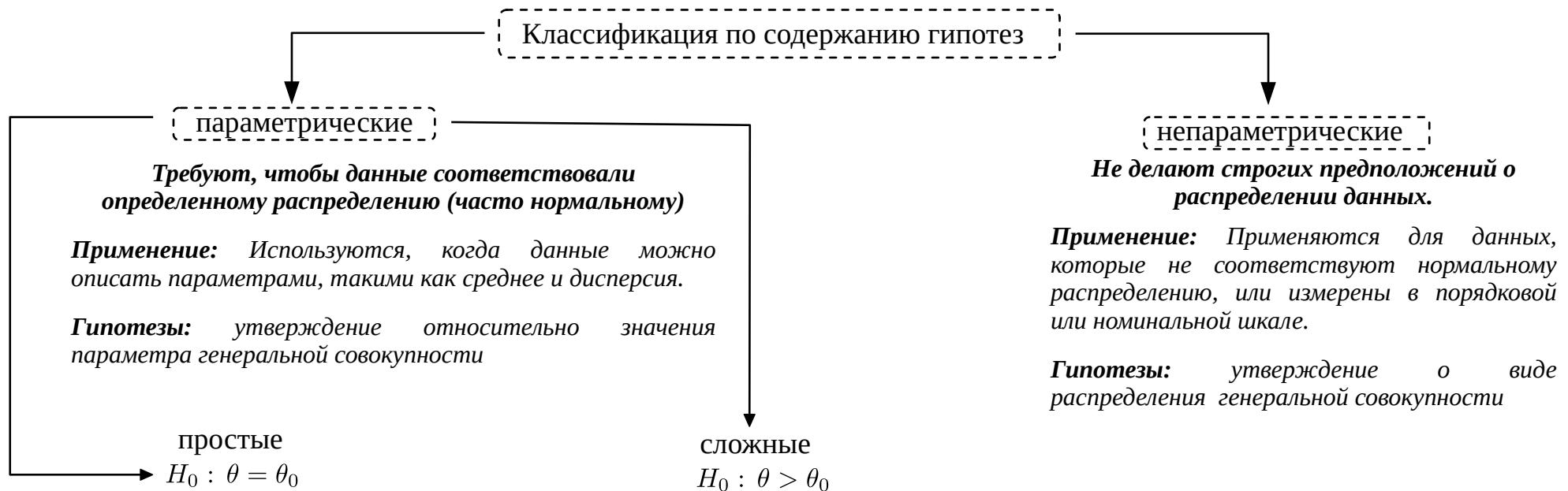


Статистическая гипотеза – это некоторое предположение относительно свойств генеральной совокупности, проверяемое по выборочным данным.



Основные типы гипотез:

1. Гипотезы о виде закона распределения исследуемой случайной величины.
2. Гипотезы о числовых значениях параметров случайной величины.

Проверяемая гипотеза называется **нулевой** H_0 .

Нулевые гипотезы обычно утверждают, что различие между сравниваемыми величинами (параметрами или функциями распределения) отсутствует, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными отклонениями выборки.

Альтернативные (конкурирующие) гипотезы H_i ($i \geq 1$).

Альтернативные гипотезы являются логическим отрицанием нулевой гипотезы.

Статистической проверкой гипотез называется процедура обоснованного сопоставления высказанной гипотезы с имеющимися в распоряжении выборочными данными x_1, x_2, \dots, x_n , сопровождаемая количественной оценкой степени достоверности получаемого вывода.

Проверка осуществляется с помощью того или иного **статистического критерия** – специально выбранной статистики (выборочной функции) $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Z является случайной величиной.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением или **статистикой критерия** называют значение критерия $Z_{\text{набл}}$, которое вычислено по реализации выборки.

Уровень значимости статистического критерия (мера риска) – вероятность α ошибочного отклонения нулевой гипотезы . Чем весомее потери, чем меньше выбирается риск, т. е. α . (*см. слайд 3 и 4).

Доверительная вероятность (надежность) $P_d \equiv 1 - \alpha$

Критической областью (КО) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отклоняют в пользу альтернативной гипотезы. Вид области зависит от альтернативной гипотезы (*см. слайд 5).

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений **ОДЗ**) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Положение критической области (точек) на множестве значений статистики K зависит от формулировки альтернативной гипотезы H_1 .

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия $K_{\text{набл}}$ принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отклоняют; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают .

Но принятие H_0 следует расценивать не как установленный абсолютный факт, а лишь как достаточно правдоподобное, не противоречащее опытным данным утверждение

1.1 Ошибки, допускаемые при статистической проверке гипотез

Почему ошибки неизбежны?

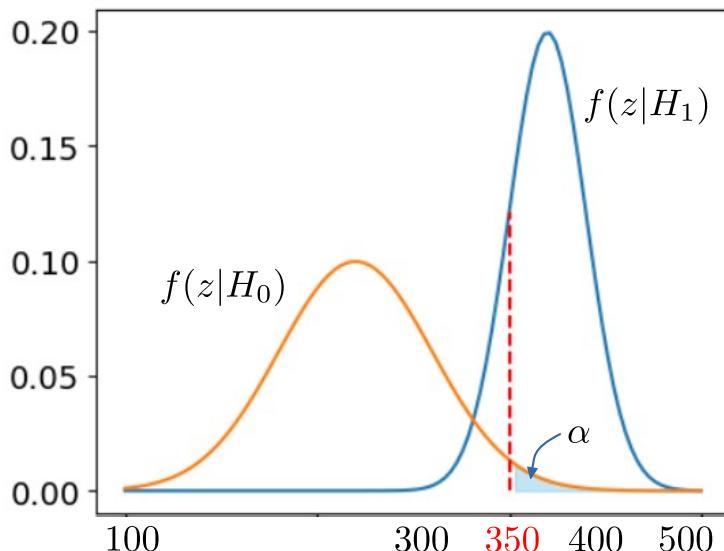
Рассмотрим пример. Допустим мы хотим определить болен ли COVID случайно выбранный человек (H_0 : человек = болен, H_1 : человек = здоров). Для этого был разработан медицинский тест (Z - статистический критерий), который на основе собранных данных о состоянии человека выдает числовое значение. Разработанный медицинский тест был предварительно верифицирован (т.е. для него построены функции распределения). Для этого было взято 1000 «точно больных» людей и для каждого из них были определены значения теста Z . В результате, например, было показано, что для больных людей значения теста меняются от 100 до 400 с разной вероятностью (т.е. определена $f(z|H_0)$). Затем взято 1000 «точно здоровых» людей и для них проведены этот же тест. В результате было показано, что для здоровых людей Z меняется от 300 до 500 с разной вероятностью (т.е. определена $f(z|H_1)$). Таким образом есть перекрытие, в области значений Z от 300 до 400 человек может быть как больным, так и здоровым.

Для того чтобы в этом случае принять решение здоров человек или нет вводят уровень значимости α , т.е. вероятность совершить ошибку первого рода (ошибочно отвергнуть гипотезу H_0 , в пользу альтернативной (человек здоров, хотя он болен)). Этому уровню значимости α соответствует критическая значение $Z_{\text{кр.}}$, например, $Z_{\text{кр.}} = 350$, превышение которого в данном случае означает, что человек здоров. С другой стороны появляется ошибка второго рода -- ошибочно принять нулевую гипотезу H_0 , когда верна альтернативная H_1 , т.е. сказать, что человек болен, хотя он здоров.

Какое значение должен иметь уровень значимости α ?

Его значение зависит от решаемой задачи. В данном случае уровень значимости надо уменьшать как можно больше, т. к. стоимость ошибки велика. Больной человек может оказаться среди здоровых и тем самым заразить много людей.

Но уровень значимости нельзя задавить равным нулю, т.к. в этом случае все здоровые люди будут считаться больными (Здесь следует учитывать, что пересечение в области от 200 до 300 получено на выборке из 2000 человек. В общем случае пересечение происходит на всей области значений, только вероятность при этом уменьшается).



| Пространство решений | H | |
|-----------------------|------------------|------------------|
| | H_0 | H_1 |
| Правильное решение | $P(H_0) = \pi_0$ | $P(H_1) = \pi_1$ |
| Априорная вероятность | | |
| Принятое решение | H_0 | H_1 |
| Оценка решения | правильное | ошибка 1-го рода |
| Вероятность решения | $1 - \alpha$ | α |
| | | ошибка 2-го рода |
| | | правильное |
| | | $1 - \beta = M$ |

уровень значимости

$$\alpha = \int_{\hat{z}}^{\infty} f_0(z|H_0) dz$$

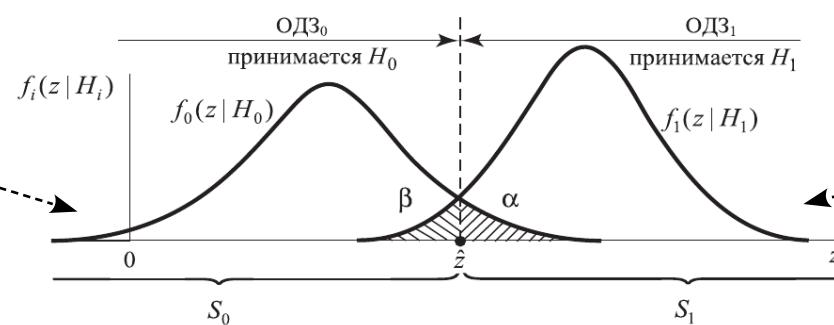
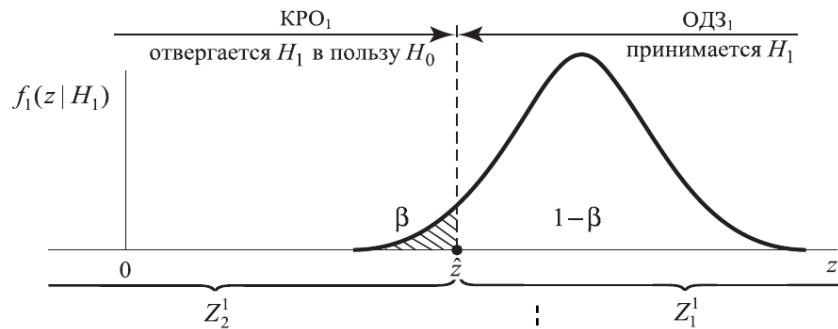
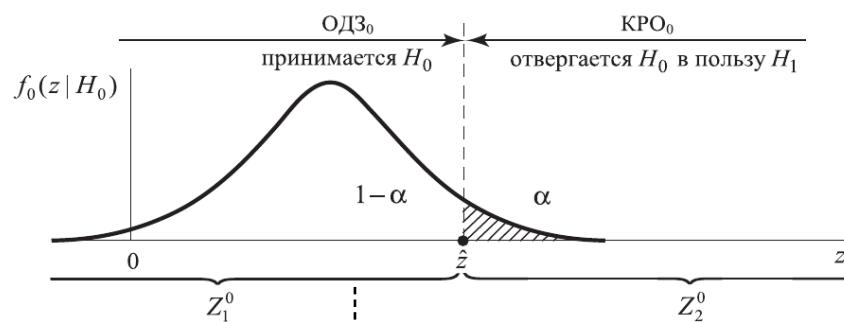
надежность

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{\hat{z}} f_0(z|H_0) dz$$

мощность критерия

$$\beta = \int_{-\infty}^{\hat{z}} f_1(z|H_1) dz$$

$$1 - \beta = \int_{\hat{z}}^{\infty} f_1(z|H_1) dz$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = 0$$

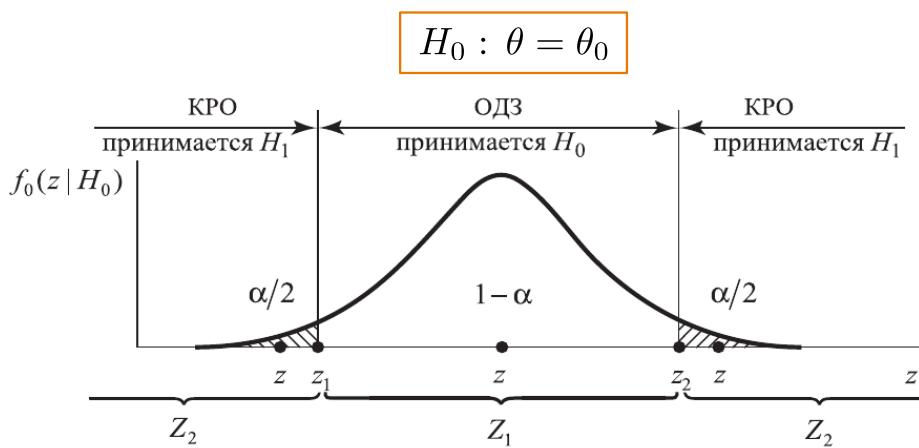
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta = 0$$

Чем меньше уровень значимости α , тем труднее отклонить нулевую гипотезу. Поэтому не следует стремиться выбирать уровень значимости слишком малым и нельзя выбирать $\alpha = 0$, т.к. будут приниматься все нулевые гипотезы, в том числе и неправильные, то есть с практической достоверностью будут допускаться ошибки второго рода.

Наиболее часто выбирают уровень значимости равным 5% или 1%.

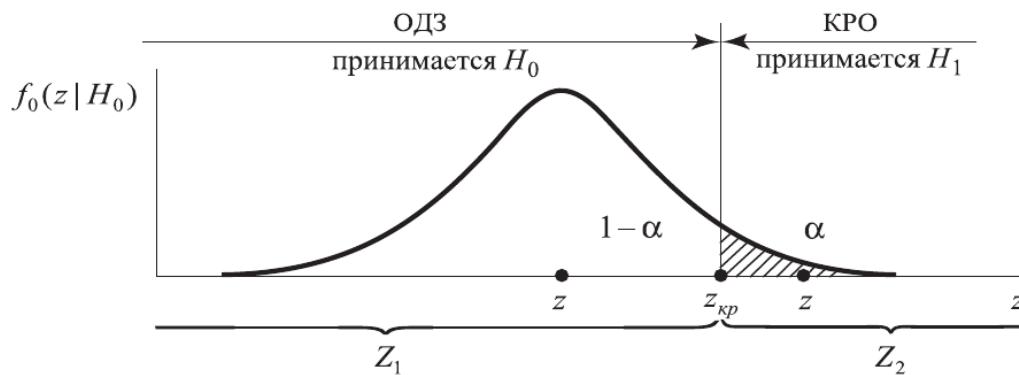
1. 2 Вид критической области в зависимости от вида альтернативной гипотезы

5



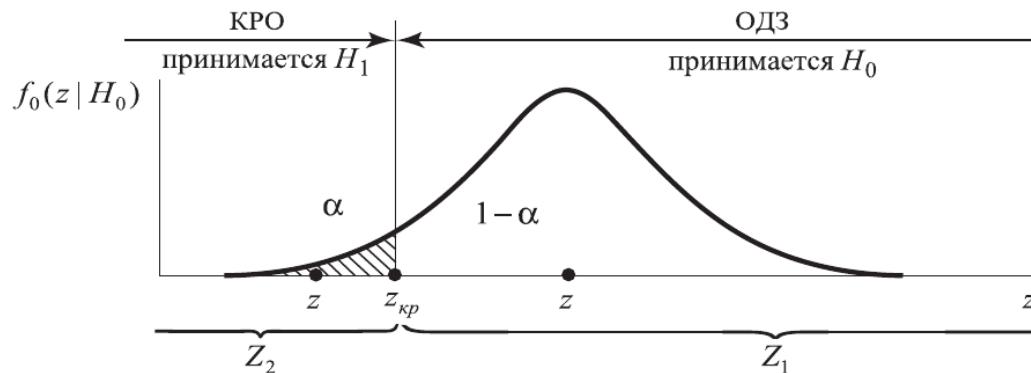
Двухсторонняя критическая область $| H_1 : \theta \neq \theta_0 |$

$$P(Z \in Z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f_0(z|H_0) dz = 1 - \alpha$$



Правосторонняя критическая область $| H_1 : \theta \geq \theta_0 |$

$$P(Z \in Z_1) = \int_{-\infty}^{z_{kp}} f_0(z|H_0) dz = 1 - \alpha$$



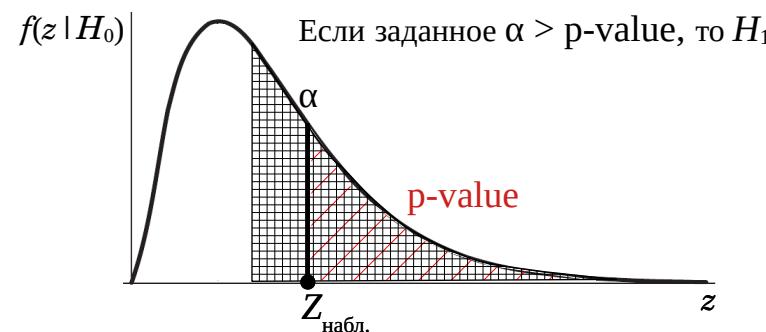
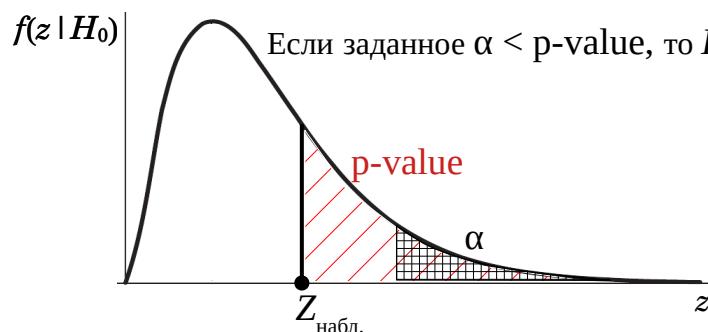
Левосторонняя критическая область $| H_1 : \theta < \theta_0 |$

$$P(Z \in Z_1) = \int_{z_{kp}}^{+\infty} f_0(z|H_0) dz = 1 - \alpha$$

1.3 Процедура проверки статистических гипотез

1. Формулировка проверяемой (H_0) и альтернативной (H_1) гипотез;
2. Выбор уровня значимости α ;
3. Выбор статистики критерия Z для проверки гипотезы H_0 ;
4. Определение закона распределения Z статистики при условии справедливости гипотезы H_0 ;
5. Определение вида критической области (левосторонняя, правосторонняя или двусторонняя);
6. Нахождение квантилей z_α и $z_{1-\alpha}$ или $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ в зависимости от вида критической области и определение критических точек с конкретным указанием критической области;
7. Вычисление статистики критерия $Z_{\text{набл}}$ по данным выборки;
8. Принятие решения о согласии опытных данных с нулевой гипотезой H_0 (принятие ее, если $Z_{\text{набл}}$ не лежит в критической области) или об отклонении выдвинутой гипотезы (если $Z_{\text{набл}}$ лежит в критической области).

При проверке гипотез в **python** непосредственное указание уровня значимости не требуется. Здесь определяется p-value, т. е. уровень значимости соответствующий вычисленному значению $Z_{\text{набл}}$, т. е. критическое значение уровня значимости α , при котором отвергается проверяемая гипотеза.



Далее для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей нам понадобится новый закон распределения — распределение Фишера. На следующем слайде дано его описание.

2*(отступление). Распределение Фишера

Закон распределения широко используемый в математической статистике

Если $V_x \in H^2(k_x)$, $V_y \in H^2(k_y)$, то $z = \frac{V_x/k_x}{V_y/k_y} \in F(k_x, k_y)$, k_x, k_y — степени свободы

Если имеется две выборки $X_i \in N(M[X], \sigma[X])$, $i = 1..n_x$ и $Y_j \in N(M[Y], \sigma[Y])$, $j = 1..n_y$, то

$$V_x = \frac{1}{\sigma[X]^2} \sum_{i=1}^{n_x} (X_i - M[X])^2 = \frac{n_x}{\sigma[X]^2} \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (X_i - M[X])^2}{n_x} = \frac{\widehat{D}_x n_x}{\sigma[X]^2} \in H^2(n_x), V_y = \frac{\widehat{D}_y n_y}{\sigma[y]^2} \in H^2(n_y) \quad (\text{т. е. } k_x = n_x \text{ и } k_y = n_y)$$

оценка для дисперсии,
когда известно $M[X]$

$$\Rightarrow z = \frac{\widehat{D}_x}{\widehat{D}_y} \frac{\sigma[Y]^2}{\sigma[X]^2} \in F(n_x, n_y)$$

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma[X]^2} = \frac{(n_x - 1)}{\sigma[X]^2} \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (X_i - \bar{X})^2}{(n_x - 1)} = \frac{s_x^2(n_x - 1)}{\sigma[X]^2} \in H^2(n_x - 1), V_y = \frac{s_y^2(n_y - 1)}{\sigma[y]^2} \in H^2(n_y - 1)$$

оценка для дисперсии,
когда НЕ известно $M[X]$

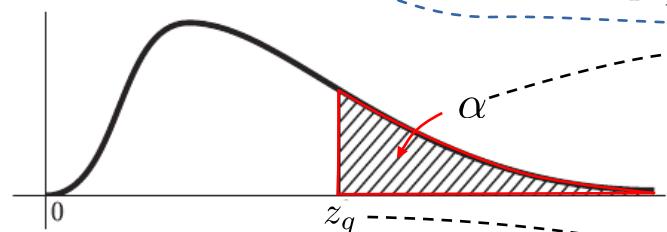
$$\Rightarrow z = \frac{s_x^2}{s_y^2} \frac{\sigma[Y]^2}{\sigma[X]^2} \in F((n_x - 1), (n_y - 1)) \quad (\text{т. е. } k_x = n_x - 1 \text{ и } k_y = n_y - 1)$$

Для F -распределения справедливо соотношение:

$$F_p(n_x, n_y) = \frac{1}{F_{1-p}(n_y, n_x)}$$

Таблица процентных точек F -распределения
Фишера—Сnedекора

| k_2 | k_1 — степени свободы для большей дисперсии | | | | | | | | | | | |
|-------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 161 4052 | 200 4999 | 216 5403 | 225 5625 | 230 5764 | 234 5889 | 237 5928 | 239 5981 | 241 6022 | 242 6056 | 243 6082 | 244 6106 |
| 2 | 18,51 98,49 | 19,00 99,01 | 19,16 99,17 | 19,25 99,25 | 19,30 99,30 | 19,33 99,33 | 19,36 99,34 | 19,37 99,36 | 19,38 99,38 | 19,39 99,40 | 19,40 99,41 | 19,41 99,42 |
| 3 | 10,13 32,12 | 9,55 30,81 | 9,28 29,46 | 9,12 28,71 | 9,01 28,24 | 8,94 27,91 | 8,88 27,67 | 8,84 27,49 | 8,81 27,34 | 8,78 27,23 | 8,76 27,13 | 8,74 27,05 |



Характерный вид плотности распределения вероятности закона Фишера

3. Проверка параметрических гипотез

3.1 Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Дано: $X \in N(m_x = ?, \sigma_x = ?)$, $\{x_i\}, i = 1, \dots, n_x \implies s_x^2$

$Y \in N(m_y = ?, \sigma_y = ?)$, $\{y_j\}, j = 1, \dots, n_y \implies s_y^2$

Проверить гипотезу $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при заданном уровне значимости α

1

Можно переформулировать условие гипотезы:

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \implies H_0 : M[s_x^2] = M[s_y^2]$$

Т.к. s^2 – несмещенная оценка, $M[s_x^2] = \sigma_x^2$, $M[s_y^2] = \sigma_y^2$

Значимо или незначимо отличаются оценки дисперсий двух выборок?

2

В качестве статистического критерия проверки H_0 используется критерий Фишера.

Если H_0 справедлива, то говорят, что различие оценок незначимо и может быть объяснено случайными причинами

Известно, что $z = \frac{s_x^2 - \sigma_y^2}{s_y^2 - \sigma_x^2} \in F((n_x - 1), (n_y - 1))$ Если H_0 верна, то $\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 1 \Rightarrow z = \frac{s_x^2}{s_y^2} \in F((n_x - 1), (n_y - 1))$

Распределение
Фишера-Сnedекора
(табулировано)

Критерий Фишера

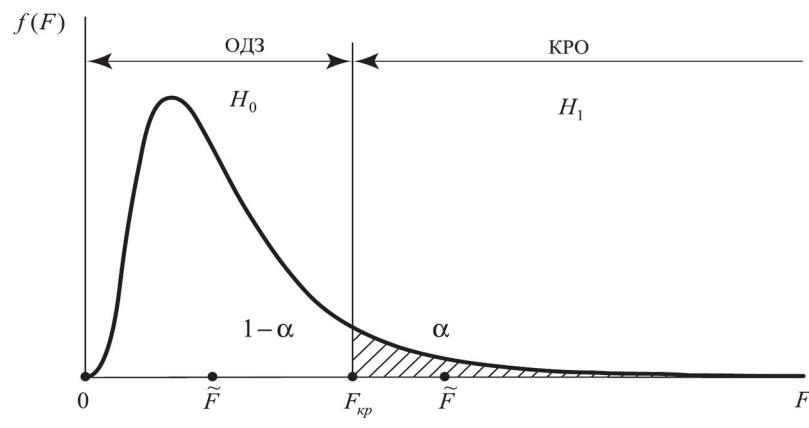
$$\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2}, \quad s_x^2 > s_y^2 \quad \text{или} \quad \hat{F} = \frac{s_y^2}{s_x^2}, \quad s_y^2 \geq s_x^2$$

Критерий Фишера очень чувствителен к отклонению от нормальности исследуемых генеральных совокупностей. Поэтому рекомендуется предварительно проводить проверку гипотезы о нормальности распределений. (об этом пойдет речь в следующей лекции)

3

Определение КО и ОДЗ

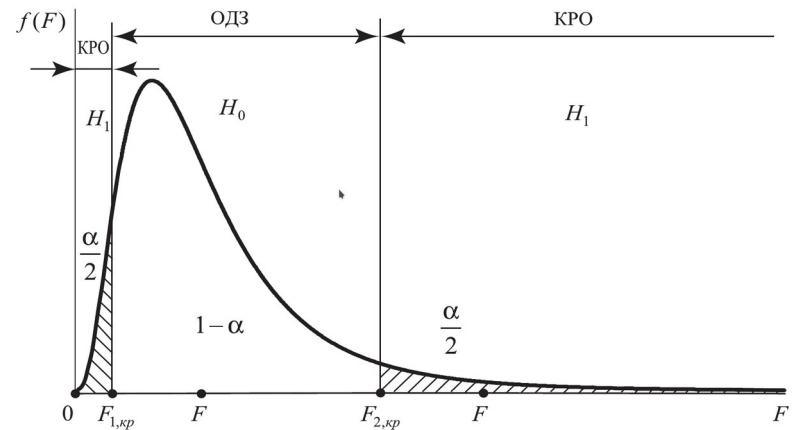
$$H_1 : D_x > D_y$$



$$P(\hat{F} \geq F_{kp}) = \alpha$$

Конкурирующая гипотеза

$$H_1 : D_x \neq D_y$$



$$P(\hat{F} \geq F_{2,kp}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\hat{F} < F_{1,kp}) = \frac{\alpha}{2}$$

4

Если $\hat{F} \in \text{ОДЗ}$: H_0

Если $\hat{F} \in \text{КО}$: H_1

П р и м е р: Провести сравнение точности работы двух приборов. В ходе измерений фиксировалось отклонение показаний приборов от точного значения. Результаты в таблице.

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух приборов, что будет означать равенство характеристик точности двух приборов при уровне значимости $\alpha = 0.1(10\%)$

$$H_0 : \sigma_x = \sigma_y \quad \text{и} \quad H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y \quad \Rightarrow$$

Стат. критерий $\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \quad \hat{F} \in F_{11,8}$

Двухсторонняя КО

$$P(\hat{F} \geq F_{2,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\hat{F} < F_{1,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$F_{2,\kappa p}(11, 8) = 3.31$$

$$F_{1,\kappa p} = \frac{1}{F_{2,\kappa p}(8, 11)} = \frac{1}{2.95} \approx 0.34$$

Таблица процентных точек F -распределения
Фишера—Сnedекора

(5%-ные значения — верхняя цифра, 1%-ные — нижняя цифра)

| k_2 | k_1 — степени свободы для большей дисперсии | | | | | | | | | | | |
|-------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 161 4052 | 200 4999 | 216 5403 | 225 5625 | 230 5764 | 234 5889 | 237 5928 | 239 5981 | 241 6022 | 242 6056 | 243 6082 | 244 6106 |
| 2 | 18,51 98,49 | 19,00 99,01 | 19,16 99,17 | 19,25 99,25 | 19,30 99,30 | 19,33 99,33 | 19,36 99,36 | 19,37 99,38 | 19,38 99,40 | 19,39 99,41 | 19,40 99,42 | 19,41 |
| 3 | 10,13 32,12 | 9,55 30,81 | 9,28 29,46 | 9,12 28,71 | 9,01 28,24 | 8,94 27,91 | 8,88 27,67 | 8,84 27,49 | 8,81 27,34 | 8,78 27,23 | 8,76 27,13 | 8,74 27,05 |
| 4 | 7,71 21,20 | 6,94 18,00 | 6,59 16,69 | 6,39 15,98 | 6,26 15,52 | 6,16 15,21 | 6,09 14,98 | 6,04 14,80 | 6,00 14,66 | 5,96 14,54 | 5,93 14,45 | 5,91 14,47 |
| 5 | 6,61 16,26 | 5,79 13,27 | 5,41 12,06 | 5,19 11,39 | 5,05 10,97 | 4,95 10,67 | 4,88 10,45 | 4,82 10,27 | 4,78 10,15 | 4,74 10,05 | 4,70 9,96 | 4,68 9,89 |
| 6 | 5,99 13,74 | 5,14 10,92 | 4,76 9,78 | 4,53 9,15 | 4,39 8,75 | 4,28 8,47 | 4,21 8,26 | 4,15 8,10 | 4,10 7,98 | 4,06 7,87 | 4,03 7,79 | 4,00 7,72 |
| 7 | 5,59 12,25 | 4,74 9,55 | 4,35 8,45 | 4,12 7,85 | 3,97 7,46 | 3,87 7,19 | 3,79 7,00 | 3,73 6,84 | 3,68 6,71 | 3,63 6,62 | 3,60 6,54 | 3,57 6,47 |
| 8 | 5,32 11,26 | 4,46 8,65 | 4,07 7,59 | 3,84 7,01 | 3,69 6,63 | 3,58 6,37 | 3,50 6,19 | 3,44 6,03 | 3,39 5,91 | 3,31 5,82 | 3,31 5,74 | 3,28 5,67 |
| 9 | 5,12 10,56 | 4,26 8,02 | 3,86 6,99 | 3,63 6,42 | 3,48 6,06 | 3,37 5,80 | 3,29 5,62 | 3,23 5,47 | 3,18 5,35 | 3,13 5,26 | 3,10 5,18 | 3,07 5,11 |
| 10 | 4,96 10,04 | 4,10 7,56 | 3,71 6,55 | 3,48 5,99 | 3,33 5,64 | 3,22 5,39 | 3,14 5,21 | 3,07 5,06 | 3,02 4,95 | 2,97 4,85 | 2,94 4,78 | 2,91 4,71 |
| 11 | 4,84 9,85 | 3,98 7,20 | 3,59 6,22 | 3,36 5,67 | 3,20 5,32 | 3,09 5,07 | 3,01 4,88 | 2,95 4,74 | 2,90 4,63 | 2,86 4,54 | 2,82 4,46 | 2,79 4,40 |
| ... | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,92 | 2,85 | 2,80 | 2,76 | 2,72 | 2,69 |

$$s_x^2 = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2 = 451.9091$$

$$s_y^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})^2 = 332.00$$

ОДЗ: (0.34; 3.31)

$$\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \approx 1.36$$

$\hat{F} \in \text{ОДЗ}$

H_0 принимается!

| Переменная | Описательные статистики | | |
|------------|-------------------------|----------|-----------|
| | N набл. | Среднее | Дисперсия |
| X | 12 | 4,500000 | 451,9091 |
| Y | 9 | 4,666667 | 332,0000 |

| | Значение отклонений, м | |
|----|------------------------|--------------|
| | прибор №1, X | прибор №2, Y |
| 1 | -8 | -20 |
| 2 | -14 | -10 |
| 3 | 0 | -3 |
| 4 | 14 | 11 |
| 5 | -38 | -4 |
| 6 | 2 | 12 |
| 7 | 50 | -3 |
| 8 | 1 | 17 |
| 9 | 10 | 42 |
| 10 | 15 | |
| 11 | 0 | |
| 12 | 22 | |

Пример: Провести сравнение точности работы двух приборов. В ходе измерений фиксировалось отклонение показаний приборов от точного значения. Результаты в таблице.

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух приборов, что будет означать равенство характеристик точности двух приборов при уровне значимости $\alpha = 0.1$ (10%)

$$H_0 : \sigma_x = \sigma_y \quad \text{и} \quad H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y$$

\Rightarrow

Стат. критерий $\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ $\hat{F} \in F_{11,8}$

Двухсторонняя КО

```
import scipy.stats as st
import numpy as np
X = [-8, -14, 0, 14, -38, 2, 50, 1, 10, 15, 0, 22]
print("numpy D[X] = ", np.std(X)**2) # смещенная дисперсия
print("numpy D[X] = ", np.std(X, ddof=1)**2)
std2_X = st.tstd(X)**2
print("stats D[X] = ", std2_X)

✓ 0.0s
```

Python

```
numpy D[X] = 414.25
numpy D[X] = 451.9090909090909
stats D[X] = 451.9090909090909
```

```
Y = [-20, -10, -3, 11, -4, 12, -3, 17, 42]
std2_Y = st.tstd(Y)**2
print("stats D[Y] = ", std2_Y)
```

```
✓ 0.0s
```

Python

```
stats D[Y] = 332.0
```

```
F_observ = std2_X/std2_Y
print(f"F_observ = ", F_observ)
```

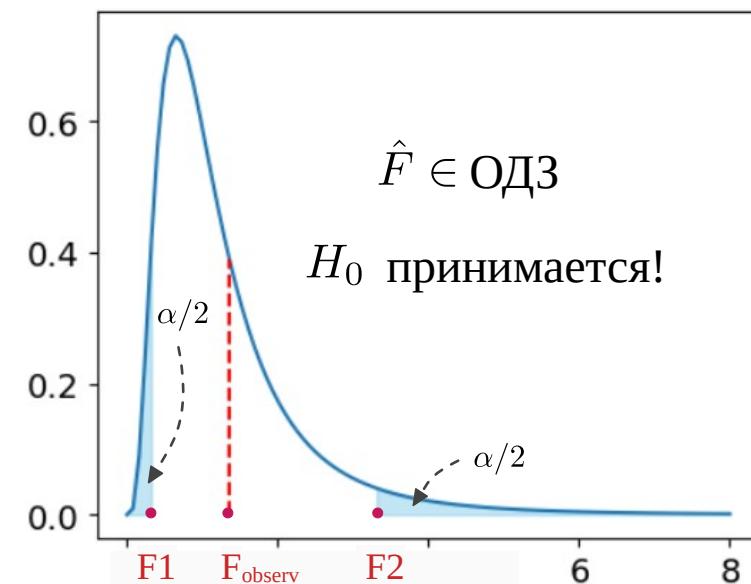
```
✓ 0.0s
```

```
F_observ = 1.361171960569551
```

```
alpha_half = 0.05
# нижнее значение
F1 = st.f.ppf(alpha_half, dfn = 11, dfd = 8)
# верхнее значение
F2 = st.f.ppf(1 - alpha_half, dfn = 11, dfd = 8)
print(f"F1 = {round(F1, 3)}, F2 = {round(F2, 3)}")
```

✓ 0.0s

F1 = 0.339, F2 = 3.313



3.2 Сравнение математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей



3.2.1 Сравнение математических ожиданий при известных дисперсиях

$$X \in N(m_x = ?, \sigma_x^2), \quad \{x_i\}, i = 1, \dots, n_1 \implies \hat{m}_x = \bar{x}$$

$$Y \in N(m_y = ?, \sigma_y^2), \quad \{y_j\}, j = 1, \dots, n_2 \implies \hat{m}_y = \bar{y}$$

Оценить $H_0 : m_x = m_y$ при α уровне значимости

1

\bar{x} – несмещенная оценка, $M[\bar{x}] = m_x$, $M[\bar{y}] = m_y$

$$H_0 : M[X] = M[Y], M[X - Y] = 0 \implies H_0 : M[\bar{x} - \bar{y}] = 0$$

Значимо или незначимо отличаются оценки математических ожиданий двух выборок?

2

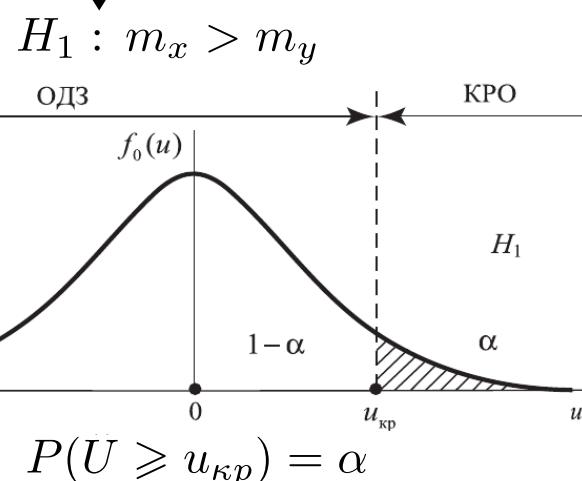
Критерий проверки нулевой гипотезы

$$\hat{U} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}, \quad \hat{U} \in N(0, 1)$$

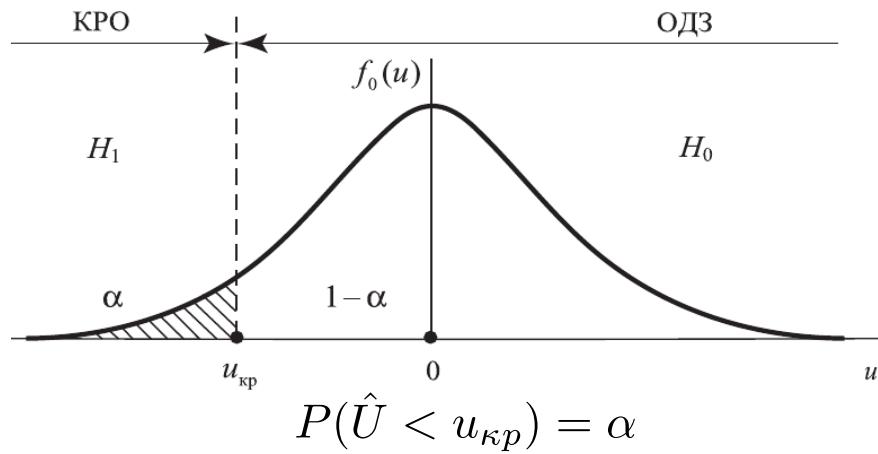
Т.е. задачу проверки статистической гипотезы можно рассматривать, как задачу по определению доверительного интервала для математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$

В результате, если 0 будет принадлежать этому интервалу, то нулевая гипотеза принимается.

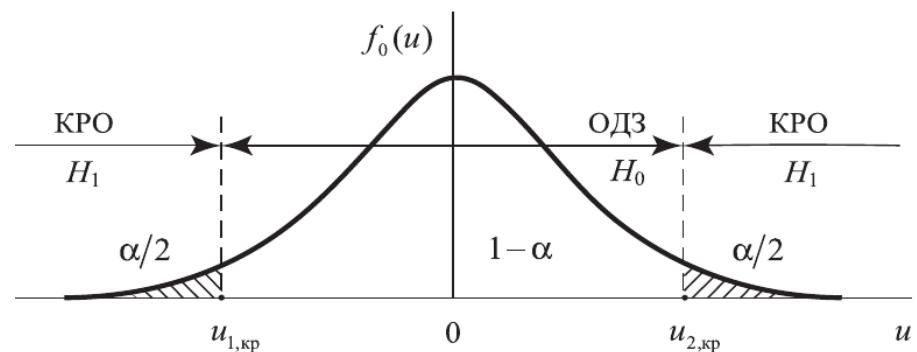
Конкурирующая гипотеза



$$H_1 : m_x < m_y$$



$$H_1 : m_x \neq m_y$$



$$P(\hat{U} \geq u_{2,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\hat{U} < u_{1,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$u_{2,\kappa p} = -u_{1,\kappa p}$$

$$u_{1,\kappa p} = \Phi_0^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)$$

табличная функция Лапласа-Гаусса

П р и м е р: Для автомобильных двигателей первого типа по выборке $\{x_i\}$ объемом $n_1 = 30$ найден средний расход масла на 1000 км пробега: $\bar{x} = 130$ г, а для двигателей второго типа по выборке $\{y_j\}$ объемом $n_2 = 40$, $\bar{y} = 125$ г. Генеральные дисперсии известны и равны $D_x = 60 \text{ г}^2$, $D_y = 80 \text{ г}^2$. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0 : m_x = m_y$ при уровне значимости $\alpha = 5\%$ и конкурирующей гипотезе $H_1 : m_x \neq m_y$. Предполагается, что случайные величины X и Y – независимы и нормально распределены.

$$u_{1,\kappa p} = \Phi_0^{-1} \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right) = \Phi_0^{-1}(0.475) = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \text{ОДЗ: } (-1.96; 1.96)$$

$$\hat{U} = \frac{130 - 125}{\sqrt{\frac{60}{30} + \frac{80}{40}}} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \hat{U} \in \text{КО} \quad H_0 \text{ отвергается!}$$

Т.е. средний расход масла двигателями первого и второго типа различается значимо.

3.2.2 Сравнение математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях

14

$$X \in N(m_x = ?, \sigma = ?), \quad \{x_i\}, \quad i = 1, \dots, n_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{m}_x = \bar{x}$$

$$Y \in N(m_y = ?, \sigma = ?), \quad \{y_j\}, \quad j = 1, \dots, n_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{m}_y = \bar{y}$$

Оценить $H_0 : m_x = m_y$ при α уровне значимости

1 Вводится $\hat{\Delta} = \bar{x} - \bar{y}$, $\hat{\Delta} \in N(m_{\hat{\Delta}}, \sigma_{\hat{\Delta}})$

$$H_0 : m_x = m_y \quad \Rightarrow \quad H_0 : \hat{\Delta} = 0$$

Нулевая гипотеза сводится к простой гипотезы, которая определяется по аналогии с методом получения доверительного интервала для неизвестного математического ожидания и неизвестной дисперсии.

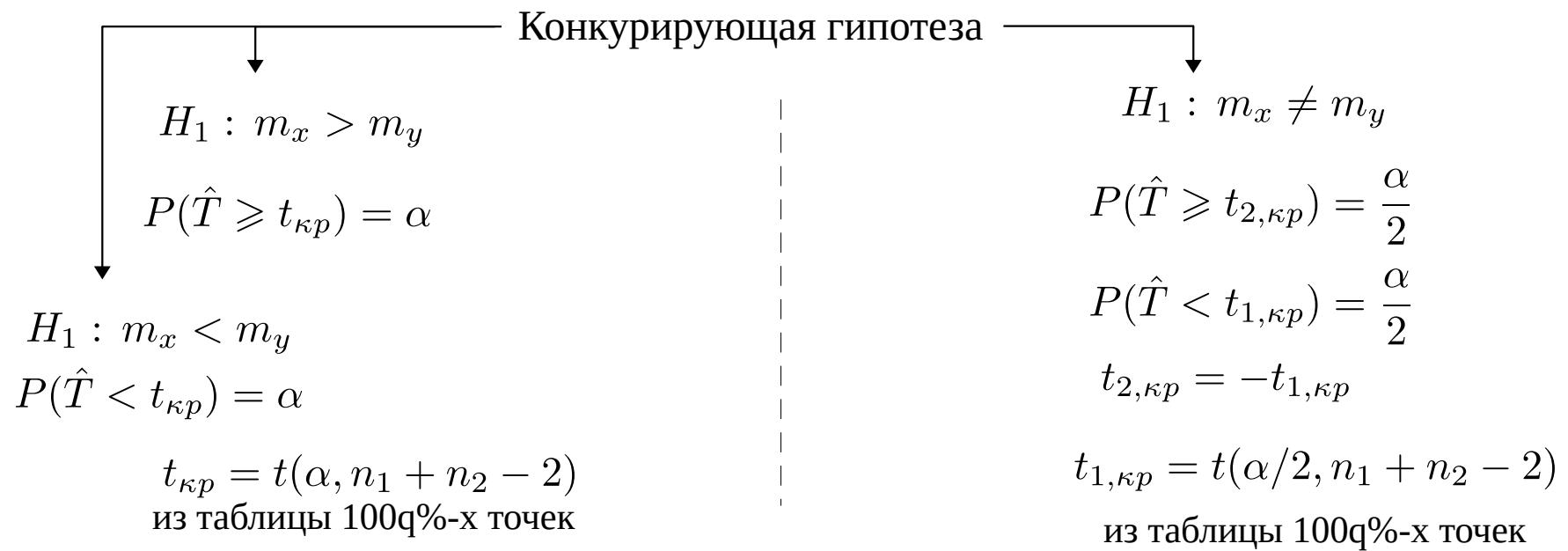
2 Критерий проверки нулевой гипотезы

$$\hat{T} = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}{\left[\sqrt{s_x^2 (n_1 - 1) + s_y^2 (n_2 - 1)} \right] \sqrt{(n_1 + n_2)}}, \quad \hat{T} \in S(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\sigma_x \neq \sigma_y \quad \boxed{\hat{T} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\left[\sqrt{s_x^2/n_1 + s_y^2/n_2} \right]}, \quad k = \frac{(s_x^2/n_1 + s_y^2/n_1)^2}{\frac{(s_x^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_y^2/n_2)^2}{n_2-1}}, \quad \hat{T} \in S(k)}$$

3

Определение КО и ОДЗ



4

Если $\hat{T} \in \text{ОДЗ}$: H_0 или если $\hat{T} \in \text{КО}$: H_1

П р и м е р: Измерялась базовая дальность до объекта лазерными дальномерами (ЛД). Первым ЛД произвели $n = 5$ измерений дальности $\{X\}$, вторым ЛД – $m = 6$ измерений $\{Y\}$. Статистическая обработка результатов наблюдений дала следующие результаты:

$$\bar{x} = 500.330 \text{ (m)}; \quad \bar{y} = 500.248 \text{ (m)}; \quad s_x = 0.50 \text{ (m)}; \quad s_y = 0.33 \text{ (m)}.$$

Требуется проверить гипотезу $H_0 : m_x = m_y$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$.
Альтернативная гипотеза $H_1 : m_x > m_y$.

1. Сначала проверим вспомогательную гипотезу $H_0 : D_x = D_y$

$$\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{0.50^2}{0.33^2} = 2.30, \quad s_x^2 > s_y^2 \quad \implies \quad \hat{F} < \hat{F}_{kp}, \quad H_0 \quad \begin{matrix} \text{согласуется с} \\ \text{экспериментальными} \\ \text{данными} \end{matrix}$$

$$\hat{F}_{kp} = F(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = F(0.05, 4, 5) = 5.19$$

2. Проверим гипотезу $H_0 : m_x = m_y$ при условии, что $\sigma_x = \sigma_y$

$$\hat{T} = \frac{(500.330 - 500.248) \sqrt{5 \cdot 6(5 + 6 - 2)}}{\sqrt{(4 \cdot 0.5^2 + 5 \cdot 0.33^2)(5 + 6)}} \approx 0.3269, \quad t_{kp} = t(0.05, 9) = 1.8331$$

$$\implies \hat{T} < \hat{T}_{kp}, \quad H_0 \text{ – принимается!}$$

Виды статистических критериев для гипотез о равенстве генеральных средних двух совокупностей, равенстве генерального среднего некоторому числу

| № п/п | Гипотеза H_0 | Предполо- жения | Тест MS Excel | Статистика критерия K и ее распределение $f_{H_0}(k)$ | Область принятия гипотезы H_0 | | | |
|----------|------------------------------|---|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | для двусторон- ней критической области | для правосто- ронней крити- ческой области | для левосто- ронней кри- тической области | |
| 1 | $m = m_0$ m_0 задано | дисперсия σ^2 известна | ZTEST (массив; m_0 ; сигма) | $U = \frac{m^* - m_0}{\sigma / \sqrt{n}},$ $U \in N(0; 1)$ | $ U_{\text{набл}} < u_{1-\alpha/2}$ | $U_{\text{набл}} < u_{1-\alpha}$ | $U_{\text{набл}} > u_\alpha$ | |
| 2 | | дисперсия σ^2 неизвестна | ZTEST (массив; m_0) | $T = \frac{m^* - m_0}{s / \sqrt{n}},$ $T \in St_{n-1}$ | $ T_{\text{набл}} <$ $< t_{1-\alpha/2, n-1}$ | $T_{\text{набл}} < t_{1-\alpha, n-1}$ | $T_{\text{набл}} > t_{\alpha, n-1}$ | |
| 3 | $m_1 = m_2$ | дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны | Двухвыбо- рочный Z-тест для средних | $U = \frac{m_1^* - m_2^*}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}},$ $U \in N(0; 1)$ | $ U_{\text{набл}} < u_{1-\alpha/2}$ | $U_{\text{набл}} < u_{1-\alpha}$ | $U_{\text{набл}} > u_\alpha$ | |
| 4 | | σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но принята гипотеза о их равен- стве | TTEST (массив1; массив2; хвосты; 2) | $T = \frac{m_1^* - m_2^*}{\tilde{\sigma} \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}},$ $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ $T \in St_{n_1+n_2-2}$ | $ T_{\text{набл}} <$ $< t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$ | $T_{\text{набл}} <$ $< t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ | $T_{\text{набл}} >$ $> t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ | |
| 5 | $m_1 = m_2$ | σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, гипотеза о их равенстве отклонена | TTEST (массив1; массив2; хвосты; 3) | $T = \frac{m_1^* - m_2^*}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$ $T \in St_k,$ $k = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$ | $ T_{\text{набл}} <$ $< t_{1-\alpha/2, k}$ | $T_{\text{набл}} < t_{1-\alpha, k}$ | $T_{\text{набл}} > t_{\alpha, k}$ | |

Виды статистических критериев для гипотез о равенстве генеральных дисперсий двух совокупностей, равенстве генеральной дисперсии некоторому числу

| № п/п | Гипоте- за H_0 | Предположения | Тест MS Excel | Статистика кри- терия K и ее распределение $f_{H_0}(k)$ | Область принятия гипотезы H_0 | | |
|----------|---|---|---|--|--|---|---|
| | | | | | для двусторонней критической области | для правосто- ронней кри- тической области | для левосто- ронней кри- тической области |
| 1 | $\sigma^2 = \sigma_0^2$ σ_0 задано | m известно $\sigma_B \equiv$ $\equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - m)^2$ | | $\chi^2 = \frac{n \sigma_B^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2 \in \chi_n^2$ | $\chi_{\alpha/2, n}^2 < \chi_{\text{набл}}^2$ $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha/2, n}^2$ | $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha, n}^2$ | $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\alpha, n}^2$ |
| 2 | | m не известно, | | $\chi^2 = \frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2 \in \chi_{n-1}^2$ | $\chi_{\alpha/2, n}^2 < \chi_{\text{набл}}^2$ $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha/2, n}^2$ | $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha, n-1}^2$ | $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\alpha, n-1}^2$ |
| 3 | $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | m_1 и m_2 известны, $\sigma_{iB} \equiv \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - m_i)^2$, $i = 1, 2$. | | $F = \frac{\sigma_{1B}^2}{\sigma_{2B}^2}$, $\sigma_{1B} > \sigma_{2B}$ $F \in F_{n_1, n_2}$ | $F_{\text{набл}} < f_{1-\alpha/2, n_1, n_2}$ | $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $F_{\text{набл}} < f_{1-\alpha, n_1, n_2}$ | |
| 4 | | m_1 и m_2 неизвестны | Двухвыбо- рочный F -тест для дисперсии | $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$, $s_1 > s_2$ $F \in F_{n_1-1, n_2-1}$ | $F_{\text{набл}} < f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ | $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $F_{\text{набл}} < f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$ | |