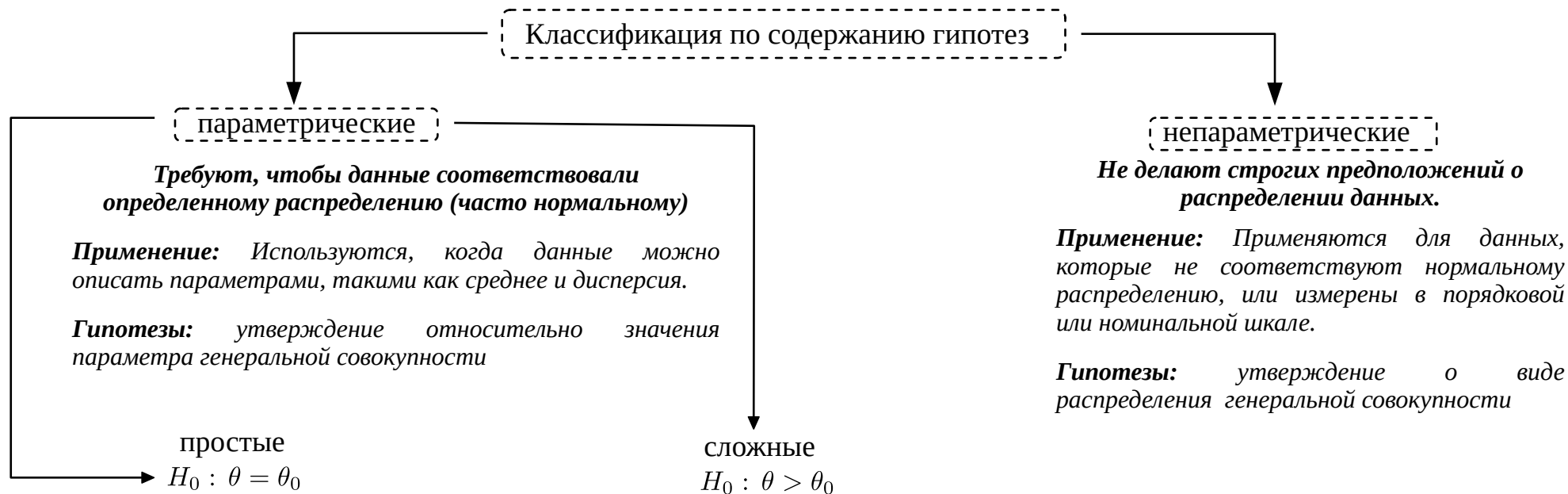


**Статистическая гипотеза** – это некоторое предположение относительно свойств генеральной совокупности, проверяемое по выборочным данным.



## Основные типы гипотез:

1. Гипотезы о виде закона распределения исследуемой случайной величины.
2. Гипотезы о числовых значениях параметров случайной величины.

Проверяемая гипотеза называется **нулевой**  $H_0$ .

Нулевые гипотезы обычно утверждают, что различие между сравниваемыми величинами (параметрами или функциями распределения) отсутствует, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными отклонениями выборки.

**Альтернативные (конкурирующие) гипотезы**  $H_i$  ( $i \geq 1$ ).

Альтернативные гипотезы являются логическим отрицанием нулевой гипотезы.

**Статистической проверкой гипотез** называется процедура обоснованного сопоставления высказанной гипотезы с имеющимися в распоряжении выборочными данными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , сопровождаемая количественной оценкой степени достоверности получаемого вывода.

Проверка осуществляется с помощью того или иного **статистического критерия** – специально выбранной статистики (выборочной функции)  $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .  $Z$  является случайной величиной.

**Наблюдаемым (эмпирическим) значением** или **статистикой критерия** называют значение критерия  $Z_{\text{набл}}$ , которое вычислено по реализации выборки.

**Уровень значимости статистического критерия (мера риска)** – вероятность  $\alpha$  ошибочного отклонения нулевой гипотезы. Чем весомее потери, чем меньше выбирается риск, т. е.  $\alpha$ . (\*см. слайд 3 и 4).

**Доверительная вероятность (надежность)**  $P_d \equiv 1 - \alpha$

**Критической областью (КО)** называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отклоняют в пользу альтернативной гипотезы. Вид области зависит от альтернативной гипотезы (\*см. слайд 5).

**Областью принятия гипотезы** (областью допустимых значений **ОДЗ**) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

**Критическими точками** (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Положение критической области (точек) на множестве значений статистики  $K$  зависит от формулировки альтернативной гипотезы  $H_1$ .

**Основной принцип проверки статистических гипотез:** если наблюдаемое значение критерия  $K_{\text{набл}}$  принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отклоняют; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

*Но принятие  $H_0$  следует расценивать не как установленный абсолютный факт, а лишь как достаточно правдоподобное, не противоречащее опытным данным утверждение*

## Почему ошибки неизбежны?

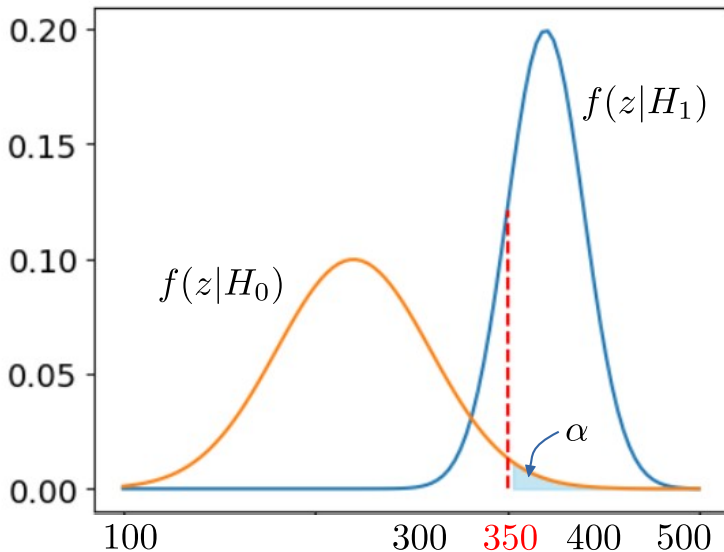
*Рассмотрим пример.* Допустим мы хотим определить болен ли COVID случайно выбранный человек ( $H_0$ : человек = болен,  $H_1$ : человек = здоров). Для этого был разработан медицинский тест ( $Z$  - статистический критерий), который на основе собранных данных о состоянии человека выдает числовое значение. Разработанный медицинский тест был предварительно верифицирован (т.е. для него построены функции распределения). Для этого было взято 1000 «точно больных» людей и для каждого из них были определены значения теста  $Z$ . В результате, например, было показано, что для больных людей значения теста меняются от 100 до 400 с разной вероятностью (т.е. определена  $f(z|H_0)$ ). Затем взято 1000 «точно здоровых» людей и для них проведены этот же тест. В результате было показано, что для здоровых людей  $Z$  меняется от 300 до 500 с разной вероятностью (т.е. определена  $f(z|H_1)$ ). Таким образом есть перекрытие, в области значений  $Z$  от 300 до 400 человек может быть как больным, так и здоровым.

Для того чтобы в этом случае принять решение здоров человек или нет вводят уровень значимости  $\alpha$ , т.е. вероятность совершить ошибку первого рода (ошибочно отвергнуть гипотезу  $H_0$ , в пользу альтернативной (человек здоров, хотя он болен)). Этому уровню значимости  $\alpha$  соответствует критическое значение  $Z_{кр.}$ , например,  $Z_{кр.} = 350$ , превышение которого в данном случае означает, что человек здоров. С другой стороны появляется ошибка второго рода -- ошибочно принять нулевую гипотезу  $H_0$ , когда верна альтернативная  $H_1$ , т.е. сказать, что человек болен, хотя он здоров.

## Какое значение должен иметь уровень значимости $\alpha$ ?

Его значение зависит от решаемой задачи. В данном случае уровень значимости надо уменьшать как можно больше, т. к. стоимость ошибки велика. Больной человек может оказаться среди здоровых и тем самым заразить много людей.

Но уровень значимости нельзя задавать равным нулю, т.к. в этом случае все здоровые люди будут считаться больными (Здесь следует учитывать, что пересечение в области от 200 до 300 получено на выборке из 2000 человек. В общем случае пересечение происходит на всей области значений, только вероятность при этом уменьшается).



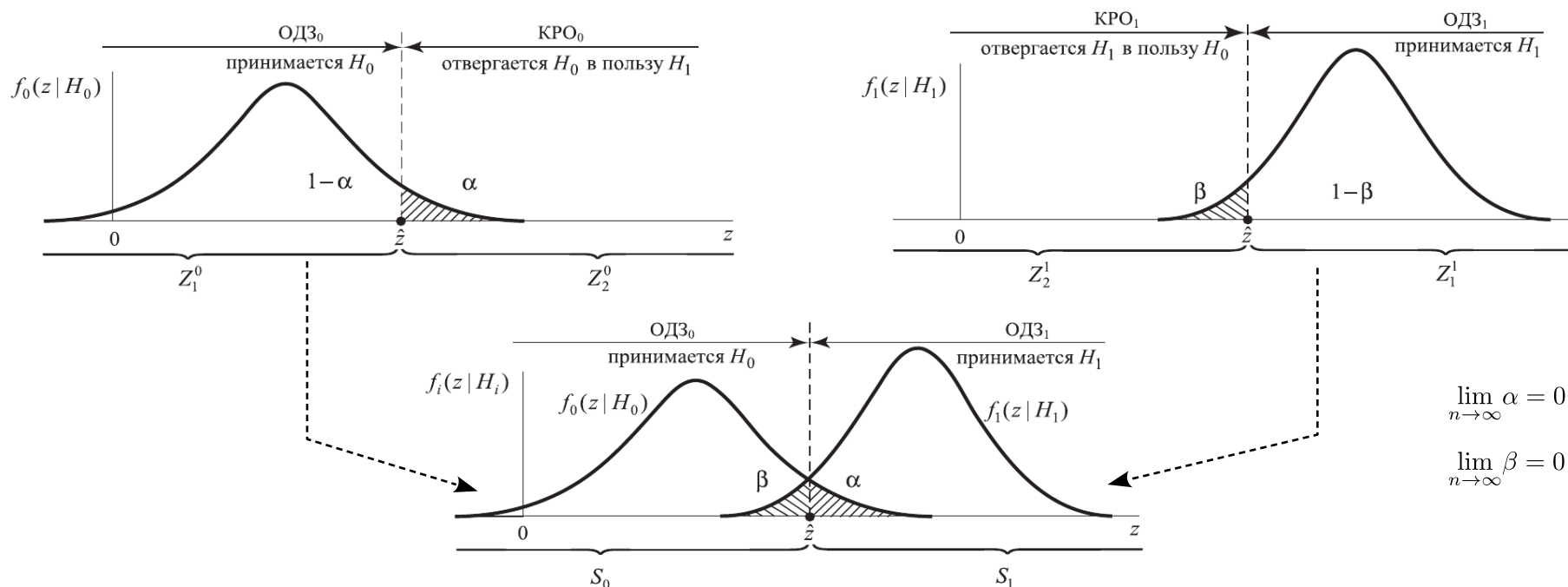
Пространство решений	H			
	$H_0$		$H_1$	
Правильное решение				
Априорная вероятность	$P(H_0) = \pi_0$		$P(H_1) = \pi_1$	
Принятое решение	$H_0$	$H_1$	$H_0$	$H_1$
Оценка решения	правильное	ошибка 1-го рода	ошибка 2-го рода	правильное
Вероятность решения	$1 - \alpha$	$\alpha$	$\beta$	$1 - \beta = M$

уровень  
значимости  $\alpha = \int_{\hat{z}}^{\infty} f_0(z|H_0)dz$

надежность  $1 - \alpha = \int_{-\infty}^{\hat{z}} f_0(z|H_0)dz$

мощность  
критерия  $\beta = \int_{-\infty}^{\hat{z}} f_1(z|H_1)dz$

$1 - \beta = \int_{\hat{z}}^{\infty} f_1(z|H_1)dz$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta = 0$$

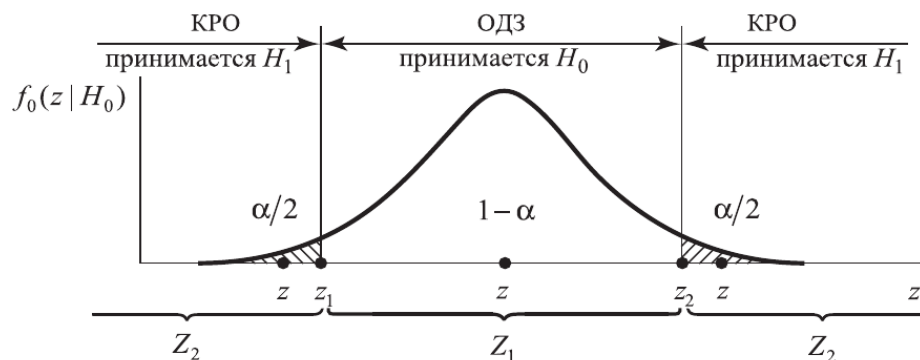
Чем меньше уровень значимости  $\alpha$ , тем труднее отклонить нулевую гипотезу. Поэтому не следует стремиться выбирать уровень значимости слишком малым и нельзя выбирать  $\alpha = 0$ , т.к. будут приниматься все нулевые гипотезы, в том числе и неправильные, то есть с практической достоверностью будут допускаться ошибки второго рода.

Наиболее часто выбирают уровень значимости равным 5% или 1%.

## 1. 2 Вид критической области в зависимости от вида альтернативной гипотезы

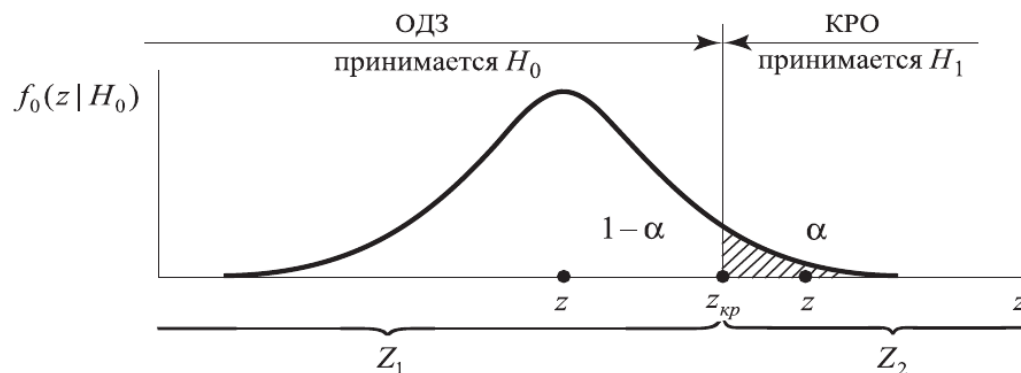
5

$$H_0 : \theta = \theta_0$$



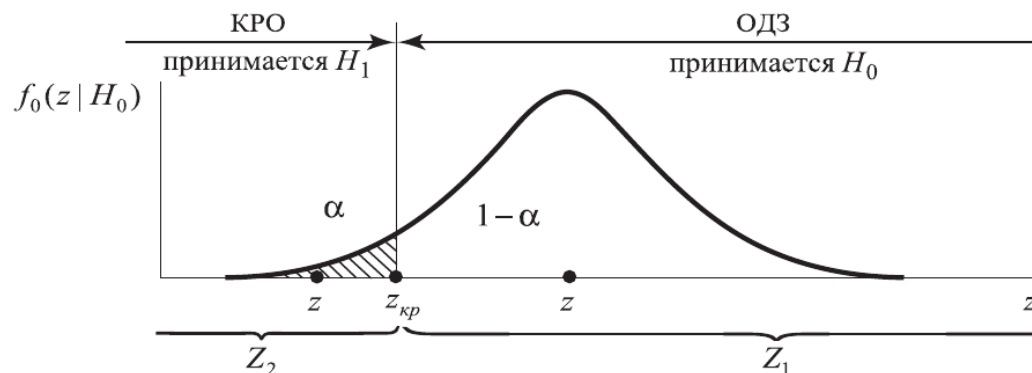
Двухсторонняя критическая область  $H_1 : \theta \neq \theta_0$

$$P(Z \in Z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f_0(z|H_0)dz = 1 - \alpha$$



Правосторонняя критическая область  $H_1 : \theta \geq \theta_0$

$$P(Z \in Z_1) = \int_{-\infty}^{z_{кр}} f_0(z|H_0)dz = 1 - \alpha$$



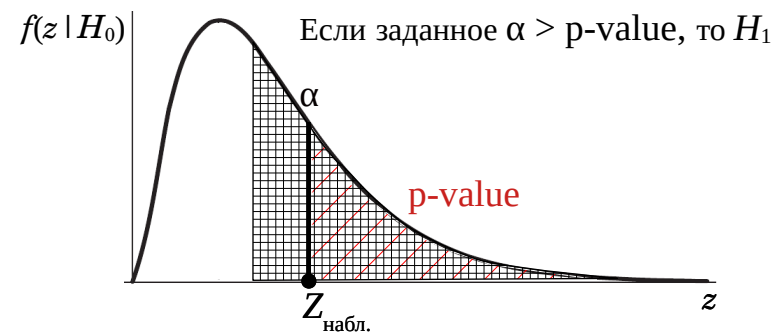
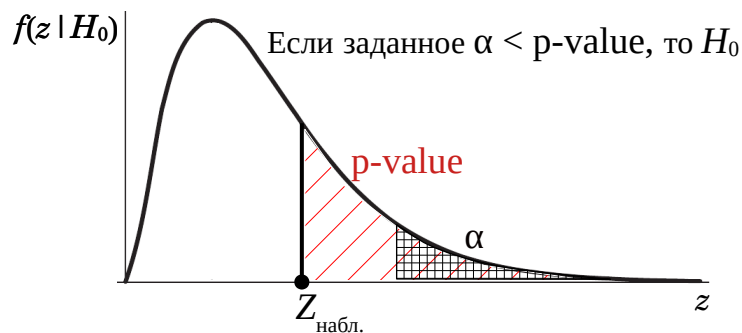
Левосторонняя критическая область  $H_1 : \theta < \theta_0$

$$P(Z \in Z_1) = \int_{z_{кр}}^{+\infty} f_0(z|H_0)dz = 1 - \alpha$$

### 1.3 Процедура проверки статистических гипотез

1. Формулировка проверяемой ( $H_0$ ) и альтернативной ( $H_1$ ) гипотез;
2. Выбор уровня значимости  $\alpha$ ;
3. Выбор статистики критерия  $Z$  для проверки гипотезы  $H_0$ ;
4. Определение закона распределения  $Z$  статистики при условии справедливости гипотезы  $H_0$ ;
5. Определение вида критической области (левосторонняя, правосторонняя или двусторонняя);
6. Нахождение квантилей  $z_\alpha$  и  $z_{1-\alpha}$  или  $z_{\alpha/2}$  и  $z_{1-\alpha/2}$  в зависимости от вида критической области и определение критических точек с конкретным указанием критической области;
7. Вычисление статистики критерия  $Z_{\text{набл}}$  по данным выборки;
8. Принятие решения о согласии опытных данных с нулевой гипотезой  $H_0$  (принятие ее, если  $Z_{\text{набл}}$  не лежит в критической области) или об отклонении выдвинутой гипотезы (если  $Z_{\text{набл}}$  лежит в критической области).

При проверке гипотез в **python** непосредственное указание уровня значимости не требуется. Здесь определяется p-value, т. е. уровень значимости соответствующий вычисленному значению  $Z_{\text{набл}}$ , т. е. критическое значение уровня значимости  $\alpha$ , при котором отвергается проверяемая гипотеза.



Далее для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей нам понадобится новый закон распределения — распределение Фишера. На следующем слайде дано его описание.

## 2\*(отступление). Распределение Фишера

7

Закон распределения широко используемый в математической статистике

Если  $V_x \in H^2(k_x)$ ,  $V_y \in H^2(k_y)$ , то  $z = \frac{V_x/k_x}{V_y/k_y} \in F(k_x, k_y)$ ,  $k_x, k_y$  — степени свободы

Если имеется две выборки  $X_i \in N(M[X], \sigma[X])$ ,  $i = 1..n_x$  и  $Y_j \in N(M[Y], \sigma[Y])$ ,  $j = 1..n_y$ , то

$$V_x = \frac{1}{\sigma[X]^2} \sum_{i=1}^{n_x} (X_i - M[X])^2 = \frac{n_x}{\sigma[X]^2} \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (X_i - M[X])^2}{n_x} = \frac{\hat{D}_x n_x}{\sigma[X]^2} \in H^2(n_x), \quad V_y = \frac{\hat{D}_y n_y}{\sigma[Y]^2} \in H^2(n_y) \quad (\text{т. е. } k_x = n_x \text{ и } k_y = n_y)$$

оценка для дисперсии, когда известно  $M[X]$

$$\Rightarrow z = \frac{\hat{D}_x \sigma[Y]^2}{\hat{D}_y \sigma[X]^2} \in F(n_x, n_y)$$

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma[X]^2} = \frac{(n_x - 1) \sum_{i=1}^{n_x} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma[X]^2 (n_x - 1)} = \frac{s_x^2 (n_x - 1)}{\sigma[X]^2} \in H^2(n_x - 1), \quad V_y = \frac{s_y^2 (n_y - 1)}{\sigma[Y]^2} \in H^2(n_y - 1)$$

оценка для дисперсии, когда НЕ известно  $M[X]$

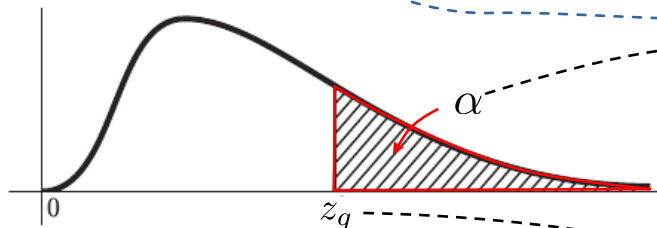
$$\Rightarrow z = \frac{s_x^2 \sigma[Y]^2}{s_y^2 \sigma[X]^2} \in F((n_x - 1), (n_y - 1)) \quad (\text{т. е. } k_x = n_x - 1 \text{ и } k_y = n_y - 1)$$

Для F-распределения справедливо соотношение:

$$F_p(n_x, n_y) = \frac{1}{F_{1-p}(n_y, n_x)}$$

**Таблица процентных точек F-распределения Фишера—Снедекора**

(5%-ные значения — верхняя цифра, 1%-ные — нижняя цифра)



Характерный вид плотности распределения вероятности закона Фишера

$k_2$	$k_1$ — степени свободы для большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5889	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082	244 6106
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,36 99,34	19,37 99,36	19,38 99,38	19,39 99,40	19,40 99,41	19,41 99,42
3	10,13 32,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,88 27,67	8,84 27,49	8,81 27,34	8,78 27,23	8,76 27,13	8,74 27,05

## 3.1 Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Дано:  $\begin{matrix} \text{генеральные совокупности} & \text{реализации выборок} \\ X \in N(m_x = ?, \sigma_x = ?), & \{x_i\}, i = 1, \dots, n_x \end{matrix} \implies s_x^2$

$\begin{matrix} Y \in N(m_y = ?, \sigma_y = ?), & \{y_j\}, j = 1, \dots, n_y \end{matrix} \implies s_y^2$

Проверить гипотезу  $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$  при заданном уровне значимости  $\alpha$

1

Можно переформулировать условие гипотезы:

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \implies H_0 : M[s_x^2] = M[s_y^2]$$

Т.к.  $s^2$  — несмещенная оценка,  $M[s_x^2] = \sigma_x^2$ ,  $M[s_y^2] = \sigma_y^2$

Значимо или незначимо отличаются оценки дисперсий двух выборок?

Если  $H_0$  справедлива, то говорят, что различие оценок незначимо и может быть объяснено случайными причинами

2

В качестве статистического критерия проверки  $H_0$  используется критерий Фишера.

Известно, что  $z = \frac{s_x^2 \sigma_y^2}{s_y^2 \sigma_x^2} \in F((n_x - 1), (n_y - 1))$  Если  $H_0$  верна, то  $\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 1 \implies z = \frac{s_x^2}{s_y^2} \in F((n_x - 1), (n_y - 1))$

Критерий Фишера

$$\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2}, \quad s_x^2 > s_y^2 \quad \text{или} \quad \hat{F} = \frac{s_y^2}{s_x^2}, \quad s_y^2 \geq s_x^2$$

Распределение Фишера-Снедекора (табулировано)

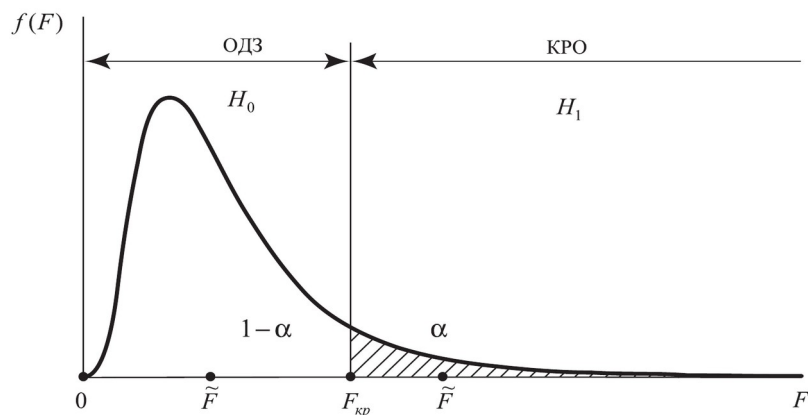
Критерий Фишера очень чувствителен к отклонению от нормальности исследуемых генеральных совокупностей. Поэтому рекомендуется предварительно проводить проверку гипотезы о нормальности распределений. (об этом пойдет речь в следующей лекции)

3

## Определение КО и ОДЗ

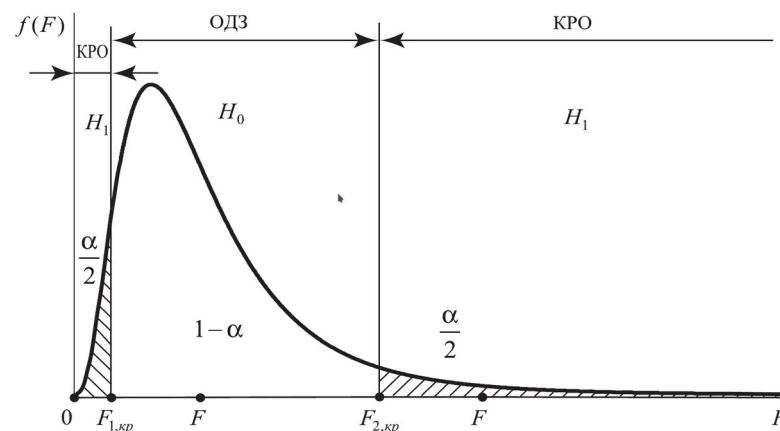
Конкурирующая гипотеза

$$H_1 : D_x > D_y$$



$$P(\hat{F} \geq F_{\kappa p}) = \alpha$$

$$H_1 : D_x \neq D_y$$



$$P(\hat{F} \geq F_{2,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\hat{F} < F_{1,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$

4

Если  $\hat{F} \in \text{ОДЗ} : H_0$

Если  $\hat{F} \in \text{КО} : H_1$

Пример: Провести сравнение точности работы двух приборов. В ходе измерений фиксировалось отклонение показаний приборов от точного значения. Результаты в таблице.

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух приборов, что будет означать равенство характеристик точности двух приборов при уровне значимости  $\alpha = 0.1(10\%)$

$$H_0 : \sigma_x = \sigma_y \quad \text{и} \quad H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y \quad \implies$$

Стат. критерий  $\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \quad \hat{F} \in F_{11,8}$

Двухсторонняя КО

$$P(\hat{F} \geq F_{2,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2} \qquad P(\hat{F} < F_{1,\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$
$$F_{2,\kappa p}(11, 8) = 3.31 \qquad F_{1,\kappa p} = \frac{1}{F_{2,\kappa p}(8, 11)} = \frac{1}{2.95} \approx 0.34$$

Таблица процентных точек F-распределения  
Фишера—Снедекора  
(5%-ные значения — верхняя цифра, 1%-ные — нижняя цифра)

$k_2$	$k_1$ — степени свободы для большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5889	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082	244 6106
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,36 99,34	19,37 99,36	19,38 99,38	19,39 99,40	19,40 99,41	19,41 99,42
3	10,13 32,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,88 27,67	8,84 27,49	8,81 27,34	8,78 27,23	8,76 27,13	8,74 27,05
4	7,71 21,20	6,94 18,00	6,59 16,69	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,21	6,09 14,98	6,04 14,80	6,00 14,66	5,96 14,54	5,93 14,45	5,91 14,47
5	6,61 16,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	5,05 10,97	4,95 10,67	4,88 10,45	4,82 10,27	4,78 10,15	4,74 10,05	4,70 9,96	4,68 9,89
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,78	4,53 9,15	4,39 8,75	4,28 8,47	4,21 8,26	4,15 8,10	4,10 7,98	4,06 7,87	4,03 7,79	4,00 7,72
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,97 7,46	3,87 7,19	3,79 7,00	3,73 6,84	3,68 6,71	3,63 6,62	3,60 6,54	3,57 6,47
8	5,32 11,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,63	3,58 6,37	3,50 6,19	3,44 6,03	3,39 5,91	3,31 5,82	3,31 5,74	3,28 5,67
9	5,12 10,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62	3,23 5,47	3,18 5,35	3,13 5,26	3,10 5,18	3,07 5,11
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,91 4,71
11	4,84 9,85	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,09 5,07	3,01 4,88	2,95 4,74	2,90 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,79 4,40

$$s_x^2 = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2 = 451.9091$$
$$s_y^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})^2 = 332.00$$

ОДЗ: (0.34; 3.31)

$$\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \approx 1.36$$

$$\hat{F} \in \text{ОДЗ}$$

$H_0$  принимается!

	Значение отклонеиий, м	
	прибор №1, X	прибор №2, Y
1	-8	-20
2	-14	-10
3	0	-3
4	14	11
5	-38	-4
6	2	12
7	50	-3
8	1	17
9	10	42
10	15	
11	0	
12	22	

Переменная	Описательные статистики		
	N набл.	Среднее	Дисперсия
X	12	4,500000	451,9091
Y	9	4,666667	332,0000

**Пример:** Провести сравнение точности работы двух приборов. В ходе измерений фиксировалось отклонение показаний приборов от точного значения. Результаты в таблице.

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух приборов, что будет означать равенство характеристик точности двух приборов при уровне значимости  $\alpha = 0.1$  (10%)

$$H_0 : \sigma_x = \sigma_y \quad \text{и} \quad H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Стат. критерий} \quad \hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \quad \hat{F} \in F_{11,8} \\ \text{Двухсторонняя КО} \end{array}$$

```
import scipy.stats as st
import numpy as np
X = [-8,-14, 0, 14, -38, 2, 50, 1, 10, 15,0, 22]
print("numpy D[X] = ", np.std(X)**2) # смещенная дисперсия
print("numpy D[X] = ", np.std(X, ddof=1)**2)
std2_X = st.tstd(X)**2
print("stats D[X] = ", std2_X)
```

✓ 0.0s

Python

```
numpy D[X] = 414.25
numpy D[X] = 451.9090909090909
stats D[X] = 451.9090909090909
```

```
Y = [-20, -10, -3, 11, -4, 12, -3, 17, 42]
std2_Y = st.tstd(Y)**2
print("stats D[Y] = ", std2_Y)
```

✓ 0.0s

Python

```
stats D[Y] = 332.0
```

```
F_observ = std2_X/std2_Y
print(f"F_observ = ", F_observ)
```

✓ 0.0s

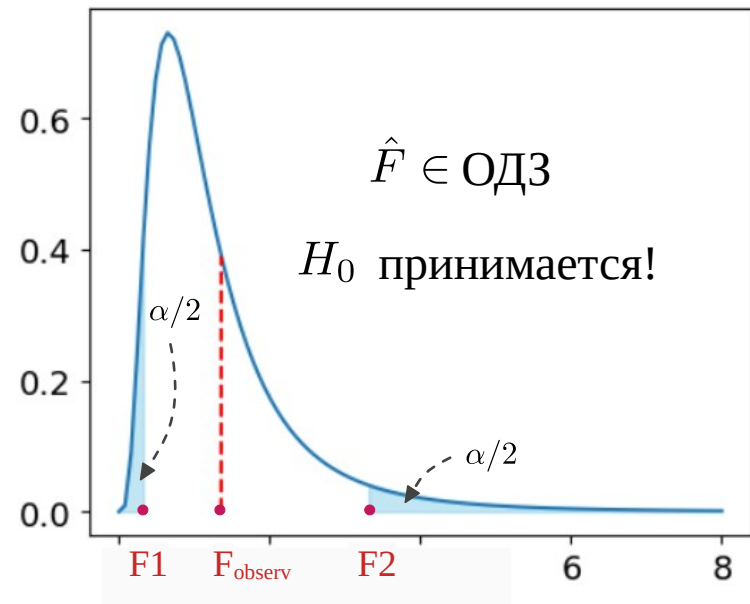
Python

```
F_observ = 1.361171960569551
```

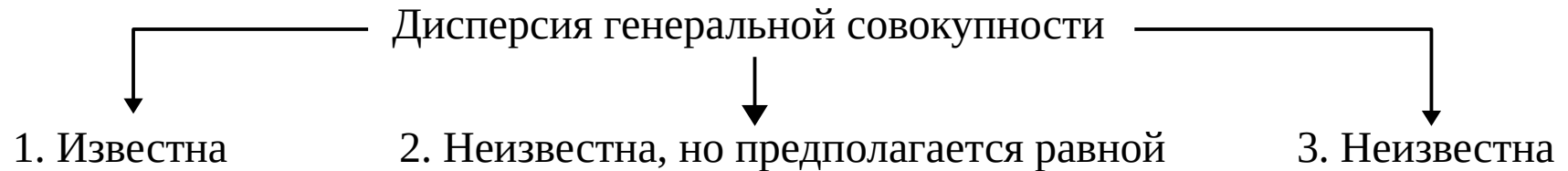
```
alpha_half = 0.05
# нижнее значение
F1 = st.f.ppf(alpha_half,dfn = 11, dfd = 8)
# верхнее значение
F2 = st.f.ppf(1 - alpha_half,dfn = 11, dfd = 8)
print(f"F1 = {round(F1, 3)}, F2 = {round(F2, 3)}")
```

✓ 0.0s

```
F1 = 0.339, F2 = 3.313
```



## 3.2 Сравнение математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей



### 3.2.1 Сравнение математических ожиданий при известных дисперсиях

$$\begin{aligned}
 X \in N(m_x = ?, \sigma_x), \quad \{x_i\}, i = 1, \dots, n_1 &\implies \hat{m}_x = \bar{x} \\
 Y \in N(m_y = ?, \sigma_y), \quad \{y_j\}, j = 1, \dots, n_2 &\implies \hat{m}_y = \bar{y}
 \end{aligned}$$

Оценить  $H_0 : m_x = m_y$  при  $\alpha$  уровне значимости

1  $\bar{x}$  – несмещенная оценка,  $M[\bar{x}] = m_x$ ,  $M[\bar{y}] = m_y$

$$H_0 : M[X] = M[Y], M[X - Y] = 0 \implies H_0 : M[\bar{x} - \bar{y}] = 0$$

Значимо или незначимо отличаются оценки математических ожиданий двух выборок?

2 Критерий проверки нулевой гипотезы

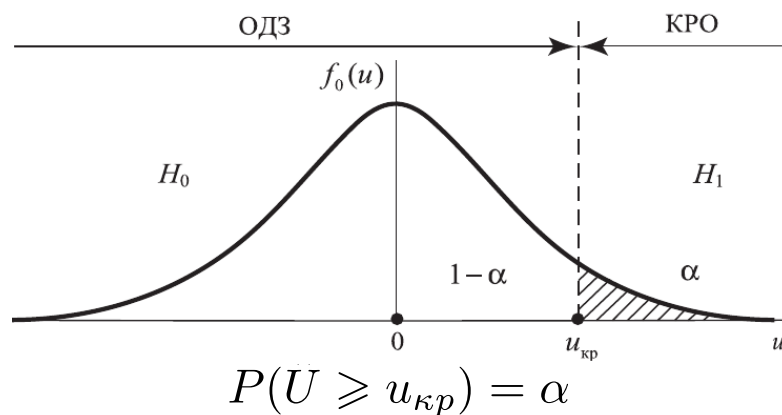
$$\hat{U} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}, \quad \hat{U} \in N(0, 1)$$

Т.е. задачу проверки статистической гипотезы можно рассматривать, как задачу по определению доверительного интервала для математического ожидания с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$

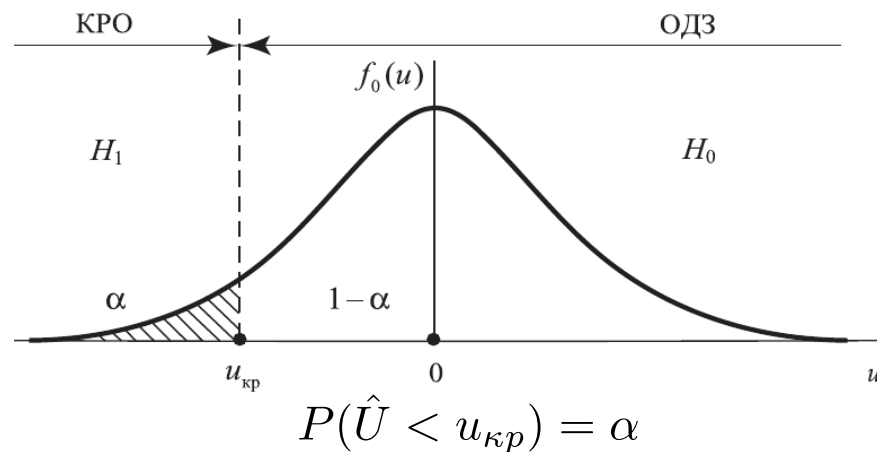
В результате, если 0 будет принадлежать этому интервалу, то нулевая гипотеза принимается.

Конкурирующая гипотеза

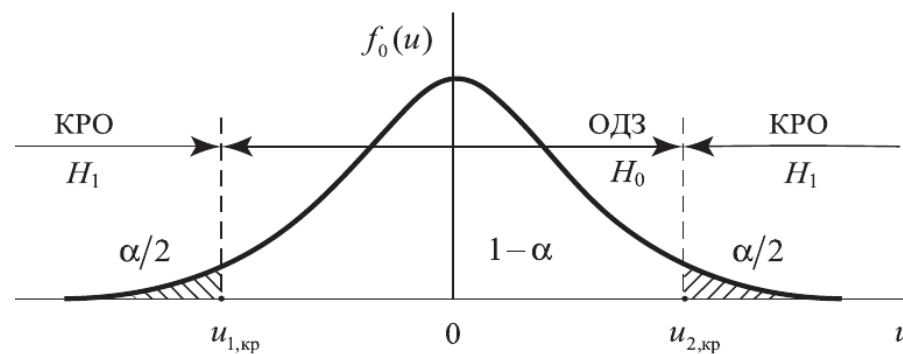
$$H_1 : m_x > m_y$$



$$H_1 : m_x < m_y$$



$$H_1 : m_x \neq m_y$$



$$P(\hat{U} \geq u_{2,kp}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\hat{U} < u_{1,kp}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$u_{2,kp} = -u_{1,kp}$$

$$u_{1,kp} = \Phi_0^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{2} \right)$$

табличная функция  
Лапласа-Гаусса

Если  $\hat{U} \in \text{ОДЗ}$  :  $H_0$  или если  $\hat{U} \in \text{КО}$  :  $H_1$

П р и м е р: Для автомобильных двигателей первого типа по выборке  $\{x_i\}$  объемом  $n_1 = 30$  найден средний расход масла на 1000 км пробега:  $\bar{x} = 130$  г, а для двигателей второго типа по выборке  $\{y_j\}$  объемом  $n_2 = 40$ ,  $\bar{y} = 125$  г. Генеральные дисперсии известны и равны  $D_x = 60$  г<sup>2</sup>,  $D_y = 80$  г<sup>2</sup>. Требуется проверить нулевую гипотезу  $H_0 : m_x = m_y$  при уровне значимости  $\alpha = 5\%$  и конкурирующей гипотезе  $H_1 : m_x \neq m_y$ . Предполагается, что случайные величины  $X$  и  $Y$  – независимы и нормально распределены.

$$u_{1,\kappa p} = \Phi_0^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{2} \right) = \Phi_0^{-1}(0.475) = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \text{ОДЗ: } (-1.96; 1.96)$$

$$\hat{U} = \frac{130 - 125}{\sqrt{\frac{60}{30} + \frac{80}{40}}} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \hat{U} \in \text{КО} \quad H_0 \text{ отвергается!}$$

Т.е. средний расход масла двигателями первого и второго типа различается значимо.

$$X \in N(m_x = ?, \sigma = ?), \quad \{x_i\}, \quad i = 1, \dots, n_1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{m}_x = \bar{x}$$

$$Y \in N(m_y = ?, \sigma = ?), \quad \{y_j\}, \quad j = 1, \dots, n_2 \quad \Longrightarrow \quad \hat{m}_y = \bar{y}$$

Оценить  $H_0 : m_x = m_y$  при  $\alpha$  уровне значимости

1 Вводится  $\hat{\Delta} = \bar{x} - \bar{y}$ ,  $\hat{\Delta} \in N(m_{\hat{\Delta}}, \sigma_{\hat{\Delta}})$

$$H_0 : m_x = m_y \quad \Longrightarrow \quad H_0 : \hat{\Delta} = 0$$

Нулевая гипотеза сводится к простой гипотезы, которая определяется по аналогии с методом получения доверительного интервала для неизвестного математического ожидания и неизвестной дисперсии.

2 Критерий проверки нулевой гипотезы

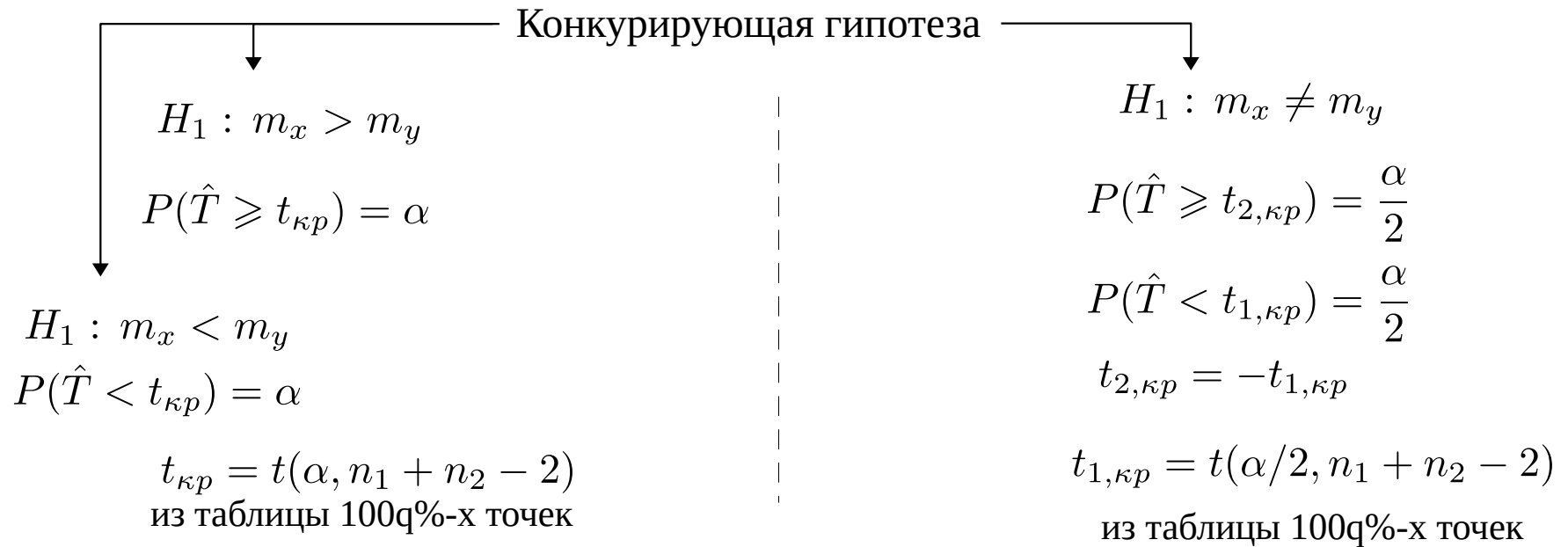
$$\hat{T} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}{\left[ \sqrt{s_x^2 (n_1 - 1) + s_y^2 (n_2 - 1)} \right] \sqrt{(n_1 + n_2)}}, \quad \hat{T} \in S(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\sigma_x \neq \sigma_y$$

$$\hat{T} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\left[ \sqrt{s_x^2/n_1 + s_y^2/n_2} \right]}, \quad k = \frac{(s_x^2/n_1 + s_y^2/n_1)^2}{\frac{(s_x^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_y^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}, \quad \hat{T} \in S(k)$$

3

## Определение КО и ОДЗ



4

Если  $\hat{T} \in \text{ОДЗ} : H_0$  или если  $\hat{T} \in \text{КО} : H_1$

П р и м е р: Измерялась базовая дальность до объекта лазерными дальномерами (ЛД). Первым ЛД произвели  $n = 5$  измерений дальности  $\{X\}$ , вторым ЛД –  $m = 6$  измерений  $\{Y\}$ . Статистическая обработка результатов наблюдений дала следующие результаты:

$$\bar{x} = 500.330 (m); \quad \bar{y} = 500.248 (m); \quad s_x = 0.50 (m); \quad s_y = 0.33 (m).$$

Требуется проверить гипотезу  $H_0 : m_x = m_y$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .  
Альтернативная гипотеза  $H_1 : m_x > m_y$ .

1. Сначала проверим вспомогательную гипотезу  $H_0 : D_x = D_y$

$$\hat{F} = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{0.50^2}{0.33^2} = 2.30, \quad s_x^2 > s_y^2 \quad \implies \quad \hat{F} < \hat{F}_{кр}, \quad H_0 \text{ согласуется с экспериментальными данными}$$

$$\hat{F}_{кр} = F(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = F(0.05, 4, 5) = 5.19$$

2. Проверим гипотезу  $H_0 : m_x = m_y$  при условии, что  $\sigma_x = \sigma_y$

$$\hat{T} = \frac{(500.330 - 500.248) \sqrt{5 \cdot 6(5 + 6 - 2)}}{\sqrt{(4 \cdot 0.5^2 + 5 \cdot 0.33^2)(5 + 6)}} \approx 0.3269, \quad t_{кр} = t(0.05, 9) = 1.8331$$

$$\implies \quad \hat{T} < \hat{T}_{кр}, \quad H_0 - \text{принимается!}$$

# Виды статистических критериев для гипотез о равенстве генеральных средних двух совокупностей, равенстве генерального среднего некоторому числу

№ п/п	Гипотеза $H_0$	Предположения	Тест MS Excel	Статистика критерия $K$ и ее распределение $f_{H_0}(k)$	Область принятия гипотезы $H_0$		
					для двусторонней критической области	для правосторонней критической области	для левосторонней критической области
1	$m = m_0$ , $m_0$ задано	дисперсия $\sigma^2$ известна	ZТЕСТ (массив; $m_0$ ; сигма)	$U = \frac{m^* - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ , $U \in N(0; 1)$	$ U_{\text{набл}}  < u_{1-\alpha/2}$	$U_{\text{набл}} < u_{1-\alpha}$	$U_{\text{набл}} > u_{\alpha}$
2		дисперсия $\sigma^2$ неизвестна	ZТЕСТ (массив; $m_0$ )	$T = \frac{m^* - m_0}{s / \sqrt{n}}$ , $T \in St_{n-1}$	$ T_{\text{набл}}  < t_{1-\alpha/2, n-1}$	$T_{\text{набл}} < t_{1-\alpha, n-1}$	$T_{\text{набл}} > t_{\alpha, n-1}$
3	$m_1 = m_2$	дисперсии $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ известны	Двухвыборочный Z-тест для средних	$U = \frac{m_1^* - m_2^*}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$ , $U \in N(0; 1)$	$ U_{\text{набл}}  < u_{1-\alpha/2}$	$U_{\text{набл}} < u_{1-\alpha}$	$U_{\text{набл}} > u_{\alpha}$
4		$\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ неизвестны, но принята гипотеза о их равенстве	ТТЕСТ (массив1; массив2; хвосты; 2)	$T = \frac{m_1^* - m_2^*}{\tilde{\sigma} \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$ , $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ , $T \in St_{n_1+n_2-2}$	$ T_{\text{набл}}  < t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$	$T_{\text{набл}} < t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$	$T_{\text{набл}} > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$
5	$m_1 = m_2$	$\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ неизвестны, гипотеза о их равенстве отклонена	ТТЕСТ (массив1; массив2; хвосты; 3)	$T = \frac{m_1^* - m_2^*}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$ , $T \in St_k$ , $k = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$	$ T_{\text{набл}}  < t_{1-\alpha/2, k}$	$T_{\text{набл}} < t_{1-\alpha, k}$	$T_{\text{набл}} > t_{\alpha, k}$

## Виды статистических критериев для гипотез о равенстве генеральных дисперсий двух совокупностей, равенстве генеральной дисперсии некоторому числу

№ п/п	Гипоте- за $H_0$	Предположения	Тест MS Excel	Статистика кри- терия $K$ и ее распределение $f_{H_0}(k)$	Область принятия гипотезы $H_0$		
					для двусторонней критической области	для правосто- ронней крити- ческой области	для левосто- ронней кри- тической области
1	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma_0$ задано	$m$ известно $\sigma_B \equiv$ $\equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - m)^2$		$\chi^2 = \frac{n \sigma_B^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2 \in \chi_n^2$	$\chi_{\alpha/2, n}^2 < \chi_{\text{набл}}^2$ $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha/2, n}^2$	$\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha, n}^2$	$\chi_{\text{набл}}^2 >$ $> \chi_{\alpha, n}^2$
2		$m$ не известно,		$\chi^2 = \frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2 \in \chi_{n-1}^2$	$\chi_{\alpha/2, n}^2 < \chi_{\text{набл}}^2$ $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{1-\alpha/2, n}^2$	$\chi_{\text{набл}}^2 <$ $< \chi_{1-\alpha, n-1}^2$	$\chi_{\text{набл}}^2 >$ $> \chi_{\alpha, n-1}^2$
3	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$m_1$ и $m_2$ известны, $\sigma_{iB} \equiv \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - m_i)^2$ , $i = 1, 2$ .		$F = \frac{\sigma_{1B}^2}{\sigma_{2B}^2}$ , $\sigma_{1B} > \sigma_{2B}$ $F \in F_{n_1, n_2}$	$F_{\text{набл}} <$ $< f_{1-\alpha/2, n_1, n_2}$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $F_{\text{набл}} <$ $< f_{1-\alpha, n_1, n_2}$	
4		$m_1$ и $m_2$ неизвестны	Двухвыбо- рочный $F$ -тест для дисперсии	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , $s_1 > s_2$ $F \in F_{n_1-1, n_2-1}$	$F_{\text{набл}} <$ $< f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $F_{\text{набл}} <$ $< f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$	