину E можно выносить за знак интеграла:

$$\Phi_E = E \cdot \oint_S dS = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Для точечного заряда теорема Остроградского-Гаусса доказана.

Можно показать, что для произвольной замкнутой поверхности поток будет тем же. На основе принципа суперпозиции теорему Гаусса легко обобщить на произвольное число зарядов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОСТРОГРАДСКОГО – ГАУССА К РАСЧЁТУ ПОЛЕЙ

Начнем с нескольких определений.

Линейная плотность заряда τ по определению равна:

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (\text{П2.1})$$

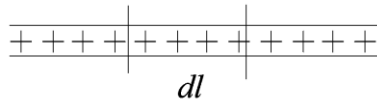


Рисунок П2.1 – Пояснение к определению линейной плотности товара

Физический смысл τ – это заряд, приходящийся на единицу длины (см. рис. П2.1).

Поверхностная плотность заряда σ по определению равна:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (\text{П2.2})$$

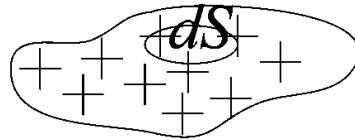


Рисунок П2.2 – Пояснение к определению поверхностной плотности товара

Физический смысл σ – это заряд, приходящийся на единицу площади поверхности (см. рис. П2.2).

Применим теорему к расчету полей различных распределенных зарядов.

Задача. Найти электрическое поле вокруг бесконечного заряженного тонкого проводника. Линейная плотность заряда τ .

а) Рассмотрим, как направлен вектор \vec{E} ? Из симметрии следует, что вектор \vec{E} перпендикулярен к проводнику.

б) Используем Теорему Остроградского-Гаусса, где в качестве поверхности S возьмём воображаемый цилиндр, (см. рис. П2.3):

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum q.$$

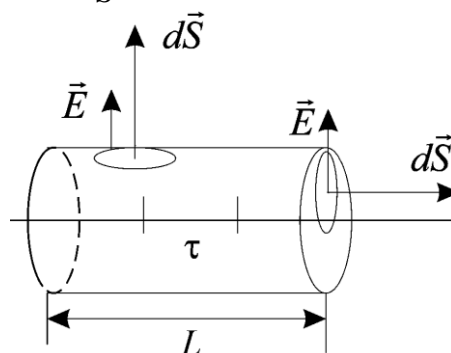


Рисунок П2.3 – Окружаем часть заряженной нити воображаемым цилиндром радиуса r

в) Рассчитаем суммарный поток через поверхность цилиндра, (см. рис. П2.3):

$$\int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_{\text{торцы}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) + \oint_{\text{бок}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \oint_{\text{бок}} E \cdot \cos 0^\circ \cdot dS +$$

$$+ \int_{\text{торцы}} E \cdot \cos 90^\circ \cdot dS = E \cdot \oint_{\text{бок}} dS = E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$$

г) Найдем заряд внутри поверхности S:

$$\sum_{\text{внут.} S} q = L \cdot \tau.$$

д) Подставляя в уравнение Гаусса, получим:

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{1}{\epsilon_0} L \cdot \tau,$$

откуда находим напряженность электрического поля на расстоянии r от проводника.

$$E = \frac{\tau}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot r}. \quad (\text{П2.3})$$

(поле бесконечного линейного заряда)

Задача. Найти поле бесконечной однородной заряженной плоскости, если поверхностная плотность заряда σ .

а) Из симметрии получаем, что вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости. Окружим часть плоскости цилиндром радиуса R , (см. рис. П2.4), и применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum q.$$

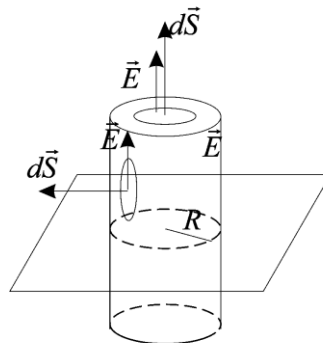


Рисунок П2.4 – Окружаем часть заряженной плоскости воображаемым цилиндром радиуса r

б) Найдём поток вектора \vec{E} через поверхность воображаемого цилиндра. Вследствие симметрии, потоки через каждый торец одинаковы, поэтому удваиваем поток через один торец:

$$\int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = 2 \cdot \int_{\text{торцы}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) + \oint_{\text{бок}} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = 2 \cdot \int_{\text{торец}} E \cdot \cos 0^\circ \cdot dS +$$

$$+ \int_{\text{бок}} E \cdot \cos 90^\circ \cdot dS = 2 \cdot E \cdot \int_{\text{торец}} dS = 2 \cdot E \cdot \pi \cdot R^2$$

в) Находим заряд, оказавшийся внутри воображаемого цилиндра:

$$\sum_{\text{внут.} S} q = \sigma \cdot \pi \cdot R^2.$$

г) Подставляем результаты вычислений в уравнение Остроградского-Гаусса и получаем:

$$2 \cdot E \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot R^2,$$

откуда находим E для заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}. \quad (\text{П2.4})$$

Напряженность поля заряженной плоскости не зависит от расстояния, (см. рис. П2.5).

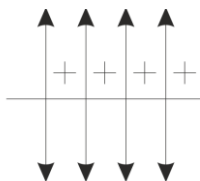


Рисунок П2.5 – Напряженность поля заряженной плоскости не зависит от расстояния. Плоскость заряжена положительным зарядом

Для отрицательно заряженной плоскости картина будет той же, но направление силовых линий изменится на противоположное, (см. рис. П2.6):

$$|E| = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

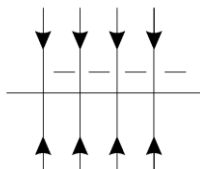


Рисунок П2.6 – Напряженность поля заряженной плоскости не зависит от расстояния. Плоскость заряжена отрицательным зарядом

Задача. Найти электростатическое поле для двух бесконечных равномерно заряженных плоскостей (конденсатор), (см. рис. П2.7).

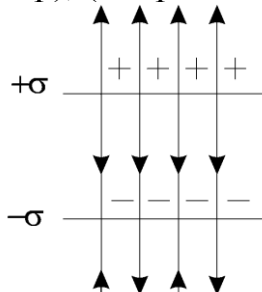


Рисунок П2.7 – Электростатическое поле для двух бесконечных равномерно заряженных плоскостей, образующих конденсатор

Из принципа суперпозиции следует, что плоскость $+\sigma$ создает поле $E_1 = \sigma / (2 \cdot \epsilon_0)$, направленное от плоскости ($+\sigma$), (на рис. П2.7 это поле изображено

сплошными линиями). Плоскость $(-\sigma)$ создает поле $E_2 = -\sigma/(2 \cdot \epsilon_0)$, направленное к плоскости $(-\sigma)$, (на рис. П2.7 это поле показано пунктиром).

Суммируя эти поля с учётом их направления, получим, что результирующее поле вне конденсатора равно нулю, а между пластинами: $|E| = \sigma/\epsilon_0$, (см. рис. П2.8).

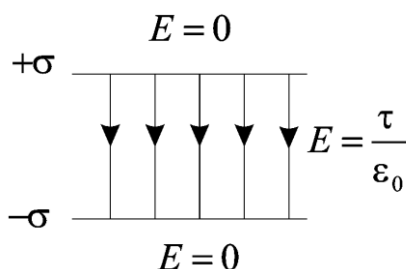


Рисунок П2.8 – Поле внутри конденсатора

Задача. Найти поле, создаваемое заряженной сферической поверхностью, (см. рис. П2.9).

Решение: 1) По теореме Остроградского-Гаусса имеем:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum q.$$

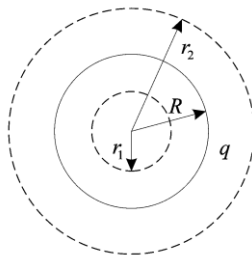


Рисунок П2.9 – Схема к определению поля, создаваемому заряженной сферической поверхностью

2) Из симметрии следует, что \vec{E} направлено вдоль радиуса.

3) Чтобы найти поле внутри сферы, создадим воображаемую сферу радиусом $r_1 < R$ внутри, и к ней применим теорему Остроградского-Гаусса. Получаем:

$$\oint E \cdot \cos 0^\circ \cdot dS = 0,$$

т.к. заряд внутри равен нулю, уравнение преобразуется к виду $4\pi \cdot E \cdot r^2 = 0$. Отсюда получаем, что поле внутри сферы равно нулю $E_{\text{внутр.сф.}} = 0$.

б) Вне сферы. Теперь создадим воображаемую сферу радиусом r_2 вне заданной сферы. Получим:

$$\oint E \cdot \cos 0^\circ \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q \quad \text{или} \quad E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q$$

Итак, напряжённость электрического поля вне сферы оказалось таким же, как в случае, если бы весь заряд, находился бы в центре сферы.

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}.$$

Итак, результирующее поле заряженной сферы имеет вид:

$$E = \begin{cases} \text{внутри : } 0 \\ \text{вне : } E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \end{cases}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ДИПОЛЬ. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ ДИПОЛЯ

Электрический диполь – это система из двух равных по величине, но противоположных по знаку электрических зарядов.

Расстояние между зарядами l называется **плечом диполя**.

Вектор \mathbf{L} направлен от отрицательного заряда к положительному, (см. рис. ПЗ.1).

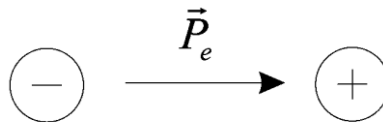


Рисунок ПЗ.1 – Электрический диполь

Величина $p_e = q \cdot L$ называется **электрическим дипольным моментом**. Направлен дипольный момент от минуса к плюсу, (см. рис. ПЗ.1).

Если диполь p_e поместить в электрическое поле, напряжённостью \mathbf{E} , то на заряды действует пара сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , которая стремится развернуть вектор p_e вдоль поля \mathbf{E} . При этом возникает момент сил $\mathbf{M} = p_e \times \mathbf{E}$. (см. рис. ПЗ.2).

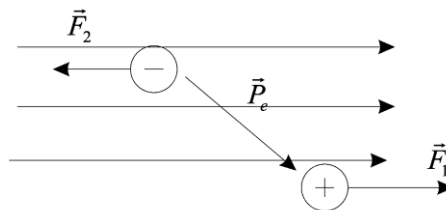


Рисунок ПЗ.2 – Момент силы

Найдем напряженность поля диполя на его оси (см. рис. ПЗ.3).

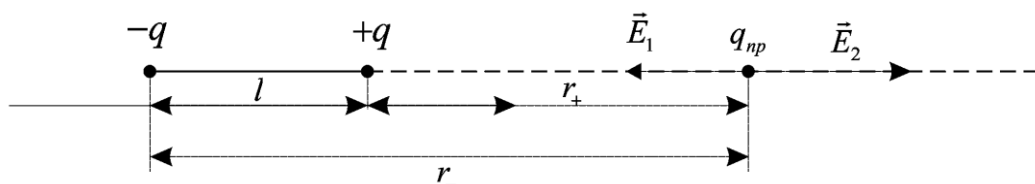


Рисунок ПЗ.3 – Поле на оси диполя

Решение: из рис. ПЗ.3 видно, что результирующее поле E имеет величину:

$$E = E_2 - E_1 = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_+^2} - \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_-^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 \cdot r_-^2} \approx \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot r \cdot L}{r^4} = \frac{2 \cdot p_e}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3},$$

где r_+ и r_- - расстояния от рассматриваемой точки до положительного и отрицательного заряда, соответственно, и учтено, что при r_+ и $r_- \gg l$ эти величины приближенно можно заменить на расстояние до центра диполя r .

$$\vec{E}_{\text{ось}} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot \vec{p}_e}{r^3}. \quad (\text{П3.1})$$

(напряженность на оси диполя)

Теперь вычислим потенциал поля диполя на его оси:

$$\varphi_{\text{на_оси}} = -\int_{\infty}^r E \cdot dr = \frac{-2 \cdot p_e}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^3} = \frac{-2 \cdot p_e}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot r^2} \right) = \frac{p_e}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (\text{П3.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ. НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ РАЗРЯДЫ. ГАЗОРАЗРЯДНАЯ ПЛАЗМА. РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ МЕТАЛЛА. ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ

Сверхпроводимость

Эффект сверхпроводимости заключается в скачкообразном исчезновении сопротивления при очень низких температурах (см. рис. П.4.1а).

Температура, при которой происходит этот переход, называется критической температурой T_k (см. рис. П.4.1б).

Слабое магнитное поле не проникает в сверхпроводник: его магнитная проницаемость $\mu=0$. Сильное внешнее магнитное поле $B > B_k$ разрушает сверхпроводящее состояние. То же происходит от сильного тока, проходящего через сверхпроводник.

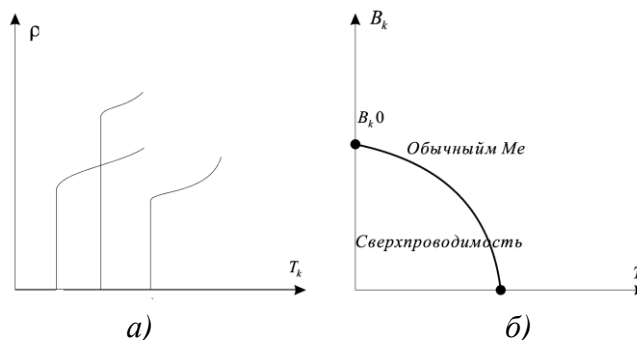


Рисунок П4.1 – Температурные зависимости удельного сопротивления и магнитной проницаемости металлов. а) Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры для некоторых металлов; б) Зависимость критического магнитного поля B_k от температуры сверхпроводника

Теорию сверхпроводимости создали Бардин, Купер, и Шриффер (теория БКШ). Ее суть следующая. Электрон немного притягивает к себе соседние положительные атомы решетки. Электрон и деформированная решетка создают положительную систему, к которой притягивается второй электрон. Наиболее выгодный режим создается, когда два электрона вращаются по кругу вокруг деформированной положительной области решетки (см. рис. П4.2).

Куперовская пара электронов вращается вокруг слегка деформированной области решетки.

Такие пары электронов называют Куперовскими парами. Эта пара движется в поле как единая частица. Энергия связи пары $\Delta E \sim 10^{-2}$ эВ. Поэтому при $kT \sim 10^{-2}$ эВ Куперовские пары разрушаются и сверхпроводимость исчезает.

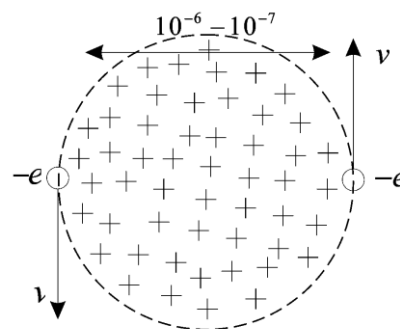


Рисунок П4.2 – Вращение двух электронов вокруг решетки, деформированной положительной областью

Электрический ток в газах. Несамостоятельный и самостоятельный разряды

В обычных условиях газы являются диэлектриком, который почти не проводит ток. Например, воздух является изолятором в линиях электропередач. При некоторых условиях газы начинают проводить электрический ток. Примером может служить искра, молния, люминесцентные лампы.

Явление протекания тока через газы называют *газовым разрядом*. Носителями тока в газовом разряде являются ионы и электроны, которые возникают при ионизации газа.

Ионизация – это появление ионов в изначально нейтральном газе. Обычно ионизация происходит за счет выбивания электрона из атома или молекулы и появления отрицательного электрона и положительного иона. Причиной ионизации могут быть:

- 1) высокая температура;
- 2) ультрафиолетовые лучи;
- 3) разгон электрона в электрическом поле E и его столкновение с нейтральной молекулой. Условие такой ионизации $e \cdot E \cdot \lambda > W$, где λ – длина свободного пробега электрона, а W – энергия ионизации (распада молекулы на ионы)

Рекомбинация – это обратный ионизации процесс.

Несамостоятельный разряд происходит под действием внешнего ионизатора.

Самостоятельный разряд – разряд, происходящий без действия внешнего ионизатора (за счет разгона электронов и ионизации молекул). Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется напряжением пробоя (потенциал ионизации).

Существуют различные виды разрядов, которые зависят от источников ионизации и силы тока. Например, тлеющий разряд происходит в лампах дневного света, дуговой разряд используется при сварке металлов. Коронный разряд возможен при высоких напряженностях на громоотводах. Искровой разряд используют при обработке металлов.

Работа выхода электронов из металла и термоэлектронная эмиссия

Работа выхода $A_{\text{вых}}$ – это количество энергии, которую должен затратить электрон, чтобы выйти из металла и удалиться от него.

Примером такого процесса может служить **термоэлектронная эмиссия**, которая заключается в вылете электронов из сильно нагретого металла.

При этом тепловая энергия электронов $k \cdot T$ становится сравнимой с работой выхода $A_{\text{вых}}$ и часть электронов могут вылететь из металла.

Именно такой процесс происходит на нагретых катодах в вакуумных лампах, которые использовались в электронике до появления транзисторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. ТИПЫ МАГНЕТИКОВ: ДИАМАГНЕТИКИ, ПАРАМАГНЕТИКИ, ФЕРРОМАГНЕТИКИ

Диамагнетики

Диамагнетики – вещества, у которых магнитные моменты атомов (молекул) в отсутствие магнитного поля равны нулю (векторная сумма орбитальных моментов всех электронов атома равна нулю), $\mathbf{P}_m = 0$.

Но в магнитном поле у каждого атома появляется наведенный (дополнительный) магнитный момент $\Delta \mathbf{P}_m \sim \mathbf{B}$ следовательно $\mathbf{J} \sim \Delta \mathbf{P}_m \sim \mathbf{B}$, откуда намагниченность можно выразить соотношением:

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\chi'}{\mu_0} \cdot \bar{\mathbf{B}}. \quad (\text{П5.1})$$

где χ' - (хи) коэффициент пропорциональности, причем у диамагнетиков $\chi' < 0$.

Рассмотрим подробнее, как возникает наведённый магнитный момент.

1. В типичном диамагнетике в отсутствие магнитного поля: ($B=0$), орбитальные магнитные моменты компенсируют друг друга. Например, если два электрона вращаются по орбитам в противоположных направлениях (см. рис. П5.1.):

$$\bar{\mathbf{P}}_m = \bar{\mathbf{P}}_{m1} + \bar{\mathbf{P}}_{m2} = 0.$$

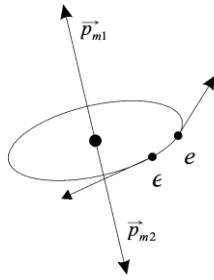


Рисунок П5.1 – Орбитальные магнитные моменты компенсируют друг друга в диамагнетике в отсутствии магнитного поля

2. а) В магнитном поле ($B \neq 0$) появляется сила Лоренца $\vec{F}_L = -e \cdot [\vec{V} \times \vec{B}]$, которая для одного электрона (см. рис. П5.2):

- 1) уменьшает центростремительную силу: $F_{ц} = F_{кул} - F_L$
- 2) уменьшает скорость вращения электрона $F_{ц} = (m \cdot V^2) / R$
- 3) следовательно уменьшает ν - частоту вращения
- 4) уменьшает магнитный момент P_{m1}

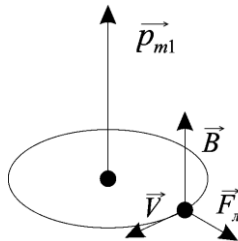


Рисунок П5.2 – В магнитном поле возникает сила Лоренца

Приращение магнитного момента $\Delta \vec{P}_{m1}$ противоположно магнитной индукции \vec{B} .

б) Если электрон вращается в другую сторону, то F_L добавляется к силе Кулона, увеличивается скорость, частота, магнитный момент P_{m2} .

Приращение магнитного момента $\Delta \vec{P}_{m2}$ также противоположно \vec{B} .

В результате: $\vec{J} \sim \Delta \vec{P}_m \sim -\vec{B}$, точнее $\vec{J} = \vec{B} \cdot \chi' / \mu_0$, где $\chi' < 0$.

Парамагнетики

Парамагнетики – вещества, у которых магнитные моменты атомов (молекул) в отсутствие внешнего магнитного поля отличны от нуля ($\vec{P}_m \neq 0$).

В магнитном поле (внешнем) магнитные моменты атомов стремятся ориентироваться вдоль внешнего поля (тепловое движение этому препятствует).

В результате степень ориентации и намагниченность тем сильнее, чем больше магнитное поле: $\vec{J} \sim \vec{B}$. Вводя коэффициент пропорциональности, получим:

$$\vec{J} = \frac{\chi'}{\mu_0} \cdot \vec{B}. \quad (\text{П5.2})$$

где χ' - (хи) коэффициент пропорциональности, причем у диамагнетиков $\chi' > 0$.

Сначала начинается прецессия, но за счет столкновений прецессия затухает, а \vec{P}_m ориентируется вдоль \vec{B} .

Ферромагнетики

Ферромагнетики – вещества, у которых внутреннее магнитное поле в сотни раз превышает вызвавшее его внешнее поле, но для них также справедливо уравнение:

$$\vec{J} = \frac{\chi'}{\mu_0} \cdot \vec{B}. \quad (\text{П5.3})$$

где χ' - (хи) коэффициент пропорциональности, причем у диамагнетиков $\chi' \approx 1$.

Опыты Столетова. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис.

Точка Кюри

Столетов исследовал поведение ферромагнетиков (железа) в магнитном поле и установил следующие его свойства:

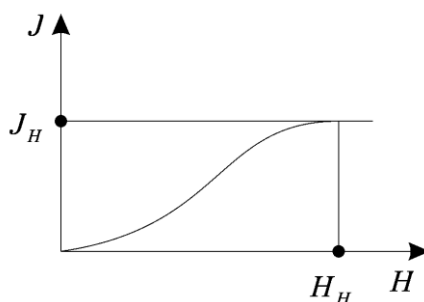


Рисунок П5.3 – Кривая намагничивания

1. При $H > H_N$ происходит насыщение намагниченности, (см. рис. П5.3).
2. Существует магнитный гистерезис – отставание намагниченности J от изменения напряженности магнитного поля H (см. рис. П5.4).

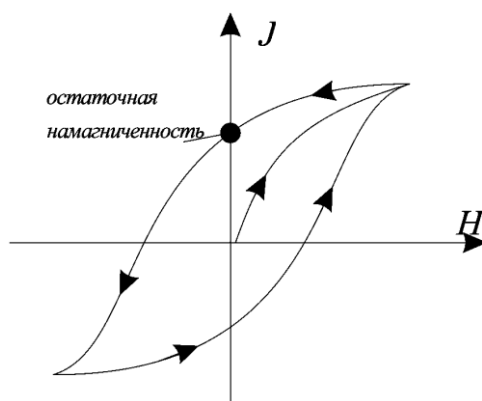


Рисунок П5.4 – Гистерезис

3. Перечисленные свойства обнаруживаются при $T < T_{\text{КЮРИ}}$

1) при $T < T_K$ - вещество является ферромагнетиком.

2) при $T > T_K$ - вещество превращается в парамагнетик.

Объяснение: при $T < T_K$ ферромагнетик разбит на области-домены, размеры которых составляют $l \sim 10^{-4} \dots 10^{-5}$ м.

В пределах каждого домена все \mathbf{P}_m ориентированы одинаково (до насыщения).

Без внешнего поля домены ориентированы хаотически и результирующий магнитный момент тела равен нулю.

В поле начинается преимущественная ориентация доменов вдоль поля. В насыщении все домены ориентированы в направлении \mathbf{B} .

Гистерезис объясняется «трением» между границ доменов.

В квантовой механике образование доменов объясняется взаимодействием между спинами электронов, (см. рис. П5.5).

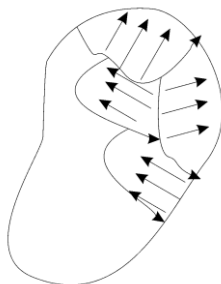


Рисунок П5.5 – Взаимодействие между спинами электронов

ПРИЛОЖЕНИЕ 6. НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1. **Градиент** скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ определяется уравнением:

$$\text{grad}(\varphi) = \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{П6.1})$$

Физический смысл $\text{grad}(\varphi)$ - это вектор, который дает направление и величину тангенса угла самого крутого подъема функции φ (вода катится противоположно градиенту), (см. рис. П6.1).

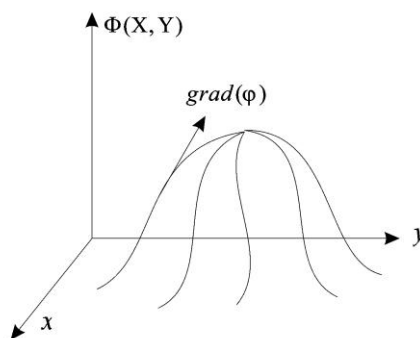


Рисунок П6.1 – Вектор градиента

2. **Дивергенция** векторной функции $\mathbf{A}(x, y, z)$ по определению равна:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{П6.2})$$

Физический смысл дивергенции - это скаляр равный числу силовых линий векторного поля \vec{A} , выходящих из единичного объема (элементарный поток), (см. рис. П6.2).

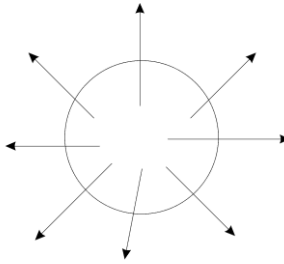


Рисунок П6.2 – Смысл дивергенции векторного поля

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V}. \quad (\text{П6.3})$$

3. **Ротор векторной функции** $\vec{A}(x, y, z)$ определяется соотношением:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П6.4})$$

Физический смысл ротора - это элементарная циркуляция - вектор равный циркуляции вектора \vec{A} по контуру с единичной площадью (направление ротора перпендикулярно плоскости контура), (см. рис. П6.3).

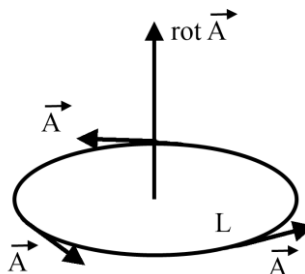


Рисунок П6.3 – Ротор или циркуляция вектора \vec{A}

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{S} \cdot \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (\text{П6.5})$$

4. **Теорема Гаусса** записывается в виде:

Поток или число силовых линий, выходящих через поверхность S , равна сумме элементарных потоков ($\operatorname{div} \vec{A}$), выходящих из объема V , (см. рис П6.4).

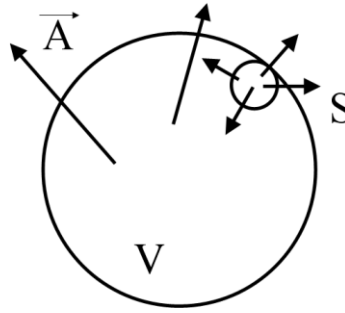


Рисунок П6.4 – Поток или число силовых линий, выходящих через поверхность S

$$\oint_S (\vec{A} \cdot d\vec{S}) = \int_V \text{div} \vec{A} \cdot dV. \quad (\text{П6.6})$$

5. Теорема Стокса

Вихрь (циркуляция) вектора \mathbf{A} вдоль контура L равна вихрю как сумме элементарных вихрей ($\text{rot} \mathbf{A}$) по всей плоскости S .

$$\oint_L (\vec{A} \cdot d\vec{l}) = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (\text{П6.7})$$

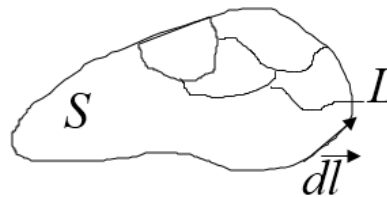


Рисунок П6.5 – Вихрь (циркуляция) вектора A вдоль контура L

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

П7.1 Вихревое электрическое поле

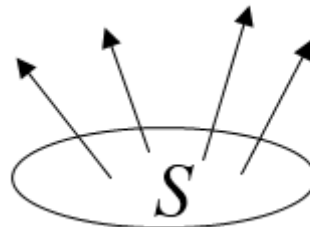


Рисунок П7.1 – Магнитное поле пронизывает контур L

Пусть магнитное поле пронизывает контур L (см. рис. П7.1). При изменении магнитного потока Φ_B через контур в проводнике появляется ЭДС (электрическое поле):

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Видим, что электрическое поле вызывается изменяющимся магнитным полем.

Но $\varepsilon_{\text{инд}} = \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l})$ и $\Phi_B = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$ следовательно:

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}). \quad (\text{П7.1})$$

Это **1-ое уравнение Максвелла** в интегральной форме.

Преобразуя (П7.1) по теореме Стокса (П6.7) и меняя очерёдность дифференцирования и интегрирования в правой части, получим:

$$\int_S (\text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right)$$

или

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

(Это 1-ое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.)

Физический смысл 1-го уравнения Максвелла в том, что изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле (даже в вакууме, где нет проводников).

П 7.2 Ток смещения

Максвелл обобщил закон полного тока. Он, на основе опытных данных показал, что магнитное поле вызывается не только током, но и переменным электрическим полем.

Он ввел понятие плотности тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{П7.2})$$

Ток смещения через произвольную поверхность S определяется интегралом:

$$I_{\text{см}} = \int_S (\vec{j}_{\text{см}} \cdot d\vec{S}) = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}). \quad (\text{П7.3})$$

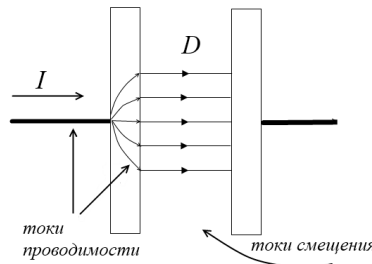


Рисунок П7.2 – Токи проводимости и токи смещения

Токи проводимости через обкладки не текут, но между обкладками меняется электрическое поле, следовательно, между обкладками “текут” токи смещения.

Ток проводимости вместе с токами смещения образуют замкнутую цепь тока.

Закон полного тока в общем случае (и для переменных полей) имеет вид:

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I + I_{\text{см}}.$$

Подставляя вместо тока смещения $I_{\text{см}}$ его интегральное представление, получим 2-ое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) \quad (\text{П7.4})$$

где ток проводимости: $\int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S})$;

ток смещения: $\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} \cdot d\vec{S})$

Преобразуя (П7.4) по теореме Стокса получаем:

$$\oint_S (\text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}),$$

отсюда следует 2-ое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{П7.5})$$

Физический смысл 2-го уравнения Максвелла в том, что магнитное поле \vec{H} создается токами проводимости \vec{j} и изменяющимся электрическим полем \vec{D} .

П 7.3 Третье и четвертое уравнения Максвелла

Кроме первых двух уравнений есть еще два уравнения Максвелла.

Теорема Остроградского-Гаусса для электрического поля:

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = q_{\text{своб}}, \quad (\text{П7.6})$$

но $q_{\text{своб}} = \int_V \rho \cdot dV$

Отсюда получаем 3-е уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \int_V \rho \cdot dV, \quad (\text{П7.7})$$

где ρ - объемная плотность свободных зарядов.

Преобразуем (П7.7) по теореме Гаусса:

$$\int_V (\text{div} \vec{D} \cdot dV) = \int_V \rho \cdot dV$$

и получаем 3-е уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{П7.8})$$

Физический смысл 3-го уравнения Максвелла в том, что поток электрического вектора смещения \vec{D} обусловлен электрическими зарядами ρ .

4-ое уравнение Максвелла в интегральной форме является теоремой Гаусса для магнитного поля и имеет вид:

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (\text{П7.9})$$

Преобразуем (П7.9) по теореме Гаусса:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{B} \cdot dV) = 0,$$

откуда получаем 4-ое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (\text{П7.10})$$

Физический смысл 4-го уравнения Максвелла в том, что магнитных зарядов в природе не существует, а магнитные линии замкнуты.

Таким образом, мы имеем четыре уравнения Максвелла, представленные в таблице П7.1: 1) уравнения (1) и (2) - векторные уравнения, следовательно, каждое дает по три скалярных уравнения. 2) уравнения (3) и (4) - скалярные уравнения. Всего получается 8 уравнений, а неизвестны \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} - 4 векторных величины, или 12 скалярных. Только уравнений Максвелла не хватает для решения задачи. Необходимо использовать дополнительные соотношения (5-7) – материальные уравнения.

Итак, соотношения (1-7), представленные в таблице П7.1 образуют основу электродинамики.

в дифференциальной форме:		в интегральной форме:
$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$	1) 2) 3) 4)	$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) \\ \oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) \\ \oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \int_V (\rho \cdot dV) \\ \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0 \end{array} \right.$
дополнительные соотношения (материальные уравнения):		
$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E}$		(5)
$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}$		(6)
$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$		(7)

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

П8.1 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих одинаковую частоту

Пусть точка смещается по оси x по закону: $x=A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_1)$, и одновременно по оси y по закону: $y=A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_2)$, т.е. происходит сложение (суперпозиция) взаимно перпендикулярных колебаний.

Исключая время t , из этих выражений можно получить уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x \cdot y}{A \cdot B} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Это уравнение эллипса (см. рис. П8.1).

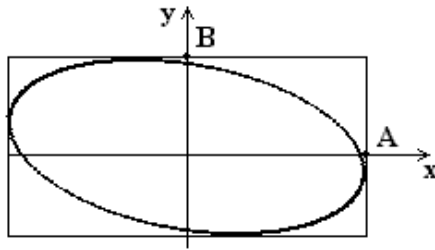


Рисунок П8.1 – В общем случае сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний дает эллипс

Рассмотрим частные случаи:

1. Если $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm n \cdot 2\pi$, где n – целое число ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то эллипс превращается в прямую, проходящую через 1 и 3 четверти (см. рис. П8.2):

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0 \quad y = x \cdot \frac{B}{A};$$

2. Если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi \pm n \cdot 2\pi$, где n – целое число ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то прямая проходит через 2 и 4 четверти (см. рис. П8.2):

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0 \quad y = -x \cdot \frac{B}{A};$$

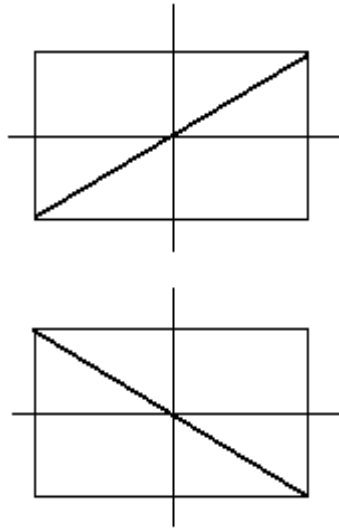


Рисунок П8.2 – Частный случай суммы двух взаимно перпендикулярных колебаний (эллипс вырождается в прямую)

3. При условии $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2 \pm n \cdot \pi$, где n – целое число ($n=0, \pm 1, \pm 2 \dots$), то главные оси эллипса совпадают с осями x и y (см. рис. П8.3):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

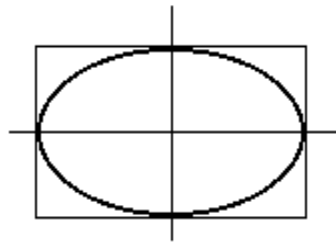


Рисунок П8.3 – Частный случай суммы двух взаимно перпендикулярных колебаний (центр и оси эллипса совпадает с центром и осями системы координат)

3.а. Если дополнительно выполняется условие: $A=B$, то эллипс переходит в окружность.

П 8.2. Гармонические осцилляторы. Математический маятник

Математический маятник это точечная масса на невесомой нерастяжимой нити.

Тангенциальное ускорение a_τ возникает под действием тангенциальной силы (см. рис. П8.4):

$$F_\tau = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \approx -m \cdot g \cdot \alpha,$$

(напомним, что при малых углах α $\sin \alpha \approx \alpha$). С другой стороны, ускорение a_τ связано с угловым ускорением $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$ соотношением:

$$a_\tau = l \cdot \varepsilon = l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

где l – длина нити.

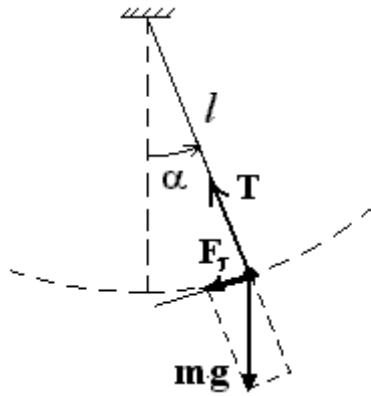


Рисунок П8.4 – Математический маятник. Тангенциальная сила F_τ является составляющей силы тяжести и имеет знак противоположный углу α

Из второго закона Ньютона $m \cdot a_\tau = F_\tau$, получаем:

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \alpha \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0. \quad (\text{П8.1})$$

Полученное дифференциальное уравнение аналогичное уравнению (6.1) и имеет решение в виде является гармонического колебания:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad (\text{П8.2})$$

где квадрат круговой частоты ω^2 равен коэффициенту перед переменной α в дифференциальном уравнении (П8.1):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (\text{П8.3})$$

Соответственно, период колебаний математического маятника описывается формулой:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (\text{П8.4})$$

Физический маятник

Физический маятник это тело, колеблющееся вокруг фиксированной точки (см. рис. П8.5).

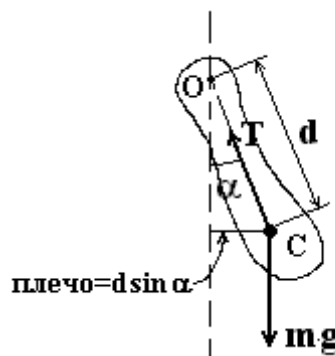


Рисунок П8.5 – Физический маятник, точка C – центр массы тела

Момент силы M , действующий на тело, равен $F \cdot \text{«плечо»}$: $M = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha \approx -m \cdot g \cdot d \cdot \alpha$. Сила T , проходящая через ось вращения, момента не создаёт. Уравнение движения такого маятника имеет вид:

$$J \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M,$$

где J – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса O .

$$J \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m g \cdot d \cdot \alpha = 0. \quad (\text{П8.5})$$

Данное дифференциальное уравнение (П8.5) имеет следующее решение:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad (\text{П8.6})$$

где $\omega^2 = m \cdot g \cdot d / J$.

Итак, для физического маятника:

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{J}} \\ T_{\text{физ}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot d}} \end{cases} \quad (\text{П8.7})$$

Период физического маятника совпадает с периодом математического маятника:

$$T_{\text{мат}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

если длину математического маятника взять равной $l = J / (m \cdot d)$. Эта величина называется **приведённой длиной физического маятника**.

Пружинный маятник

В разделе 6.2 мы получили выражение для круговой частоты и периода колебаний пружинного маятника (см. рис П8.6):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (\text{П8.8})$$

$$T_{\text{пруж}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (\text{П8.9})$$

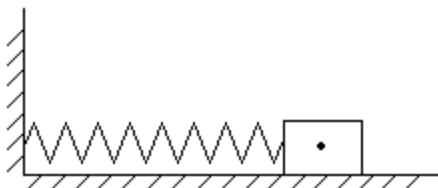


Рисунок П8.6 – Пружинный маятник

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х томах. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика - М.: Лань, 2017. – 500 с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: Изд. Центр «Академия», 2016 – 560
3. Зисман Г.А. , Тодес О.М. Курс общей физики.. – М. : Наука, 1972 – Т.2.
4. Детлаф А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов. 4-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 718 с.
5. Чертов А.Г. Задачник по физике : учебное пособие для втузов. 8-е изд., перераб. и доп.– М. : Физматлит, 2006. – 640 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5 т. Том 3. Электричество. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. - 656 с.