МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

В устройствах и каналах связи

Моделирование сигналов

- В процессе передачи сигналы претерпевают различные изменения, связанные с разнообразными преобразованиями (модуляция и демодуляция, дискретизация и оцифровка, сжатие и восстановление, кодирование и декодирование, обнаружение ошибок и их исправление, шифрование и дешифрование, и др.), а также влиянием помех.
- Важной задачей является обеспечение требуемого качества передачи, которое определяется вероятностью возникновения ошибки.
- В связи с этим на принимающей стороне возникает задача обнаружения и различения сигнала, детектирования и демодуляции с определением его информационной составляющей с минимальным уровнем искажений или ошибок.
- Исследование этих процессов на этапе проектирования часто осуществляют методом математического моделирования.

Моделирование сигналов

- Математическое моделирование сигналов имеет большое значение при проектировании систем цифровой обработки сигналов с целью выбора оптимальных алгоритмов работы цифровых устройств, обеспечивающих обработку сигналов на надлежащем уровне качества.
- Сигнал на входе принимающего устройства можно представить в виде смеси полезного сигнала и сигнала аддитивной помехи:

$$r(t) = s(t, \lambda) + y(t), \qquad t \in [0, T]$$

- Но помеха может быть также мультипликативной, представлять смесь аддитивных и мультипликативных составляющих, или комплексной более сложного вида.

Сигналы как случайный процесс

- Появление на входе в приёмное устройство полезного сигнала представляет, в общем случае, случайный процесс, имеющий дискретное распределение.
- Случайный сигнал представляет помеха.
- Случайный процесс характеризуется тем, что какая-либо физическая величина изменяется в некотором абстрактном пространстве случайным образом.
- Конкретный вид случайного процесса (т.е. единичная фотография или осциллограмма) в определенном опыте называется реализацией случайного процесса. В качестве синонимов употребляются также термины "выборочная функция" и "траектория случайного процесса".

Различение сигналов

- Наблюдаемая реализация $r(t)$, действующая на входе приемника обнаружения, представляется в виде:

$$r(t) = \theta s(t, \lambda) + y(t), \qquad t \in [0, T]$$

- Радиоприемное устройство различения в общем (многоальтернативном) случае выносит решение о наличии в смеси $r(t)$ одного из k возможных сигналов $s_i\,(t, \lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Для k=2 (задача бинарного различения) смесь $r(t)$представляется в виде:

$$r(t) = \theta s_1(t, \lambda) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda) + y(t), \quad t \in [0, T]$$

Характеристика случайных процессов

- В зависимости от характера изменения во времени и методов рассмотрения случайные процессы при моделировании сигналов можно разделить на три группы:
  - импульсные, флуктуационные и специального вида.
- Импульсные процессы представляют собой последовательность одиночных импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через случайные промежутки времени.
- Как правило, реализации импульсного процесса представляют собой кусочно-разрывные функции времени.
- К импульсным процессам можно отнести искусственно создаваемые импульсные помехи, а также некоторые виды атмосферных помех (например, грозовые разряды) и помех от электрических аппаратов.

Характеристика случайных процессов

- Флуктуационные процессы представляют результирующий эффект очень большого числа часто следующих элементарных импульсов, налагающихся друг на друга.
- Реализации флуктуационного процесса имеют вид непрерывных функций времени.
- К числу флуктуационных процессов относятся тепловые и космические шумы, шумы полупроводниковых приборов и др.
- Случайные процессы специального вида могут быть весьма разнообразными. Можно привести следующий пример. Пусть гармоническое колебание $A\cos(\omega t + \phi)$ модулируется по амплитуде флуктуационным напряжением, а по фазе - случайными импульсами. Тогда получим случайный процесс специального вида $A(t)\cos(\omega t + \phi(t))$.

Задание по практике

- **Задача**:

Разработать модель случайного процесса специального вида сигнала, зашумлённого комплексной помехой импульсно-флуктуационного типа

Общие сведения о процессе:

- Радиосигнал, излучаемый передающей антенной, представляет узкополосный процесс
  - $s\,(t) = A\,(t)\cos[\,\omega_0 t + \psi(t)]$
- Здесь функции A(t) и ψ (t) отображают законы амплитудной и фазовой модуляции информационной составляющей.
- По сравнению с колебанием несущей частоты $\cos\omega_0 t$ функции A(t) и ψ (t) являются медленно изменяющимися. Ширина Δω спектра сигнала $s\,(t)$ много меньше несущей частоты ω_0.
- Для системы принимающей, преобразовывающей и передающей сигналы информационный процесс A(t) и ψ (t) является также случайным, но имеющем свойства самоподобия, т.е. фрактальности.

Общие сведения о процессе:

- Вследствие распространения электромагнитных колебаний из-за турбулентности среды, изрезанности диаграмм направленности антенны сигнал в месте приема $s(t, \lambda)$ отличается от переданного $s(t)$:
  - $s(t, \lambda) = b(t) A(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau) - \phi(t)]$,
- где множитель b(t) характеризует амплитудные замирания во многих системах радиосвязи, $\phi(t)$ - фазовый сдвиг по несущей частоте, τ – *временная задержка*, $\lambda = \{b, \tau, \phi\}$ – параметры помехи сигнала.
- Случайный процесс помехи $\lambda = \{b, \tau, \phi\}$ может носить флуктуационный, импульсный и смешанный характер.

Рабочая модель

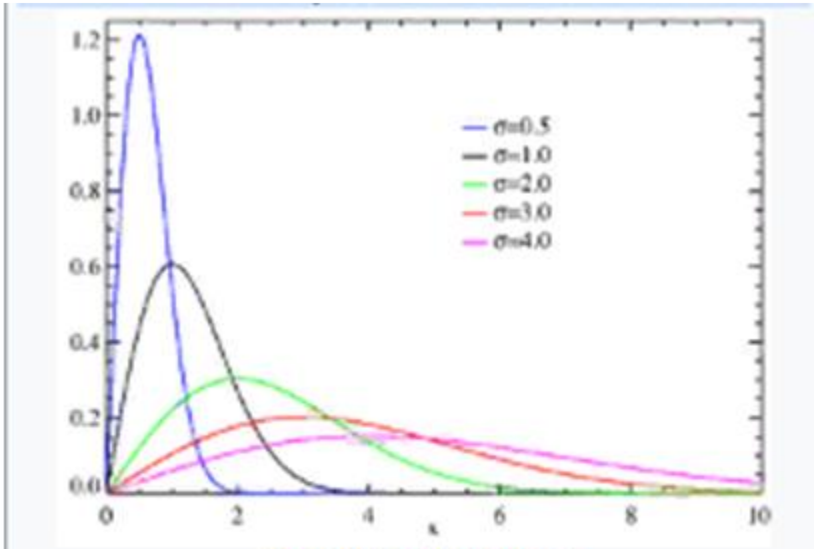
- **<u>Рассмотрим рабочую модель задачи:</u>**

- Случайный процесс сигнала представляет гармонический сигнал, зашумлённый комплексной помехой специального вида:
- $s\ (t,\ \lambda)=\ b\ (t)\ A\ \cos[\omega_0 t\ +\phi(t)]$, где множитель b(t) характеризует амплитудные замирания, имеющие место во многих системах радиосвязи, $\phi\ (t)$ - фазовый сдвиг по несущей частоте, $\lambda = \{b,\phi\}$ - параметры сигнала.
- b(t) – случайный процесс;
- $\phi\ (t)$ – случайный процесс.
- Параметры b и ϕ меняются ступенчато от одного периода замирания к другому, т.е. описываются кусочно-ступенчатой функцией со случайными значениями.
- Длительность периодов замирания $T_b(t)$ – случайный процесс.
- Таким образом, модель помехи сигнала представляет совокупность 3-х случайных процессов, имеющих импульсный характер.

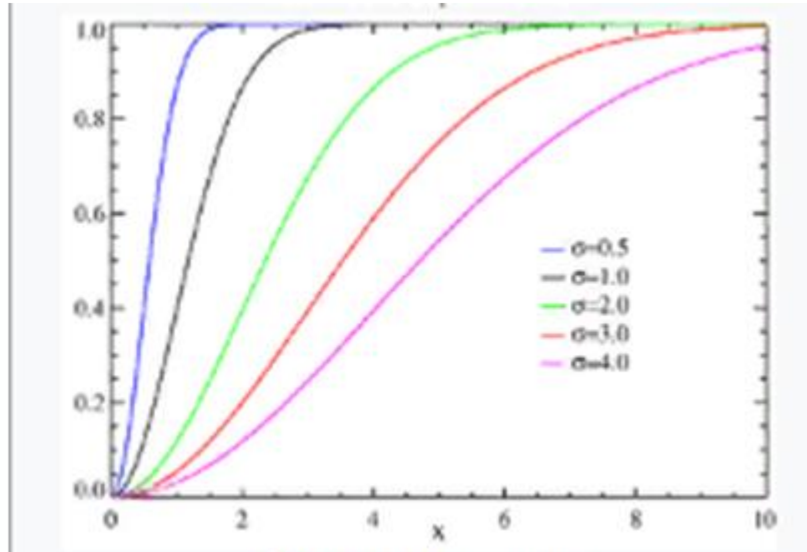
Рабочая модель

- Модель сигнала достаточно полно описывает флуктуации отраженного сигнала в радиолокации и замирания в системах радиосвязи.
- Совместная плотность распределения вероятности (ПРВ) случайных величин b и ϕ часто принимается в виде:
- $$W(b,\varphi) = \begin{cases} \frac{b}{\sigma^2} exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right], b \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi}, |\varphi| \leq \pi \\ 0, \text{для других } b \text{ и } \varphi \end{cases}$$
- Исследования медленных замираний сигналов в радиолиниях, использующих ионосферное или тропосферное рассеяния, показывают, что замирания в имеют квазистационарный характер на временных интервалах порядка нескольких минут. При этом коэффициент замирания b таких системах приближенно описывается законом Рэлея, а фаза имеет равномерный закон распределения.

Распределение Рэлея



Плотность вероятности



Функция распределения

Параметры	$\sigma > 0$
Носитель	$x \in [0; \infty)$
Плотность вероятности	$\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$
Функция распределения	$1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$
Математическое ожидание	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$
Медиана	$\sigma\sqrt{\ln(4)}$
Мода	σ
Дисперсия	$(2 - \pi/2)\,\sigma^2$

Коэффициент асимметрии	$\frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}}$
Коэффициент эксцесса	$-\frac{6\pi^2 - 24\pi + 16}{(4-\pi)^2}$
Дифференциальная энтропия	$1 + \ln\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\gamma}{2}$
Производящая функция моментов	$1 + \sigma t\, e^{\sigma^2 t^2/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right) + 1\right)$
Характеристическая функция	$1 - \sigma t\, e^{-\sigma^2 t^2/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{erfi}\left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right) - i\right)$

Параметры рабочей модели случайной помехи сигнала

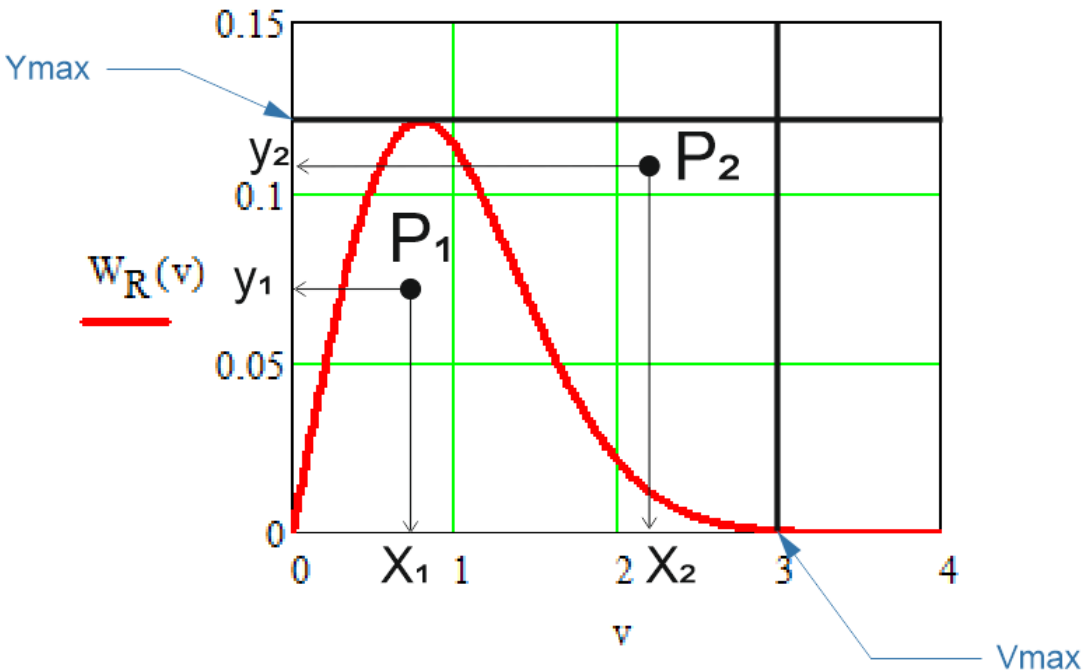
- В законе Рэлея для плотности $W(b,\varphi)$ принимаем $\sigma = 0{,}8$, тогда среднее значение (математическое ожидание) параметра замирания b равно:
  - $m_b = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \cong 1{,}25 \cdot 0{,}8 \cong 1$
- СКО параметра замирания b: $\sigma_b = \sigma\sqrt{2 - \pi/2} \cong 0{,}524$
- Параметр временной дисперсии сигналов в каналах многолучевого приёма – задержку сигнала τ можно моделировать, используя нормальное распределение с $m_\tau = 0{,}26$ мкс $[1\text{мкс} = 10^{-6}\text{с}]$ и $\sigma_\tau = 0{,}37\text{мкс}$. В данном случае не моделируем.
- Диапазон длительности периодов замирания (квазистационарности) принимаем равным $T_b \in [1;5]\text{с}$, принимая эту величину случайной и распределённой по равномерному закону.
- Считаем, что в каждом периоде квазистационарности параметры сигнала λ = {b,τ,ϕ} стабильны, но меняются скачком в начале следующего периода.

Алгоритм моделирования сигнала специального вида

- 1. Моделируем последовательность $K = 50$ чисел $\{\dots T_{b_k} \dots\}$ по формуле (метод обратных функций) $T_{b_k} = 1 + (5-1)r_k$, где r_k - случайное число, распределённое по равномерному закону в диапазоне $r_k \in [0,1]$, генерируемое ГПСЧ; $k = \{1,2, \dots, K\}$.
- 2. Вычисляем шкалу моментов изменения случайных параметров сигнала (в промежутках сигнал имеет стабильные параметры) по рекуррентным формулам:
- $t_0 = 0$; $t_1 = t_0 + T_{b_1}; \dots; t_k = t_{k-1} + T_{b_k}; \dots; t_K = t_{K-1} + T_{b_K}$
- 3. Моделируем последовательность $K = 50$ случайных значений фаз сигнала φ_k по формуле (метод обратных функций) $\varphi_k = -\pi + 2\pi r_k$, где r_k - случайное число, распределённое по равномерному закону в диапазоне $r_k \in [0,1]$, генерируемое ГПСЧ; $k = \{1,2, \dots, K\}$.

Алгоритм моделирования сигнала специального вида

- 4. Моделируем последовательность $K = 50$ случайных значений параметров замирания сигнала b_k, используя численный метод усечения Неймана или метод обратных функций



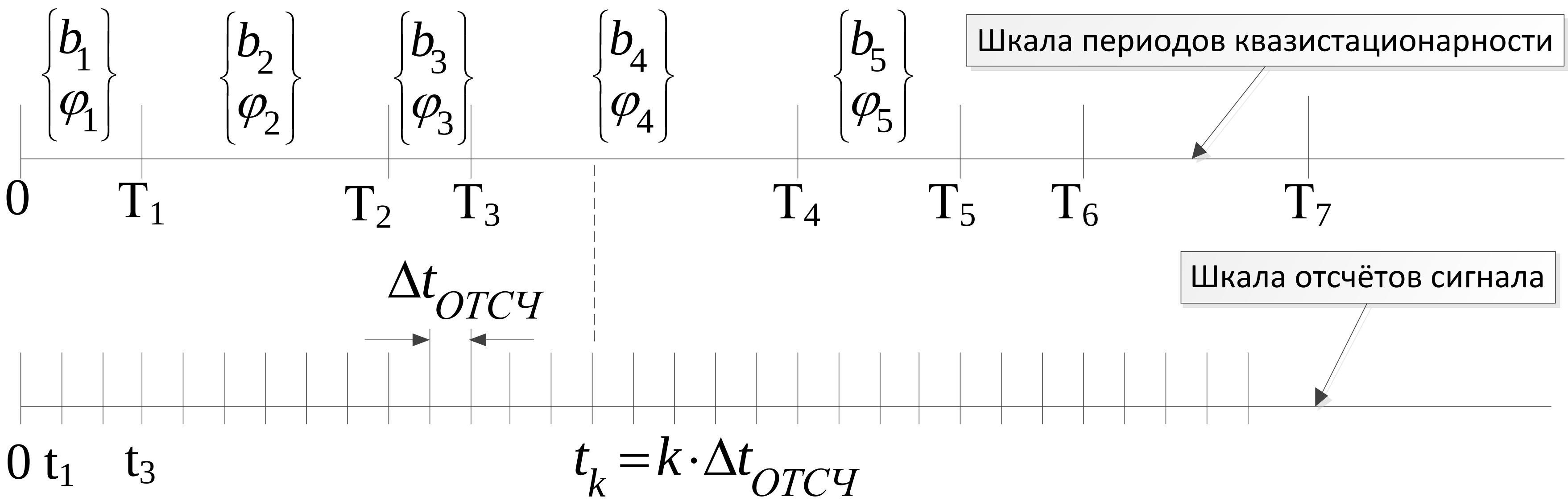
По методу Неймана, см. график слева, моделируем случайные точки с координатами x и y, распределённые по равномерному закону в прямоугольнике $[y \leq Ymax; x \leq Vmax]$. Если точка, как P_1 на рисунке, попадает под кривую, то её координата x_1 принимается как генерируемое случайное число. В противном случае, точка P_2, - x_2 нет.

- По методу обратных функций используем формулу: $x = \sqrt{2\sigma^2 \ln(\frac{1}{1-r})}$
- , где r - случайное число, распределённое по
- равномерному закону в диапазоне $r_k \in [0,1]$, генерируемое ГПСЧ.

Алгоритм моделирования сигнала специального вида

- 5. Рассчитаем отсчёты сигнала, сделанные через равные промежутки времени $\Delta t = \frac{t_K - t_0}{N_{\text{отсч}}}$, задав количество отсчётов $N_{\text{отсч}} = 200$.
- Текущее значение момента отсчёта $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta t$, причём $\tau_0 = t_0$.
- Определяем, в какой интервал квазистационарности попадают текущий момент отсчёта, по условию:
- $t_{K-1} \leq \tau_k \leq t_K$, где $K \in \{1,2,\ldots,50\}$, а $k \in \{1,2,\ldots,200\}$.
- При невыполнении условия, меняем номер интервала $K = K + 1$.
- При выполнении условия вычисляем значение отсчёта сигнала по формуле $s_k = b_K A cos(\omega \tau_k + \varphi_K)$

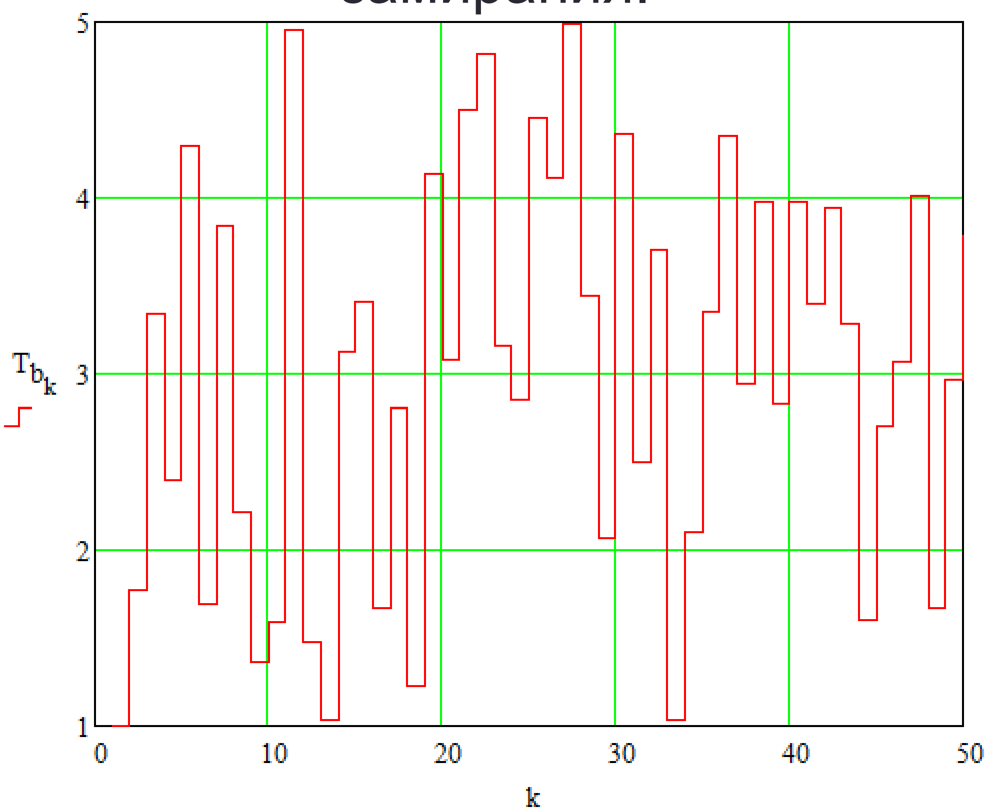
Схема соответствия временных шкал модели



- Отсчёты сигнала производятся регулярно, через равные промежутки времени:
  $S_k = S(t_k) = Ab_4 cos(\omega_0 t_k + \varphi_4)$ -
- для ситуации, изображённой на схеме выше

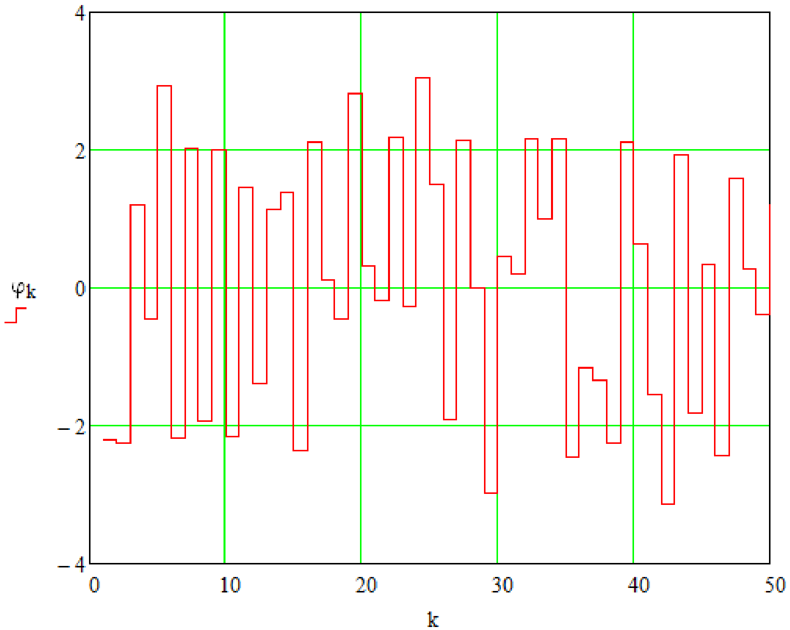
Результаты моделирования случайных параметров сигнала

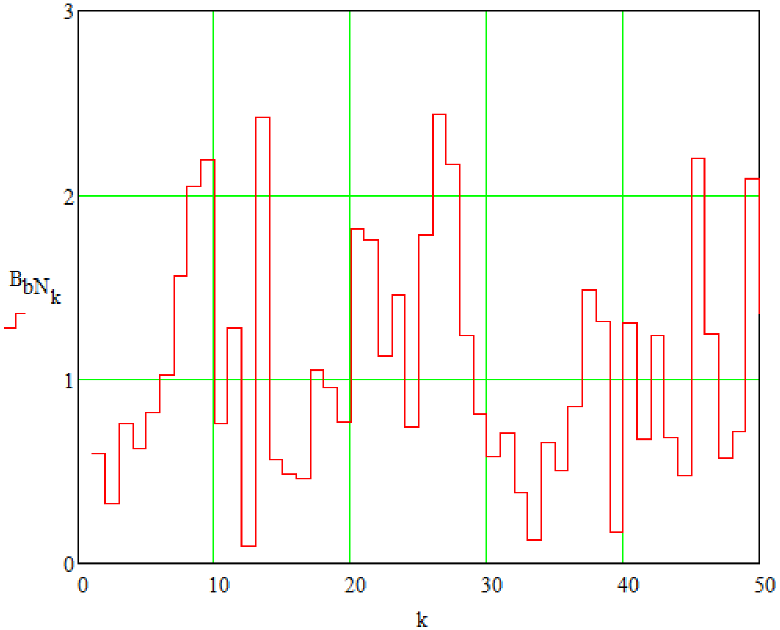
На графике представлены результаты моделирования длительностей периодов замирания.



- Моделируется 50 интервалов квазистационарности параметров сигнала, имеющих случайную длительность, распределённую по равномерному закону на отрезке [1;5].
- Слева на графике случайные изменения длительностей отражены скачкообразно ступенчатой функцией реализации случайного процесса.

Результаты моделирования случайных параметров сигнала

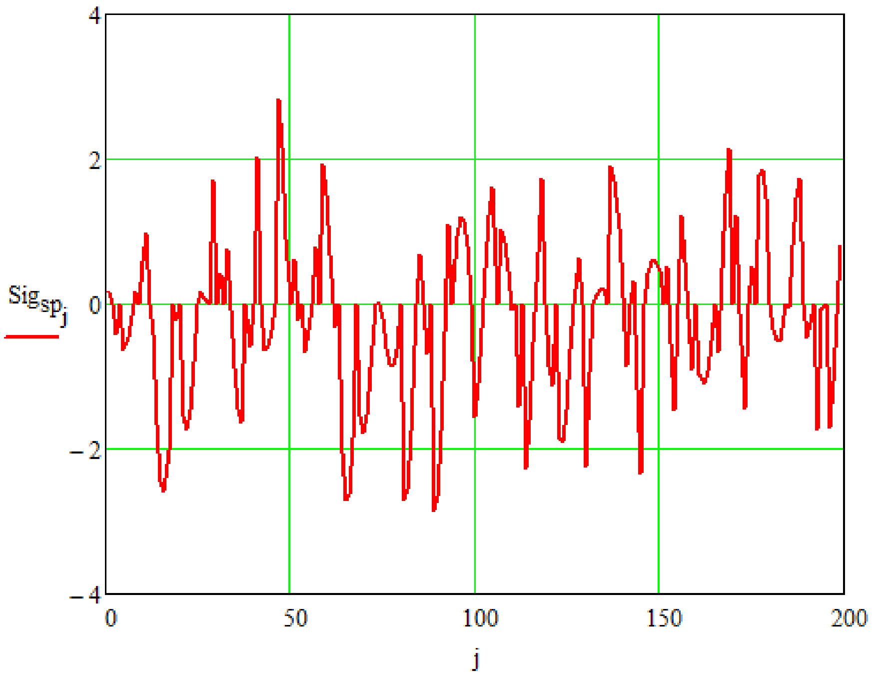


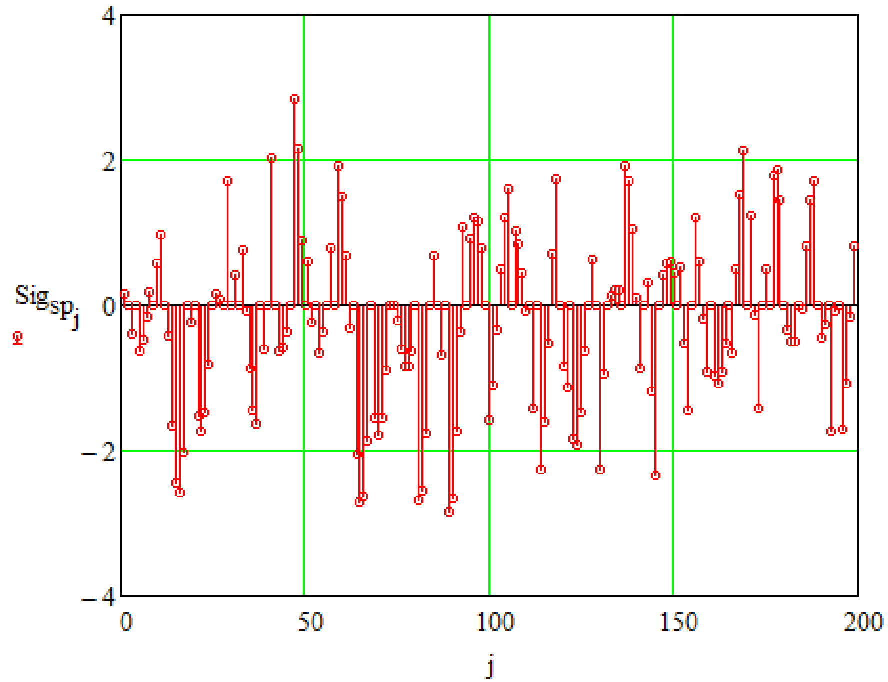


- Случайные значения параметров случайной помехи сигнала при переходе от одного периода квазистационарности к другому изменяются также скачкообразно, что представлено ступенчатыми функциями на графиках выше. Слева показаны фазы сигнала, справа – коэффициенты замирания.

Оформление результатов расчёта

- Сохранить результаты моделирования для последующей работы по анализу сигналов в формате рабочего листа Excel.
- Строим график отсчётов сигнала с линейной огибающей и как решётчатой функции





Задание 1 по данной практике:

- Выполнить моделирование сигнала, зашумлённого комплексной помехой специального вида по алгоритму, описанному на слайдах 14-17.

Другие модели случайных сигналов: Моделирование мультифрактальных случайных сигналов

- Функция Вейерштрассе

$$X(t)=\sqrt{2}\cdot\sigma\frac{\left[1-b^{(2D-4)}\right]^{0.5}\sum_{n=0}^{N}b^{(D-2)\cdot n}\cdot\sin(2\pi\cdot s\cdot b^{n}\cdot t+\psi_{n})}{\left[1-b^{(2D-4)(N+1)}\right]^{0.5}}$$

- Возможный диапазон фрактальной размерности D
- $1 < D < 2$
- Параметры пространственно-частотного масштабирования b, s
- ψ_n- фаза, распределенная непрерывно случайным образом по равномерному закону на участке $[0; 2\pi]$
- N+1 – количество гармоник, t – время, σ – стандартное отклонение

Другие модели случайных сигналов:

Моделирование мультифрактальных случайных сигналов

- Сигнал задаём мультифрактальной функцией
- Для этого в функции Вейерштрассе задаём непрерывный спектр фрактальных масштабов с помощью функции

$$D_k = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$$

- Её значения определяются для каждого отсчета множества K значений случайной функции
- При моделировании:
- Задаём количество отсчётов K; задаём количество гармоник N+1; задаём стандартное отклонение $\sigma = 3{,}3$; задаём параметры b=2,5; s=0,005; r=1/5
- Модельное время отсчётов определяем как $t = k \cdot \Delta t$

Другие модели случайных сигналов: Моделирование мультифрактальных случайных сигналов

- Где интервал отсчёта $\Delta t = 1$
- Отсчёты образуют множество $k = 0,1,2, \dots, K$
- Гармоники образуют множество $n = 0,1,2, \dots, N$
- Каждой гармонике соответствует случайное значение фазы, определяемое с помощью генератора случайных чисел, распределённых по равномерному закону, по формуле обратной функции: $\psi_n = 2\pi r$, где r - случайное число, распределённое по равномерному закону в диапазоне $r \in [0,1]$, генерируемое ГПСЧ.
- Каждому отсчёту X_k соответствует своё значение фрактального масштаба D_k, определяемое по формуле

$$D_k = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$$

- Количество отсчётов сигнала составляет $K + 1$

Другие модели случайных сигналов: Моделирование случайного сигнала БГШ

- Белый гауссовский шум БГШ является сигналом, имеющим значения нормального распределения со стандартным отклонением σ и математическим ожиданием E, причём, как правило БГШ имеет $E = 0$
- Для моделирования значений отсчётов данного сигнала используют моделирование случайных чисел, распределённых по нормальному закону с параметрами σ и E. Для моделирования нормальных чисел $N(E,\sigma)$ используем специальные методы: метод ЦПТ или метод Бокса-Мюллера.

Задание 2: Другие модели случайных сигналов:

- 1. Смоделировать непериодический одиночный сигнал по формуле
- $s(t) = RP(t)Acos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- $RP(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{\varphi_0}{\omega_0} \\ 1, & -\frac{\varphi_0}{\omega_0} \le t \le \frac{\varphi_0}{\omega_0} \\ 0, & t > \frac{\varphi_0}{\omega_0} \end{cases}$
- Задать значения $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T = 25 \cdot 10^{-3}\ c$; $A = 1$
- Получить ряд отсчётов сигнала $K + 1$
- $K = 63$

Задание 2: Другие модели случайных сигналов:

- 2. Смоделировать сигнал, зашумлённый аддитивно БГШ:
- $y1(t) = s(t) + \mathrm{n}1(t)$, где $\mathrm{n}1(t)$ - белый гауссовский шум
- Смоделировать ряд $K + 1$ ($K = 63$) отсчётов сигнала $\mathrm{y}1(t)$
- 3. Смоделировать сигнал, зашумлённый аддитивно случайным мультифрактальным сигналом:
- $y2(t) = s(t) + \mathrm{n}2(t)$, где $\mathrm{n}2(t)$ - случайный мультифрактальным сигнал
- Смоделировать ряд $K + 1$ ($K = 63$) отсчётов сигнала $\mathrm{y}2(t)$

Задание 2: Другие модели случайных сигналов:

- 4. Построить графики смоделированных сигналов $s(t)$, $\mathrm{n1}(t)$, $y1(t)$, $\mathrm{n2}(t)$, $y2(t)$
- 5. Сделать выводы относительно влияния аддитивных помех на форму информационного сигнала
- Сохранить результаты моделирования для последующей работы по анализу сигналов.