Линейный регрессионный анализ

Прогнозирование коротких временных рядов

Предупреждение

Это не самый лучший метод для прогнозирования временных рядов

Лучше

- экспоненциальное сглаживание
- ARIMA

Но: регрессионный анализ хорош для прогнозирования коротких временных рядов, а таких рядов много.

Прогнозирование

Прогноз — это оценка будущего значения некоторой величины научными методами.

При прогнозировании предполагается, что факторы, определявшие поведение рассматриваемой величины в прошлом, не изменят своего действия и в будущем. Качественно составленный прогноз должен выявить тенденции прошлого и распространить их в будущее. Тогда, если прогноз разойдется с действительностью, это будет означать, что **в действие вступил новый, ранее неизвестный фактор**.

Количественные методы прогнозирования основываются на обработке массивов числовых данных и разделяются на:

1. причинно-следственные методы (в биржевой торговле: фундаментальный анализ);
2. методы анализа временных рядов (технический анализ).

Временные ряды

Временной ряд — последовательность значений некоторого показателя Y (например, объема продаж) во времени.

Развитие процессов, реально наблюдаемых в жизни, складывается из некоторой устойчивой тенденции (тренда, T) и случайной составляющей (ошибки, E), выражающейся в колебании значений показателя вокруг тренда. Зачастую временной ряд характеризуется также сезонными (S) или циклическими составляющими.

$$Y = T + S + E$$

Понятие сезона может трактоваться весьма широко: неделя, месяц, квартал, год или даже десятки лет.

Прогнозирование пассажирских авиаперевозок

Международные пассажирские авиаперевозки (`series_g.csv`).

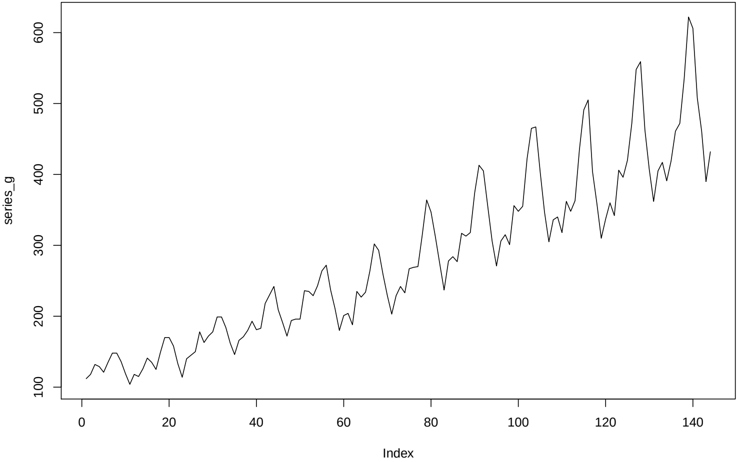
Переменные:

1. date — Даты, по месяцам: с января 1949 по декабрь 1960 года.
2. series_g — Объем пассажирских авиаперевозок, в тысячах человек.

Построим график временного ряда и зададим себе 4 вопроса:

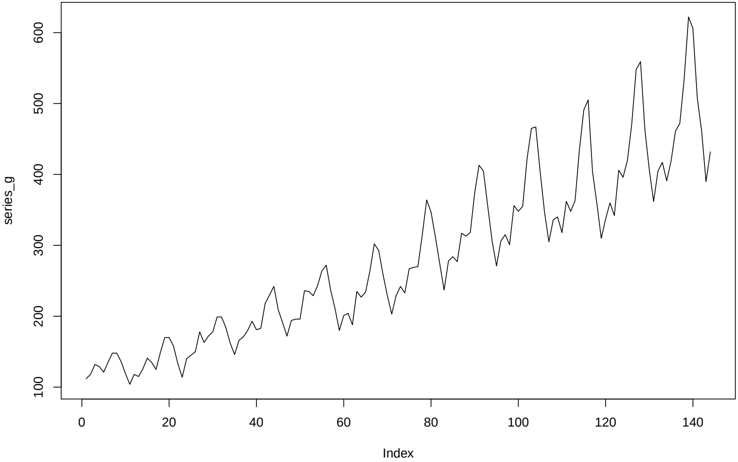
1. Есть ли у ряда тренд?
2. Есть ли сезонность?
3. Меняет ли ряд свой характер?
4. Есть ли в данных выбросы?

1. Есть ли у ряда тренд?



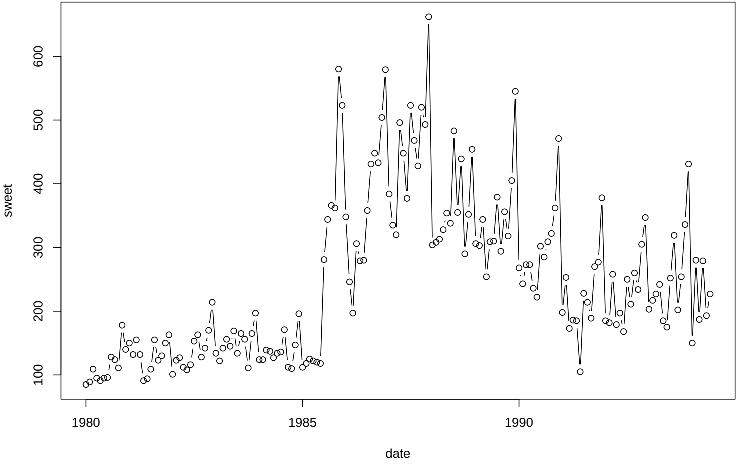
- Можем ли мы считать тренд линейным? Нелинейным?

2. Есть ли у ряда сезонность?



- Если сезонность есть, то к какому виду она относится: аддитивному или мультипликативному?

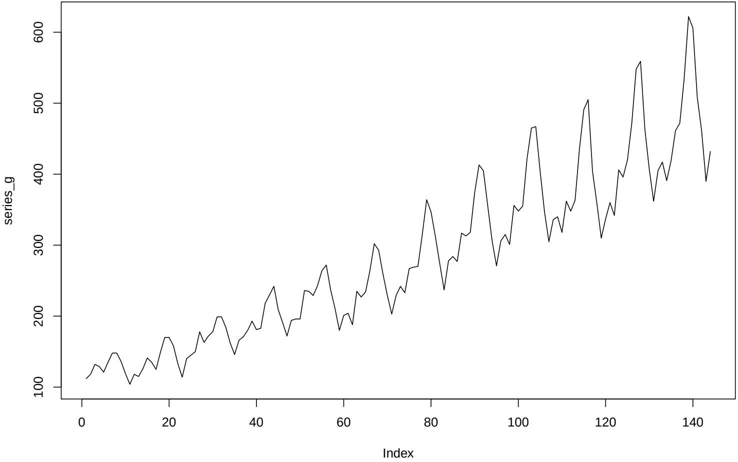
Меняет ли ряд свой характер?



Пример ряда, меняющего свой характер (потребление ликеров в Австралии).

График помогает отрезать данные, которые уже устарели.

4. Есть ли в данных выбросы?



Выбросы можно заменять на более разумные значения.

Последовательность работы над прогнозом

Построить график и задать себе 4 вопроса:

1. Есть ли у ряда тренд?
   - Можем ли мы аналитически описать этот тренд? (линейный, нелинейный)
2. Есть ли сезонность?
   - Если сезонность есть, то к какому виду она относится: аддитивному или мультипликативному?
3. Меняет ли ряд свой характер? (Помогает отрезать данные, которые уже устарели)
4. Есть ли в данных выбросы? (Их можно заменять на более разумные значения)

У нас

- Тренд есть, тренд линейный.
- Сезонность есть, мультипликативная.
- Ряд характер не меняет.
- Выбросов не наблюдается.

Но: у нас

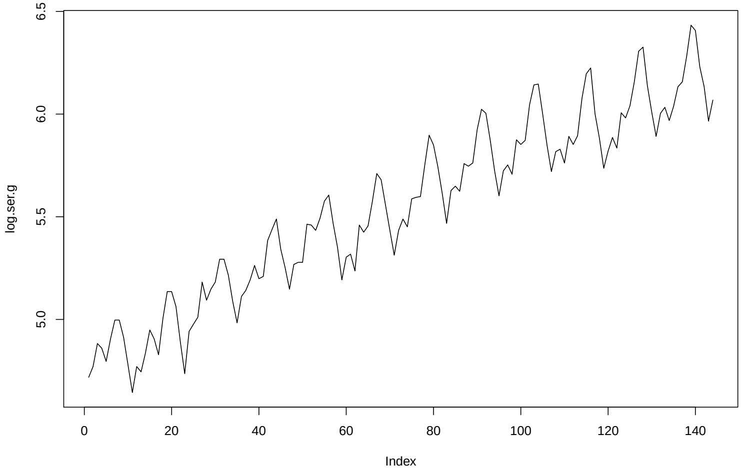
$$Y = T \cdot S \cdot E,$$

тогда как уравнение регрессии

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i X_i$$

Чтобы получить аддитивную сезонность, логарифмирум ряд.

Логарифм временного ряда



Индикаторные переменные (dummy variables)

Нужны чтобы моделировать сезонность (12 месяцев)

$$Y = b_0 + b_1 T + \sum_{i=1}^{12} c_i D_i$$

D_i равна 1 для i-го месяца и 0 для остальных.

	log.ser.g	time.	month.01	month.02	month.03	month.04	...	month.12
1	4.718499	1	1	0	0	0		0
2	4.770685	2	0	1	0	0		0
3	4.882802	3	0	0	1	0		0
4	4.859812	4	0	0	0	1		0
5	4.795791	5	0	0	0	0		0
6	4.905275	6	0	0	0	0		0
7	4.997212	7	0	0	0	0		0
8	4.997212	8	0	0	0	0		0
9	4.912655	9	0	0	0	0		0
10	4.779123	10	0	0	0	0		0
11	4.644391	11	0	0	0	0		0
12	4.770685	12	0	0	0	0		1
13	4.744932	13	1	0	0	0		0

...

Пробуем

```r
res.01 <- lm(log.ser.g ~ time. + month.01 + month.02 +
                 month.03 + month.04 + month.05 + month.06 +
                 month.07 + month.08 + month.09 + month.10 +
                 month.11 + month.12, ser.g.02)
summary(res.01)
```

```
Coefficients: (1 not defined because of singularities)
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.7054593  0.0194850 241.491  < 2e-16 ***
time.        0.0100688  0.0001193  84.399  < 2e-16 ***
month.01     0.0213211  0.0242461   0.879 0.380816
month.02    -0.0007338  0.0242400  -0.030 0.975897
month.03     0.1294934  0.0242344   5.343 3.92e-07 ***
month.04     0.0982245  0.0242294   4.054 8.59e-05 ***
month.05     0.0958519  0.0242250   3.957 0.000124 ***
month.06     0.2179981  0.0242212   9.000 2.25e-15 ***
month.07     0.3219404  0.0242179  13.293  < 2e-16 ***
month.08     0.3126456  0.0242153  12.911  < 2e-16 ***
month.09     0.1680110  0.0242132   6.939 1.64e-10 ***
month.10     0.0298527  0.0242118   1.233 0.219790
month.11    -0.1138650  0.0242109  -4.703 6.41e-06 ***
month.12            NA         NA      NA       NA
```

Ловушка индикаторных переменных (dummy variables trap)

или уже знакомая коллинеарность.

$$Y = b_0 + b_1 T + \sum_{i=1}^{12} c_i D_i$$

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{144} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ \dots \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

Складывая столбцы с $c_1, \dots, c_{12}$, получим столбец из одни 1, совпадающий со столбцом для b_0. **Налицо линейная зависимость!**

Решение проблемы

Будем рассматривать не $N = 12$ индикаторных переменных (по числу сезонов), а $N - 1 = 11$. Тогда коэффициенты при индикаторных переменных приобретут вид $c_i - c_1$ и будут рассматриваться как значения относительно базового месяца (например, января).

$$Y = (b_0 - c_1) + b_1 T + \sum_{i=2}^{12} (c_i - c_1) D_i$$

Берем за базу берем январь

```
res.01 <- lm(log.ser.g ~ time. +                month.02 +
                month.03 + month.04 + month.05 + month.06 +
                month.07 + month.08 + month.09 + month.10 +
                month.11 + month.12, ser.g.02)
#  Просмотр результатов
summary(res.01)
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.7267804  0.0188935 250.180  < 2e-16 ***
time.        0.0100688  0.0001193  84.399  < 2e-16 ***
month.02    -0.0220548  0.0242109  -0.911  0.36400
month.03     0.1081723  0.0242118   4.468 1.69e-05 ***
month.04     0.0769034  0.0242132   3.176  0.00186 **
month.05     0.0745308  0.0242153   3.078  0.00254 **
month.06     0.1966770  0.0242179   8.121 2.98e-13 ***
month.07     0.3006193  0.0242212  12.411  < 2e-16 ***
month.08     0.2913245  0.0242250  12.026  < 2e-16 ***
month.09     0.1466899  0.0242294   6.054 1.39e-08 ***
month.10     0.0085316  0.0242344   0.352  0.72537
month.11    -0.1351861  0.0242400  -5.577 1.34e-07 ***
month.12    -0.0213211  0.0242461  -0.879  0.38082
```

В R всё проще... Создаём независимые переменные

```
#  Время
time <- 1:144
#  Сезонные индикаторы
month <- as.factor(rep(1:12,12))
# Объединяем результаты в таблицу
ser.g.02 <- data.frame(log.ser.g, time, month)
# Убеждаемся, что сезонные индикаторы заданы фактором.
# Иначе не избежать ловушки индикаторных переменных
class(ser.g.02$month)
```

```
    log.ser.g time month
1    4.718499    1     1
2    4.770685    2     2
3    4.882802    3     3
4    4.859812    4     4
5    4.795791    5     5
6    4.905275    6     6
7    4.997212    7     7
8    4.997212    8     8
9    4.912655    9     9
10   4.779123   10    10
```

Строим линейную регрессионную модель

```r
res.01 <- lm(log.ser.g ~ ., ser.g.02)
summary(res.01)
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.7267804  0.0188935 250.180  < 2e-16 ***
time         0.0100688  0.0001193  84.399  < 2e-16 ***
month2      -0.0220548  0.0242109  -0.911  0.36400
month3       0.1081723  0.0242118   4.468 1.69e-05 ***
month4       0.0769034  0.0242132   3.176  0.00186 **
month5       0.0745308  0.0242153   3.078  0.00254 **
month6       0.1966770  0.0242179   8.121 2.98e-13 ***
month7       0.3006193  0.0242212  12.411  < 2e-16 ***
month8       0.2913245  0.0242250  12.026  < 2e-16 ***
month9       0.1466899  0.0242294   6.054 1.39e-08 ***
month10      0.0085316  0.0242344   0.352  0.72537
month11     -0.1351861  0.0242400  -5.577 1.34e-07 ***
month12     -0.0213211  0.0242461  -0.879  0.38082
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.0593 on 131 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9835,    Adjusted R-squared:  0.982
```

Подгонка для логарифма ряда

```
#  Нарисуем линии: красный - подгонка, зеленый - ряд
plot(res.01$fitted.values, type="l", col="red")
lines(ser.g.02$log.ser.g, col="green")
```

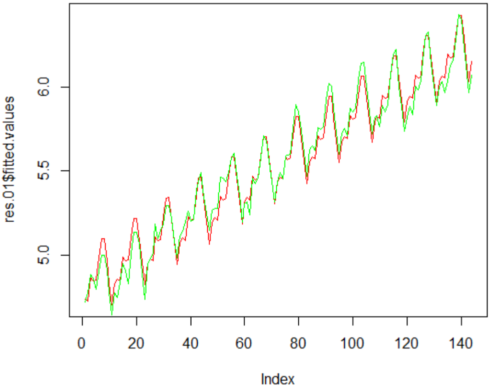
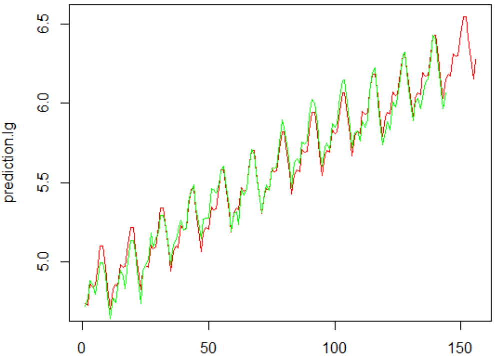


Figure 1: Вывод. Подгонка удовлетворительная. Можно надеяться на хороший прогноз

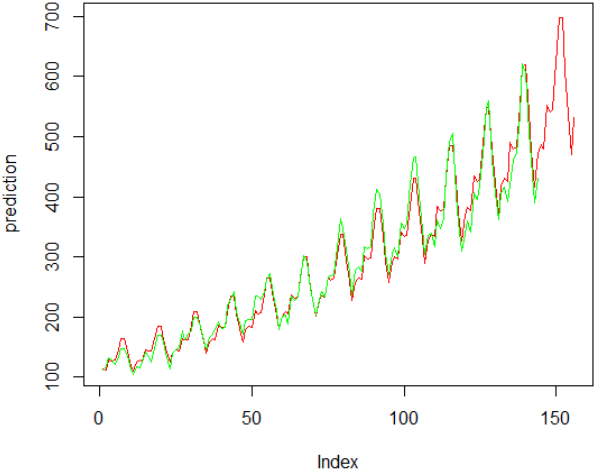
Прогнозирование логарифма ряда

```
# Создаем таблицу для новых значений
ser.g.03 <- data.frame(time=145:156, month=factor(1:12))
# Делаем прогноз при помощи модели res.01
прогноз.lg = predict.lm(res.01, ser.g.03)
# Объединяем подгонку и прогноз
prediction.lg <- c(res.01$fitted.values,прогноз.lg)
# Выводим на график
plot(prediction.lg, type="l", col="red")
lines(ser.g.02$log.ser.g, col="green")
```



Прогноз

```
# Потенцируем результат
prediction  <- exp(prediction.lg)
# Выводим результат и прогноз
plot(prediction, type="l", col="red")
lines(ser.g.01$series_g, col="green")
```



Вернемся к таблице коэффициентов

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  4.7267804  0.0188935 250.180  < 2e-16 ***
time         0.0100688  0.0001193  84.399  < 2e-16 ***
month2      -0.0220548  0.0242109  -0.911  0.36400    
month3       0.1081723  0.0242118   4.468 1.69e-05 ***
month4       0.0769034  0.0242132   3.176  0.00186 ** 
month5       0.0745308  0.0242153   3.078  0.00254 ** 
month6       0.1966770  0.0242179   8.121 2.98e-13 ***
month7       0.3006193  0.0242212  12.411  < 2e-16 ***
month8       0.2913245  0.0242250  12.026  < 2e-16 ***
month9       0.1466899  0.0242294   6.054 1.39e-08 ***
month10      0.0085316  0.0242344   0.352  0.72537    
month11     -0.1351861  0.0242400  -5.577 1.34e-07 ***
month12     -0.0213211  0.0242461  -0.879  0.38082    
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
```

Достаточно ли данных?

Эмпирическое правило: чтобы данных было достаточно (например, для качественного прогноза) на каждую переменную должно приходится 30 наблюдений.

Исходят из того, что 30 наблюдений достаточно для хорошего представления данных, распределенных по нормальному закону.

У нас 12 переменных (время плюс сезонные поправки), нам нужно 12*30=360 наблюдений, а есть всего 144.

Декабрьскую, январскую и февральскую сезонные поправки можно объединить в “зимнюю” поправку.

Объединение улучшит модель, так как на одну переменную будет приходится больше наблюдений. Теперь их нужно только 10*30=300, а не 360.

Дополнительная информация

- Multicollinearity - Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Multicollinearity) — о диагностике и лекарствах от коллинеарности (мультиколлинеарности).